

## Module 3 : Inversion de matrices

### Unité 1. Définition

On ne définira l'inverse d'une matrice  $A$  que si  $A$  est carrée.

**On appelle inverse de la matrice carrée  $A$  toute matrice  $B$  telle que  $AB=BA=I$  ( $I$  matrice identité).**

La matrice  $B$  est alors notée :  $B = A^{-1}$

*Remarque : une matrice et l'inverse de cette matrice ont nécessairement les mêmes dimensions (pour que la condition de dimension soit satisfaite et qu'on puisse calculer les produits  $AB$  et  $BA$ ).*

Propriétés :

- Deux matrices  $B_1$  et  $B_2$  inverses de la même matrice  $A$  sont égales.
- Il suffit qu'une matrice  $B$  vérifie l'une des relations  $AB = I$  et  $BA = I$  pour qu'elle vérifie l'autre.
- Si deux matrices  $A$  et  $B$  sont inversibles, leur produit est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses effectué dans l'ordre inverse.  $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- L'inverse de la transposée d'une matrice  $A$  est égale à la transposée de l'inverse :  $[A']^{-1} = [A^{-1}]'$
- Déterminant de l'inverse d'une matrice :  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Une matrice carrée n'admettant pas d'inverse est dite **singulière**. Une matrice carrée admettant une inverse est dite inversible ou régulière.

### 2. Adjointe d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

On appelle matrice des cofacteurs la matrice  $A$  dans laquelle on remplace chaque élément par son cofacteur. On la note  $\tilde{A}$ .

La matrice adjointe est la matrice des cofacteurs transposée. Elle a aussi  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

On la note :  $\tilde{A}'$

- Exemple 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice des cofacteurs : } \rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} 24 & 28 & -20 \\ -18 & -29 & 15 \\ -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Transposée de la matrice des cofacteurs} \Rightarrow \tilde{A}' = \begin{bmatrix} 24 & -18 & -4 \\ 28 & -29 & 6 \\ -20 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que l'on peut calculer l'adjointe en prenant les cofacteurs de la matrice transposée :

$$\text{Matrice A : } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{Transposée de A : } \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofacteurs de la transposée de A : } \rightarrow \tilde{A}' = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad \tilde{A}' = \begin{bmatrix} 24 & -18 & -4 \\ 28 & -29 & 6 \\ -20 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, On peut procéder de la façon suivante : on transpose la matrice A, puis on remplace chaque élément par son cofacteur. La matrice obtenue est dite matrice adjointe de la matrice A ; elle a aussi n lignes et n colonnes.

- Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque : l'égalité suivante est vérifiée :  $A \cdot \tilde{A}' = |A| \cdot I_n$  ( $I_n$  matrice identité).

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{A}' = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{Cf Exemple 2})$$

$$A \cdot \tilde{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7 \cdot I_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 6 - 2(8 - 6) + 3(6 - 9)$$

$$= 6 - 4 - 9 = -7$$

$$\Rightarrow A\tilde{A}' = |A| \cdot I_3$$

### 3. Inversion d'une matrice régulière par la méthode de l'adjointe

Soit A une matrice carrée régulière.

Soit  $\tilde{A}'$  sa matrice adjointe.

On sait que  $A\tilde{A}' = |A| \cdot I_n$   $|A| \neq 0$

Posons:  $B = \frac{\tilde{A}'}{|A|}$ , alors  $AB = A \frac{\tilde{A}'}{|A|} = \frac{|A|I_n}{|A|} = I_n$

B est donc l'inverse de A et on note :  $B = A^{-1}$

$$\text{Donc } A^{-1} = \frac{\tilde{A}'}{|A|} = \frac{\text{adjointe de A}}{\text{déterminant de A}}$$

Exemples :

- Exemple 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} -7 & +6 & -1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ = -7 + 2 + 3 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}'}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- Exemple 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = 2(1) - 3(-7) + (-5) = 18$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

### Exemple concret de comptabilité analytique

Dans une entreprise, certains services travaillent directement pour la production, tandis que d'autres travaillent au profit des autres services, sans contribuer eux-mêmes directement à la production. Il est cependant utile de pouvoir analyser les coûts (directs et indirects) de production.

Soit une entreprise comportant deux départements de production A et B, et trois départements de services intérieurs S1, S2 et S3. On connaît le coût direct de chaque département.

Département	A	B	S1	S2	S3
Coût (milliers d'€)	2000	1500	400	300	600

On estime que l'activité des services intérieurs est faite au profit des différents départements selon la répartition suivante :

Au profit de % d'activité de	A	B	S1	S2	S3	Total
S1	30	25	5	20	20	100
S2	40	20	10	15	15	100
S3	50	20	5	15	10	100

1°) Exprimer le coût total des départements de services sous forme matricielle.

Le coût total des départements de services comporte leur coût direct et la fraction du coût des services consommés, soit respectivement :

Pour S1 :  $x_1 = 400 + 0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,05x_3$

Pour S2 :  $x_2 = 300 + 0,20x_1 + 0,15x_2 + 0,15x_3$

Pour S3 :  $x_3 = 600 + 0,20x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3$

Soit matriciellement :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,1 & 0,05 \\ 0,2 & 0,15 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{équation : } X_{(3,1)} = D_{(3,1)} + M_{(3,3)} X_{(3,1)}$$

2°) Résoudre l'équation

$$a) \Leftrightarrow X - MX = D \Leftrightarrow (I - M)X = D$$

$$\Leftrightarrow X = (I - M)^{-1}D$$

ou

$$b) MX - X = -D \Leftrightarrow (M - I)X = -D$$

$$\Leftrightarrow (M - I)^{-1}(M - I)X = -(M - I)^{-1}D$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X = -(M - I)^{-1}D} \text{ (M-I) doit être inversible}$$

Le calcul de  $(M - I)^{-1}$  peut être fait une fois pour toutes tant que restent fixes les proportions que les services consacrent aux différents départements, une simple multiplication matricielle permettant de s'adapter aux variations de D.

$$(M - I) = \begin{bmatrix} -0,95 & 0,1 & 0,05 \\ 0,2 & -0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & -0,9 \end{bmatrix}$$

$$(M - I)' = \begin{bmatrix} -0,95 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,85 & 0,15 \\ 0,05 & 0,15 & -0,9 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{(M - I)'} = \begin{bmatrix} 0,7425 & +0,0975 & 0,0575 \\ +0,21 & 0,845 & +0,1525 \\ 0,2 & +0,1625 & 0,7875 \end{bmatrix}$$

$$\det(M - I) = |M - I| = -0,95 \begin{vmatrix} -0,85 & 0,15 \\ 0,15 & -0,9 \end{vmatrix} - 0,1 \begin{vmatrix} 0,2 & 0,15 \\ 0,2 & -0,9 \end{vmatrix} + 0,05 \begin{vmatrix} 0,2 & -0,85 \\ 0,2 & 0,15 \end{vmatrix}$$

$$= -0,95(0,7425) - 0,1(-0,21) + 0,05(0,2) = -0,674375$$

$$(M - I)^{-1} = \frac{\widetilde{(M - I)'}}{|M - I|} = \begin{bmatrix} -1,10 & -0,14 & -0,09 \\ -0,31 & -1,25 & -0,23 \\ -0,30 & -0,24 & -1,17 \end{bmatrix}$$

$$X = -(M - I)^{-1}D$$

$$X_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 536 \\ 637 \\ 894 \end{bmatrix}$$

Ainsi, le coût total du Service S1 est de 536, celui du service S2 est de 637 et celui de S3 de 894