2.2.1.5 Основные законы распределения случайных величин

2.2.1.5.1 Пуассоновская случайная величина

Определение. *Говорят, что случайная величина* X *распределена по закону Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, *если она принимает значения* $0, 1, 2, \dots$ *с вероятностями*

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Обозначается $X \sim \Pi(\lambda)$.

2.5.3.2 Пуассоновская случайная величина

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim \Pi(\lambda) \\ P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array}}$$

Тогда математическое ожидание выражается

$$\boxed{MX} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}\lambda}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \langle i = k-1 \rangle = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}}_{\text{формула Маклорена для } e^{\lambda}} = \boxed{\lambda}$$

Дисперсия выражается как $DX = M[X^2] - (MX)^2$.
$MX^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \ldots = \lambda^2 + \lambda$. Тогда $\boxed{DX = \lambda.}$

2.2.1.5.2 Биномиальная случайная величина

Определение. *Говорят, что случайная величина* X *распределена по биномиальному закону с параметрами* $n \in N$ *и* $p \in (0;1)$, *если она принимает значения* $0,\ 1,\ \ldots,\ n$ *с вероятностями*

$$\boxed{P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}}$$

Обозначается $\boxed{X \sim B(n,\ p).}$

2.5.3.1 Биномиальная случайная величина

Обозначение $X \sim B(n,\ p)$, X — кол-во успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Рассмотрим случайную величину X_i, $i = \overline{1;\ n}$:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом испытании произошёл успех,} \\ 0, & \text{если в } i\text{-ом имела место неудача} \end{cases}$$

Случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ независимы, т. к. отдельные испытания в схеме Бернулли независимы.

Каждое $X_i \sim B(1,\ p)$, $i = \overline{1;\ n}$. Ранее было показано, что $MX_i = p$, $DX_i = pq$. Тогда

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\boxed{MX =} M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} MX_i \boxed{= np}$$

$$\boxed{DX =} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \langle X_i \text{ независимы} \rangle = \sum_{i=1}^{n} DX_i \boxed{= npq}$$

2.2.1.5.3 Геометрическое распределение

Определение. *Говорят, что случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1)$, если она принимает значения $0, 1, \ldots$ с вероятностями (здесь $q = 1 - p$)*

$$\boxed{P\{X = k\} = pq^k,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

Обозначается[31] *как* $\boxed{X \sim Geom(p).}$

2.5.3.3 Случайная величина X, имеющая геометрическое распределение с параметром p

$P\{X = k\} = pq^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{MX =} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot pq^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot pq^k = pq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}}_{=1+2q+3q^2+4q^3+\ldots} =$$

$= \Big\langle$ продифференцируем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$(1 + q + q^2 + \ldots)' = \left(\frac{1}{1-q}\right)' \Longrightarrow 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}\Big\rangle =$$

$$= pq\frac{1}{p^2} \boxed{= \frac{q}{p}}$$

Аналогичным образом можно показать, что $\boxed{DX = \frac{q}{p^2}}$

Замечание. *Пуассоновская, биномиальная и геометрическая случайные величины являются дискретными случайными величинами.*

2.2.1.5.4 Равномерно распределённая случайная величина

Определение. *Говорят, что случайная величина* X *имеет равномерное распределение на отрезке* $[a;\, b]$, *если её функция плотности имеет вид*

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a;\, b] \\ 0 & \textit{иначе} \end{cases}}$$

Значение константы c *однозначно определяется из условия нормировки.*

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} c\,dx = c(b-a) = 1 \implies \boxed{c = \frac{1}{b-a}}$$

Обозначается $\boxed{X \sim R[a;\, b].}$

2.5.3.4 Равномерно распределённая случайная величина

$X \sim R(0,\, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,\, b) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\boxed{MX =} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} x\,dx = \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) \boxed{= \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{DX =} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Bigg|_a^b = \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} \boxed{= \frac{(b-a)^2}{12}}$$

2.2.1.5.5 Экспоненциальная случайная величина

Определение. *Говорят, что случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$, если её плотность распределения имеет вид*

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$

Обозначается $\boxed{X \sim Exp(\lambda).}$

$$\boxed{F(x) =} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \boxed{\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$

2.5.3.5 Экспоненциальная случайная величина

$X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{MX =} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)x = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} xde^{-\lambda x} = \cancelto{0}{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} \boxed{= \frac{1}{\lambda}}$$

$DX = M[X^2] - (MX)^2,$

$$M[X^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} x^2de^{-\lambda x} =$$

$$= \cancelto{0}{-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}} + 2\underbrace{\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx}_{=\frac{MX}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Таким образом,

$$\boxed{DX =} \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \boxed{= \frac{1}{\lambda^2}}$$

2.2.1.5.6 Нормальная случайная величина

Определение. *Говорят, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2 $(\sigma > 0)$, если её функция плотности имеет вид*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}}$$

Обозначается $\boxed{X \sim N(m,\, \sigma^2).}$

Замечание 3. *Функция распределения нормальной случайной величины* $X \sim N(m,\, \sigma^2)$*:*

$$\boxed{F(x) =} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \boxed{= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt}$$

2.5.3.6 Нормальная случайная величина

$$\boxed{X \sim N(\underbrace{m}_{MX},\, \underbrace{\sigma^2}_{DX})}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{MX =} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \langle x - m = t \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t+m) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt}_{0 \text{ (нечётная функция)}} + m \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt}_{1 \text{ (условие нормировки)}} \boxed{= m}$$

$$\boxed{DX =} M[(X - MX)^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left\langle \frac{x-m}{\sigma} = t,\ dx = \sigma dt \right\rangle =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt^2 = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,de^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \langle \text{ по частям } \rangle =$$

$$= \underbrace{-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} t e^{-e\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \sigma^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{1\ (\text{усл. норм. } N(0,\,1))} \boxed{= \sigma^2}$$