Orthogonalité

Projections

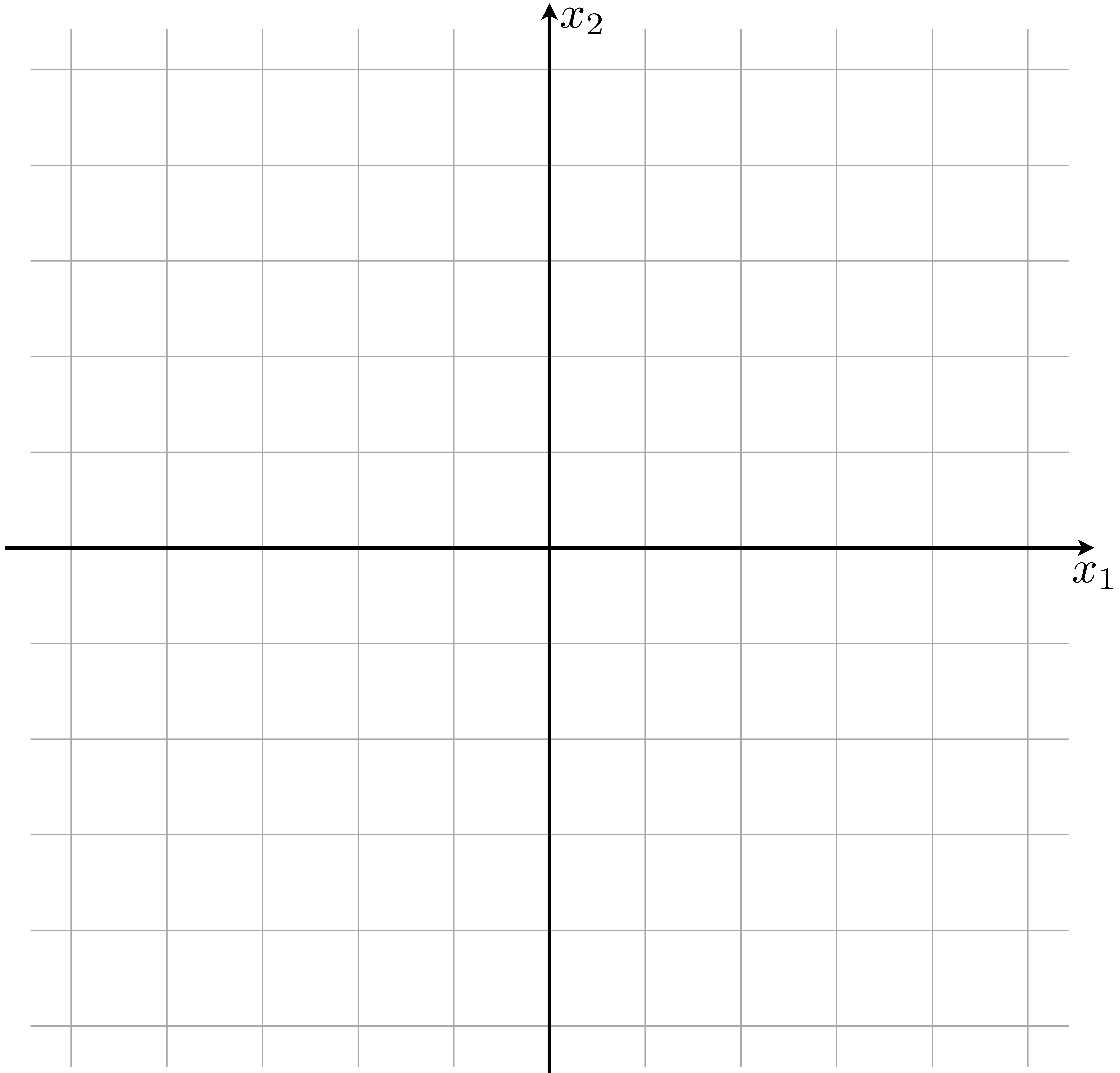
MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée

Jean-François Lalonde

Source

Exemple : sous-espace à 1 dimension

- Dans $\mathbb{R}^2$, définissons :
  - Sous-espace $\mathbf{u}$ à 1 dimension
  - Vecteur $\mathbf{v}$ qui n'est pas dans ce sous-espace
- Quel est le point $\mathbf{p}$ dans $\mathbf{u}$ le plus près de $\mathbf{v}$?

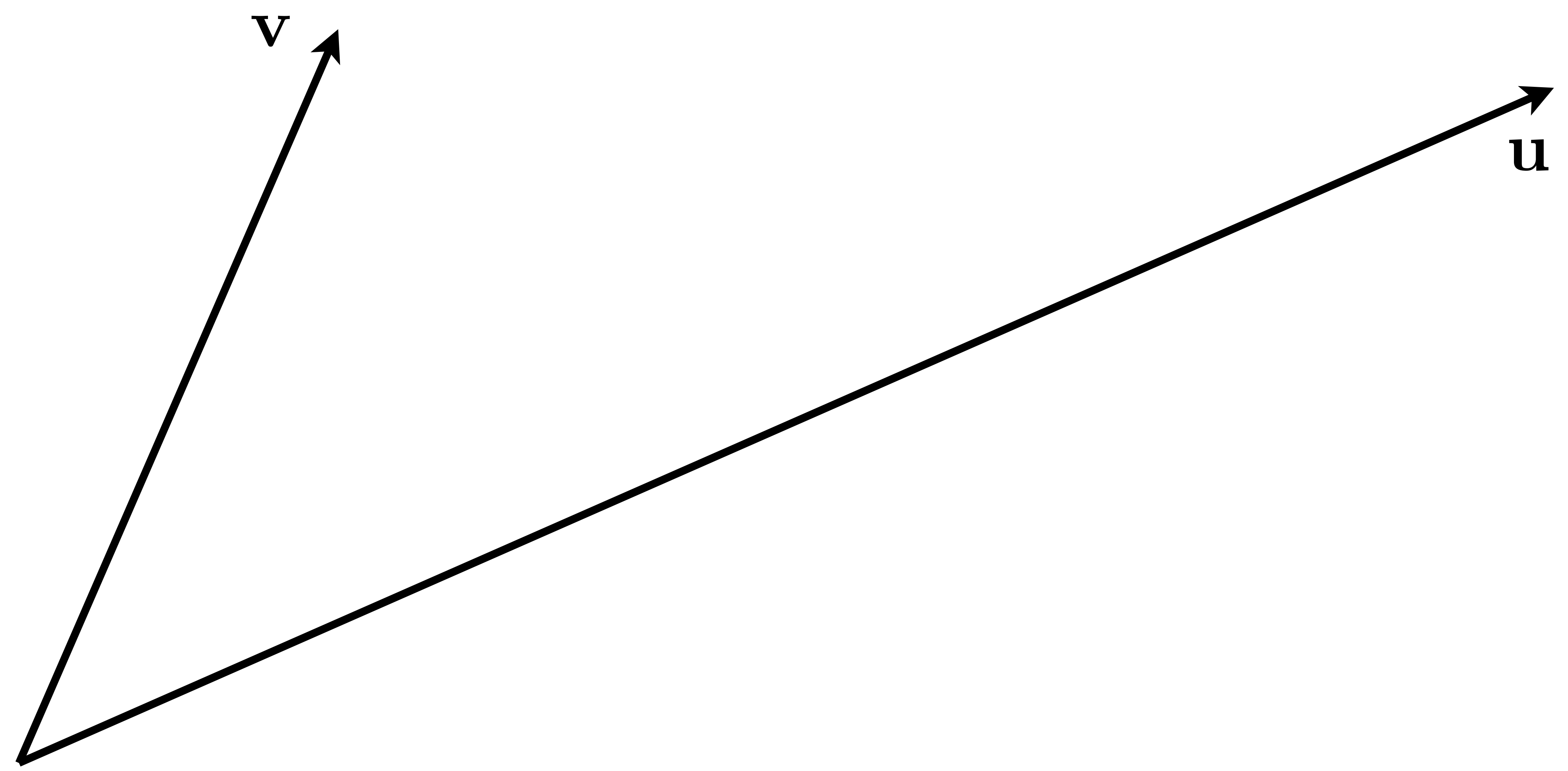


Rappel

Définition : projection

- Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs dans $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, on définit la projection de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{u}$:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$$



Matrice de projection

Attention

Ça **n’est pas** la même matrice projection qu’en infographie. On parle ici de projection dans un sous-espace, tandis qu’en infographie il s’agissait plutôt d’une projection de perspective.

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}^\top \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$

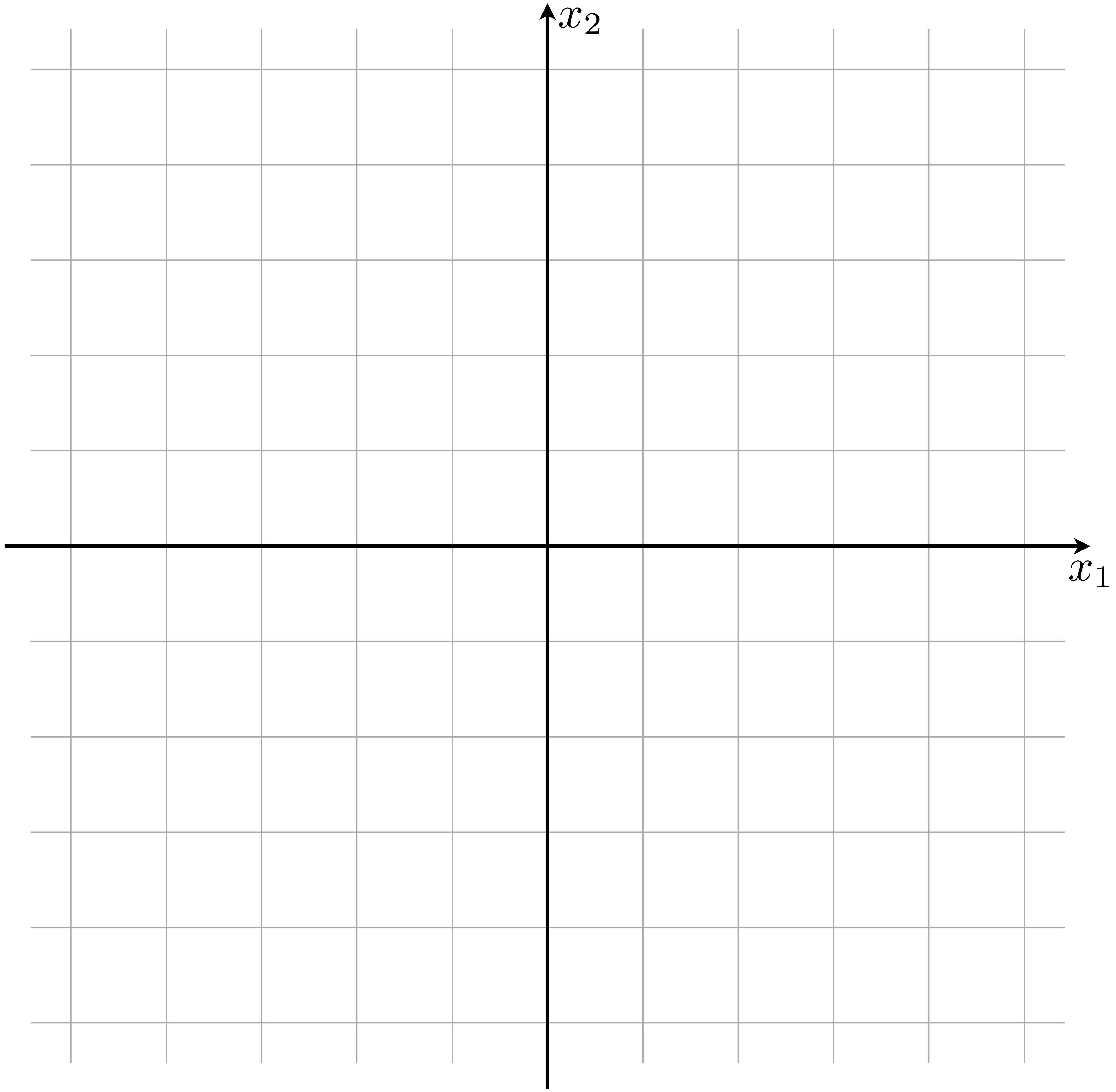
Matrice de projection

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}$$

- Quel est l'espace des colonnes de $\mathbf{P}$?
- Quel est le rang de $\mathbf{P}$?

Exemple

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Matrice de projection : propriétés

$$\mathbf{P}^\top =$$

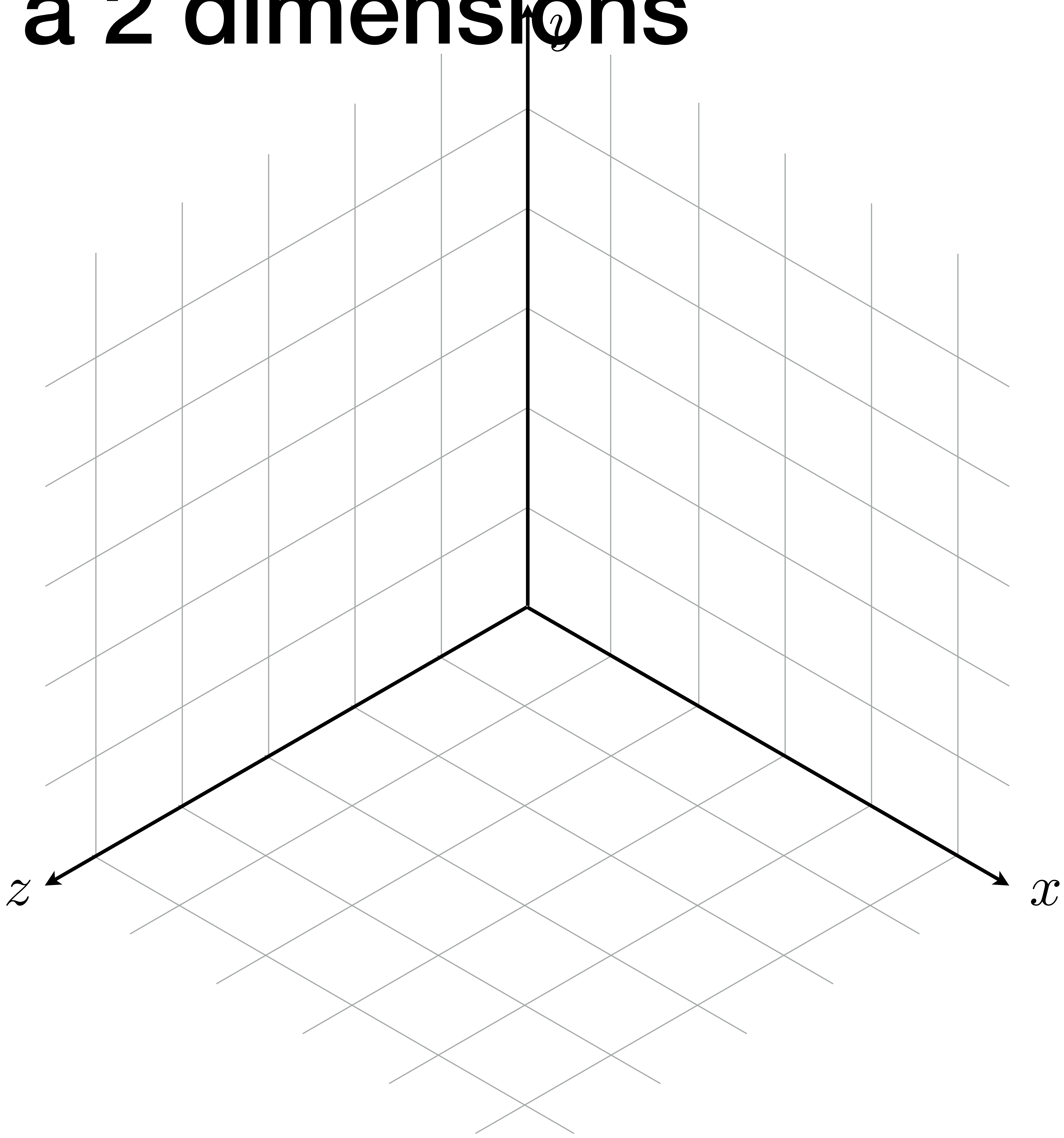
$$\mathbf{P}^2 =$$

Si $\mathbf{u}$ est unitaire ?

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}$$

Exemple : sous-espace à 2 dimensions

- Dans $\mathbb{R}^3$, définissons :
  - Sous-espace $\mathscr{U}$ à 2 dimensions ayant comme base orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$
  - Vecteur $\mathbf{v}$ qui n'est pas dans ce sous-espace
- Quel est le point $\mathbf{p}$ dans $\mathscr{U}$ le plus près de $\mathbf{v}$?



Théorème de la décomposition orthogonale

Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{z}$$

où $\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{W}$ et $\mathbf{z} \in \mathscr{W}^\perp$. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ est une base orthogonale de $\mathscr{W}$, alors

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

Théorème de la décomposition orthogonale

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

On peut également écrire cette projection sous la forme :

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\top}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^\top}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{v} + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^\top}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{v}$$

Exemple

Sous-espace $\mathscr{W} \in \mathbb{R}^4$ ayant comme base orthogonale

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Projeter ce vecteur dans $\mathscr{W}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Quel est son complément orthogonal $\mathbf{z}$?

Rappel

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

Exemple

Sous-espace $\mathscr{W} \in \mathbb{R}^4$ ayant comme base orthogonale

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Projeter ce vecteur dans $\mathscr{W}$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quel est son complément orthogonal $\mathbf{z}$?

Rappel

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

Exemple

Sous-espace $\mathscr{W} \in \mathbb{R}^4$ ayant comme base orthogonale

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Projeter ce vecteur dans $\mathscr{W}$:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quel est son complément orthogonal $\mathbf{z}$?

Rappel

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

Théorème de la décomposition orthogonale

Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{z}$$

où $\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{W}$ et $\mathbf{z} \in \mathscr{W}^\perp$. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ est une base **orthornormée** de $\mathscr{W}$, alors

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\top}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^\top}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{v} + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^\top}{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{v}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\top \mathbf{v}$$