Основы вариационного исчисления (продолжение)

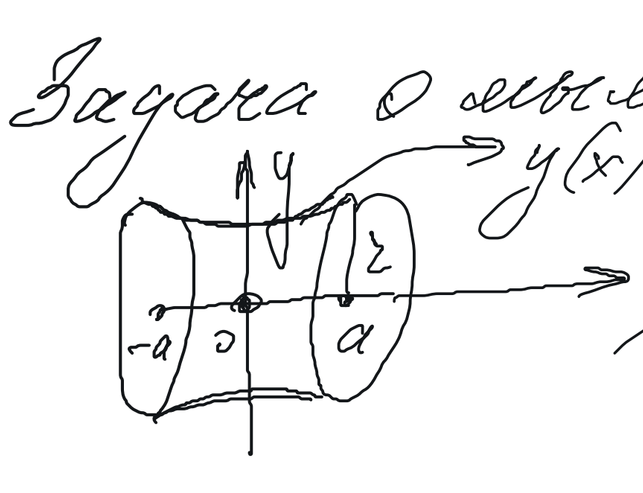
1) Всегда ли есть существует решение вариационной задачи?

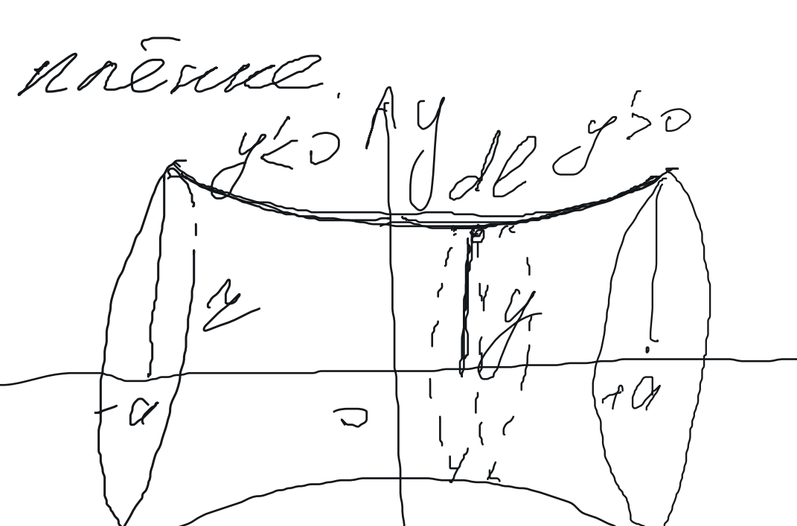
$I[y] = \int_a^b dx\, F(x, y, y')$

$y = y(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемые ф-ции

$$\frac{\delta I[y]}{\delta y(x)} = \begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow y = \bar{y}(x) \text{ – экстремаль} \\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Задача о мыльной плёнке.





dl, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$2a$, r; $\frac{2a}{r}$

$dS = 2\pi y\, dl$ – элементарная площадь боковой пов-ти цилиндра

$dS = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$S[y] = 2\pi \int_{-a}^{+a} dx\, y\sqrt{1 + y'^2}$, $F(x, y, y') = F(y, y') = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}$

$y(-a) = y(a) = r$

$F - y' F_{y'} = C_1$

$2\pi y\sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot 2\pi y \cdot \frac{2y'}{2\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$

$2\pi y\left(\sqrt{1 + y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = C_1$

$2\pi y\, \frac{1 + y'^2 - y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \Rightarrow \frac{2\pi y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$

$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{C_1}{2\pi} = \frac{1}{k} > 0$

$\frac{y^2}{1 + y'^2} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow k^2 y^2 - 1 = y'^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{k^2 y^2 - 1}$

$\int \frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} = \pm\int dx \qquad \frac{1}{k}\ln\left(ky + \sqrt{k^2 y^2 - 1}\right) = \pm(x + C)$

$\ln\left(ky + \sqrt{k^2 y^2 - 1}\right) = \pm k(x + C)$

$ky + \sqrt{k^2 y^2 - 1} = e^{\pm k(x + C)}$

$\sqrt{k^2 y^2 - 1} = e^{\pm k(x + C)} - ky$

$k^2 y^2 - 1 = e^{\pm 2k(x + C)} - 2ky\, e^{\pm k(x + C)} + k^2 y^2$

$2ky\, e^{\pm k(x + C)} = e^{\pm 2k(x + C)} + 1$

$y = \frac{1}{2k}\left(e^{k(x + C)} + e^{-k(x + C)}\right)$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, $y = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right) = \frac{\operatorname{ch} kx}{k}$

$$\boxed{y = \frac{\operatorname{ch} kx}{k}}$$ – цепная линия

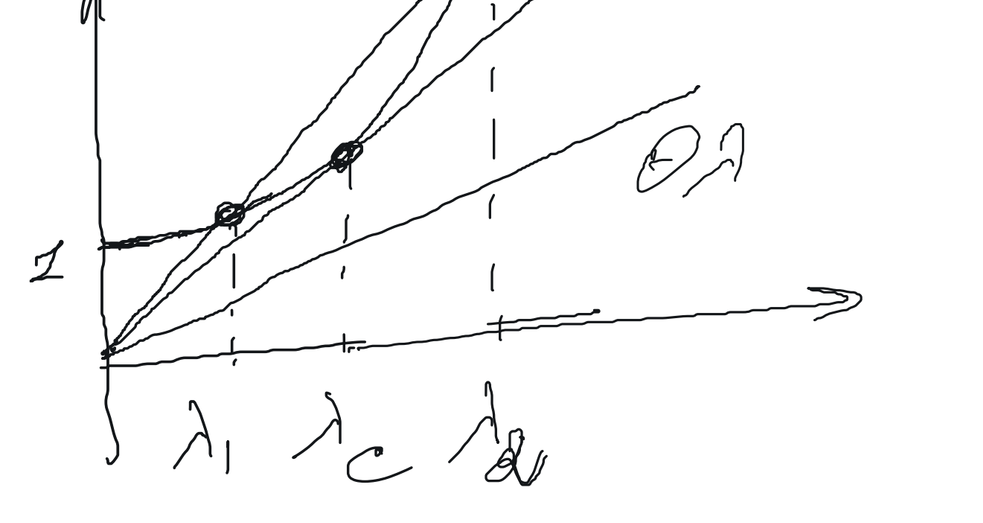
$y(a) = r = \frac{\operatorname{ch} ka}{k}$

Обезразмерим задачу

$\operatorname{ch}(ka) = kr$, $ka = \lambda$ – безразмерная величина, $k = \frac{\lambda}{a}$

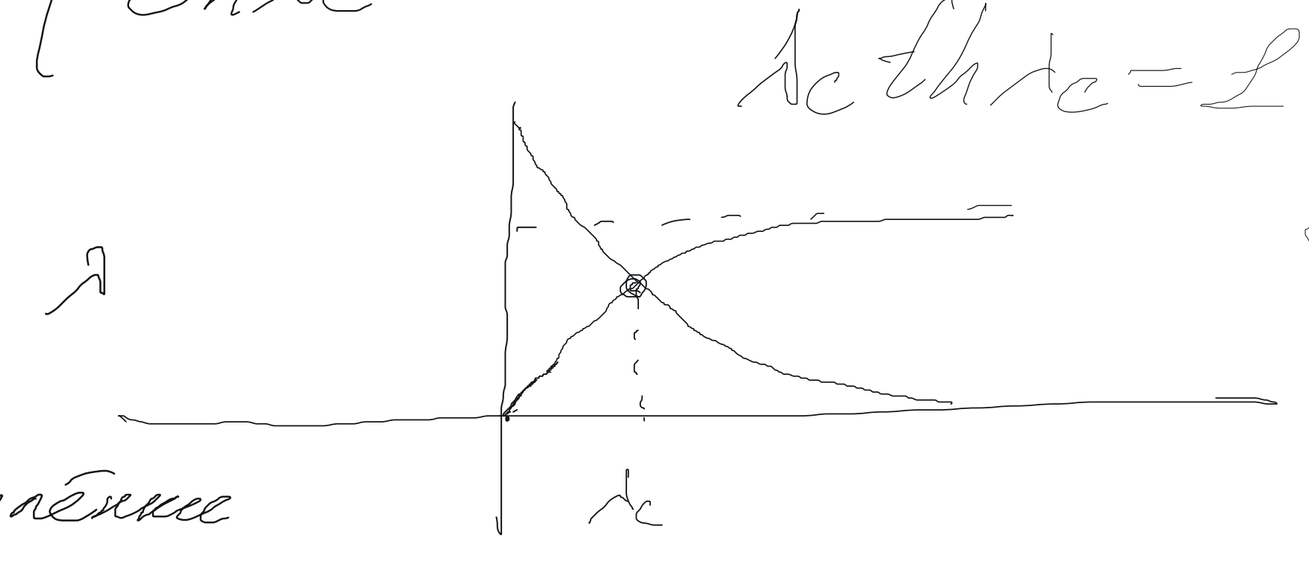
$\operatorname{ch}\lambda = \frac{r}{a}\cdot\lambda$, $\theta = \frac{r}{a}$

$$\boxed{\operatorname{ch}\lambda = \theta\cdot\lambda} \Rightarrow \lambda = ?$$



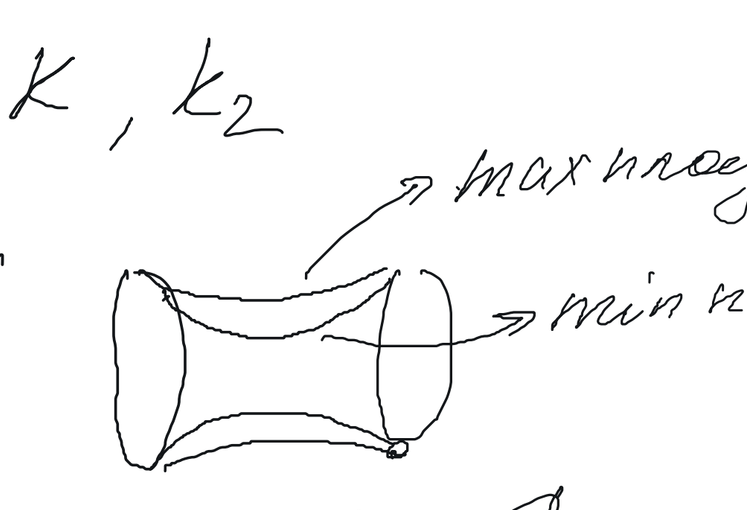
$\begin{cases} \operatorname{ch}\lambda_c = \theta^*\lambda_c \\ \operatorname{sh}\lambda_c = \theta^* \end{cases} \Rightarrow \operatorname{th}\lambda_c = \frac{1}{\lambda_c} \Rightarrow \theta^* \simeq 0{,}7$

$\lambda_c \operatorname{th}\lambda_c = 1 \qquad \frac{r}{2a} \simeq 0{,}35$

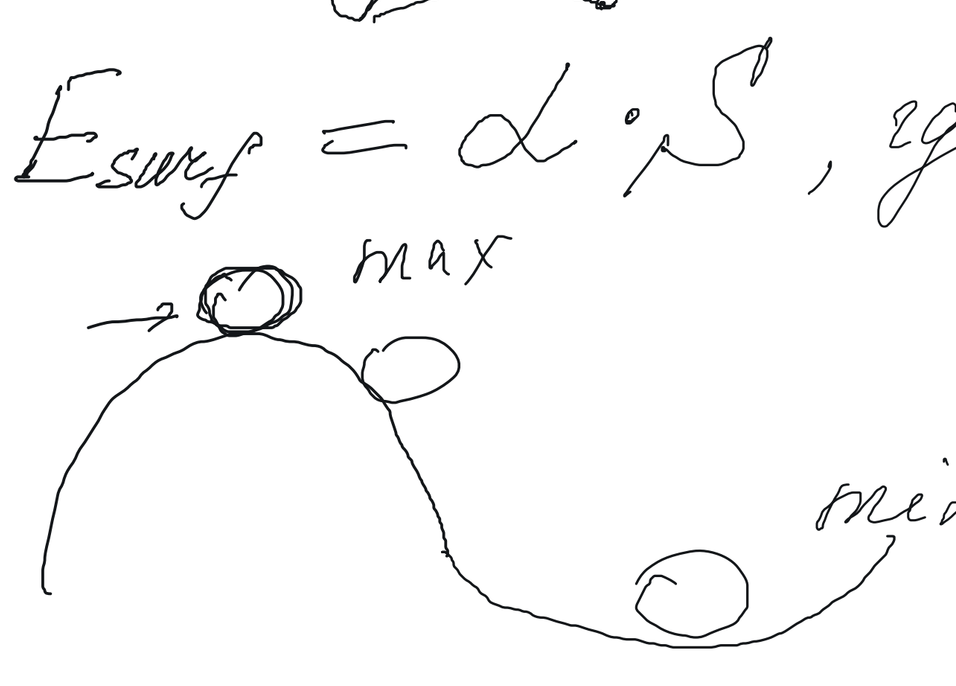


k, k_2

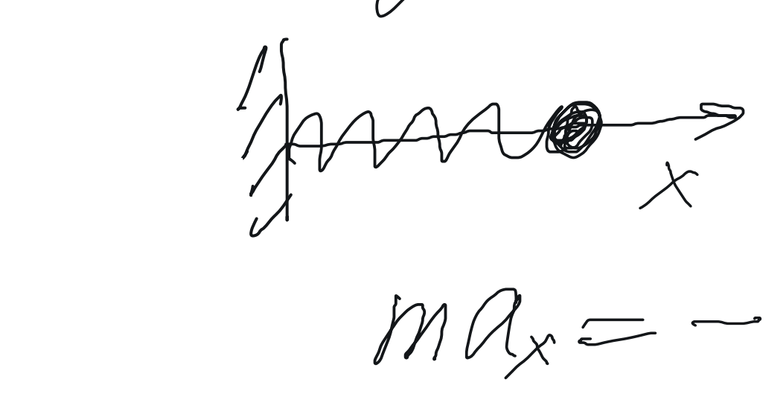
$\theta > \theta^*$



$E_{surf} = \alpha\cdot S$, где α – поверхностное натяжение плёнки.



2) Вариационный принцип в механике.



$U(x) = \frac{æx^2}{2}$

$ma_x = -U'(x) = -æx$

$ma_x = -æx$

$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, …

$m\ddot{x} = -æx$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega^2 = \frac{æ}{m}$

Докажем, что уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ может быть получено из принципа экстремального действия

$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(t, x, \dot{x})$, где $\mathcal{L} = T - U$ – функция Лагранжа

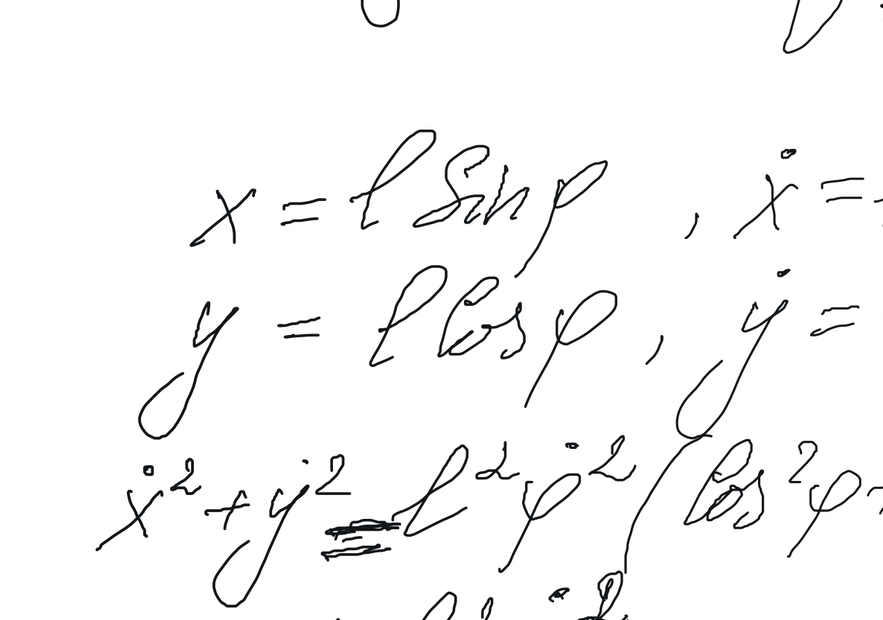
$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ – кинетическая энергия

$U = \frac{æx^2}{2}$ – потенциальная энергия.

$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{æx^2}{2}\right) \Rightarrow \mathcal{L} - \dot{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = C \Rightarrow \boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{Const}}$

$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = -æx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$

$m\ddot{x} + æx = 0$; $\ddot{x} + \frac{æ}{m}x = 0$



$\mathcal{L} = T - U \qquad \boxed{v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_x^2 + v_y^2}$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, $U = mg\Delta y$

$\Delta y = l - l\cos\varphi = l(1 - \cos\varphi)$

$U = mgl(1 - \cos\varphi)$

$x = l\sin\varphi$, $\dot{x} = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$

$y = l\cos\varphi$, $\dot{y} = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = l^2\dot{\varphi}^2$

$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi)$

φ, $\dot{\varphi}$ – обобщённая координата и обобщённая скорость

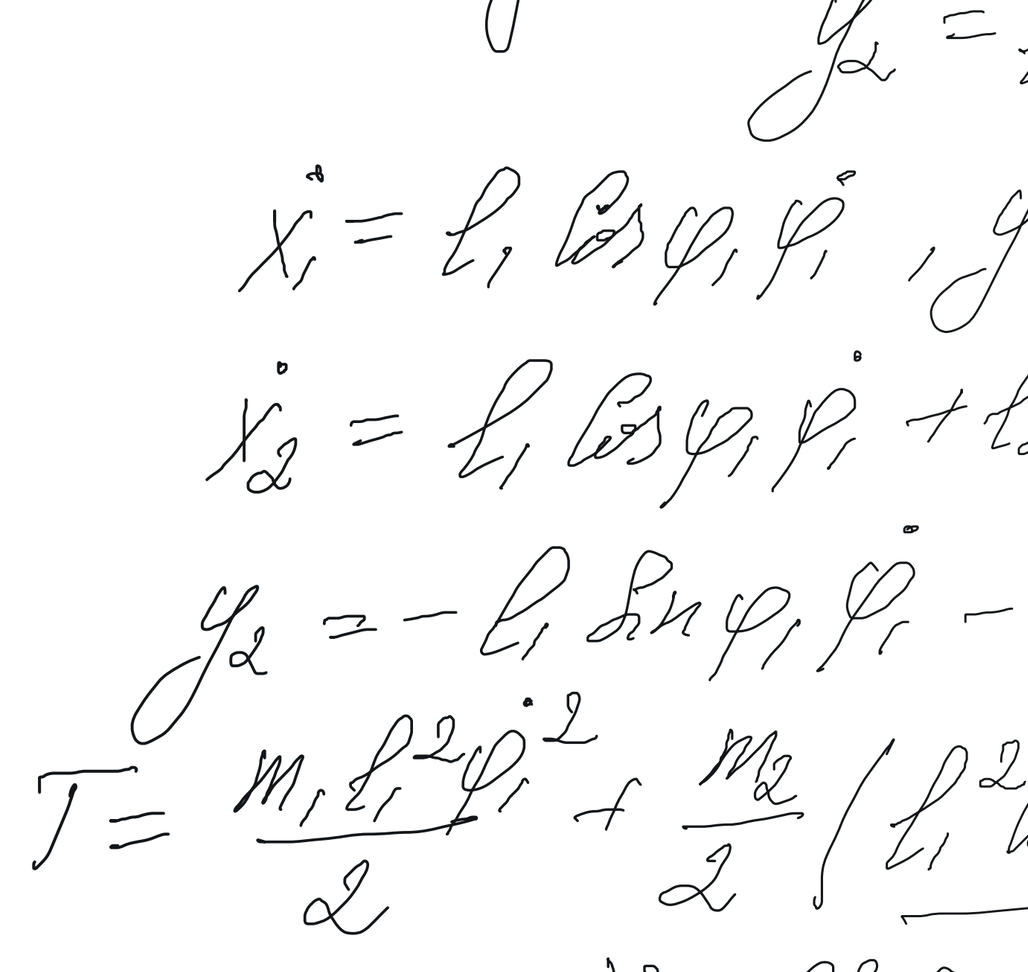
$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 0$

$-mgl\sin\varphi - \frac{d}{dt}ml^2\dot{\varphi} = 0$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

$\varphi \ll 1 \quad \sin\varphi \approx \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$

$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$



$\mathcal{L} = T - U$

$T = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2}$

$x_1 = l_1\sin\varphi_1$, $y_1 = l_1\cos\varphi_1$

$x_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2$

$y_2 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2$

$\dot{x}_1 = l_1\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1$, $\dot{y}_1 = -l_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1$

$\dot{x}_2 = l_1\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 + l_2\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2$

$\dot{y}_2 = -l_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 - l_2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2$

$T = \frac{m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2}\Big(l_1^2\cos^2\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\cos^2\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2$

$+ l_1^2\sin^2\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\sin^2\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\Big) =$

$= \frac{m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right)$

$U = m_1gl_1(1 - \cos\varphi_1) + m_2g\left(l_1(1 - \cos\varphi_1) + l_2(1 - \cos\varphi_2)\right) =$

$= (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\varphi_1) + m_2gl_2(1 - \cos\varphi_2)$

$\frac{\delta S[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta\varphi_1(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_1} = 0$

$\frac{\delta S[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta\varphi_2(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_2} = 0$