Distance et approximation

Décomposition en valeurs singulières

MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée

Jean-François Lalonde

Image

Factorisations, rappel

Diagonalisation

Diagonalisation, lorsque la matrice est symétrique

La décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*, ou SVD)

$$\mathbf{A} = \left[\quad \right]$$

La SVD permet de factoriser n'importe quelle matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

La décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*, ou SVD)

$$\mathbf{A} = \left[\quad \right]$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

$$\mathbf{AV} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}$$

La décomposition en valeurs singulières
(*Singular Value Decomposition*, ou SVD)

$$\mathbf{A} = \left[\quad \right]$$

Espace des lignes

Espace des colonnes

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i \sigma_i$$

La décomposition en valeurs singulières
(*Singular Value Decomposition*, ou SVD)

$$\sigma_i \mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i \qquad \mathrm{rang}(\mathbf{A}) = r$$

Dimensions

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top \qquad \mathrm{rang}(\mathbf{A}) = r$$

$$\left[\qquad\qquad \right]$$

Rappel

$\mathbf{U}$: espace des colonnes + nul de $\mathbf{A}^\top$

$\mathbf{V}$: espace des lignes + nul de $\mathbf{A}$

Obtenir $\mathbf{V}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

On veut se débarrasser de $\mathbf{U}$. Truc : utiliser $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$

Obtenir Σ et $\mathbf{U}$

$$\sigma_i \mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i$$

Exemple 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Étape 1 : trouver $\mathbf{V}$.

Exemple 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 2 : trouver $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{U}$.

Exemple 1

Étape 3 : orthogonaliser $\mathbf{U}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Étape 1 : trouver $\mathbf{V}$.

Exemple 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Étape 2 : trouver $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{U}$.

Exemple 2

Étape 3 : orthogonaliser $\mathbf{U}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & ? & ? \\ \frac{2}{3} & ? & ? \\ -\frac{2}{3} & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4.2426 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Survol

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & \sigma_r & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^\top$$

Espace des colonnes

Espace des lignes

Espace nul de $\mathbf{A}^\top$

Espace nul de $\mathbf{A}$