Многоканальная система обслуживания с отказами

Будем нумеровать состояния системы по числу занятых каналов, тоесть по числу заявок в ... системе.

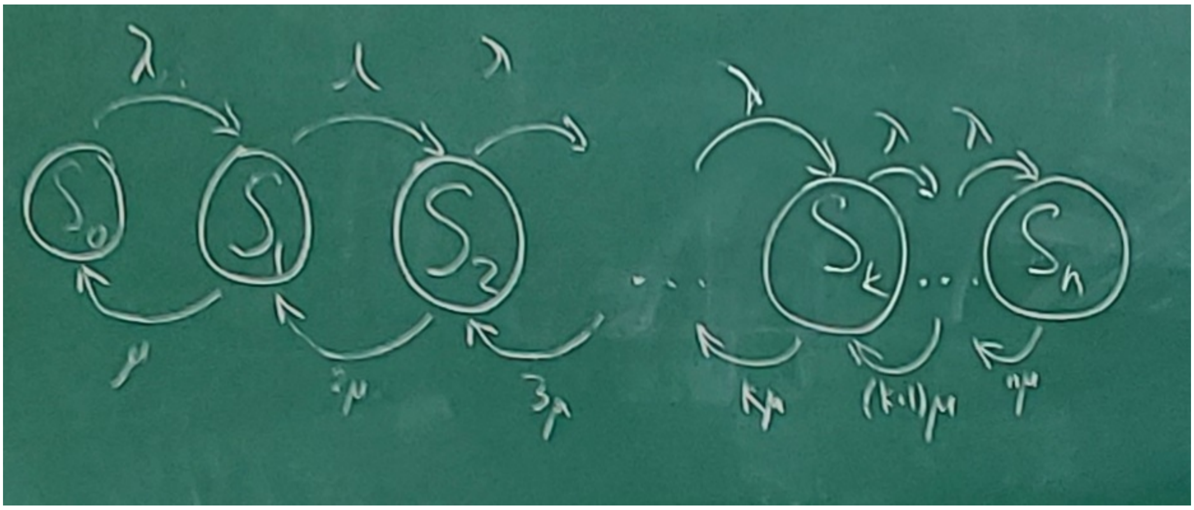
https://studopedia.ru/21_22870_metodika-vivoda-uravneniy-kolmogorova.html

S_0 - все каналы будут свободны

S_1 – занят один канал, остальные свободны

S_k – занято k каналов, остальные свободны

S_n – заняты все n каналов.



Разметив граф, расставим стрелки интенсивностей соответствующих потоков. По стрелкам слева направо системы переводит один и тот же поток, это поток заявок с интенсивностью λ. Пусть система была в состоянии S_1 и тогда как только закончится обслуживание заявки занимающего этот канал, система перейдет в состояние S_0. Если обслуживающим ... занято два канала, а не один... Если у нас было k каналов

Разметим граф, т.е. проставим у стрелок интенсивности соответствующих потоков событий. Пусть система находится в состоянии S_1. Как только закончится обслуживание заявки, занимающей этот канал, система переходит в состояние S_0, интенсивность перехода m. Если занято 2 канала, а не один, то интенсивность перехода составит 2μ.

Уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -p_0\lambda + p_1\mu \\ p_1'(t) = -p_1\lambda - p_1\mu + p_0\lambda + p_2\mu \\ p_2'(t) = -p_2\lambda - p_2 2\mu + p_1\lambda + p_3 3\mu \\ p_k'(t) = -p_k\lambda - p_k k\mu + p_{k-1}\lambda + p_{k-1}(k+1)\mu \\ p_n'(t) = p_{n-1}\lambda - p_n n\mu \end{cases}$$

Предельные вероятности состояний p0 и pn характеризую установившийся режим работы системы массового обслуживания при $t \to \infty$.

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda/\mu}{1!}+\frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}p_0$$

λ/μ - среднее число заявок, приходящих в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

$$p_0 = [1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!}]$$

$$p_k = \frac{p^k}{k!} p_0$$

Зная все вероятности состояний $p_0, \ldots, p_n$, можно найти характеристики СМО:

- вероятность отказа – вероятность того, что все n каналов заняты

$$p_{1OE} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p^0$$

- относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию

$$q = 1 - p_n$$

- среднее число заявок, обслуженных в единицу времени

$$A = \lambda q$$

Полученные выражения могут рассматриваться как базисная модель оценки характеристик производительности системы. Входящий в эту модель параметр λ ... и является усредненной характеристикой пользователей, а параметр \mu это функция технических характеристик компьютера, не только их, но еще и решаемых задач. Связь между ними должна быть установлена с помощью интерфейсной модели.

В простейшем случае, когда время ввода/вывода информации у каждой задачи мало по сравнению со временем ее решения, то можно принять что время решения ровно $1/\mu$, где время решение это среднее время решения задачи процессом [сек] И оно ровно дроби, в числителе которой будет среднее число операция выполняемых процессором на одну задачу.

Немарковские случайные процессы, сводящиеся к Марковским

Реальные процессы весьма часто обладают последействием и поэтому не являются Марковским. Иногда (очень редко) при исследовании таких процессов удается воспользоваться методами, разработанными для Марковских цепей. Наиболее распространенными являются:

1. Метод разложения случайного процесса на фазы (метод псевдо состояний)
2. Метод вложенных цепей Маркова

Метод псевдо состояний.

Сущность метода заключается в том, что состояние системы, потоки переходов из которых являются немарковскими, заменяются эквивалентной группой фиктивных состояний, потоки переходов, из которых являются Марковскими.

Условие статистической эквивалентности реального состояния и фиктивных в каждом конкретном случае подбираются индивидуально. Очень часто может использоваться следующее: $min \int_{t_1}^{t_2} ()\lambda_{экв}(\tau) - \lambda_i(\tau)dt$, где λ- эквивалентная интенсивность перехода в i-ой группе переходов, заменяющей реальный переход, обладающий интенсивностью λ_i.

За счет расширения числа состояний системы некоторые процессы удается точно свести к Марковским. Созданная таким образом система статистически эквивалентна или будет близка к реальной системе, и она подвергается обычному исследованию с помощью аппарата Марковских цепей.

К числу процессов, которые введением фиктивных состояний можно точно свести к Марковских относятся процессы под воздействием потоков Эрланга. В случае потока Эрланга k-ого порядка интервал времени между соседними событиями представляет собой сумму k независимых случайных интервалов, распределенных по показательному закону. Поэтому с введением потока Эрланга k-го порядка к Пуассоновскому осуществляется введением k псевдо состояний. Интенсивности переходов между псевдо состояниями равны соответствующему параметру потока Эрланга. Полученный таким образом эквивалентный случайный процесс является Марковским, т.к. интервалы времени нахождения его в различных состояниях подчиняются показательному закону.

Пример. Устройство S выходит из строя с интенсивностью λ, причем поток отказов Пуассоновский. После отказа устройство восстанавливается и время восстановления распределено по закону Эрланга 3 порядка с функцией плотности $f_2(t) = 0.5\mu(\mu t)^2 e^(- \mu t)$.

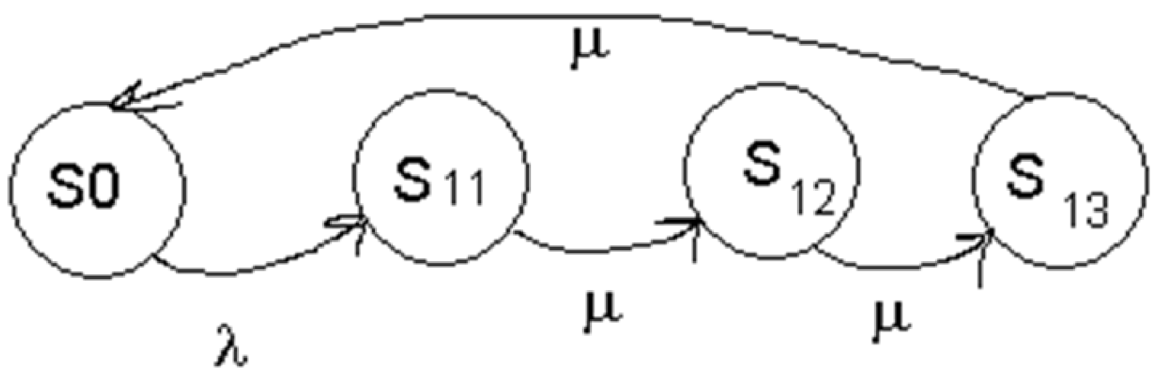
Система может принимать два возможных состояния:

S_0 - устройство исправно;

S_1 - устройство отказало и восстанавливается

Переход из S_0 в S_1 осуществляется под воздействием пуассоновского потока, а обратный - потока Эрланга.

Представим случайное время восстановления в виде суммы 3х случайных временных интервалов, распределенных по показательному закону с интенсивностью μ.



$$\begin{cases} p_0' = 0 = -\lambda p_0 + \mu p_{13} \\ p_{11}' = 0 = -\lambda p_{11} + \mu p_0 \\ p_{12}' = 0 = -\lambda p_{12} + \mu p_{11} \\ p_{13}' = 0 = -\lambda p_{13} + \mu p_{12} \\ p_0 + p_1 = 1 \\ p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} \end{cases}$$

$p_{13} = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

$p_{11} = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

$p_{12} = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

$p_1 = \frac{3\lambda}{\mu} p_0$

$p_0 + \frac{3\lambda}{\mu} p_0 = 1 => p_0 = \frac{\mu}{\mu+3\lambda}$

$p_1 = \frac{3\lambda}{\mu+3\lambda}$

Ответ: $P_0 = \frac{\mu}{\mu+3\lambda}, P_1 = \frac{3}{3+\frac{\mu}{\lambda}}$

Метод вложенных цепей Маркова.

Вложенные цепи Маркова образуются следующим образом. В исходном случайном процессе выбираются такие случайные процессы, в которых характеристики образуют Марковскую цепь. Моменты времени обычно являются случайными и зависят от свойств исходного процесса. Затем обычными методами теории Марковских цепей исследуются процессы только в эти характерные моменты. Случайный процесс называется полумарковским(с конечным или счетным множеством состояний) если заданы переходы состояний из одного состояния в другое и распределение времени пребывания процессов в каждом состоянии. Например, в виде функции распределения или функции плотности распределения.

<остальное самостоятельно>

Метод статистических испытаний. Метод Монте-Карло.

Преимущество метода статистических испытаний: его универсальность, обуславливающая его возможность всестороннего статистического исследования объекта. Но для реализации этого исследования необходимы довольно полные статистические сведения о параметрах элемента входящих в системы.

Недостаток:

Большой объем требующихся вычислений, равный количеству обращений к модели. Поэтому вопрос выбора величины n имеет важнейшее значение. Уменьшая n– повышаем экономичность расчетов, но одновременно ухудшаем их точность.

Вопрос выбора величины n имеет важнейшее значение. Уменьшение количества испытаний повышает экономичность расчетов, но ухудшает их точность.