ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Домашнее задание №3 (модуль 2),
специальность ИУ7, 3-й курс, 5-й семестр

Правила оформления домашних заданий

1. Домашние задания выполняются либо в отдельных (тонких, не более 18-ти листов) тетрадках, либо на отдельных листах (например, формата А4), которые обязательно должны быть либо упакованы в файл, либо скреплены степлером или канцелярской скрепкой. Разрозненные листы, а также листы, скрепленные путем загибания уголка, не принимаются;
2. каждая работа должна иметь титульный лист, на котором указаны фамилия автора, индекс его группы и номер выполненного варианта.

ВАРИАНТ 1.

1. Случайная величина X распределена по закону Релея:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0,\\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \ln X$.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > -1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 2.

1. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > 1.1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (3,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.45 \\ 0.45 & 0.71 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 3.

1. Значения острого угла ромба со стороной a распределены равномерно в интервале $(0,\,\pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей площади ромба.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (-0.15,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 4.

1. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^3$.

2. Найти $P\left(X_1 - X_2 > 2\sqrt{6}\right)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0.5,\,0.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 5.

1. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a,\\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = b^2 - X^2$, если $b > a$.

2. Найти $P(X_1 - X_2 > -1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 6.

1. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(0,\,1)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по эспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$?

2. Найти $P(0 < X_1 < 2\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\,3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 7.

1. Измеренное значение радиуса круга распределено по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 50$ и дисперсией $\sigma^2 = 0.25$. Найти плотность распределения площади круга и его среднюю площадь.

2. Найти $P(0 < X_1 < 2\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1.5,\,1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 8.

1. Найти закон распределения объема шара, если его радиус является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 0.25$.

2. Найти $P(1 < X_1 < 2\,|X_2 = 0.5)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\,1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 25 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 9.

1. Найти плотность распределения вероятностей объема куба, длина ребра которого является случайной величиной, распределенной равномерно в интервале $(0,\,a)$.

2. Найти $P(-1 < X_1 < 1\,|X_2 = \sqrt{3})$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 10.

1. Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем $X \sim \mathrm{Exp}(1/2)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(1/3)$. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

2. Найти $P(0 < X_1 < 9\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 11.

1. Диаметр цилиндрического вала имеет погрешность изготовления, поэтому его измеренное значение является случайной величиной, распределенной равномерно на интервале $(a,\,b)$. Найти плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (2,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -3/4 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 12.

1. Прочность X некоторого образца имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m_1 = 9$ МПа и дисперсией $\sigma_1^2 = 1$ МПа^2. На образец действует случайная нагрузка Y, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $m_2 = 4$ МПа и дисперсией $\sigma_2^2 = 4$ МПа^2. Найти вероятность неразрушения образца, то есть вероятность события $\{X > Y\}$.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (6,\,10), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 13.

1. На окружность радиуса R случайным образом брошены две точки. Считая, что длина хорды, соединяющей эти точки, является равномерно распределенной случайной величиной, найти плотность распределения вероятностей длины кратчайшей дуги между брошенными точками.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0.6,\,0.3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.81 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 14.

1. Угол λ сноса самолета вычисляется по формуле

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right),$$

где ε – угол действия ветра, u — скорость ветра, v — скорость самолета в воздухе (u и v измеряются в одинаковых единицах). Считая, что значения угла действия ветра распределены равномерно в интервале $(-\pi,\,\pi)$, найти плотность распределения вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с, $v = 720$ км/ч.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (2,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 15.

1. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый "параллелограмм" регулятора, острый угол φ которого является случайной величиой, распределенной равномерно в интервале $(\pi/6,\,\pi/4)$. Найти закон распределения длин диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.

2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (2,\,7), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 16.

1. Найти функцию распределения случайной величины $Y = kX$, $k > 0$, если $X \sim \mathrm{Exp}(2)$.

2. Найти $P(|X_2| < 3\,|X_1 = 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 17.

1. Найти функциональное преобразование, которому надо подвергнуть случайную величину $X \sim R\,(0,\,\pi)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по закону Коши:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\,(1 + y^2)}.$$

2. Найти $P(|X_2| < 5.5\,|X_1 = 1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (5,\,2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 18.

1. Измеренное значение X стороны квадрата является случайной величиной, плотность распределения которой

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & x \in (0,\,\pi), \\ 0, & x \notin (0,\,\pi). \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей площади квадрата.

2. Найти $P(|X_2| < 8\sqrt{2}/3\,|X_1 = 10)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (10,\,0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 40 & -8\sqrt{10} \\ -8\sqrt{10} & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 19.

1. Случайная величина V — скорость молекул газа массы m — при абсолютной температуре T распределено по закону Максвелла-Больцмана:

$$f_V(v) = \lambda v^2 \exp\left(-\beta v^2\right), \qquad v > 0,$$

где $\beta = m/(2kT)$, k — постоянная Больцмана, а λ – нормирующий множитель. Найти значение λ и плотность распределения случайной величины $E = mV^2/2$ — кинетической энергии газа массы m при температуре T.

2. Найти $P(|X_2| < 0.6\,|X_1 = 4)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\,1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.54 \\ -0.54 & 1.08 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 20.

1. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0,\,2)$. Найти значения математического ожидания и дисперсии случайных величин

$$Y = -4X, \quad Z = X - Y, \quad V = X + 2Y - 3Z - 1.$$

2. Найти $P(|X_2| < 1\,|X_1 = 3)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\,0.2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 21.

1. Пусть $X \sim R(0,\,20)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(1/2)$, $\rho(X,Y) = -0.8$. Найти вектор средних и корреляционную матрицу случайного вектоа (U,V), если $U = 2X - 3Y + 5$, $V = -3X + Y + 1$.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (3,\,3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 22.

1. По сторонам прямого угла xOy скользит линейка длины 1, занимая случайное положение, причем случайная величина X — абсцисса точки опоры линейки на ось Ox — равномерно распределена в интервале $(0,\,1)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины R — расстояния от начала координат до линейки.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1/3 \\ -1/3 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 23.

1. Время T безотказной работы приборов некоторого типа является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Считая, что затраты C на обслуживание прибора обратно пропорциональны времени их безотказной работы, то есть $C = a/T$, $a > 0$, найти закон распределения случайной величины C.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,-0.3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 1/6 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 24.

1. Найти вектор средних, ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора $(X,\,Y)$, если $X \sim R(-1,\,3)$, $Y = 4 - 3X$.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\,2), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 4/3 \\ 4/3 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 25.

1. Найти вектор средних, ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора $(U,\,V)$, если $U = X + 3Y - 2$, $V = 2X - Y + 1$, $M\,[X] = 1$, $D\,[X] = 5$, $M\,[Y] = -2$, $D\,[Y] = 4$, $\mathrm{cov}(X,Y) = 3$.

2. Найти $P(3X_2 - X_1 > 0)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\,1), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2/3 \\ -2/3 & 16/9 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 26.

1. На положительную часть оси абсцисс прямоугольной декартовой системы координат xOy случайным образом бросают точку M_x, а на положительную часть оси ординат – точку M_y. Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата расстояния между этими точками, если $|OM_x| \sim R(0,\,a)$, $|OM_y| \sim R(0,\,b)$.

2. Найти $P(5 < X_1 < 14\,|X_2 = 1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\,-3), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	Σ = max	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 27.

1. На отрезок $[0,\, a]$ случайным образом бросают 2 точки. Найти закон распределения расстояния между ними, если их координаты являются случайными величинами, которые независимы и равномерно распределены на $[0,\, a]$.

2. Найти $P(1 < X_1 < 3\,|X_2 = 0.5)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1,\, 4.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 5 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 28.

1. На окружность радиуса a с центром в начале декартовой системы Oxy случайным образом бросают точку M. Радиус-вектор точки M проецируется на ось абсцисс и на этой проекции (как на стороне) строится квадрат. Найти математическое ожидание и дисперсию площади этого квадрата, если значение полярного угла точки M равномерно распределено в интервале $(0,\, 2\pi)$.

2. Найти $P(0 < X_1 < 2\,|X_2 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (1.5,\, 1.5), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 29.

1. Прямая l располагается на плоскости Oxy, проходя через точку O и образуя угол в 30° с осью абсцисс. Пусть (X, Y) — случайный вектор, компоненты которого равны соответствующим координатам точки M, случайным образом брошенной на эту плоскость. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки O до проекции точки M на прямую l, если известно, что $M\,[X] = 2$, $D\,[X] = 16$, $M\,[Y] = 4$, $D\,[Y] = 64$, $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

2. Найти $P(-1 < X_2 < 1\,|X_1 = \sqrt{3})$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0,\, 0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

ВАРИАНТ 30.

1. Через точку $B(0,\, b)$ проводится прямая l под углом φ к оси ординат. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины X — абсциссы точки пересечения прямой l с осью абсцисс, — если $\varphi \sim R(-\pi/2,\, \pi/2)$.

2. Найти $P(0 < X_2 < 9\,|X_1 = 2)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (4,\, 0), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3