

软件工程统计方法

概率论基础

陈振宇

南京大学软件学院

Email: zychen@software.nju.edu.cn

Homepage: software.nju.edu.cn/zychen



本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 1 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



内容提纲

- 统计学导论
- 描述统计
- 概率论基础
- 随机变量及其分布
- 统计量及其抽样分布
- 参数估计
- 参数假设检验
- 非参数假设检验
- 方差分析
- 回归分析

本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 2 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



1 本节内容

- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 3 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



随机试验与样本空间

Definition 1 (随机试验) 随机试验 E 是具有以下特征的试验: (1)可以在相同条件下重复进行; (2)每次试验的结果不止一个, 但结果事先可以预知; (3)每次试验前不能确定哪个结果会出现.

Definition 2 (样本空间) 随机试验的每一个可能结果称为样本点 e . 随机试验的所有可能结果的集合称为样本空间, 记为 $\Omega = \{e\}$.

例如: 一些常见的随机试验和样本空间。

- E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面(H)、反面(T)出现的情况. $\Omega_1 = \{H, T\}$ 。
- E_2 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面、反面出现的情况。
 $\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ 。
- E_3 : 记录某城市110一天接到的呼唤次数。 $\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。
- E_4 : 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命。 $\Omega_4 = \{t | t \geq 0\}$ 。

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 4 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

2 随机事件

Definition 3 (随机事件) 试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为试验的随机事件, 简称事件。在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生。

- 由一个样本点组成的单点集, 称为基本事件。
- 由两个或两个以上样本点组成的集合, 称为复合事件。
- 样本空间 Ω 包含所有的样本点, 它是 Ω 自身的子集, 在每次试验中它总是发生的, 称为必然事件。
- 空集 \emptyset 不包含任何样本点, 它也作为样本空间的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为不可能事件。

例如:

- 在 E_2 中事件 A_1 : “第一次出现的是H”, 即

$$A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$$

- 在 E_4 中事件 A_2 : “寿命小于1000小时”, 即

$$A_2 = \{t | 0 \leq t < 1000\}$$



本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 5 页 共 100 页

返回

全屏

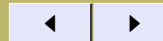
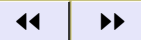
关闭



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

事件运算与关系

- 包含: $A \subseteq B$, 称事件 B 包含事件 A , 即事件 A 发生必然导致事件 B 发生。
- 相等 $A = B$, 称事件 A 与事件 B 相等, 即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。
- 和: $A \cup B$, 表示 A 、 B 二事件中至少有一个发生; $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 表示 n 个事件 A_1, \cdots, A_n 中至少有一个发生。
- 差: $A - B$, 表示事件 A 发生, 而事件 B 不发生。
- 积: $A \cap B$, 也记作 AB , 表示 A 、 B 二事件都发生; $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ 表示 n 个事件 A_1, \cdots, A_n 都发生。
- 互不相容(或互斥): 指 $AB = \emptyset$, 即事件 A 与事件 B 不能同时发生; 若 n 个事件 A_1, \cdots, A_n 的任意两个事件不能同时发生, 则称 A_1, \cdots, A_n 互不相容。
- 互为对立(互逆): 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$, 则 A 与 B 二事件互逆. 通常 B 记为 \bar{A} 。



第 6 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

事件运算：例子

□ A 发生而 B 与 C 都不发生可以表示为:

$$\overline{AB\overline{C}} = A - B - C = A - (B \cup C)$$

□ A 与 B 都发生而 C 不发生可以表示为:

$$\overline{ABC} = AB - C = AB - ABC$$

□ 所有这三个事件都发生可以表示为:

$$ABC$$

□ 这三个事件恰好发生一个可以表示为:

$$\overline{AB\overline{C}} + \overline{ABC} + \overline{A\overline{BC}}$$

□ 这三个事件恰好发生两个可以表示为:

$$AB\overline{C} + \overline{ABC} + A\overline{BC}$$

□ 这三个事件至少发生一个可以表示为:

$$A \cup B \cup C$$



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 7 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

3 概率与频率

□ 概率:

对于一个随机事件 A (除必然事件和不可能事件外)来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 我们希望知道的是事件在一次试验中发生的可能性. 用一个数 $P(A)$ 来表示该事件发生的可能性大小, 这个数 $P(A)$ 就称为随机事件 A 的概率。

□ 频率:

在相同的条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率, 并记成 $f_n(A)$.

□ 频率稳定性: 大量实验证实, 当重复试验的次数逐渐增大时, 频率呈现出稳定性, 逐渐稳定于某个常数. 也就是当 n 足够大时, $f_n(A) \approx P(A)$ 。

易见频率具有下述基本性质:

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
2. $f_n(\Omega) = 1$;
3. 若 A_1, \dots, A_k 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + \dots + f_n(A_k)$$



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 8 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

4 古典概率

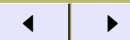
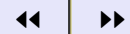
若 Ω 是有限样本空间, 其样本点为 e_1, \dots, e_n , 在有限样本空间中引进概率, 只要对每个样本点给定一个数与它对应, 此数称为事件 $\{e_i\}$ 的概率, 并记之为 $P(e_i)$, 它是非负的, 而且满足等概率要求。

$$P(\{e_1\}) + \dots + P(\{e_n\}) = P(\Omega) = 1$$

古典概率描述的随机现象具有下列两个特征:

- (1) 在观察或试验中它的全部可能结果只有有限个, 而且这些事件是两两互不相容的.
- (2) 事件 $\{e_i\} (i = 1, \dots, n)$ 的发生或出现是等可能的, 即它们发生的概率都一样.

古典概型在概率论中占有相当重要的地位, 它具有简单、直观的特点, 且应用广泛.



第 9 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

古典概率计算

设样本空间为 $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$, 根据等概率, 有

$$P(\{e_1\}) = \dots = P(\{e_n\})$$

且基本事件是两两不相容的, 于是

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\{e_1\} \cup \dots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + \dots + P(\{e_n\}) = nP(\{e_i\}) \\ P(\{e_i\}) &= \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

若事件 A 包含 k 个基本事件, 则有

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(\{e_{i_k}\}) = \frac{k}{n}$$

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在1812年把上式作为概率的一般定义. 事实上它只适用于古典概型场合。求解古典概型问题的关键是弄清基本事件空间的样本点总数和所求概率事件包含的样本点个数, 因此古典概率问题往往转化为排列组合问题。



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

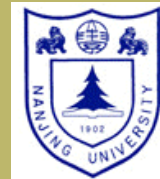


第 10 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



例子

Example 1 一口袋装有6只球, 其中4只白球、2只红球. 从袋中取球两次, 每次随机地取一只. 考虑两种取球方式: (a)第一次取一只球, 观察其颜色后放回袋中, 搅匀后再取一球. 这种取球方式叫做放回抽样. (b)第一次取一球不放回袋中, 第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做不放回抽样. 试分别就上面两种情况求(1)取到的两只球都是白球的概率; (2)取到的两只球颜色相同的概率; (3)取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解: 以 A 、 B 、 C 分别表示事件“取到的两只球都是白球”, “取到的两只球都是红球”, “取到的两只球中至少有一只是白球”. 易知“取到两只颜色相同的球”这一事件即为 $A \cup B$, 而 $C = \overline{B}$.

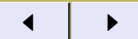
(a)有放回抽样: $P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$, 由于 $AB = \emptyset$, 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9}, P(C) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}$$

(b)无放回抽样: $P(A) = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$, 由于 $AB = \emptyset$, 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{15}, P(C) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$$

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 11 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



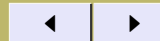
5 几何概率

在古典概型中利用等可能性的概念,成功地计算了某一类问题的概率.不过,古典概型要求可能场合的总数必须有限.因此历史上有不少人企图把这种做法推广到有无限多结果而又有某种等可能性的场合.这类问题一般可以通过几何方法来求解.

- 某人午觉醒来,发觉表停了,他打开收音机,想听电台报时,求他等待的时间短于10分钟的概率.
- 在400毫升自来水中有一个大肠杆菌,今从中随机抽出2毫升水样放到显微镜下观察,求发现大肠杆菌的概率.

一种相当自然的答案是认为例1所求的概率等于 $1/6$,例2所求的概率等于 $1/200$.在求出这些概率时,我们事实上是利用了几何的方法,并假定了某种等可能性.

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 12 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

例子

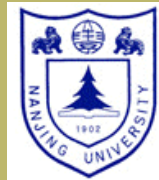
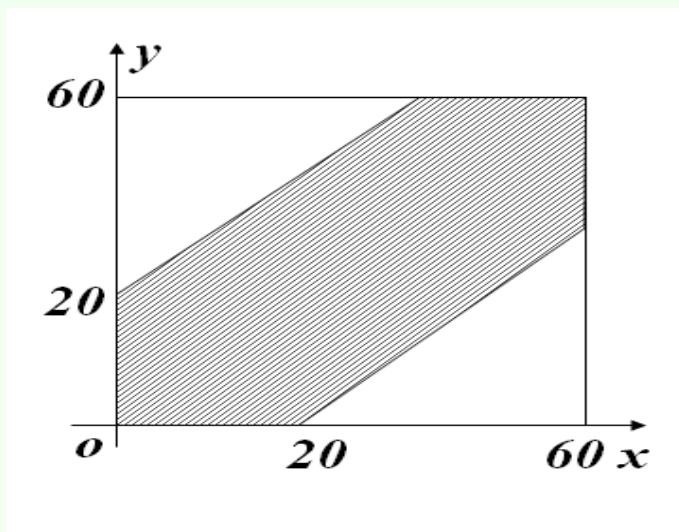
Example 2 (约会问题) 两人相约7点到8点在某地会面, 先到者等候另一人20分钟, 过时就可离去, 试求这两人能会面的概率.

解: 以 x, y 分别表示两人到达时刻, 则会面的充要条件为

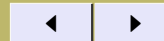
$$|x - y| \leq 20$$

这是一个几何概率问题, 可能的结果全体是边长为60的正方形里的点, 能会面的点的区域用阴影标出. 所求概率为

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 13 页 共 100 页

返回

全屏

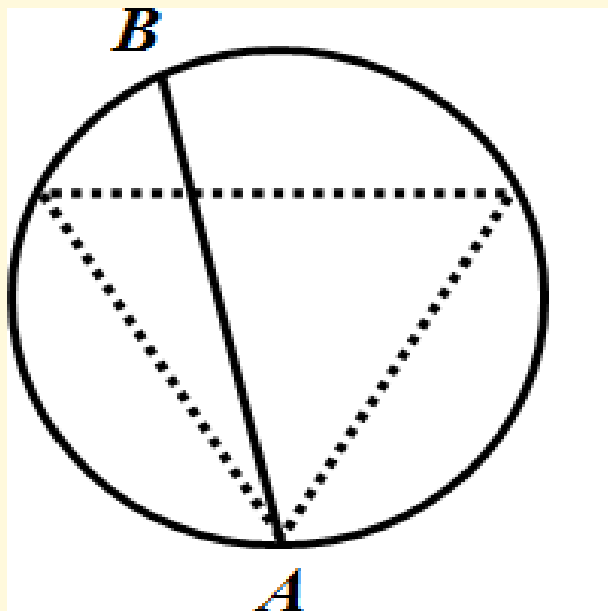
关闭

几何概率悖论

几何概率在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用, 十九世纪时, 不少人相信, 只要找到适当的等可能性描述, 就可以给概率问题以唯一的解答, 然而有人却构造出这样的例子, 它包含着几种似乎都同样有理但却互相矛盾的答案, 下面就是一个著名的例子.

Example 3 在半径为 l 的圆内随机地取一条弦, 问其长超过该圆内接等边三角形的边长 $\sqrt{3}$ 的概率等于多少?

[解法一] 任何弦交圆周二点, 不失一般性, 先固定其中一点于圆周上, 以此点为顶点作一等边三角形, 显然只有落入此三角形内的弦才满足要求, 这种弦的另一端跑过的弧长为整个圆周的 $1/3$, 故所求概率等于 $1/3$.



本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 14 页 共 100 页

返回

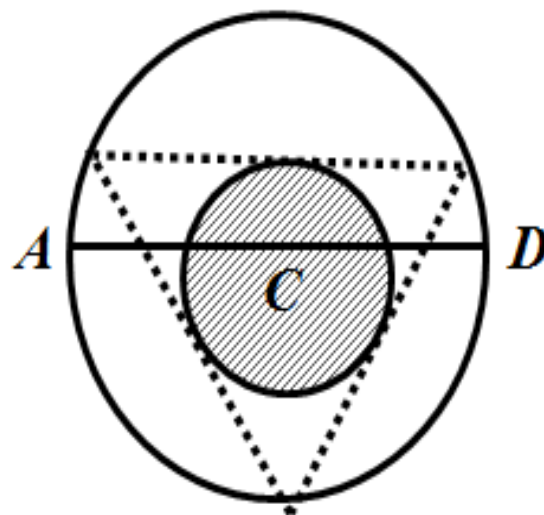
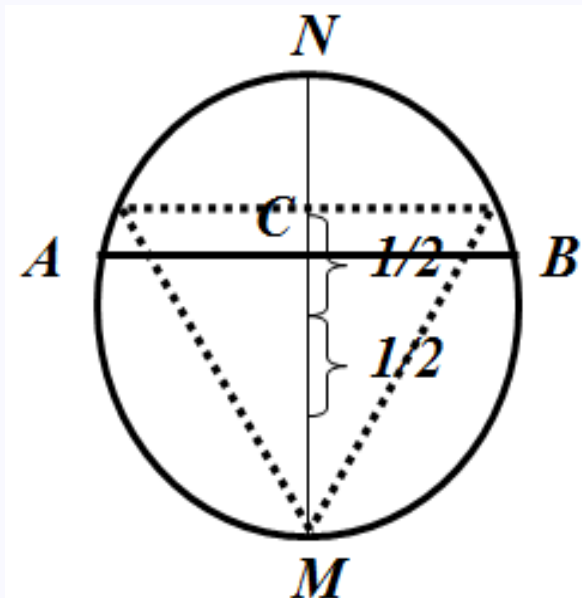
全屏

关闭

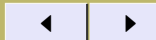
几何概率悖论

[解法二] 弦长只跟它与圆心的距离有关, 而与方向无关, 因此可以假定它垂直于某一直径. 当且仅当它与圆心的距离小于 $1/2$ 时, 才满足要求, 因此所求概率为 $1/2$.

[解法三] 弦被其中点唯一确定, 当且仅当其中点属于半径为 $1/2$ 的同心圆内时, 才满足要求, 此小圆面积为大圆面积的 $1/4$, 故所求概率等于 $1/4$.



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 15 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



- 本节内容
- 随机事件
- 概率与频率
- 古典概率
- 几何概率
- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 独立性
- 随机算法
- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进

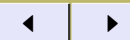
6 概率的定义

Definition 4 (概率) 设 E 为随机实验, Ω 为其样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一实数 $P(A)$, 若它满足下列条件:

- (1) 非负性: $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- (3) 互斥可加性: 若 A 和 B, \dots 互不相容事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- 在公理化定义中只规定了概率应满足的性质, 而不具体规定出它的计算公式或计算方法.
- 样本点 e 不再看作是随机试验的结果, 而是一些抽象的点, 这些点的全体构成样本空间 Ω .
- 定义在事件域 S 上的一个集合函数 P 满足非负性、规范性和可列可加性. 则称为概率.



第 16 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



- 本节内容
- 随机事件
- 概率与频率
- 古典概率
- 几何概率
- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 独立性
- 随机算法
- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进

7 概率的性质

□ 定理1: $P(\emptyset) = 0$.

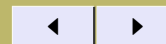
□ 定理2: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

□ 定理3: 若 $A \subset B$, 则有

$$P(A) \leq P(B), P(B - A) = P(B) - P(A)$$

□ 定理4: 对于任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



第 17 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



- 本节内容
- 随机事件
- 概率与频率
- 古典概率
- 几何概率
- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 独立性
- 随机算法
- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进

例子

Example 4 在1到2000的整数中随机地取一个数, 问取到的整数既不能被6整除又不能8整除的概率是多少?

解: 设 A 为事件“取到的数能被6整除”, B 为事件“取到的数能被8整除”, 则所求概率为

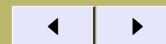
$$P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(AB))$$

$$333 < \frac{2000}{6} < 334, P(A) = \frac{333}{2000}$$

$$\frac{2000}{8} = 250, P(B) = \frac{250}{2000}$$

$$83 < \frac{2000}{24} < 84, P(AB) = \frac{83}{2000}$$

$$1 - \left(\frac{333}{2000} + \frac{250}{2000} - \frac{83}{2000} \right) = \frac{3}{4}$$



第 18 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



8 条件概率

已知某一事件 B 已经发生, 求另一事件 A 发生的概率.

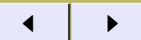
例如考虑有两个孩子的家庭, 假定男女出生率一样, 则两个孩子(依大小排列)的性别为(男男), (男女), (女男), (女女)的可能性是一样的. 若以 A 记随机选取的这样一个家庭中有一男一女这一事件, 则显然 $P(A) = 1/2$. 但是如果预先知道这个家庭至少有一个女孩(设为事件 B), 那么, 上述事件的概率便应是 $2/3$.

Definition 5 (条件概率) 设 A, B 是两个事件, 且 $P(B) > 0$, 称

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 19 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

9 乘法公式

Theorem 1 (乘法公式) 设 $P(B) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B)P(A | B)$. 一般地, 我们有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

Example 5 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为 $1/2$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $7/10$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $9/10$. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

解: 设 A_i 为第 i 次落下打破透镜事件, B 为三次落下未打破透镜, 则有

$$B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$$

则有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_3} | \overline{A_1} \cap \overline{A_2})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(\overline{A_1}) \\ &= (1 - 9/10)(1 - 7/10)(1 - 1/2) = 0.015 \end{aligned}$$



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 20 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



10 全概率公式

全概率公式是概率论的一个重要公式, 应用全概率公式的关键是建立样本空间的划分(即构造一个完备事件组), 然后计算各个概率和条件概率, 最后代入全概率公式.

Definition 6 设 B_1, \dots, B_n 是样本空间 Ω 的一个事件组, 若满足

□ $B_i \cap B_j = \emptyset$, 对于任意 $i \neq j$;

□ $\cup_i B_i = \Omega$.

则称为完备事件组.

Theorem 2 (全概率公式) 设 B_1, \dots, B_n 是样本空间 S 的一个完备事件组, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则对于任一随机事件 A , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

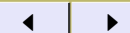
独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 21 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



例子

Example 6 播种用的一等小麦种子中混合2%的二等种子, 1.5%的三等种子, 1%的四等种子. 用一等、二等、三等、四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别是0.5, 0.15, 0.1, 0.05. 求这批种子所结的穗含有50颗以上麦粒的概率.

设从这批种子中任选一颗是一等、二等、三等、四等种子的事件分别记为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 则它们构成样本空间的一个完备事件组. 用 B 表示在这批种子中任选一颗, 且这颗种子所结的穗含有50颗以上麦粒这一事件, 则由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_i P(A_i)P(B | A_i) \\ &= 0.955 * 0.5 + 0.02 * 0.15 + 0.15 * 0.1 + 0.01 * 0.05 = 0.4825 \end{aligned}$$

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 22 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

例子

Example 7 考卷中一道选择题有4个答案, 仅有一个是正确的, 设一个学生知道正确答案或不知道而乱猜是等可能的. 如果这个学生答对了, 求它确实知道正确答案的概率.

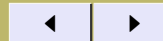
样本空间可以划分为事件 A : 知道正确答案, \bar{A} : 不知道正确答案. 以 B 表示学生答对事件, 则 $A \subset B$, $P(AB) = P(A) = 1/2$, $P(B | A) = 1$, 而 $P(B | \bar{A}) = 1/4$. 由全概率公式

$$P(B) = P(A)P(B | A) + P(\bar{A})P(B | \bar{A})$$

$$1/2 * 1 + 1/2 * 1/4 = 5/8$$

故

$$P(A | B) = P(AB)/P(B) = 4/5$$



第 23 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

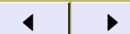
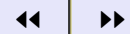


- 本节内容
- 随机事件
- 概率与频率
- 古典概率
- 几何概率
- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 独立性
- 随机算法
- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进

例子

Example 8 一个盒子中有3个红球，2个白球，每次从袋中任取一只，观察其颜色后放回，并再放入一只与所取之球颜色相同的球，若从盒子中连续取球4次，试求第1、2次取得白球、第3、4次取得红球的概率。

Example 9 有甲乙两个袋子，甲袋中有两个白球，1个红球，乙袋中有两个红球，一个白球。这六个球手感上不可区别。今从甲袋中任取一球放入乙袋，搅匀后再从乙袋中任取一球，问此球是红球的概率？



第 24 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



11 贝叶斯公式

通常，事件 A 在事件 B (发生)的条件下的概率，与事件 B 在事件 A 的条件下的概率是不一样的；然而，这两者是有确定的关系,贝叶斯法则就是这种关系的陈述。

Theorem 3 (贝叶斯公式) 设 A, B 为两事件：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

作为一个规范的原理，贝叶斯公式对于所有概率的解释是有效的。然而，频率主义者和贝叶斯主义者对于在应用中概率如何被赋值有着不同的看法：频率主义者根据随机事件发生的频率（总体样本里面的个数）来赋值概率；贝叶斯主义者要根据未知的命题（先验概率/后验概率）来赋值概率。

本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

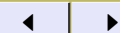
独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 25 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



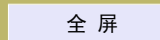
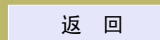
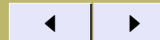
本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

贝叶斯公式

贝叶斯定理往往与全概率公式同时使用. 全概率公式一用于“由因求果”问题, 而贝叶斯定理一般用于“执果寻因”问题, 在使用时要分清是什么问题, 确定应用哪个公式.

在医疗诊断中, 有人为了诊断病人到底是患了毛病 B_1, \dots, B_n 中的哪一种, 对病人进行观察与检查, 确定了某个指标 A (如是体温、验血), 他想用这类指标来帮助诊断. 这时就可以用贝叶斯公式来计算有关概率。

- ❑ 首先必须确定先验概率 $P(B_i)$, 这实际上是确定人患各种毛病的可能性大小, 以往的资料可以给出一些初步数据;
- ❑ 其次是要确定 $P(A | B_i)$, 这里当然主要依靠医学知识.
- ❑ 利用贝叶斯公式就可算出 $P(B_i | A)$.
- ❑ 显然, 对应于较大 $P(B_i | A)$ 的“病因” B_i , 应多加考虑.



例子

Example 10 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数

制造厂	次品率	份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

解: 设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的, 且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只元件, 求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只元件, 若已知取到的是次品, 为分析此次品出自何厂, 需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少.

设 A 表示“取到的是一只次品”, $B_i (i = 1, 2, 3)$ 表示“所取到的产品是由第 i 家工厂提供的”. 有 $P(B_1) = 0.15$, $P(B_2) = 0.80$, $P(B_3) = 0.05$; $P(A | B_1) = 0.02$, $P(A | B_2) = 0.01$, $P(A | B_3) = 0.03$.

(1) 由全概率公式

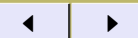
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = 0.0125$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = 0.24, P(B_2|A) = 0.64, P(B_3|A) = 0.12$$



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 27 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



- 本节内容
- 随机事件
- 概率与频率
- 古典概率
- 几何概率
- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 独立性
- 随机算法
- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进

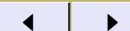
例子

Example 11 根据以往的临床记录, 某种诊断癌症的试验具有如下的效果: 若以 A 表示事件“试验反应为阳性”, 以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”, 则有 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$. 现在对自然人群进行普查, 设被试验的人患有癌症的概率为0.005, 即 $P(C) = 0.005$, 试求 $P(C|A)$.

解: 已知 $P(A|C) = 0.95$, $P(A|\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.05$, $P(C) = 0.005$, $P(\bar{C}) = 0.995$, 由贝叶斯公式

$$P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})} = 0.087$$

本题的结果表明, 虽然 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$, 这两个概率都比较高. 但若将此试验用于普查, 则有 $P(C|A) = 0.087$, 亦即其正确性只有8.7%(平均1000个具有阳性反应的人中大约只有87人确患有癌症). 如果不注意到这一点, 将会得出错误的诊断, 这也说明, 若将 $P(A|C)$ 和 $P(C|A)$ 混淆了会造成不良的后果.

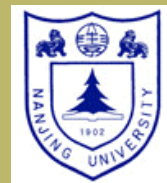


第 28 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

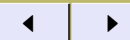


本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

例子

Example 12 数字通讯过程中，信源发射0、1两种状态信号，其中发0的概率为0.55，发1的概率为0.45。由于信道中存在干扰，在发0的时候，接收端分别以概率0.9、0.05和0.05接收为0、1和“不清”。在发1的时候，接收端分别以概率0.85、0.05和0.1接收为1、0和“不清”。

现接收端接收到一个“1”的信号。问发射端发的是0的概率是多少？



第 29 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

12 独立性

Definition 7 设 A, B 是两个事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

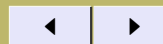
则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

Theorem 4 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 若 A, B 相互独立, 则

$$P(B|A) = P(B)$$

反之亦然.

Theorem 5 若事件 A 与 B 相互独立, 则下列各对事件: A 与 \bar{B} , B 与 \bar{A} , \bar{A} 与 \bar{B} , 也相互独立.



第 30 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

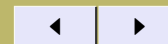
独立性

Definition 8 设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A, B, C 相互独立.



第 31 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

例子

Example 13 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 而第四面同时染上红, 白, 黑三种颜色. 现在我们以 A, B, C 分别记投一次四面体出现红, 白, 黑颜色的事件. 则由于在四面体中有两面有红, 白, 黑色, 因此

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

容易算出

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$$

所以 A, B, C 两两独立. 但是

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Example 14 若有一个均匀正八面体, 其第 $1, 2, 3, 4$ 面染红色, 第 $1, 2, 3, 5$ 面染白色, 第 $1, 6, 7, 8$ 面染上黑色, 现在以 A, B, C 分别表示投一次正八面体出现红, 白, 黑的事件, 则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

但是

$$P(AB) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$



本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 32 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

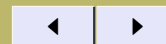


本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

13 随机算法

验证多项式恒等式的随机算法

- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进



第 33 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

14 问题背景

假定有一个计算多项式乘法的程序. 考虑验证下面的恒等式, 程序可能输出:

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6) \stackrel{?}{=} x^6 - 7x^3 + 25$$

有一个简单的方法验证这个恒等式是否成立: 将式子左边的每一项相乘, 观察得到的多项式是否与式子右边相等. 这个例子中, 我们相乘发现常数项不相等, 所以恒等式不成立.

更一般地, 给定两个多项式, $F(x)$ 和 $G(x)$, 可以通过将它们变换成规范形式 $(\sum_{i=0}^d c_i x^i)$ 来验证它们是否恒等:

$$F(x) \stackrel{?}{=} G(x)$$

两个多项式相等当且仅当他们的规范式中所有的系数相等. 基于此, 我们假定 $F(x)$ 为乘积 $F(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, $G(x)$ 为规范式, 连续地将 $F(x)$ 的第 i 个单项式与前面 $i-1$ 个单项式相乘, 如此把 $F(x)$ 变换成规范式, 需要做 $O(d^2)$ 次系数相乘.

有哪些疑问?



本节内容

随机事件

概率与频率

古典概率

几何概率

概率的定义

概率的性质

条件概率

乘法公式

全概率公式

贝叶斯公式

独立性

随机算法

问题背景

随机算法初步

随机算法改进



第 34 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

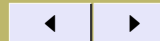
15 随机算法初步

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的最高阶(x 的最高次)为 d , 随机算法首先是从 $\{1, \dots, 100d\}$ 中均匀随机(等可能)地选择一个整数 r , 然后计算 $F(r)$ 和 $G(r)$ 的值. 将出现以下两种情况:

- $F(r) \neq G(r)$: 判定两个多项式不等;
- $F(r) = G(r)$: 判定两个多项式相等.

计算 $F(r)$ 和 $G(r)$ 需要 $O(d)$ 时间, 要快于计算 $F(r)$ 的规范形式, 但是这种算法可能给出错误的答案.

- (1) 为什么?
- (2) 给出错误答案的概率是多少呢?



第 35 页 共 100 页

返回

全屏

关闭



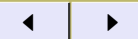
随机算法初步

为什么会给出错误答案?

- ❑ 如何 $F(x) = G(x)$, 那么对于任意的 r , $F(r) = G(r)$, 算法检测结果正确.
- ❑ 如何 $F(x) \neq G(x)$, $F(r) \neq G(r)$, 那么算法判定不等, 算法检测结果正确.
- ❑ 如何 $F(x) \neq G(x)$, $F(r) = G(r)$, 那么算法检测结果错误.

单边错误: 当两个多项式不相等时, 算法可能给出错误答案.

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 36 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

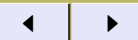


随机算法初步

给出错误答案的概率多少?

- 当 r 是方程 $F(x) - G(x) = 0$ 的根时, 必然会出现错误结果.
- $F(x) - G(x)$ 的次数不高于 d , 由代数基本定理可知, $F(x) - G(x) = 0$ 不可能多于 d 个根.
- 当 $F(x) \neq G(x)$ 时, 在 $\{1, \dots, 100d\}$ 范围内, 不可能有多于 d 个值, 使得 $F(r) = G(r)$.
- 因为 $|\{1, \dots, 100d\}| = 100d$, 所以算法选取一个值并给出错误答案的概率机会不会大于 $\frac{1}{100}$.

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 37 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

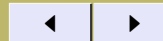


本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进

16 随机算法改进

如何改进算法正确率？

- 在更大的整数范围进行取值. 比如在 $\{1, \dots, 1000d\}$ 中随机选择 r 进行算法检测, 则错误答案的概率至多为 $1/1000$. 但是在某些时候我们受限于计算机的精度不能太大范围进行取值.
- 重复多次地进行随机检测恒等式. 当有一次 $F(r) \neq G(r)$ 时, 算法停止, 给出结果不等. 当所有都是 $F(r) = G(r)$ 时, 算法给出多项式相等.
 - ◆ 有放回抽样.
 - ◆ 无放回抽样.



第 38 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

随机算法改进

有放回抽样

Definition 9 事件 E_1, \dots, E_k 独立当且仅当对于任意 $I \subseteq [1, k]$, 有

$$P(\cap_{i \in I} E_i) = \prod_{i \in I} P(E_i)$$

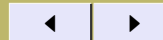
每次检测错误率不超过 $\frac{1}{100}$, 则 k 次有放回抽样的错误率为

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_k) = \prod_{i=1}^k P(E_i) \leq \left(\frac{1}{100}\right)^k$$

算法错误率指数级降低.



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 39 页 共 100 页

返回

全屏

关闭

随机算法改进

无放回抽样

Definition 10 在已知事件 F 发生的条件下, 事件 E 也发生的条件概率为

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

仅当 $P(F) > 0$ 时, 条件概率 $P(E|F)$ 有意义.

对于无放回抽样, 我们有

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_k|E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1})P(E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1})$$

重复推导可得

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots P(E_k|E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1})$$

因为有

$$P(E_j|E_1 \cap \cdots \cap E_{j-1}) \leq \frac{d - (j - 1)}{100d - (j - 1)}$$

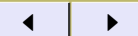
因此在 $k \leq d$ 次迭代后, 算法给出错误答案的概率为

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_k) \leq \prod_{j=1}^k \frac{d - (j - 1)}{100d - (j - 1)} \leq \left(\frac{1}{100}\right)^k$$

当 $j > 1$ 时, $\frac{d-(j-1)}{100d-(j-1)} < \frac{1}{100}$. 算法进一步改善.



本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 40 页 共 100 页

返回

全屏

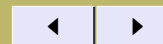
关闭



- 本节内容
- 随机事件
- 概率与频率
- 古典概率
- 几何概率
- 概率的定义
- 概率的性质
- 条件概率
- 乘法公式
- 全概率公式
- 贝叶斯公式
- 独立性
- 随机算法
- 问题背景
- 随机算法初步
- 随机算法改进

随机算法总结

- ❑ 无放回抽样的准确率比有放回抽样高.
- ❑ 有放回抽样的算法实现必无放回抽样简单.
- ❑ 当 $d+1$ 次无放回抽样后, 能够确保算法的准确性. 但算法复杂度提升到 $O(d^2)$.



第 41 页 共 100 页

返 回

全 屏

关 闭



内容回顾

□ 概率的定义
三个条件

□ 条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

□ 乘法公式

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1} \cdots A_1)$$

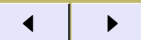
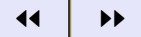
□ 全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

□ 贝叶斯公式

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

本节内容
随机事件
概率与频率
古典概率
几何概率
概率的定义
概率的性质
条件概率
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式
独立性
随机算法
问题背景
随机算法初步
随机算法改进



第 42 页 共 100 页

返回

全屏

关闭