

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Тема 3: Формування оптимальної структури портфеля

Методичні вказівки

Економіко-математична модель задачі обрання оптимальної структури портфеля вперше була запропонована Г. Марковіцем. Портфель — це сукупність активів, якими володіє інвестор. Управління портфелем полягає у регулюванні структури портфеля для досягнення поставлених цілей при збереженні мінімального рівня його ризику та мінімізації витрат. Одним із методів управління ризиком є диверсифікація активів.

Розглянемо задачу інвестора, який володіє капіталом W та має прийняти рішення, як використати цей капітал.

Головним припущенням Марковіца було те, що для інвестора у оцінюванні альтернативних рішень важливими є тільки два параметри кожного з них, а саме:

- 1) очікувана дохідність інвестицій $R_i = M \xi_i$, де M — математичне сподівання;
- 2) стандартне відхилення дохідності $\sigma_i = \sqrt{D\xi_i}$, де D — дисперсія.

Друге припущення - інвестор може обрати будь-яку комбінацію можливих інвестицій, розподіляючи свої кошти за різними напрямками вкладень.

Нехай x_i , $i = \overline{1, N}$, — це частка загального обсягу коштів, яка інвестується в i -й актив. Сформовану таким чином комбінацію інвестицій ми будемо називати портфелем. Інвестору необхідно обрати портфель з найкращими для нього очікуваною дохідністю R_p і стандартним відхилення σ_p .

Дохідність портфеля ξ_p визначається як приріст коштів у розрахунку на одиницю вкладень, який забезпечується обраним портфелем на момент, визначений як плановий горизонт.

$$\xi_p = \frac{W_E - W}{W},$$

де W — сьогоденний обсяг капіталу,

W_E — обсяг капіталу на кінець періоду.

Дохідність портфеля можна розрахувати як зважену за обсягами інвестицій дохідність кожного активу, що становлять портфель:

$$\xi_p = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$$

Очікувана дохідність портфеля визначається за формулою математичного очікування суми випадкових величин

$$R_p = M \xi_p = M \xi_1 x_1 + M \xi_2 x_2 + \dots + M \xi_n x_n = R_1 x_1 + R_2 x_2 + \dots + R_n x_n = \sum_{i=1}^n R_i x_i$$

Таким чином, очікувана дохідність інвестиційного портфеля — середньозважена за частками інвестицій очікувана дохідність кожного з активів, які становлять портфель. Дисперсія дохідності портфеля розраховується як дисперсія суми випадкових величин.

Модель поведінки інвестора, згідно з якою інвестиції оцінюють виключно за двома параметрами — очікуваною дохідністю і ризиком, що визначається як величина стандартного відхилення дохідності, дає змогу сформулювати єдине правило формування портфеля, яке виконують усі без винятку інвестори: незалежно від індивідуальних переваг, всі інвестори прагнуть сформувати ефективний портфель, який забезпечить мінімальний ступінь ризику для обраного рівня доходу чи максимальний очікуваний дохід при заданому ступені ризику. Цей підхід та сама задача вибору ефективного портфеля і мають назву моделі Марковіца. Її завдання — визначити структуру найменш ризикованого портфеля при визначеному рівні дохідності.

Нехай x_i — частка від суми інвестиції, яка буде використана на придбання i -го цінного папера. Тоді економіко-математична модель Марковіца має вигляд:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{i,j} x_i x_j \rightarrow \min \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_i \cdot x_i = R_p, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (3.3)$$

Цільова функція моделі (3.1) є формалізацією ризику недосягнення заданого мінімального рівня дохідності. Формула (3.2) означає, що очікувана дохідність портфеля не повинна бути меншою, ніж деяке задане інвестором значення R_p . Формула (3.3) показує вимогу рівності суми всіх часток x_i одиниці. Зауважимо, що очікувана дохідність окремого i -го активу визначається як середнє значення у вибірці даних.

Модель можна подати в матричній формі, позначивши як X вектор розподілу коштів між ризиковими активами: $X = \{x_i\}_{i=1,\dots,N}$; R — вектор дохідності активів, V — коваріаційна матриця (квадратна матриця, що складається зі значень $\sigma_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$):

$$V_p = x^T V x \rightarrow \min, \quad R^T x = R_p, \quad e^T x = 1,$$

де e — одиничний вектор: всі елементи — одиниці; індекс T означає транспонування вектора. Для моделі можна знайти рів'язок в явному вигляді:

$$x^* = V^{-1} \frac{R_p(eJ_{12} - RJ_1) + RJ_{12} - eJ_2}{J_{12}^2 - J_1J_2} \quad (3.4)$$

$$\text{де } J_1 = e^T V^{-1} e, J_2 = m^T V^{-1} m, J_{12} = e^T V^{-1} m.$$

Розглянемо розв'язання задачі формування оптимального портфеля цінних паперів на прикладі з використанням табличного процесора *Microsoft Excel*.

Умова задачі. Припустимо, інвестор має дані щодо динаміки курсу акцій п'яти різних емітентів (позначимо їх як Ak_1, Ak_2, \dots, Ak_5 відповідно) за 12 календарних періодів, які наведені в табл. 3.1. Також будемо вважати, що для інвестора задача полягає в забезпеченні середньої дохідності портфеля на рівні 6-ти одиниць.

Таблиця 3.1

Динаміка курсу акцій емітентів протягом 12-ти періодів

№ періоду	Ak_1	Ak_2	Ak_3	Ak_4	Ak_5
1	12	17	9	68	17
2	52	19	39	73	34
3	49	35	36	61	7
4	42	12	30	53	16
5	32	36	41	51	26
6	45	16	44	52	16
7	52	15	41	61	19
8	67	17	61	49	6
9	79	22	38	48	9
10	105	33	36	35	21
11	106	38	30	24	8
12	112	32	76	32	12

Завдання. Визначити оптимальну структуру портфеля, що може бути сформований з цих акцій, який би гарантував отримання середньої дохідності на заданому рівні та при цьому забезпечував би мінімізацію ризику.

Розв'язок.

Крок 1. Введення числових даних, що характеризують динаміку курсу акцій і їх оформлення у вигляді таблиці на робочому листі Microsoft Excel. Для більшої наочності представлення даних побудуємо графік (рис. 3.1).

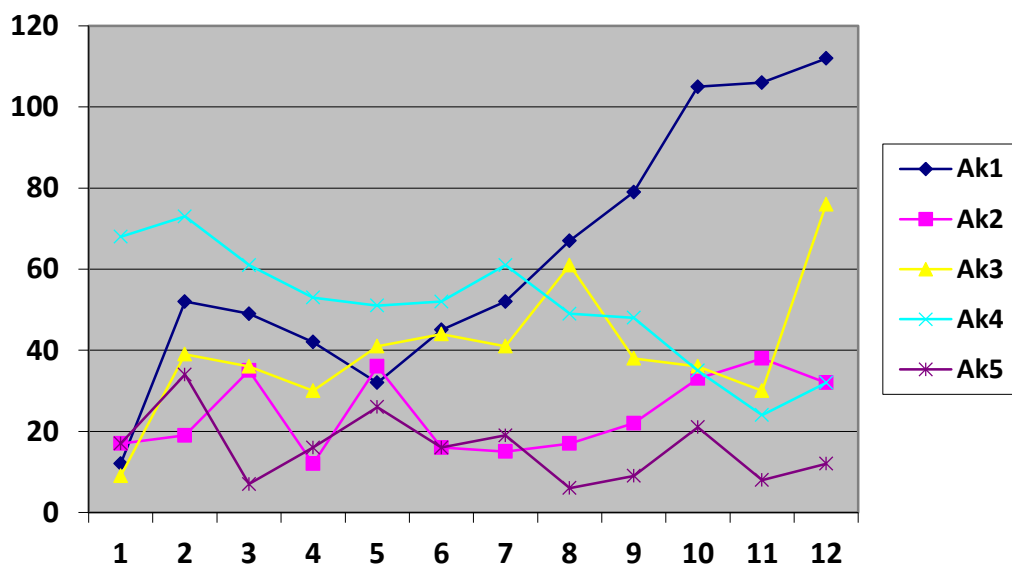


Рис. 3.1. Графік динаміки курсу акцій емітентів за періоди NN

Крок 2. Обчислення дохідності всіх акцій. Для цього спочатку слід порахувати різницю курсів акцій кожної компанії, яка виникає протягом кожного з періодів. Очевидно, що таких різниць буде на одну менше, ніж даних щодо курсу, тобто одинадцять, як показано в табл.3.2.

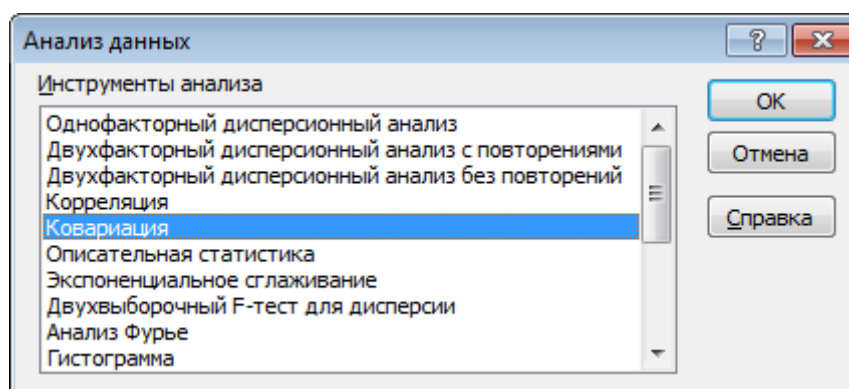
Таблиця 3.2

Динаміка дохідності акцій емітентів за періодами та середня дохідність

№ періоду	Ak_1	Ak_2	Ak_3	Ak_4	Ak_5
1	40	2	30	5	17
2	-3	16	-3	-12	-27
3	-7	-23	-6	-8	9
4	-10	24	11	-2	10
5	13	-20	3	1	-10
6	7	-1	-3	9	3
7	15	2	20	-12	-13
8	12	5	-23	-1	3
9	26	11	-2	-13	12
10	1	5	-6	-11	-13
11	6	-6	46	8	4
Середня дохідність	9,1	1,4	6,1	-3,3	-0,5

Для обчислення середніх значень дохідності доцільно скористатися стандартною функцією **=СРЗНАЧ()**, аргументом якої будуть посилання на відповідні діапазони робочого листа з обчисленими значеннями дохідності акцій.

Крок 3. Обчислення коваріаційної матриці для рядів, у яких наведено дохідність відповідних акцій. Для цього слід скористатися пунктом **Анализ данных** з меню **Сервис**. При цьому в діалоговому вікні, що з'явиться (його орієнтовний вигляд показано на рис. 3.2, слід обрати пункт **Ковариация** і натиснути кнопку **ОК**.

Рис.3.2. Діалогове вікно **Анализ данных**

Після натиснення кнопки діалогове вікно **Анализ данных** зникне, а з'явиться вікно **Ковариация**, загальний вигляд якого наведено на рис. 3.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													

	Ak_1	Ak_2	Ak_3	Ak_4	Ak_5
1	40	2	30	5	17
2	-3	16	-3	-12	-27
3	-7	-23	-6	-8	9
4	-10	24	11	-2	10
5	13	-20	3	1	-10
6	7	-1	-3	9	3
7	15	2	20	-12	-13
8	12	5	-23	-1	3
9	26	11	-2	-13	12
10	1	5	-6	-11	-13
11	6	-6	46	8	4
12	9,1	1,4	6,1	-3,3	-0,5

Рис. 3.3. Діалогове вікно **Ковариация**

Припустимо, що обчислені дані щодо дохідності акцій перебувають у діапазоні з адресою **I2:M13**, причому в першому рядку цього діапазону міститься текстова інформація про назви акцій. Тоді у віконці для редагування з підписом **Вхідний інтервал** слід задати адресу діапазону **\$I\$2:\$M\$13** (вона генерується автоматично, якщо після появи діалогового вікна виділити потрібний діапазон на робочому листі).

Опцію **Группирование** слід залишити **по столбцам** і вставити галочку в **Метки в первой строке**.

Параметри виведення результатів обчислень можна обрати з трьох варіантів:

Выходной интервал — інформація виводиться на **поточний** лист у діапазон, верхню ліву координату якого слід задати;

Новый рабочий лист — у поточній робочій книзі створюється новий робочий лист, назву якого слід задати;

Новая рабочая книга — для виведення інформації створюється нова робоча книга (її назва спочатку обирається автоматично програмою, а потім може бути змінена під час збереження).

Як показано на рис. 3.4, у нашому прикладі обрано першу опцію і визначено координату верхнього лівого кута діапазону — **\$O\$3**, що приведе до виводу результатів праворуч від діапазону даних.

Натиснувши після здійснення всіх зазначених процедур кнопку **ОК**, отримаємо результати обчислень у вигляді табл. 3.3. Числа в таблиці округлено до другого знаку після коми.

Таблиця 3.3

Результати процедури коваріаційного аналізу доходності цінних паперів

	<i>Ak1</i>	<i>Ak2</i>	<i>Ak3</i>	<i>Ak4</i>	<i>Ak5</i>
Ak1	179,0758				
Ak2	-8,78028	163,0456			
Ak3	65,99243	-11,4469	313,4091		
Ak4	18,52271	-25,0758	54,18938	58,34854	
Ak5	58,20451	-10,7653	45,62118	40,80313	151,0608

Як видно з табл. 3.3, ми отримали трикутну матрицю, на діагоналі якої лежать значення дисперсії курсів відповідних акцій, а нижче діагоналі — показники попарної коваріації відповідних акцій.

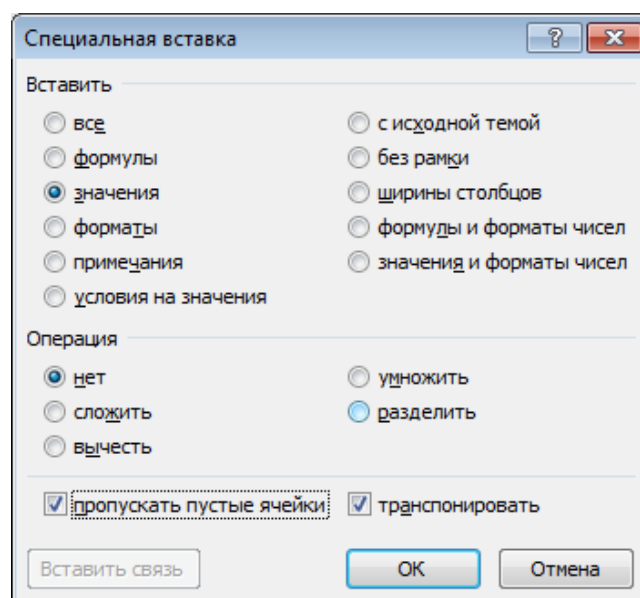


Рис. 6.4. Вигляд діалогового вікна **Специальная вставка** для прискореного формування квадратної матриці на базі трикутної

Проте, для подальшого аналізу нам треба мати квадратну матрицю, в якій елементи заповнено також над діагоналлю. Це можна зробити або "вручну", або, якщо матриця достатньо велика, скористатися іншим прийомом.

Спочатку скопіювати всю вихідну матрицю в інший діапазон. Потім відразу, не змінюючи позиції активної комірки, викликати команду **Специальная вставка** з меню **Правка**. В діалоговому вікні що з'явиться, обрати опції **Пропускати пустые ячейки** та **Транспонировать**, бажано ще **Значения**, як показано на рис. 3.4. Натиснувши кнопку **ОК**, отримаємо повну коваріаційну матрицю, вигляд якої наведено в табл. 3.4.

Отримана коваріаційна матриця необхідна для застосування будь-якого з підходів до пошуку оптимального розв'язку моделей Марковіца. Отже, висвітлені три кроки обов'язкові. Далі розглянемо один із варіантів технічних способів пошуку оптимального розв'язку моделі Марковіца

Таблиця 3.4

Коваріаційна матриця дохідності цінних паперів

	Ak1	Ak2	Ak3	Ak4	Ak5
Ak1	179,08	-8,78	65,99	18,52	58,20
Ak2	-8,78	163,05	-11,45	-25,08	-10,77
Ak3	65,99	-11,45	313,41	54,19	45,62
Ak4	18,52	-25,08	54,19	58,35	40,80
Ak5	58,20	-10,77	45,62	40,80	151,06

Виконаємо обчислення оптимального розв'язку моделі Марковіца у явному вигляді, скориставшись формулою (3.1). Для ефективнішої організації роботи скопіюємо коваріаційну матрицю на окремий робочий лист, туди також перенесемо дані про середню дохідність акцій і організуємо допоміжні дані так, як зображено на рис. 3.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Коваріаційна матриця								
2		Ak1	Ak2	Ak3	Ak4	Ak5		Дохідн.	Од. вектор
3	Ak1	179,1	-8,8	66,0	18,5	58,2		9,1	1
4	Ak2	-8,8	163,0	-11,4	-25,1	-10,8		1,3	1
5	Ak3	66,0	-11,4	313,4	54,2	45,6		6,1	1
6	Ak4	18,5	-25,1	54,2	58,3	40,8		-3,3	1
7	Ak5	58,2	-10,8	45,6	40,8	151,1		-0,5	1
8									
9	Транспоновані:								
10	Дохідність	9,1	1,3	6,1	-3,3	-0,5			
11	Одиничн. вектор	1	1	1	1	1			
12									
13	Середня дохідність портфеля					6			

Рис. 3.5. Вихідні дані для розв'язку моделі Марковіца в явній формі

Як бачимо з рис. 3.5, крім коваріаційної матриці (V) та вектора дохідності акцій (R), на робочому листі визначено середню дохідність портфеля (R_m) на рівні 6-ти одиниць, а також одиничний вектор (e), всі елементи якого дорівнюють одиниці.

Нижче під коваріаційною матрицею задано транспоновані вектор дохідності акцій (R^T) та одиничний вектор (e^T). Для того щоб визначити транспонований вектор, його можна скопіювати за допомогою спеціальної вставки, задавши опцію **Транспонувати**. Проте якщо планується надалі багато разів повертатися до процедури обчислення оптимальної структури портфеля при оновленні даних, то краще скористатися окремою функцією **ТРАНСП()**. Тоді достатньо буде оновлювати дані основного вектора дохідності, а транспонований буде змінюватися автоматично. Для того щоб коректно задати цю функцію, слід:

— виділити діапазон виводу значень транспонованого вектора (для нашого прикладу це діапазон з адресою **B10:F10**);

—викликати функцію **ТРАНСП()**. Можна це зробити абонабравши на клавіатурі знак "=" та назву функції, або (що рекомендовано для перших разів роботи) вибравши її назву зі списку стандартних (входить до складу функцій групи **Ссылки массивы**);

—задати як аргумент адресу нетранспонованого вектора(для нашого прикладу це **НЗ:Н7**);

—натиснути комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter** (першідві клавіші слід натиснути спочатку, потім вже **Enter**).

У результаті виділений діапазон має бути заповнений відповідними значеннями вихідного вектора дохідності.

Далі слід обчислити обернену до матриці коваріації матрицю (V^{-1}). Це робиться з використанням функції **МОБР()**, яка подібна до функції **ТРАНСП()**. З цією метою:

— виділяється діапазон виводу значень транспонованої матриці (для нашого прикладу це 5×5 , його адреса **В15:F19**);

— викликається функція **МОБР()** (належить до групи **Математические**);

— задається як аргумент адреса коваріаційної матриці (для нашого прикладу це **В3:F7**);

— натискається комбінація клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

У результаті комірки виділеного діапазону заповнюються обчисленими елементами оберненої матриці.

Наступним кроком буде обчислення добутків транспонованих одиничного вектора (e^T) та вектора дохідності (R^T) на обернену матрицю (V^{-1}). Для цього можна скористатися функцією множення матриць **МУМНОЖ()**, яка теж належить до групи **Математические**.

Процедура застосування подібна до попередніх, а аргументи:

— при обчисленні ($e^T V^{-1}$) перший діапазон — посилання на транспонований вектор **В11:F11**, другий діапазон — посилання на обернену матрицю (для нашого прикладу це **В15:F19**);

— при обчисленні ($R^T V^{-1}$) перший діапазон — посилання на транспонований вектор **В10:F10**, другий діапазон — посилання на обернену матрицю (для нашого прикладу це **В15:F19**).

У результаті отримаємо такі два вектори:

$e^T V^{-1}$	0,00413	0,00946	-0,00093	0,02044	0,00047
$R^T V^{-1}$	0,05312	-0,00217	0,02527	-0,09339	-0,00634

Після цього обчислюють значення J_1, J_2 з формули (3.4). Для цього можна використовувати як функцію **МУМНОЖ()**, так і **СУММПРОИЗВ()**.

При цьому J_1 буде сумою добутків елементів вектора $e^T V^{-1}$ (значення якого наведені в таблиці вище) та одиничного вектора e , тобто сумою елементів вектора $e^T V^{-1}$

$$J_1 = e^T V^{-1} e = 0,00413 + \dots + 0,00047 \cong 0,03356.$$

Відповідно J_2 буде сумою добутків елементів вектора $R^T V^{-1}$ (значення наведено в таблиці вище) та вектора дохідності R .

$$J_2 = R^T V^{-1} = 0,05312 \cdot 9,1 + \dots + (-0,00634) \cdot (-0,5) \cong 0,946037.$$

Тоді J_{12} буде сумою добутків елементів вектора $R^T V^{-1}$ та вектора дохідності R

$$J_{12} = e^T V^{-1} R = 0,00413 \cdot 9,1 + \dots + 0,00047 \cdot (-0,5) \cong -0,02351.$$

Тепер можна обчислити знаменник формули (3.19). Маємо:

$$J_{12}^2 - J_1 J_2 = (-0,02351)^2 - 0,03356 \cdot 0,946037 \cong -0,03120.$$

Чисельник формули (3.19) обчислюється дещо складніше. По-перше, це буде не одне число, а вектор, який для нашого прикладу охоплює 5 елементів. Покажемо для прикладу визначення першого елемента цього вектора.

$$R_p (eJ_{12} - RJ_1) + RJ_{12} - eJ_2 = 6 \cdot (1 \cdot (-0,02351) - 9,1 \cdot 0,03356) + 9,1 \cdot (-0,02351) - 1 \cdot 0,946037 \cong -2,16391$$

Для інших елементів вектора чисельника формули (3.4) будуть змінюватися лише значення дохідності акцій (R), тобто замість числа 9,1, що відповідає дохідності першої акції, слід підставляти інші значення. Для розрахунку на робочому листі в умовах нашої задачі можна скористатися такою формулою: $=\$E\$13*(I3*J\$14-H3*H\$14)+H3*J\$14-I3*I\14 , задавши її в комірку з адресою H16, а потім скопіювавши нижче в інші чотири комірки (рис. 3.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Коваріаційна матриця											
2		Ak1	Ak2	Ak3	Ak4	Ak5		Доходн.	Од. вектор			
3	Ak1	179,1	-8,8	66,0	18,5	58,2		9,1	1			
4	Ak2	-8,8	163,0	-11,4	-25,1	-10,8		1,3	1			
5	Ak3	66,0	-11,4	313,4	54,2	45,6		6,1	1			
6	Ak4	18,5	-25,1	54,2	58,3	40,8		-3,3	1			
7	Ak5	58,2	-10,8	45,6	40,8	151,1		-0,5	1			
8												
9	Транспоновані:							eV				
10	Доходність	9,1	1,3	6,1	-3,3	-0,5		0,00413	0,00946	-0,00093	0,02044	0,00047
11	Одиничн. вектор	1	1	1	1	1		RV				
12								0,05312	-0,00217	0,02527	-0,09339	-0,00634
13	Середня дохідність портфеля					6		J1	J2	J12		
14								0,03356	0,946037	-0,02351		
15	Обернена	0,006745	0,000237	-0,00119	0,000765	-0,00243		Чисельн.	Знамен.	Відношен.		Розв'язок
16	матриця	0,000237	0,006613	-0,00033	0,003375	-0,00043		-2,16391	-0,03120	69,3650		0,398
17		-0,00119	-0,00033	0,004031	-0,00365	0,000204		-0,4099		13,1396		0,020
18		0,000765	0,003375	-0,00365	0,025893	-0,00595		-1,48929		47,7399		0,179
19		-0,00243	-0,00043	0,000204	-0,00595	0,00907		-0,624513		20,0190		0,596
20								-0,00513		0,1645		-0,044

Рис. 3.6. Загальний вигляд числового роз'язку моделі Марковіца

Проаналізуємо отриманий розв'язок. В оптимальному портфелі перші чотири акції представлені додатними частками, а акція п'ятого типу — від'ємною. Спершу виникне думка, що це помилка, адже як інакше можна інтерпретувати від'ємну частку активу? Варто заспокоїтись: принципової помилки в такому результаті немає, оскільки як зазначалося в припущеннях портфельної теорії, допускається короткий продаж активів.

Отриманий результат — ілюстрація використання короткого продажу. Нове завдання полягає у втіленні на практиці реалізації короткого продажу. Це означає, що інвестор повинен позичити акції, в нашому випадку, п'ятого типу в обсязі 4,4 % від загального обсягу свого капіталу і продати їх, а отримані кошти вкласти в акції інших типів.

Втім, попри існування теоретичної інтерпретації такого результату, на практиці реалізація короткого продажу, особливо в умовах фондового ринку

України, може бути досить проблематичною. Тому можна уникнути необхідності застосування такої операції, а для нашого прикладу це навіть нескладно.

Отже, припустимо, що інвестор задоволений рівнем доходності в 5 одиниць замість 6-ти, які були раніше. Змінимо лише одне число в комірці з координатою **E13**, задавши нове значення середньої доходності портфеля, тобто 5. Програма одразу будує нову структуру портфеля, всі обчислення здійснюються автоматично (рис. 3.7).

9	Транспоновані:						eV					
10	Доходність	9,1	1,3	6,1	-3,3	-0,5	0,00413	0,00946	-0,00093	0,02044	0,00047	
11	Одиничн. вектор	1	1	1	1	1	RV					
12							0,05312	-0,00217	0,02527	-0,09339	-0,00634	
13	Середня доходність портфеля				5		J1	J2	J12			
14							0,03356	0,946037	-0,02351			
15	Обернена	0,006745	0,000237	-0,00119	0,000765	-0,00243	Чисельн.	Знамен.	Відношен.		Розв'язок	
16	матриця	0,000237	0,006613	-0,00033	0,003375	-0,00043	-1,835	-0,03120	58,8217		0,338	
17		-0,00119	-0,00033	0,004031	-0,00365	0,000204	-0,34276		10,9873		0,015	
18		0,000765	0,003375	-0,00365	0,025893	-0,00595	-1,26106		40,4239		0,152	
19		-0,00243	-0,00043	0,000204	-0,00595	0,00907	-0,537279		-17,2227		0,511	
20							-0,001602		-0,0514		0,037	

Рис. 3.7. Загальний вигляд числового роз'язку моделі Марковіца для доходності портфеля в 5 одиниць

Підсумовуючи, слід сказати, що не варто покладатися тільки на результати технічного аналізу, слід також ретельно аналізувати стан кожного конкретного емітента, цінні папери якого розглядаються як потенційний об'єкт інвестування. Для цього необхідно вивчати всі доступні дані щодо фінансового стану та перспектив розвитку бізнесу компаній, цінні папери яких перебувають на фондовому ринку.

Розглянемо альтернативний підхід до розв'язку задачі Марковіца. Він простіший для користувача, оскільки схема організації обчислень компактніша порівняно з першим варіантом. Крім того, однією з основних її переваг є те, що він дає змогу або отримати оптимальну структуру портфеля для будь-якого допустимого значення очікуваної доходності портфеля без застосування короткого продажу, або переконатися, що такого розв'язку не існує.

Організуємо вихідні дані для розв'язку задачі Марковіца з використанням інструментарію *Пошук рішення* у формі, зображеній на рис. 3.8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Коваріаційна матриця								
2		Ak1	Ak2	Ak3	Ak4	Ak5		Змінні (X)	Доходність R
3	Ak1	179,1	-8,8	66,0	18,5	58,2		0,1	9,1
4	Ak2	-8,8	163,0	-11,4	-25,1	-10,8		0,1	1,3
5	Ak3	66,0	-11,4	313,4	54,2	45,6		0,1	6,1
6	Ak4	18,5	-25,1	54,2	58,3	40,8		0,1	-3,3
7	Ak5	58,2	-10,8	45,6	40,8	151,1		0,1	-0,5
8									
9	Транспон. змін.	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1			
10									
11	Очікувана доходність портфеля				6				

Рис. 3.8. Вихідні дані для розв'язку задачі Марковіца за другим варіантом

Як видно на ілюстрації, цього разу нам теж потрібні коваріаційна матриця (V), вектор дохідності акцій (R), задана бажана дохідність оптимального портфеля цінних паперів (R_p). Крім того, слід визначити блок змінних (X), що перебуває в діапазоні комірок з координатами H3:H7, а також транспонований вектор змінних (X^T), що перебуває в діапазоні комірок з адресою B9:F9. Для виконання операції транспонування необхідно скористатися функцією =ТРАНСП(), задавши як аргумент адресу вектора змінних H3:H7. Детальніше опис порядку використання цієї функції наведено під час розгляду першого варіанта розв'язку задачі Марковіца при розгляді процедури транспонування вектора дохідності активів. Діапазон змінних на початку заповнено стартовими значеннями 0,1, хоча ці числа можуть бути довільними.

Далі на робочому листі слід задати формулу цільової функції задачі, яка має вигляд $X^T V X \rightarrow \min$. Отже, спочатку помножимо транспонований вектор змінних (X^T) на коваріаційну матрицю (V). Для цього:

- виділимо діапазон комірок B13:F13;
- застосуємо функцію =МУМНОЖ() і задамо їй як перший аргумент адресу транспонованого вектора змінних (B9:F9), як другий – адресу коваріаційної матриці (B3:F7);
- натиснемо комбінацію клавіш *Ctrl+Shift+Enter*.

У результаті виділений діапазон комірок повинен заповнитися обчисленими значеннями (рис. 3.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Коваріаційна матриця								
2		Ak1	Ak2	Ak3	Ak4	Ak5		Змінні (X)	Дохідність R
3	Ak1	179,1	-8,8	66,0	18,5	58,2		0,1	9,1
4	Ak2	-8,8	163,0	-11,4	-25,1	-10,8		0,1	1,3
5	Ak3	66,0	-11,4	313,4	54,2	45,6		0,1	6,1
6	Ak4	18,5	-25,1	54,2	58,3	40,8		0,1	-3,3
7	Ak5	58,2	-10,8	45,6	40,8	151,1		0,1	-0,5
8									
9	Транспон. змін.	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1		Обмеж1	Обмеж2
10								0,5	1,27
11	Очікувана дохідність портфеля				6				
12								Цільова функція	
13	$X^T V$	31,30	10,70	46,78	14,68	28,49		13,194697	

Рис. 3.9. Структура моделі Марковіца на робочому листі, що необхідна для використання інструментарію *Пошук рішень*

Після цього помножимо отриманий у діапазоні комірок B13:F13 вектор ($X^T V$) на вектор змінних (X). Для цього теж можна використовувати функцію =МУМНОЖ(). Якщо адреса комірки, в якій буде міститися цільова функція,

H13, то для виконання обчислення слід задати формулу
=МУМНОЖ(B13:F13;H3:H7).

Також слід задати формули для обмежень моделі. Перше з них є сумою всіх змінних (X), друге – сума добутків всіх змінних та відповідних дохідностей. Для зручності слід відразу відняти від цього значення очікувану дохідність портфеля. Друге обмеження на робочому листі можна задати формулою =СУММПРОИЗВ (I3:I7;H3:H7)-E11, розмістивши її в комірці з адресою I10. Результат виконання зазначених операцій зображено на рис. 3.9.

Підготувавши всю необхідну інформацію на робочому листі, можна викликати діалогове вікно *Пошук рішення*.

У діалоговому вікні, що з'явиться, слід задати адресу формули цільової функції (\$H\$13), напрям оптимізації (*минимальному значению*) , діапазон змінних (діапазон комірок з адресами \$H\$3:\$H\$7), а також формули двох обмежень. Для першого з них, формула якого визначена в комірці \$H\$10, варто обрати тип обмеження « \leq » і в правій частині зазначити «1». Для другого тип обмеження залишиться таким самим, проте в правій частині слід вписати «0».

У результаті вигляд діалогового вікна *Пошук рішення* буде таким, як показано на рис. 3.10.

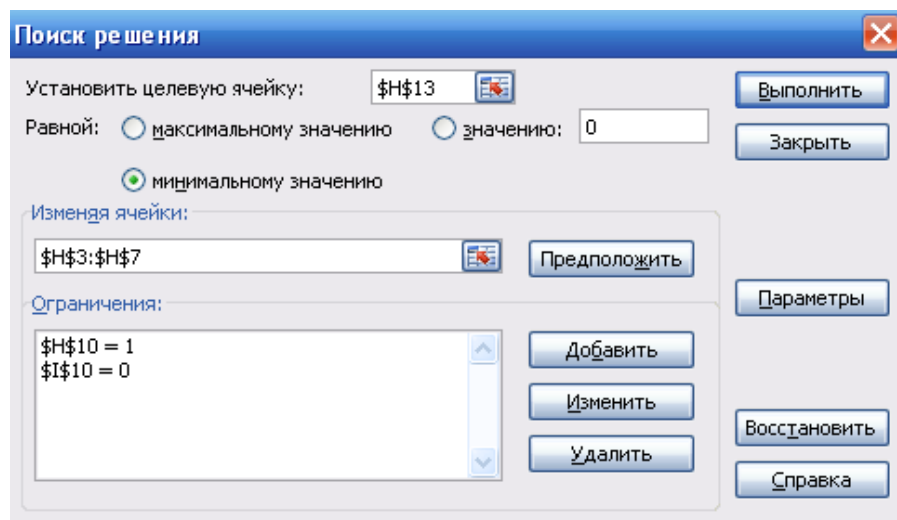


Рис. 3.10. Вигляд діалогового вікна *Пошук рішення* для задачі Марковіца

Коли модель повністю задана, достатньо натиснути кнопку *Выполнить*, і, якщо не було допущено помилок, програма видасть повідомлення, що розв'язок знайдено. Далі натиснути ОК і перейти до аналізу отриманих результатів (рис. 3.11).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Коваріаційна матриця								
2		$Ak1$	$Ak2$	$Ak3$	$Ak4$	$Ak5$		Змінні (X)	Доходність R
3	Ak1	179,1	-8,8	66,0	18,5	58,2		0,1652	9,1
4	Ak2	-8,8	163,0	-11,4	-25,1	-10,8		0,2854	1,3
5	Ak3	66,0	-11,4	313,4	54,2	45,6		-0,0093	6,1
6	Ak4	18,5	-25,1	54,2	58,3	40,8		0,5494	-3,3
7	Ak5	58,2	-10,8	45,6	40,8	151,1		0,0094	-0,5
8									
9	Транспон. змін.	0,16519	0,28536	-0,0093	0,54938	0,00935		Обмеж1	Обмеж2
10								1,0	0,00
11	Очікувана доходність портфеля				6				
12								Цільова функція	
13	$X^T V$	37,18	31,31	34,92	27,84	29,95		30,325621	

Рис. 3.11. Результати розв'язку моделі Марковіца

ЗАВДАННЯ

Тема: *Формування оптимальної структури портфеля*

За даними таблиці 1 (n-порядковий номер в списку групи), динаміки курсу акцій емітентів протягом 12-ти періодів визначити оптимальну структуру портфеля, що може бути сформований з цих акцій, який би гарантував отримання середньої дохідності на заданому рівні та при цьому забезпечував би мінімізацію ризику за наступним алгоритмом.

1. Сформувати матрицю динаміки курсу акцій емітентів за 12-місяців.
2. Побудувати графік динаміки курсу акцій емітентів .
3. Обчислити динаміку дохідності акцій емітентів за періодами та середню дохідність.
4. Обчислити коваріаційну матрицю для рядів, у яких наведено дохідність відповідних акцій.
5. Сформувати коваріаційну матрицю дохідності цінних паперів.
6. Побудувати модель Марковіца в явній формі.
7. Знайти числовий роз'язок моделі Марковіца.
8. Зробити висновки.

<i>№ періоду</i>	A_{k_1}	A_{k_2}	A_{k_3}	A_{k_4}	A_{k_5}
1	12+n	17+n	9+n	68+n	17+n
2	52+n	19+n	39+n	73+n	34+n
3	49+n	35+n	36+n	61+n	7+n
4	42+n	12+n	30+n	53+n	16+n
5	32+n	36+n	41+n	51+n	26+n
6	45+n	16+n	44+n	52+n	16+n
7	52+n	15+n	41+n	61+n	19+n
8	67+n	17+n	61+n	49+n	6+n
9	79+n	22+n	38+n	48+n	9+n
10	105+n	33+n	36+n	35+n	21+n
11	106+n	38+n	30+n	24+n	8+n
12	112+n	32+n	76+n	32+n	12+n