ЛЕКЦИЯ №7

МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОДУ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

1. Получение разностной схемы для линейного уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода интегро - интерполяционным методом

Выше при построении разностной схемы нами применялся простой метод **разностной аппроксимации**, когда производные в уравнении и краевых условиях напрямую заменялись их разностными аналогами. В случае квазилинейных уравнений или в задачах с разрывными коэффициентами данный метод приводит к нарушению законов сохранения на сетке и появлению фиктивных источниковых слагаемых в разностном уравнении. Чтобы избежать появления указанных эффектов, применяют так называемый интегро - интерполяционный метод получения разностной схемы.

Суть метода рассмотрим на примере решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - p(x)u + f(x) = 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$x = 0,\ \ -k(0)\frac{du}{dx} = F_0,$$

$$x = l,\ \ -k(l)\frac{du}{dx} = \alpha\,(u(l) - \beta)$$

где α, β - известные числа.

Введем сетку в области интегрирования уравнения [*0, l*]:

$$\omega_h = \{x_n : x_n = nh, n = 0,1,\dots N, h = l / N\}.$$

Для построения разностной схемы выберем на сетке шаблон $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ и ячейку $\{x_{n-1/2}, x_{n+1/2}\}$ (рис.1).

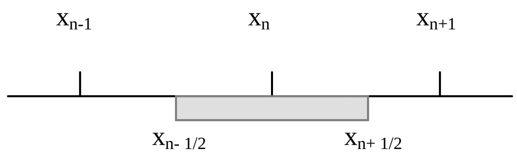

Рис. 1. Шаблон и ячейка (затенена) на сетке

Обозначим

$$F = -k(x)\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

По смыслу (2) - это поток.

Интегрируем уравнение (1) с учетом (2) на ячейке

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{dF}{dx}dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p(x)u\,dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x)\,dx = 0\,.$$

Выполняя точное интегрирование в первом слагаемом и применяя метод средних для приближенного численного вычисления остальных интегралов, получим

$$-(F_{n+1/2} - F_{n-1/2}) - p_n y_n h + f_n h = 0\,, \qquad (3)$$

где $p_n = p(x_n),\ f_n = f(x_n)$

Проинтегрируем (2) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx}dx = -\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{k(x)}dx\,.$$

Применяя метод средних справа, найдем

$$y_{n+1} - y_n = -F_{n+1/2} \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)},$$

или

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}, \quad где \quad \chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}. \tag{4}$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} = \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h}, \; \chi_{n-1/2} = \frac{h}{\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}} \tag{5}$$

Для величин $\chi_{n \pm 1/2}$ можно получить различные приближенные выражения, численно вычисляя интеграл методом трапеций или методом средних. Имеем, соответственно, две формулы, дающие близкие результаты

$$\chi_{n+1/2} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}, \quad \chi_{n+1/2} = k_{n+1/2} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2}. \tag{6}$$

Аналогично

$$\chi_{n-1/2} = \frac{2k_n k_{n-1}}{k_n + k_{n-1}}, \quad \chi_{n-1/2} = k_{n-1/2} = \frac{k_n + k_{n-1}}{2}.$$

Теперь, подставляя в (3) выражения для потоков (4), (5) и приводя подобные члены, получим окончательно систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, \quad 1 \le n \le N-1, \tag{7}$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h .$$

Система (7) совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

Покажем далее, как тем же методом получают **разностные аналоги краевых условий** на примере краевого условия при x=0.

Проинтегрируем уравнение (1) с учетом (2) на отрезке [0, $x_{1|2}$]

$$-\int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_0^{x_{1/2}} p(x) u\, dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x)\, dx = 0 .$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$-(F_{1/2} - F_0) - \frac{h}{4}(p_{1/2}\, y_{1/2} + p_0\, y_0) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0 .$$

Далее, полагая $y_{1/2} = \dfrac{y_0 + y_1}{2}$ и подставляя выражение для $F_{1/2}$ согласно (4) при n=0 $F_{1/2} = \chi_{1/2} \dfrac{y_0 - y_1}{h}$, *где* $\chi_{1/2} = \dfrac{h}{\int_0^{x_{1/2}} \frac{dx}{k(x)}}$, придем к формуле

$$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0, \qquad (8)$$

где

$$M_0 = \chi_{1/2} + \frac{h^2}{8} p_{1/2} + \frac{h^2}{4} p_0,$$

$$K_0 = \frac{h^2}{8} p_{1/2} - \chi_{1/2}, \quad P_0 = hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{1/2} + f_0) .$$

Для расчета величин в половинном узле можно принять простую аппроксимацию

$$p_{1/2} = \frac{p_0 + p_1}{2}, \quad f_{1/2} = \frac{f_0 + f_1}{2}.$$

Разностный аналог краевого условия при $x = l$ получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (1) с учетом (2) на отрезке [$x_{N-1/2}$, x_N] и учесть, что поток

$$F_N = \alpha(y_N - \beta), \text{ а } F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2} \frac{y_{N-1} - y_N}{h}.$$

В результате разностное краевое условие при $x = l$ приводится к стандартному виду

$$K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N. \qquad (9)$$

Сведем воедино полученные выше уравнения (7)-(9), составляющие **разностную схему**, аппроксимирующую исходную дифференциальную задачу (1)

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, \qquad 1 \le n \le N-1$$
$$M_0 y_0 + K_0 y_1 = P_0,$$
$$K_N y_{N-1} + M_N y_N = P_N.$$

Отметим, что при уменьшении шага (в пределе при $h \to 0$), в (8) членами, содержащими h^2, можно пренебречь и тогда (8) преобразуется к виду

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{\chi_{1/2}},$$

т.е. $-\chi_{1/2} \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0$, что совпадает с выражением, которое можно получить, выполняя простейшую аппроксимацию производной односторонней разностью, если брать χ в точке $x_{1/2}$. В этом случае аппроксимация дает точность порядка O(h), тогда как (8) обеспечивает точность O(h^2), совпадающую с порядком точности системы (7).

Порядок точности, совпадающий с порядком аппроксимации, вообще говоря, надо проверять отдельно, оценивая невязку для разностного аналога краевого условия путем разложения в ряды Тейлора. Процедура такого оценивания будет приведена позже при изучении уравнений в частных производных.

В заключение данного раздела очертим алгоритм решения выписанной выше разностной схемы. Будем использовать для иллюстрации общих подходов простейшую аппроксимацию первых производных в краевых условиях односторонними разностями с порядком точности *O(h).* (В реальном моделировании строить разностные аналоги краевых условий надо так, как это сделано выше). В итоге, на левом краю при x=0 получим

$$-k_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0 \ . \qquad (10)$$

На правом краю при $x=l$ запишем

$$-k_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \alpha(y_N - \beta) \ . \qquad (11)$$

Из (10)

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{k_0},$$

и, вспоминая основную прогоночную формулу $y_n = \xi_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1}$, записанную при $n=0$, т.е. $y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1$, найдем начальные значения прогоночных коэффициентов

$$\xi_1 = 1, \quad \eta_1 = \frac{hF_0}{k_0} \ .$$

Далее по известным рекуррентным формулам определим все прогоночные коэффициенты до последнего узла $n=N$. Наконец, подставляя в уравнение (11) выражение $y_{N-1} = \xi_N y_N + \eta_N$, получим

$$y_N = \frac{\eta_N k_N + h\alpha\beta}{k_N (1 - \xi_N) + h\alpha} . \qquad (12)$$

Теперь в обратном ходе окончательно находим по основной прогоночной формуле искомые значения сеточной функции y_n

В начале лекции при формулировке краевой задачи на границе $x = l$ было поставлено краевое условие III рода. Это условие имеет достаточно общий характер, в частности, при $k_N = 0,\ \alpha = 1$ оно переходит в краевое условие I рода - $u = \beta$. Видно, что при $k_N = 0,\ \alpha = 1$ формула (12) также переходит в выражение $y_N = \beta$, как и должно быть в соответствующей разностной схеме.

.