1. Сформулировать определения случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Записать основные свойства функции распределения.

Пусть (Ω, β, P) — вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Определение. *Случайной величиной называется функция*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

такая, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ *множество* $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \beta$ *(т. е. для любого* x *множество* $\{\omega : X(\omega) < x\}$ *является событием).*

2.2.1.2 Функция распределения

Пусть X — случайная величина, связанная с некоторым случайным экспериментом.

Определение. *Функцией распределения вероятностей случайной величины* X *называется отображение*

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

определённое следующим правилом[23]

$$F_X(x) = P\{X < x\}$$

2.2.1.2.1 Свойства функции распределения

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
2. F является неубывающей функцией, т. е. если $x_1 \leqslant x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;
3. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$
4. В каждой точке функция распределения непрерывна слева[24]: $\lim\limits_{x \to x_0 -} F(x) = F(x_0)$;
5. $P\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a)$.

4 и 5 поменять местами

2. Сформулировать определение дискретной случайной величины; понятие ряда распределения. Сформулировать определение непрерывной случайной величины и функции плотности распределения вероятностей.

2.2.1.3 Дискретные случайные величины

Определение. *Случайная величина называется дискретной, если множество её значений конечно или счётно.*

Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения из конечного множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Закон распределения такой случайной величины можно задать таблицей $P(x)$:

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{X} & x_1 & \ldots & x_i & \ldots & x_n \\ \mathrm{P} & p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{array}$$

При этом $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Определение. *Эта таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины X.*

2.2.1.4 Непрерывные случайные величины

Определение. *Случайная величина X называется непрерывной, если существует функция*

$$f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

такая, что $\forall x \in \mathbb{R}$ функция $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (F — функция распределения в X).

(см. рисунок 23)

Замечание 1. *При этом f называют функцией плотности распределения вероятности случайной величины X.*

3. Сформулировать определение непрерывной случайной величины. Записать основные свойства функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Определение. *Случайная величина X называется непрерывной, если существует функция*

$$f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

такая, что $\forall x \in \mathbb{R}$ функция $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (F — функция распределения в X).

(см. рисунок 23)

2.2.1.4.1 Свойства непрерывных случайных величин

1. $f(x) \geqslant 0$;

2. $$P\{a \leqslant X < b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

   где X — непрерывная случайная величина, а f – её функция плотности[27];

3. Условие нормировки:

   $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

   где f — функция плотности некоторой случайной величины;

4. $$P\{x_0 \leqslant X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$$

   где X — непрерывная случайная величина, f — её функция плотности, x_0 — точка непрерывности функции f, а Δx — мало;

5. Если X — непрерывная случайная величина, то для любого наперёд заданного $x_0 \in \mathbb{R}$

   $$P\{X = x_0\} = 0$$

Где X – непр. сл. вел.

4. Сформулировать определения случайного вектора и его функции распределения вероятностей. Записать свойства функции распределения двумерного случайного вектора.

2.3 Случайные векторы

2.3.1 Основные понятия

Пусть

1. (Ω, β, P) — вероятностное пространство;
2. $X_\omega = X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ — случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Определение. *n-мерным случайным вектором называется кортеж*[34]

$$\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

Определение. *Функцией распределения вероятностей случайного вектора*

$$X = (X_1, \ldots, X_n)$$

называется отображение

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

определённое правилом

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$$

2.3.1.1 Свойства функции распределения случайного вектора (для n = 2)

1. $0 \leqslant F(x_1, x_2) \leqslant 1$;

2. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является неубывающей функцией;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является неубывающей функцией.

3. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty, x_2 = const} F(x_1, x_2) = 0$

   $\lim\limits_{x_1 = const, x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$

4. $\lim\limits_{x_1 \to +\infty, x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = 1$

5. $\lim\limits_{x_1 = const, x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$

   $\lim\limits_{x_1 \to +\infty, x_2 = const} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$

   где $F_{X_i}(x_i)$ — функция распределения случайной величины X_i;

6. Вероятность того, что реализация попадёт в похожую на прямоугольник область $D = \{(x, y) \colon x \in [a_1, b_1), \, y \in [a_2, b_2)\}$:

   $P\{a_1 \leqslant X < b_1, \, a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

7. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной x_1 является непрерывной слева в каждой точке;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной x_2 является непрерывной слева в каждой точке.

5. Сформулировать определение дискретного случайного вектора; понятие таблицы распределения двумерного случайного вектора. Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей.

2.3.2 Дискретные случайные векторы

Определение. *Случайный вектор* $(X_1, \ldots, X_n)$ *называется дискретным, если каждая из составляющих его случайных величин* X_i, $i = \overline{1, n}$ *является дискретной.*

Давайте рассмотрим двумерный случайный вектор (X, Y). Для простоты будем считать, что случайные величины могут принимать значения

$$X = \{x_1, \ldots, x_m\}$$
$$Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

Тогда этот вектор может принимать значения (x_i, y_j), коих $m \cdot n$ штук. Закон распределения этого вектора удобно задавать при помощи таблицы:

X, Y	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_n
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{in}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	$\ldots$	p_{mj}	$\ldots$	p_{mn}

Здесь $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. При этом должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

$i=1$

Указанную выше табличку принято дополнять ещё одним столбцом для p_{X_i} и одной строкой для p_{Y_j}:

X, Y	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_n	P_X
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1n}	P_{X_1}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{in}	P_{X_i}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	$\ldots$	p_{mj}	$\ldots$	p_{mn}	P_{X_m}
P_Y	P_{Y_1}	$\ldots$	P_{Y_j}	$\ldots$	P_{Y_n}	1

Сумма элементов в каждой строке исходной таблицы должна равняться соответствующему P_{X_i}, а сумма элементов в каждом столбце — P_{Y_j}. Сумма элементов в строке P_Y (и сумма элементов в столбце P_X, отдельно) должна равняться 1.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}_{\text{обозначим сумму как } p_{X_i}} \qquad P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_{Y_j}$$

Определение. *Случайный вектор* $(X_1, \ldots, X_n)$ *называется непрерывным, если существует функция*

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

такая, что для каждой точки $(x_1, \ldots, x_n)$ *выполняется*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} dt_2 \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_i} dt_i \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n$$

где F *— функция распределения плотности случайного вектора* $(X_1, \ldots, X_n)$. *При этом* f *называется функцией плотности распределения вероятностей этого вектора.*

6. Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей. Записать основные свойства функции плотности распределения двумерных случайных векторов.

Определение. *Случайный вектор* $(X_1, \ldots, X_n)$ *называется непрерывным, если существует функция*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

такая, что для каждой точки $(x_1, \ldots, x_n)$ *выполняется*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} dt_2 \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_i} dt_i \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n$$

где F *— функция распределения плотности случайного вектора* $(X_1, \ldots, X_n)$. *При этом* f *называется функцией плотности распределения вероятностей этого вектора.*

2.3.3.1 Свойства непрерывных случайных векторов (для n=2)

1. Если f — функция плотности двумерного случайного вектора, то $f(x_1, x_2) \geqslant 0$.
2. Если (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор, а $f(x_1, x_2)$ — его функция плотности, то

$$P\{a_1 \preccurlyeq X_1 \preccurlyeq b_1,\, a_2 \preccurlyeq X_2 \preccurlyeq b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

3. Условие нормировки: $\iint\limits_{R^2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$.
4. Если $f(x_1, x_2)$ — функция плотности вектора (X_1, X_2), а (x_1^0, x_2^0) — точка непрерывности функции f, то

$$P\{x_1^0 \preccurlyeq X_1 \preccurlyeq x_1^0 + \triangle x_1, x_2^0 \preccurlyeq X_2 \preccurlyeq x_2^0 + \triangle x_2\} \approx f(x_1^0, x_2^0) \triangle x_1 \triangle x_2$$

если $\triangle x_1$, $\triangle x_2$ достаточно малы.

5. Если $(X_1,\, X_2)$ — непрерывный случайный вектор, то для любых наперёд заданных $x_1^0,\, x_2^0$

$$P\{(X_1,\, X_2) = (x_1^0,\, x_2^0)\} = 0$$

6.

$$P\{(X,\, Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x_1,\, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

7.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\, x_2)\, dx_2 = f_{X_1}(x_1)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\, x_2)\, dx_1 = f_{X_2}(x_2)$$

где f_{X_1}, f_{X_2} — маргинальные функции плотности случайных величин X_1 и X_2, f — совместная функция плотности случайных величин X_1 и X_2 ($\equiv$ функция плотности случайного вектора $(X_1,\, X_2)$).

7. Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать свойства независимых случайных величин. Сформулировать определение попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Определение. *Случайные величины X и Y называются независимыми, если*

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

где F — совместная функция распределения X и Y ($\equiv$ функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y — маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

2.3.4.1 Свойства независимых случайных величин

1. ...

$$\text{Случайные величины } X \text{ и } Y \text{ независимы}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\forall x,\, y \in \mathbb{R} \text{ события } \{X < x\} \text{ и } \{Y < y\} \text{ независимы.}$$

2. ...

$$\text{Случайные величины } X \text{ и } Y \text{ независимы}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R},\, \forall\forall y_1,\, y_2 \in \mathbb{R} \text{ события } \{x_1 \leqslant X < x_2\} \text{ и } \{y_1 \leqslant Y < y_2\} \text{ независимы.}$$

3. ...

$$\text{Случайные величины } X \text{ и } Y \text{ независимы}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\forall M_1,\, M_2 \text{ события } \{X \in M_1\} \text{ и } \{Y \in M_2\} \text{ независимы,}$$

   где M_1, M_2 — промежутки или объединения промежутков в $\mathbb{R}$.

4. Если X и Y — дискретные случайные величины, то

$$X,\, Y \text{ — независимые} \iff p_{ij} \equiv P_{X_i} P_{Y_j}$$

   где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $P_{X_i} = P\{X = x_i\}$, $P_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$.

5. Если X и Y — непрерывные случайные величины, то

$$X,\, Y \text{ — независимы} \iff f(x, y) \equiv f_X(x)\, f_Y(y)$$

   где f — совместная плотность распределения случайных величин X и Y ($\equiv$ функция плотности распределения случайного вектора (X, Y)); f_X, f_Y — маргинальные плотности распределения случайных величин X и Y соответственно.

Определение. *Случайные величины* $X_1, \ldots, X_n$, *заданные на одном вероятностном пространстве, называются*

- *Попарно независимыми, если* X_i *и* X_j *независимы при* $i \neq j$;

- *Независимыми в совокупности, если*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

где F *— совместная функция распределения случайных величин* $X_1, \ldots X_n$ ($\equiv$ *функция распределения случайного вектора* $(X_1, \ldots X_n)$), F_{X_i} *— маргинальные функции распределения случайных величин* X_i, $i = \overline{1; n}$.

8. Понятие условного распределения. Доказать формулу для вычисления условного ряда распределения одной компоненты двумерного дискретного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение. Записать формулу для вычисления условной плотности распределения одной компоненты двумерного непрерывного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение.

2.3.5 Условные распределения

Давайте рассмотрим случайный вектор (X, Y). Предположим, известно, что случайная величина Y приняла значение y_0. Что в этом случае можно сказать о возможных значениях случайной величины X и что можно сказать о законе распределения случайной величины X при условии $Y = y_0$?

2.3.5.1 Случай дискретного случайного вектора

Пусть

1. (X, Y) — дискретный случайный вектор;
2. $X \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y \in \{y_1, \ldots, y_n\}$;
3. $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $i = \overline{1; m}$, $j = \overline{1; n}$,
   $P_{X_i} = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1; m}$,
   $P_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$, $j = \overline{1; n}$;
4. Известно, что $Y = y_j$ для некоторого фиксированного j.

Тогда

$$P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\} = \langle \text{ из определения условной вероятности } \rangle = \\ = \frac{P\{\{X = x_i\} \cdot \{Y = y_j\}\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}}{P_{Y_j}} = \frac{p_{ij}}{P_{Y_j}}$$

Определение. *В случае двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) условной вероятностью того, что случайная величина X приняла значение x_i при условии $Y = y_j$ называют число*

$$\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{P_{Y_j}}$$

Определение. *Набор вероятностей π_{ij}, $i = \overline{1; m}$, для данного фиксированного j называются уловным распределением случайного вектора X при условии $Y = y_j$.*

2.3.5.2 Случай непрерывного случайного вектора

В случае непрерывного случайного вектора (X, Y) рассуждения, аналогичные проведённым для дискретного случайного вектора рассуждениям, приводят к следующему определению.

Определение. *Условной плотностью распределения случайного вектора* X *при условии* $Y = y$ *называется функция*

$$\boxed{f_X(x \,|\, Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}}$$

где f *— совместная плотность распределения случайных величин* X *и* Y *(≡ плотность распределения вектора* (X, Y)*),* f_Y *— маргинальная плотность распределения случайной величины* Y.

9. Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать критерий независимости двух случайных величин в терминах условных распределений.

Определение. *Случайные величины X и Y называются независимыми, если*

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

где F — совместная функция распределения X и Y ($\equiv$ функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y — маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

Теорема. ***Критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений.***

1. *Пусть (X, Y) — двумерный случайный вектор. Тогда следующие условия эквивалентны:*
   - *X, Y — независимые.*
   - *$F_X(x \,|\, Y = y) \equiv F_X(x)$ для всех y, в которых определена $F_X(x \,|\, Y = y)$.*
   - *$F_Y(y \,|\, X = x) \equiv F_Y(y)$ для всех x, в которых определена $F_Y(y \,|\, X = x)$.*
2. *Если (X, Y) — непрерывный случайный вектор, то следующие условия эквивалентны. (для условной плотности)*
   - *X, Y — независимые.*
   - *$f_X(x \,|\, Y = y) \equiv f_X(x)$ для всех y, в которых определена $f_X(x|Y = y)$.*
   - *$f_Y(y \,|\, X = x) \equiv f_Y(y)$ для всех x, в которых определена $f_Y(y|X = x)$.*
3. *Если (X, Y) — дискретный случайный вектор, то следующие утверждения эквиваленты.*
   - *X, Y — независимые.*
   - *$P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\} \equiv P\{X = x_i\}$ для всех $j = \overline{1;\, n}$.*
   - *$P\{Y = y_j \,|\, X = x_i\} \equiv P\{Y = y_j\}$ для всех $i = \overline{1;\, m}$.*

   (здесь $X \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y \in \{y_1, \ldots, y_n\}$).

10. Понятие функции случайной величины. Указать способ построения ряда распределения функции дискретной случайной величины. Сформулировать теорему о плотности распределения функции от непрерывной случайной величины.

• СВ У, которая каждому значению СВ Х ставит в соответствие число $Y = \phi(x)$, называют скалярной функцией скалярной СВ Х. При этом сама У также является случайной величиной: если Х – ДСВ, то У – также ДСВ; если Х – НСВ, то У может быть НСВ, ДСВ или СВ смешаного типа.

2.4 Функции от случайных величин

2.4.1 Скалярная функция от одномерной случайной величины

Пусть

1. X — некоторая случайная величина;
2. $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая известная функция.

Тогда $\boxed{\varphi(X) = Y}$ — некоторая случайная величина.

2.4.1.1 Случай дискретной случайной величины

Пусть X — дискретная случайная величина, имеющая ряд распределения

$$\begin{array}{cccccc} X & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ P & p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{array}$$

Тогда $Y = \varphi(X)$ — тоже дискретная случайная величина. При этом Y принимает значения $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$. Поэтому ряд распределения Y будет выглядеть вот так:

$$\begin{array}{cccccc} Y & \varphi(x_1) & \dots & \varphi(x_i) & \dots & \varphi(x_n) \\ P & p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{array}$$

Если в этой таблице некоторые из значений $\varphi(x_i)$ совпадают, то соответствующие столбцы нужно объединить, приписав этому значению суммарную вероятность.

Теорема. *Пусть*

1. X *— непрерывная случайная величина;*
2. $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*;*
3. φ *монотонна и непрерывно дифференцируема;*
4. ψ *— функция*[36]*, обратная к* φ *(т. к.* φ *— монотонная, то* $\exists \psi = \varphi^{-1}$*);*
5. $Y = \varphi(X)$.

Тогда

1. Y *также является непрерывной случайной величиной;*
2. $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$.

11. Понятие скалярной функции случайного векторного аргумента. Доказать формулу для нахождения значения функции распределения случайной величины Y, функционально зависящей от случайных величин X_1 и X_2.

2.4.2 Скалярные функции случайного вектора

Пусть

1. (X_1, X_2) — двумерный случайный вектор;

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

3. $\boxed{Y = \varphi(X_1, X_2)}$ — некоторая одномерная случайная величина.

2.4.2.2 Случай непрерывного случайного вектора

Если (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор, то функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2)$ можно найти по формуле

$$F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

где f — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2, $D(y) = \{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = \\ &= \langle\ \textit{события } \{Y < y\} \textit{ и } \{(X_1, X_2) \in D(y)\} \textit{ эквивалентны}\ \rangle = \\ &= \langle\ \textit{свойство непрерывного случайного вектора}\ \rangle = \\ &= \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \end{aligned}$$

*

- Теорема: Пусть (X1,X2) – НСВектор и $Y = \phi(X1, X2)$. Тогда $F_Y(y) = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

Доказательство: $F_Y(y) = P\{Y < y\}$. События $\{Y < y\}, \{(X_1, X_2) \in D(y)\}$ эквивалентны. Следовательно, $F_Y(y) = P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

12. Сформулировать и доказать теорему о формуле свертки.

2.4.3 Формула свёртки

Теорема. *Пусть*

1. X_1, X_2 *— непрерывные случайные величины;*
2. X_1, X_2 *— независимые случайные величины;*
3. $Y = X_1 + X_2$ *(т. е.* $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$*).*

Тогда

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(y - x_1)\, f_{X_1}(x_1)\, dx_1$$

Доказательство. ...

1.

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{X_1 + X_2 < y\} = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \left\langle X_1, X_2 \text{ — независимые } \implies f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \left[F_{X_2}(x_2) \Big|_{-\infty}^{y-x_1} \right] dx_1 =$$

$$= \langle F_{X_2}(-\infty) = 0 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

2.

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$$

Замечание 1. *Пусть* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— абсолютно интегрируемые*[37] *функции.*

Определение. *Свёрткой функций* f *и* g *называется функция*

$$(f \circ g)(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y - x) g(x)\, dx$$

*

12. *Сформулировать и доказать теорему о формуле свертки.*

~~~ ~~~

• Теорема: пусть (Х,У) – СВектор, непрерывный и независимый, а $Z = X + Y$. Тогда $\boldsymbol{f_Z(z) = \int_{-}^{+} f_X(x) f_Y(z-x) dx}$.

Доказательство: $F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = P\{Y < z - X\} = P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-}^{+} dx \int_{-}^{z-x} f(x,y)dy$. Т.к. Х,У независимы, то $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, следовательно $F_Z(z) = \int_{-}^{+} dx \int_{-}^{z-x} f_X(x) f_Y(y) dy = \int_{-}^{+} f_X(x)dx \int_{-}^{z-x} f(y)dy$.

Наконец, $\boldsymbol{f_Z(z)} = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_{-}^{+} f_X(x)dx \int_{-}^{z-x} f_Y(y)dy\right] = \boldsymbol{\int_{-}^{+} f_X(x) f_Y(z-x) dx}$.

Выражение $(f1 * f2)(y) = \int_{-}^{+} f1(x1) f2(y-x)dx$ называется сверткой функций $f1, f2$.
~~~

13. Сформулировать определение математического ожидания случайной величины (дискретный и непрерывный случаи). Записать формулы для вычисления математического ожидания функции от случайной величины. Сформулировать свойства математического ожидания. Механический смысл математического ожидания.

Определение. *Математическим ожиданием дискретной величины X называют число*

$$M[X] = \sum_i p_i x_i$$

где i пробегает такое множество значений, что x_i исчерпывает все возможные значения случайной величины X; $p_i = P\{X = x_i\}$.

Определение. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число*[38]

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

где $f(x)$ — функция плотности случайной величины X.

1. *Пусть X — случайная величина, а $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, тогда*

   (a) *Если X — дискретная случайная величина, то*

   $$M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i)\, p_i$$

   (b) *Если X — непрерывная случайная величина, то*

   $$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

2.5.1.1 Свойства математического ожидания

1. Если $P\{X = x_0\} = 1$ (т. е. если X фактически не является случайной), то $MX = x_0$;

2. $M[aX + b] = a \cdot MX + b$;

3. $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$; **2**

3 ~~4~~. Если X_1, X_2 — независимы, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$.

Замечание 2. ***Механический смысл математического ожидания.***

Будем интерпретировать величину p_i как «вероятностную массу» значения x_i случайной величины X. Т. к. $\sum_i p_i = 1$, то $M[X]$ характеризует положение центра тяжести вероятностной массы.

14. Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Записать формулы для вычисления дисперсии в дискретном и непрерывном случае. Сформулировать свойства дисперсии.

2.5.2 Дисперсия

Определение. *Дисперсией случайной величины X называют число*

$$D[X] = M[(X-m)^2]$$

где $m = MX$.

Замечание 1. *Если X — дискретная случайная величина, то*

$$\boxed{DX} = \langle DX = M[(X-m)^2],\ \varphi(x) = (x-m)^2 \rangle = \boxed{\sum_i (x_i - m)^2 p_i}$$

где $p_i = P\{X = x_i\}$.

Замечание 2. *Если X — непрерывная случайная величина, то*

$$\boxed{D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx}$$

где f — функция плотности случайной величины X.

2.5.2.1 Свойства дисперсии

1 1. $DX \geqslant 0$;

2. Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$. ?

2 3. $D[aX + b] = a^2 DX$;

4 4. $D[X] = M[X^2] - (MX)^2$;

3 5. Если X_1, X_2 — независимы, то $D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$.

Замечание 3. ***Механический смысл дисперсии.***

Дисперсия случайной величины характеризует разброс значений этой случайной величины относительно математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс значений.

С точки зрения механики дисперсия — момент инерции вероятностной массы относительно математического ожидания.

15. Сформулировать определения начального и центрального моментов случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия как моменты. Сформулировать определение квантили и медианы случайной величины.

2.5.4 Моменты

Пусть X — случайная величина.

Определение. *Моментом k-ого порядка (k-ым начальным моментом) случайной величины X называется число*

$$m_k = M[X^k]$$

Определение. *Центральным моментом k-ого порядка случайной величины X называется число*

$$\mathring{m}_k = M[(X - m)^k]$$

где $m = MX$.

Замечание 2. $m_1 = MX;\ \mathring{m}_2 = DX;\ \mathring{m}_1 = M[(X - m)^1] = MX - m = 0.$

2.5.5 Квантúль

Пусть

1. X — случайная величина;
2. $\alpha \in (0,\, 1)$.

Определение. *Квантúлью уровня α (α-квантилью) случайной величины X называется число q_α такое, что*

$$P\{X < q_\alpha\} \leqslant \alpha,\ P\{X > q_\alpha\} \leqslant 1 \text{-альфа}$$

Определение. *Медианой случайной величины X называют её квантиль уровня $\frac{1}{2}$.*

16. Сформулировать определение ковариации случайных величин. Записать формулы для вычисления ковариации в дискретном и непрерывном случаях. Сформулировать свойства ковариации.

Определение. *Ковариацией случайных величин X и Y называется число*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

где $m_X = MX$, $m_Y = MY$.

Замечание. *Из определения следует:*

1. *В случае дискретного случайного вектора*

$$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij}}$$

где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$.

2. *В случае непрерывного случайного вектора*

$$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = \iint\limits_{R^2} (x - m_X)(y - m_Y)f(x, y)\,dx\,dy}$$

где f — совместная плотность величин X и Y.

2.5.6.1 Свойства ковариации

1. $D(X + Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X, Y)$;
2. $\operatorname{cov}(X, X) = DX$;
3. Если X, Y — независимые, то $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$;
4. $\operatorname{cov}(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2\operatorname{cov}(X, Y)$
5. $|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{DX \cdot DY}$, причём $|\operatorname{cov}(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \iff \exists\exists a, b \in \mathbb{R}$, $Y = aX + b$ (т. е. X и Y связаны линейной зависимостью);
6. $\operatorname{cov}(X, Y) = M[XY] - (MX)(MY)$.

*

16. *Сформулировать определение ковариации СВ. Записать формулы вычисления ковариации в дискретном и непрерывном случаях. Сформулировать свойства ковариации.*

~~~ ~~~

• Коварацией СВ Х и У называется число $cov(X,Y) = M[(X - m1)(Y - m2)]$, где m1=MX, m2=MY.

Если Х,У – ДСВ, то ковариация $cov(X,Y) = \sum_{ij}(x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij}$; если НСВ - $cov(X,Y) = \int_-^+ \int_-^+ (x - MX)(y - MY)f_{XY}(x,y)dxdy$.
~~~