Orthogonalité

Diagonalisation de matrices symétriques

MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Jean-François Lalonde

Source

Matrices (réelles) symétriques

Sous-ensemble de matrices très important (et courant)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$$

Ses valeurs propres sont :

Ses vecteurs propres sont :

Rappel

Diagonalisation

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

diagonale

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$$

- Comme la matrice ~~matrice~~ $\mathbf{A}$ possède n vecteurs propres indépendants, $\mathbf{P}$ est inversible :

$$A\cancel{PP^{-1}} = PDP^{-1} \qquad A = PDP^{-1}$$

vecteurs propres

valeurs propres

Nous avons diagonalisé la matrice $\mathbf{A}$!

Diagonalisation d'une matrice symétrique

Cas habituel : $$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

Matrice symétrique :

Diagonalisation d'une matrice symétrique

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$$

Sous forme matricielle :

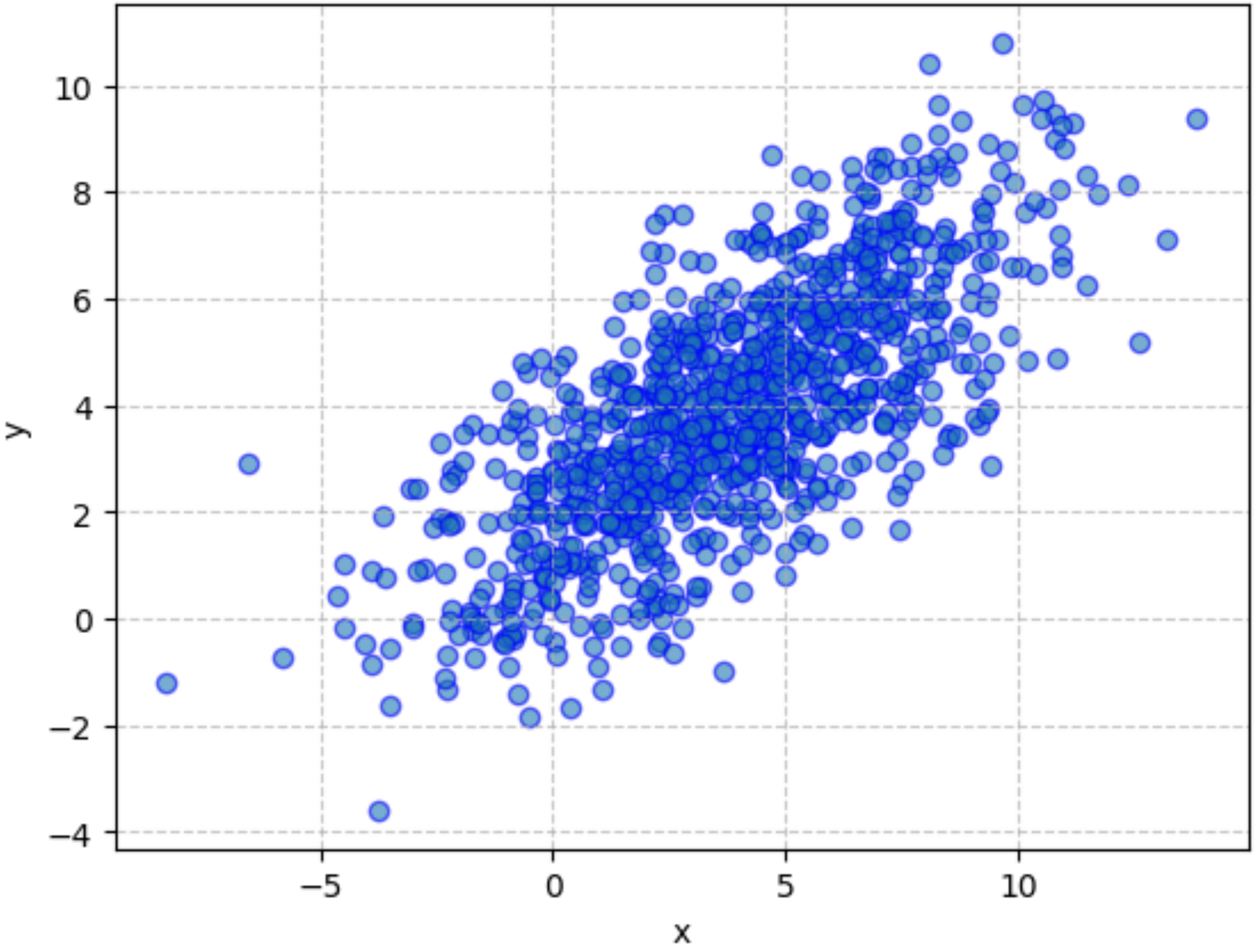
Quelles sont chacune de ces matrices ?

Une matrice symétrique est une **combinaison de matrices de projection orthogonales**.

Exemple : Analyse en Composantes Principales

- Matrice de covariance :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top$$



Une matrice symétrique est une **combinaison de matrices de projection orthogonales**.

Diagonalisation d'une matrice symétrique

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$$

Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable orthogonalement, alors elle est symétrique ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$) :

Théorème spectral

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice réelle.

$\mathbf{A}$ est symétrique si et seulement si elle est diagonalisable orthogonalement.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$$

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^\top + \ldots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^\top$$

Rappel

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^\top + \ldots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^\top$$

Exemple

- Déterminez la matrice 2×2 ayant les valeurs et vecteurs propres suivants :

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$