Chapitre 6

ANALYSE TRANSITOIRE PAR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Département de génie électrique et de génie informatique

Objectifs

- *connaître la transformation de Laplace des fonctions de base;*
- *connaître et exploiter les propriétés de la transformation de Laplace;*
- *être capable de trouver les pôles d'une fonction ainsi que les résidus associés à ces pôles;*
- *obtenir la réponse dans le domaine temporel par transformation de Laplace inverse;*
- *savoir faire la conversion d'un circuit électrique dans le domaine de Laplace sans ou avec conditions initiales;*
- *connaître les différentes fonctions de réseau (immitance et de transfert) et être capable de les obtenir à partir d'un circuit électrique;*
- *établir les fonctions de réseau des circuits électriques ayant un ou plusieurs ampli-ops;*
- *être capable d'esquisser la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle d'une fonction de transfert*
- *être capable d'esquisser les réponses en fréquences tracées sous forme de diagramme de Bode*

Transformation de Laplace

Introduction

- Le concept de phaseur peut être généralisé en ajoutant une partie réelle σ à la partie imaginaire $j\omega$, pour définir une variable complexe $s = \sigma + j\omega$. La transformation basée sur la variable complexe s est appelée transformée de Laplace.
  - La transformée de Laplace F(s) d'un signal f(t) révèle les caractéristiques du signal dans le domaine s.
- La transformée de Laplace est inversible
  - c-à-d si F(s) est la transformée de Laplace d'un signal de domaine temporel f(t), nous pouvons récupérer f(t) à partir de F(s) en prenant la transformée de Laplace inverse de F(s).
- (1)La méthode des résidus, (2) l'expansion partielle de la fraction en éléments simples et (3) la recherche dans une table sont utilisées pour déduire f(t) de F(s). La paire de transformées de Laplace est représentée par

$$L[f(t)] = F(s),\ L^{-1}[F(s)] = f(t) \qquad\qquad f(t) \leftrightarrow F(s)$$

- L'une des applications de la transformée de Laplace est la résolution d'équations différentielles. La transformée de Laplace convertit les équations différentielles en équations algébriques en s.
  - Toute variable inconnue telle que la tension V(s) est représentée comme une fonction rationnelle de s. Son expression temporelle v(t) s'obtient via la transformée de Laplace inverse de V(s).

Pierre Simon Laplace 1749-1827

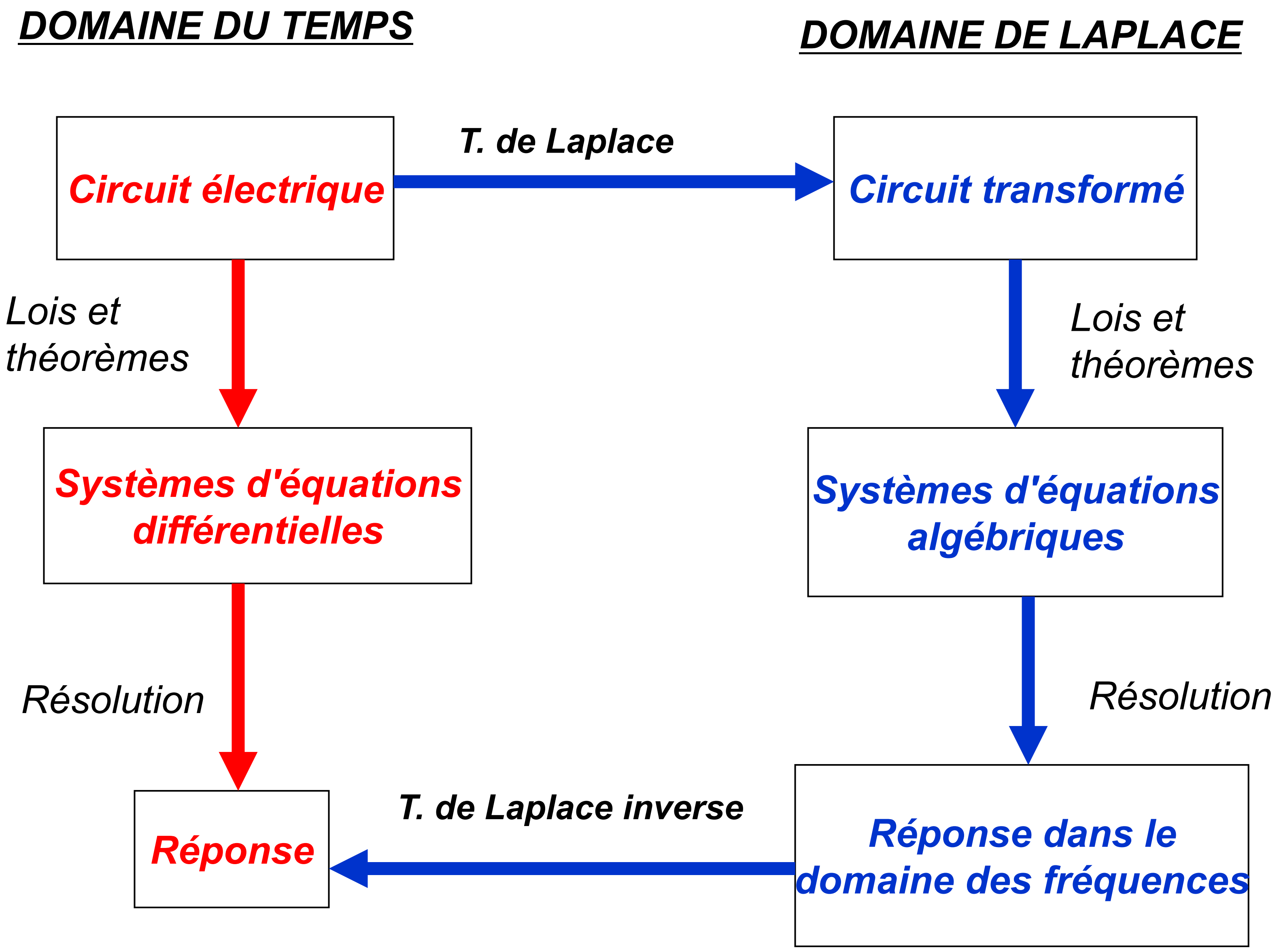
Historical

Pierre Simon Laplace (1749–1827), a French astronomer and mathematician, first presented the transform that bears his name and its applications to differential equations in 1779.

Born of humble origins in Beaumont-en-Auge, Normandy, France, Laplace became a professor of mathematics at the age of 20. His mathematical abilities inspired the famous mathematician Simeon Poisson, who called Laplace the Isaac Newton of France. He made important contributions in potential theory, probability theory, astronomy, and celestial mechanics. He was widely known for his work, *Traite de Mecanique Celeste (Celestial Mechanics)*, which supplemented the work of Newton on astronomy. The Laplace transform, the subject of this chapter, is named after him.

Georgios Kollidas/Shutterstock

Transformation de Laplace…



Transformation de Laplace…

Définition

$$\boxed{L\left[f(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

La transformée de Laplace de f(t) est la transformée de Fourier de $f(t)e^{-\sigma t}$.

$$F(s) = F\left(\sigma + j\omega\right) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = F\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]$$

Exemples

Transformée d'un échelon

$$\boxed{L\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}}$$

Transformée d'une exponentielle

$$\boxed{L\left[e^{at}u(t)\right] = \frac{1}{s-a}}$$

Transformée d'un cosinus

$$\boxed{L\left[\cos\omega t\, u(t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

EXEMPLES

À lire

- Trouver la transformée de Laplace de l'échelon unitaire f(t) = u(t).

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt=\frac{e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty}}{-s}=\frac{e^{-(\sigma+j\omega)\infty}-e^{-s0^-}}{-s}=\frac{\dfrac{e^{-j\omega\infty}}{e^{\sigma\infty}}-1}{-s}=\frac{\dfrac{e^{-j\omega\infty}}{\infty}-1}{-s}=\frac{-1}{-s}=\frac{1}{s}$$

- Trouver la transformée de Laplace de f(t) = e $^{-at}$u(t).

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt=\frac{e^{-(s+a)t}\Big|_{0^-}^{\infty}}{-(s+a)}=\frac{e^{-(\sigma+j\omega+a)\infty}-e^{-(s+a)0^-}}{-(s+a)}=\frac{\dfrac{e^{-j\omega\infty}}{e^{(\sigma+a)\infty}}-1}{-(s+a)}=\frac{\dfrac{e^{-j\omega\infty}}{\infty}-1}{-(s+a)}=\frac{0-1}{-(s+a)}=\frac{1}{s+a}$$

- Trouver la transformée de Laplace de f(t) = 2 e $^{-3t}$ u(t) + 5 e $^{-4t}$ u(t).

$$L\left[2e^{-3t}u(t)\right]=\frac{2}{s+3} \qquad L\left[5e^{-4t}u(t)\right]=\frac{5}{s+4}$$

  - Principe de superposition:

$$L\left[2e^{-3t}u(t)+5e^{-4t}u(t)\right]=\frac{2}{s+3}+\frac{5}{s+4}=\frac{7s+23}{s^2+7s+12}$$

Transformations de Laplace usuelles

Fonction	f(t)	F(s)
Impulsion unitaire	$\delta(t)$	1
Échelon unitaire	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampe unitaire	$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
Sinus	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosinus	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Rampe amortie	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sinus amorti	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Cosinus amorti	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Transformation de Laplace…

Translation de l'axe du temps

Si: $F(s) = L\left[f(t)\right]$ $\Rightarrow$ $\boxed{L\left[f(t-a)\right] = e^{-as}\, F(s)}$

$$L\left[A\,u(t)\right] = \frac{A}{s}$$

$$L\left[A\,u(t-2)\right] = ?? \quad \frac{Ae^{-2s}}{s}$$

$\tau = t-a \quad d\tau = dt$

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t-a)\underset{u(t)}{e^{-st}}\,dt = \int_{-a}^{\infty} f(\tau)\,e^{-s(\tau+a)}\underset{u(\tau)}{}\,d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(\tau)\,e^{-as}e^{-s\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-as}\underbrace{\int_{0}^{\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau}_{F(s)}$$

À lire

Translation de l'axe des fréquences

Si: $F(s) = L\left[f(t)\right]$ $\Rightarrow$ $\boxed{L\left[e^{-at}\, f(t)\right] = F(s+a)}$

$$L\left[\sin\omega t\;u(t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L\left[e^{-5t}\sin\omega t\;u(t)\right] = ?? \quad \frac{\omega}{(s+5)^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+10s+25+\omega^2}$$

fait dans livre

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-at} f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\,e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= F(s+a)$$

À lire

Translation temporelle

- Trouver la transformée de Laplace de f(t) illustrée à la Figure 14.5.

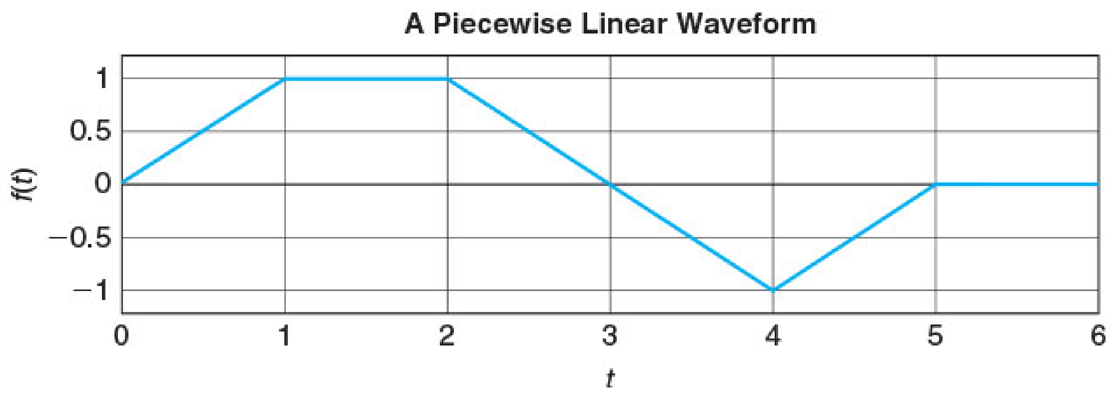
$$f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + 2(t-4)u(t-4) - (t-5)u(t-5)$$

- Par application de la propriété de décalage temporel à $L[t\,u(t)] = 1/s^2$, nous obtenons

$$F(s) = (1 - e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-4s} - e^{-5s})/s^2$$

FIGURE 14.5

Waveform for EXAMPLE 14.14.



Transformation de Laplace…

Si: $F(s) = L\left[f(t)\right]$

Transformation de la dérivée → $$\boxed{L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0^-)}$$

Exemple avec L[-ωsin(ωt)u(t)+cos(0)δ(t)]=L[dcos(ωt)/dt u(t)]
Note: si f(t)u(t) alors f(0^-)=0 $\frac{s^2}{s^2+\omega^2}$ $\frac{s^2}{s^2+\omega^2}$

Transformation de l'intégrale → $$\boxed{L\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\left(F(s) + y(0)\right)}$$

avec $y(0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$

Note: si y(t)=f(t)u(t) alors y(0)=0

Translation de fréquence

À lire

UNIVERSITÉ LAVAL
Aujourd'hui Québec, demain le monde

- $F[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$
- Transformée de Laplace de $\cos(\omega_0 t)u(t)$:

$$L\left[\cos(\omega_0 t)u(t)\right] = \frac{1}{2}L\left[e^{j\omega_0 t}u(t) + e^{-j\omega_0 t}u(t)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

- Transformée de Laplace de $\sin(\omega_0 t)u(t)$:

$$L\left[\sin(\omega_0 t)u(t)\right] = \frac{1}{2j}L\left[e^{j\omega_0 t}u(t) - e^{-j\omega_0 t}u(t)\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

- Transformée de Laplace de $e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$ et $e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$:

$$L\left[e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \quad L\left[e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)\right] = \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$f(t) = \cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t)\cos\phi - \sin(\omega t)\sin\phi$

$F(s) = \cos\phi \frac{s}{s^2+\omega^2} - \sin\phi \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s\cos\phi - \omega\sin\phi}{s^2+\omega^2}$

$f(t) = e^{-at}\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow F(s) = (s\cos\phi - \omega\sin\phi + a\cos\phi)/((s+a)^2+\omega^2)$

Intégrale de cos et dérivée de sin   À lire

- Transformée de Laplace de l'intégrale de f(t) : $L\left[\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right] = \frac{F(s)}{s}$
- Si f(t) = cos(ω_0t)u(t). Trouver $\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda$ ainsi que la transformée de

$$\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)u(t)$$

$$L\left[\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right] = \frac{1}{\omega_0}L\left[\sin\left(\omega_0 t\right)u(t)\right] = \frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{1}{s^2+\omega_0^2} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\omega_0^2} = \frac{1}{s}L\left[\cos\left(\omega_0 t\right)u(t)\right]$$

- Transformée de Laplace de la dérivée de f(t) : $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f\left(0^-\right)$
- Si f(t) = sin(ω_0t)u(t) avec f(0^-) = 0. Trouver df(t)/dt, ainsi que la transformée de df(t)/dt = ω_0 cos(ω_0t)u(t)

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \omega_0 L\left[\cos\left(\omega_0 t\right)u(t)\right] = \omega_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2} = s\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = s\,L\left[\sin\left(\omega_0 t\right)u(t)\right] = sF(s)$$

Propriétés de la Transformation de Laplace

Hoang Le-Huy, Circuits électriques, 2004

Opération	f(t)	F(s)
Multiplier par une constante	$Kf(t)$	$KF(s)$
Addition	$f1(t) + f2(t) + f3(t) + \ldots$	$F1(s) + F2(s) + F3(s) + \ldots$
Dérivée première	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
Dérivée seconde	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
Dérivée d'ordre n	$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$
Intégrale	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Décalage temporel	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Multiplier par une exponentielle	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Changement d'échelle de temps	$f(at)$, $a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Multiplier par t	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Multiplier par t^2	$t^2f(t)$	$\frac{d^2F(s)}{ds^2}$
Multiplier par t^n	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
Diviser par t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(x)dx$

linéarité

translation

0-

Multiplication par $\cos(\omega_0 t)$ et $\sin(\omega_0 t)$

À lire

- Transformée de Laplace de $f(t)\cos(\omega_0 t)$:

Diapo #13

$$L\left[f(t)\cos\left(\omega_0 t\right)\right] = \frac{1}{2}F\left(s - j\omega_0\right) + \frac{1}{2}F\left(s + j\omega_0\right)$$

- Transformée de Laplace de $f(t)\sin(\omega_0 t)$:

$$L\left[f(t)\sin\left(\omega_0 t\right)\right] = \frac{1}{2j}F\left(s - j\omega_0\right) - \frac{1}{2j}F\left(s + j\omega_0\right)$$

- Trouver la transformée de Laplace de $g(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$

$f(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow F(s) = 1/(s + a)$

Diapo #13

$$G(s) = \frac{1}{2}F\left(s - j\omega_0\right) + \frac{1}{2}F\left(s + j\omega_0\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega_0 + a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega_0 + a} = \frac{s + a}{\left(s + a\right)^2 + \omega_0^2}$$

- Trouver la transformée de Laplace de $g(t) = e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$.

$$G(s) = \frac{1}{2j}F\left(s - j\omega_0\right) - \frac{1}{2j}F\left(s + j\omega_0\right) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s - j\omega_0 + a} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s + j\omega_0 + a} = \frac{\omega_0}{\left(s + a\right)^2 + \omega_0^2}$$

Théorème de la valeur initiale et la valeur finale

La valeur initiale d'une fonction *f(t)* est donnée par:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} \left[s\,F(s) \right]$$

La valeur finale d'une fonction *f(t)* est donnée par:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \left[s\,F(s) \right]$$

Exemple

$$I(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2}$$

$$i(t) = \left[2 - e^{-2t} \right] u(t)$$

$$\lim_{s \to 0} \left(2 - \frac{s}{s+2}\right) = 2 \equiv 2 - e^{-\infty}$$

$$\lim_{s \to \infty} \left(2 - \frac{s}{s+2}\right) = 1 \equiv 2 - e^{0}$$

Valeurs initiales et finales

- Trouver la valeur initiale f(0+) pour le signal f(t) dont la transformée de Laplace est donnée par

$$(a) F(s)=\frac{2s+3}{s(s+1)(s+2)} \qquad (b) F(s)=\frac{2s+7}{(s+5)(s+6)} \qquad f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$(a) f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{2+\frac{3}{s}}{s\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{2}{s}\right)}=0 \quad (b) f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\left[s\frac{2s+7}{(s+5)(s+6)}\right]=\lim_{s\to\infty}\frac{(1)\left(2+\frac{7}{s}\right)}{\left(1+\frac{5}{s}\right)\left(1+\frac{6}{s}\right)}=2$$

- Trouver la valeur finale f(∞) pour le signal f(t) dont la transformée de Laplace est donnée par

$$(a) F(s)=\frac{2s+3}{s(s+1)(s+2)} \qquad (b) F(s)=\frac{2s+7}{(s+5)(s+6)} \qquad f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$(a) f(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{3}{2} \quad (b) f(\infty)=\lim_{s\to 0}\left[s\frac{2s+7}{(s+5)(s+6)}\right]=0$$

Multiplier chaque terme (s+a) par $\frac{s}{s}$ ***pour*** $\lim\limits_{s\to\infty}$

Transformation de Laplace inverse

Transformation de Laplace inverse…

$$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi\, j} \int_{(\sigma_1 - j\infty)}^{(\sigma_1 + j\infty)} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Cette intégrale peut être évaluée à l'aide du théorème du résidu

Exemple 1:

$$F(s) = \frac{2\,e^{-3s}}{s}$$

$f(t) = 2u(t-3)$

Table Diapo 9

Exemple 2:

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{12}{s^2+9}$$

$f(t) = 2u(t) + 3e^{-2t}u(t) + 4\sin(3t)u(t)$

Table Diapo 9

Exemple 3:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{3s}{s^2+16}$$

$f(t) = 2te^{-t}u(t) - 3\cos(4t)u(t)$

Table Diapo 9

Théorème des résidus

- Le théorème des résidus stipule que f(t) est donné par la somme des résidus de $F(s)e^{st}$.
- F(s) peut être représentée comme un rapport du polynôme numérateur N(s) au polynôme dénominateur D(s): F(s) = N(s)/D(s).
- Si F(s) a un pôle simple en s = – a, D(s) = (s + a)D1(s). Le résidu à s = – a est donné par

$$R = (s+a)\frac{N(s)e^{st}}{(s+a)D_1(s)}\bigg|_{s=-a} = \frac{N(s)e^{st}}{D_1(s)}\bigg|_{s=-a} = \frac{N(-a)e^{-at}}{D_1(-a)}$$

- Si F(s) a r pôles à s = – a, $D(s) = (s + a)^r D_1(s)$. Le résidu à s = – a est donné par

$$R = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s+a)^r\frac{N(s)e^{st}}{(s+a)^r D_1(s)}\right]\Bigg|_{s=-a} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[\frac{N(s)e^{st}}{D_1(s)}\right]\Bigg|_{s=-a}$$

- Procédure de transformation de Laplace inverse :
  - (a) $F(s)\, e^{st} = N(s)\, e^{st} /D(s)$
  - (b) Factoriser D(s);
  - (c) Trouver les residus
  - (d) Prendre la somme des residus

Poles distincts

- Transformée de Laplace inverse de $F(s) = 1/(s^2 + 5s + 6)$.
- (a) Multiplier F(s) par e^{st}: $F(s)\, e^{st} = e^{st} /(s^2 + 5s + 6)$.
- (b) Le polynôme du dénominateur peut être factorisé comme suit: $D(s) = s^2 + 5s + 6 = (s + 2)(s + 3)$. Les pôles sont à $s = -2$ et $s = -3$. $F(s)\, e^{st} = e^{st} /[(s + 2)(s + 3)]$.
- (c) Le résidu du pôle à $s = -2$ est

$$R_1 = (s+2)\frac{e^{st}}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-2} = \frac{e^{st}}{(s+3)}\bigg|_{s=-2} = \frac{e^{-2t}}{(-2+3)} = e^{-2t}$$

Le résidu du pôle à $s = -3$ est

$$R_2 = (s+3)\frac{e^{st}}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-3} = \frac{e^{st}}{(s+2)}\bigg|_{s=-3} = \frac{e^{-3t}}{(-3+2)} = -e^{-3t}$$

- (d) f(t) étant la somme des résidus, on obtient:

$f(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

$$R = (s+a)\frac{N(s)e^{st}}{(s+a)D_1(s)}\bigg|_{s=-a} = \frac{N(s)e^{st}}{D_1(s)}\bigg|_{s=-a} = \frac{N(-a)e^{-at}}{D_1(-a)}$$

Poles doubles

- Transformée de Laplace inverse de $F(s) = 1/[(s + 2)^2(s + 3)]$.
- (a) Multiplier F(s) par e^{st}: $F(s)\, e^{st} = e^{st} /[(s + 2)^2(s + 3)]$.
- (b) Le polynôme du dénominateur est donné sous forme factorisée. Les pôles en s = – 2 ont une multiplicité de 2 et il existe un pôle simple en s = – 3.
- (c) Le résidu du pôle à s = – 3 est

$$R_1 = (s+3)\frac{e^{st}}{(s+2)^2(s+3)}\bigg|_{s=-3} = \frac{e^{st}}{(s+2)^2}\bigg|_{s=-3} = \frac{e^{-3t}}{(-1)^2} = e^{-3t}$$

  Le résidu des pôles à s = – 2 est

$$R_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\frac{e^{st}}{(s+2)^2(s+3)}\right]\bigg|_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left[e^{st}(s+3)^{-1}\right]\bigg|_{s=-2} = \left[te^{st}(s+3)^{-1} + e^{st}(-1)(s+3)^{-2}\right]\bigg|_{s=-2}$$

$$= te^{-2t}(-2+3)^{-1} + e^{-2t}(-1)(-2+3)^{-2} = te^{-2t} - e^{-2t}$$

- (d) f(t) étant la somme des résidus, on obtient:

  $f(t) = (e^{-3t} + te^{-2t} - e^{-2t})u(t)$

$$\boxed{R = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s+a)^r\frac{N(s)e^{st}}{(s+a)^r D_1(s)}\right]\bigg|_{s=-a} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[\frac{N(s)e^{st}}{D_1(s)}\right]\bigg|_{s=-a}}$$

Poles complexes

- Transformée de Laplace inverse de $F(s) = 5/(s^2 + 2s + 5)$.
- (a) Multiplier F(s) par e^{st}: $F(s)\,e^{st} = 5e^{st}/(s^2 + 2s + 5)$.
- (b) Le polynôme du dénominateur peut être factorisé comme suit:

  $D(s) = s^2 + 2s + 5 = (s + 1 - j2)(s + 1 + j2)$. Les pôles sont à $s = -1 + j2$ and $s = -1 - j2$. $F(s)\,e^{st} = 5e^{st}/[(s + 1 - j2)(s + 1 + j2)]$.
- (c) Le résidu du pôle à $s = -1 + j2$ est

$$R_1 = (s+1-j2)\frac{5e^{st}}{(s+1+j2)(s+1-j2)}\bigg|_{s=-1+j2} = \frac{5e^{st}}{(s+1+j2)}\bigg|_{s=-1+j2} = 5\frac{e^{(-1+j2)t}}{j4}$$

Le résidu du pôle à $s = -1 - j2$ est

$$R_2 = (s+1+j2)\frac{5e^{st}}{(s+1+j2)(s+1-j2)}\bigg|_{s=-1-j2} = \frac{5e^{st}}{(s+1-j2)}\bigg|_{s=-1-j2} = 5\frac{e^{(-1-j2)t}}{-j4}$$

- (d) f(t) étant la somme des résidus, on obtient:

$$f(t) = 5\frac{e^{(-1+j2)t}}{j4} - 5\frac{e^{(-1-j2)t}}{j4} = \frac{5}{2}e^{-t}\left(\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j}\right) = 2.5e^{-t}\sin(2t)u(t)$$

Décomposition en fractions partielles

- Transformée de Laplace F(s) sous forme normalisée

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0} \quad a_n \neq 0$$

- F(s) est appelé polynôme rationnel car c'est le rapport de N(s) à D(s). Le degré du polynôme numérateur N(s) est m, et le degré du polynôme dénominateur D(s) est n.
- Si n > m, F(s) est appelé polynôme rationnel propre. Si m ≥ n, F(s) est appelé polynôme rationnel impropre. Si m ≥ n, diviser N(s) par D(s) pour obtenir le quotient Q(s) et le reste R(s). R(s)/D(s) est le polynôme rationnel propre.
- La décomposition en fractions partielles (DFP) consiste à exprimer un polynôme rationnel propre comme une combinaison linéaire de polynômes rationnels propres de degrés plus petits.
- Après avoir représenté le polynôme rationnel propre comme une somme de polynômes rationnels propres de plus petits degrés, nous utilisons le tableau en annexe pour trouver la transformée de Laplace inverse de chaque polynôme rationnel propre.
- La somme des transformations inverses est f(t).

matlab [r,p,k] = residue(b,a)
b = [b_m b_{m-1} ... b_1 b_0]
a = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

$m < n$

I(s) et V(s) apparaissent toujours sous la forme de fractions rationnelles:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

matlab r = roots(p) p = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]

Les n racines de l'équation ***Q(s) = 0*** *sont appelées* ***les pôles*** *de F(s)*

$$\Rightarrow \quad Q(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)\ldots(s - p_n)$$

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sont les pôles

- ***Réels simples***
- ***Complexes conjugués simples***
- ***Multiples***

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Cas 1: pôles réels simples

termes directs
(m≥n)

$$\boxed{F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\frac{K_3}{s-p_3}+\ldots+\frac{K_n}{s-p_n}} \quad +Q(s)$$

$$\boxed{K_j=(s-p_j)\,F(s)\Big|_{s=p_j}}$$

K_j sont les résidus de F(s)

La transformation inverse est donnée par

$$f(t)=\left(K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+\ldots+K_ne^{p_nt}\right)u(t)$$

Table Diapo 9

Exemple

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2} \Rightarrow \boxed{F(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\quad \Big| p_1=-1,\ p_2=-2}$$

$\Delta=1$
pôles: -1 et -2
résidus: $\left.\frac{(s+3)(s+1)}{s^2+3s+2}\right|_{s=-1}$

$\left.\frac{(s+3)}{(s+2)}\right|_{s=-1}=\frac{2}{1}$ | $\left.\frac{(s+3)}{(s+1)}\right|_{s=-2}=\frac{1}{-1}$

$f(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Cas 2: pôles complexes simples…

Si p_1 est un pôle complexe simple de F(s), alors $p_2 = p_1^*$ est aussi un pôle simple de F(s).

$$p_1 = -a + jb \qquad et \qquad p_2 = -a - jb$$

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q_1(s)\,(s+a-jb)\,(s+a+jb)}$$

$$F(s) = \frac{K_1}{(s-p_1)} + \frac{K_1^*}{(s-p_1^*)} + autres\ termes$$

$$F(s) = \frac{A}{(s+a-jb)} + \frac{A^*}{(s+a+jb)} + autres\ termes$$

$$\boxed{A = (s-p_1)\,F(s)\Big|_{s=p_1} = (s+a-jb)\,F(s)\Big|_{s=-a+jb}}$$

La transformation inverse est donnée par

$f(t) = |A|e^{j\angle A}\,e^{(-a+jb)t} + |A|e^{-j\angle A}\,e^{(-a-jb)t} = 2|A|e^{-at}\cos(bt + \angle A)\,u(t)$

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Cas 2: pôles complexes simples

$$conv([1\ 2],[1\ 6\ 10]) = [1\ 8\ 22\ 20]$$

$\underbrace{s^3 + 2s^2 + 6s^2}_{8s^2} + \underbrace{12s + 10s}_{22s} + 20$

Exemple $$F(s) = \frac{10}{(s+2)\left(s^2+6s+10\right)}$$

matlab

[r,p,k]=residue(10,[1 8 22 20])

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+2)} + \frac{K_2}{\left(s+3-j\right)} + \frac{K_2^*}{\left(s+3+j\right)}$$

$$K_1 = 5 = 10/((-2)^2 - 12 + 10)$$

$$K_2 = -\frac{5}{2} + j\frac{5}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle 135°$$

$= \frac{5}{2}\sqrt{2}\ \angle +135°$

$$K_2^* = -\frac{5}{2} - j\frac{5}{2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s+a-jb} + \frac{B}{s+a+jb}\right] = \left[Ae^{(-a+jb)t} + Be^{(-a-jb)t}\right]u(t)$$

$= 2|A|e^{-at}\cos(bt + \angle A)\ u(t)$

$$A = |A|e^{j\angle A} \qquad B = A^* = |A|e^{-j\angle A}$$

Pôles complexes : en détail

- Si F(s) possède une paire de pôles complexes conjugués à – a + jb et – a – jb, Le polynôme du dénominateur a une paire de facteurs (s + a – jb)(s + a + jb). L'expansion partielle de la fraction comprend

$$F(s)=\frac{A}{s+a-jb}+\frac{A^*}{s+a+jb}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)} \text{ avec } A=\frac{N_1(-a+jb)}{(j2b)D_1(-a+jb)},\ A^*=\frac{N_1(-a-jb)}{(j2b)D_1(-a-jb)}$$

- La transformée de Laplace inverse de la paire conjuguée peut s'écrire sous la forme

$$Ae^{(-a+jb)t} + A^* e^{(-a-jb)t}$$

Forme polaire

- Si $A = |A|e^{j\angle A}$ et $A^* = |A|e^{-j\angle A}$, nous avons

$$f(t) = |A|e^{j\angle A} e^{(-a+jb)t} + |A|e^{-j\angle A} e^{(-a-jb)t} = 2|A|e^{-at}\cos(bt + \angle A)\, u(t)$$

- Avec $A = R + jI$, $A^* = R - jI$, la transformée de Laplace inverse est:

$$(R + jI)e^{(-a+jb)t} + (R - jI)e^{(-a-jb)t} = e^{-at}[R(e^{jbt} + e^{-jbt}) + jI(e^{jbt} - e^{-jbt})]$$

- soit

$$u(t) = 2e^{-at}[R\cos(bt) - I\sin(bt)]\, u(t)$$

Forme cartésienne

$$= 2|A|e^{-at}\cos(bt + \angle A)\, u(t)$$

Poles complexes- Exemple

- Trouver la transformée de Laplace inverse de $F(s) = (8s + 4)/(s^2 + 6s + 34)$.
- Le polynôme du dénominateur peut être factorisé comme suit:
  $D(s) = (s + 3 - j5)(s + 3 + j5)$: $a = 3$, $b = 5$
- Expansion en fractions partielles:

$$F(s) = \frac{8s+4}{s^2+6s+34} = \frac{8s+4}{(s+3-j5)(s+3+j5)} = \frac{A}{s+3-j5} + \frac{A^*}{s+3+j5}$$

- Multipliée par $(s + 3 - j5)$:

$$\frac{(8s+4)(s+3-j5)}{(s+3-j5)(s+3+j5)} = \frac{A(s+3-j5)}{s+3-j5} + \frac{A^*(s+3-j5)}{s+3+j5}$$

- Si $s = -3 + j5$:

$$\frac{8s+4}{s+3+j5} = A + \frac{A^*(s+3-j5)}{s+3+j5}$$

$$A = \left.\frac{8s+4}{s+3+j5}\right|_{s=-3+j5} = \frac{8(-3+j5)+4}{-3+j5+3+j5} = \frac{-20+j40}{j10} = 4 + j2 = \sqrt{20}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{5}e^{j0.4636}$$

$$= 4.4721e^{j26.5651^o}$$

Forme polaire

Forme cartésienne

- $R = 4$, $I = 2$, $|A| = 4.4721$, $\angle A = 26.5651^o$
- $f(t) = 2|A|e^{-at}\cos(bt + \angle A)\, u(t) = 8.9443e^{-3t}\cos(5t + 26.5651^o)\, u(t)$
  $f(t) = 2e^{-at}[R\cos(bt) - I\sin(bt)]\, u(t) = 2e^{-3t}[4\cos(5t) - 2\sin(5t)]\, u(t)$

Transformation de Laplace inverse de fractions partielles – Autres exemples

Exemple 1

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}}$$

(Résultat diapo 27)

$$f(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

Exemple 2

$$A = -\frac{5}{\sqrt{2}}\angle\tfrac{3}{4}\pi$$

$|A| = \sqrt{2} \times -\frac{5}{2}$

$// A \quad \measuredangle A = +3\pi/4$

$$F(s) = \frac{10}{(s+2)\left(s^2+6s+10\right)}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{5}{(s+2)} - \frac{5}{2}\frac{1-j}{(s+3-j)} - \frac{5}{2}\frac{1+j}{(s+3+j)}}$$

(Résultat diapo 29)

$R = -5/2 \quad I = 5/2$

$$f(t) = \left(5\,e^{-2t} \underbrace{- 5\,e^{-3t}\cos t - 5e^{-3t}\sin t}_{2\frac{5}{\sqrt{2}}e^{-3t}\cos(t+\frac{3}{4}\pi)}\right)u(t)$$

$+2\sqrt{2}\left(+\frac{5}{2}\right)e^{-3t}\cos\left(+t+\frac{3\pi}{4}\right)$

Forme polaire

Script Matlab Exemple 14.27 (pôles complexes)

```
clear all;
b=[8 4];a=[1 6 34];
[R,P,Q]=residue(b,a)
alpha=real(P(1))
beta=abs(imag(P(1)))
Mag=2*abs(R(1))
Phase=angle(R(1))*180/pi
if imag(R(1)) >= 0 sn1 = '- '; else sn1 = '+ '; end;
if Phase >= 0 sn2 = '+ '; else sn2 = '- '; end;
disp(['f(t) = exp(',num2str(alpha),'t) [',num2str(real(2*R(1))),...
' cos(',num2str(beta),'t) ',sn1,num2str(abs(imag(2*R(1)))),...
' sin(',num2str(beta),'t)] u(t)']);
disp(['f(t) = ',num2str(Mag),' exp(',num2str(alpha),...
't) cos(',num2str(beta),'t ',sn2,num2str(abs(Phase)), ') u(t) ']);
```

```
% James Kang, Electric Circuits, Cengage Learning
% EXAMPLE 14.27
clear all;
syms s
F=(8*s+4)/(s^2+6*s+34)
f=ilaplace(F)
```

f =8*exp(-3*t)*(cos(5*t) - sin(5*t)/2)

```
R =
4.0000 + 2.0000i
4.0000 - 2.0000i
P =
-3.0000 + 5.0000i
-3.0000 - 5.0000i
Q =[]
alpha = -3
beta = 5.0000
Mag = 8.9443
Phase = 26.5651
f(t) = exp(-3t) [8 cos(5t) - 4 sin(5t)] u(t)
f(t) = 8.9443 exp(-3t) cos(5t + 26.5651) u(t)
```

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Exemples supplémentaires $f_k(t) = ?$ À lire

$$F_1(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)}$$ $(2e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)$

$$F_3(s) = \frac{4se^{-5s}}{(s+1)(s+3)}$$ $\left(-2e^{-(t-5)} + 6e^{-3(t-5)}\right)u(t-5) =$

$$F_2(s) = \frac{4(s+1)}{s(s+1)(s+4)}$$ $(1 - e^{-4t})u(t)$

$$A = 0.3162e^{j(-1.8925)}$$

$$F_4(s) = \frac{s+1}{s\left(s^2+4s+5\right)} = \frac{0.2}{s} + \frac{-0.1 - j0.3}{s+2-j} + \frac{-0.1 + j0.3}{s+2+j}$$

$(0.2 + 0.632e^{-2t}\cos(t - 1.8925))u(t)$

$$F_5(s) = \frac{20(s+3)}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)} = \frac{10}{s+1} + \frac{5\sqrt{2}e^{j(5\pi/4)}}{s+1-2j} + \frac{5\sqrt{2}e^{-j(5\pi/4)}}{s+1+2j}$$

$(10e^{-t} + 10\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t + 5\pi/4))u(t)$

Exemples de transformées inverses à partir de fractions simples

À lire

- $F(s) = (s + 6)/[(s + 2)^2(s + 3)]$:

$$F(s)=\frac{s+6}{(s+2)^2(s+3)}=\frac{R_1}{(s+2)^2}+\frac{R_2}{s+2}+\frac{C}{s+3}\qquad C=\left.\frac{s+6}{(s+2)^2}\right|_{s=-3}=\frac{-3+6}{(-3+2)^2}=3,\quad R_1=\left.\frac{s+6}{s+3}\right|_{s=-2}=\frac{-2+6}{-2+3}=4$$

$$R_2=\frac{d}{ds}\left[\frac{s+6}{s+3}\right]\Bigg|_{s=-2}=\frac{d}{ds}\left[(s+6)(s+3)^{-1}\right]\Big|_{s=-2}=\left[\frac{d}{ds}(s+6)\right](s+3)^{-1}\Bigg|_{s=-2}+\left[\frac{d}{ds}(s+3)^{-1}\right](s+6)\Bigg|_{s=-2}$$

$$=1\times(s+3)^{-1}\Big|_{s=-2}+\left[(-1)(s+3)^{-2}\right](s+6)\Big|_{s=-2}=\frac{1}{-2+3}+(-1)(-2+3)^{-2}(-2+6)=1-(1)^{-2}(4)=1-\frac{4}{(1)^2}=1-4=-3$$

$f(t) = [3e^{-3t} - 3e^{-2t} + 4te^{-2t}]u(t)$

- $F(s) = (9s + 5)/[(s + 5)(s^2 + 4s + 20)]$: *Méthode des constantes indéterminées*

$$F(s)=\frac{9s+5}{(s+5)(s^2+4s+20)}=\frac{A}{s+5}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+20}=\frac{(A+B)s^2+(4A+5B+C)s+20A+5C}{(s+5)(s^2+4s+20)}$$

$$A=\left.\frac{9s+5}{(s^2+4s+20)}\right|_{s=-5}=\frac{9(-5)+5}{(-5)^2+4(-5)+20}=\frac{-40}{25}=-1.6$$

$A + B = 0$, $4A + 5B + C = 9$, $20A + 5C = 5$
$\Rightarrow A = -1.6$, $B = 1.6$, $C = 7.4$

$$\frac{1.6s+7.4}{s^2+4s+20}=\frac{1.6(s+2)+4.2}{(s+2)^2+4^2}=\frac{1.6(s+2)+1.05\times 4}{(s+2)^2+4^2}=1.6\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4^2}+1.05\frac{4}{(s+2)^2+4^2}$$

$f(t) = [-1.6e^{-5t} + 1.6\, e^{-2t}\cos(4t) + 1.05e^{-2t}\sin(4t)]u(t)$

- $a = 2$, $b = 4$, $R = 0.8$, $I = -0.525$, $|A| = 0.9569$, $\angle A = -33.2749^o$

$f(t) = [-1.6e^{-5t} + 1.9138e^{-2t}\cos(4t - 33.2749^o)]\, u(t)$

Théorème de la valeur initiale et la valeur finale

La valeur initiale *d'une fonction $f(t)$ peut aussi être trouvée à partir des résidus des pôles simples:*

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}\left[s\,F(s)\right] = \sum_j K_j}$$

Exemples

$$V(s) = \frac{4}{s^2+4s+3} = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \Rightarrow v(t) = [2e^{-t} - 2e^{-3t}]u(t)$$

$$v(0) = 2-2 = 0; \quad \sum K_j = 2-2 = 0$$

$$V(s) = \frac{4s}{s^2+4s+3} = \frac{6}{s+3} + \frac{-2}{s+1} \Rightarrow v(t) = [6e^{-3t} - 2e^{-t}]u(t)$$

$$v(0) = 6-2 = 4; \quad \sum K_j = 6-2 = 4$$

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Cas 3: pôles multiples…

Lorsque $s = p_i$ est une racine d'ordre r de Q(s)

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q_1(s)\,(s-p_i)^r}$$

$$F(s) = \frac{K_{i1}}{s-p_i} + \frac{K_{i2}}{\left(s-p_i\right)^2} + \ldots + \frac{K_{ij}}{\left(s-p_i\right)^j} + \ldots + \frac{K_{ir}}{\left(s-p_i\right)^r} + autres\ termes$$

$$K_{ij} = \frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}}\left[(s-p_i)^r\ F(s)\right]\Big|_{s=p_i} \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$$

Cas particulier du pôle double (r = 2)

$$K_{i1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^2\ F(s)\right]\Big|_{s=p_i} \qquad \text{Ordre 1}$$

$$K_{i2} = \left[(s-p_i)^2\ F(s)\right]\Big|_{s=p_i} \qquad \text{Ordre 2}$$

Décomposition d'une fonction rationnelle F(s) en une somme de fractions partielles

Cas 3: pôles multiples

Exemple 1

$$F(s) = \frac{2s+12}{s\,(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(s) = \frac{-4}{(s+2)^2} + \frac{-3}{s+2} + \frac{3}{s}}$$

$$K_{11} = \frac{1}{1!}\left.\frac{d\left(\frac{2s+12}{s}\right)}{ds}\right|_{s=-2} = \left.\frac{2}{s} - \frac{(2s+12)}{s^2}\right|_{s=-2} = -3$$

Exemple 2

matlab
conv([1,2,1],[1,3])

$$F(s) = \frac{8}{\underbrace{(s^2+2s+1)}_{(s+1)^2}\,(s+3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(s) = \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3}}$$

matlab
[r,p,k] = residue(8,[1 5 7 2])
r = [-2 4 2]
p = [-1 -1 -3]
résidus pôle double ordre 1 d'abord

Transformation de Laplace inverse

F(s)	f(t)
$\dfrac{A}{s+a}$	$Ae^{-at}u(t)$
$\dfrac{A}{(s+a)^2}$	$Ate^{-at}u(t)$
$\dfrac{A}{(s+a)^n}$	$\dfrac{A}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}u(t)$
$\dfrac{\lvert A\rvert e^{j\phi}}{(s+a-jb)}+\dfrac{\lvert A\rvert e^{-j\phi}}{(s+a+jb)}$	$2\lvert A\rvert e^{-at}\cos(bt+\phi)u(t)$
$\dfrac{\lvert A\rvert e^{j\phi}}{(s+a-jb)^2}+\dfrac{\lvert A\rvert e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^2}$	$2\lvert A\rvert te^{-at}\cos(bt+\phi)u(t)$
$\dfrac{\lvert A\rvert e^{j\phi}}{(s+a-jb)^n}+\dfrac{\lvert A\rvert e^{-j\phi}}{(s+a+jb)^n}$	$\dfrac{2\lvert A\rvert}{(n-1)!}e^{-at}t^{n-1}\cos(bt+\phi)u(t)$

Hoang Le-Huy, Circuits électriques, 2004

Transformation de Laplace inverse: pôles complexes répétés

$$\frac{A}{(s+a)^{\boxed{n}}} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{A}{\boxed{(n-1)!}} e^{-at} \boxed{t^{n-1}} u(t)$$

$$\frac{A}{(s+a-jb)^{\boxed{n}}} + \frac{A^*}{(s+a+jb)^{\boxed{n}}} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{2|A|}{\boxed{(n-1)!}} e^{-at} \boxed{t^{n-1}} \cos(bt+\varphi)\, u(t)$$

avec: $A = |A|\, e^{j\varphi}$ *résidu au pôle –a+jb*

$$A^* = |A|\, e^{-j\varphi}$$

Transformation de Laplace inverse de fractions partielles – Poles multiples

À lire

UNIVERSITÉ LAVAL
Aujourd'hui Québec, demain le monde

Exemple 1

$$F(s)=\frac{3}{s}-\frac{4}{(s+2)^2}-\frac{3}{s+2}=\frac{2s+12}{s\,(s+2)^2}$$

$$f(t)=\left(3-4t\,e^{-2t}-3e^{-2t}\right)u(t)$$

$$F(s)=\frac{K_{12}}{(s+2)^2}+\frac{K_{11}}{(s+2)}+\frac{K_2}{s}$$

Exemple 2

$$F(s)=\frac{4}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+3}=\frac{8}{\left(\underbrace{s^2+2s+1}_{(s+1)^2}\right)(s+3)}$$

$$F(s)=\frac{8}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{K_{1,1}}{s+1}+\frac{K_{1,2}}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+3}$$

matlab
conv([1,2,1],[1,3])

matlab
[r,p,k] = residue(8,[1 5 7 2])
r = [-2 4 2]
p = [-1 -1 -3]

Exemple 2 : Diapo 38

$$f(t)=\left(4t\,e^{-t}-2e^{-t}+2e^{-3t}\right)u(t)$$

Trouver des racines et trouver un polynôme

- Une fonction MATLAB roots peut être utilisée pour trouver les racines d'un polynôme, et la fonction poly peut être utilisée pour reconstruire un polynôme à partir des racines.

- Utilisez MATLAB pour trouver les racines de $s^3 + 5s + 11s + 15 = 0$.

```
>> roots([1 5 11 15])
ans =
-3.0000
-1.0000 + 2.0000i
-1.0000 - 2.0000i
```

- Utiliser MATLAB pour trouver le polynôme ayant pour racines –
  -2, – 1.5 $\pm$ j2.

```
>> poly([-2,-1.5+2j,-1.5-2j])
ans =
1.0000    5.0000    12.2500    12.5000
```

- $s^3 + 5s^2 + 12.25s + 12.5$

Utilisez MATLAB pour trouver l'inverse de Laplace

- $F(s) = (2s + 11)/[s^3(s + 3)^2]$

```
clear all;
syms s
F=(2*s+11)/(s^3*(s+3)^2)
f=ilaplace(F)
f=vpa(f,4)

Answer:
 f =
0.6111*t^2 - 0.2593*exp(-3.0*t) - 0.1852*t*exp(-3.0*t) - 0.5926*t + 0.2593
```

$$f(t) = \left(0.6111t^2 - 0.5926t + 0.2593 - 0.1852te^{-3t} - 0.2593e^{-3t}\right)u(t)$$

Polynôme rationnel impropre

- Trouver la transformée de Laplace inverse de F(s) = $(s^2 + 5s + 11)/(s + 3)$.
- Lorsque le polynôme numérateur $s^2 + 5s + 11$ est divisé par le polynôme dénominateur $s + 3$, en utilisant la division longue, nous obtenons un quotient $s + 2$ et un reste de 5.
- F(s) peut donc être réécrit comme suit:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2+5s+11}{s+3} = s+2+\frac{5}{s+3} = Q(s)+\frac{R(s)}{D(s)}$$

$$\begin{array}{rrr|l} +s^2 & +5s & +11 & s+3 \\ \hline -s^2 & -3s & 0 & s+2 \quad Q(s) \\ \hline & +2s & +11 & \\ & -2s & -6 & \\ \hline & & 5 & R(s) \end{array}$$

- La transformée de Laplace inverse est donnée par:

  $f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 5e^{-3t} u(t)$

- Si m=n

faire division polynomiale

Exemple $F(s) = \frac{3s^2+4s+8}{s^2+3s+2}$

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & +4x & +8 & x^2+3x+2 \\ 3x^2 & +9x & +6 & 3 \\ \hline & -5x & +2 & \end{array}$$

$= 3 + \frac{-5s+2}{s^2+3s+2}$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Division_synth%C3%A9tique

Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace

- Les équations différentielles peuvent être transformées au domaine s en appliquant la propriété de différenciation temporelle. Les conditions initiales sont incluses dans cette transformation. Les propriétés de différenciation temporelle sont:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f\left(0^-\right)$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

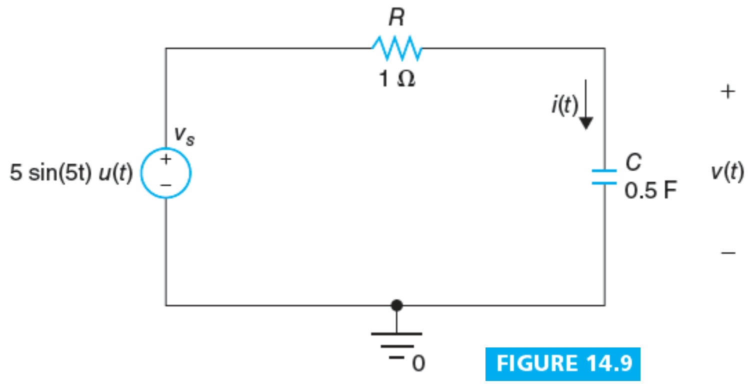


FIGURE 14.9

- Considérons un circuit RC illustré ci-contre.

  La tension initiale aux bornes du condensateur est $v(0^-) = 1$ V.
- $-v_s + Ri(t) + v(t) = 0$, $i(t) = C\, dv(t)/dt \Rightarrow -v_s + RC\, dv(t)/dt + v(t) = 0$
- $dv(t)/dt + 2v(t) = 10 \sin(5t)\, u(t) \Rightarrow sV(s) - 1 + 2V(s) = 10\times5/(s^2 + 5^2)$
- $(s + 2)V(s) = (s^2 + 75)/(s^2 + 5^2)$

Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace (suite)

- V(s) est donné par

$$V(s)=\frac{s^2+75}{(s+2)(s^2+5^2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+5^2}=\frac{(A+B)s^2+(2B+C)s+25A+2C}{(s+2)(s^2+5^2)}$$

- A + B = 1, 2B + C = 0, 25A + 2C = 75

  ⇒A = 1 – B, C = – 2B, 25(1 – B) – 4B = 75

  B = – 50/29, C = 100/29, A = 79/29

- V(s) peut être réécrit comme suit :

$$V(s)=\frac{\frac{79}{29}}{s+2}+\frac{-\frac{50}{29}s+\frac{40}{58}\times 5}{s^2+5^2}$$

- En prenant la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$v(t)=\left[\frac{79}{29}e^{-2t}-\frac{50}{29}\cos(5t)+\frac{40}{58}\sin(5t)\right]u(t)=\left[2.7241e^{-2t}-1.7241\cos(5t)+0.6897\sin(5t)\right]u(t)$$

Utilisez la transformée de Laplace pour trouver i(t) à travers l'inductance dans le circuit de la Figure 14.10.

- La tension initiale aux bornes du condensateur est v(0–) = 2 V, et le courant initial à travers l'inductance est i(0–) = 1 A.
- Somme des courants sortant du **nœud 1** :

$$(v - vs)/1 + 0{,}5\, dv(t)/dt + i = 0 \Rightarrow dv(t)/dt + 2v + 2i = 2v_s \quad (1)$$

- Somme des courants sortant du **nœud 2**:

$$(1 * di(t)/dt - v)/1 + i = 0 \quad (2) \qquad di(0^-)/dt = v(0^-) - i(0^-) = 1 \text{ A/s}$$

- Equation (2): $v(t) = di(t)/dt + i \quad (3)$
- Substituer (3) dans (1):

$$I(s) = \frac{s^2 + 4s + 10}{s(s^2 + 3s + 4)}$$

$$d^2i(t)/dt^2 + di(t)/dt + 2di(t)/dt + 2i(t) + 2i(t) = 2v_s(t)$$

$$\Rightarrow d^2i(t)/dt^2 + 3di(t)/dt + 4i(t) = 2v_s(t)$$

$$\Rightarrow s^2I(s) - s\, i(0^-) - di(0^-)/dt + 3[sI(s) - i(0^-)] + 4I(s) = 10/s$$

$$(s^2 + 3s + 4)I(s) = (s^2 + 4s + 10)/s$$

$$I(s) = (s^2 + 4s + 10)/[s(s^2 + 3s + 4)]$$

$$i(t) = [2.5 - 1.5e^{-1.5t}\cos(1.3229t) - 0.9449e^{-1.5t}\sin(1.3229t)]\, u(t)$$

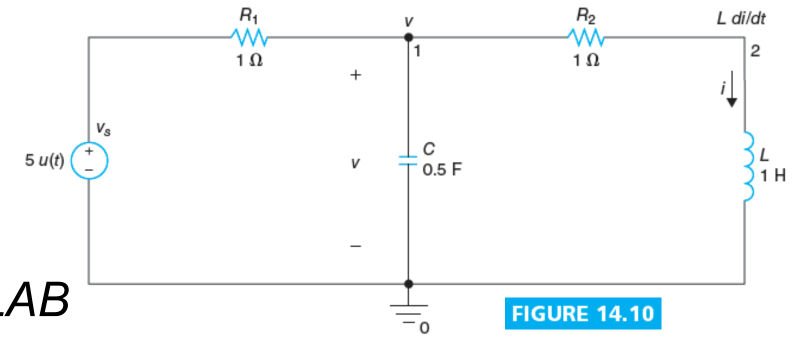


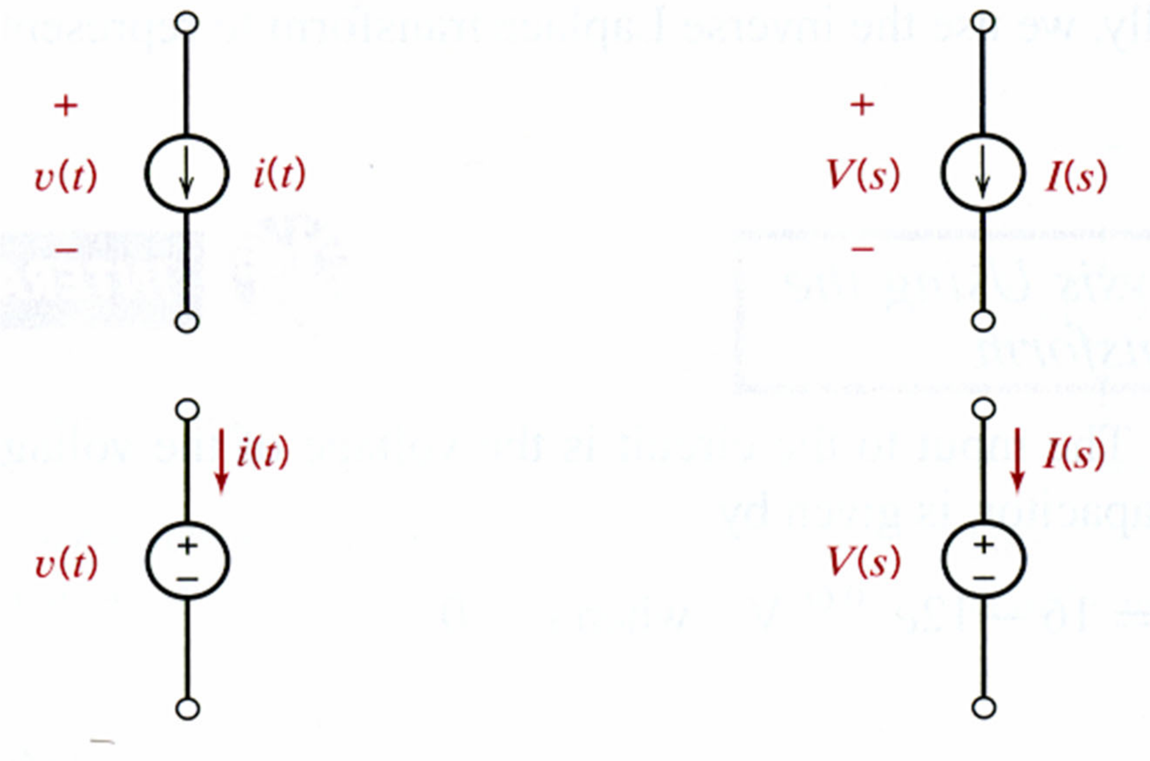
FIGURE 14.10

Transformée de Laplace inverse en utilisant MATLAB

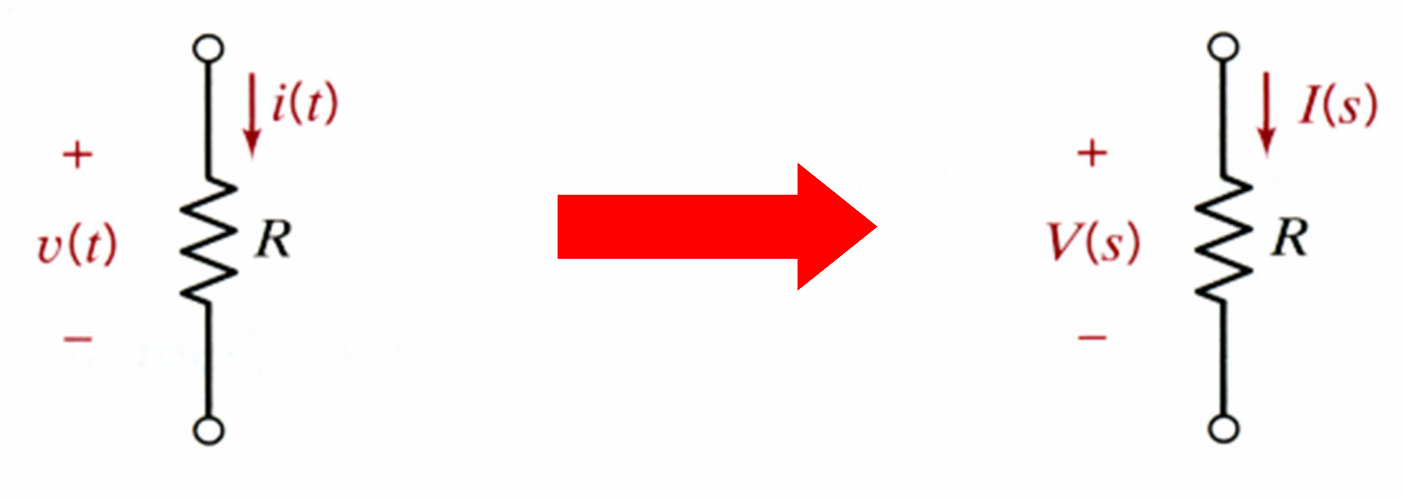
*L⁻¹(I(s))=[5/2 - (3*exp(-(3*t)/2)*(cos((7^(1/2)*t)/2) + (5*7^(1/2)*sin((7^(1/2)*t)/2))/21))/2]u(t)*

Analyse des circuits dans l'espace de Laplace

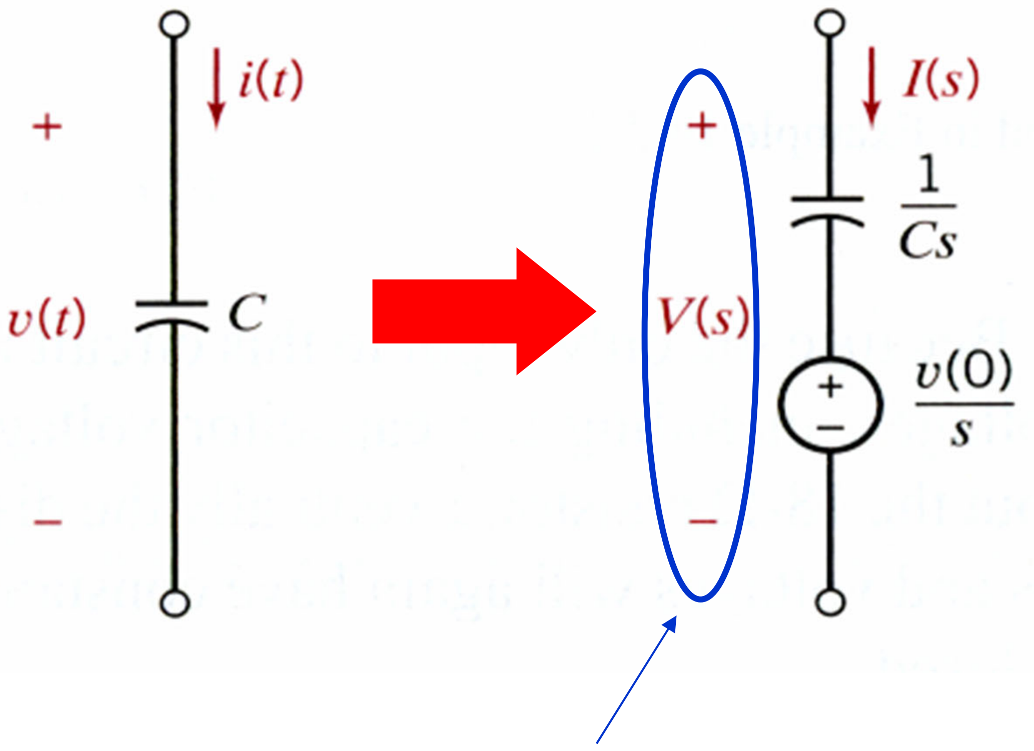
Transformation de sources



Transformation de résistance

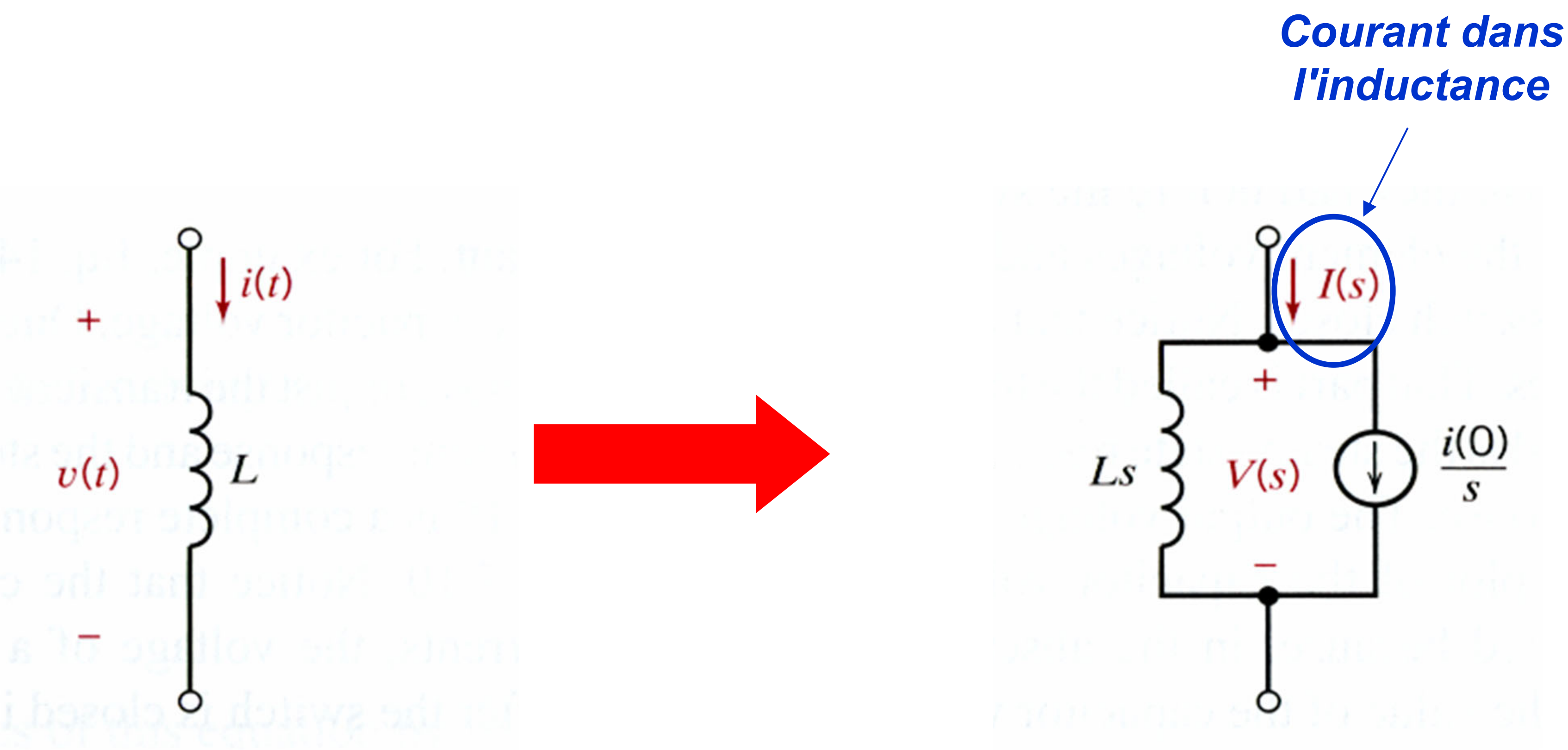


Transformation de condensateur



Tension aux bornes du condensateur

Transformation d'inductance



Impédance et admittance dans l'espace de Laplace

Impédance →

$$Z(s) = \left.\frac{V(s)}{I(s)}\right|_{Condition \quad initiale = 0}$$

Admittance →

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

Élément	Z(s)	Y(s)
R	R	1/R
L	Ls	1/Ls
C	1/Cs	Cs

Les calculs dans le domaine de s se font comme pour les <u>circuits résistifs</u> dans l'espace temps.

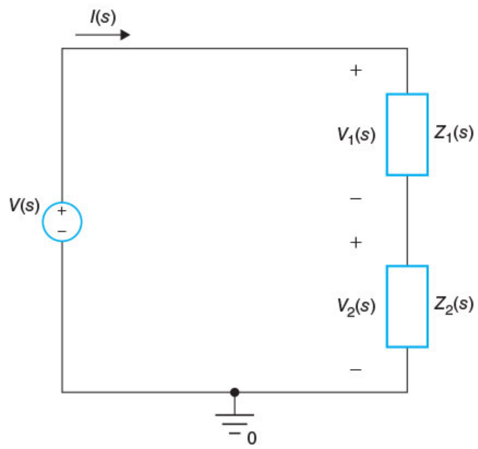
Diviseur de tension dans le domaine s

- Une source de tension, V(s), est appliquée à une connexion série d'impédances Z1(s) et Z2(s), comme le montre la Figure 15.5.
- KVL: $-V(s) + Z_1(s)I(s) + Z_2(s)I(s) = 0 \Rightarrow$ $$I(s) = \frac{V(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$
- Tension aux bornes de Z_1 est $$V_1(s) = Z_1(s)I(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}V(s)$$
- Tension aux bornes de Z_2 est $$V_2(s) = Z_2(s)I(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}V(s)$$
- La tension V(s) est répartie entre $V_1(s)$ et $V_2(s)$ proportionnellement aux impédances $Z_1(s)$ et $Z_2(s)$.
- En général, si N impédances $Z_1(s)$, $Z_2(s)$, ….., $Z_N(s)$ sont connectées en série à une source de tension V(s), la tension aux bornes de $Z_n(s)$ est:

$$V_n(s) = \frac{Z_n(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)+.....+Z_N(s)}V(s)$$

FIGURE 15.5

A voltage source connected in series with two impedances.



Diviseur de courant dans le domaine s

- Une source de courant est raccordée à deux impédances $Z_1(s)$ et $Z_2(s)$ en // comme le montre la Figure 15.12.
- $Z(s) = Z_1(s) \parallel Z_2(s) = Z_1(s)\times Z_2(s)/ [Z_1(s) + Z_2(s)]$
- La tension aux bornes de $Z_1(s)$ et $Z_2(s)$ est $V(s) = I(s)Z(s) = I(s)\times Z_1(s)\times Z_2(s)/ [Z_1(s) + Z_2(s)]$
- Le courant dans $Z_1(s)$ est $I_1(s) = \dfrac{V(s)}{Z_1(s)} = I(s)\times\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)} = I(s)\times\dfrac{Y_1(s)}{Y_1(s)+Y_2(s)}$
- Le courant dans $Z_2(s)$ est $I_2(s) = \dfrac{V(s)}{Z_2(s)} = I(s)\times\dfrac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)} = I(s)\times\dfrac{Y_2(s)}{Y_1(s)+Y_2(s)}$
- En général, si N impédances $Z_1(s)$, $Z_2(s)$, ….., $Z_N(s)$ sont connectés parallèlement à une ou plusieurs sources de courant, le courant à travers $Z_n(s)$ est

$$I_n(s) = \frac{\dfrac{1}{Z_n(s)}}{\dfrac{1}{Z_1(s)}+\dfrac{1}{Z_2(s)}+.....+\dfrac{1}{Z_N(s)}} I(s) = \frac{Y_n(s)}{Y_1(s)+Y_2(s)+.....+Y_N(s)} I(s)$$

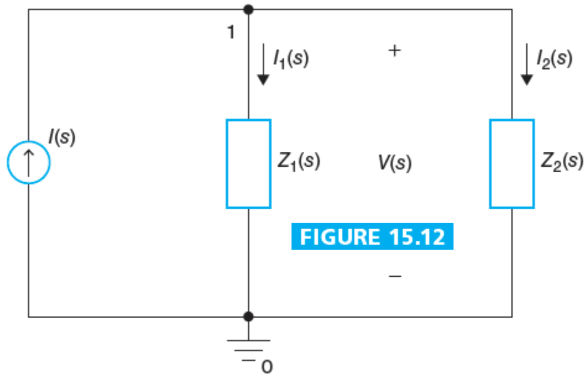
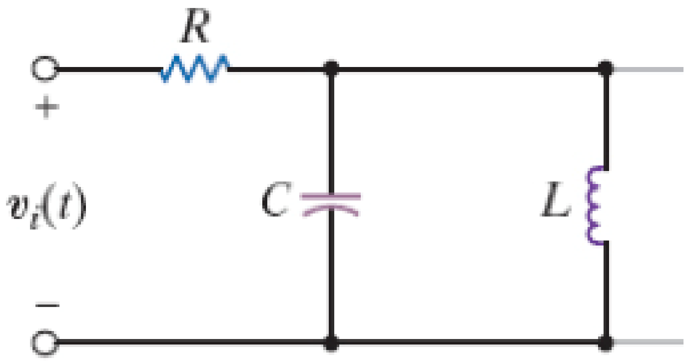


FIGURE 15.12

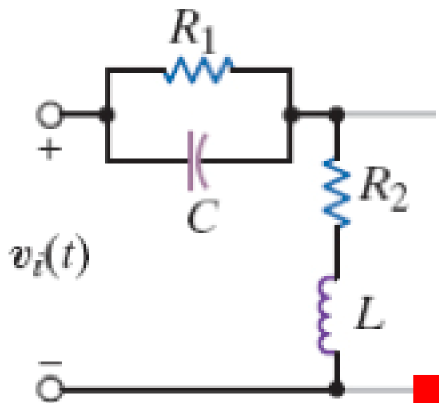
Impédance vue dans l'espace de Laplace

Exemple 1



$$Z(s) = R + \left(\frac{1}{sC} \,||\, sL\right) = R + \frac{sL}{s^2LC + 1}$$

Exemple 2



$$Z(s) = \left(R_1 \,||\, \frac{1}{sC}\right) + (R_2 + sL)$$

$$= \frac{R_1}{sR_1C + 1} + R_2 + sL$$

Condensateur et Inductance dans le domaine en s

Effet des conditions initiales

- i(t) = C dv(t)/dt et I(s) = C[sV(s) – v(0⁻)] = CsV(s) – Cv(0⁻) (1).

$$V(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v(0^-)}{s} \quad (2)$$

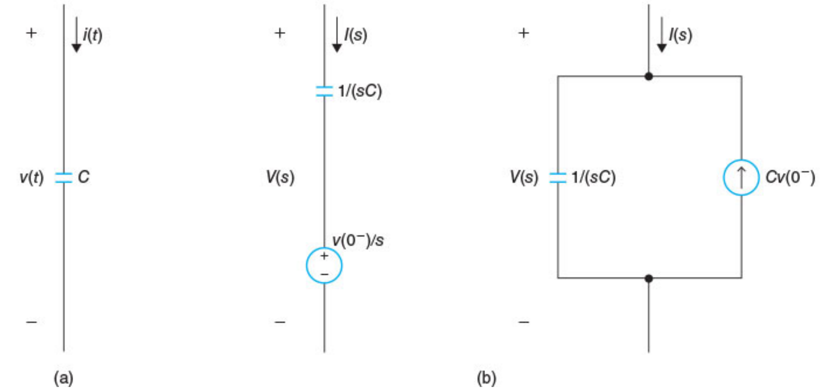
$$V(s)=\frac{1}{sC}I(s) \quad (3)$$

$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=\frac{1}{sC} \quad (4)$$

$$I(s)=\frac{V(s)}{\frac{1}{sC}}-Cv(0^-) \quad (5)$$

FIGURE 15.3

(a) Capacitor in the time domain.
(b) Capacitor in the *s*-domain.



- v(t) = L di(t)/dt et V(s) = L[sI(s) – i(0⁻)] = sLI(s) – Li(0⁻) (1).

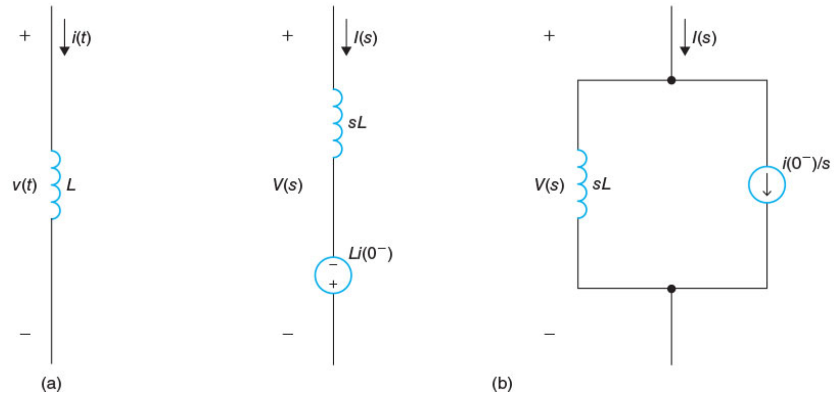
$$I(s)=\frac{V(s)}{sL}+\frac{i(0^-)}{s} \quad (2)$$

$$I(s)=\frac{V(s)}{sL} \quad (3)$$

$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}=sL \quad (4)$$

FIGURE 15.4

(a) Inductor in the time domain.
(b) Inductor in the *s*-domain.



EXAMPLE 15.1

- Le courant initial traversant l'inductance illustré à la Figure 15.6 est $i(0^-) = 3$ A. Trouvez $v_R(t)$ pour $v_s(t) = u(t)$.
- Le circuit dans le domaine s est représenté à la Figure 15.7.
- $V_R(s) = (1/s + 1.5)\times 2/(0.5s + 2) = (3s + 2)/[s(0.5s + 2)]$
  $= (6s + 4)/[s(s + 4)]$

$$V_R(s) = \frac{6s+4}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

- A = 1, B = 5
- $v_R(t) = (1 + 5e^{-4t})\, u(t)$ V

FIGURE 15.7

Circuit in the *s*-domain.

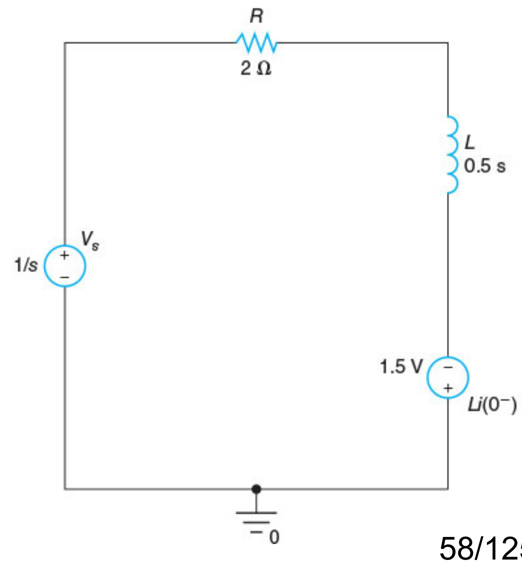
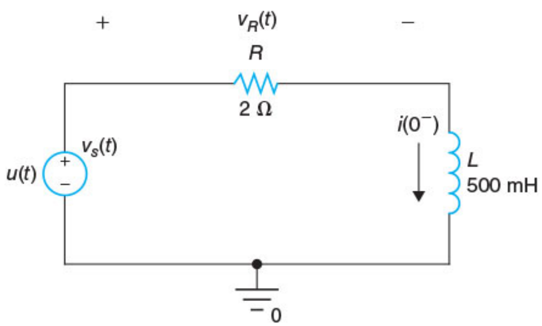


FIGURE 15.6

Circuit for EXAMPLE 15.1.



EXAMPLE 15.3

- Si $i(0^-) = 2$ A et $v(0^-) = 6$ V dans le circuit de la Figure 15.13. Trouvez $i_R(t)$ pour $t \geq 0$.
- Le circuit dans le domaine s est représenté à la Figure 15.14. Les trois sources de courant peuvent être combinées en une seule:

  $4/s - 2/s + 3 = (3s + 2)/s \ (\uparrow)$
- $I_R(s)$ est donné par

$$I_R(s) = \frac{3s+2}{s} \times \frac{\frac{1}{0.4}}{\frac{1}{0.4} + \frac{3}{s} + \frac{s}{2}} = \frac{7.5s+5}{0.5s^2 + 2.5s + 3} = \frac{15s+10}{s^2+5s+6} = \frac{15s+10}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

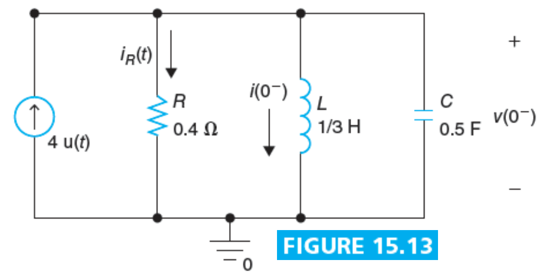


FIGURE 15.13

- A = – 20, B = 35
- $i_R(t) = (-20e^{-2t} + 35e^{-3t})\, u(t)$

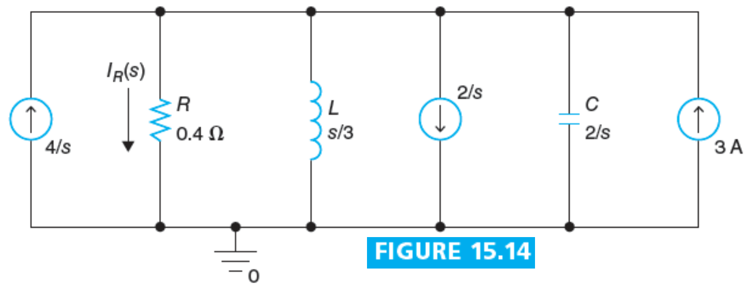


FIGURE 15.14

Méthode d'analyse par la T. de Laplace

Étape 1: Transformer le circuit du domaine temps vers le domaine s.

Étape 2: Établir les équations d'équilibre en utilisant les méthodes habituelles. Les équations obtenues sont des équations algébriques.

Étape 3: Résoudre les équations d'équilibre dans le domaine s et déterminer la réponse désirée.

Étape 4: Effectuer la transformée de Laplace inverse de la réponse en s, pour obtenir la réponse dans le domaine temporel.

Analyse nodale dans le domaine *s* *À lire*

- L'analyse nodale fournit des tensions à tous les nœuds d'un circuit donné. Si une source de tension est connectée entre un nœud et la masse, la tension du nœud est déjà connue et nous n'avons pas besoin de trouver la tension de ce nœud.
- L'analyse nodale s'applique au circuit transformé de Laplace. Tous les éléments du circuit sont représentés dans le domaine s. Les entrées et sorties sont représentées par leurs transformées de Laplace dans le domaine s.
- Les expressions du domaine temporel sont obtenues en prenant les transformations de Laplace inverses des expressions du domaine s.
- Cette méthode peut être utilisée pour trouver la réponse d'un circuit pour un signal d'entrée arbitraire tant que l'intégrale de Laplace du signal d'entrée converge.

Exemple d'analyse nodale dans le domaine *s*

- L'interrupteur du circuit illustré à la Figure 15.19 a été ouvert pendant une longue période avant d'être fermé à t = 0. Trouver la tension $v_o(t)$ aux bornes de R_3 pour $t \geq 0$. Le circuit dans le domaine s est représenté à la Figure 15.20.
- Additionnez les courants sortant du nœud 1 :

$$i(0^-) = 12\ \text{V}/6\ \Omega = 2\ \text{A}.$$
$$v(0^-) = 2\ \text{A} \times 2\ \Omega = 4\ \text{V}.$$

$$\frac{V_o-8}{4s+2}+\frac{V_o}{2}+\frac{V_o-\frac{4}{s}}{\frac{3}{s}}=0 \Rightarrow V_o\left(\frac{1}{4s+2}+\frac{1}{2}+\frac{s}{3}\right)=\frac{16s+32}{3(4s+2)}$$

$$V_o=\frac{4(s+2)}{s^2+2s+1.5}=4\frac{(s+1)}{(s+1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+4\sqrt{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(s+1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

0.5

$$v_o(t)=4\left[e^{-t}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)+\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\right]u(t)$$

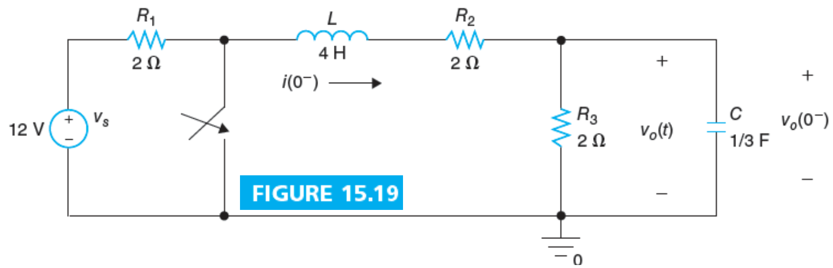


FIGURE 15.19

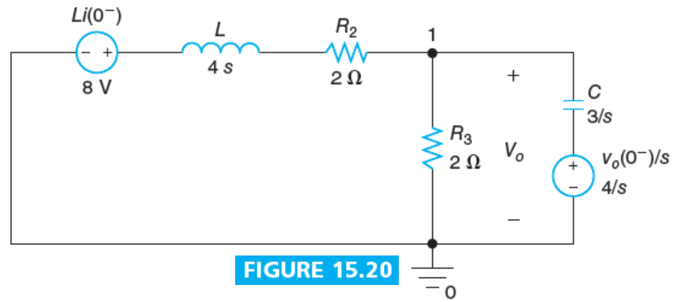


FIGURE 15.20

Analyse des mailles dans le domaine *s* *À lire*

- L'analyse des mailles fournit des courants circulatoires dans toutes les mailles du circuit. À partir de ces courants, nous pouvons trouver des courants dans chaque branche. Si une maille contient une source de courant, le courant de maille est le même que le courant de la source de courant s'ils pointent dans la même direction. Si la direction est opposée, le courant de maille est le négatif du courant provenant de la source de courant.
- L'analyse des mailles s'applique au circuit transformé de Laplace. Tous les éléments sont alors représentés dans le domaine s. Les signaux d'entrées et sorties sont représentés par leurs transformées de Laplace.
- Les expressions du domaine temporel sont obtenues en prenant les transformée de Laplace inverses des expressions du domaine s.
- Cette méthode peut être utilisée pour trouver la réponse d'un circuit pour une entrée arbitraire tant que l'intégrale de Laplace du signal d'entrée converge.

Exemple d'analyse des mailles dans le domaine *s*

- Si $v(0^-) = 1$ V dans le circuit représenté à la Figure 15.28, trouvez $v(t)$ pour $t \geq 0$ via la méthode des mailles. Le circuit dans le domaine s est représenté à la Figure 15.29.
- Maille 1: $-5/s + 4I_1 + (2/s)(I_1 - I_2) + 1/s = 0$

  $(4s + 2)I_1 - 2I_2 = 4 \Rightarrow I_2 = (2s + 1)I_1 - 2 \quad (1)$
- Maille 2: $-1/s + (2/s)(I_2 - I_1) + 3I_2 + 2I_2 = 0$

  $-2I_1 + (5s + 2)I_2 = 1 \quad (2)$
- (1)→(2): $-2I_1 + (5s + 2)[(2s + 1)I_1 - 2] = 1$
- $I_1 = (10s + 5)/[(5s + 2)(2s + 1) - 2]$
- $I_1 = (10s + 5)/(10s^2 + 9s) = (s + 0.5)/[s(s + 0.9)]$
- $I_2 = (2s + 1)I_1 - 2 = (0.2s + 0.5)/[s(s + 0.9)]$
- $V = (2/s)(I_1 - I_2) + 1/s = (s + 2.5)/[s(s + 0.9)]$

  $= 2.7778/s - 1.7778/(s + 0.9)$
- $v(t) = (2.7778 - 1.7778e^{-0.9t})\,u(t)$ V

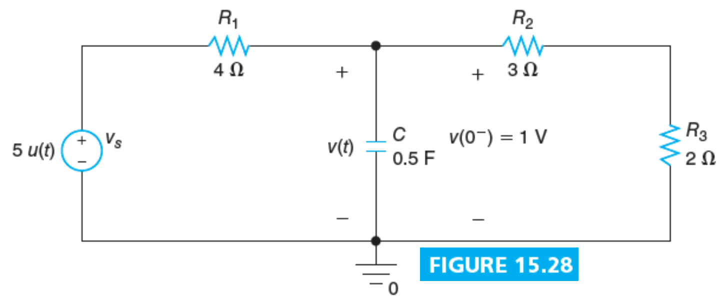


FIGURE 15.28

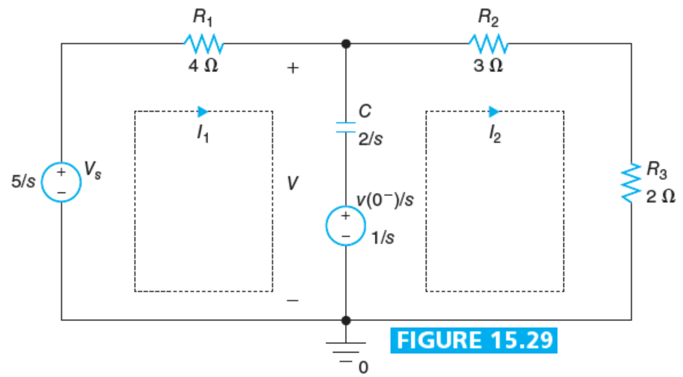


FIGURE 15.29

Notez les bornes V(s)

Circuit équivalent Thévenin dans le domaine s

- La Figure 15.40 montre un circuit avec une paire de bornes a et b. Si le circuit est un circuit transformé de Laplace constitué d'impédances et de sources dans le domaine s, il peut être représenté par une source en série avec une impédance comme le montre la Figure 15.41.
- La tension équivalente de Thévenin $V_{th}(s)$ est obtenue en trouvant la tension en circuit ouvert entre a et b à partir du circuit d'origine, comme le montre la Figure 15.42.
- Trois méthodes pour trouver l'impédance équivalente de Thévenin Zth(s):
  - (a) Trouver le courant de court-circuit $I_{sc}(s)$ entre a et b, comme indiqué à la Figure 15.43. L'impédance équivalente de Thévenin est donnée par

$$Z_{th}(s) = \frac{V_{th}(s)}{I_{sc}(s)}$$

FIGURE 15.40

A circuit with terminals *a* and *b*.

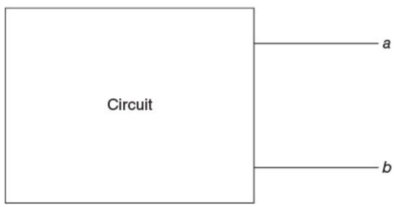


FIGURE 15.41

Thévenin equivalent circuit.

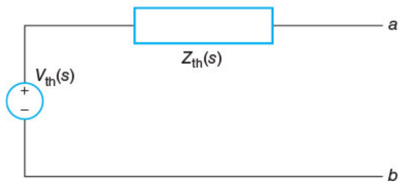


FIGURE 15.42

Open-circuit voltage.

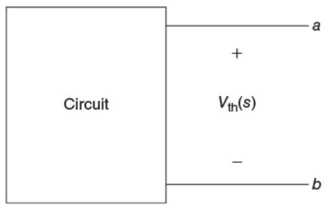
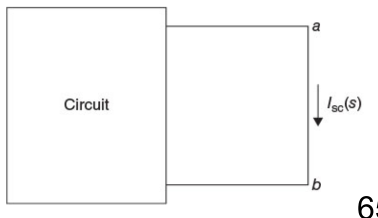


FIGURE 15.43

Short-circuit current.



Circuit équivalent Thévenin dans le domaine *s* (suite)

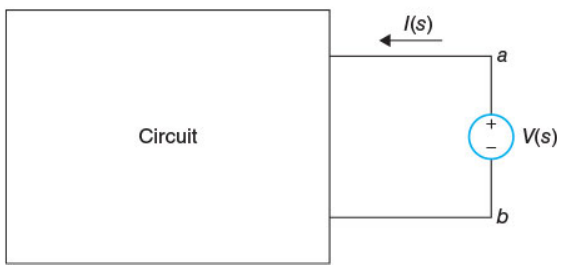
- (b) Désactiver les sources indépendantes dans le circuit en court-circuitant les sources de tension et en ouvrant les sources de courant. Ensuite, trouvez l'impédance équivalente vue des bornes a et b. Cette méthode ne peut pas être utilisée si le circuit contient des sources dépendantes.
- (c) Désactiver les sources indépendantes dans le circuit en court-circuitant les sources de tension et en ouvrant les sources de courant. Appliquer une tension d'essai V(s) entre les bornes a et b comme indiqué à la Figure 15.44. Trouvez le(s) courant(s) circulant(s) dans le circuit à partir de la borne positive de la source de tension d'essai. Ensuite, l'impédance équivalente de Thévenin est donnée par

$$Z_{th}(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

- Une source de courant de test peut être utilisée à la place d'une source de tension.

FIGURE 15.44

A test voltage.



Circuit équivalent Thévenin dans le domaine s

À lire

- Les tensions initiales aux bornes des condensateurs sont nulles dans le circuit illustré à la Figure 15.51. Trouvez le circuit équivalent de Thévenin entre les bornes a et b. Le circuit du domaine s est illustré à la Fig. 15.52.
- Figure 15.52: Nœud 1: $\dfrac{V_a-5/s}{4}+\dfrac{V_a}{2/s}+\dfrac{V_a-V_o}{1/s}=0 \Rightarrow V_a=\dfrac{s}{1.5s+0.25}V_o+\dfrac{1.25}{s(1.5s+0.25)}$
- Figure 15.52: Nœud 2: $\dfrac{V_o-V_a}{1/s}+0.2V_a+\dfrac{V_o}{5}=0 \Rightarrow V_{th}=V_o=\dfrac{2.5s-0.5}{s(s^2+1.5s+0.1)}$

$$(s+0.2)V_o+\frac{s(-s+0.2)}{1.5s+0.25}V_o+\frac{1.25(-s+0.2)}{s(1.5s+0.25)}=0$$

- Figure 15.53: Nœud 1: courant de cc

$$\frac{V_a-5/s}{4}+\frac{V_a}{2/s}+\frac{V_a}{1/s}=0 \Rightarrow V_a=\frac{1.25}{s(1.5s+0.25)}=\frac{5/6}{s(s+1/6)}$$

$$I_{C_2}=\frac{V_a}{\frac{1}{s}}=\frac{\frac{5}{6}}{s+\frac{1}{6}} \qquad I_{VCCS}=0.2V_a=\frac{\frac{1}{6}}{s\left(s+\frac{1}{6}\right)}$$

$$I_{SC}=I_{C_2}-I_{VCCS}=\frac{5/6}{s+1/6}-\frac{1/6}{s(s+1/6)}=\frac{(5/6)(s-0.2)}{s(s+1/6)}$$

$$Z_{th}=\frac{V_o}{I_{sc}}=\frac{3s+0.5}{s^2+1.5s+0.1}$$

$$Z_{th}=\frac{V_o}{I_{sc}}=\frac{\dfrac{2.5s-0.5}{s(s^2+1.5s+0.1)}}{\dfrac{\frac{5}{6}(s-0.2)}{s\left(s+\frac{1}{6}\right)}}=\frac{\frac{6}{5}\times 2.5(s-0.2)\left(s+\frac{1}{6}\right)}{(s^2+1.5s+0.1)(s-0.2)}=\frac{3s+0.5}{s^2+1.5s+0.1}$$

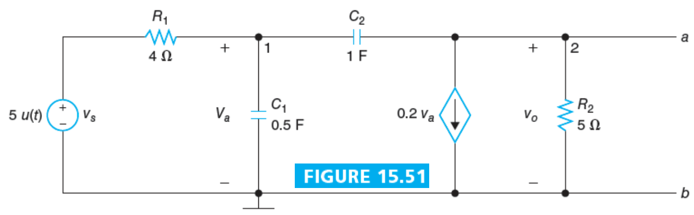


FIGURE 15.51

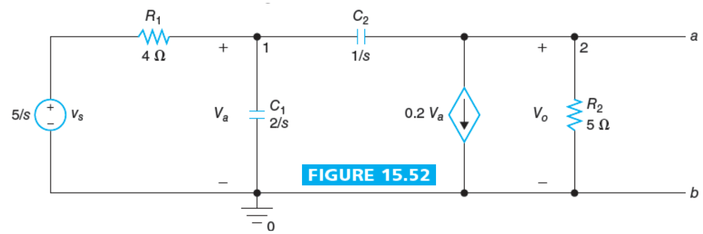


FIGURE 15.52

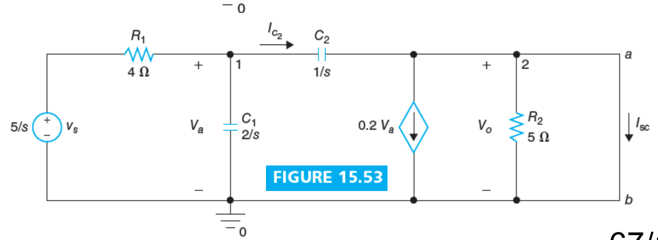


FIGURE 15.53

Circuit Norton équivalent dans le domaine *s*

- La Figure 15.57 montre un circuit avec une paire de bornes a et b. Si le circuit est un circuit transformé de Laplace constitué d'impédances et de sources dans le domaine s, le circuit peut être représenté par une source de courant et une impédance parallèle comme le montre la Figure 15.58. Cette représentation est appelée circuit équivalent Norton.
- Le courant équivalent de Norton $I_N(s)$ est obtenu en trouvant le courant de court-circuit entre a et b du circuit d'origine, comme le montre la Figure 15.59.
- L'impédance équivalente Norton est trouvée en utilisant les mêmes méthodes que celles utilisées pour trouver l'impédance équivalente de Thévenin.

FIGURE 15.57

Circuit with a pair of terminals *a* and *b*.

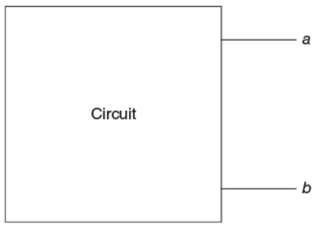


FIGURE 15.58

Norton-equivalent circuit.

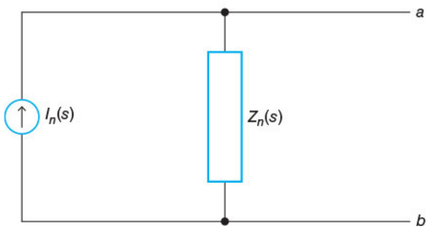
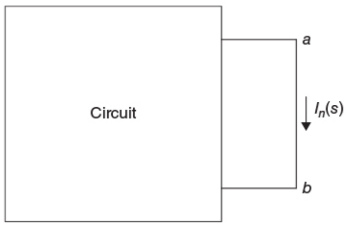


FIGURE 15.59

Short-circuit current.



Circuit Norton équivalent dans le domaine s

À lire

- Les tensions initiales aux condensateurs sont nulles dans le circuit illustré à la Figure 15.66. Trouvez le circuit Norton équivalent entre les bornes a et b.

- Figure 15.67 Nœud 1 : $\frac{V_a - 4/s}{2} + \frac{V_a}{5/s} + \frac{V_a - V_o}{5} = 0 \Rightarrow V_a = \frac{1}{s+3.5} V_o + \frac{10}{s(s+3.5)}$

- Figure 15.67 Nœud 2 : $\frac{V_o - V_a}{5} + 0.5V_a + \frac{sV_o}{10} = 0 \Rightarrow V_{oc} = V_o = \frac{-3}{s\left[0.1s^2 + 0.55s + 1\right]} = \frac{-30}{s\left(s^2 + 5.5s + 10\right)}$

$$(0.1s + 0.2)V_o + \frac{0.3}{s + 3.5}V_o + \frac{3}{s(s + 3.5)} = 0$$

- Fig.15.68 Nœud 1: $\frac{V_a - 4/s}{2} + \frac{V_a}{5/s} + \frac{V_a}{5} = 0 \Rightarrow V_a = \frac{2}{s(0.2s+0.7)} = \frac{10}{s(s+3.5)}$

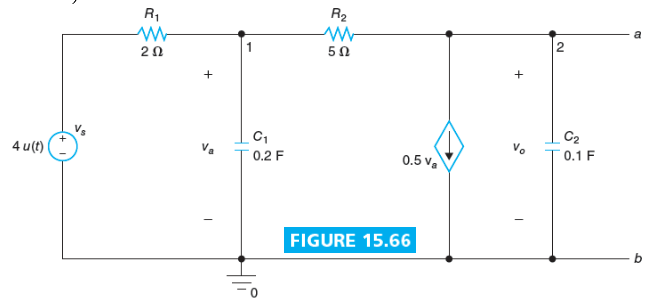


FIGURE 15.66

$$I_{R_2} = \frac{V_a}{5} = \frac{2}{s(s + 3.5)} \qquad I_{VCCS} = 0.5V_a = \frac{5}{s(s + 3.5)}$$

$$I_N = I_{SC} = I_{R_2} - I_{VCCS} = \frac{2}{s(s+3.5)} - \frac{5}{s(s+3.5)} = \frac{-3}{s(s+3.5)}$$

$$Z_n = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{10(s+3.5)}{s^2 + 5.5s + 10}$$

$$Z_n = \frac{V_o}{I_{sc}} = \frac{\frac{-30}{s(s^2 + 5.5s + 10)}}{\frac{-3}{s(s + 3.5)}} = \frac{10(s + 3.5)}{s^2 + 5.5s + 10}$$

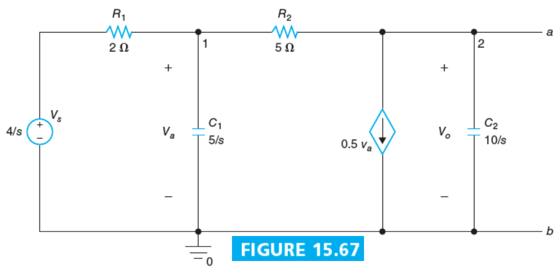


FIGURE 15.67

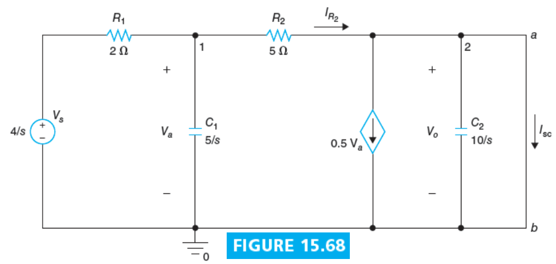


FIGURE 15.68

Fonction de transfert

- Dans le circuit transformé de Laplace avec des conditions initiales nulles, le rapport de la sortie dans le domaine s à l'entrée dans le domaine s est défini comme la fonction de transfert.
- Soit X(s) la représentation du domaine s de l'entrée, et soit Y(s) la représentation du domaine s de la sortie. La fonction de transfert est alors:
- $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$
- L'entrée peut être une tension ou un courant, et la sortie peut être une tension ou un courant. La ou les sorties Y peuvent être écrites sous la forme

  Y(s) = H(s)X(s)
- La fonction de transfert H(s) transfère l'entrée X(s) vers la (les) sortie(s). Dans le processus de transfert, le signal d'entrée est modifié. La nature de la modification est spécifiée dans la fonction de transfert.
- La fonction de transfert H(s) représente les effets du circuit (ou du système en général) sur le(s) signaux X(s) d'entrée.

Fonctions de réseau…

La réponse y(t) est reliée à l'excitation x(t) par:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0\, y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0\, x$$

T. Laplace

$$Y(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(s-p_i)}}_{\text{résidus et pôles de } H(s)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m_x} \frac{K_j}{(s-p_j)}}_{\text{résidus et pôles de } X(s)}$$

$$\boxed{Y(s) = H(s)X(s)}$$

Excitation — **Fonction de réseau** — **Réponse**

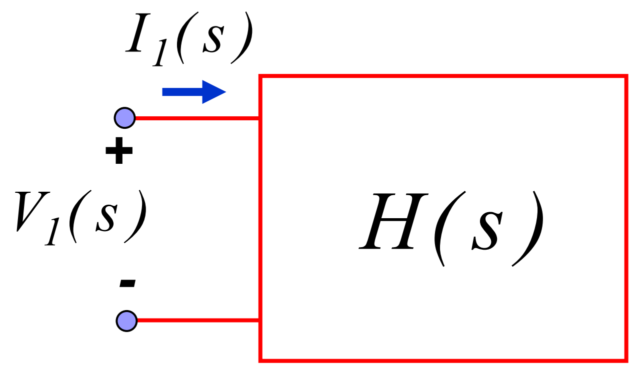
$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Fonctions de réseau…

Fonction immitance

Impédance

Admittance



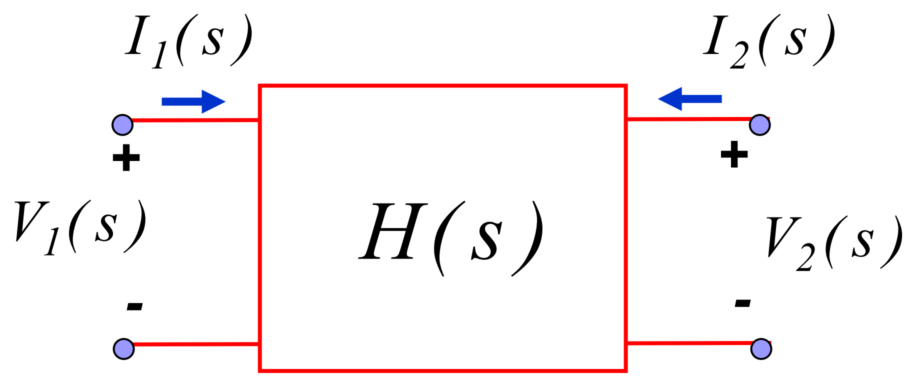
Fonctions de transfert

Impédance,

Admittance,

Gain en tension,

Gain en courant



Fonctions de réseau

Fonction de réseau		H(s)
Immitance	Impédance	$Z_1(s) = \dfrac{V_1(s)}{I_1(s)}$
	Admittance	$Y_1(s) = \dfrac{I_1(s)}{V_1(s)}$
Fonction de transfert	Impédance de transfert	$Z_{12}(s) = \dfrac{V_2(s)}{I_1(s)}$
	Admittance de transfert	$Y_{12}(s) = \dfrac{I_2(s)}{V_1(s)}$
	Gain en tension	$A_{V_{12}}(s) = \dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$
	Gain en courant	$A_{I_{12}}(s) = \dfrac{I_2(s)}{I_1(s)}$

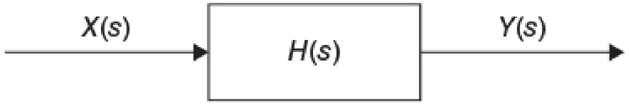
Hoang Le-Huy, Circuits électriques, 2004

Réponse à l'impulsion, réponse à l'échelon, réponse à la rampe

- La fonction de transfert H(s) masque les détails du circuit et décrit mathématiquement les effets du circuit sur le signal d'entrée. Le circuit donné peut maintenant être représenté comme une boîte noire avec H(s) comme le montre la Figure 15.71.
- La sortie y(t) est obtenue en prenant la transformée de Laplace inverse de Y(s), c'est-à-dire y(t) = L-1[Y(s)] = L-1[H(s)X(s)].
- Réponse impulsionnelle: **x(t) = δ(t).** X(s) = 1. Y(s) = H(s)×1 = H(s).
  $h(t) = L^{-1}[H(s)]$
- Réponse à l'échelon: **x(t) = u(t).** X(s) = 1/s. Y(s) = H(s)/s.
  $h_s(t) = L^{-1}[H(s)/s]$
- Réponse à la rampe: **x(t) = tu(t).** X(s) = 1/s^2. Y(s) = H(s)/s^2.
  $h_r(t) = L^{-1}[H(s)/s^2]$

FIGURE 15.71

Black box representation of a circuit.



Retour sur les Pôles et Zéros

- La fonction de transfert H(s) est donnée par un rapport du polynôme numérateur N(s) au polynôme du dénominateur D(s):

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- **Les racines de D(s) = 0 sont appelées pôles et les racines de N(s) = 0 sont appelées zéros.** À l'emplacement des pôles, H(s) devient infini, et à l'emplacement des zéros, H(s) devient zéro. Un tracé qui montre des pôles et des zéros est appelé **diagramme pôle-zéro**.
- La fonction de transfert peut être écrite sous forme factorisée comme suit :

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2).....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2).....(s-p_n)}$$

où p_1, p_2, ….., p_n sont des pôles, z_1, z_2, ….., z_m sont des zéros, et K est une constante.

Réponse en amplitude

- La réponse en fréquence $H(\omega)$ est obtenue en évaluant la fonction de transfert à $s = j\omega$:

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = K\frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2).....(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2).....(j\omega - p_n)}$$

- La réponse en amplitude est obtenue en prenant la valeur absolue de $H(\omega)$.

$$|H(\omega)| = |K|\frac{|j\omega - z_1||j\omega - z_2|.....|j\omega - z_m|}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2|.....|j\omega - p_n|}$$

- Chaque terme du dénominateur est la distance de $j\omega$ à l'emplacement d'un pôle, et chaque terme du numérateur est la distance de $j\omega$ à l'emplacement d'un zéro. La réponse en amplitude peut être obtenue en multipliant les distances de $j\omega$ à tous les zéros DZ_k et gain $|K|$, puis en le divisant par le produit des distances de $j\omega$ à tous les pôles DP_k.

$$|H(\omega)| = |K|\frac{\prod_{k=1}^{m} DZ_k}{\prod_{k=1}^{n} DP_k}$$

Réponse en phase

- La réponse en phase est obtenue en prenant l'angle de H(ω).

$$\angle H(\omega) = \angle K \frac{e^{j\angle j\omega - z_1} e^{j\angle j\omega - z_2} \ldots\ldots e^{j\angle j\omega - z_m}}{e^{j\angle j\omega - p_1} e^{j\angle j\omega - p_2} \ldots\ldots e^{j\angle j\omega - p_n}}$$

- Chaque terme du dénominateur est l'angle de jω à l'emplacement d'un pôle, et chaque terme du numérateur est l'angle de jω à l'emplacement d'un zéro. La réponse en phase peut être obtenue en ajoutant les angles de jω à tous les zéros AZ_k et l'angle de K, ∠K, puis en le soustrayant par la somme des angles de jω à tous les pôles AP_k.

$$\angle H(\omega) = \angle K + \angle j\omega - z_1 + \angle j\omega - z_2 + \cdots + \angle j\omega - z_m$$
$$- \angle j\omega - p_1 - \angle j\omega - p_2 - \cdots - j\omega - p_n$$

$$\angle H(\omega) = \angle K + \sum_{k=1}^{m} AZ_k - \sum_{k=1}^{n} AP_k$$

- À la fréquence ω = ∞
  - chaque zéro contribue pour +90° à l'angle de phase ∠H(ω)
  - chaque pôle contribue pour –90° à l'angle de phase ∠H(ω)

Exemple de fonction de transfert

- Trouver la fonction de transfert $H(s) = V_o(s)/V_{in}(s)$ du circuit représenté à la Figure 15.94.
- En additionnant les courants sortant du nœud a, nous obtenons

$$\frac{0-V_{in}(s)}{R_1}+\frac{0-V_{in}(s)}{\frac{1}{sC_1}}+\frac{0-V_o(s)}{R_2}+\frac{0-V_o(s)}{\frac{1}{sC_2}}=0 \Rightarrow \left(sC_2+\frac{1}{R_2}\right)V_o(s)=-\left(sC_1+\frac{1}{R_1}\right)V_{in}(s)$$

- La fonction de transfert est donnée par

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}=-\frac{sC_1+\frac{1}{R_1}}{sC_2+\frac{1}{R_2}}=-\frac{C_1}{C_2}\frac{s+\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_2}}$$

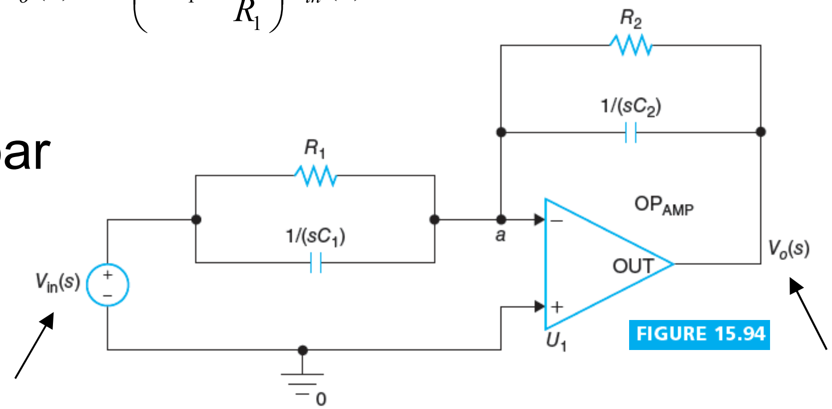


FIGURE 15.94

$$Z_2=\frac{1}{sC_2}//R_2=\frac{R_2}{R_2C_2s+1}$$

$$Z_1=\frac{1}{sC_1}//R_1=\frac{R_1}{R_1C_1s+1}$$

$$\frac{V_o}{V_{in}}=-\frac{Z_2}{Z_1}=-\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1}=-\frac{sC_1+\frac{1}{R_1}}{sC_2+\frac{1}{R_2}}$$

- Il y a un pôle à $s = -1/R_2C_2$ et un zéro à $s = -1/R_1C_1$. À $s = 0$, $H(s) = -R_2/R_1$ et à $s = \infty$, $H(s) = -C_1/C_2$.

Exemple de fonction de transfert

À lire

- Trouver la fonction de transfert $H(s) = V_o(s)/V_{in}(s)$ du circuit représenté à la figure 15.100.
- Noeud 1: $\dfrac{V_a - V_{in}}{R_1} + \dfrac{V_a}{\dfrac{1}{sC_1}} + \dfrac{V_a - V_o}{R_2} - g_m V_a = 0 \Rightarrow V_a = \dfrac{\dfrac{V_{in}}{R_1} + \dfrac{V_o}{R_2}}{sC_1 + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} - g_m}$
- Noeud 2: $\dfrac{V_o - V_a}{R_2} + g_m V_a + \dfrac{V_o}{\dfrac{1}{sC_2}} = 0 \Rightarrow \left(sC_2 + \dfrac{1}{R_2}\right)V_o + \left(-\dfrac{1}{R_2} + g_m\right)V_a = 0$

$$\left[\left(sC_2 + \frac{1}{R_2}\right) + \left(-\frac{1}{R_2} + g_m\right)\left(\frac{\frac{1}{R_2}}{sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g_m}\right)\right] V_o = \left(\frac{1}{R_2} - g_m\right)\left(\frac{\frac{V_{in}}{R_1}}{sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g_m}\right)$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{\left(\frac{1}{R_2} - g_m\right)\left(\frac{\frac{1}{R_1}}{sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g_m}\right)}{\left[\left(sC_2 + \frac{1}{R_2}\right) + \left(-\frac{1}{R_2} + g_m\right)\left(\frac{\frac{1}{R_2}}{sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - g_m}\right)\right]}$$

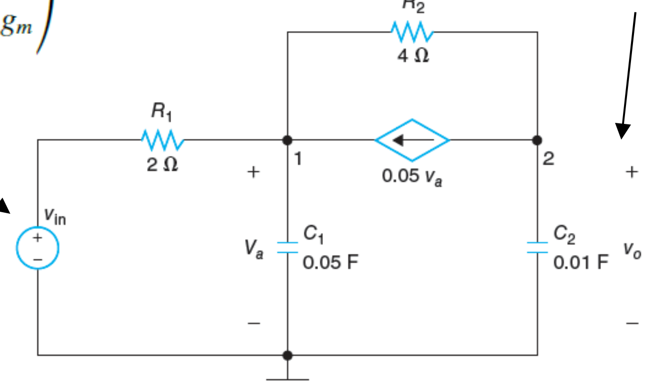
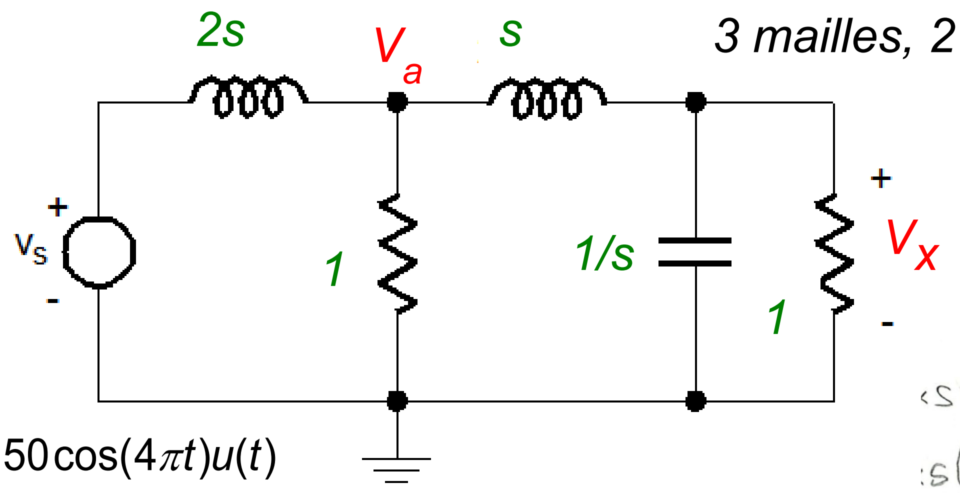


FIGURE 15.100

- La fonction de transfert est donnée par

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} == \frac{\dfrac{1}{R_1C_1C_2}\left(\dfrac{1}{R_2} - g_m\right)}{s^2 + \left(\dfrac{1}{R_2C_2} + \dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_1} - \dfrac{g_m}{C_1}\right)s + \dfrac{1}{R_2R_1C_1C_2}} = \frac{200}{s^2 + 39s + 250}$$

Transformation de circuits: *Ex 1 – Méthode #1*



3 mailles, 2 tensions nodales: trouver V_a et V_x

$$v_s(t) = 50\cos(4\pi t)u(t)$$

$$\downarrow$$

$$V_S(s) = \frac{50s}{s^2 + (4\pi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2s} + 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} + s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/2s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\cdot s$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + s + 1 & -1 \\ -1 & 1 + s^2 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_a - V_s}{sL_1} + \frac{V_a - 0}{R_1} + \frac{V_A - V_x}{sL_2} = 0 \longrightarrow \frac{V_a - V_s}{2s} + \frac{V_a}{1} + \frac{V_a - V_x}{s} = 0$$

$$\frac{V_x - V_a}{sL_2} + \frac{V_x - 0}{1/sC} + \frac{V_x - 0}{R_2} = 0 \longrightarrow \frac{V_x - V_a}{s} + sV_x + \frac{V_x}{1} = 0$$

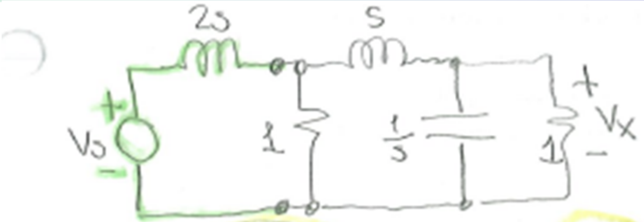
$$V_x = \frac{\begin{vmatrix} s + 3/2 & V_s/2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + 3/2 & -1 \\ -1 & s^2 + s + 1 \end{vmatrix}} = \frac{V_s/2}{(s^2+s+1)(s+3/2) - 1}$$

$$= \frac{V_s/2}{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + s^2 + \frac{3}{2}s + s + \frac{3}{2} - 1}$$

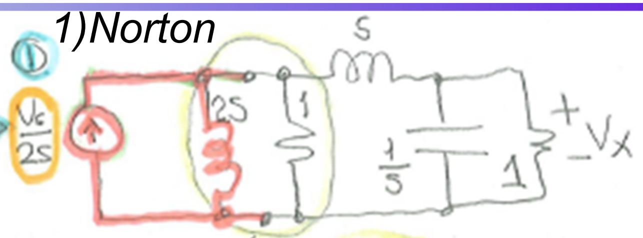
$$= \frac{V_s/2}{s^3 + \frac{5}{2}s^2 + \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}}$$

$$V_x(s) = \frac{0.5}{s^3 + 2.5s^2 + 2.5s + 0.5} \cdot \frac{50s}{s^2 + (4\pi)^2}$$

Transformation de circuits: Ex 1 – Méthode #2

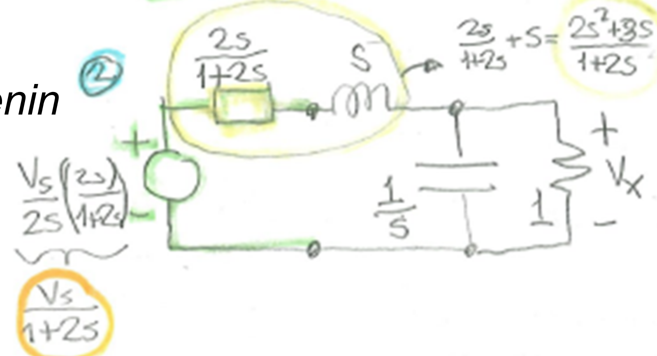


1)Norton



$$\frac{2s(1)}{1+2s}$$

2)Thévenin

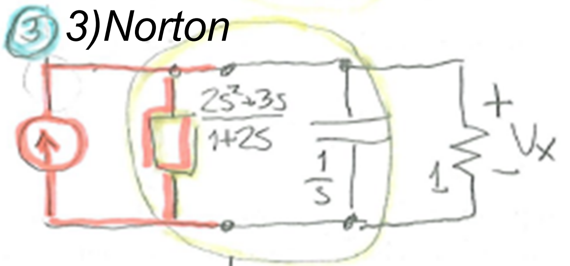


$$\frac{2s}{1+2s}+s=\frac{2s^2+3s}{1+2s}$$

$$\underbrace{\frac{V_s}{2s}\left(\frac{2s}{1+2s}\right)}\quad \frac{V_s}{1+2s}$$

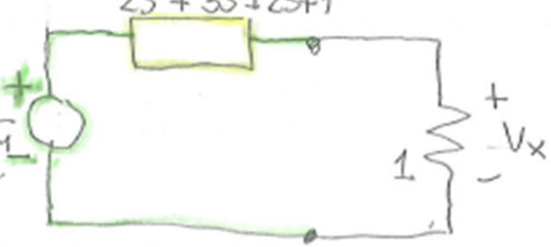
$$\underbrace{\frac{\frac{V_s}{1+2s}}{\frac{2s^2+3s}{1+2s}}}\quad \frac{V_s}{2s^2+3s}$$

3)Norton



$$\frac{\frac{2s^2+3s}{1+2s}\cdot\frac{1}{s}}{\frac{2s^2+3s}{1+2s}+\frac{1}{s}}=\frac{2s^2+3s}{2s^3+3s^2+2s+1}$$

4)Thévenin



$$\underbrace{\frac{V_s}{2s^2+3s}\cdot\frac{2s^2+3s}{2s^3+3s^2+2s+1}}\quad \frac{V_s}{2s^3+3s^2+2s+1}$$

5)Diviseur de tension

$$V_x=\frac{1}{1+\frac{2s^2+3s}{2s^3+3s^2+2s+1}}\cdot\frac{V_s}{2s^3+3s^2+2s+1}$$

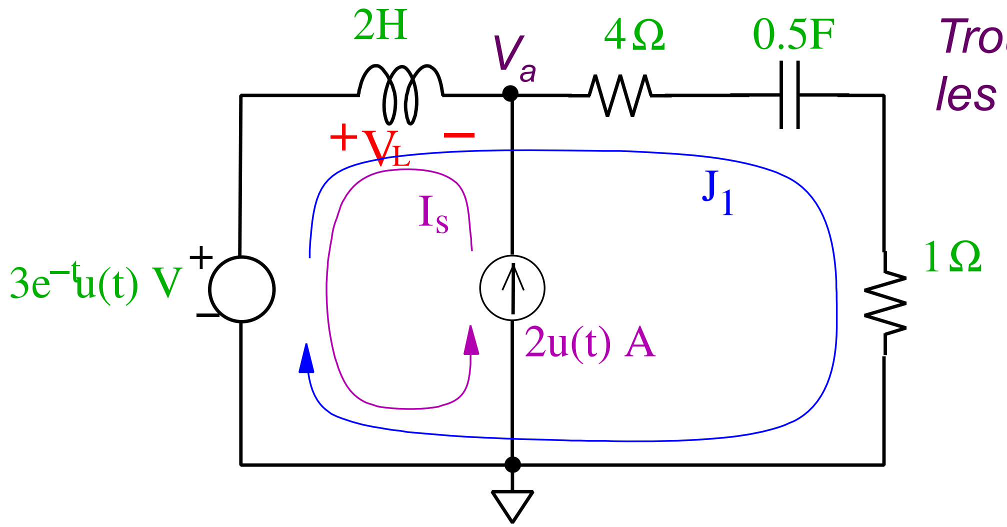
$$=\frac{2s^3+3s^2+2s+1}{2s^3+5s^2+5s+1}\cdot\frac{V_s}{2s^3+3s^2+2s+1}$$

$$=\frac{V_s}{2s^3+5s^2+5s+1}$$

$$=\frac{0.5}{s^3+2.5s^2+2.5s+0.5}\cdot V_s$$

$$H(s)=\frac{V_x(s)}{V_s(s)}=\frac{0.5}{s^3+2.5s^2+2.5s+0.5}$$

Transformation de circuits: Ex 2 – Méthode #1



Trouver V_L en utilisant les tension(s) nodale(s)

Atelier

$$V_L = V_s - V_a =$$

avec

$$\frac{V_a - V_s}{2s} + \frac{V_a - 0}{4+1+2/s} - \frac{2}{s} = 0$$

$$\frac{V_a}{2s} + \frac{sV_a}{5s+2} = \frac{V_s}{2s} + \frac{2}{s}$$

$$\big((5s+2) + s(2s)\big)V_a = \frac{(5s+2)3}{s+1} + 4(5s+2)$$

$$V_a = \frac{15s+6+(20s+8)(s+1)}{(2s^2+5s+2)(s+1)}$$

$$V_L = \frac{3}{s+1} - \frac{15s+6+(20s+8)(s+1)}{(2s^2+5s+2)(s+1)}$$

$$V_L = \frac{3(2s^2+5s+2) - 20s^2 - 43s - 14}{(2s^2+5s+2)(s+1)}$$

$$V_L = \frac{-14s^2 - 28s - 8}{(2s^2+5s+2)(s+1)}$$

$$V_L = \frac{-14s^2 - 28s - 8}{2(s^2+2.5s+1)(s+1)} = \frac{-7s^2 - 14s - 4}{(s+0.5)(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{K_1}{s+0.5} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_1 = \frac{-7(-0.5)^2 - 14(-0.5) - 4}{(-0.5+2)(-0.5+1)} = \frac{-7/4 + 7 - 4}{(1.5)(0.5)} = \frac{-7/4 + 12/4}{3/4} = \frac{5}{3}$$

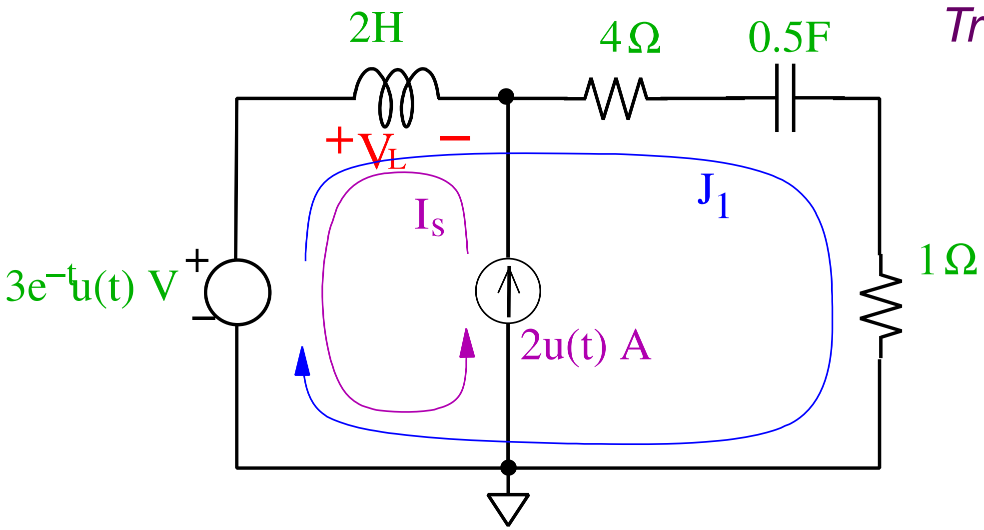
$$K_2 = \frac{-7(-2)^2 - 14(-2) - 4}{(-2+0.5)(-2+1)} = \frac{-28+28-4}{(-1.5)(-1)} = \frac{-4}{1.5} = -\frac{8}{3}$$

$$K_3 = \frac{-7(-1)^2 - 14(-1) - 4}{(-1+2)(-1+0.5)} = \frac{-7+14-4}{(1)(-0.5)} = \frac{3}{-0.5} = -6$$

Transformation de circuits: Ex 2 – Autres Méthodes

Trouver V_L

Atelier



Courant circulatoire

$$V_L = 2s(J_1 - I_s) = 2sJ_1 - 4$$

avec

$$\left(2s + 5 + \frac{2}{s}\right) J_1 = 4 + \frac{3}{s+1}$$

$$J_1 = \frac{(4s+7)s}{(s+1)(2s^2+5s+2)}$$

$$V_L = 2s\left(\frac{(4s+7)s}{(s+1)(2s^2+5s+2)}\right) - 4$$

Superposition des sources

$$V_{L1} = -2s\left(\frac{5+\frac{2}{s}}{2s+5+\frac{2}{s}}\right)\frac{2}{s} = \frac{-20s-8}{2s^2+5s+2}$$ *Source Courant*

$$V_{L2} = \left(\frac{2s}{2s+5+\frac{2}{s}}\right)\frac{3}{s+1} = \frac{6s^2}{(2s^2+5s+2)(s+1)}$$ *Source Tension*

$$V_L = V_{L1} + V_{L2} = \frac{-14s^2-28s-8}{2(s^2+2.5s+1)(s+1)}$$

$$= \frac{1.667}{s+0.5} - \frac{6}{s+1} - \frac{2.667}{s+2}$$

- domaine du temps

$$v_L(t) = (1.667e^{-0.5t} \underbrace{-\,6e^{-t}}_{\text{réponse particulière source tension (\#1)}} - 2.667e^{-2t})u(t)\ \text{V}$$

Transformation de circuits: Ex 3

Atelier

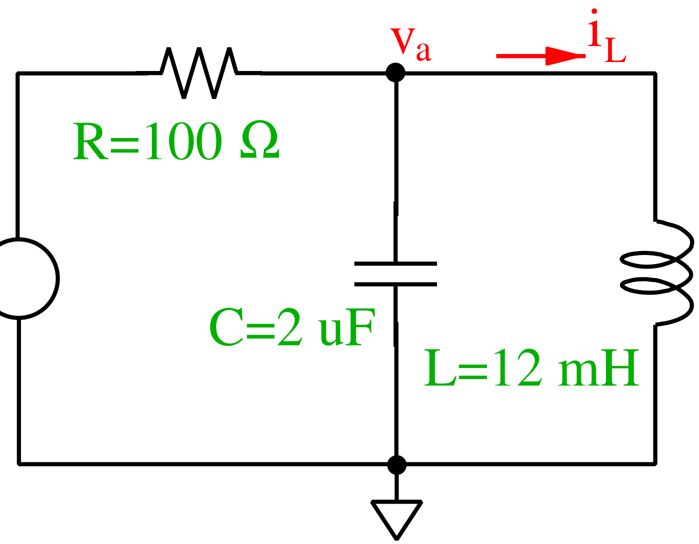
Trouver: V_a et i_L

$$\frac{V_a - V_s}{R} + \frac{V_a}{1/sC} + \frac{V_a}{sL} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) sL I_L = \frac{s V_s}{RC}$$

$$\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) I_L = \frac{1}{RLC} V_s$$

$$V_s(s) = \frac{25}{s} \qquad I_L(s) = \frac{V_a}{sL}$$



$$V_a(s) = \frac{5000s}{s^2 + 5000s + 41.67 \times 10^6} \cdot \frac{25}{s}$$

$$I_L(s) = \frac{10.4167 \times 10^6}{s(s^2 + 5000s + 41.67 \times 10^6)} = \frac{0.25}{s} + \frac{0.1356 e^{-j2.74}}{s + 2500 + j5951} + \frac{0.1356 e^{j2.74}}{s + 2500 - j5951}$$

$$v_a(t) = 2(10.5) e^{-2500t} \cos\left(5951t - \frac{\pi}{2}\right) u(t) \ V$$

$$i_L(t) = 0.25u(t) + 0.2712 e^{-2500t} \cos\left(5951t + 2.74\right) u(t) \ \text{A}$$

$$K_0 = \frac{10.41\bar{6} \times 10^6}{41.\bar{6} \times 10^6} \approx 0.25$$

$$I_L = \frac{10.41\bar{6} \times 10^6}{s(s^2 + 5000s + 41.\bar{6} \times 10^6)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 2500 - j5951} + \frac{K_1^*}{s + 2500 + j5951}$$

$$K_1 = \frac{10.41\bar{6} \times 10^6}{(-2500 + j5951)(j11902)} = \frac{875.2}{6454 \angle \underbrace{-157°}_{-2.74\,rad}}$$

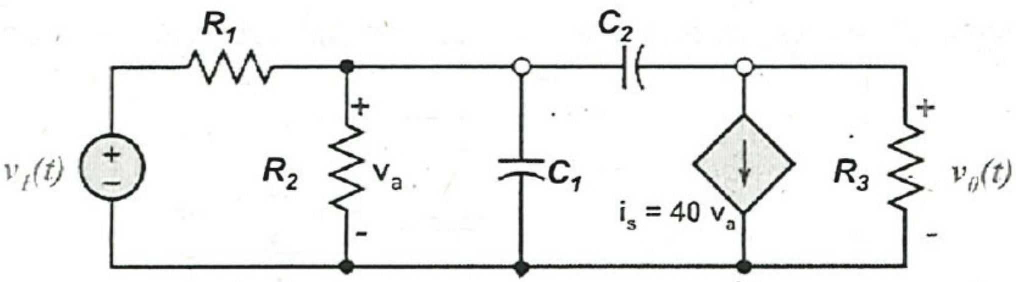
Transformation de circuits: Ex 4

Optionnel

Diapositive 89

Trouver la fonction de transfert $H(s) = V_0(s)/V_1(s)$.
Puis déterminer $v_o(t)$ quand $v_1(t) = u(t)$.

R_1=0.1 Ω, R_2=0.5 Ω, C_1=100 F, C_2=3 F, R_3=1 Ω.



$\frac{1}{s}$

[r,p,k]=residue([0.1 -4/3],[1 259/300 0.04 0])
ans r= -2.2711 , p=-0.8142 k=[ ]
35.6044 -0.0491
-33.3332 0

$$\boxed{H(s) = \frac{10(3s-40)}{300\,s^2 + 259s + 12}}$$

$$\boxed{v_0(t) = \left[-33.33 + 35.60e^{-0.049t} - 2.27e^{-0.814t}\right]u(t)}$$

Utilisation de Matlab

MATLAB

File Edit Debug Desktop Window Help

Current Directory: D:\Programs\MATLAB704\work

Shortcuts How to Add What's New

```
>> num=[1 2 3 4];
>> den=[1 6 11 6];
>> [K, p, c]=residue(num, den)

K =

   -7.0000
    2.0000
    1.0000


p =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000


c =

     1

>> [n, d]=residue(K, p, c)

n =

    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000


d =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
```

$$\boxed{H(s)=\frac{s^3+2s^2+3s+4}{s^3+6s^2+11s+6}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H(s)=\frac{-7}{s+3}+\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}+1}$$

$$\Downarrow$$

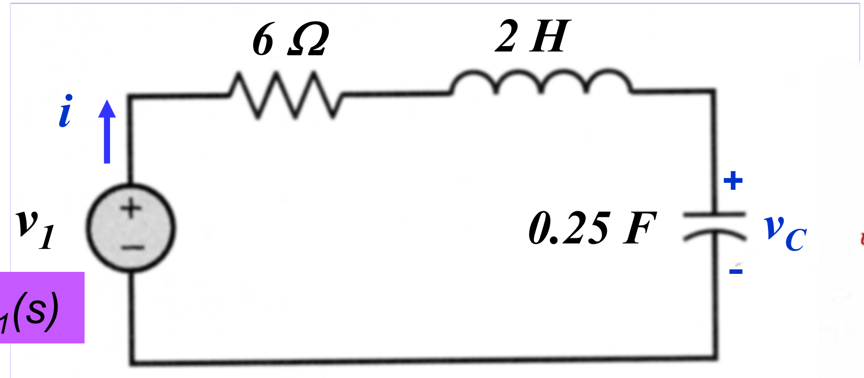
$$\boxed{H(s)=\frac{s^3+2s^2+3s+4}{s^3+6s^2+11s+6}}$$

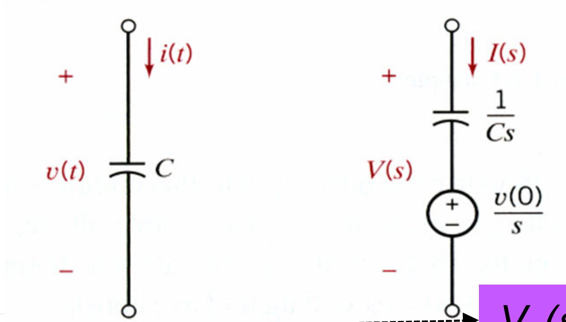
Exemples d'applications: Ex 1 … Atelier

Trouver i(t) et $v_c(t)$ quand $v_c(0) = 10$ V et $i(0) = 0$ A

$v_1(t) = 15u(t)$

$V_1(s)$





$V_2(s)$

$$-V_1(s) + 6I + 2sI + V_2(s) + \frac{I}{0.25s} = 0$$

$$I(s) = \frac{V_1(s)-V_2(s)}{2s+6+4/s} = \frac{s\,(V_1(s)-V_2(s))}{2s^2+6s+4} = \underbrace{\frac{sV_1(s)}{2s^2+6s+4}}_{\text{source \#1}} - \underbrace{\frac{sV_2(s)}{2s^2+6s+4}}_{\text{source \#2}}$$

principe de superposition des sources

$$= \frac{s(15/s - 10/s)}{2s^2+6s+4} = \frac{5}{2s^2+6s+4} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

$$\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{-6\pm\sqrt{4}}{4} = -1,-2$$

$$K_1 = \frac{5}{2(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{5}{2} \qquad K_2 = \frac{5}{2(s+1)}\Big|_{s=-2} = -\frac{5}{2}$$

$$v_c(t) = 10 + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = \left(10 + 4\int_0^t \left(\frac{5}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}\right)dt\right)u(t)$$

$$= 10 + 4\left[-\frac{5}{2}e^{-t}\right]_0^t - 4\left[\frac{5}{-2(2)}e^{-2t}\right]_0^t$$

$$\boxed{i(t) = 2.5(e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)}$$

$$\boxed{v_c(t) = 5(3 - 2e^{-t} + e^{-2t})\,u(t)}$$

$$V_c(s) = \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{I(s)}{sC} = V_2(s) + \frac{I(s)}{sC}$$

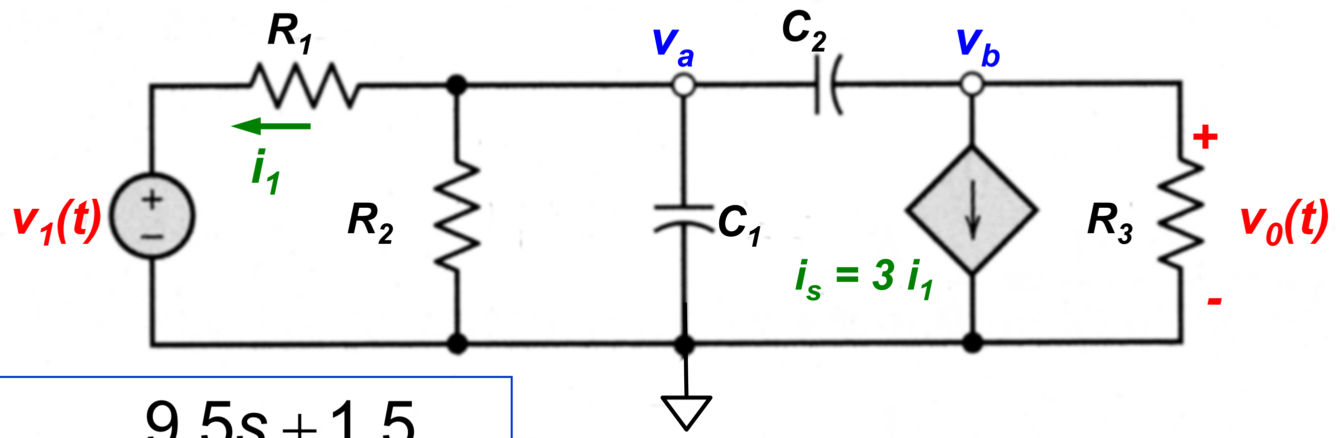
Diapo 15

Exemples d'applications: Ex 2 … Atelier

- Trouver la fonction de transfert $H(s) = V_0(s)/V_1(s)$.
- Puis déterminer $v_o(t)$ quand $v_1(t) = 2u(t)$.

Diapositive 85

R_1=0.2Ω, R_2=0.5Ω, C_1=10 F, C_2=2 F, R_3=1Ω, α=3.



$$H(s) = \frac{9.5s + 1.5}{s^2 + 2.8s + 0.35}$$

$i_1=(v_a-v_1)/R_1$

$$v_0(t) = \left[8.57 - 7.04e^{-2.67t} - 1.53e^{-0.13t}\right]u(t)$$

Exemples d'applications: Ex 2 … Atelier

$$\frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} + sC_1V_a + sC_2(V_a - V_b) = 0$$

Méthode (a)

$$sC_2(V_b - V_a) + \alpha I_1 + \frac{V_b}{R_3} = 0$$

$$\begin{cases} 5V_a + 2V_a + 10sV_a + 2sV_a - 2sV_b = 5V_1 \\ 2sV_b - 2sV_a + 15V_a + V_b = 15V_1 \end{cases}$$

si $V_1 = \frac{2}{s}$ alors

$$V_0 = \frac{19s+3}{s(s^2+2.8s+0.35)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2.67} + \frac{K_2}{s+0.131}$$

$$= \frac{8.571}{s} - \frac{7.044}{s+2.669} - \frac{1.527}{s+0.131}$$

$$v_0(t) = 8.57u(t) - 7.04e^{-2.67t}u(t) - 1.53e^{-0.13t}u(t)$$

$$\begin{bmatrix} 12s+7 & -2s \\ -2s+15 & 2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5V_1 \\ 15V_1 \end{bmatrix}$$

Méthode (a)

$$V_0 = \frac{\begin{vmatrix} 12s+7 & 5V_1 \\ -2s+15 & 15V_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12s+7 & -2s \\ -2s+15 & 2s+1 \end{vmatrix}} = \frac{(+180s+105+10s-75)V_1}{24s^2+14s+12s+7-4s^2+30s}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = H(s) = \frac{+190s+30}{20s^2+56s+7} = \frac{+9.5s+1.5}{s^2+2.8s+0.35}$$

- résidus *Méthode (a)*

$$K_0 = \frac{3}{0.35} = 8.5714$$

$$K_1 = \left.\frac{19s+3}{s(s+0.131)}\right|_{s=-2.67} = \frac{-47.73}{(-2.67)(2.54)} = -7.044$$

$$K_2 = \left.\frac{19s+3}{s(s+2.67)}\right|_{s=-0.131} = \frac{0.511}{(-0.131)(2.539)} = -1.527$$

- $R_2(V_a - V_1) + R_1V_a + sR_1R_2C_1V_a + sR_1R_2C_2V_a - sR_1R_2C_2V_b = 0$
- $sR_1R_2C_2V_b - sR_1R_3C_2V_a + \alpha R_3V_a - \alpha R_3V_1 + R_1V_b = 0$

Méthode (b)

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+sR_1R_2C_1+sR_1R_2C_2 & -sR_1R_2C_2 \\ \alpha R_3 - sR_1R_3C_2 & R_1+sR_1R_3C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2V_1 \\ \alpha R_3V_1 \end{bmatrix}$$

si $V_1 = \frac{2}{s}$ alors

$$V_0 = \frac{19s+3}{s(s^2+2.8s+0.35)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2.67} + \frac{K_2}{s+0.131}$$

$$= \frac{8.571}{s} - \frac{7.044}{s+2.669} - \frac{1.527}{s+0.131}$$

$$v_0(t) = 8.57u(t) - 7.04e^{-2.67t}u(t) - 1.53e^{-0.13t}u(t)$$

• racines:

$$\frac{-2.8 \pm \sqrt{7.84 - 4(0.35)}}{2}$$

$$-1.4 \pm 1.269$$

• résidus

$$K_0 = \frac{3}{0.35} = 8.5714$$

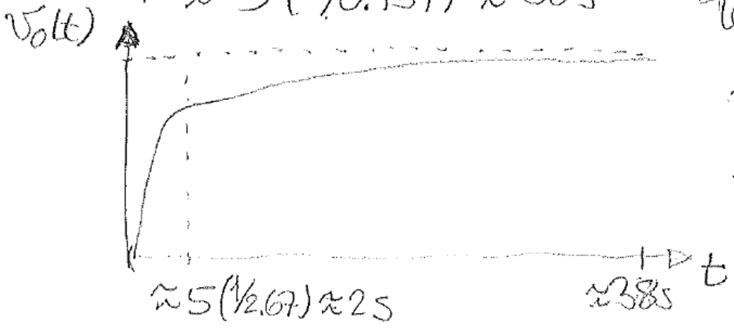
$$K_1 = \left.\frac{19s+3}{s(s+0.131)}\right|_{s=-2.67} = \frac{-47.73}{(-2.67)(2.54)} = -7.044$$

$$K_2 = \left.\frac{19s+3}{s(s+2.67)}\right|_{s=-0.131} = \frac{0.511}{(-0.131)(2.539)} = -1.527$$

• durée du transitoire

$\omega_n = 0.59$
$\zeta = 2.366$

$$T \approx 5(1/0.131) \approx 38s$$



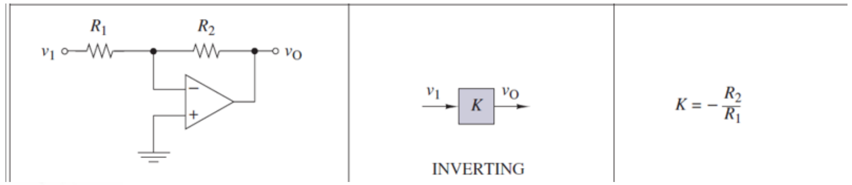
$\boxed{\text{à } t \to \infty}$ les condensateurs sont des circuits ouverts

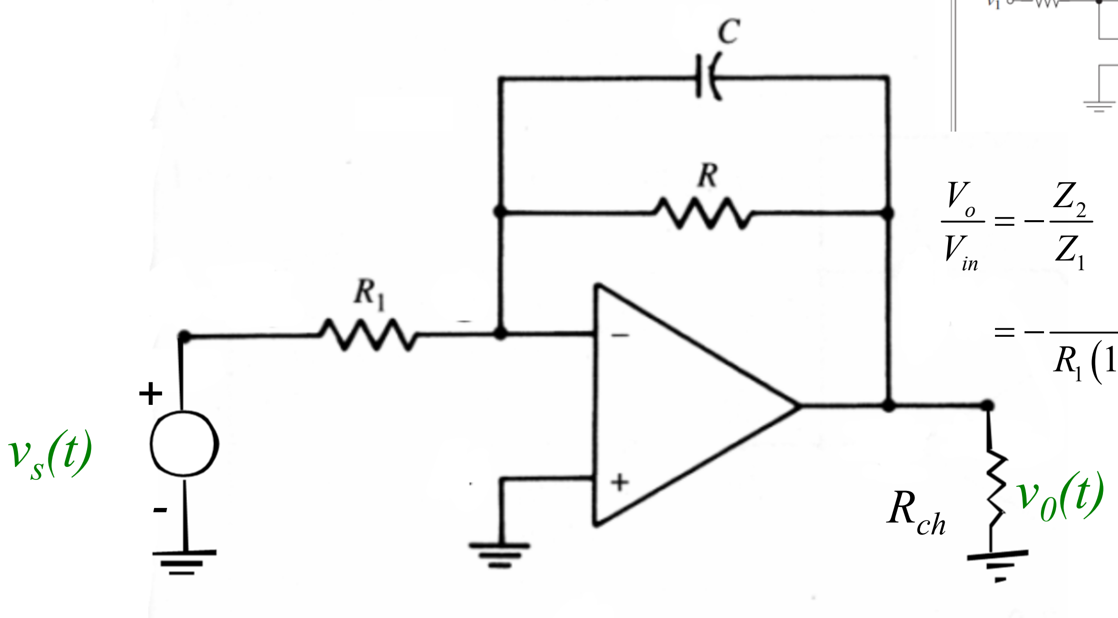
$$\Rightarrow i_1 = -v_1/(R_1+R_2) = -2/0.7 = -2.857A$$

$$\Rightarrow v_0 = -\alpha i_1 = -3(-2.857) = 8.571V = K_0$$

Fonction de transfert d'un filtre actif: Ex 3 …

Déterminer la fonction de transfert H(s)=$V_o(s)/V_s(s)$ du circuit suivant si on suppose l'ampli-op idéal.





$$\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad avec\ Z_2 = \frac{1}{sC} // R = \frac{R}{RCs+1} \quad et \quad Z_1 = R_1$$

$$= -\frac{R}{R_1(1+RCs)}$$

$$\frac{V_s}{R_1} = \frac{-V_o}{R // 1/sC} = \frac{-V_o}{\frac{R/sC}{R+1/sC}}$$

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{-R/sC}{R_1(R+1/sC)} = -\frac{R}{R_1}\,\frac{1}{sRC+1}$$

$$\boxed{H(s) = -\frac{R}{R_1}\,\frac{1}{1+RCs}}$$

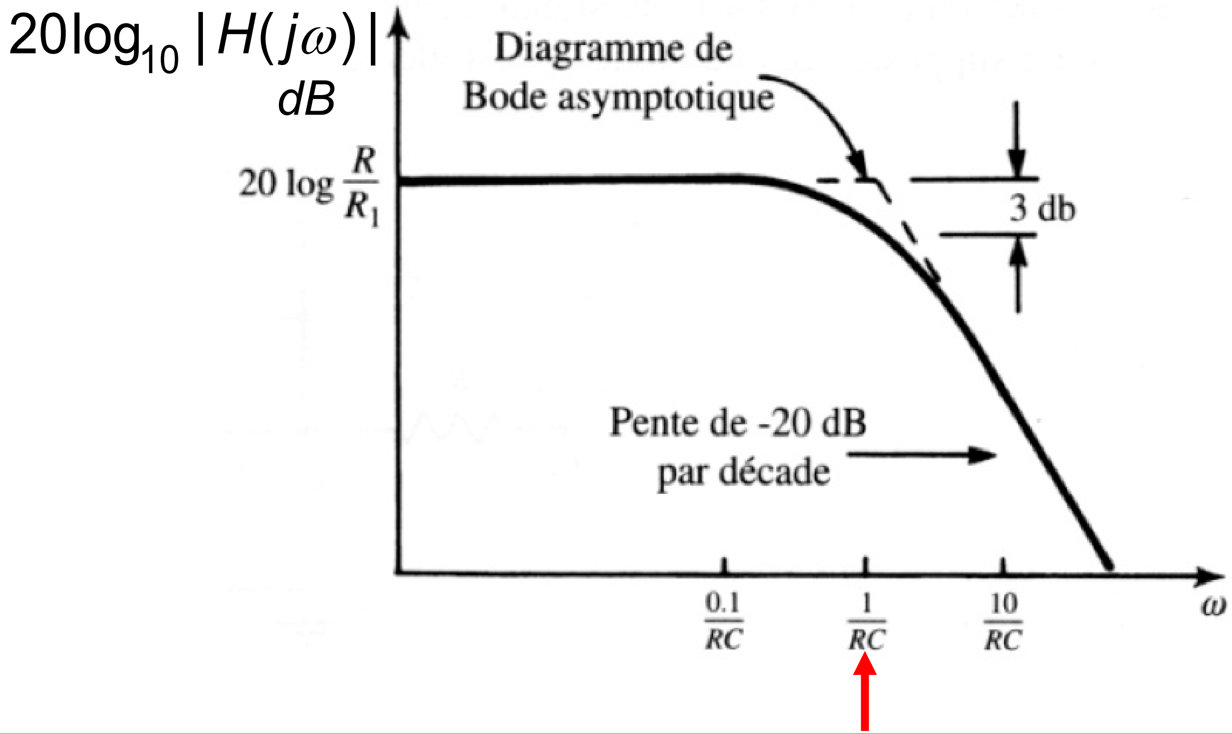
Indépendant de R_{ch}
car ampli-op supposé idéal.

*a) **Tracer le circuit en représentant l'amplificateur opérationnel idéal par son modèle.***
*b) **Tracer le même circuit mais cette fois-ci dans l'espace de Laplace.***

Atelier

Fonction de transfert d'un filtre actif: Ex 3

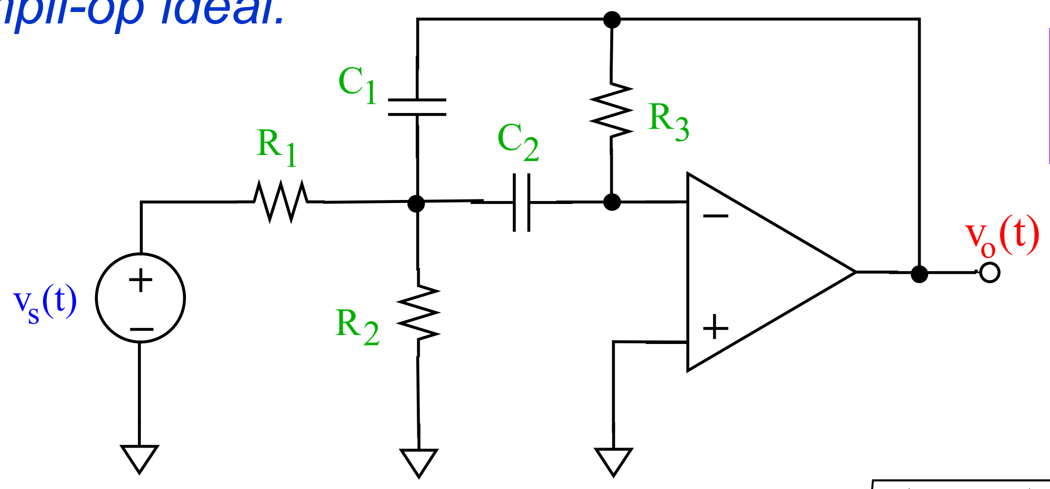
Il s'agit d'un filtre actif du premier ordre passe bas en régime sinusoïdal permanent (RSP) – On remplace s par jω



$$H(j\omega) = -\frac{R}{R_1}\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \qquad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \text{ fréquence de coupure}$$

Fonction de transfert d'un filtre actif: Ex 3 … Atelier

Déterminer la fonction de transfert $H(s)=V_o(s)/V_s(s)$ du circuit suivant si on suppose l'ampli-op idéal.



Filtre actif Passe-Bande

$$\boxed{H(s) = -\frac{sR_2R_3C_2}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_1R_2(C_1+C_2) + (R_1+R_2)}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2R_3C_1C_2}}$$

$$2\omega_n\xi = \frac{C_1+C_2}{R_3C_1C_2} = b = Bande\ Passante$$

Si $R_1=9/11\Omega$; $R_2=R_3=1\Omega$; $C_1=1/9F$; $C_2=0.2F$ alors

$$\boxed{H(s) = -\frac{0.2s}{0.018182s^2+0.2546s+1.8182} = -\frac{11s}{s^2+14s+100}}$$

$\omega_n = 10$ rad/s (1.59 Hz); $\zeta = 0.7$

$\alpha = 7$ Np/s; $\omega_p \approx 7.14$ rad/s (1.14 Hz);

a) Tracer le circuit en représentant l'amplificateur opérationnel idéal par son modèle.

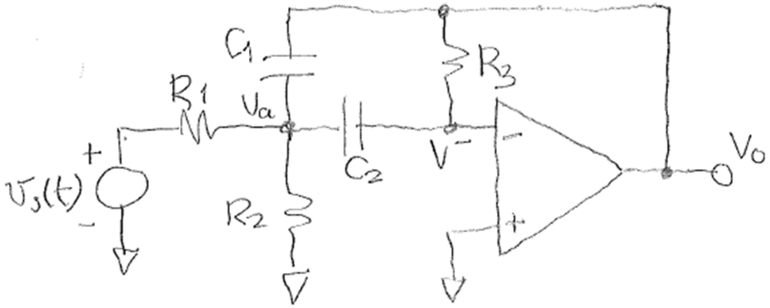
b) Tracer le même circuit mais cette fois-ci dans l'espace de Laplace.

Atelier

Fonction de transfert filtre actif (détails)

Atelier

Filtre active Passe-bande



$$\frac{V_a-V_s}{R_1} + \frac{V_a-V_o}{1/sC_1} + \frac{V_a-V^-}{1/sC_2} + \frac{V_a}{R_2} = 0$$

$$\frac{V^- - V_a}{1/sC_2} + \frac{V^- - V_o}{R_3} = 0$$

- Version (a)

$V^- = V^+ = 0$

$$\frac{V_a-V_s}{R_1} + sC_1(V_a-V_o) + sC_2V_a + \frac{V_a}{R_2} = 0$$

$$-sC_2V_a - \frac{V_o}{R_3} = 0 \longrightarrow V_a = \frac{-V_o}{sR_3C_2}$$

$$\frac{sR_1R_2R_3C_2}{sR_1R_2R_3C_2}\times\left[\frac{-V_o}{sR_1R_3C_2} - \frac{V_s}{R_1} - \frac{sC_1V_o}{sR_3C_2} - sC_1V_o - \frac{sC_2V_o}{sR_3C_2} - \frac{V_a}{sR_2R_3C_2}\right] = 0$$

$$-V_oR_2 - sR_2R_3C_2V_s - sR_1R_2C_1V_o - s^2R_1R_2R_3C_1C_2V_o - sR_1R_2C_2V_o - R_1V_o = 0$$

$$V_o = \frac{-sR_2R_3C_2\,V_s}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_1R_2(C_1+C_2) + (R_1+R_2)}$$

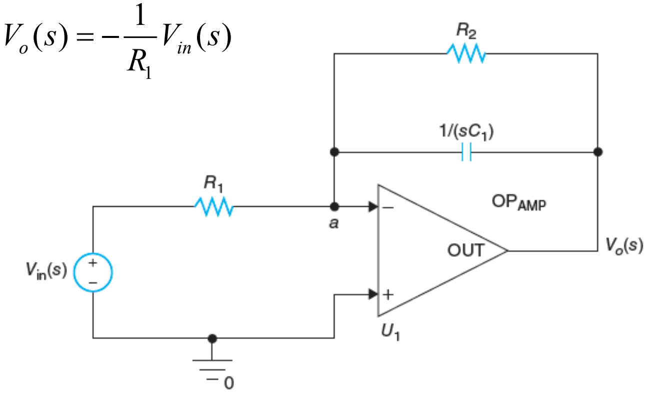
- Version (b)

$$\begin{bmatrix} 1/R_1 + sC_1 + sC_2 + 1/R_2 & -sC_2 \\ -sC_2 & sC_2 + 1/R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_a \\ V^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/R_1 + sC_1V_o \\ V_o/R_3 \end{bmatrix}$$

Fonctions de transfert de filtres passe-haut et passe-bas

- Noeud *a:* $$\frac{0-V_{in}(s)}{R_1}+\frac{0-V_o(s)}{R_2}+\frac{0-V_o(s)}{\frac{1}{sC_1}}=0 \Rightarrow \left(sC_1+\frac{1}{R_2}\right)V_o(s)=-\frac{1}{R_1}V_{in}(s)$$

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}=-\frac{\frac{1}{R_1}}{s+\frac{1}{R_2}}=-\frac{\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_1}}$$



- Il y a un pôle à s = – 1/R2C1 et un zéro à s = ∞. À s = 0, H(s) = – R2/R1 et à s = ∞, H(s) = 0.

$$Z_2=\frac{1}{sC_1}//R_2=\frac{R_2}{R_2C_1s+1} \quad Z_1=R_1 \quad \frac{V_o}{V_{in}}=-\frac{Z_2}{Z_1}$$

Filtre passe-bas
DIAPO #91 (idem)

FIGURE 15.90

- Noeud *a:*

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}=-\frac{\frac{1}{R_1+\frac{1}{sC_1}}}{\frac{1}{R_2}}=-\frac{sR_2C_1}{sR_1C_1+1}=-\frac{R_2}{R_1}\frac{s}{s+\frac{1}{R_1C_1}}$$

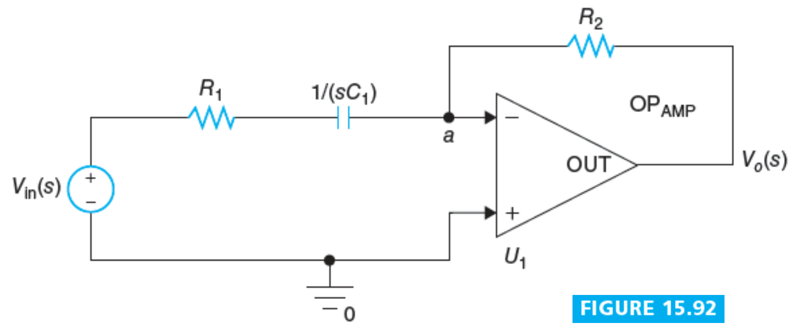


FIGURE 15.92

Filtre passe-haut

- Il y a un pôle à s = – 1/R_1C_1 et un zéro à s = 0. À s = 0, H(s) = 0 et à s = ∞, H(s) = – R_2/R_1.

$$Z_1=\frac{1}{sC_1}+R_1 \quad Z_2=R_2 \quad \frac{V_o}{V_{in}}=-\frac{Z_2}{Z_1}$$

Fonction de transfert d'un filtre passe-bande

- Noeud b: $\dfrac{V_o - V_a}{R_2} + \dfrac{V_o}{sL_2} = 0 \Rightarrow V_a = \left(1 + \dfrac{R_2}{sL_2}\right) V_o$
- Noeud a: $\dfrac{V_a - V_{in}}{sL_1} + \dfrac{V_a}{R_1} + \dfrac{V_a - V_o}{R_2} = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{sL_1} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) V_a - \dfrac{1}{R_2} V_o = \dfrac{V_{in}}{sL_1}$

Trouver ω_n, ξ, b

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\dfrac{1}{sL_1}}{\left(\dfrac{1}{sL_1} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)\left(1 + \dfrac{R_2}{sL_2}\right) - \dfrac{1}{R_2}} = \frac{\dfrac{R_1}{L_1} s}{s^2 + \left(\dfrac{R_1}{L_1} + \dfrac{R_2}{L_2} + \dfrac{R_1}{L_2}\right) s + \dfrac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} = \frac{4s}{s^2 + 9s + 12}$$

Diapositive 93

```
% James Kang, Electric Circuits, Cengage Learning
% EXAMPLE 15.27
clear all;
L1=0.5;L2=1;R1=2;R2=3;Vin=1;
syms Va Vo s
[Va,Vo]=solve((Va-Vin)/(s*L1)+Va/R1+(Va-Vo)/R2,...
(Vo-Va)/R2+Vo/(s*L2),Va,Vo)
[Num,Den]=numden(Vo) % Extraction numerateur et deno.
N1=sym2poly(Num)  % Conversion de symbolique à Polynome
D1=sym2poly(Den)   % Conversion de symbolique à Polynome
N=N1/D1(1)
D=D1/D1(1)
H=tf(N,D)
```

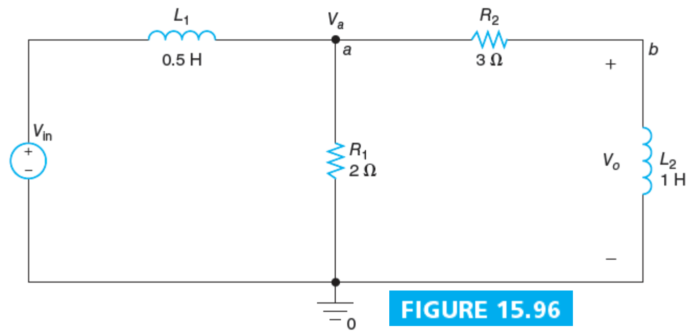


FIGURE 15.96

```
>> Vo
Vo = (4*s)/(s^2 + 9*s + 12)
 >> Va
 Va=(4*(s + 3))/(s^2 + 9*s + 12)
```

Réponse à une excitation sinusoïdale: Ex 4 (section 5.5.4)

Utiliser la transformation de Laplace pour déterminer la tension $V_1(t)$

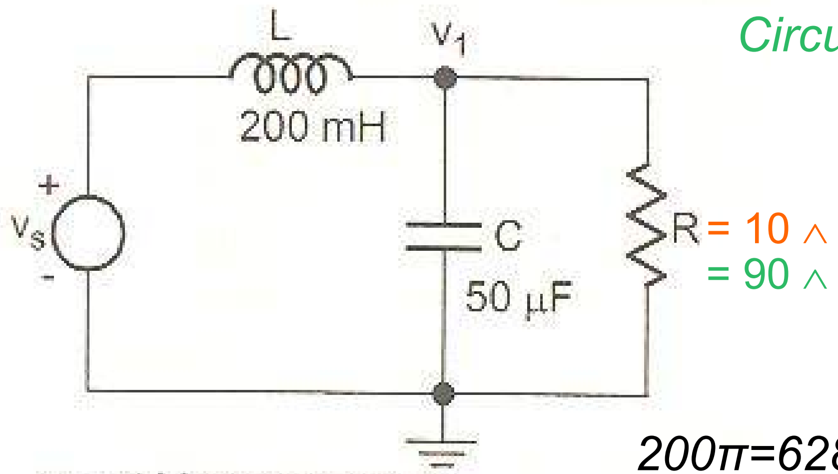
$$V_1 = \frac{R \parallel 1/sC}{R \parallel 1/sC + sL} V_s \qquad R \parallel 1/sC = \frac{R/sC}{R + 1/sC} = \frac{R}{sRC+1}$$

$$= \frac{\frac{R}{sRC+1}}{\frac{R}{sRC+1} + sL} V_s$$

$$= \frac{R}{R + sL(sRC+1)} V_s$$

$$= \frac{R}{s^2RLC + sL + R} \cdot \frac{100s}{s^2 + (200\pi)^2}$$

Circuit 648.m



$200\pi = 628.3$

$v_s = 100\cos(200\pi t)u(t)$

$$V_s = \frac{100s}{s^2 + (200\pi)^2}$$

10 Ω
$$v_1(t) = \left[2.45\,e^{-1949t} - 0.68e^{-51.3t} + 2(3.874)\cos(200\pi t - 1.8)\right]u(t)$$

90 Ω
$$v_1(t) = \left[2(16.37)\,e^{-111.1t}\cos(296t + 0.56) + 30.7\cos(200\pi t - 2.7)\right]u(t)$$

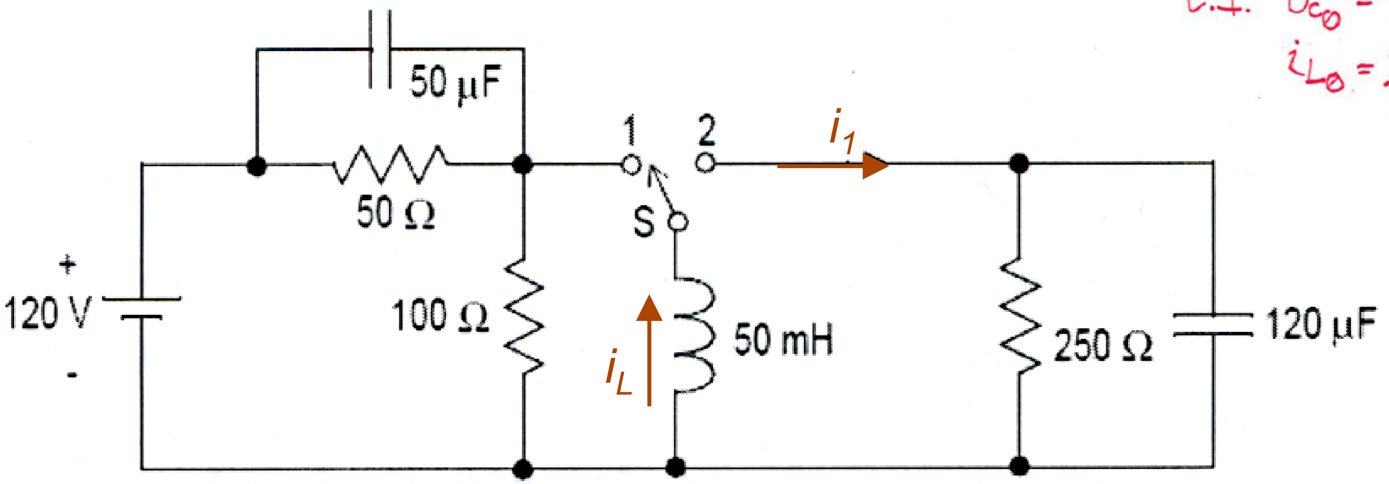
Circuit initialement excité: Ex 5

Atelier

Utiliser la transformation de Laplace pour déterminer le courant dans l'inductance $i_L(t)$, ainsi que $i_1(t)$

C.I. $v_{C_0} = 120V$

$i_{L_0} = \frac{120}{50} = 2.4A$



a) Trouver $i_1(t)$ via la transformée de Laplace du circuit

b) Trouver $i_1(t)$ via les équations différentielles du circuit

pour t<0

$$i_1(t) = 0; \quad i_L(t) = 2.4u(-t)A$$

pour t≥0

$$I_1(s) = I_L(s) = \frac{1.201\,e^{+j3.101}}{s + 16.67 - j407.91} + \frac{1.201\,e^{-j3.101}}{s + 16.67 + j407.91}$$

$$i_1(t) = 2.402\,e^{-16.67t}\cos\left(407.91t + 3.101\right)u(t)$$

Convolution
Systèmes Linéaires à Temps-Invariant

Définition de la Convolution

- La convolution de deux signaux temporels continus $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est définie comme suit :

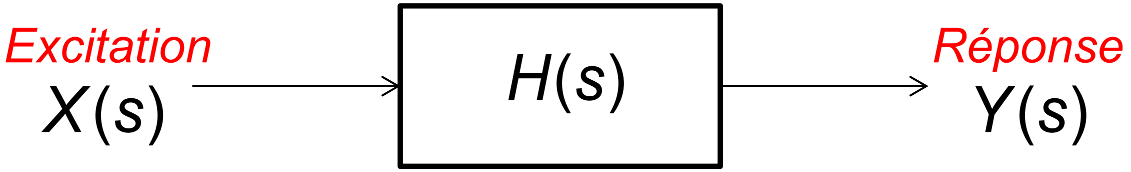
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda$$

  Elle est dénotée par $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$.

- Le calcul de la convolution implique les étapes suivantes:

  1. Modifiez la variable indépendante de t à λ pour les deux signaux.
  2. Pliez (retournez) l'un des deux signaux, disons $f_2(\lambda)$, par rapport à l'ordonnée pour obtenir $f_2(-\lambda)$. Le signal plié $f_2(-\lambda)$ est l'image miroir de $f_2(\lambda)$ par rapport à l'ordonnée. Plier préférablement le plus simple des deux signaux.
  3. Décaler le signal plié $f_2(-\lambda)$ par t pour obtenir $f_2[-(\lambda - t)] = f_2(t - \lambda)$.
  4. Multiplier $f_1(\lambda)$ et $f_2(t - \lambda)$.
  5. Intégrer le produit $f_1(\lambda)f_2(t - \lambda)$ de $-\infty$ à t par rapport à λ.
  6. Répétez les étapes 3 à 5 pour différentes valeurs du décalage t.

Produit de convolution



$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- le calcul de y(t) peut se faire de 2 façons:

$$y(t) = L^{-1}\left\{H(s)X(s)\right\}$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

Produit scalaire dans l'espace de Laplace

Produit de convolution dans l'espace temps

Propriétés de la convolution

- Commutativité

  $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
- Associativité

  $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$
- Distributivité

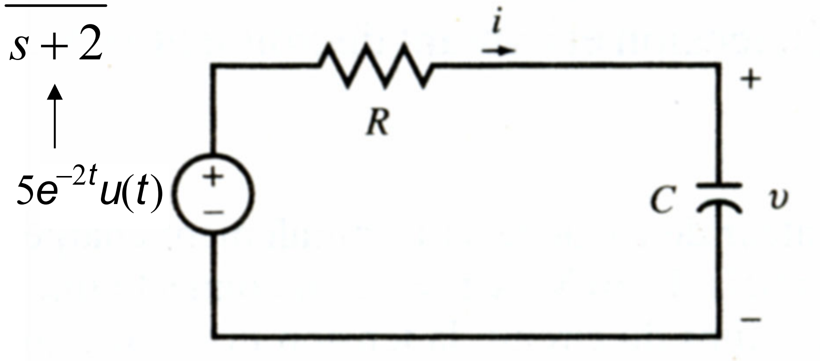
  $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$
- Décalage temporal

  If $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, then $f_1(t - t_d) * f_2(t) = f(t - t_d)$
- Propriété de Convolution de la transformée de Laplace

  $L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$

Test par convolution

$$\frac{5}{s+2}$$



a) RC=1/3

pôles -2, -3
résidus 15, -15

$$H(s) = \frac{3}{3+s} \Rightarrow h(t) = 3e^{-3t}u(t)$$

$$v_c(t) = \int_{-\infty}^{t} 5e^{-2\tau}u(\tau)\cdot 3e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= 15e^{-3t}\int_0^t e^{\tau}\,d\tau = 15e^{-3t}(e^t - 1)u(t) = (15e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t)$$

b) RC=1/2

$$v_c(t) = \int_{-\infty}^{t} 5e^{-2\tau}u(\tau)\cdot 2e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

pôle double -2
$K_{1,1}$=0, $K_{1,2}$=10

$$= 10e^{-2t}\int_0^t d\tau = 10te^{-2t}u(t)$$

Exemples de convolution

- $f_1(t) = 5e^{-3t}\,u(t)$ et $f_2(t) = u(t)$.
- Pour $t < 0$, $f(t) = 0$.
- Pour $t \geq 0$,

$$f(t)=\int_0^t 5e^{-3\lambda}\times 1\,d\lambda = 5\left.\frac{e^{-3\lambda}}{-3}\right|_0^t = \frac{5}{-3}\left(e^{-3t}-1\right)=\frac{5}{3}\left(1-e^{-3t}\right)$$

$$f(t)=\frac{5}{3}\left(1-e^{-3t}\right)u(t)$$

- Dans le domaine s, nous avons $F_1(s) = 5/(s + 3)$ et $F_2(s) = 1/s$.
- $F(s) = F_1(s)F_2(s) = 5/[s(s+3)]$

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{5}{s(s+3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{\frac{5}{3}}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+3}\right]=\frac{5}{3}\left(1-e^{-3t}\right)u(t)$$

- $f_1(t) = u(t)$ et $f_2(t) = u(t)$.
- Pourt < 0, $f(t) = 0$.
- Pour $t \geq 0$,

$$f(t)=\int_0^t 1\times 1\,d\lambda = \left.\lambda\right|_0^t = t$$

- $f(t) = t\,u(t)$
- Dans le domaine s, nous avons $F_1(s) = 1/s$ et $F_2(s) = 1/s$.
- $F(s) = F_1(s)F_2(s) = 1/s^2$.
- $f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[1/s^2] = t\,u(t)$

- $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$, $f_2(t) = 2u(t) - 2u(t-2)$: F1(s) = (1 – e–2s)/s
  F2(s) = 2(1 – e–2s)/s , $F(s) = F_1(s)F_2(s) = 2(1 - 2e^{-2s} + e^{-4s})/s^2$
- $f(t) = L^{-1}[F(s)] = 2tu(t) - 4(t-2)u(t-2) + 2(t-4)u(t-4)$

Autres exemples

- $f_1(t) = 3e^{-2t}u(t)$ et $f_2(t) = 2e^{-5t}u(t)$, $F_1(s) = 3/(s + 2)$ et $F_2(s) = 2/(s + 5)$.

$$f(t)=\int_0^t 3e^{-2\lambda}\times 2e^{5(\lambda-t)}\,d\lambda = 6e^{-5t}\int_0^t e^{3\lambda}\,d\lambda = 6e^{-5t}\left.\frac{e^{3\lambda}}{3}\right|_0^t = 2e^{-5t}\left(e^{3t}-1\right)=2\left(e^{-2t}-e^{-5t}\right)$$

$$f(t)=2\left(e^{-2t}-e^{-5t}\right)u(t)$$

- $F(s) = F_1(s)F_2(s) = 6/[(s + 2)(s + 5)]$

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{6}{(s+2)(s+5)}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+5}\right]=2\left(e^{-2t}-e^{-5t}\right)u(t)$$

- $f_1(t) = 5\sin(10t)\,u(t)$, $f_2(t) = u(t)$, $F_1(s) = 50/(s^2 + 10^2)$, $F_2(s) = 1/s$.

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[1-\cos(10t)\right]u(t)$$

$$f(t)=\int_0^t 5\sin(10\lambda)d\lambda = 5\left[\frac{-\cos(10\lambda)\big|_0^t}{10}\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos(10t)\right]$$

- $F(s) = F_1(s)F_2(s) = 50/[s(s^2 + 10^2)]$.

$$F(s)=\frac{50}{s\left(s^2+10^2\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{-1}{2}s}{s^2+10^2}$$

$$F(s)=\frac{50}{s\left(s^2+10^2\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+10^2}=\frac{(A+B)s^2+Cs+100A}{s\left(s^2+10^2\right)}$$

- $A = 0.5$, $C = 0$, $B = -0.5$

$$f(t)=\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}\cos(10t)u(t)=\frac{1}{2}\left[1-\cos(10t)\right]u(t)$$

Convolutions impliquant la fonction delta de Dirac

- De la propriété de tamisage de la fonction delta de Dirac, on obtient

$$\delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) f(t-\lambda) d\lambda = f(t)$$

- Cette équation stipule que la convolution d'un signal arbitraire f(t) avec une fonction delta de Dirac donne le signal f(t) lui-même. Encore une fois, en appliquant la propriété de tamisage, nous obtenons

$$f(t) * \delta(t-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\delta(t-\lambda-a) d\lambda = f(t-a)$$

- La convolution d'un signal arbitraire f(t) avec une fonction delta de Dirac décalée dans le temps δ(t - a) nous donne donc f(t - a), qui est la version décalée dans le temps de f(t). Le signal f(t) est déplacé vers l'emplacement de la fonction delta de Dirac.

Convolution avec la function de Dirac

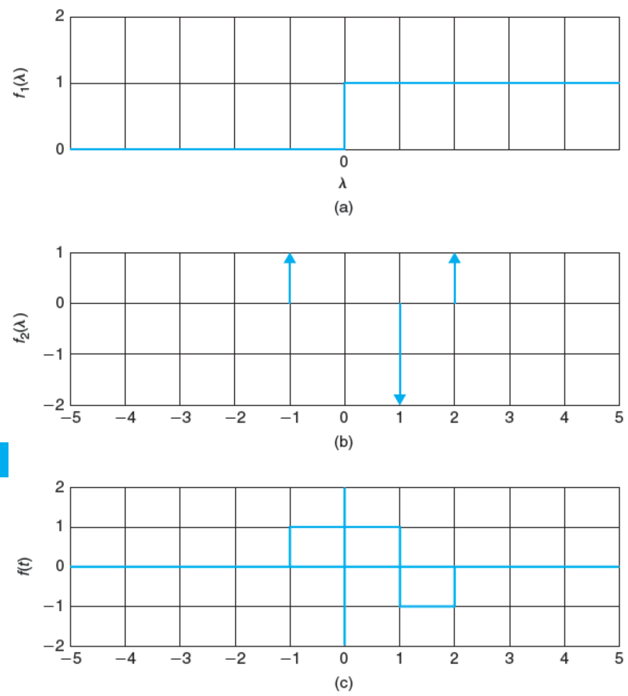
- Déterminer la convolution de $f_1(t) = u(t)$ et $f_2(t) = \delta(t + 1) – 2\delta(t – 1) + \delta(t – 2)$.
- Soit f(t) la convolution de $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Ensuite, nous avons

$$f(t) = u(t) * \delta(t+1) - 2u(t) * \delta(t-1) + u(t) * \delta(t-2)$$

$$= u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-2)$$

- La Figure 15.111 montre $f_1(t)$, $f_2(t)$, et f(t).

FIGURE 15.111



Système linéaire, invariant dans le temps

- Soit $y_1(t)$ la sortie d'un système illustré à la Figure 15.113, lorsque $x_1(t)$ est appliqué à l'entrée. Soit $y_2(t)$ la sortie du même système lorsque $x_2(t)$ est appliqué à l'entrée. Le système est dit linéaire si la réponse (sortie) du système à l'excitation (entrée) $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ est donné par $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$. Si le principe de superposition est valable dans le système, le système est linéaire.
- Soit $y(t)$ la sortie d'un système lorsque $x(t)$ est appliqué à l'entrée. Le système est dit invariant dans le temps si la réponse du système à l'excitation $x(t - t_0)$ est donné par $y(t - t_0)$. Si un système est invariant dans le temps, la réponse du système à une entrée donnée est la même, quel que soit le moment où le signal d'entrée est appliqué.
- Si un système est à la fois linéaire et invariant dans le temps, il est appelé système linéaire invariant dans le temps (LTI).
- La réponse impulsionnelle d'un système est définie comme étant la réponse du système à une impulsion.

FIGURE 15.113

A system represented as a black box.

Sortie d’un système LTI

- Soit x(t) une entrée dans un système linéaire invariant dans le temps (LTI) avec réponse impulsionnelle h(t).
- Le signal d’entrée sous la forme d’une somme de rectangles est représenté à la Figure 15.114. Quand T $\rightarrow$ 0, l’impulsion rectangulaire de hauteur 1 et de largeur T devient une impulsion avec l’aire T. Ainsi,

$$x(t)=\lim_{T\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,rect\left(\frac{t-nT}{T}\right)=\lim_{T\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\,T$$

- Puisque la réponse impulsionnelle du système est h(t), la réponse du système à δ(t) est h(t). Étant donné que le système est invariant dans le temps, la réponse du système à δ(t – nT) est h(t – nT). Puisque le système est linéaire, la sortie du système est la somme des réponses du système à δ(t – nT), c’est-à-dire la somme de h(t – nT):

$$y(t)=\lim_{T\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,h(t-nT)\,T$$

$$y(t)=\int x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda=h(t)*x(t)$$

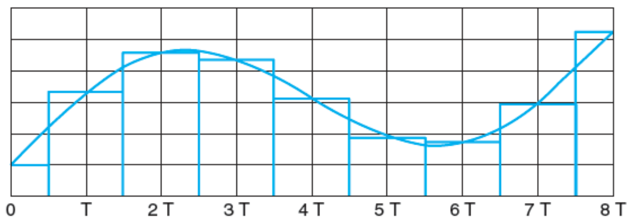


FIGURE 15.114

- Lorsque T $\rightarrow$ 0, la sortie est la convolution de h(t) et x(t).

Diagramme de Bode

- Le diagramme de Bode représente la réponse d'amplitude en dB (décibels) et la réponse de phase d'un système décrit par la fonction de transfert H(s).
- MATLAB peut être utilisé pour tracer un diagramme de Bode exact.
- La réponse d'amplitude en dB est définie comme suit :

$$M_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(|H(\omega)|)$$

- Le diagramme de Bode d'amplitude est un graphique $M_{dB}(\omega)$ en fonction de la fréquence en radians ω, exprimée en échelle logarithmique.
- Le diagramme de Bode de phase est un tracé de $\angle H(\omega)$ en fonction de la fréquence en radians ω, exprimée en échelle logarithmique.

- Si:

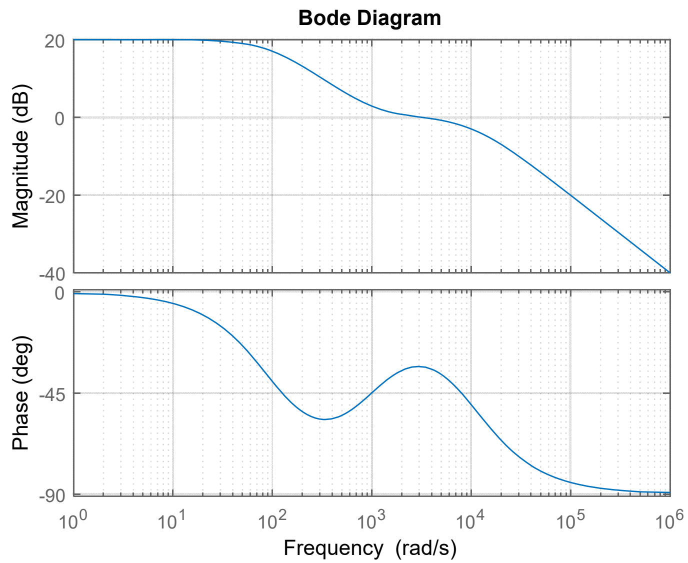
$$H(s) = \frac{H_1 \times H_2 \times H_3}{H_4 \times H_5 \times H_6 \times H_7}$$

le diagramme de Bode sera tracé en additionnant et en soustrayant les amplitudes en dB et les phases en degré des termes H_i avec i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

Exemples de diagramme de Bode

- Tracer le diagramme de Bode d'amplitude et phase pour la fonction de transfert donnée par

$$H(s)=\frac{10000(s+1000)}{(s+100)(s+10000)}$$



- H(s) peut être réécrit comme suit :

$$H(s)=\frac{10000\times1000\left(1+\frac{s}{1000}\right)}{100\left(1+\frac{s}{100}\right)10000\left(1+\frac{s}{10000}\right)}=10\frac{\left(1+\frac{s}{1000}\right)}{\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{s}{10000}\right)}$$

- Le diagramme de Bode pour chaque terme peut être tracé et ajouté comme indiqué dans le texte. MATLAB :

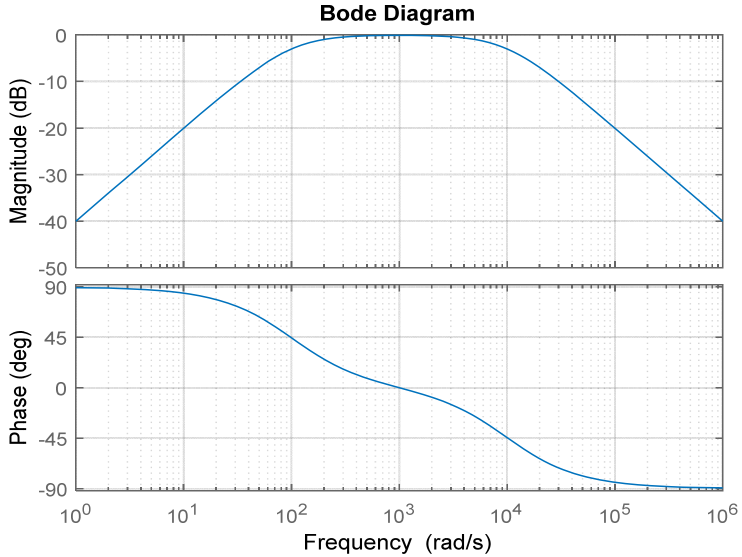
```
clear all;
s = tf('s');
H = 10000*(s+1000)/((s+100)*(s+10000))
bode(H);grid;
```

Exemples de diagramme de Bode

$$H(s) = \frac{10000s}{(s+100)(s+10000)}$$

MATLAB:

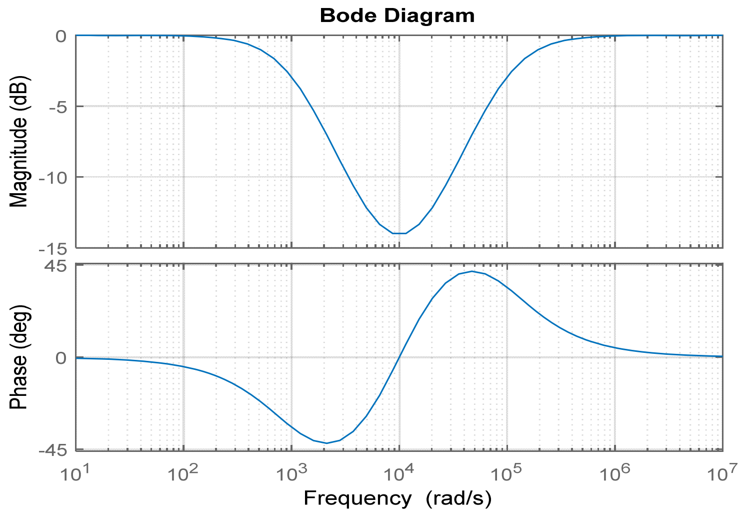
```
clear all;
s = tf('s');
H = 10000*s/((s+100)*(s+10000))
bode(H);grid;
```



$$H(s) = \frac{\left(s+10^4\right)^2}{(s+1000)\left(s+10^5\right)}$$

- MATLAB:

```
clear all;
s = tf('s');
H = (s+1e4)^2/((s+1000)*(s+1e5))
w = logspace(1,7);
bode(H,w);grid;
```

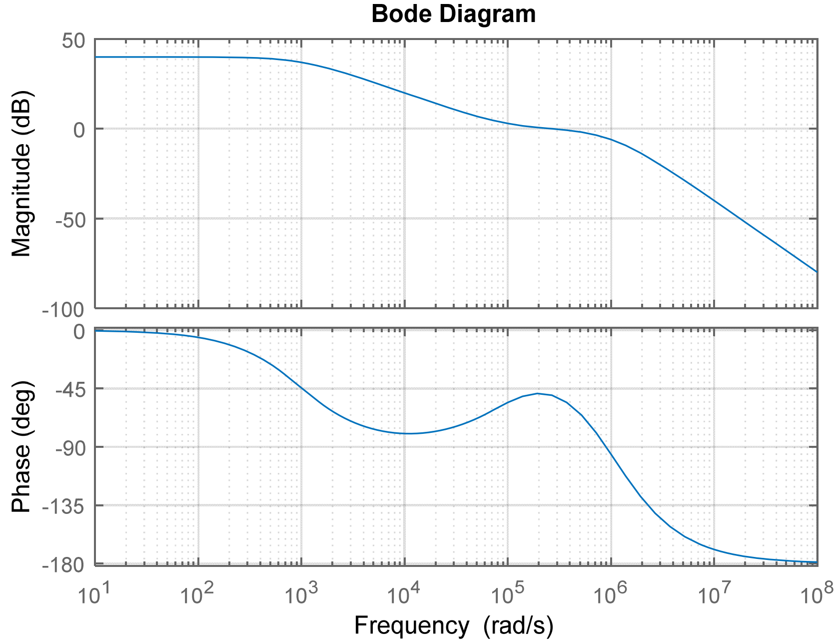


Exemples de diagramme de Bode

$$H(s)=\frac{10^{12}\left(s+10^{5}\right)}{\left(s+10^{3}\right)\left(s+10^{6}\right)^{2}}$$

- MATLAB:

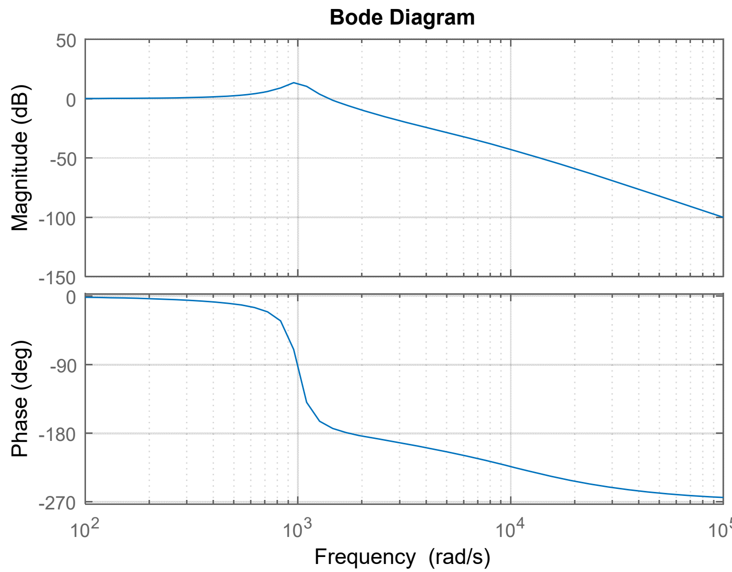
```
clear all;
s = tf('s');
H = 1e12*(s+1e5)/((s+1000)*(s+1e6)^2)
w = logspace(1,8);
bode(H,w);grid;
```



$$H(s)=\frac{10^{10}}{\left(s^{2}+200s+10^{6}\right)\left(s+10^{4}\right)}$$

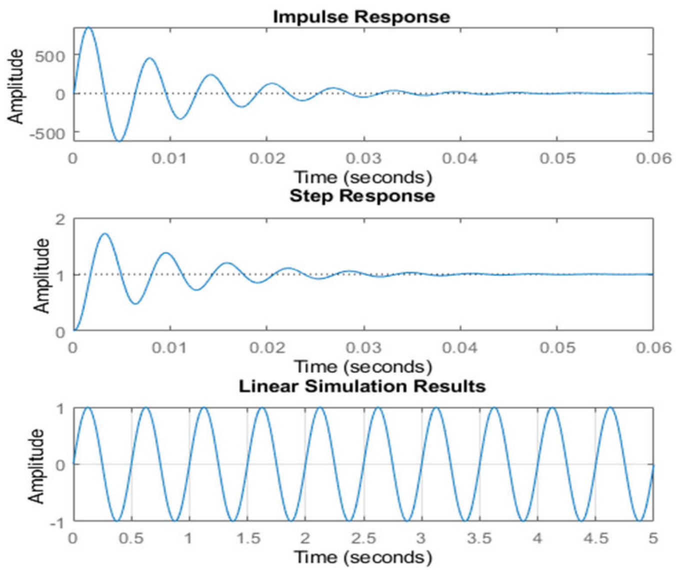
- MATLAB:

```
clear all;
s = tf('s');
H = 1e10/((s+1e4)*(s^2+200*s+1e6))
w = logspace(2,5);
bode(H,w);grid;
```

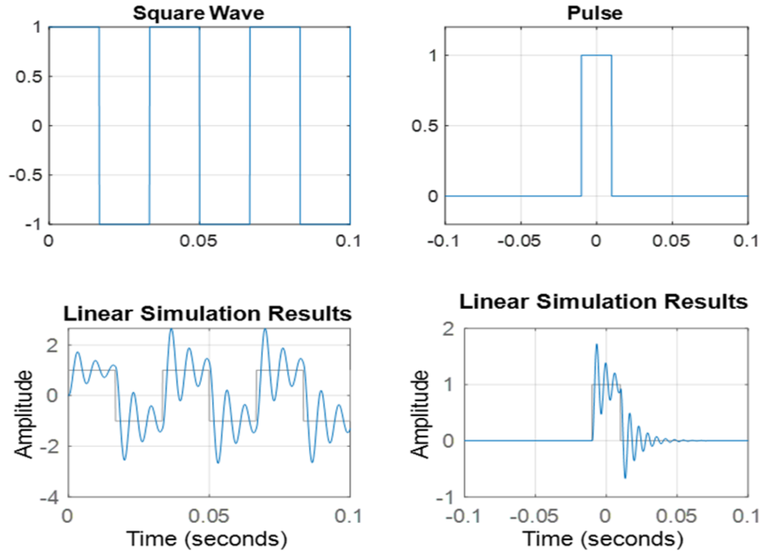


Réponses temporelles d’une fonction de transfert

(a)



(b)



$$H(s) = \frac{10^{10}}{\left(s^2 + 200s + 10^6\right)\left(s + 10^4\right)}$$

- MATLAB:

```
clear all;
s = tf('s');
H = 1e10/((s+1e4)*(s^2+200*s+1e6))
```

(a)

```
figure(2);
subplot(311);impulse(H)
subplot(312);step(H)
subplot(313);
t = 0:0.01:5;
 u = sin(4*pi*t); lsim(H,u,t) ;grid
```

(b)

```
figure(3);
subplot(2,2,1);
t = 0:.0001:.1;
u = square(2*pi*30*t); plot(t,u);;title('Square Wave') ;axis tight;grid
subplot(2,2,3); lsim(H,u,t) ;axis tight;grid

fs = 10000; % Number of samples per second
t = -.1:1/fs:.1; % Time vector
u = rectpuls(t,20e-3); % Generating rectangular pulse
subplot(2,2,2);
 plot(t,u), axis([-0.1 0.1 -0.2 1.2]) ;title('Pulse');grid % Plotting the pulse
subplot(2,2,4); lsim(H,u,t) ;axis tight;grid; % Plotting the pulse response
```

Réponse indicielle d'une FT quadratique pure

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\,\omega_p$$

Coefficient d'amortissement

Pulsation propre

Pulsation naturelle : $\omega_n = \dfrac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \omega_p^2}$

Facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{\alpha}{\omega_n}$

Dépassement d

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = d$$

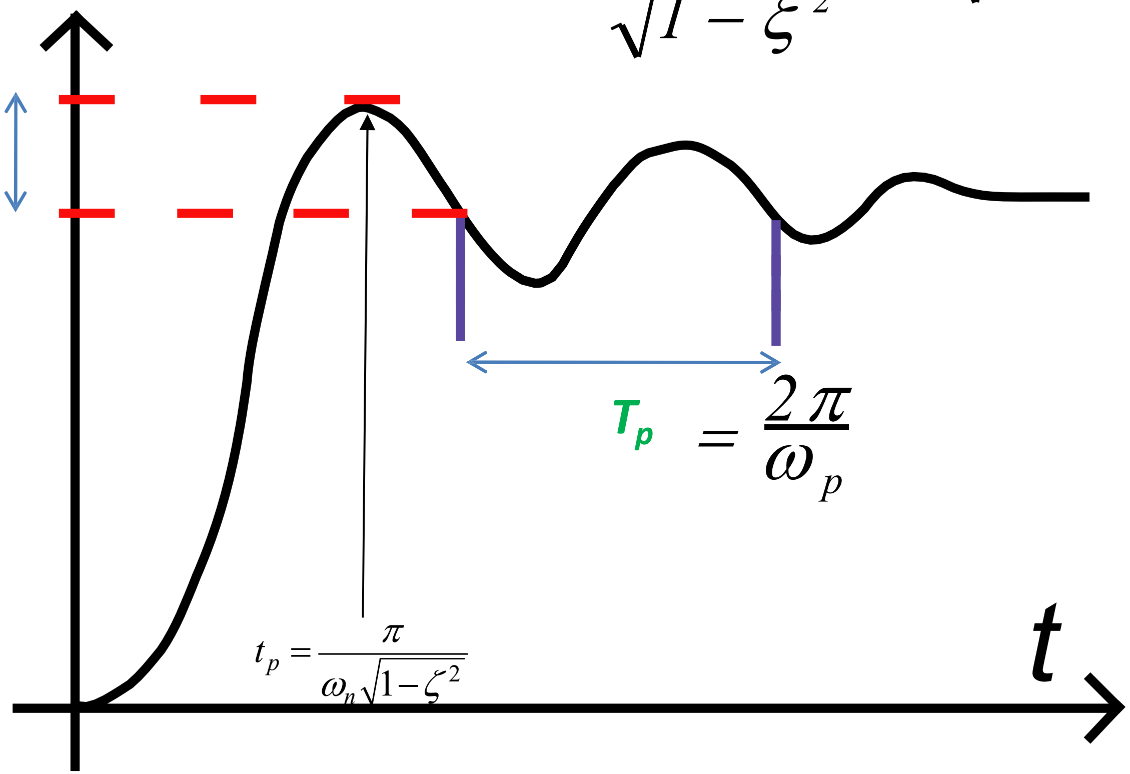
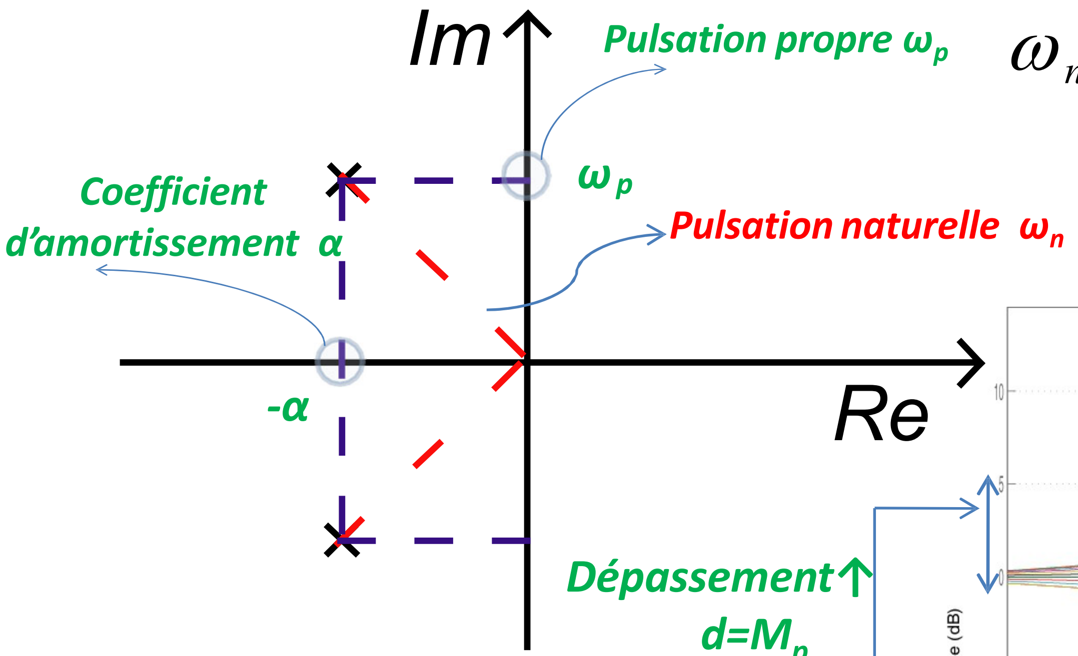


Diagramme de Bode (amplitude) d'une FT quadratique pure

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \omega_p^2}$$



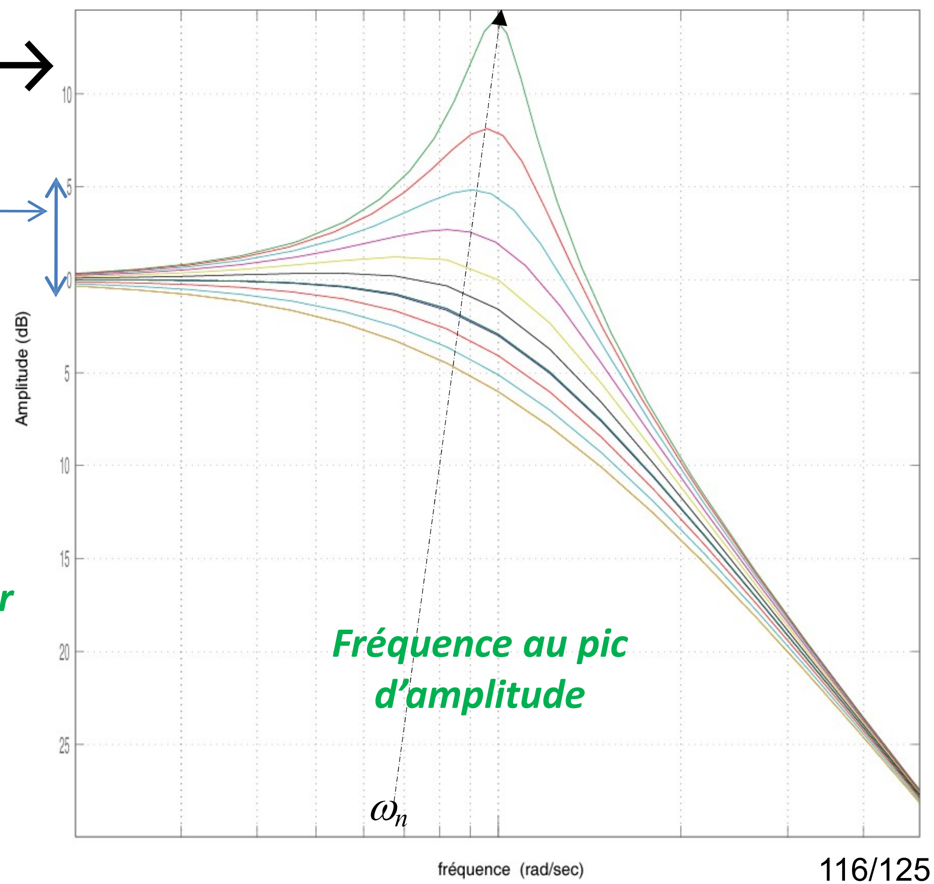
Dépassement↑
$d = M_p$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_p$$

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_n}$$

= facteur d'amortissement

En faisant varier le facteur d'amortissement↓ ξ



Résumé

- La relation courant-tension d'un condensateur dans le domaine s est
  $I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = CsV(s) - Cv(0^-)$
  $V(s) = I(s)/(sC) + v(0^-)/s$
- La relation courant-tension d'une inductance dans le domaine est
  $V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-)$
  $I(s) = V(s)/(sL) + i(0^-)/s$
- Un circuit peut être transformé en domaine s en remplaçant les condensateurs et les inductances par des circuits équivalents au domaine s. Les sources de tension et les sources de courant sont remplacées par leurs transformées de Laplace.
- Une fois que le circuit donné est transformé en domaine s, n'importe laquelle des méthodes d'analyse de circuit pour les circuits résistifs peut être appliquée pour trouver les tensions et les courants inconnus dans le domaine s.
- Les expressions du domaine temporel pour les tensions et les courants sont obtenues en prenant les transformées de Laplace inverses des tensions et des courants du domaine s.

Résumé (suite)

- Soit X(s) la représentation du domaine s de l’entrée, et soit Y(s) la représentation du domaine s de la sortie. Ensuite, la fonction de transfert est donnée par $H(s) = Y(s)/X(s)$.
- La ou les sorties Y peuvent être écrites sous la forme

  $Y(s) = H(s)X(s)$
- La fonction de transfert H(s) transfère l’entrée X(s) dans la (les) sortie(s). Dans le processus de transfert, le signal d’entrée est modifié. La nature de la modification est spécifiée dans la fonction de transfert. La fonction de transfert H(s) représente les effets du circuit (ou du système en général) vers le(s) X(s) d’entrée.
- La fonction de transfert H(s) est donnée par un rapport du polynôme numérateur N(s) au polynôme dénominateur D(s) : $H(s) = N(s)/D(s)$. Les racines de $D(s) = 0$ sont appelées pôles et les racines de $N(s) = 0$ sont appelées zéros. À l’emplacement des pôles, H(s) devient infini, et à l’emplacement des zéros, H(s) devient zéro. Un tracé qui montre les pôles et les zéros est appelé diagramme de pôle zéro.
- L’emplacement des pôles et des zéros affecte la réponse en fréquence d’un système.

Résumé (suite)

- La sortie d'un système LTI est la convolution de la réponse impulsionnelle du système h(t) et du signal d'entrée x(t):

$$y(t) = \int x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda = h(t) * x(t)$$

- Le diagramme de Bode est un diagramme de la réponse de magnitude en dB (décibels) et de la réponse de phase d'un système décrit par la fonction de transfert H(s).
- La réponse de magnitude en dB est définie par

  $M_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(|H(\omega)|)$
- Le diagramme de Bode de magnitude est un graphique de $M_{dB}(\omega)$ en fonction de la fréquence du radian ω qui est en échelle logarithmique.
- Le diagramme de Bode de phase est un tracé de $\angle H(\omega)$ en fonction de la fréquence en radian ω qui est en échelle logarithmique.
- MATLAB peut être utilisé pour tracer des diagrammes de Bode exacts.

Transformation de Laplace inverse de fractions partielles - Sommaire

Nature de la décomposition en fractions simples	Résidus
$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\dfrac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2).....(s+p_n)}=\dfrac{R_1}{s+p_1}+\dfrac{R_2}{s+p_2}+.....+\dfrac{R_n}{s+p_n}$ $f(t)=\left(R_1e^{-p_1t}+R_2e^{-p_2t}+\ldots+R_ne^{-p_nt}\right)u(t)$ Pôles simples	$R_i=\left.\dfrac{N(s)(s+p_i)}{D(s)}\right\|_{s=-p_i}$
$F(s)=\dfrac{A}{s+a-jb}+\dfrac{A^*}{s+a+jb}+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$ f(t) = $\|A\|e^{j\angle A}e^{(-a+jb)t}+\|A\|e^{-j\angle A}e^{(-a-jb)t}=2\|A\|e^{-at}\cos(bt+\angle A)\,u(t)$ $F(t)=2e^{-at}[R\cos(bt)-I\sin(bt)]\,u(t)$ Pôles complexes	$A=\dfrac{N(-a+jb)}{(j2b)D_1(-a+jb)}=\|A\|e^{j\angle A}$ $=R+jI$ $A^*=\dfrac{N(-a-jb)}{(j2b)D_1(-a-jb)}=\|A\|e^{-j\angle A}$ $=R-jI$
$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s+p)^r D_1(s)}=\dfrac{R_r}{(s+p)^r}+\dfrac{R_{r-1}}{(s+p)^{r-1}}+\dfrac{R_{r-2}}{(s+p)^{r-2}}+.....+\dfrac{R_1}{s+p}+\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$ $f(t)=\left(k_1e^{-pt}+k_2e^{-pt}+\dfrac{k_3}{2!}t^2e^{-pt}+\cdots+\dfrac{k_n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-pt}\right)u(t)+f_1(t)$	$R_1=\left.\dfrac{N(s)}{D_1(s)}\right\|_{s=-p}$ $2\le m\le r$: $R_m=\dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[\dfrac{N(s)}{D_1(s)}\right]_{s=-p}$

Pour en savoir plus

- ***Circuits électriques****, Hoang Le-Huy, Les presses de l'université Laval, 2004.*
- ***Electric circuits****, James S. Kang, Cengage Learning, 2018.*
- ***Circuits électriques : des fondements aux applications****, Chahé Nerguizian, Vahé Nerguizian Presses de l'école Polytechnique de Montréal, 2017.*
- ***Introduction to electric circuits****, Dorf R.C., Svoboda J.A., Wiley.*

Propriétés de la transformée de Laplace

Property	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Time shifting	$f(t-a)u(t-a), a>0$	$e^{-as}F(s)$
Time scaling	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time integration	$\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda$	$\frac{1}{s}F(s)$
	$\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt$
Time differentiation	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f(t)}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
Time convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Frequency translation	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$

Property	$f(t)$	$F(s)$
Time convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Frequency translation	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Multiplication by $\cos(at)$	$f(t)\cos(at)$	$\frac{1}{2}F(s-ja) + \frac{1}{2}F(s+ja)$
Multiplication by $\sin(at)$	$f(t)\sin(at)$	$\frac{1}{2j}F(s-ja) - \frac{1}{2j}F(s+ja)$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)ds$
Frequency scaling	$\frac{1}{\lvert a\rvert}f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(as)$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Periodic signal ($t>0$)	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}F_1(s)$ where $F_1(s) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}dt$

Paires de transformées de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{s\sin(\theta)+\omega\cos(\theta)}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{s\cos(\theta)-\omega\sin(\theta)}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{(s+a)\sin(\theta)+\omega\cos(\theta)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{(s+a)\cos(\theta)-\omega\sin(\theta)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$te^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{2\omega(s+a)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$
$te^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{(s+a)^2-\omega^2}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$
$te^{-at}\sin(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{[(s+a)^2-\omega^2]\sin(\theta)+2\omega(s+a)\cos(\theta)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$
$te^{-at}\cos(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{[(s+a)^2-\omega^2]\cos(\theta)-2\omega(s+a)\sin(\theta)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$

Caractérisation du régime transitoire : réponse à l'échelon d'un système du 2nd ordre

Delai de réponse (Delay time) t_d	Temps requis pour atteindre 50% de la valeur finale
Temps de montée (Rise time) t_r	Temps requis par un système sous-amorti, pour atteindre son premier cycle d'oscillation. Si le système est sur-amorti, alors le temps de montée est défini comme le temps de montée de 10% à 90% de sa valeur finale
Temps de crête (Peak time) t_p	Temps requis pour atteindre la première crête, i.e. l'amplitude maximale de la première oscillation, ou 1er dépassement
Dépassement maximale (Maximum overshoot) M_p	Différence entre le dépassement maximale et la valeur finale (en %)
Temps d'établissement (Settling time) t_s	Temps requis pour atteindre le régime permanent (spécifié entre 2 et 5%)
Erreur de régime permanent (Steady-State error) e_{ss}	Écart entre la réponse et la valeur finale au temps infini

Réponse à l'échelon unitaire d'un système quadratique

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left\{\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\varsigma}\right\}$$

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n+\omega_n^2} = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s+\varsigma\omega_n\right)^2+\omega_n^2\left(1-\zeta^2\right)}$$

$$t_r = \frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = d$$

Exemple : réponse à l'échelon

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n + \omega_n^2}$$
$$= \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$u(t) = 1 \longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2 + s + 1}} \longrightarrow y(t)$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\alpha \pm j\omega_p$$
$$\omega_n = \alpha^2 + \omega_p^2 = 1\, rad/s$$
$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{2} \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = 3{,}62s$$
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8\sec$$
$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = d = 16{,}2\%$$