Les triangles

<u>Définition :</u>Un triangle est un polygone à 3 côtés.

I) Les propriétés des triangles

a) Inégalité triangulaire

Dans un triangle, **la longueur d'un côté** est toujours **inférieure** à **la somme des longueurs des deux autres côtés**.
Lorsqu'il y a égalité, les trois points sont alignés.

<u>Remarque</u> : Pour vérifier si on peut construire un triangle, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Peut-on construire un triangle ABC t q:
AB = 7cm   BC = 3,5 cm   AC = 2,5 cm

non car AB > BC + AC
([AB] est le plus grand côté)

Peut-on construire un triangle IJK t q :
IJ = 4,5 cm   JK = 3,5 cm   IK = 7 cm

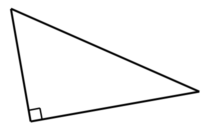
oui car IK < IJ + JK
([IK] est le plus grand côté)

Peut-on construire un triangle DEF t q :
DE = 4,5 cm   EF = 3,5 cm   DF = 8 cm

DF = DE+ EF
(D, E et F sont alignés : triangle aplati)

b) Les triangles particuliers

<u>1) le triangle rectangle</u>



Définition : Un triangle rectangle est un triangle qui à 2 côtés perpendiculaires

Si un triangle est rectangle **alors** il a 2 côtés perpendiculaires

<u>Je sais que :</u>
ABC rectangle en A

<u>Donc :</u>
$\widehat{BAC} = 90°$

Si un triangle a 2 côtés perpendiculaires **alors** c'est un triangle rectangle

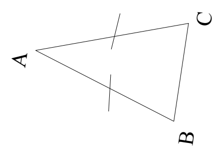
<u>Je sais que :</u>
$\widehat{BAC} = 90°$

<u>Donc :</u>
ABC rectangle en A

> <u>Méthode :</u>
> Pour justifier (ou démontrer) qu'un triangle est rectangle, il suffit de justifier (ou prouver) qu'il a 1 angle de 90°

<u>2) le triangle isocèle</u>

Définition : Un triangle isocèle est un triangle qui possède 2 côtés de même longueur



Si un triangle est isocèle **alors** il a deux côtés de même longueur

<u>je sais que :</u>
ABC isocèle en A

<u>Donc :</u>
AB = AC

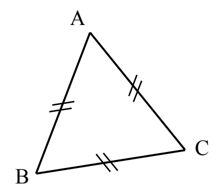
Si un triangle a deux côtés de même longueur **alors** il est isocèle

<u>je sais que :</u>
AB = AC

<u>Donc :</u>
ABC isocèle en A

> <u>Méthode :</u>
> Pour justifier (ou démontrer) qu'un triangle est isocèle, il suffit de justifier (ou prouver) qu'il a 2 côtés de même longueur

<u>3) Le triangle équilatéral</u>



Définition : Un triangle équilatéral est un triangle qui possède 3 côtés de même longueur

Si un triangle est équilatéral **alors** il à trois côtés de même longueur

<u>je sais que :</u>
ABC équilatéral

<u>Donc :</u>
AB = AC = BC

Si un triangle a trois côtés de même longueur **alors** il est équilatéral

<u>je sais que :</u>
AB = AC = BC

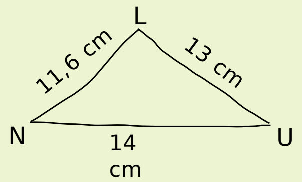
<u>Donc :</u>
ABC équilatéral

> <u>Méthode :</u>
> Pour justifier (ou démontrer) qu'un triangle est équilatéral, il suffit de justifier (ou prouver) qu'il a 3 côtés de même longueur

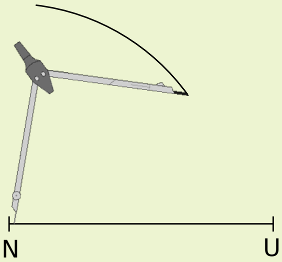
II) Construire un triangle connaissant :

a) les longueurs des côtés

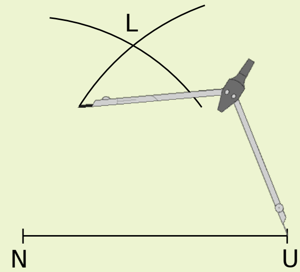
Exemple : Construis le triangle LUN tel que NU = 14 cm ; UL = 13 cm et LN = 11,6 cm.



On vérifie que le triangle est constructible puis on effectue une figure à main levée.



On construit un segment [NU] de 14 cm de longueur. On trace un arc de cercle de centre N et de 11,6 cm de rayon.



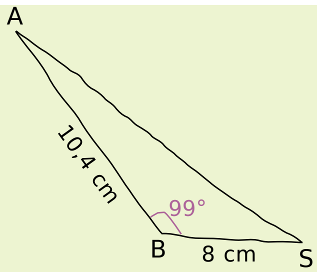
On trace un arc de cercle de centre U et de 13 cm de rayon. L'intersection des deux arcs est le point L.

À toi de jouer

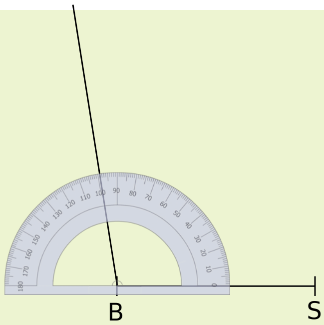
- Construis le triangle DUO tel que DU = 7,3 cm ; UO = 6,2 cm et OD = 12 cm.
- Construis le triangle UNO isocèle en U avec UN = 8 cm et NO = 3,6 cm.

b) Un angle et les longueurs de ses côtés adjacents

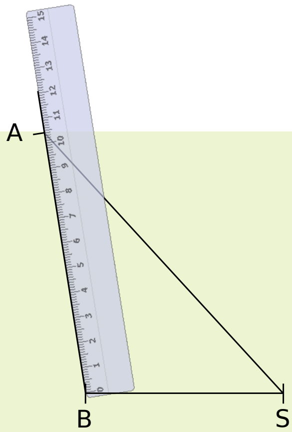
Exemple : Construis un triangle BAS tel que AB = 10,4 cm ; BS = 8 cm et $\widehat{ABS}$= 99°.



On effectue une figure à main levée en respectant la nature des angles (aigu ou obtus).



On construit un segment [SB] de 8 cm de longueur. On trace un angle mesurant 99° de sommet B et de côté [BS).



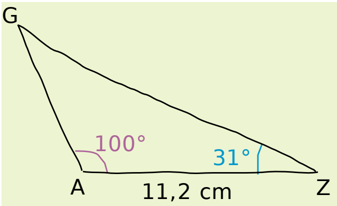
On place le point A sur le côté de l'angle à 10,4 cm du point B.

À toi de jouer

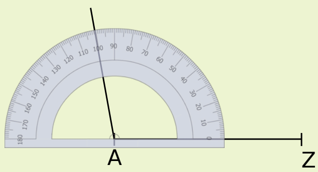
- Construis un triangle LET tel que $\widehat{ETL}$= 55° ; ET = 5 cm et TL = 4,3 cm.
- Construis un triangle SEL tel que SL = 4,4 cm ; $\widehat{SLE}$= 124° et LE = 6,9 cm.

c) Deux angles et la longueur de leur côté commun

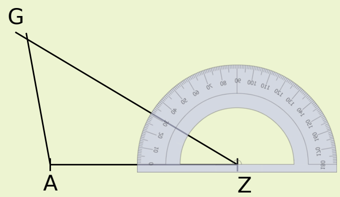
Exemple : Construis le triangle GAZ tel que AZ = 11,2 cm ; $\widehat{GAZ}$= 100° et $\widehat{AZG}$= 31°.



On effectue une figure à main levée en respectant la nature des angles (aigu ou obtus).



On trace un segment [AZ] de longueur 11,2 cm. On construit un angle de sommet A, de côté [AZ) et mesurant 100°.



On construit un angle de sommet Z, de côté [ZA) et mesurant 31°. Les côtés des deux angles se coupent au point G.

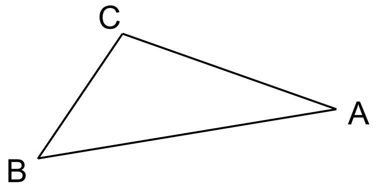
À toi de jouer

- Construis le triangle SUD tel que UD = 6 cm ; $\widehat{SUD}$= 65° ; $\widehat{SDU}$= 36°.
- Construis le triangle EST tel que ET = 4,6 cm ; $\widehat{SET}$=93° et $\widehat{ETS}$= 34°.

III) Triangles et angles

a) Propriété fondamentale des triangles (à démontrer)

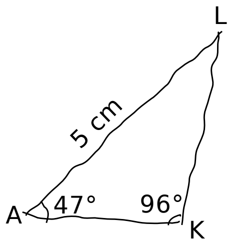
Dans un triangle, la somme des trois angles vaut 180°



$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$$

exemple : <u>Comment calculer un angle quand on connaît les 2 autres ?</u>

Dans le triangle ci-dessous, dessiné à main levée, combien mesure l'angle $\widehat{ALK}$?



<u>je sais que :</u>Dans un triangle la somme des angles mesure 180°

<u>Donc :</u> $\widehat{ALK} + \widehat{LAK} + \widehat{AKL} = 180°$

$\widehat{ALK} = 180° - (\widehat{LAK} + \widehat{AKL})$

$\widehat{ALK} = 180° - (96° + 47°)$

$\widehat{ALK} = 180° - 143°$

$\widehat{ALK} = 37°$

b) Le triangle isocèle

<u>1) propriétés:</u>

Si un triangle est isocèle **alors** il a deux angles de même mesure

Si un triangle a deux angles de même mesure **alors** il est isocèle

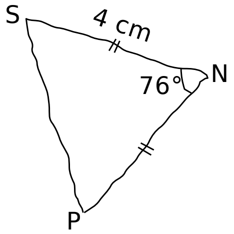
<u>Méthode :</u>
Pour justifier (ou démontrer) qu'un triangle est isocèle, il suffit de justifier (ou prouver) qu'il a 2 angles de même mesure

<u>2) Calculs d'angles</u>

<u>Comment calculer les angles à la base quand on connaît l'angle au sommet principal?</u>

Dans le triangle ci-dessous, dessiné à main levée, combien mesure les angles $\widehat{PSN}$ et $\widehat{NPS}$?

◦ <u>méthode détaillée :</u>



<u>je sais que :</u>Dans un triangle la somme des angles mesure 180°

<u>Donc :</u> $\widehat{NSP} + \widehat{NPS} + \widehat{SNP} = 180°$

$\widehat{NSP} + \widehat{NPS} = 180° - \widehat{SNP}$

$\widehat{NSP} + \widehat{NPS} = 180° - 76°$

$\widehat{NSP} + \widehat{NPS} = 104°$

De plus : $\widehat{NSP} = \widehat{NPS}$ car NSP est isocèle en N

D'où : $\widehat{NSP} = \widehat{NPS} = \dfrac{104°}{2} = 52°$

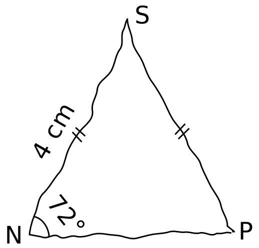
◦ <u>méthode rapide :</u> On peut retenir la formule suivante :

Si un triangle est isocèle alors **mesure (angle à la base) =** $\mathbf{\dfrac{180° - mesure(sommet\ principal)}{2}}$

NSP est un triangle isocèle en N donc : $\widehat{NSP} = \widehat{NPS} = \dfrac{180° - \widehat{SNP}}{2}$

$$\widehat{NSP} = \widehat{NPS} = \frac{180° - 76°}{2} = 52°$$

Comment calculer l'angle au sommet principal quand on connaît les angles à la base?



- Je sais que SNP est isocèle en S donc $\widehat{SNP} = \widehat{NPS} = 72°$
- je sais que :Dans un triangle la somme des angles mesure 180°

Donc : $\widehat{NSP} + \widehat{NPS} + \widehat{SNP} = 180°$

$\widehat{NSP} = 180° - (\widehat{NPS} + \widehat{SNP})$
$\widehat{NSP} = 180° - (72° + 72°)$
$\widehat{NSP} = 180° - 144°$
$\widehat{NSP} = 36°$

c) Le triangle équilatéral

propriété 1:

Si un triangle est équilatéral **alors** il a trois angles de même mesure (=60°).

Si un triangle a trois angles de même mesure (= 60°) **alors** il est équilatéral

Méthode :
Pour justifier (ou démontrer) qu'un triangle est équilatéral, il suffit de justifier (ou prouver) qu'il a 3 angles de même mesure (= 60°)

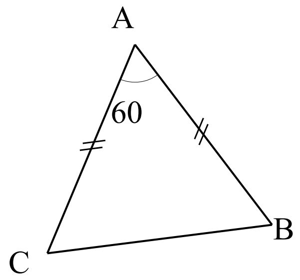
propriété 2:

Un triangle isocèle qui possède un angle de 60° est un triangle équilatéral.

Démonstration :

2 cas possibles : soit le sommet principal est égal à 60°
soit un angle à la base est égal à 60°

Si le sommet principal mesure 60°



ABC isocèle en A, donc :

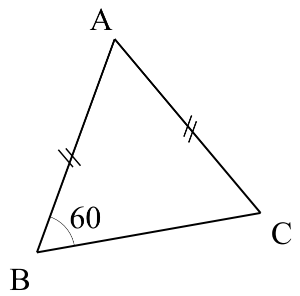
$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2}$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180° - 60°}{2}$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{120°}{2} = 60°$$

ABC est donc un triangle qui à 3 angles de 60°, il est donc équilatéral

Si un angle à la base mesure 60°



ABC isocèle en A, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60°$

$\widehat{BAC} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$
$\widehat{BAC} = 180° - (60° + 60°)$
$\widehat{BAC} = 60°$

ABC est donc un triangle qui à 3 angles de 60°, il est donc équilatéral