Orthogonalité

Méthode de Gram-Schmidt

MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée

Jean-François Lalonde

Source

Objectif

- Soit un sous-espace $\mathscr{W}$ de dimensions p dans $\mathbb{R}^n$, donné par une base

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$$

- La méthode de Gram-Schmidt permet de trouver une base orthogonale (et même orthonormale) du même sous-espace $\mathscr{W}$

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_p\}$$

Cas à deux vecteurs

- Commençons par un sous-espace $\mathscr{W}$ à 2 dimensions

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$$

- Conservons tout d'abord le premier vecteur (arbitrairement)

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

Cas à deux vecteurs

- Commençons par un sous-espace $\mathscr{W}$ à 2 dimensions

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$$

- On obtient

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^\top \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

- Sont-ils bien orthogonaux ?

Ajoutons un 3e vecteur

$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^\top \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

Ajoutons un 4e vecteur

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\} \qquad \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^\top \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3^\top \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3^\top \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^\top \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$$

Finalement, on normalise : $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||}$

Exemple

Calculer une base orthonormale pour l'espace des colonnes de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Matrices

Quelle est la relation entre l'espace des colonnes de $\mathbf{A}$ et celui de $\mathbf{Q}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Matrices

Nouvelle factorisation : de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{Q}$ et…

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$