Orthogonalité

Orthogonalité

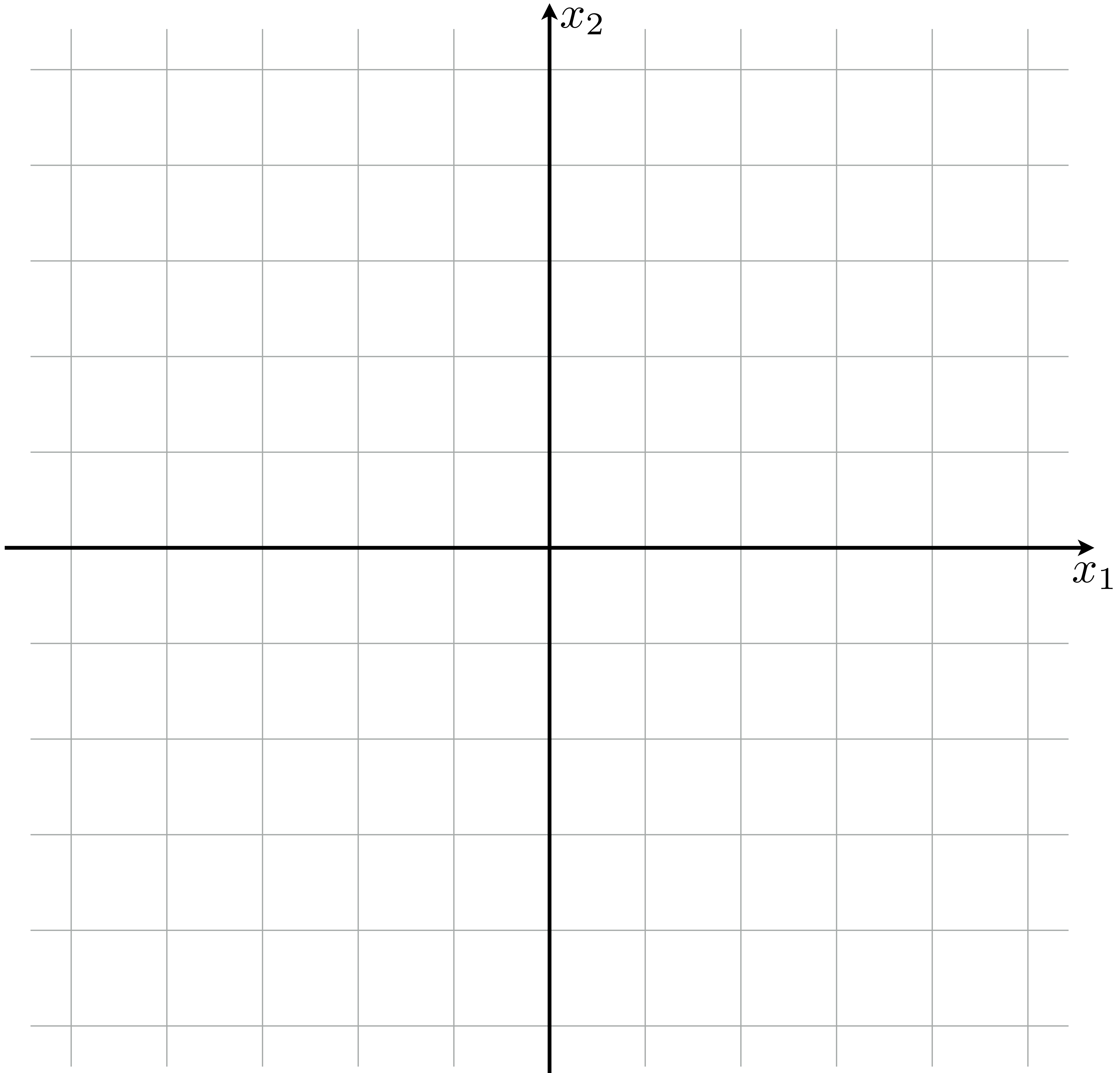
MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Jean-François Lalonde

Source

Vecteurs orthogonaux (ou perpendiculaires)

- Deux vecteurs sont orthogonaux si :

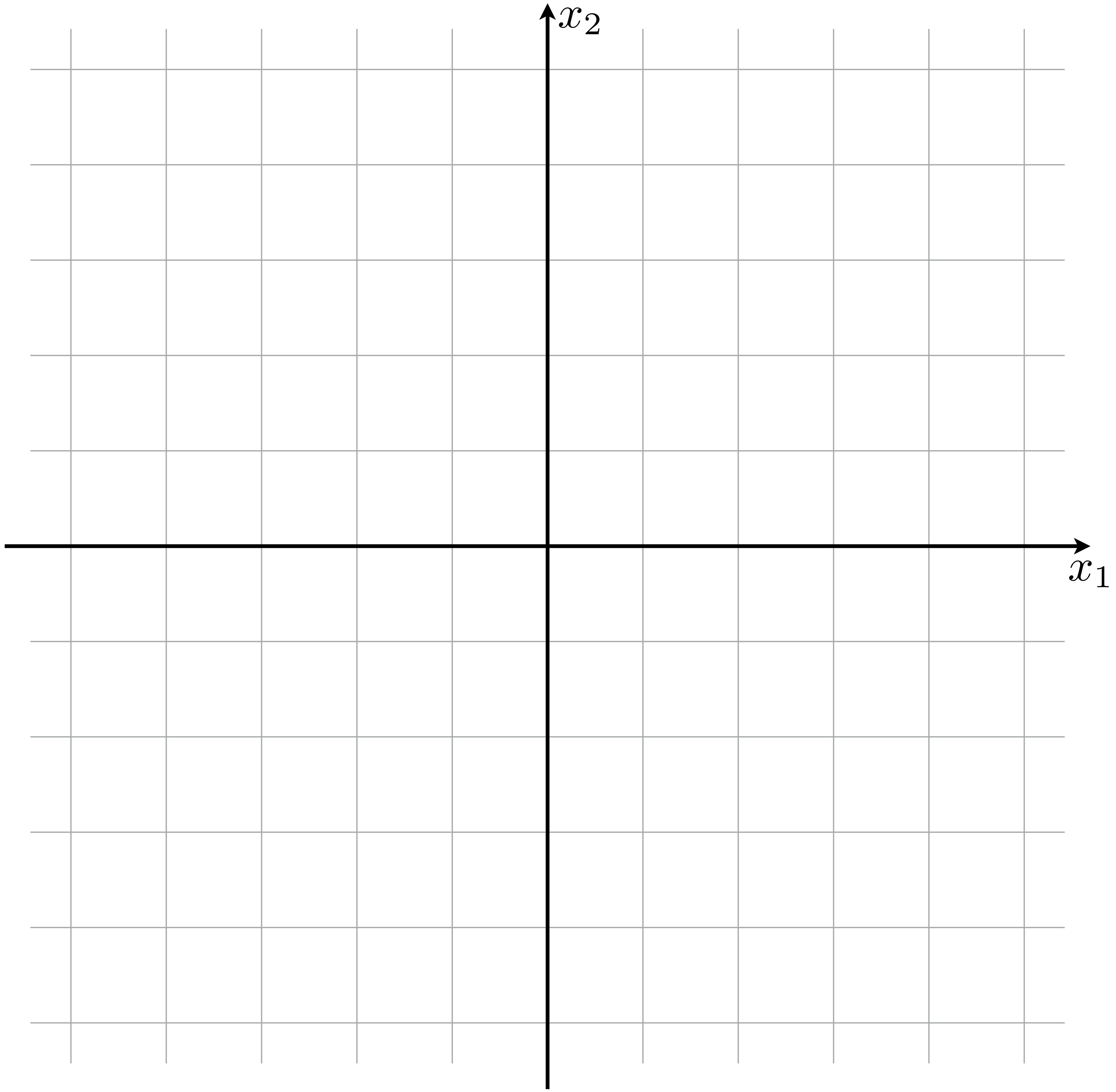
- Le vecteur **0** est orthogonal à n'importe quel autre vecteur



Théorème de Pythagore

- $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$$



Sous-espaces orthogonaux

- Sous-espace $\mathscr{S}$ est orthogonal au sous-espace $\mathscr{T}$ si tous les vecteurs de $\mathscr{S}$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de $\mathscr{T}$.

Dans $\mathbb{R}^2$	Dans $\mathbb{R}^3$

Rappel !

Sous-espaces d'une matrice

$$\mathbf{A} = \left[\quad \right]$$

Espace des lignes

Espace des colonnes

Espace nul

Espace nul de $\mathbf{A}^{\top}$

Sous-espaces orthogonaux d’une matrice

- L’espace nul est orthogonal à l’espace des lignes !
- Pourquoi ?

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Sous-espaces d'une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & n \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] & m \end{array}$$

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = r$$

Espace des lignes

Espace des colonnes

Espace nul

Espace nul de $\mathbf{A}^\top$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} 3 & \\ \left[\begin{array}{c} \quad \\ \quad \\ \quad \end{array}\right] & m \end{array}$$

- Matrice $m \times 3$
- Possibilités pour l'espace nul et l'espace des lignes

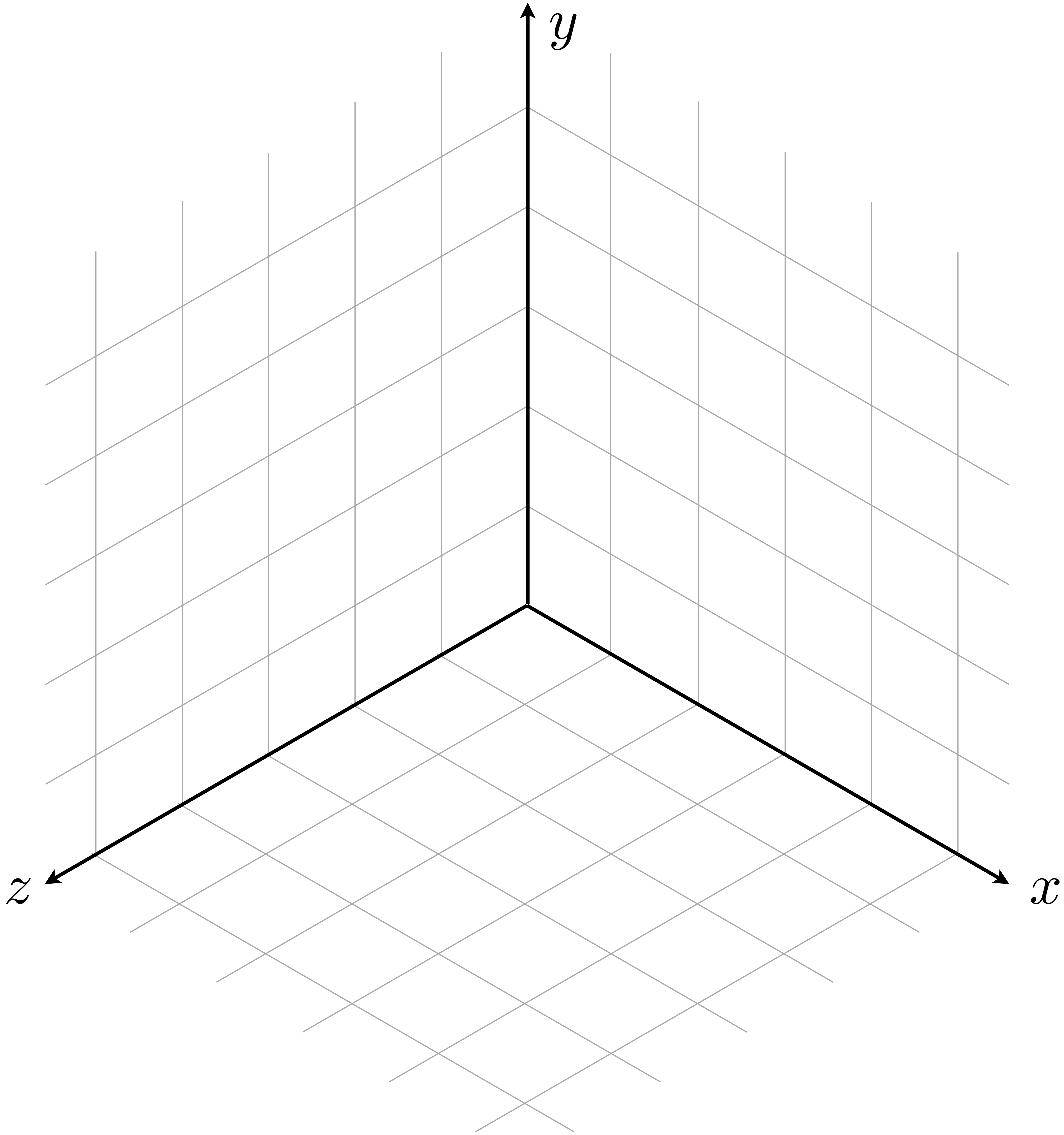
Est-ce possible ?

Quelles sont les possibilités ?

Exemple

- Caractériser l'espace des lignes et l'espace nul

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$



Sous-espaces d’une matrice

Pour une matrice $m \times n$, l’espace nul et l’espace des lignes sont des **compléments orthogonaux** dans $\mathbb{R}^n$.

Espace nul contient **tous** les vecteurs orthogonaux à l’espace des colonnes.

Rappel !

Base

Une **base** pour un sous-espace est un ensemble de vecteurs qui :
1. engendrent le sous-espace
2. sont indépendants

- Combien de vecteurs y a-t-il dans **n'importe quelle base** de $\mathbf{R}^2$?

Base orthogonale

Une **base orthogonale** pour un sous-espace est un ensemble de vecteurs qui :

1. engendrent le sous-espace
2. sont indépendants
3. sont orthogonaux entre eux

Base orthonormée

Une **base orthonormée** pour un sous-espace est
un ensemble de vecteurs qui :
1. engendrent le sous-espace
2. sont indépendants
3. sont orthogonaux entre eux
4. sont unitaires