Distance et approximation

Projections (revisitées)

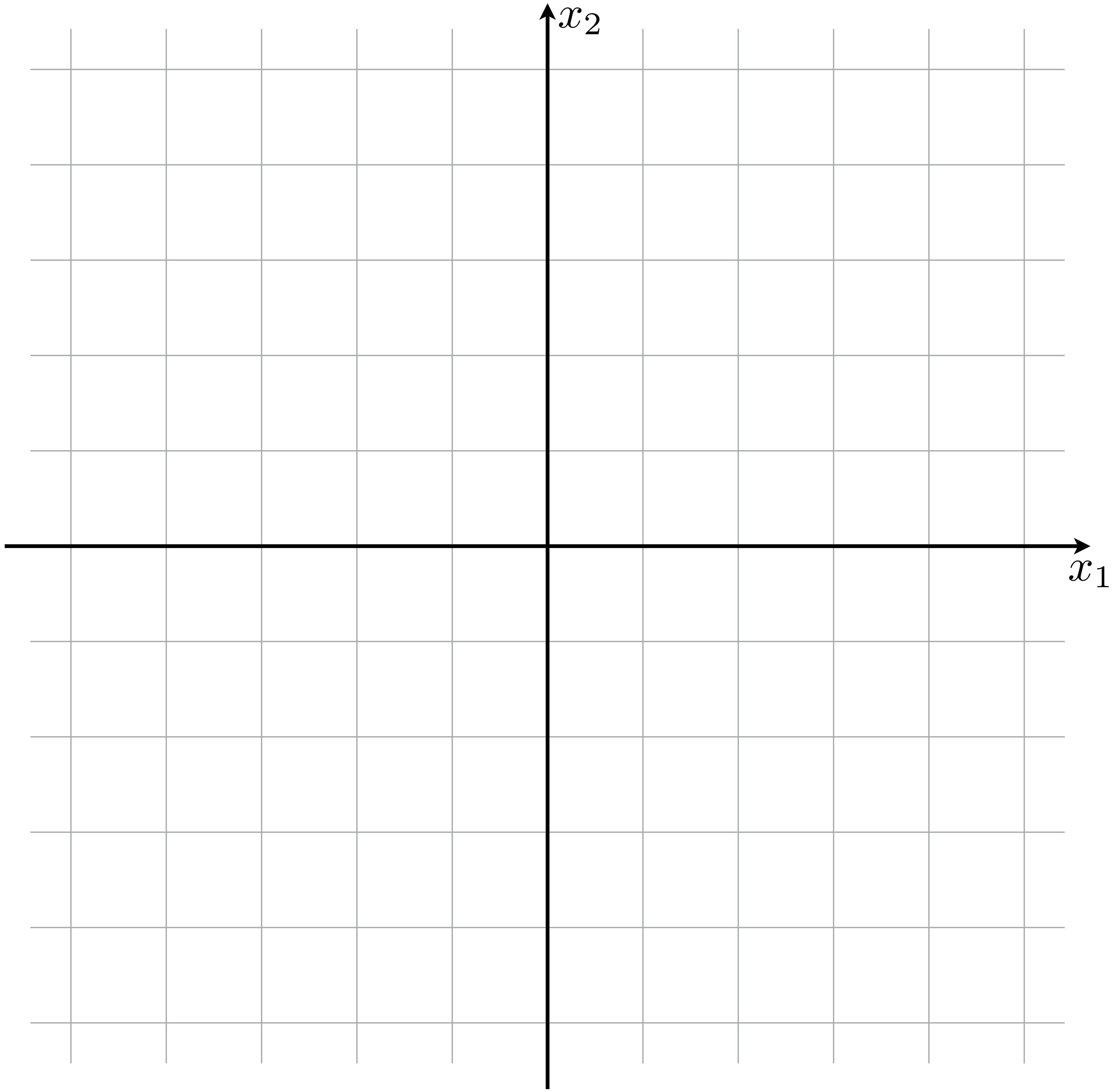
MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Jean-François Lalonde

Image

Rappel

Projection dans un sous-espace à 1 dimension

- Dans $\mathbb{R}^2$, définissons :
  - Sous-espace $\mathbf{u}$ à 1 dimension
  - Vecteur $\mathbf{v}$ qui n'est pas dans ce sous-espace
- Quel est le point $\mathbf{p}$ dans $\mathbf{u}$ le plus près de $\mathbf{v}$?



Pourquoi projeter ?

Parce que, dans plusieurs scénarios, l'équation

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ne possède aucune solution (quand ?).

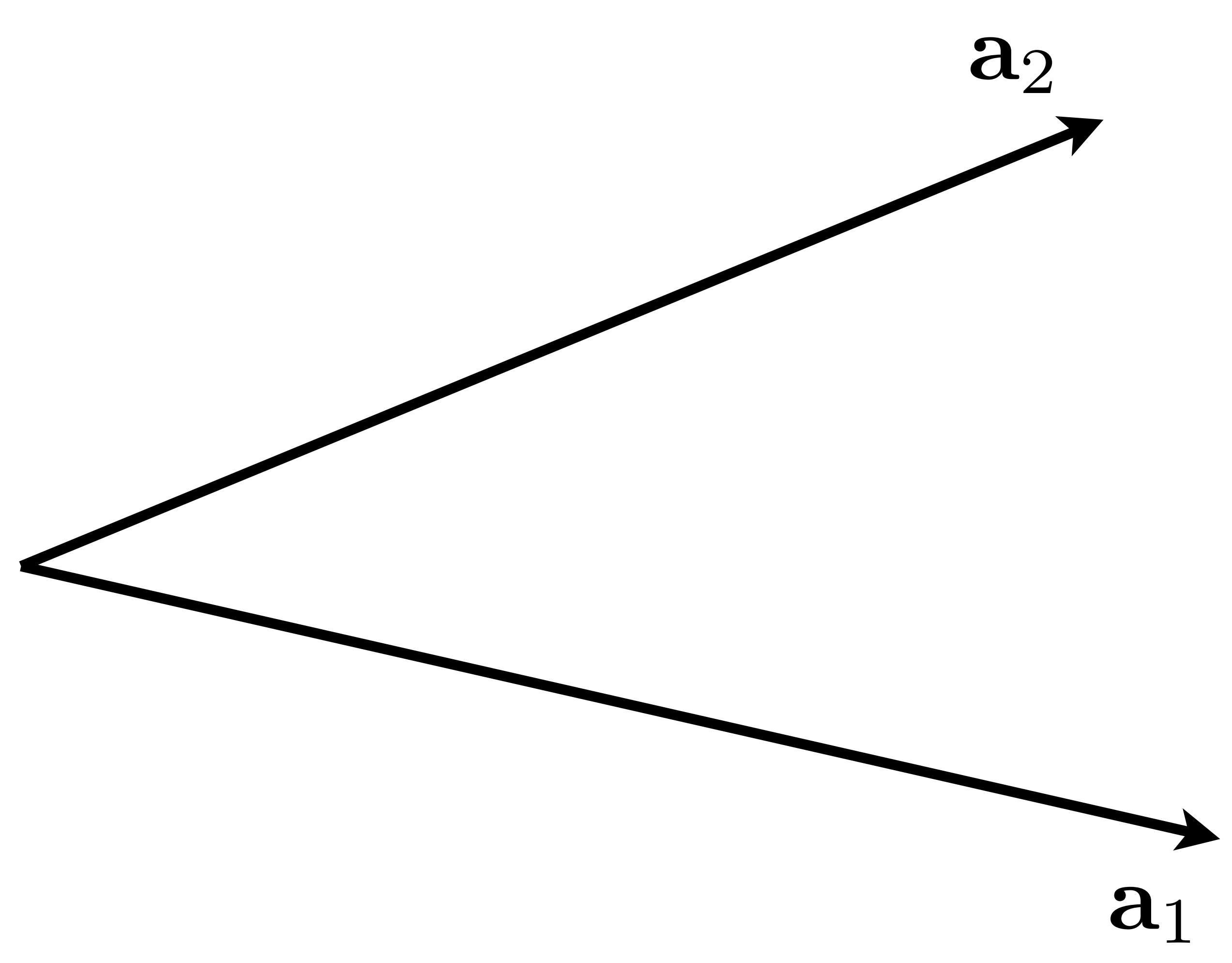
Que faire ? Résoudre l'équation suivante à la place :

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$$

Projection dans l'espace des colonnes de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\longrightarrow\; \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$$

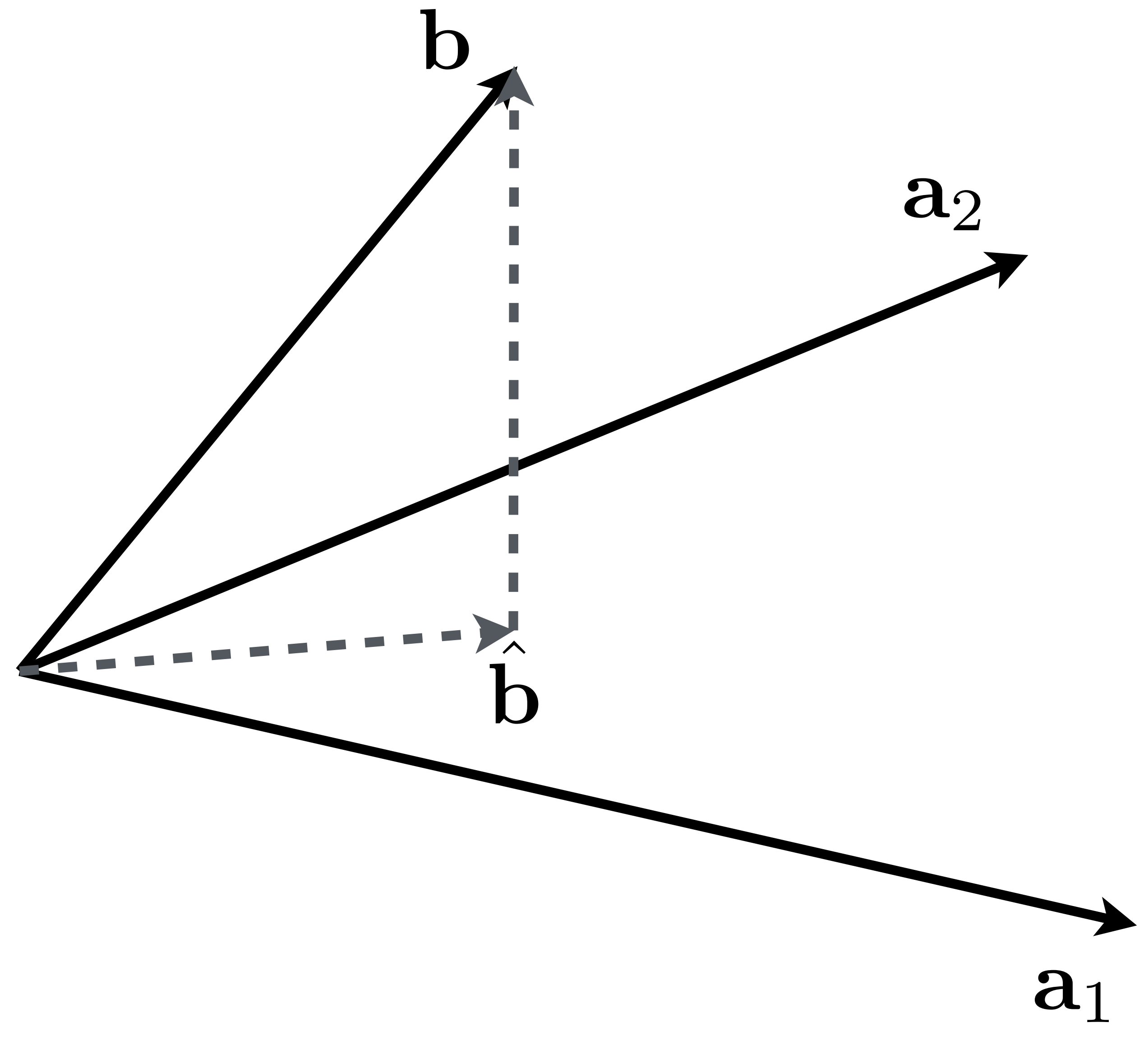
- Espace des colonnes de $\mathbf{A}$ ayant comme base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$
- Vecteur $\mathbf{b}$ qui n'est pas dans l'espace des colonnes (pas de solution à $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- Quel est le point $\hat{\mathbf{b}}$ le plus près de $\mathbf{b}$?



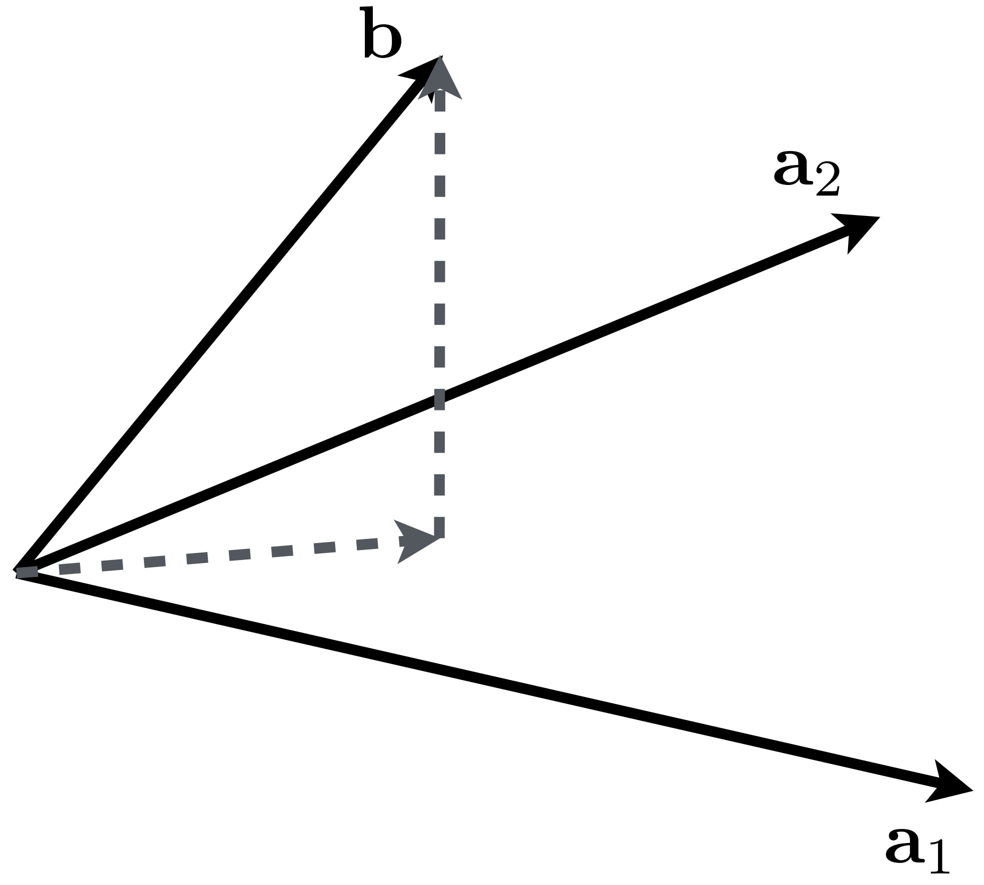
Attention : les colonnes de $\mathbf{A}$ ne sont pas forcément orthogonales

Projection dans l'espace des colonnes de $\mathbf{A}$

- Soit $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$.
- Quelle est la solution $\hat{\mathbf{x}}$?
- Sachant que : $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ est perpendiculaire au plan, projeter sur un vecteur à la fois

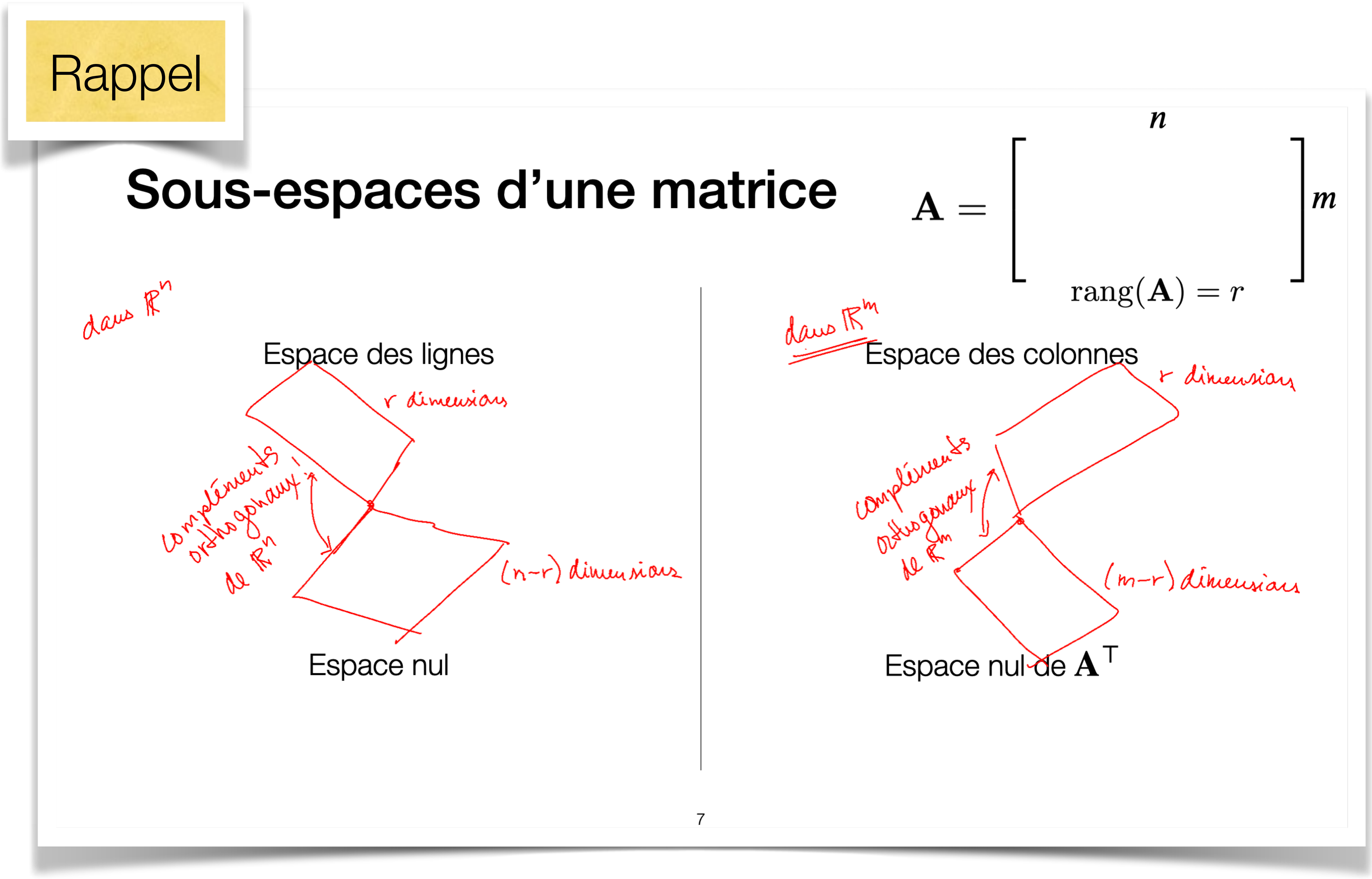


Projection et sous-espaces



$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

Dans quel sous-espace est situé $(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$?



Déterminer $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

Valide seulement lorsque $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ est inversible.

Lien avec orthogonalité

Rappel : lorsque la base est orthonormale

Théorème de la décomposition orthogonale

Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{z}$$

les $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ sont : orthogonaux, unitaires

où $\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{W}$ et $\mathbf{z} \in \mathscr{W}^\perp$. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est une base **orthornormée** de $\mathscr{W}$, alors

$$\boxed{\hat{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{U}\mathbf{U}^\top}_{P} \mathbf{v}} \qquad U = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

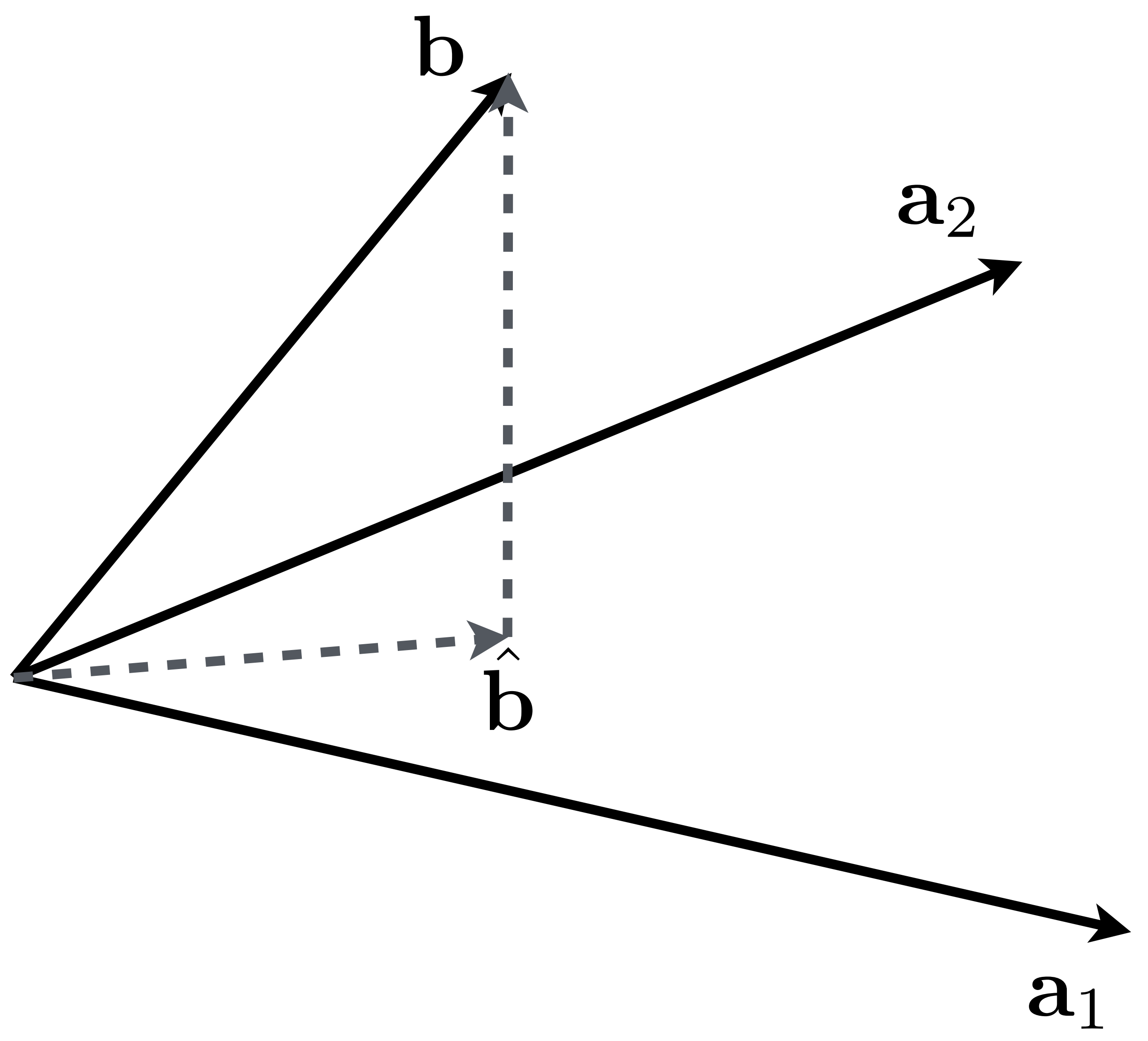
$$\hat{v} = v^T u_1 \cdot u_1 + v^T u_2 \cdot u_2 + \cdots + v^T u_p \cdot u_p$$

$$= \underbrace{u_1 u_1^T}v + \underbrace{u_2 u_2^T}v + \cdots + \underbrace{u_p \cdot u_p^T}v$$

13

Erreur commise

$$\epsilon = ||\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}||$$



L'erreur quadratique moyenne est définie par : $\epsilon^2 = ||\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}||^2$

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rappel

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

Exemple

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^\top\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Rappel
$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons démarré avec un système **inconsistant** ($\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
et obtenons maintenant un système **consistant**, mais ça n'est **pas le même système** !

Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rappel

$$\epsilon^2 = ||\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}||^2$$

Quelle est l'erreur quadratique moyenne, et dépend-elle de s ?