ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1.1. Вычислить повторные интегралы.

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{1+y^2}\,dy$,

б) $\int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_{y^2-4}^5 (x+2y)\,dx$.

1.2. Расставить пределы в том и другом порядке в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

если

а) D – параллелограмм с вершинами $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(2,7)$, $E(1,5)$;

б) D – круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов 1 и 2 с общим центром в начале координат.

1.3. Расставить пределы в том и другом порядке в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

если область D определяется неравенствами

а) $x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ x+y \leqslant 1$;

б) $x^2+y^2 \leqslant a^2$, где $a = \mathrm{const}$;

в) $x^2+y^2 \leqslant x$;

г) $x \geqslant -1,\ \ y \leqslant 1,\ \ x \leqslant y$;

д) $y \leqslant x \leqslant y+2a,\ \ 0 \leqslant y \leqslant a$, где $a = \mathrm{const},\ \ a \geqslant 0$.

1.4. Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy$,

б) $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$,

в) $\int\limits_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int\limits_{a/2}^{a} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx$.

1.5. Вычислить следующие двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D x\,dxdy$, где область D ограничена прямой $x+y=2$ и дугой окружности $x^2 +$ $+ (y-1)^2 = 1$;

б) $\iint\limits_D e^{x/y}\,dxdy$, где область D ограничена параболой $x = y^2$ и прямыми $x = 0$ и $y = 1$;

в) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, где область D ограничена параболой $2px = y^2$ и прямой $x = p$.

1.6. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

а) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, если область D является треугольником, ограниченным прямыми $y = x$, $y = -x$, $y = 1$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} f(y/x)\,dy$.

1.7. Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

а) $\iint\limits_D y\,dxdy$, если D – часть круга $(x - a/2)^2 + y^2 \leqslant a^2/4$, лежащая выше оси абсцисс.

б) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, если D – полукруг радиуса a с центром в начале координат, лежащий выше оси абсцисс.

1.8. Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

а) $az = y^2,\ x^2 + y^2 = r^2,\quad z = 0$;

б) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\quad x + z = 6,\quad z = 0$;

в) $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\quad y = 1,\quad z = 0$;

г) $x + y + z = a,\ 3x + y = a,\quad \frac{3}{2}x + y = a,\quad y = 0,\quad z = 0$.

Ответ: а) $\frac{\pi r^4}{4a}$; б) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; в) $\frac{88}{105}$; г) $\frac{a^3}{18}$.

1.9. Найти весь объем, заключенный между цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$ и гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi a^3\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

1.10. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью Oxy, цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

Ответ: $\frac{32}{9}a^3$.

1.11. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью Oxy, поверхностью $z = ae^{-x^2-y^2}$ и цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ: $\pi a\left(1 - e^{-R^2}\right)$.