1. *Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?*

~~~ ~~~

• События А и В называются несовместными, если их пересечение является невозможным событием, т.е. $AB = \emptyset$.

• Если А и В несовместные события, (а также $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые. Если А и В – совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми; если А и В – зависимые, то они могут быть как совместными, так и несовместными.

2. *Сформулировать геометрическое определение вероятности.*

~~~ ~~~

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ – мера множества (длина для n=1, площадь для n=2, объём для n=3, ..)	3) возможность принадлежности исхода эксперимента множеству $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества А и не зависит от его формы и расположения внутри Ω.

Тогда вероятностью осуществления события А называют число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

3. *Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.*

~~~ ~~~

• Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов Ω называют такой набор подмножеств $\beta \subseteq \Omega$, что:

1) $A \subseteq \beta => \bar{A} \subseteq \beta$;	2) $A_1, \dots, A_n \in \beta => A_1 + \dots + A_n \subseteq \beta$.

• Основные следствия из определения сигма-алгебры:

1. $\Omega \subseteq \beta$;	2. $\emptyset \in \beta$;	3. $A_1, \dots A_n, \dots \in \beta => \ A_1 * \dots * A_n * \dots \in \beta$;	4. $A, B \in \beta => \ A \backslash B \in \beta$.

4. *Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.*

~~~ ~~~

• Пусть Ω – пространство ЭИ, β – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение $P: \beta \to \mathbb{R}$, для которого выполняются условия:

$P\{A\} \geq 0; P\{\Omega\} = 1$	для попарно несовместных событий A1,…,An,… $P\{A_1 + \dots + A_n + \dots\} = P\{A_1\} + \dots + P\{A_n\} + \cdots$

• Свойства вероятности:

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
2) $P(\emptyset) = 0$	6) $\forall$ конечного набора событий $A_1, \dots, A_n$,
3) $A \subseteq B => P(A) \leq P(B)$	$P(A_1 + \cdots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i \dots A_n)$.
4) $\forall A \in \beta \ 0 \leq P(A) \leq 1$	

5. *Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения и аксиому непрерывности. Как они связаны между собой?*

~~~ ~~~

• Аксиома сложения: для попарно непересекающихся событий $A_1, \dots, A_n$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.
Расширенная аксиома сложения: для попарно несовместных событий A1,…,An,… $P\{A_1 + \dots + A_n + \cdots\} = P\{A_1\} + \dots + P\{A_n\} + \cdots$.
Аксиома непрерывности: для любой неубывающей последовательности событий $A_1, \dots, A_n, \dots$, где $A_i \subseteq A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n + \cdots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

• Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

6. *Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.*

~~~ ~~~

• Пусть А и В – события, $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью осуществления А при условии произошедшего В называют число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности:
$1^0. P(A|B) \geq 0$; $2^0. P(\Omega|B) = 1$; $3^0. \forall$ попарно непересекающихся $A_1, \dots A_n, \dots$ $P(A_1 + \dots + A_n + \dots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$.

7. *Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.*

~~~ ~~~

Теорема 1: пусть $P(A) > 0$. Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.
Теорема 2: пусть события $A_1, \dots, A_n$ таковы, что $P(A_1 * \dots * A_n) > 0$. Тогда
$P(A_1 * \dots * A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

8. *Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?*

~~~ ~~~

• Пусть А и В – события, связанные с одним и тем же экспериментом. А и В называются независимыми, если $P(AB) = P(A) * P(B)$.

• Если $P(B) > 0$, то А и В независимы тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$. Аналогично, если $P(A) > 0$, то А и В независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

9. *Сформулировать определение попарно независимых событий, и независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?*

~~~ ~~~

• События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$; независимыми в совокупности, если для любого набора $i_1 < \dots < i_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ $P(A_{i_1} * \dots * A_{i_k}) = P(A_{i_1}) * \dots * P(A_{i_k})$.

• Если А – независимы в совокупности, то они независимы попарно. При этом обратное неверно.

10. *Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?*

~~~ ~~~

• Говорят, что H образует полную группу событий, если $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

• Так как H_i, H_j $\forall i \neq j$ являются несовместными событиями и их вероятность не равна нулю, то они могут быть только зависимыми.

11. *Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть H1…Hn – полная группа событий, A – некоторое событие и $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$. Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$.

12. *Сформулировать теорему о формуле Байеса.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+\dots+P(A|H_n)P(H_1)}$.

13. *Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно K успехов в серии из N испытаний.*

~~~ ~~~

• Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух ЭИ; первый будем называть «успех», второй «неудача»; вероятность успеха: p, вероятность неудачи: q=1-p. Схемой испытаний Бернулли называется серия последовательных экспериментов такого вида, в которых также: вероятность успеха неизменна во всех испытаниях; испытания – независимы, т.е. вероятность исхода i-го испытания не зависит от исходов испытаний 1…i-1.

• Обозначим $P_n(k)$ – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

14. *Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из N испытаний а) ровно к успехов; б) хотя бы одного успеха; в) от к1 до к2 успехов.*

~~~ ~~~

Пусть $P_n(k)$ – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.
Пусть $P_n(k \geq 1)$ – вероятность реализации хотя бы одного успеха. Тогда $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$.
Пусть $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ – вероятность реализации от к1 до к2 успехов. Тогда $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

15. *Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.*

~~~ ~~~

• Элементарный исход эксперимента – такой его исход, который в рамках данного эксперимента: 1) мыслится неделимым; 2) никакие 2 ЭИ не могут произойти одновременно (в рамках одного эксперимента); 3) в результате эксперимента всегда имеет место ровно один из ЭИ.

• Пусть 1) количество ЭИ эксперимента $|\Omega| = N \neq \infty$; 2) по условиям эксперимента все ЭИ равновозможны; 3) событие А состоит из N_a элементов ($|A| = N_A$). Тогда вероятностью осуществления события А называется $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

• Пример: 2 раза бросают игральную кость, A={сумма выпавших очков >= 11}.
$\Omega = \{(x1, x2),\ x_i \in \{1 \dots 6\}\}, |\Omega| = 36.\ A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \ => \ P\{A\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

16. *Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него доказать основные свойства вероятности.*

~~~ ~~~

• Пусть 1) количество ЭИ эксперимента $|\Omega| = N \neq \infty$; 2) по условиям эксперимента все ЭИ равновозможны; 3) событие А состоит из N_a элементов ($|A| = N_A$). Тогда вероятностью осуществления события А называется $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

• Теорема:
1. $\forall A \subseteq \Omega\ P\{A\} \geq 0$; 2. $P\{\Omega\} = 1$; 3. Если A и B несовместн, то P{A+B}=P{A}+P{B}.

Доказательство:
1. $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$. $N_A \geq 0,\ N > 0, => P\{A\} \geq 0$.
2. $P\{\Omega\} = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$.
3. $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$ по формуле включений и исключений. |AB|=0, следовательно $N_{A+B} = N_A + N_B => \ P\{A + B\} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$.

17. *Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.*

~~~ ~~~

• Пусть 1) Эксперимент проведён n раз; 2) событие А при этом произошло N_A раз. Тогда вероятностью осуществления события А называют число $P\{A\} = \lim_{n \to \infty} \frac{N_A}{N}$.

• Недостатки: а) на практике невозможно провести эксперимент бесконечное число раз; для конечных N отношение может изменяться при разных N.

б) с позиций современной математики, статистическое определение является архаизмом, т.к. не дает достаточной базы для дальнейшего развития теории.

18. *Доказать основные свойства сигма-алгебры событий.*

~~~ ~~~

• Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов Ω называют такой набор подмножеств $\beta \subseteq \Omega$, что:
1) $A \subseteq \beta => \bar{A} \subseteq \beta$; 2) $A_1, \dots, A_n \in \beta => A_1 + \dots + A_n \subseteq \beta$.

• Теорема:
1. $\Omega \subseteq \beta$; 2. $\emptyset \in \beta$; 3.$A_1, \dots A_n, \dots \in \beta => \ A_1 * \dots * A\_n \in \beta$; 4. $A, B \in \beta => \ A \backslash B \in \beta$.

Доказательство:
1) $\beta \neq \emptyset$, следовательно $A \in \beta \ => \ \bar{A} \in \beta => \ A + \bar{A} \in \beta, A + \bar{A} = \Omega$.
2) $\Omega \in \beta => \bar{\Omega} \in beta,\ \bar{\Omega} = \emptyset$.
3) $A_1 \dots A_n \in \beta =>$ (1 св.) $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n} \in \beta =>$ (2 св.) $\overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} \in \beta =>$ (1 св.) $\overline{\overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} + \dots} \in \beta => A_1 * \dots * A_n * \dots \in \beta$.

19. *Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.*

~~~ ~~~

• Пусть Ω – пространство ЭИ, β – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение $P: \beta \to \mathbb{R}$, для которого выполняются условия: $P\{A\} \geq 0; P\{\Omega\} = 1;$ для попарно несовместных событий A1,…,An,… $P\{A_1 + \dots + A_n + \dots\} = P\{A_1\} + \dots + P\{A_n\} + \cdots$.

• **Теорема**: 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; 2) $P(\emptyset) = 0$; 3) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Доказательство:

1) $\Omega = A + \bar{A},\ 1 = (\text{акс}.2)\ P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = (\text{акс}.3) P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2) $\emptyset = \bar{\Omega} \Rightarrow P(\emptyset) = (\text{п}.1)\ 1 - P(\Omega) = (\text{акс}.2)\ 1 - 1 = 0$.
3) $B = A + B \backslash A$, причем $A(B\backslash A) = \emptyset \Rightarrow (\text{акс}.3)\ P(B) = P(A) + P(B\backslash A)$. По аксиоме 1, $P(B\backslash A) \geq 0$, следовательно $P(B) \geq 0$.

20. *Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.*

~~~ ~~~

• **Теорема**: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_N$, $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i \dots A_n)$

Доказательство: а) $A + B = A + B\backslash A$, причем $A(B\backslash A) = \emptyset$. Следовательно, $P(A + B) = P(A) + P(B\backslash A)$.
б) $B = B\backslash A + AB \Rightarrow P(B) = P(B\backslash A) + P(AB)$.

21. *Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.*

~~~ ~~~

• Пусть A и B – события, $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью осуществления A при условии произошедшего B называют число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

• Теорема: условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности:
$1^0.\ P(A|B) \geq 0$; $2^0.\ P(\Omega|B) = 1$; $3^0.\ \forall$ попарно непересекающихся $A_1, \dots A_n, \dots$ $P(A_1 + \dots + A_n + \dots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$.

Доказательство:

1) $P(A|B) = \frac{P(AB) \geq 0}{P(B) \geq 0} \geq 0$.
2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
3) $P(A_1 + \dots |B) = \frac{P((A_1 + \dots)|B)}{P(B)} = (\text{счетная дистрибутивность} \cap \text{относительно } \cup) \frac{P(A_1 B + \dots)}{P(B)} = (\text{акс}.3) \frac{P(A_1 B) + \dots + P(A_n B) + \dots}{P(B)} =$ (лин. свойства рядов) $\frac{P(A_1 B)}{P(B)} +,,, = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \cdots$.

22. *Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.*

~~~ ~~~

Теорема 1: пусть $P(A) > 0$. Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Доказательство: $P(A) \geq 0 \Rightarrow$ по определению условной вероятности, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A) * P(B|A)$.

Теорема 2: пусть события $A_1, \dots, A_n$ таковы, что $P(A_1 * \dots * A_n) > 0$. Тогда
$P(A_1 * \dots * A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

Доказательство: $P(A_1 * \dots A_{n-1} A_N) = P(A_1 \dots A_{n-1}) P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = (\,*\,)$. $A_1 \dots A_{n-2} A_{n-1} \subseteq A_1 \dots A_{n-2} \Rightarrow P(A_1 \dots A_{n-2}) \geq P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$. Следовательно, (*)= $P(A_1 \dots A_{n-2}) P(A_{n-1}|A_1 \dots A_{n-2}) * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$. Повторяя это утверждение, получаем требуемую формулу $P(A_1 * \dots * A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

23. *Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.*

~~~ ~~~

Теорема: 1) Если $P(B) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$. 2) Аналогично, если $P(A) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

Доказательство: 1) необходимость. $P(A|B) = P(A)P(B)$. По определению условной вероятности: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.
Достаточность. $P(AB) = P(B) * P(A|B) = P(A)P(B)$. Следовательно, A и B независимы.
2) доказывается полностью аналогично.

24. *Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.*

~~~ ~~~

• События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$; независимыми в совокупности, если для любого набора $i_1 < \dots < i_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ $P(A_{i_1} * \dots * A_{i_k}) = P(A_{i_1}) * \dots * P(A_{i_k})$.

• Если A – независимы попарно, то из этого не следует, что они независимы в совокупности. Это подтверждает пример Бернштейна: рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого записаны числа 1, 2, 3, а на 4-й все три числа. Тетраэдр кидают на плоскость и рассматривают три события: $A_1 = \{\text{на нижней грани } 1\}$, $A_2 = \{-'' - \ 2\}$, $A_3 = \{-'' - \ 3\}$. A независимы попарно, но не в совокупности:
a) $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(A_2) = \frac{1}{2}$; $P(A_3) = \frac{1}{2}$;
b) $P(A_1 A_2) = P\{\text{на нижней грани 1 и 2}\} = \frac{1}{4} = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3)$. $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$ =>A – попарно независимые.
Для независимости в совокупности: $P(A_1 A_2 A_3)? = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$; $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$. Следовательно, A не являются независимыми в совокупности.

25. *Доказать теорему о формуле полной вероятности.*

~~~ ~~~

Говорят, что H образует полную группу событий, если $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Теорема: Пусть H1…Hn – полная группа событий, A – некоторое событие и $P(H_i) > 0, i = \overline{1,n}$. Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n)$, поскольку $(AH_i)(AH_j) = \emptyset$ при $i \neq$
~~~

j. Далее, поскольку $P(H_i) \geq 0 => P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$, то $P(A) = P(AH_1) + \cdots + P(AH_n) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots P(A|H_n)P(H_n)$.

26. *Доказать теорему о формуле Байеса.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+\cdots+P(A|H_n)P(H_1)}$.

Доказательство: $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)}$. По формуле полной вероятности, можно представить $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)$; тогда $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+\cdots+P(A|H_n)P(H_n)}$.

27. *Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно к успехов в серии из н испытаний по схеме Бернулли.*

~~~ ~~~

Обозначим $P_n(k)$ – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли.

Теорема: Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство: опишем результаты испытаний кортежами $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i = \begin{cases} 1, \text{если в } i \text{ испытании произошёл успех} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Исходов, в которых произошло ровно k успехов, C_n^k штук. Вероятность осуществления ровно одного такого исхода: $P\big((x_1, \dots, x_n)\big) = P\big\{\{\text{в 1 исп. результат } x_1\} * \{\text{во 2м: } x_2\} * \dots \{\text{в } n\text{м: } x_n\}\big\} = (\text{испытания независимы})\ P(\{\text{в 1м: } x_1\}) * \dots * P(\{\text{в 2м } x_n\})$. В случае k успехов, имеем p k раз и q n-k раз; следовательно, $P\big((x_1, \dots, x_n)\big) = p^k q^{n-k}$. Поскольку различные исходы, на которых происходит ровно k успехов, являются несовместными, то $P_n(k) = C_n^k * P = C_n^k p^k q^{n-k}$.