实变函数简明教程　解答

https://github.com/InnocentFIVE/Concise-Real-Variables-DDG

小飞舞子

Innocent

2023 | 11 | 11

摘　要

正如标题所述, 是邓东皋, 常心怡所编《实变函数简明教程》的一些解答.

限于时间只故, 本解答不求大而全, 大多数繁琐无用的验证型题目将会跳过. 带★号的是笔者认为自己想复杂了的题目, 但临时没有更好的解法; 带!号的是笔者认为可能有错误的题目, 亦有可能是笔者用了比较老的版本, 总之多留心一下无妨.

解答部署情况见目录. (带 [,] 的点击均可跳转, 当然, 青色的文字也可以用来跳转)

以下是笔者写的一篇朴素的实分析科普文.

广　告

https://github.com/InnocentFIVE/I-Measure

这篇文章的本意是想要把一些测度的构造说清楚, 诚然, 测度的构造有许多种路径, 本文只是选取笔者最熟悉的一种路径, 同时对构造中所遇障碍以及对测度的积分进行一些阐述: 第一到第六节循序渐进地阐述了标准的实分析内容: 测度的构造, 延拓和 Lebesgue 测度; 第七节按照惯例阐述对测度的积分, 但自然而然地, 对积分的介绍不可避免地变得相当冗长, 几乎用了全文的一半内容才堪堪完成任务. 本文另一个特殊的点是注释繁多: 主要用于介绍测度相关的其余内容和一些对积分, 求导的处理, 终究是实分析的主干内容之一, 但因各种原因含量远超预算, 此主要由于笔者写作风格随性所致. 虽言 “写科普要做减法”, 但笔者无法合理地处理注释的删减, 因此在此版本中保留了所有注释, 并将其置于文末以便提升正文阅读体验. 虽然, 但笔者仍然认为注释是本文中相当有趣的一部分, 笔者在此记录了不少自身的理解以及某些板块之间的联系 (以及可爱猫猫的图片), 某种意义上也算是 (超大量的) 饭后甜品, 食之无妨.

我删!

广　告（续）

(a) 笃行数研组的广告，公众号二维码可见 (b)

(b) 笃学编辑部二维码

(c) 八云的魔法书交流群

图 1: (b) 是笃学编辑部公众号的二维码. (c) 是东方 Project × 数学的同人社团「八云的魔法书」的粉丝群，力求为东方众 × 数学爱好者 / 学生党提供一个自由良好的东方及数学交流环境. »

目　录

饱含魔力的土地下......

凡　例

> 总有那么一秒钟，你回到这里的时候会认为这本小册子里充满了陷阱，但事实上这里是最安全的地方了.

1. 记 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的幂集, A^c 为 A 的补集, 函数的原像以 $^{-1}$ 记之:

$$f^{-1}(A) = \{\, x \mid f(x) \in A \,\}.$$

2. 必要时用 $-$ 或 $\cdot$ 来代替宗量: $f(\cdot) = [x \mapsto f(x)] = f(-)$. 指标类型过多时可能会用 $\bullet$ 来代替指标: $A_n \mapsto A_\bullet$. 此类情形下, $\sum$, $\prod$, $\bigcap$, $\bigcup$ 等巨算符默认对 $\bullet$ 指标处理. $\operatorname{diam} E$ 是集合 E 的直径: $\operatorname{diam} E = \sup\{\, d(x,y) \mid x, y \in E \,\}$. 令 $\{\, f > a \,\}_E$ 代表 $\{\, x \in E \mid f(x) > a \,\}$, 无歧义时 E 省略.
3. 特征函数的定义是:

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

$\mathcal{M}(A)$ 代表用 A 生成的 σ-代数, 其中 $A \subset \mathscr{P}(X)$, 则

$$\mathcal{M}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset M \\ M:\ \sigma\text{-algebra}}} M.$$

4. 用 $\mathfrak{L}^0(E)$ 记 E 上的可测函数. $\operatorname{im} f$ 代表 f 的值域. card 是集合的计数函数. $\|\cdot\|_1$ 表函数的 1-范数: $\|f\|_1 = \int |f|$, C_c^∞ 代表的是光滑紧支函数空间. $f * g$ 是卷积:

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)g(x-y)\,\mathrm{d}y = g * f(x).$$

id 是单位函数: $\mathrm{id}(x) = x$.
5. 用 q 表 p 的共轭指标 ${}^{p}/_{p-1}$. 用 $\operatorname{ind}(p_\bullet)$ 表示 ${}^{1}/_{\sum 1/p_\bullet}$. 正交族的 Hilbert 直和 $\bigoplus \phi_\bullet = \{\, \sum a_\bullet \phi_\bullet \mid \sum |a_\bullet|^2 < \infty \,\}$. 其余情形与书中基本一致.

第一章　集合与点集

基于距离这个概念的基础, 例如收敛点列的概念及其定义的极限, 我们可以选择这些思想作为点集理论中的基础, 从而消除距离的概念. . . . . 第三点, 我们可以将集合中的每个点与空间中的某些称为"邻域"部分相关联, 这可以在再次消除距离概念的同时将其作为理论的构建基石. 此乃考虑了元素和子集之间联系的集合绘景.

Grundzüge der Mengenlehre
FELIX HAUSDORFF

练习 1⁶　令 $f_n \to f$, 则 $\lim_n\{f_n > c - 1/k\}$ 存在且 $\{f \geqslant c\} = \bigcap_{k\geqslant 1}\lim_n\{f_n > c - 1/k\}$.

解答 1⁶　$\lim_n\{f_n > c - 1/k\}$ 存在性由以下讨论显而易见:

$$\begin{aligned}\liminf_n\Big\{f_n > c - \frac{1}{k}\Big\} &= \bigcup_{m\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant m}\Big\{f_n > c - \frac{1}{k}\Big\}\\ &= \bigcup_{m\geqslant 1}\Big\{\inf_{n\geqslant m} f_n > c - \frac{1}{k}\Big\}\\ &= \Big\{\sup_{m\geqslant 1}\inf_{n\geqslant m} f_n > c - \frac{1}{k}\Big\}\\ &= \Big\{\liminf_n f_n > c - \frac{1}{k}\Big\} = \Big\{f > c - \frac{1}{k}\Big\}.\end{aligned}$$

$\limsup_n\{f_n > c - 1/k\}$ 同理. 故 $\bigcap_{k\geqslant 1}\lim_n\{f_n > c - 1/k\} = \bigcap_{k\geqslant 1}\{f > c - 1/k\} = \{f > c\}$.

练习 1¹³　令 $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, 证明 $\{f > g\} = \bigcup_{n\geqslant 0}(\{f > r_n\} \cap \{g < r_n\})$. 其中 $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的排列.

解答 1¹³　$f(x) > g(x) \iff (g(x), f(x)) \neq \varnothing \iff \exists r \in \mathbb{Q} \in (g(x), f(x))$. 故 $\{f > g\} \iff \{\exists r \in \mathbb{Q},\, g < r < f\} = \bigcup_{n\geqslant 0}(\{f > r_n\} \cap \{g < r_n\})$.

练习 1¹⁴　令 $f_n \to f$, $|f| < \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}\{|f_n - f| > \varepsilon\} = \varnothing$.

解答 1¹⁴　由 [1⁶], $\lim_{n\to\infty}\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ 存在且为空.

练习 1[16] 是否可以把 $[0,1]$ 连续映射成开区间或者两个不交闭区间?

解答 1[16] 不能. 由于 $[0,1]$ 紧致连通, 故其连续像亦然, 故也是有界闭区间.

练习 1[20] 令 $E \subset \mathbb{R}^2$ 且 E 中任意两点 (EUCLIDEAN) 距离为有理数, 求证 E 可数.

解答 1[20] 不妨设 E 含两个不相同的点 x, y, 则

$$E \subset \bigcup_{(r_1,r_2)\in\mathbb{Q}^2} C_{r_1}(x) \cap C_{r_2}(x), \quad C_r(a) = \{\, b \in \mathbb{R}^2 \mid |b-a| = r \,\}.$$

其中 $C_{r_1}(x) \cap C_{r_2}(x)$ 至多相交于两点, 故可数.

注. $\mathbb{R}^n$ 情形可对维数归纳: $C_{r_1}(x) \cap C_{r_2}(x)$ 属于某个超平面, 由归纳原理可数, 因此 E 可数.

练习 1[41] 假定连通的定义是其内的既开又闭集为空或自身, 证明 $\mathbb{R}^n$ 连通, 且 $E \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\mathbb{R}^n, \varnothing\}$, 则 $\partial E \neq \varnothing$.

解答 1[41] 若不然, 令 A 非空既开又闭且 A^c 非空既开又闭, 则令直线 $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 过 A 中一点和 A^c 中一点. 不妨令其为 x 轴, 则 $A \cap \operatorname{im} l$ 和 $A^c \cap \operatorname{im} l$ 是 $\mathbb{R}$ 上不交开集, 故由 $(A \cap \operatorname{im} l) \cup (A^c \cap \operatorname{im} l) = \mathbb{R}$ 得到 $\mathbb{R}$ 不连通, 矛盾. $\partial E = (E^\circ \cup (E^c)^\circ)^c$, 若为空, 则 E° 和 $(E^c)^\circ$ 均既开又闭, 故只能是 $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}^n$.

练习 1[48] 令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 定义振幅函数:

$$w(x; f) \coloneqq \inf_{\delta>0}\Big(\sup\{\, |f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in (x-\delta, x+\delta) \,\}\Big).$$

证明 $\{\, w(-; f) \geqslant \varepsilon \,\}$ 闭, 且 f 的连续点集为 $w(-, f)^{-1}(\{0\})$.

解答 1[48] 先证明 $E = \{\, w(-; f) \geqslant \varepsilon \,\}$ 闭, 令 $x_0 \in \overline{E} \setminus E$, $x_n \to x_0$. 则 $w(x_0; f) < \varepsilon$, 其某邻域 N 满足 $x_1, x_2 \in N \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 令 n 足够大, 满足 $x_n \in N$ 则矛盾. 后一个论述显然.

★ **练习 1[54]** $\mathbb{D} = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \,\}$, $\mathcal{E}_o$ 是边长小于 1 的开矩形组成的集合, $\mathcal{E}_c$ 是边长小于 1 的内部非空闭矩形组成的集合, 证明 $\mathbb{D}$ 不能表为 $\mathcal{E}_o \cup \mathcal{E}_c$ 中子族的不交并.

解答 1[54] 假设存在覆盖 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 易知 A 有限时不能覆盖 $\mathbb{D}$ 和 $\overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2} = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant \sqrt{2}/2 \,\}$: 若能, 则不妨设 $0 \in T_0$, $x \in \mathbb{D}$ 是 T_0 在 $\overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2}$ 中的某个角, 令 $r < \min_{T_\alpha \text{ closed}, \alpha\neq 0} d(x, T_\alpha)$. 则 $B_r(x) \setminus T_0$ 是完全由开矩形覆盖. 容易知道其不能

用一个开矩形覆盖, 因此假定 $T_1, \ldots, T_N$ 交 $B_r(x) \setminus T_0$ 非空, 那么 $\overline{T_1} \cap \bigcup_{i=2}^N T_i \cap (B_r(x) \setminus T_0) = \varnothing$. 即 $\partial T_1 \cap (B_r(x) \setminus T_0) = \varnothing$ 矛盾!

若 $\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$ 不交覆盖 $\mathbb{D}$, 则 A 是无限集, $\{ B_\alpha \mid T_\alpha \cap \overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2} \neq \varnothing \}$ 是一个 $\overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2}$ 的覆盖, 故也是无限多个. 将 $\overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2}$ 分解, 每次分解选取覆盖族无限的一方, 则存在紧集 $K_\bullet \downarrow$ 且 $\operatorname{diam} K_\bullet \to 0$. 故 $\bigcap K_\bullet = \{x_0\} \subset \overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2}$. 由于含 x_0 的矩形内部非空, 故 n 极大时 K_n 完全含于某矩形内, 与覆盖数无限矛盾, 若覆盖数有限则不能覆盖 $\overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}/2}$. 故不能覆盖 $\mathbb{D}$.

练习 1⁵⁵ 若 f 在闭集 $\{F_n\}_{n \geqslant 0}$ 的限制都连续, 是否有 $f|_{\bigcup F_\bullet}$ 连续?

解答 1⁵⁵ 否. 考虑 $F_n = \{1/_{n+1}\}$, f 是任意处处不连续函数即可.

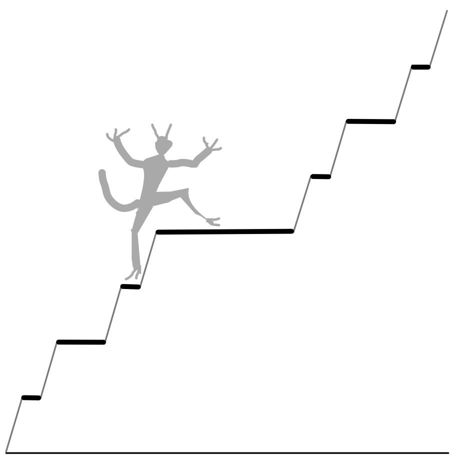


图 2: 魔鬼的阶梯. 出自 Barry Simon, *Real Analysis, A Comprehensive Course in Analysis, Part 1*, 2015. 该描述用来形容 Cantor 函数. »

第二章 Lebesgue 测度

我们可以令它的点包含在有限或者可数多的区间内, 这些区间的点集的测度是……它们长度之和, 这个和是 E 的测度的一个上界. 所有这种和的集合有一个下极限 $m_e(E)$, 这就是 E 的外测度.

Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives
Henri Lebesgue

练习 2¹ 令 $E \subset \mathbb{R}$, $m^*(E) = 0$, 证明 $m^*(\{x^2 \mid x \in E\}) = 0$.

解答 2¹ 此处证明个稍强的结论: 令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续可微, 则 $m^*(E) = 0 \implies f(E) = 0$.

若 E 有界 $[-N, N]$ 则情形显然: $m^*(E) \implies E \subset \bigcup_{n\geqslant 0}(a_n, b_n)$, 其中 $\sum_{n\geqslant 0}(b_n - a_n) < \varepsilon$. 故

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) \leqslant m^*\left(\bigcup_{n\geqslant 0} f(a_n, b_n)\right) &\leqslant \sum_{n\geqslant 0} m^*(f(a_n, b_n)) \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 0}(b_n - a_n) \sup_{[-N,N]} |f'| \\ &\leqslant \varepsilon \sup_{[-N,N]} |f'|. \end{aligned}$$

E 无界时, 有 $m^*(f(E)) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} m^*(f(E \cap [-n, n])) = 0$.

练习 2³ 设 $E \subset [0,1]$ 可测, 若 $m(E) = 1$, 证明 $\overline{E} = [0,1]$; 若 $m(E) = 0$, 证明 $E^\circ = \varnothing$.

解答 2³ $[0,1] \setminus \overline{E}$ 是 $[0,1]$ 中开集, 若非空测度恒正, 与 $m(E) = 1$ 矛盾. $m(E) = 0 \implies E^\circ = \varnothing$ 证明同理.

练习 2⁴ 若 $m^*(A) = 0$, 则 $\forall B \subset \mathbb{R}$, $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

解答 2⁴ $m^*(B) \leqslant m^*(A \cup B) \leqslant m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)$.

! 练习 2⁶ 若 $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^n$, 且 E_1 可测, $m(E_1) = m^*(E_2)$, 证明 E_2 可测.

解答 2^6 此题大概只在 E_1 测度有限时成立:

$$m^*(E_2 \setminus E_1) + m^*(E_2 \cap E_1) = m^*(E_2) \implies m^*(E_2 \setminus E_1) = 0.$$

故 $E_2 \setminus E_1$ 和 E_2 均可测.

练习 2^7 有界集 E 可测的充要条件是对任意开集 G 恒有

$$m(G) = m^*(G \cap E) + m^*(G \setminus E).$$

解答 2^7 用此诱导 Carathéodory 条件: $\forall A$ 满足 $m^*(A) < \infty$, 令 G 是满足 $m(G) < m^*(A) + \varepsilon$ 的开集, 则

$$m^*(A) + \varepsilon > m(G) = m^*(G \cap E) + m^*(G \setminus E).$$

由于 ε 任意得到 Carathéodory 条件. 反之显然.

练习 2^8 令 A, B 外测度有限, 证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leqslant m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A).$$

解答 2^8 $m^*(A) - m^*(B) \leqslant m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A)$ 由 $m^*(A) \leqslant m^*(A \setminus B) + m^*(B \cap A)$ 得到. 其余情形同理.

练习 2^9 令 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且前者可测, $m^*(B) < \infty$. 证明

$$m^*(A \cap B) + m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

解答 2^9 由 $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A)$ 和 $m^*(B) - m^*(A \cap B) = m^*(B \setminus A)$ 得到.

! **练习 2^{11}** 令 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 证明 $m(A \cup B) = m(A) + m(B) \iff m(A \cap B) = 0$.

解答 2^{11} 此题大概只在 A, B 测度有限时成立. 由 [2^9] 得到 $m(A) + m(B) = m(A \cap B) + m(A \cup B)$. 测度均有限即得.

练习 2^{12} 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续, 则 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ 是 Lebesgue 零测的.

解答 2¹² 此题对 (局部) Riemann 可积函数或者 Lebesgue 可测函数也是成立的, 此处证明局部 Riemann 可积函数的版本. 只需证明 $m^*(E\cap([-N,N]\times\mathbb{R}))=0$ 即可. f 在 $[-N,N]$ 上 Riemann 可积, 故存在分划 P 满足

$$\sum_{i=0}^{n}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)<\varepsilon,\quad M_i=\sup_{(x_i,x_{i+1}]}f,\quad m_i=\inf_{(x_i,x_{i+1}]}f.$$

故 $E\cap([-N,N]\times\mathbb{R})\subset\bigcup_{i=0}^{n}[x_i,x_{i+1}]\times[m_i,M_i]$, 而后者测度小于 ε.

注. 一般 Lebesgue 可测函数情形要用到 Fubini 定理: $m(E)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_E\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}0\,\mathrm{d}x=0$. 判断其可测性需另外处理.

练习 2¹³ 令 $E\subset\mathbb{R}^n$, $\alpha\in[0,m(E)]$, 则存在 $F\subset E$, $m(F)=\alpha$.

解答 2¹³ 这是测度连续性和 Lebesgue 测度正则性的体现. 考虑 $\overline{\mathbb{D}}_r=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|\leqslant r\}$. 则令 $f(r)=m(\overline{\mathbb{D}}_r\cap E)$. 由测度下半连续有 f 单增且 $\lim_{r\to\infty}f(r)=m(E)$. 由 $m(\overline{\mathbb{D}}_{r+\Delta r}\setminus\overline{\mathbb{D}}_r)\xrightarrow{\Delta r\to0}0$ 得到 f 连续, 故由介值定理得.

练习 2¹⁴ 令 $\{E_n\}_{n\geqslant0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集列, 且 $\sum_{n\geqslant0}m^*(E_n)<\infty$, 证明

$$m^*\left(\limsup_n E_n\right)=m^*\left(\liminf_n E_n\right)=0.$$

解答 2¹⁴ 只需证明 $m^*(\limsup_n E_n)=0$. 易见

$$m^*\left(\bigcap_{k\geqslant0}\bigcup_{n\geqslant k}E_n\right)\leqslant\inf_{k\geqslant0}m^*\left(\bigcup_{n\geqslant k}E_n\right)\leqslant\inf_{k\geqslant0}\sum_{n\geqslant k}m^*(E_n).$$

由 Cauthy 收敛定理即得.

练习 2¹⁶ 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意点集 A,B, 若 $d(A,B)=\inf\{|x,y|\mid x\in A,\ y\in B\}>0$, 证明

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

解答 2¹⁶ 满足这条件的玩意被称为度量外测度, 若外测度是度量的, 则必然是 Borel 的. Lebesgue 外测度的情形由可选取开集分离 A 和 B 得到: 令 $A\subset G$, $B\subset H$. 其中 G,H 是不交开集且 $|m^*(A\cup B)-m^*(G\cup H)|<\varepsilon$ (外测度无限情形显然), 则

$$m^*(A\cup B)\geqslant m^*(G)+m^*(H)-\varepsilon\geqslant m^*(A)+m^*(B)-\varepsilon.$$

由 ε 任意得到.

练习 2.18 $\mathbb{R}^n$ 中集合 E 可测 $\iff$ $E\cap\partial E$ 可测.

解答 2.18 ∂E 闭, 故 E 可测 $\implies$ $E\cap\partial E$ 可测. 反之, $E=E^\circ\cup(E\cap\partial E)$ 故后者可测得到 E 可测.

★ **练习 2.19** 令 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微, 令 $E=\{f'=0\}$, 证明 $m(f(E))=0$.

解答 2.19 由于涉及到的集合可测性未知 (不过 E 是可测的), 因此需要用外测度, 由于 Lebesgue 外测度的外正则性 (也就是存在外测度相等的可测超集), 讨论中以构造上升集列为佳, 故考虑 (导数的) 极大估计

$$g_n(x)=\sup_{|y-x|\leqslant 1/n}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|.$$

则由 $g_n\downarrow_n|f'|$, 故 $E=\bigcap_{k\geqslant1}\bigcup_{n\geqslant1}\{g_n\leqslant {}^1/_k\}$. 故

$$f(E)\subset\bigcap_{k\geqslant1}\bigcup_{n\geqslant1}f\Big(\Big\{g_n\leqslant\frac{1}{k}\Big\}\Big).$$

只需估计 $\bigcup_{n\geqslant1}f(\{g_n\leqslant {}^1/_k\})$ 即可. 为简便, 固定 k, 不妨设 $\{g_n\leqslant {}^1/_k\}=E_n$, 则令

$$E_n\subset\bigcup_{m\geqslant0}(a_m,b_m),\quad b_m-a_m<\frac{1}{n},\quad \bigcup_{m\geqslant0}(b_m-a_m)<m^*(E_n)+\varepsilon.$$

其中 $b_m-a_m<{}^1/_n$ 是为了令 $x_1,x_2\in E_n\cap(a_m,b_m)$, 则依赖 E_n 定义有 $|f(x_1)-f(x_2)|<{}^{|x_1-x_2|}/_k$. 故

$$\operatorname{diam}\big(f(E_n\cap(a_m,b_m))\big)\leqslant\frac{b_m-a_m}{k}.$$

故

$$m^*(f(E_n))\leqslant\sum_{m\geqslant0}\frac{b_m-a_m}{k}<\frac{m^*(E_n)+\varepsilon}{k}.$$

也即是 $m^*(f(E_n))\leqslant {}^{m^*(E_n)}/_k$. 接下来是利用外正则性估计 $\bigcup_{n\geqslant1}f(E_n)$ 的外测度. 令 G_n 可测且 $f(E_n)\subset G_n$, $f(E_n)$ 和 G_n 外测度相等 (只需令 A_m 是包含 $f(E_n)$ 的开集且 $m(A_m)<m^*(f(E_n))+{}^1/_m$, 令 $G_n=\bigcap_{m\geqslant1}A_m$ 即可), 令 $H_n=\bigcap_{k\geqslant n}G_k$, 由 $f(E_n)$ 随 n 上升, 故 $f(E_n)\leqslant H_n$, 且 $m^*(f(E_n))=m^*(H_n)$. 故

$$\sup_n m^*(f(E_n))=\sup_n m(H_n)=m\Big(\bigcup_{n\geqslant1}H_n\Big)\geqslant m^*\Big(\bigcup_{n\geqslant1}f(E_n)\Big).$$

反向的不等式显然, 故 $m^*(\bigcup_{n\geqslant1}f(E_n))=\sup_n m^*(f(E_n))\leqslant \sup {}^{m^*(E_n)}/_k\leqslant {}^1/_k$. 故 $m^*(f(E))\leqslant m^*(\bigcup_{n\geqslant1}f(E_n))\leqslant {}^1/_k$ 得到 $f(E)$ 零测.

注. 一个更直接的想法是考虑开球族 $\{B_x\}_{x\in E}$, 其中 B_x 满足

$$y \in B_x \setminus \{x\} \implies \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant \frac{1}{k}.$$

这样直观地, $E \subset \bigcup_{x\in E} B_x$, $f(E) \subset \bigcup_{x\in E} B_{f(x)}/k$. B_x/k 是球心不变, 半径变为原来的 $1/k$ 得到的. 但是此球族不一定可数, 测度也不好估计, 因此需要用到一些覆盖定理.

引理 (Vitali). 令 $\mathcal{F}$ 是一组 $\mathbb{R}^n$ 中的闭球, 且满足 $a = \sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\}$ 有限, 则存在可数不交球族 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{n\geqslant 0} 5B_n.$$

证明. 各种各样覆盖定理的证明都可以尝试从先选大球再选小球, 首先将球半径分层:

$$\mathcal{F}_n = \left\{ B \in \mathcal{F} \;\middle|\; \operatorname{diam} B \in \left(\frac{a}{2^n}, \frac{a}{2^{n-1}}\right] \right\}, \quad n \geqslant 1.$$

令 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$ 是其某极大不交组; $\mathcal{G}_n$ 是和 $\bigcup_{j=1}^{n-1} \mathcal{G}_j$ 中元素不交的某极大不交组 (可以对所有有理数, 选取含其的不交球然后并起来得到), 令 $\mathcal{G} \coloneqq \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{G}_n$, $\mathcal{G}$ 可数, 记其为 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$. 给定 $B \in \mathcal{F}$, 则不妨令 $B \in \mathcal{F}_k$, 故存在 $B_n \in \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{G}_j$ 满足 $B_n \cap B \neq \varnothing$, 由于 $\operatorname{diam} B_n \geqslant a/2^k$, $\operatorname{diam} B \leqslant a/2^{k-1}$, 故可以得到 $B \subset 5B_n$. □

现在考虑新的 B_x 满足

$$y \in 5B_x \setminus \{x\} \implies \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant \frac{1}{k}.$$

其由一个可数族 $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 $E \subset \bigcup_{x\in E} B_x \subset \bigcup_{n\geqslant 0} 5B_n$. 故

$$m^*(f(E)) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} m^*(f(5B_n)) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{m(5B_n)}{k} \leqslant \frac{10}{k}.$$

最后一个等式是由于 $\sum_{n\geqslant 0} m(5B_n) \subset \sum_{n\geqslant 0} 5m(B_n) \leqslant 10$ (由于 B_n 的球心在 $[0,1]$ 中).

练习 2[21] 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界且 $m^*(E) = \sup\{m(F) \mid F \subset E, F \text{ closed}\}$, 证明 E 可测.

解答 2[21] 这是 Lebesgue 测度的内正则性, F 闭可以换成 F 紧致. 令 G_n, F_n 满足 $F_n \subset E \subset G_n$, 且

$$m(G_n) - \frac{1}{n} \leqslant m^*(E) \leqslant m(F_n) + \frac{1}{n}.$$

故 $m(G_n \setminus F_n) \leqslant 2/n$. 即

$$\bigcup_{n\geqslant 1} F_n \subset E \subset \bigcap_{n\geqslant 1} G_n.$$

且前后两者测度相等, E 仅与可测集差了一个零测集, 故可测.

练习 2.24 令 $E \subset [0,1]$ 且正测，则存在 $x \in E$ 满足 $\forall \delta > 0, m(E \cap (x-\delta, x+\delta)) > 0$.
解答 2.24 若不然，则 $\forall x, \exists \delta_x > 0, m(E \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$. 由于 $[0,1]$ 紧致，选取有限个覆盖 $[0,1]$ 则有 $m(E) \leqslant \sum_{n=1}^{N} m(E \cap (x_n - \delta_{x_n}, x_n + \delta_{x_n})) = 0$ 矛盾.

练习 2.26 令 $E \subset \mathbb{R}$ 可测，$A \subset \mathbb{R}$ 零测，证明 $E \times A$ 零测.
解答 2.26 令 $\{J_n\}_{n \geqslant 0}$ 覆盖 E, $\{I_m\}_{m \geqslant 0}$ 覆盖 A, 则 $\bigcup_{n,m \geqslant 0} J_n \times I_m$ 覆盖 $E \times A$. 且

$$\sum_{n,m \geqslant 0} m(J_n \times I_m) = \sum_{n,m \geqslant 0} m(J_n) m(I_m) = \sum_{n \geqslant 0} m(J_n) \sum_{m \geqslant 0} m(I_m).$$

故当 E 有界时可令 $\sum_{m \geqslant 0} m(I_m) < \varepsilon$ 得到 $E \times A$ 零测. E 无界情形由有界情形可数并得到.

注. 依赖乘积测度的定义, $m(A \times B) = m(A) m(B)$, 此与 2 维上的 Lebesgue 测度基本一致, 差异在于由可测矩形生成的 σ-代数 $\mathcal{M}(\{A \times B \mid A, B \in \mathfrak{L}\})$ 并非是 2 维 Lebesgue 可测集的 σ-代数, 差了一个完备化.

用可数个有界测度上的讨论得到无穷情形上的讨论是一种标准技巧, 依赖的是 Lebesgue 测度的 σ-有限性: 无穷测度集可以表示为可数个有限测度集的并.

练习 2.27 给定 $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界，则证明:

- 存在含 E 的最小闭矩形 I_E;
- 定义内测度 $m_*(E) = m(I_E) - m^*(I_E \setminus E)$; 证明 I_E 可以换成任意含 E 矩形 I;
- E 可测 $\iff m_*(E) = m^*(E)$.

解答 2.27 第一款只需将所有含 E 矩形交起来得到; 第二款只需注意到 $I \setminus I_E$ 是可测的，故

$$m^*((I \setminus I_E) \cap (I \setminus E)) + m^*((I \setminus I_E)^c \cap (I \setminus E)) = m^*(I \setminus E).$$

故 $m(I \setminus I_E) + m^*(I_E \setminus E) = m^*(E \setminus E)$, 即为所求.

练习 2.30 设 E 有界 Lebesgue 可测，则 E Jordan 可测 $\iff m(\partial E) = 0$.
解答 2.30 令多边形 P, Q 满足 $P \subset E \subset Q$, 故 $\partial E \subset \overline{Q \setminus P}$. 后者是测度小于等于 $m(P \setminus Q) + m(\partial(P \setminus Q))$. 由于 $\partial(P \setminus Q)$ 零测, $m(P \setminus Q)$ 可以任意小得到 $m(\partial E) = 0$; 反之, 令 $\{I_n\}_{n \geqslant 0}$ 是覆盖 ∂E 的矩形且 $\sum_{n \geqslant 0} m(I_n) < \varepsilon$, 不妨设其都是开的, 由于 ∂E

紧致故存在有限子覆盖 $\{I_n\}_{n=0}^N$, 则 $Q = \overline{\bigcup_{n=0}^N I_n}$ 和 $P = \overline{E \setminus \bigcup_{n=0}^N I_n}$(可能是空) 即为所求多边形.

图 3: Wolfram Research 公司的 Logo 和八云蓝 »
https://www.wolfram.com/
https://thwiki.cc/%E5%85%AB%E4%BA%91%E8%93%9D

第三章　可测函数

很遗憾……RIEMANN 可积函数对序列极限不封闭，但是如果我们要考虑包括连续函数的序列极限封闭函数族，那么 BOREL 可测函数就自然而然地出现了。

练习 3^4　令 $f \in \mathfrak{L}^0(E)$, 则证明 $f^{-1}(\{a\})$ 可测, 且讨论逆否情形, 和再加上 $\operatorname{im} f$ 可数的情形.

解答 3^4　$f^{-1}(\{a\}) = \bigcap_{m\geqslant 1}\{|f-a| < 1/m\}$ 可测; 反之不成立, 令 F 不可测, 故 $\operatorname{card} F = \operatorname{card}\mathbb{R}$, 随意给出一个双射即可. 若 $\operatorname{im} f$ 可数则 f 显然可测: $\{f > a\} = \bigcup_{b>a} f^{-1}(\{a\})$ 可测.

练习 3^5　已知 $f\colon E \to \mathbb{R}$, 若 $|f|^2$ 可测, 则 f 是否可测?

解答 3^5　显然不是, 除非 E 零测. 令 $F \subset E$ 不可测, $f = \mathbb{1}_F - \mathbb{1}_{E\setminus F}$ 即满足题意且不可测. 若 $\{f > 0\}$ 可测, 则 $\{f \geqslant 0\}$ 可测. 且 $\{f > a\} = E \setminus (\{|f|^2 \leqslant a\} \cup \{f \geqslant 0\})$ 可测 $(a > 0)$, $(a < 0)$ 同理, 故 f 可测. 正测集中不可测集的存在性可见 [3^{10}].

练习 3^6　若 $f\colon E \to \mathbb{R}$, 且紧集上可测, 证明 $f \in \mathfrak{L}^0(E)$.

解答 3^6　易见 E 与其内的一个 F_σ 集相差一个零测集, 而 f 在 F_σ 可测 (由于闭集可以认为是可数个紧集的并), 故 $f \in \mathfrak{L}^0(E)$.

练习 3^7　令 $f \in \mathfrak{L}^0(E)$ 且几乎处处有限. 证明 $\forall\delta > 0$, $\exists E_\delta \subset E$, $m(E\setminus E_\delta) < \delta$, $\|f\mathbb{1}_{E_\delta}\|_{\sup} \leqslant M$.

解答 3^7　令 $g(r) = m(\{|f| \leqslant r\})$, 则 $\lim_{r\to\infty} g(r) = m(E) < \infty$. 由 g 单增可以得到 $r \geqslant M$ 时 $m(E) - g(r) < \delta$, 故以此确定 M 和 E_δ.

练习 3^8　令 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 可微, 证明 f' 可测.

解答 3^8　只需注意到 $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n(f(x + 1/n) - f(x))$ 是可测函数的极限即可 (端点的左右导数不用讨论, 因为端点零测).

练习 3¹⁰ 设 $f \in C(\mathbb{R})$, $g \in \mathfrak{L}^0([a,b])$, 证明 $f \circ g \in \mathfrak{L}^0([a,b])$, 若 $\operatorname{im} f \subset [a,b]$, 找到 $g \circ f$ 不一定可测的反例.

解答 3¹⁰ 第一问只需注意到开集的原像是开集即可. 第二问仅阐述一个构造思路 (重点是零测集打到正测集的构造 (比如空间填充曲线), 其余是通用的):

1. 考虑 $\mathbb{V} = [0,1)/\mathbb{Q}$, 其代表元的集合是 Vitali 不可测集 (仍即为 $\mathbb{V}$). 若 $E \subset \mathbb{V}$ 可测, 则 $(E+r)_{\bmod \mathbb{Z}}$ 可测且 $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E+r)_{\bmod \mathbb{Z}} \subset [0,1)$, 故 $m(E) = 0$. 因此若 $m(E) > 0$(不妨令 $E \subset [0,1]$), 则 $E = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E \cap (\mathbb{V}+r)_{\bmod \mathbb{Z}}$, 若 $E \cap (\mathbb{V}+r)_{\bmod \mathbb{Z}}$ 均可测, 则必然零测, 故 $m(E) = 0$, 因此矛盾, 故正测集中存在不可测集;
2. 考虑 Cantor 函数 $C(x)$, 则 $h(x) = C(x) + x$ 是 $[0,1] \to [0,2]$ 的严格单调连续函数, 故其逆 f 亦连续. 令 $A \subset [0,1]$ 零测且满足 $h(A)$ 正测 (可令 A 为 Cantor 集). 则 $h(A)$ 含不可测集 V. 故 $f(V) \subset A$ 零测, 故 Lebesgue 可测, 且非 Borel 可测 (若 Borel 可测则 $h(f(V))$ Borel 可测矛盾);
3. 令 $g = \mathbb{1}_{f(V)}$, 则 $(g \circ f)^{-1}(\{1\}) = V$ 不可测.

注. 这么弯弯绕主要是因为若 f 连续, 则必然是 Borel 可测的, 故 $g^{-1}(E)$ 必然是 Lebesgue 可测集而非 Borel 可测集, 此情形判断是不容易的, 因此可以将 f 上升为连续同胚来诱导 Borel 可测集之间的关系: 诱导一个可测集打到不可测集, 则前面的可测集必然是非 Borel 可测的. 因此只需令 $g^{-1}(E)$ 是那个可测集即可, 剩下的由同胚对应就显然了.

练习 3¹² 令 $f \in \mathfrak{L}^0((0,1))$ 处处有限恒正, 探讨存在 y_0 满足 $m(\{f > y_0\}) \geqslant 1/2$, 且 $y > y_0$ 时 $m(\{f > y\}) < 1/2$ 的充要条件.

解答 3¹² 令 $g(r) = m(\{f > r\})$, 则由于是有限测度, 由测度的连续性:

$$g(r) - g(r^+) = m(\varnothing) = 0;$$
$$g(r^-) - g(r) = m(g^{-1}(r)).$$

令 $y_0 = \sup(g^{-1}([1/2, 1]))$, 若 $g(y_0) < 1/2$ 则题设不满足, 若 $g(y_0) \geqslant 1/2$ 则由 g 右连续同样不满足题设, 故须有 $g(y_0) = 1/2$ 才行. 也即 $\exists y_0$ 满足 $m(\{f > y_0\}) = 1/2$.

练习 3¹³ 令 $E \subset \mathbb{R}^n$ 测度有限, $\{f_n\}_{n\geqslant 0} \subset \mathfrak{L}^0(E)$, $g_m = \sup_{n\geqslant m} |f_n|$, 证明 $f_\bullet \xrightarrow{\text{a.e.}} 0 \iff g_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} 0$.

解答 3¹³ 若 $g_m \xrightarrow{\text{mea.}} 0$, 则 g_m 有几乎处处收敛子列, 由于 g_m 随 m 单调, 故等价于 g_m 几乎处处收敛到 0, 故 f_n 亦然. 反之, 若 f 几乎处处收敛到 0, 当 n 极大时,

$|f_n| < \varepsilon$, 故 $m > n$ 时 $|g_m| < \varepsilon \implies g_m$ 几乎处处收敛, 由有限测度得到依测度收敛.

! **练习 3¹⁵** 令 E 上的可测函数列 $\{f_\bullet\}, \{g_\bullet\}$ 依测度收敛到 f 和 g, 证明 $f_\bullet g_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} fg$.

解答 3¹⁵ 此题大概只在 E 有限测度时成立.

由于 $f_\bullet$ 依测度收敛到 f, 故存在几乎处处收敛子列 $f_{\bullet\bullet}$, $g_\bullet$ 在此子列上亦依测度收敛故也存在几乎处处收敛子列 $f_{\bullet\bullet\bullet}g_{\bullet\bullet\bullet}$(由 f 和 g 几乎处处有限得到), 也既是 $f_\bullet g_\bullet$ 存在几乎处处收敛到 fg 的子列, 由有限测度故是依测度收敛子列. 若整个序列不依测度收敛, 则存在子序列 (仍记为 $f_\bullet g_\bullet$) 和某个 δ 满足

$$m(\{|f_\bullet g_\bullet - fg| > \varepsilon\}) \geqslant \delta.$$

则由于新的 $f_\bullet$ 和 $g_\bullet$ 仍依测度收敛到 f 和 g, 故存在依测度收敛子列 $f_{\bullet\bullet}g_{\bullet\bullet} \xrightarrow{\text{mea.}} fg$, 与 $m(\{|f_\bullet g_\bullet - fg| > \varepsilon\})$ 恒 $\geqslant \delta$ 矛盾.

注. 无穷测度情形的反例可以利用 $\mathbb{1}_{[n,n+1)}$ 来做文章, 比如 $f_n(x) = g_n(x) = x + \mathbb{1}_{[n,n+1)}/n$.

练习 3¹⁶ 令 $f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} f$, 证明 $|f_\bullet| \xrightarrow{\text{mea.}} |f|$, 若 $f_\bullet \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} g$, 则 $f \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} g$.

解答 3¹⁶ 第一问由 $||f_\bullet| - |f|| \leqslant |f_\bullet - f|$ 得到; 第二问由存在几乎处处收敛子列得到.

练习 3¹⁷ 令非负 $\{f_\bullet\} \cup \{f\} \subset \mathfrak{L}^0(E)$, 且 $f_\bullet^2 \xrightarrow{\text{mea.}} f^2$, 证明 $f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} f$.

解答 3¹⁷ 令 $E_1 = \{f \geqslant 1\}$, $E_0 = f^{-1}([0,1))$. 则在 E_1 上, $|f_\bullet - f| \leqslant |f_\bullet^2 - f^2|$, 故在 E_1 上依测度收敛. 对 E_0 (令 $\varepsilon < 1$):

$$|f_\bullet - f| > \varepsilon \iff |f_\bullet^2 - f^2| > \varepsilon|f_\bullet + f| \implies |f_\bullet^2 - f^2| > 2\varepsilon f + \varepsilon^2 \implies |f_\bullet^2 - f^2| > 3\varepsilon.$$

故 $\{|f_\bullet - f| > \varepsilon\} \subset \{|f_\bullet^2 - f^2| > \varepsilon\}$, 故依测度收敛.

练习 3¹⁸ 令 $f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} f$ 且 $f_\bullet \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} f_{\bullet+1}$, 证明 $f_\bullet \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

解答 3¹⁸ 由存在几乎处处收敛列直接得到.

练习 3¹⁹ 令 $\{f_\bullet\} \subset \mathfrak{L}^0([a,b])$, 满足 $f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} f$, 令 $g \in C(\mathbb{R})$ 一致连续, 证明 $g \circ f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} g \circ f$.

解答 3[19] 由一致连续, $|f_\bullet - f| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |g\circ f_\bullet - g\circ f| \leqslant \varepsilon$. 故

$$\{\,|g\circ f_\bullet - g\circ f| > \varepsilon\,\} \subset \{\,|f_\bullet - f| > \varepsilon\,\}.$$

取极限即得.

练习 3[20] 令 $m(E) < \infty$, 几乎处处有限 $\{f_\bullet\}\cup\{f\} \subset \mathfrak{L}^0(E)$. 则

$$f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} f \iff \forall\{f_{\bullet\bullet}\}\exists f_{\bullet\bullet\bullet}(f_{\bullet\bullet\bullet} \xrightarrow{\text{a.e.}} f).$$

解答 3[20] 一个方向由 Riesz 定理直接得到. 另一个方向见 [3[15]] 的证明.

练习 3[21] 令 $f\colon E \to \mathbb{R}$ 几乎处处有限, 证明 $\forall\varepsilon, \exists E_\varepsilon$ 满足 $m(E\setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ 且 $f|_{E_\varepsilon}$ 连续, 则 f 可测.

解答 3[21] 令 $g = f\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geqslant 1} E_{1/n}}$. 则 g 是可测函数的极限且 $\{\,f \neq g\,\}$ 零测, 故 f 可测.

练习 3[22] 令 E 测度有限, $f \in \mathfrak{L}^0(E)$ 几乎处处有限, 则存在 E 上的连续函数列几乎处处收敛与 f.

解答 3[22] 见原书定理 3.14; 同样地或利用 Lusin 定理和 Tietze 延拓定理, 定理 3.14 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Tietze 延拓定理.

> 引理 (原书定理 3.14). 若 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则对任意正数 ε, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 g, 使得
>
> $$m(\{\,f \neq g\,\}) < \varepsilon.$$
>
> 若 $f(x)$ 还有界: $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall x \in E)$. 则连续函数 g 还可以满足 $|g(x)| \leqslant M$, $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$.

练习 3[23] 令 $f \in \mathfrak{L}^0([a,b])$ 几乎处处有限, 证明存在递减函数 g 满足

$$m(\{\,f > r\,\}) = m(\{\,g > r\,\}).$$

解答 3[23] 令 $R(r) = m(\{\,f > r\,\})$, 则 g 满足

$$R(r) \overset{\text{a.e.}}{=} \sup\{\,x - a \mid g(x) > r\,\}.$$

令 $g(x) = \sup\{\,r \mid x - a < R(r)\,\}$. 则易见单减上半连续. 由测度连续性知 $x \in (a,b)$ 时 $|g(x)| < \infty$. 且

$$\{\,g > r\,\} = [a, R(r) + a).$$

即得所求.

练习 3²⁴ 令 f 可测, 证明存在实数列 $\{a_\bullet\}$ 和可测集列 $\{E_\bullet\}$ 满足

$$f = \sum a_\bullet \mathbb{1}_{E_\bullet}.$$

解答 3²⁴ 令简单函数逼近 f:

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_\bullet \to f, \quad \phi_\bullet = \sum_\circ a_{\bullet\circ} \mathbb{1}_{E_{\bullet\circ}}, \quad \phi_{\bullet+1} - \phi_\bullet = \sum_\circ (a_{\bullet+1,\circ} - a_{\bullet\circ}) \mathbb{1}_{E_{\bullet\circ} \cap E_{\bullet+1,\circ}}.$$

故 $f = \sum_{\bullet,\circ} (a_{\bullet+1,\circ} - a_{\bullet\circ}) \mathbb{1}_{E_{\bullet\circ} \cap E_{\bullet+1,\circ}}$. 收敛性易见.

练习 3²⁵ 令 $f \in C([a,b])$, 令 $g(x) = \operatorname{card} f^{-1}(\{x\})$, 证明 g 可测.

解答 3²⁵ 不妨设 $[a,b] = [0,1]$, 考虑 2 进分解: $[0, 1/2^n), [1/2^n, 2/2^n), \ldots, [2^n-1/2^n, 1]$. 记为 $I_{n(k)}, k \in 1, \ldots, 2^n$. 则

$$\{ g \leqslant r \} \subset \{ x \mid x \text{ is contained in } r\ f(I_{n(k)})\text{s} \} = \Big(\sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})} \Big)^{-1}([0,r]).$$

而 $\sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})}$ 易见是可测且随 n 上升的, 故 $\lim_m \sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})}$ 存在且可测. 若 x 满足 $\operatorname{card} f^{-1}(\{x\}) \leqslant r$, 那么当 n 很大时, $I_{n(k)}$ 能分隔 $f^{-1}(\{x\})$, 此时有 $\{ g \leqslant r \} = (\sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})})^{-1}([0,r])$. 故

$$\{ g \leqslant r \} = \bigcap_n \Big(\sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})} \Big)^{-1}([0,r]).$$

即 g 可测.

注. g 的积分值恰好是函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差, 见 [5¹⁸] 的注.

练习 3²⁶ 令 $x \in [0,1]$.

$$f(x) = \max\Big\{ a_n \,\Big|\, x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}, \lim a_\bullet \neq 9 \Big\}.$$

证明 f 可测.

解答 3²⁶ 令 $F_k = \{ x \mid f(\lfloor 10^k x \rfloor / 10^k) \leqslant 8 \}$, 则 F_k 是前 k 位中不含 9 代表的 x, 归纳讨论得到

$$F_k = [0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{m=1}^{10^{j-1}} \Big[\frac{10m-1}{10^j}, \frac{m}{10^{j-1}} \Big), \quad m(F_k) = \Big(\frac{9}{10}\Big)^k, \quad f^{-1}(\{9\}) = \bigcup_{k\geqslant 1} F_k^c.$$

故 $f \overset{\text{a.e.}}{=} 9$ 可测.

练习 3²⁷ 同上题, 考虑 x 和 y 的极限非 9 的十进制展开 $\sum a_\bullet/10^\bullet$, $\sum b_\bullet/10^\bullet$, 令 $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, $f(x,y) = \inf\{n \mid a_n = b_n\}$. 则 f 可测且几乎处处有限.

解答 3²⁷ 为了方便仅讨论 $f|_{[0,1)^2}$, 讨论得到

$$f^{-1}([1,n]) = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{k_1,k_2=0}^{10^{k-1}}\bigcup_{m=1}^{10}\left[\frac{10k_1+m-1}{10^{k+1}}, \frac{10k_1+m}{10^{k+1}}\right) \times \left[\frac{10k_2+m-1}{10^{k+1}}, \frac{10k_2+m}{10^{k+1}}\right).$$

故可测, 几乎处处有限亦得.

练习 3²⁸ 在 Lusin 定理中, 令容差递降, 得到对应的闭集 $F_\bullet$, 可测函数 f 在 $F_\bullet$ 连续, 那么是否 f 在 $\bigcup F_\bullet$ 上连续?

解答 3²⁸ 否. 考虑以下思路.

1. 不妨将命题加强为任意零测集 N, $f|_{N^c}$ 都不连续, 为方便记零测集集合为 $\mathcal{N}$;
2. 考虑一个特殊的集合 A, 令 $f = \mathbb{1}_A$, A 满足

$$m(A) > 0, \quad \forall N \in \mathcal{N},\ x \in A \setminus N,\ \delta > 0, \quad (x-\delta, x+\delta) \cap A^c \cap N^c \neq \varnothing.$$

而这样的反例有很多, 以下是一个例子:

令 $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n\geqslant 0}$ 是有理数的一个排列, 考虑

$$A = \left(\bigcup_{n\geqslant 0}\left(r_n - \frac{\varepsilon}{2}, r_n + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^c.$$

$f = \mathbb{1}_A$. A 显然正测, 故考虑 $x \in A \setminus N$, 其任意邻域 I 中含有有理数 r, 因此存在某区间 J 不含 x 含 r 作为 A^c 的补集, 故择 $y \in J$ 即可. 以上的选取槽测度均为正, 因此不因零测度集 N 改变.

练习 3²⁹ 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 测度有限, 几乎处处有限的可测函数列 $\{f_\bullet\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f, 试证存在 E 的可测子集列 $\{E_\bullet\}$ 使得 $m(E \setminus \bigcup E_\bullet) = 0$, 而 $\{f_\bullet\}$ 在每个 $E_\bullet$ 上一致收敛于 f; 能不能在 $\bigcup E_\bullet$ 上一致收敛呢?

解答 3²⁹ 第一个是 Egorov 定理的直接推论; 第二个显然是不行, 例子是 $f_n(x) = x^n \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$, 易见其在 N^c 上都非一致收敛, 其中 $N \in \mathcal{N}$ 是任意零测集.

练习 3³⁰ 设 f, $f_\bullet$ 是区间 $[a,b]$ 上处处有限且可测的函数, 还满足 $|f_\bullet| < M_\bullet$, $\lim f_\bullet \overset{\text{a.e.}}{=} f$. 证明对 $\forall\delta > 0$, 存在 E_δ 满足 $m([a,b] \setminus E_\delta) < \delta$, $\exists M$, $\sup|f_\bullet \mathbb{1}_{E_\delta}| + |f\mathbb{1}_{E_\delta}| < M$.

解答 3[30] 随意找一个近一致收敛子集 F 交上一个令 f 在其上有界的集合 G, 容易保证 $m([a,b]\setminus(F\cap G))<\delta$: 令 $F(x)=m(|f|^{-1}([0,x]))$, 其单增且极限为 $b-a$, 故考虑令 $F(n)>b-a-{}^{\delta}/_{2}$ 的 x 即可, M 的存在性由一致收敛得到.

! **练习 3[31]** 设 $f\in C(\mathbb{R})$, $\{g_\bullet\}\subset\mathfrak{L}^0(E)$ 且 $\{\sup|g_\bullet|\}$ 一致有界. 试证明 $f\circ g_\bullet\xrightarrow{\text{mea.}} f\circ g$. 去掉一致有界能否成立?

解答 3[31] 此题第二问大概只在 E 测度有限时成立:

第一问见 [3[19]], 第二问见 [3[20]], 由几乎处处收敛子列立即得到.

练习 3[32] 构建一个处处不收敛但依测度收敛的函数列.

解答 3[32] 只需令 $f_\bullet$ 在扫遍定义域的小区间里乱跑就行, 令 $f_\bullet\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $I_{m(k)}$ 是 $[0,1]$ 的二进分解, 令 $f_\bullet$ 与 $\mathbb{1}_{I_{m(k)}}$ 随意一一对应即可.

图 4: 宇佐见莲子 (右一) 和玛艾露贝莉 · 赫恩. 出自四面楚歌, いよいん。, 夢現, 2008. »

第四章 Lebesgue 积分

这并非我偏爱复杂事物, 而是为解决已有的问题, 我在书中引进一个积分定义, 该定义比 Riemann 积分更具普遍性, 并把 Riemann 积分作为一个特例.

Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives
Henri Lebesgue

练习 4² 令 $m(E) < \infty$, $f \in \mathfrak{L}^0_{\geqslant 0}(E)$ 且几乎处处有限, 则

$$\int f < \infty \iff \sum_{k\geqslant 1} km(\{k \leqslant f < k+1\}) < \infty.$$

解答 4² 显然, $\sum_{k\geqslant 1} km(\{k \leqslant f < k+1\}) \leqslant \int f \leqslant \sum_{k\geqslant 1}(k+1)m(\{k \leqslant f < k+1\})$. 后者的测度不大于 $\sum_{k\geqslant 1} km(\{k \leqslant f < k+1\}) + m(E)$, 因此两者同时有限.

练习 4³ 令 $m(E) < \infty$, $f \in \mathfrak{L}^0_{\geqslant 0}(E)$, 则

$$\int f < \infty \iff \sum_{k\geqslant 1} m(\{f \geqslant k\}) < \infty.$$

解答 4³ 几乎处处有限时, 有 $\sum_{k\geqslant 1} m(\{f \geqslant k\}) = \sum_{k\geqslant 1} km(\{k \leqslant f < k+1\})$, $f^{-1}(\{\infty\})$ 测度非零时两边都发散.

练习 4⁴ 令 $f \in \mathfrak{L}^0(E)$, $g, h \in \mathfrak{L}^1(E)$, $g \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} f \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} h$, 证明 $f \in \mathfrak{L}^1(E)$.

解答 4⁴ 不妨考虑均非负, 则 $|f| \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} |g| + |f|$, 故 $\|f\|_1 \leqslant \|g\|_1 + \|h\|_1$ 有限.

练习 4⁵ 设 $f \in \mathfrak{L}^1([0,1])$, 证明对任意正整数 k 有 $x^k f(x) \in \mathfrak{L}^1([0,1])$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

解答 4⁵ 由控制收敛定理直接得到.

练习 4⁶ 令 $f \in \mathfrak{L}^1(E)$, 则

$$\int g \text{ exists} \implies \int (f+g) \text{ exists and } = \int f + \int g.$$

解答 4⁶ 不妨令 $\int g^- < \infty$, 则 $(f+g)^- \leqslant f^- + g^-$, 因此 $\int(f+g)$ 存在, 若 $\int g^+ = \infty$, 则 $(-f)^+ + (f+g)^+ \geqslant g^+ \implies (f+g)^+ \geqslant g^+ - (-f)^+$, 故 $\int(f+g) = \infty$. $\int g^+ < \infty$ 时显然成立.

练习 4⁷ 若 f 是有界可测集 E 上的非负可测函数, 并且它的积分具有绝对连续性, 试证 $f \in \mathfrak{L}^1(E)$.

解答 4⁷ 存在 δ 满足 $m(F) < \delta \implies \int_F |f| < 1$, 故考虑 $E \cap [n\delta, (n+1)\delta]$, 则 $\int |f| < {}^{\operatorname{diam} E}/_{\delta} + 1$.

练习 4⁸ 如果把 Levi 定理的条件改为, $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ 是 E 上的可积函数的单调列 (f_n 不必非负, 但对于 n 递增或递减), 证明: 这时极限函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 的积分仍有意义, 定理结论仍能成立 (积分与极限可交换).

解答 4⁸ 由于 f_1 可积, 减去 f_1 即可.

练习 4¹² 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可积函数, 试证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在下列类型函数 g, 使 $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.

- 有界可测函数;
- 简单函数;
- 连续函数;
- 阶梯函数;

解答 4¹² 一步一步来.

- 令 $A_n = \{|f| < n\}$, $f_n = f\mathbb{1}_{A_n}$, 则由控制收敛定理, $\|f_n - f\|_1 \to 0$;
- 定义;
- 用简单函数逼近 ϕ 后是一些有界可测函数, 设界为 M, $\|\phi - f\|_1 < \varepsilon$. 由原书定理 3.14, 存在连续函数 g 与 ϕ 在一个测度小于 ε 的集合上相等. 那么

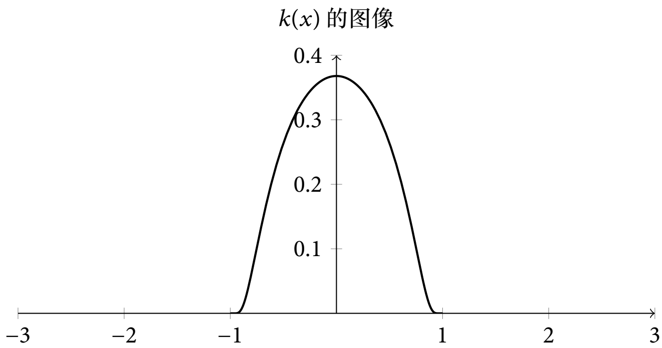
$$\|g-f\|_1 \leqslant \|g-\phi\|_1 + \|\phi - f\|_1 \leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

  故逼近成立.
- 用阶梯函数逼近上文的 g 即可, 由于其 Riemann 可积, 这是可行的.

注. 下面是一个光滑紧支版本的命题:

命题. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可积函数, 试证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使 $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.

证明. 这个比较麻烦, 稍微需要点简单的估计: 不妨只在某个大圆里讨论, 大圆 D 满足 $\int_{D^c}|f| < \varepsilon$, 用简单函数 ϕ 逼近 f, 再用有限个开矩形控制与 ϕ 的支集的对称差得到 $\|\Phi - f\|_1 < {}^{\varepsilon}/_2$, 其中 Φ 是某个底集合都是开矩形 (可以相交) 的有界简单函数 $\sum_{j=0}^N a_j \mathbb{1}_{E_j}$. 令 $k(x) = \exp({}^{-1}/_{1-|x|^2})\mathbb{1}_{\mathbb{D}}$ 作为卷积核:



这个卷积核是 C_c^∞ 的, 同时也是良好的单位逼近. 考虑 $k_n(x) = c_n k(nx)$, 其中 c_n 满足

$$c_n \int k(nx)\,\mathrm{d}x = 1.$$

令 $g_n = \Phi * k_n$, 则

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g_n(x+\Delta x) - g_n(x)}{\Delta x} - \Phi * k_n'(x)\right| \\
\leqslant{}& \sup|\Phi| \int_D \left|\frac{k_n(x+\Delta x - y) - k_n(x-y)}{\Delta x} - k_n'(x-y)\right| \mathrm{d}y \\
\leqslant{}& \sup|\Phi| \cdot \sup|k_n''| \cdot m(D)\Delta x.
\end{aligned}$$

因此 $(\Phi * k_n)' = \Phi * k_n'$, 多元偏导情形亦然, 故均是光滑的. 由于 $\operatorname{supp}\Phi \subset D$, 故 $\operatorname{supp}(\Phi * k_n) \subset \{x+y \mid x \in D, y \in \operatorname{supp} k_n\}$ 也是有界 (故紧致的). 而

$$\begin{aligned}
\|\Phi - \Phi * k_n\|_1 &= \int_D \left|\Phi(x) - \int_D \Phi(x-y)k_n(x-y)\,\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_D \int_D |\Phi(x) - \Phi(x-y)| k_n(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

考虑 Φ 底集合的开矩形边长最小值 d: $d = \min \operatorname{diam} E_\bullet$, 则当 $n > {}^{114514}/_d$ 时, 考虑

$$J_n := \bigcup B_{1/n}(x) \subset E_\bullet, \quad B_r(x) = \{y \mid |y-x| < r\}.$$

$x \in J_n$ 的好处是 $\operatorname{supp}(y \mapsto k_n(x-y)) \subset E_\bullet$, 也就是 Φ 的值不会发生变化, 虽然这是一个粗糙的估计, 但是很直观. J_n 带来的误差是:

$$m\Big(\bigcup_{j=0}^N E_j \setminus J_n\Big) \leqslant \sum_{j=0}^N m(E_j \setminus J_n) \leqslant (N+1)\left(\left(\operatorname{diam} D + \frac{1}{n}\right)^2 - \operatorname{diam}^2 D\right).$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int_D \int_D |\Phi(x)-\Phi(x-y)|k_n(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
\leqslant\ &\int_D \Big(\int_{J_n}+\int_{\bigcup_{j=0}^N E_j\setminus J_n}\Big)|\Phi(x)-\Phi(x-y)|k_n(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
=\ &\int_D \int_{\bigcup_{j=0}^N E_j\setminus J_n} |\Phi(x)-\Phi(x-y)|k_n(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
\leqslant\ &2M(N+1)\operatorname{diam}^2 D\Big(\Big(\operatorname{diam} D+\frac{1}{n}\Big)^2-\operatorname{diam}^2 D\Big).
\end{aligned}$$

(这玩意看上去有点吓人, 但实际上只需要直到其随 n 增大趋向于 0 即可) 故由

$$\|g_n-f\|_1 \leqslant \|g_n-\Phi\|_1+\|\Phi-f\|_1.$$

得到 $\|g_n-f\|_1 \to \varepsilon$, 令 $\varepsilon\to 0$ 即可. □

这解答虽然长了些, 但本质上不难. 这题是想说, 光滑紧支函数空间 C_c^∞ 在 $\mathfrak{L}^1$ 空间稠密, 这是测度正则性所决定的. 解答中用到的卷积核技术非常 (古老且经典) 重要, 这样的 k_n 我们会称之为光滑单位逼近. 其在一般的拓扑空间 (比如拓扑群, 此时当然不是光滑的) 也是一种重要的标准技术. 解答中给的卷积核的例子是没有计算意义的, 只需要知道其光滑紧支即可. ~~这一题花了好多纸, 又浪费纸了.~~

不太清楚上课的安排, 也许作业做到此题的时候还没有上 Fubini 定理, 因此没用.

练习 4[13] 证明:

1. Levi 定理 (Mct, Monotone Convergence Theorem), 逐项积分定理 (Tit, Term-wise Integration Theorem), Fatou 引理 (Fl, Fatou's Lemma) 和控制收敛定理 (Dct, Dominated Convergence Theorem) 互相等价;
2. 控制收敛定理中的几乎处处收敛可以改为依测度收敛;
3. 用 Egorov 定理证明有界收敛定理.

解答 4[13] 易见 Mct $\iff$ Tit, 因此下文不再区分.

1. 1. Mct $\iff$ Dct. ($\Longrightarrow$): 用 $g_n=\inf_{k\geqslant n} f_k$ 得到上升列和 $h_n=\sup_{k\geqslant n} f_k$ 得到下降列. 考虑 $F+g_n$ 或 h_n-F 得到:

$$\begin{aligned}
\int \lim g_\bullet + \int F = \lim \int (F+g_\bullet) \leqslant \int F + \limsup \int f_\bullet,\\
\int \lim h_\bullet - \int F = \lim \int (h_\bullet - F) \geqslant \liminf \int f_\bullet - \int F.
\end{aligned}$$

由 $\lim g_\bullet \overset{\text{a.e.}}{=} \lim h_\bullet \overset{\text{a.e.}}{=} f$ 得到 $\limsup \int f_\bullet \leqslant \inf f \leqslant \liminf \int f_\bullet$, 即证.

($\Longleftarrow$): 由 Dct 只需考虑 $\int f = \infty$ 的情形. 存在非负简单函数 $\phi = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{E_j}$ 满足 $M < \int \phi < \infty$ (小于无穷可以直接从原书引理 4.1 得到: $\int \phi \leqslant \lim_n \int \phi \mathbb{1}_{\mathbb{D}_n}$). 令 $A_n = \{ f_n > \phi/2 \}$, 故 $A_n \to \bigcup_{j=1}^N E_j$, 考虑 n 很大时, $m(\bigcup_{j=1}^N E_j - A_n) < \varepsilon$. 则

$$\int f_n \geqslant \int_{A_n} f_n \geqslant M - \sup |\phi| \varepsilon.$$

故 $\int f_\bullet \to \infty$.

2. Dct $\iff$ Fl. ($\Longrightarrow$): 用 $g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k$ 得到上升列, 记 $\lim g_\bullet = g$. 易见 $\liminf \int f_\bullet \geqslant \lim \int \inf_{k \geqslant \bullet} f_k = \lim \int g_\bullet$, 故 $\lim \int g_\bullet = \infty$ 时 Fl 平凡成立. 只考虑 $\lim \int g_\bullet < \infty$ 的版本. 存在 $\{\phi_n\}_{n \geqslant 0}$ 简单函数族, 且 $\int \phi_n < \infty$, $\int \phi_n \to \int g$. 由第一款中 A_n 处理得到

$$\sup \int g_\bullet \geqslant \lim \int \phi_\bullet = \int g.$$

故 $g \in \mathfrak{L}^1(E)$. 故

$$\int \liminf f_\bullet = \int \lim g_\bullet \overset{\text{Dct}}{=\!=} \lim \int g_\bullet \leqslant \liminf \int f_\bullet.$$

($\Longleftarrow$): 见原书定理 4.15.

3. Fl $\iff$ Mct. ($\Longrightarrow$): $f_\bullet \uparrow f$. 故 $\int f \geqslant \sup \int f_\bullet$. 另一个方向由 Fl:

$$\int f = \int \liminf f_\bullet \leqslant \liminf \int f_\bullet = \sup \int f_\bullet.$$

($\Longleftarrow$): 见原书定理 4.14.

2. 仅需证明依测度收敛下的 Fl. 若 $\int f > \liminf \int f_\bullet$, 故选取子列 $\lim \int f_{\bullet\bullet} \leqslant \int f - \varepsilon$. 但此子列下有几乎处处收敛子列, 与寻常的 Fl 矛盾.

3. 对 $\delta > 0$, $\exists E_\delta \subset E$, $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ 且 $f_\bullet|_{E_\delta} \rightrightarrows f|_{E_\delta}$. 因此 $\int_{E_\delta} f_\bullet \to \int_{E_\delta} f$, 剩余的误差由于有界 M 得到

$$\left| \int f_\bullet - \int f \right| \leqslant \left| \int_{E_\delta} f_\bullet \to \int_{E_\delta} f \right| + 2M\delta.$$

令 $\delta \to 0$, 有界收敛定理成立.

练习 4[17] 若 f 在 E 上可积, 并且在 E 的任意可测子集 A 上有 $\int_A f = 0$, 证明在 E 上 $f \overset{\text{a.e.}}{=} 0$.

解答 4[17] 只需考虑 $E_n = \{ f > 1/n \}$ 得到 $m(E_n) = 0$. 故 $f^+ \overset{\text{a.e.}}{=} 0$. f^- 同理.

练习 4[18] 若 $f \in \mathfrak{L}^1(E)$, 并且 $f \overset{\text{a.e.}}{>} 0$, 存在可测集 $A \subset E$, 使得 $\int_A f = 0$, 证明 $m(A) = 0$.

解答 4[18] 若 $m(A) > 0$, f 在其上几乎处处 > 0, 则令 $E_n = \{x \in A \mid f(x) > {}^1/_n\}$, 由测度连续性必然存在 n 满足其 > 0. 故

$$\int_A f = \int_{E_n} f + \int_{A \setminus E_n} f \geqslant \int_{E_n} f \geqslant \frac{m(E_n)}{n}.$$

矛盾.

练习 4[20] 令 $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ 是有理数的一个排列, $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ 绝对收敛, 证明: $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum [{}^{a_\bullet}/_{|x-r_\bullet|}]$ 几乎处处收敛.

解答 4[20] 不妨假设 $a_\bullet \geqslant 0$. 只需证明其几乎处处有限, 即

$$\sum \int \frac{a_\bullet}{|x-r_\bullet|^{1/2}} \,\mathrm{d}x \overset{\text{MCT}}{=\!=} \int \sum \frac{a_\bullet}{|x-r_\bullet|^{1/2}} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

即可. 而易见 $\sum \int [{}^{a_\bullet}/_{|x-r_\bullet|}] \,\mathrm{d}x \leqslant \sum \int_{[-1,1]} [{}^{a_\bullet}/_{|x|^{1/2}}] \,\mathrm{d}x = 4 \sum a_n < \infty$. 故证毕.

练习 4[21] 设 $\{E_i\}_{i=1}^N$ 是区间 $[0,1]$ 的 N 个可测子集, 而 $[0,1]$ 的每一个点至少属于这 N 个点集中的 q 个, 试证这 N 个点集至少有一个点集的测度不小于 ${}^q/_N$.

解答 4[21] 即 $\sum \mathbb{1}_{E_\bullet} \geqslant q$ (在 $[0,1]$ 上), 故 $\sum m(E_\bullet) = \int \sum \mathbb{1}_{E_\bullet} \geqslant q \int \mathbb{1}_{[0,1]}$. 因此至少有一个点集测度不小于 ${}^q/_N$.

练习 4[22] 令 $f \in \mathfrak{L}^1_{>0}(E)$, E 测度有限, $a \in (0, m(E))$, 则

$$\inf_{F \subset E,\, m(F)=a} \int_F f > 0.$$

解答 4[22] 由测度连续性: $m(\{f < {}^1/_n\}) \xrightarrow[m(E)<\infty]{n\to\infty} 0$. 择 n 满足 $m(\{f < {}^1/_n\}) < {}^a/_2$, 故

$$\int_F f = \int_{\{f<1/n\}_F} f + \int_{F \setminus \{f \geqslant 1/n\}_F} f \geqslant \frac{a}{2n}.$$

练习 4[23] 设 $f \in \mathfrak{L}^1_{\geqslant 0}([0,1])$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负可测函数, 试作 $\phi \in \mathfrak{L}^0_{\geqslant 0}([0,1])$, 使得

$$\phi(0^+) = \infty, \quad \phi f \in \mathfrak{L}^1([0,1]).$$

解答 4²³ 此题归根结底是寻找可积函数在 0 处发散得比 f 快, 为方便不妨设 f 积分为 1. 考虑以下划分:

$$E_1=\left\{x \,\middle|\, \int_{[x,1]} f\leqslant\frac{1}{2}\right\},\quad E_n=\left\{x \,\middle|\, \int_{[x,1]} f\leqslant 1-\frac{1}{2^n}\right\}\setminus E_{n-1}.$$

因此 $\int_{E_n} f={}^1/_{2^n}$. 令 $\phi=\sum_{n\geqslant 1}2^{n/2}\mathbb{1}_{E_n}$. 则易见 $\phi(0^+)=\infty$, $\int\phi f\leqslant\sum 2^{-n/2}<\infty$. 故 $\phi f\in\mathfrak{L}^1([0,1])$.

练习 4²⁴ 设 $f\in\mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$, 对任意 $h>0$ 定义 $\phi_h(x)=\int_{x-h}^{x+h}[{}^f/_{2h}]$, 证明 $\|\phi_h\|_1\leqslant\|f\|_1$.

解答 4²⁴ 由 Tonelli 定理直接得到:

$$\begin{aligned}\|\phi_h\|_1=\left\|f*\frac{\mathbb{1}_{[-h,h]}}{2h}\right\|_1 &\leqslant \frac{1}{2h}\iint|f(x-y)\mathbb{1}_{[-h,h]}(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &\overset{\text{Tonelli}}{\leqslant}\frac{1}{2h}\iint|f(x-y)\mathbb{1}_{[-h,h]}(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\leqslant \|f_1\|\left\|\frac{\mathbb{1}_{[-h,h]}}{2h}\right\|_1=\|f\|_1.\end{aligned}$$

练习 4²⁵ 令 $f\in\mathfrak{L}^1([0,1])$, $F(x)=\int_{[x,1]}[{}^{f(t)}/_t]\,\mathrm{d}t$, 证明 $F\in\mathfrak{L}^1([0,1])$ 且

$$\lim_{x\to 0^+}xF(x)=0,\quad \int_0^1 F=\int_0^1 f.$$

解答 4²⁵ $\int|F|\leqslant\int_0^1\int_{[x,1]}|{}^{f(t)}/_t|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^t|{}^{f(t)}/_t|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int|f|$. 故由 Fubini 定理:

$$\int F=\int_0^1\int_{[x,1]}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^t\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int f.$$

若 $xF(x)\nrightarrow 0$, 则存在 $\{x_\bullet\}$, $x_\bullet\to 0$ 且 $|x_\bullet F(x_\bullet)|>\varepsilon$, 但由 Dct:

$$g_\bullet(t)=\frac{x_\bullet f(t)\mathbb{1}_{[x_\bullet,1]}}{t},\qquad \int_{[x_\bullet,1]}\frac{x_\bullet|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t=\int|g_\bullet|\,\mathrm{d}t\xrightarrow{\sup|g_\bullet|\leqslant|f|}0.$$

矛盾.

练习 4²⁶ 令 $m(E)<\infty$, 则

$$f_\bullet\xrightarrow{\text{mea.}}f\iff\rho(f_\bullet,f)\coloneqq\int\frac{|f_\bullet-f|}{1+|f_\bullet-f|}\to 0.$$

解答 4²⁶ 令 $E_n = \{\,|f_\bullet - f| > \varepsilon\,\}$, 则易见

$$\rho(f_\bullet, f) \leqslant m(E_n) + \varepsilon m(E) \implies \lim \rho(f_\bullet, f) \leqslant \varepsilon m(E).$$

另一个方向:

$$0 = \lim \rho(f_\bullet, f) \geqslant \lim \int_{E_n} \frac{|f_\bullet - f|}{1 + |f_\bullet - f|} \geqslant \lim \frac{\varepsilon m(E_n)}{1+\varepsilon}.$$

故反之成立.

练习 4²⁷ 设 $\{f_\bullet\} \subset \mathfrak{L}^0(E)$ 且, $|f_\bullet| \leqslant F$, $F \in \mathfrak{L}^1(E)$, 证明:

$$\int \liminf f_\bullet \leqslant \liminf \int f_\bullet \leqslant \limsup \int f_\bullet \leqslant \int \limsup f_\bullet.$$

解答 4²⁷ 中间的等号显然, 第一, 第三个等号分别对 $f_\bullet + F$ 和 $F - f_\bullet$ 应用 Fl 即得.

练习 4²⁸ 证明对补集测度有限的闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 有

$$I_\lambda : F \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{d(y,F)^\lambda}{|x-y|^{\lambda+1}}\, \mathrm{d}y \overset{\text{a.e.}}{<} \infty, \quad \lambda > 0.$$

解答 4²⁸ 只需证明 $\int_F I_\lambda < \infty$ 即可, 注意到 $y \in F$ 时, $d(y,F) = 0$:

$$\int_F \int_{\mathbb{R}} \frac{d(y,F)^\lambda}{|x-y|^{\lambda+1}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{F^c} \int_F \frac{d(y,F)^\lambda}{|x-y|^{\lambda+1}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

这样就用 F 和 F^c 分离 x 和 y. 此时 $|x-y| \geqslant d(y,F)$. 因此

$$\int_F I_\lambda \leqslant \int_{F^c} d(y,F)^\lambda \int_{|r| \geqslant d(y,F)} \frac{\mathrm{d}r}{r^{\lambda+1}}\, \mathrm{d}y = \int_{F^c} d(y,F)^\lambda \frac{2d(y,F)^{-\lambda}}{\lambda}\, \mathrm{d}y = \frac{2m(F^c)}{\lambda}.$$

练习 4³⁰ 令 $m(E) < \infty$, $E \subset \mathbb{R}$. 证明

$$\int_E f = \lim_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{p_\bullet \in \mathcal{P}} \xi_\bullet m(f^{-1}([p_\bullet, p_{\bullet+1}))).$$

其中 $\mathcal{P} = \{p_\bullet\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个单调分划, $\Delta(\mathcal{P}) = \sup(p_{\bullet+1} - p_\bullet)$, $\xi_\bullet \in [p_\bullet, p_{\bullet+1})$.

解答 4³⁰ 令 $E_n = f^{-1}([p_\bullet, p_{\bullet+1}))$, 则易见

$$\xi_\bullet m(E_\bullet) \text{ 和 } \int_{E_\bullet} f \in \big(p_\bullet m(E_\bullet), p_{\bullet+1} m(E_\bullet)\big).$$

故

$$\sum \xi_\bullet m(E_\bullet) \text{ 和 } \int f \in \Big(\sum p_\bullet m(E_\bullet), \sum p_{\bullet+1} m(E_\bullet)\Big).$$

而 $\sum p_{\bullet+1} m(E_\bullet) - \sum p_\bullet m(E_\bullet) \leqslant \Delta(\mathcal{P}) m(E)$, 因此 $|\sum \xi_\bullet m(E_\bullet) - \int f| \to 0$.

故 $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ 情形成立. $\int f = \infty$ 时, $\sum p_\bullet m(E_\bullet) = \sum p_{\bullet+1} m(E_\bullet) = \infty$. 因此亦成立.

注. 这个定义有点令人烦躁 (即使书中也是这样定义的). 比较严格的定义需要用到 "网"(而不是函数极限). 给定两个分划 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. 定义 $\mathcal{P}_1 \preccurlyeq \mathcal{P}_2$ 为 $\Delta(\mathcal{P}_1) \geqslant \Delta(\mathcal{P}_2)$. 因此全体 (令 $\Delta(\mathcal{P})$ 有限的) 分划构成一个偏序集 (同时还满足对任意 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, 存在 $\mathcal{P}_3$ 满足 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \preccurlyeq \mathcal{P}_3$). 这样的特殊偏序集称为 "定向集". 将其映往拓扑空间的函数称为定向集上的网.

直观上来说, 序列是可数的单分支网, 一元函数极限也是单 (或双) 分支的, 但一般的定向集可以是多分支的. 一个网 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 收敛与 x 可以认为是在某个分支上收敛: 对 x 的邻域 U, $\exists \beta \in A$, 满足

$$\gamma \succcurlyeq \beta \implies x_\gamma \in U.$$

上面这个积分定义的例子可以诠释为, 对误差函数:

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \sum_{p_\bullet \in \mathcal{P}} (p_{\bullet+1} - p_\bullet) m(f^{-1}([p_\bullet, p_{\bullet+1}))).$$

的网收敛.

练习 4[31] 试证当 $m(E) = \infty$ 时, 若补充规定在上题的和式中, $0 \in (p_\bullet, p_{\bullet+1})$ 时 $\xi_\bullet = 0$, 则上题结论仍然是正确的.

解答 4[31] $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ 时, 由于 $f|_{\{f \geqslant p_{\bullet+1}\}}$ 和 $f|_{\{f \leqslant p_{\bullet+1}\}}$ 均测度有限, 故

$$\int_{\{f \notin [p_\bullet, p_{\bullet+1})\}} f = \lim_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} \Bigg(\sum_{p_\bullet \in \mathcal{P} \setminus [p_\bullet, p_{\bullet+1})} \xi_\bullet m(f^{-1}([p_\bullet, p_{\bullet+1}))) \Bigg).$$

因此只需证明

$$\lim_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} f|_{f^{-1}([p_\bullet, p_{\bullet+1}))} = 0.$$

即可. 由 Dct 立马得到. 若 $\int f = \infty$, 则 $\lim_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} f|_{f^{-1}([p_\bullet, p_{\bullet+1}))} \geqslant 0$. 因此同样成立.

! 练习 4[32] 用 LEBESGUE 和证明

$$\int_a^b f = \int_{f(a)}^{f(b)} g' \,\mathrm{id}.$$

其中 f 是 $[a,b]$ 上的严格单增光滑函数, $g = f^{-1}$.

解答 4[32] 此情形大概只在 $m(\{f' = 0\}) = 0$ 的情形下成立.

不妨设 $[a,b] = [f(a), f(b)] = [0,1]$, $E = \{f' = 0\}$. 则 $[0,1] \setminus E$ 为开集, 故为可数个开区间交上 $[0,1]$ 得到, 设其为 $\bigcup (c_\bullet, d_\bullet)$. 故

$$f\left(\bigcup (c_\bullet, d_\bullet)\right) = \bigcup (f(c_\bullet), f(d_\bullet)).$$

易见 $m(f(E)) = 0$ (用 $\bigcup (a_\bullet, b_\bullet)$ 套住 E, 则 $m(f((a_\bullet, b_\bullet))) \leqslant (b_\bullet - a_\bullet) \sup_{(a_\bullet, b_\bullet)} |f'|$), 因此 $f(E)$ 是 $[0,1]$ 上的几乎处处开集. 且由基本的广义 RIEMANN 积分 (的微积分基本定理) 得到 $\int_{f(c_\bullet)}^{f(d_\bullet)} g' = d_\bullet - c_\bullet$. 故

$$\begin{aligned}
\int_{f(c_\bullet)}^{f(d_\bullet)} g' \,\mathrm{id} &= \int_{f(c_\bullet)}^{f(d_\bullet)} ((g \,\mathrm{id})' - g) \\
&= d_\bullet g(d_\bullet) - c_\bullet g(c_\bullet) - \int_{f(c_\bullet)}^{f(d_\bullet)} g \\
&= \int_{c_\bullet}^{d_\bullet} f.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g' \,\mathrm{id} = \sum \int_{f(c_\bullet)}^{f(d_\bullet)} g' \,\mathrm{id} = \sum \int_{c_\bullet}^{d_\bullet} f = \int_{[0,1] \setminus E} f.$$

注. 反例只需找到一个严格单增光滑函数且导数并非几乎处处非零即可. 考虑 $\{r_n\}_{n \geqslant 0}$ 是有理数的排列, 则 $\bigcup_{n \geqslant 0} (r_n - \varepsilon/2^n, r_n + \varepsilon/2^n)$ 是一些可数开集的不交并 $\bigsqcup (a_\bullet, b_\bullet)$. 令光滑函数 ϕ 在 $[0,1] \setminus \bigsqcup (a_\bullet, b_\bullet)$ 为 0, 在其余地方恒正. 则 $\Phi \colon x \mapsto \int_0^x \phi$ 即为所求的反例:

$$x < y \implies \exists r \in (x,y) \implies \int_x^y \phi > 0 \implies \Phi(y) > \Phi(x).$$

练习 4[33] 令 $f \in \mathfrak{L}^0_{\geqslant 0}(E)$, 则

$$\int_E f = \sup\left\{ \int_A f \;\middle|\; \|f \mathbb{1}_A\|_{\sup} < \infty, m(A) < \infty \right\}.$$

解答 4[33] 令 $A_n = \{f \leqslant n\} \cap \mathbb{D}_n$. 则由 Mct:

$$\int_{A_n} f \to \int_E f.$$

故 $\int_E f \leqslant \sup\{\int_A f \mid \|f \mathbb{1}_A\|_{\sup} < \infty, m(A) < \infty\}$, 反向不等式显然.

练习 4[34] 令 $f \in \mathfrak{L}^0_{\geqslant 0}(E)$, 则

$$\int_E f = \sup\left\{ \int \phi \,\middle|\, \phi \text{ simple}, \phi \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} f \right\}.$$

解答 4[34] $\geqslant$ 方向是显然的. 考虑 $\phi_\bullet \to f$. 故

$$\int_E f = \lim \int \phi_\bullet \leqslant \sup\left\{ \int \phi \,\middle|\, \phi \text{ simple}, \phi \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} f \right\}.$$

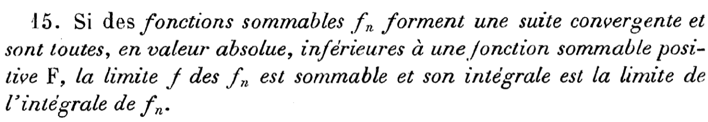

15. Si des *fonctions sommables f_n forment une suite convergente et sont toutes, en valeur absolue, inférieures à une fonction sommable positive* F, *la limite f des f_n est sommable et son intégrale est la limite de l'intégrale de f_n.*

图 5: Lebesgue 对一般的控制收敛定理的描述, 出自 *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, 1904. 同时, 他在此文章中对此定理作出了证明. »

第五章 微分与不定积分

连续函数的微分会带来一个奇异的部分，这
个部分我们可以用测度去描述，但如果是高阶微分呢？

练习 5¹ 证明:

- 若 f 在 $[a,b]$ 上 RIEMANN 可积, 则存在 $\eta \in (\inf_{[a.b]} f, \sup_{[a,b]} f)$ 使得
$$\int_{[a,b]} f = \eta(b-a).$$
- 令 f 在 $[a,b]$ 上 RIEMANN 可积, f 在 x_0 连续, 令 $F(x) = \int_a^x f$. 则 F 在 x_0 可导且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

解答 5¹ 均是数学分析的基本结论, 令 $\eta = \int_a^b [f/b-a]$ 即可; 第二点: 当 δ 很小时有:
$$\frac{1}{\delta}\int_{x_0}^{x_0+\delta} f \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon).$$
即得.

练习 5² 令 $\{x_\bullet\} \subset [a,b]$, 试作 $[a,b]$ 上的连续函数, 其不连续点恰好为 $\{x_\bullet\}$.

解答 5² 令 $f = \sum_{r_n<x} 2^{-n}$. 易见其在 $\{x_\bullet\}$ 上不连续, 令 $x \in [a,b] \setminus \{x_\bullet\}$, 则要么 x 邻域内恒为常值要么 x 是 $\{x_\bullet\}$ 聚点, 考虑 $\sum_{n\geqslant N} 2^{-n} < \varepsilon$ 的 N, 有
$$|y-x| < \min_{i=0}^N |x-x_i| \implies |f(y)-f(x)| < \varepsilon.$$

练习 5³ 证明 FUBINI 微分定理: $\{f_\bullet\}$ 是单增函数列, $\sum f_\bullet$ 收敛, 证明 $(\sum f_\bullet)' \overset{\text{a.e.}}{=} \sum f_\bullet'$.

解答 5³ 令 $F = \sum f_\bullet$ 显然几乎处处可导, 且 $F - \sum_{j=0}^n f_j$ 单增, 故 $F' \geqslant \sum f_\bullet'$. 反之, $\int_a^b F' \leqslant \int_a^b (F' - \sum_{j=0}^n f_j') + \int_a^b \sum_{j=0}^n f_j' \leqslant (F - \sum_{j=0}^n f_j)|_a^b + \int_a^b \sum_{j=0}^n f_j'$. 那么
$$\int_a^b F' \leqslant \left(F - \sum_{j=0}^n f_j\right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \sum_{j=0}^n f_j' \leqslant \varepsilon + \int_a^b \sum f_\bullet'.$$
故 $\int F' \leqslant \int_a^b \sum f_\bullet'$, 与 $F' \geqslant \sum f_\bullet'$ 对比得到 $F' \overset{\text{a.e.}}{=} \sum f_\bullet'$.

练习 5⁴ 试在 $[0,1]$ 上作一个严格单调上升的函数 f, 使得 $f' \overset{\text{a.e.}}{=} 0$.

解答 5⁴ 在 [5²] 中, 若 $\{x_\bullet\}$ 是稠密的, 则 f 严格单增. 导数几乎处处为 0 由 FUBINI 微分定理得到.

练习 5⁵ 设 f 和 g 是区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 证明 $\alpha f+\beta g$ 和 fg 亦然. 若 $\inf|g|>0$, 则 ${}^f/_g$ 亦然.

解答 5⁵ 由于有界, $\alpha f+\beta g$ 和 fg 有界变差显然.

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}\right| \leqslant \frac{|g(x)-g(y)|}{\inf|g|^2} \implies \bigvee_{[a,b]}\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{\inf|g|^2}\bigvee_{[a,b]} g.$$

因此 ${}^1/_g$ 和 ${}^f/_g$ 是有界变差的.

练习 5⁷ 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的函数, 存在递减且趋于 0 的数列 $\{a_\bullet\}$ 满足 $f|_{[a_{\bullet+1},a_\bullet]}$ 单调, 则

$$f\in\mathbb{BV} \iff \sum|f(a_{\bullet+1})-f(a_\bullet)|<\infty.$$

解答 5⁷ ($\implies$) 由定义直接得到, 反之令 $\sum|f(b_{\bullet+1})-f(b_\bullet)| > \sum|f(a_{\bullet+1})-f(a_\bullet)|$, 与 $\{a_\bullet\}\cup\{b_\bullet\}$ 的子有限分划对应变差不超过 $\sum|f(a_{\bullet+1})-f(a_\bullet)|$ 矛盾.

练习 5⁸ 证明区间 $[a,b]$ 上的函数 f 是有界变差函数的充分必要条件是, 存在 $[a,b]$ 上的增函数 ϕ 满足

$$a\leqslant x\leqslant y\leqslant b \implies |f(x)-f(y)|\leqslant|\phi(x)-\phi(y)|.$$

解答 5⁸ 令 $\phi(x)=\bigvee_{[a,x]} f$ 即可得到一个方向. 另一个方向由 $\bigvee_{[a,b]} f\leqslant\bigvee_{[a,b]}\phi$ 得到.

练习 5⁹ 证明 $[a,b]$ 上的单调函数 f 是绝对连续的充分必要条件是

$$\int_a^b f' = f(b)-f(a).$$

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上绝对连续且 $f'(x)\overset{\text{a.e.}}{\geqslant}0$, 试证它是增函数.

解答 5⁹ 一个方向是 NEWTON – LEIBNIZ 公式. 反之, 由 $g(x) = f(x) - f(a) - \int_a^x f'$ 单增显见 $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$. 故

$$\sum |f(a_\bullet) - f(b_\bullet)| \leqslant \sum \int_{a_\bullet}^{b_\bullet} |f'|.$$

由可积函数的绝对连续性得到.

练习 5¹⁰ 证明在绝对连续的定义中, 有限多个不交区间可以改为可数多个.

解答 5¹⁰ 只需证明满足 “有限绝对连续” 的函数也满足 “可数绝对连续” 即可. 而可数求和是有限求和情形的上确界, 因此命题证毕.

注. 单增绝对连续函数可以生成一个测度, 称为 LEBESGUE – STIELTJES 测度:

$$\mu_f(E) = \inf\left\{ \sum (f(b_\bullet) - f(a_\bullet)) \,\middle|\, E \subset \bigcup (a_\bullet, b_\bullet) \right\}.$$

满足 $m(E) = 0 \implies \mu_f(E) = 0$. 因此此题由测度可数可加性可以得到两个定义是一致的. 因此导数另一个几何意义是 LEBESGUE – STIELTJES 测度与 LEBESGUE 测度的比值极限. 对于性质良好的测度, 也有从中还原处比值极限 (即测度导数) 的方法: RADON – NIKODYM 定理. 考虑由绝对连续函数是单调函数的线性组合, 因此可以考虑符号测度或者复测度:

$$\mu_f(E) = \int_E f', \quad \mu_{f\,\text{的变差}} = \int_E |f'|.$$

分部积分无非是

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\mu_g + \int_a^b g \,\mathrm{d}\mu_f = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

! **练习 5¹¹** 证明区间 $[a,b]$ 上的实值函数 f 是绝对连续的必要条件是将零测集映往零测集.

解答 5¹¹ 此题大概只在 f 连续有界变差时成立.

由微积分基本定理

$$\int_c^d f' = f(c,d) \implies m(f(c,d)) = \sup_{x\in[c,d]} \int_c^x f' \leqslant \int_c^d |f'|.$$

由绝对连续 (比如上题给出的可数情形) 和 δ 测度开覆盖得到:

$$f(E) \subset \bigcup f((a_\bullet, b_\bullet)) \implies m(f(E)) \leqslant \sum \int_{(c_\bullet, d_\bullet)} |f'| \leqslant \varepsilon.$$

反之若 f 将零测集映往零测集, 则用反证: 若 f 非绝对连续, 故对某个 ε 存在开集 $E_j = \bigcup_{n\geqslant 0}(a_{jn}, b_{jn})$ 满足 (不妨设 f 单调)

$$m(E_j) = \sum_{n\geqslant 0}(b_{jn} - a_{jn}) < \frac{1}{2^m}, \quad \sum_{n\geqslant 0}|f(b_{jn}) - f(a_{jn})| > \varepsilon.$$

故 $m(f(E_j)) > \varepsilon$. 令 $F = \limsup_j E_j = \bigcap_{k\geqslant 0}\bigcup_{j\geqslant k} E_j$. 则 $m(F) = 0$ 且

$$m(f(F)) \xlongequal{\text{有限测度}} \inf_k m\Big(\bigcup_{j\geqslant k} f(E_j)\Big) \geqslant \varepsilon.$$

矛盾!

! **练习 5[12]** 假定函数 f 处处可微导数有界 M, 或者函数一致 LIPSCHITZ 连续 (常数为 M), 亦或是函数是上凸的, 则此三种情形在 $[a, b]$ 上都是绝对连续的.

解答 5[12] 此题第三款大概只对连续函数 (或是在端点处连续函数成立).

第一款和第二款只需注意到 $|f(a)-f(b)| \leqslant M|a-b|$, 故只需 $\sum(b_\bullet - a_\bullet) < {}^{\varepsilon}/_{M}$ 即可. 对第三款而言, 由数学分析的基本知识知道其在 (a, b) 上连续, 以下是一个思路. 令 $a \leqslant c < x < y < d \leqslant b$, 则

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(y)}{b - y}.$$

令 $y \to x$ 得到函数是连续的. 设 $|f(x) - f(y)| = V(x, y)$, 则由上式有

$$V(x, y) \leqslant \max\big(V(c, c + y - x), V(d - x + y, d)\big).$$

因此对不交的区间 $(a_\bullet, b_\bullet)$, $\sum(b_\bullet - a_\bullet) < \delta$ 有 (直观上就是切线的斜率先减后增, 因此只需将区间往左 / 右堆积即得)

$$\sum V(a_\bullet, b_\bullet) \leqslant \bigvee_{[a,a+\delta]} f + \bigvee_{[b-\delta,b]} f.$$

因此只需 f 在两端点连续即可.

练习 5[13] 证明 $[0, 1]$ 上的实值函数 f 满足 LIPSCHITZ 条件的充分必要条件是, 存在有界可测函数 ϕ 使得对任意的 $x \in [0, 1]$ 有

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \phi.$$

解答 5[13]　Lipschitz 函数是绝对连续的, 因此 $\phi = f'$ 即满足题意, 有界性由极限直接得到. 反之, $|f(x)-f(y)| \leqslant \int_x^y |\phi|$, 因此是 Lipschitz 连续的.

练习 5[14]　设 f Lipschitz 连续, 则 $(g\colon [a,b] \to \mathbf{R}) \mapsto f\circ g$ 保有限变差与绝对连续.

解答 5[14]　$|f(g(x))-f(g(y))| \leqslant M|g(x)-g(y)|$ 直接得到 $\bigvee_{[a,b]} g \leqslant M(\bigvee_{[a,b]} f\circ g)$. 绝对连续性同理.

练习 5[15]　可微函数 f 的导数 f' 如果是有界变差的, 证明 f' 一定处处连续.

解答 5[15]　有界变差函数最多只有第一类不连续点, 因此若不连续则与导数介值性矛盾.

练习 5[16]　设 $\{f_\bullet\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列, 并且 $\bigvee_{[a,b]} f_\bullet \leqslant M$, $f_\bullet \to f$, 试证 $\bigvee_{[a,b]} f \leqslant M$.

解答 5[16]　只需注意到 $\sum |f(a_\bullet)-f(b_\bullet)| \leqslant \limsup_\circ \sum |f_\circ(a_\bullet)-f_\circ(b_\bullet)| \leqslant M$ 即可.

练习 5[17]　设 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 试证:

- 若 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 则 $m(f([\alpha,\beta])) \leqslant \int_\alpha^\beta |f'|$;
- 令 G 为开集, 则 $f(G)$ 可测且 $m(f(G)) \leqslant \int_G |f'|$;
- 若 $E \subset [a,b]$ 为任意点集, 则 $m^*(f(E)) \leqslant \inf\{\int_G |f'| \mid G \text{ open}, E \subset G\}$;
- 若 $E \subset [a,b]$ 可测, 则 $f(E)$ 也可测且 $m(f(E)) \leqslant \int_E |f'|$.

解答 5[17]　第一款由 $m(f([\alpha,\beta])) = \sup_{x,y\in[\alpha,\beta]} \left|\int_x^y f'\right|$ 直接得到. 第二款考虑将 G 分解为可数个开区间的并 $\bigcup(a_\bullet,b_\bullet)$, 每个开区间都补上端点然后用第一款的结论得到:

$$m(f(G)) \leqslant \sum m(f([a_\bullet,b_\bullet])) \leqslant \sum \int_{[a_\bullet,b_\bullet]} |f'| = \int_G |f'|.$$

(可测性由可数闭区间并的情形减去端点对应的零测集 $= f(G)$ 得到). 第三款用开集 G 覆盖 E 再用第二款得到. 第四点由于 f 保零测集, 故仅需考虑 F_σ 集 $\bigcup F_\bullet$ 即可, 由于 $F_\bullet$ 紧致, 故 $f(F_\bullet)$ 亦然, 因此 $f(\bigcup F_\bullet) = \bigcup f(F_\bullet)$ 可测. 令开集列 $O_\bullet \supset E$, 且 $m(O_\bullet \setminus E) \to 0$. 故由 Dct 有

$$m(f(E)) \leqslant \inf\left\{ \int_G |f'| \,\middle|\, G \text{ open}, E \subset G \right\} \leqslant \inf \int_{O_\bullet} |f'| = \int_E |f'|.$$

练习 5[18] 设 f 在 $[a,b]$ 有界变差, 令 $V(x) = \bigvee_{[a,x]} f$, 证明在 f 的连续点, V 也连续. 又若 V 在 $[a,b]$ 为绝对连续的, 试证 f 也是绝对连续的.

解答 5[18] 以下只证明 V 右连续, 左连续情形同理. 由 $|V(x+\delta)-V(x)| \leqslant \bigvee_{[x,x+\delta]} f$, 考虑 f 在 x 处连续, 且 $\inf_{\delta>0} \bigvee_{[x,x+\delta]} f > 0$, 令极限为 a. 则考虑 δ 满足

$$x < y < x+\delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon, \quad |V(y)-V(x^+)| < \varepsilon.$$

则 $\bigvee_{[x,x+\delta]} f < a+\varepsilon$. 对 $\forall k \in (0,1)$, 存在分划 $\mathcal{P}_1 = \{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = x+\delta\}$ 满足其对应的变差 $\sum_{\mathcal{P}_1} |f(x_{\bullet+1} - f(x_\bullet))| > a-\varepsilon$ (同时自然 $< a+\varepsilon$).

因此 $a-\varepsilon < |f(x_1)-f(x)| + \bigvee_{[x_1,x+\delta]} f < \varepsilon + \bigvee_{[x_1,x+\delta]} f$. 即 $\bigvee_{[x_1,x+\delta]} > a-2\varepsilon$. 但 $\bigvee_{[x,x_1]} \geqslant a$, 故

$$2a-2\varepsilon \leqslant \bigvee_{[x,x_1]} f + \bigvee_{[x_1,x+\delta]} f = \bigvee_{[x,x+\delta]} f < a+\varepsilon \implies a \leqslant 3\varepsilon.$$

故连续性得证.

第二款中 f 的绝对连续性可以由 $|f(x)-f(y)| \leqslant \bigvee_{[x,y]} f = |V(y)-V(x)|$ 得到.

注. 现在来寻求 $\bigvee_{[a,b]} f$ 的积分表示. 假定 f 连续, 由 [3[25]]. $g(x) = \operatorname{card} f^{-1}(\{x\})$ 是可测的.

$$g = \lim_n \sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})} = \sup_n \sum_k \mathbb{1}_{f(I_{n(k)})}.$$

由单调收敛定理:

$$\int g = \sup_n \sum_k m(I_{n(k)}).$$

由定义可以得到 $\sup_n \sum_k m(I_{n(k)}) \leqslant \bigvee_{[a,b]} f$. 但给定分划 $x_0, \dots, x_N$ 和正数 ε, 则由 f 一致连续可以得到当 n 很大时有

$$\sum_k m(I_{n(k)}) \geqslant \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}| - 2N\varepsilon.$$

故 $\int \operatorname{card} f^{-1}(\{\cdot\}) = \bigvee_{[a,b]} f$.

练习 5[19] 设 f 在 $[a,b]$ 有界变差, 证明 $\int_a^b |f'| \leqslant \bigvee_{[a,b]} f$, 又若 f 使此式成为等式, 证明它是绝对连续的.

解答 5[19] 令 $V(x) = \bigvee_{[a,x]} f$, 则 $V \pm f$ 单增, 且均几乎处处可导, 故 $V' \overset{\text{a.e.}}{\geqslant} |f'|$. 因此

$$\int_a^b |f'| \leqslant \int_a^b V' \leqslant V(b) - V(a) = \bigvee_{[a,b]} f.$$

若等式成立, 则 $\int_a^b V' = V(b) - V(a)$, 由 V 单增得到其绝对连续, 因此 f 亦绝对连续.

注. 由于 f 绝对连续 $\Longleftrightarrow$ V 绝对连续, 因此在绝对连续的情形下有 $V' \overset{\text{a.e.}}{=} |f'|$ 成立. 但仅仅在有界变差的时候也成立.

考虑 $E = \{V' \geqslant |f'|\}$, 只需证明 $m(E) = 0$ 即可. 考虑若 $x \in E$, 则 y 很靠近 x 时应有

$$\frac{V(y) - V(x)}{y - x} \geqslant \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| + \varepsilon.$$

因此令

$$E_m = \left\{ x \;\middle|\; |y - x| < \frac{1}{m} \Longrightarrow \frac{V(y) - V(x)}{y - x} \geqslant \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| + \frac{1}{m} \right\}.$$

则 $E = \bigcup_{m \geqslant 1} E_m$. 这玩意是直观的, 而且容易用在有界变差函数的分划上, 因为:

$$x \in E_m \cap (c, d),\ d - c < \frac{1}{m} \Longrightarrow \frac{V(d) - V(c)}{d - c} \geqslant \left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c}\right| + \frac{1}{m}.$$

故可以考虑包含 E_m 的分划子区间. 令分划 $\mathcal{P}$ 满足 ($\Delta(\mathcal{P})$ 是分划的最大区间长度)

$$\sum_{\mathcal{P}} |f(x_{\bullet+1}) - f(x_\bullet)| \leqslant \bigvee_{[a,b]} f - \varepsilon, \quad \Delta(\mathcal{P}) < \frac{1}{m}.$$

考虑 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{P}$ 中含 E_m 中点的区间. 因此:

$$[c, d) \subset \mathcal{Q} \Longrightarrow \bigvee_{[c,d]} f \geqslant f(d) - f(c) + \frac{d - c}{m}.$$

故

$$\begin{aligned}\bigvee_{[a,b]} f = \left(\sum_{I \in \mathcal{Q}} + \sum_{I \notin \mathcal{Q}}\right) \bigvee_I f &\geqslant \sum_{\mathcal{P}} |f(x_{\bullet+1}) - f(x_\bullet)| + \sum_{\mathcal{Q}} \frac{x_{\bullet+1} - x_\bullet}{m} \\ &\geqslant \bigvee_{[a,b]} f - \varepsilon + \frac{m(E_m)}{m}.\end{aligned}$$

故 $m(E_m) = 0$. 另一个更简短 (但是要使用 Fubini 微分定理) 的证明如下:

不妨令 f 连续, 则由于不能用积分得到 V' 与 $|f'|$ 的关系, 因此需要一步到位获得 V'. 由 V 单增故考虑 Fubini 微分定理. 令 g_n 对应分划 $\mathcal{P}_n$ 满足

$$\sum_{\mathcal{P}_n} |f(x_{\bullet+1}) - f(x_\bullet)| \leqslant \bigvee_{[a,b]} f - \frac{1}{2^n}, \quad \mathcal{P}_\bullet \subset \mathcal{P}_{\bullet+1}.$$

g_n 的行为是: 在 $\mathcal{P}_n$ 的子区间 $[x_\bullet, x_{\bullet+1}]$ 上, 若 $f(x_{\bullet+1}) < f(x_\bullet)$ 则将 f 在此区间内上下翻转, 反之不变, 在每个子区间这样做之后首尾连接得到 g_n (设 $g_0 = f$). 则 $g_{\bullet+1} - g_\bullet$ 单增且 $|g_n - V| \leqslant {}^1/_{2^n}$ (易证明 $V - g_\bullet$ 单增), 因此 $g_\bullet \to V$. 由 Fubini 微分定理得到 $\lim g_\bullet' \overset{\text{a.e.}}{=} V'$. 由 $V' \overset{\text{a.e.}}{\geqslant} 0$ 得到 $|f'| \overset{\text{a.e.}}{=} \lim |g_\bullet'| \overset{\text{a.e.}}{=} V'$.

练习 5²² 证明 $\forall E \subset \mathbb{R}$ 可测, 则

$$m\left(E \setminus \left\{ x \;\middle|\; \lim_{h\to 0} \frac{m(E \cap (x-h, x+h))}{2h} = 1 \right\}\right) = 0.$$

解答 5²² 这是 Lebesgue 微分定理的直接推论, 在不使用的情形下我们考虑 $\mathbb{1}_E$ 作为可积函数的情形:

$$\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_E\right)' \overset{\text{a.e.}}{=} \mathbb{1}_E.$$

因此 $\lim_{h\to 0} {}^{m(E\cap(x-h,x+h))}/_{2h} = \lim_{h\to 0} \int_{x-h}^{x+h} [{}^{\mathbb{1}_E}/_{2h}] \overset{\text{a.e.}}{=} \mathbb{1}_E$. 因此测度有限的情形得到, 测度无限的情形由测度有限的可数并得到.

注. 以下将给出 Lebesgue 微分定理的一个证明.

定理 (Lebesgue 微分定理). 对 $f \in \mathfrak{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f \overset{a.e.}{=} f(x).$$

证明. 此定理证明是非常经典的极大函数估计. 首先有以下事实:

- $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的情形是显然成立的;
- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密;
- 由于微分是局部性质, 因此可以将 $\mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 换成 $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

我们需要证明的是

$$m\left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f - f(x) \right| > \lambda \right\}\right) = 0, \quad \forall \lambda > 0.$$

记 $\int_{B_r(x)} [{}^f/_{m(B_r(x))}] = \mathsf{A}_r f(x)$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|f - g\|_1 < \varepsilon$, 则由经典 ${}^\varepsilon/_3$ 讨论有

$$\limsup_{r\to 0} |\mathsf{A}_r f - f| \leqslant \limsup_{r\to 0} |\mathsf{A}_r f - \mathsf{A}_r g| + \limsup_{r\to 0} |\mathsf{A}_r g - g| + \limsup_{r\to 0} |f - g|.$$

由于 g 性质良好, 故 $\limsup_{r\to 0}|\mathsf{A}_r g-g|=0$. 同时 $|f-g|>\varepsilon$ 的测度可以被 $\|f-g\|_1$ 控制 (Chebyshev 不等式), 故只需讨论 $\limsup_{r\to 0}|\mathsf{A}_r f-\mathsf{A}_r g|$.

"极大函数" 的主要作用是通过考虑估计最差的情形来对一些在稠密集上的命题推广到整个空间, 只需该极大函数具有某种弱有界性. 以下是考虑以上均值过程的极大函数弱有界性的证明:

定理 (Hardy – Littlewood 极大不等式). 记号如上, 令 $\mathsf{M}f(x)=\sup_{r>0}\mathsf{A}_r|f|(x)$. 则

- $\mathsf{M}f$ 是可测的;
- $m(\{\mathsf{M}f>\lambda\})<{}^{5^n\|f\|_1}/_{\lambda}$.

证明. 证明分为两步:

- 先证明 $\forall r>0$, $\mathsf{A}_r f(x)$ 都对 $x\in\mathbb{R}^n$ 连续. 令 $x\to x_0$, 则

$$\mathbb{1}_{B_r(x)}(y)\to\mathbb{1}_{B_r(x_0)}(y),\quad |y-x|\neq r.$$

因此由 Dct 得到

$$\lim\int_{B_r(x)}f\xrightarrow{\sup|\mathbb{1}_{B_r(x)}f|\leqslant|f|}\int_{B_r(x_0)}f.$$

故 $\mathsf{A}_r f(x)\to\mathsf{A}_r(x_0)$.

由 $\mathsf{A}_r f(x)$ 连续得到 $\{\mathsf{M}f>a\}=\bigcup_{r>0}\{\mathsf{A}_r|f|>a\}$ 是开集, 因此可测.

- 令 $E=\{\mathsf{M}f>\lambda\}$. 则 $\forall x\in E$, $\exists r_x$ 满足 $\mathsf{A}_{r_x}|f|>\lambda$. 故

$$E\subset\bigcup_{x\in E}B_{r_x}(x).$$

由 [Vitali 覆盖定理] 可以得到可数不交球族 $\{B_\bullet\}$, 且 $\bigcup_{x\in E}B_{r_x}(x)\subset\bigcup 5B_\bullet$. 故

$$m(E)\leqslant 5^n\sum m(B_\bullet)\leqslant\frac{5^n}{\lambda}\sum\int_{B_\bullet}|f|\leqslant\frac{5^n\|f\|_1}{\lambda}.\qquad\square$$

Hardy – Littlewood 极大函数 $\mathsf{M}f$ 是 Lebesgue 微分定理中均值过程的最坏描述, 上述不等式则是弱有界性的体现. 由之前的讨论:

$$m^*\left(\left\{\limsup_{r\to 0}|\mathsf{A}_r f-f|>\lambda\right\}\right)\leqslant m(\{|f-g|>\lambda\})+m(\{\mathsf{M}(f-g)>\lambda\}).$$

前者由 Chebyshev 不等式: $\leqslant m(\{|f-g|>\lambda\})\leqslant{}^{\|f-g\|_1}/_{\lambda}$, 后者由极大不等式: $m(\{\mathsf{M}(f-g)>\lambda\})\leqslant{}^{5^n\|f-g\|_1}/_{\lambda}$. 由 $\|g-f\|_1<\varepsilon$ 即得. $\square$

Lebesgue 微分定理可以证明一些看上去非常刁钻的结论:

- 若 $f\in\mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 都有 $\int f\phi=0$, 则 $f\overset{\text{a.e.}}{=}0$. 只需考虑令 ϕ 逼近 $\mathbb{1}_{B_r(x)}$ 即可: 令 $\phi|_{B_r(x)}\equiv 1$, $\operatorname{supp}\phi\subset B_{r+\varepsilon}(x)$, 则

$$\frac{1}{m(B_r(x))}\left|\int f\phi-\int_{B_r(x)}f\right|\leqslant\frac{1}{m(B_{r}(x))}\int_{B_{r+\varepsilon}(x)\setminus B_r(x)}|f|.$$

由积分的绝对连续性知其 $\to 0$, 故 $\int_{B_r(x)} f = 0 \implies f \overset{\text{a.e.}}{=} 0$.
这意味这我们可以将 $\mathfrak{L}^p$ 空间嵌入到分布空间中去.

- 令 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 可测, 且 $\{a_\bullet\}$ 是递减于 0 的列, $f(\cdot + a_\bullet) \overset{\text{a.e.}}{=} f$, 证明 f 几乎处处是常数. 直接可以得到

$$\exists y \in \mathbb{R}, \quad \int_{x-a_\bullet}^{x+a_\bullet} f \overset{\text{a.e. } x}{=} \int_{y-a_\bullet}^{y+a_\bullet} f.$$

然后由微分定理得到.

图 6: 枕头 »
https://www.ikea.com/in/en/p/skogsfraeken-pillow-high-70460531/

第六章 LEBESGUE 空间

数学分析中有一个类似于先有鸡先有蛋的难题: LEBESGUE 积分和 LEBESGUE 测度到底哪个先出现? 于我而言都不是; 首先出现的是 $\mathfrak{L}^1$ 空间.

Functional Analysis
PETER LAX

练习 6¹ 设 $f_\bullet \in \mathfrak{L}^{p_\bullet}$ 并且 $\mathrm{ind}(p_\bullet) \leqslant 1$, 则证明

$$\Big\|\prod f_\bullet\Big\|_{\mathrm{ind}(p_\bullet)} \leqslant \prod \|f_\bullet\|_{p_\bullet}.$$

解答 6¹ 只有两个 $f_\bullet$ 时, 有

$$f_\bullet^{\mathrm{ind}(p_\bullet)} \in \mathfrak{L}^{p_\bullet/\mathrm{ind}(p_\bullet)} \implies \prod f_\bullet \overset{\text{HÖLDER}}{\leqslant} \prod \|f_\bullet^{\mathrm{ind}(p_\bullet)}\|_{p_\bullet/\mathrm{ind}(p_\bullet)} = \prod \|f_\bullet\|_{p_\bullet}.$$

假定 k 个函数的情形已经证明完毕, 则 $k+1$ 个的情形:

$$\Big\|\prod_{j=1}^{k} f_j \cdot f_{k+1}\Big\|_{\mathrm{ind}(p_1,\ldots,p_{k+1})} \leqslant \|f_{k+1}\|_{p_{k+1}} \Big\|\prod_{j=1}^{k} f_j\Big\|_{\mathrm{ind}(p_1,\ldots,p_k)}.$$

因此归纳即得.

练习 6² 令 $m(E) < \infty$, 证明 $\mathfrak{L}^p(E)$ 收敛可以推出 $\mathfrak{L}^1(E)$ 收敛, $p \geqslant 1$.

解答 6² 由 HÖLDER 不等式:

$$\int |f| \leqslant \|f\|_p \|1\|_q = \|f\|_p m(E)^q.$$

练习 6³ 当 $m(E) < \infty$, 对于 $f \in \mathfrak{L}^p(E)$, 试证存在实数 c_f 使得

$$\|f - c_f\|_p = \inf\{\, \|f - c\|_p \mid c \in \mathbb{C}\,\}.$$

证明 $p = 2$ 时, c_f 唯一.

解答 6³ 不妨令 $m(E) \neq 0$. 则令 $g(c) = \|f - c\|_p$, 由于

$$\big|\|f - c\|_p - \|f - d\|_p\big| \leqslant \|c - d\|_p.$$

故 g 连续, 由 $g \geqslant 0$, $g(\infty) = \infty$, 故有最小值因此存在性证得. 现证明 $p = 2$ 情形的唯一性, 令 c_0, c_1 均满足题意, 则直接计算得到

$$\left\| f - \frac{c_0 + c_1}{2} \right\|_2^2 + \left\| \frac{c_0 - c_1}{2} \right\|_2^2 = \| f - c_0 \|_2^2.$$

(将 $\|f\|_2^2$ 拆成 $\int f\bar{f}$ 计算) 因此 $c_0 - c_1 = 0$, 否则 ${}^{c_0+c_1}/_2$ 是更优常数, 矛盾!

注. 对 $1 < p < \infty$ 和 $0 < m(E) < \infty$, 唯一性是成立的. 对于上面的问题, 我们做单位化后可以这样描述:

$$\|f - c_0\|_p = \|f - c_1\|_p = 1, \quad c_0 \neq c_1, \quad \left\| f - \frac{c_0 + c_1}{2} \right\|_p < 1.$$

由 Minkowski 不等式, $\|f - {}^{c_0+c_1}/_2\|_p \leqslant 1$, 由于 Minkowski 不等式取等当且仅当 (可以从其证明和 Hölder 不等式等号的成立性得到):

1. $p \in (1, \infty)$, $\|f + g\|_p \neq 0$ 时, 需要下面两者同时成立.
   1. $|f|$ 和 $|g|$ 线性相关;
   2. $\bigcup_{a \geqslant 0} \{g = af\} \cup \bigcup_{b \geqslant 0} \{bg = f\} \cup \{g + f = 0\}$ 几乎处处;

   也即是 f, g 非负线性相关.
2. $p = 1$, $\|f + g\|_1 \neq 0$ 时, 仅需 $\bigcup_{a \geqslant 0} \{g = af\} \cup \bigcup_{b \geqslant 0} \{bg = f\}$ 几乎处处;
3. $p \in [1, \infty)$, $\|f + g\|_p = 0$ 时, 须有 $\|f\|_p + \|g\|_p = 0$.

因此对 $1 < p < \infty$, 有

$$2\left\| f - \frac{c_0 + c_1}{2} \right\|_p = \|f - c_0\|_p + \|f - c_1\|_p \iff f \text{ 几乎处处为常数或 } c_0 = c_1.$$

因此唯一性证毕.

练习 6[4] 假定 $p \in (1, \infty)$, 举例说明下面集合非空:

1. $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}_{\geqslant 1}) \setminus \bigcup_{\delta > 0} L^{p+\delta}(\mathbb{R}_{\geqslant 1})$;
2. $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R}_{\geqslant 1}) \setminus \bigcup_{0 < \delta \leqslant p-1} \mathfrak{L}^{p-\delta}(\mathbb{R}_{\geqslant 1})$;
3. $\bigcap_{0 < \delta \leqslant p-1} \mathfrak{L}^{p-\delta}(\mathbb{R}_{\geqslant 1}) \setminus \mathfrak{L}^p(\mathbb{R}_{\geqslant 1})$.

解答 6[4] 关键思路是利用 log 来诱导 p 积分.

1. $f(x) = \left(\dfrac{\mathbb{1}_{(1, {}^3/_2)}(x)}{(x-1)\log^2(x-1)} \right)^{1/p}$.

2. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x\log^2(x+1)}\right)^{1/p}$.
3. $f(x) = \dfrac{\mathbb{1}_{(1,2)}(x)}{(x-1)^{1/p}}$.

! **练习 6⁵** 令 $f \in \mathfrak{L}^p(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $p \in (1,\infty)$. 若定义等价类

$$[f] = \{\, g \in \mathfrak{L}^p(E) \mid f \overset{\text{a.e.}}{=} g \,\}.$$

试证:

- 每个等价类中至多含有一个连续函数;
- 有的等价类中不含连续函数.

解答 6⁵ 第一款大概只在 E 中不存在零测非空开集的情形下成立, 也即:

$$\forall U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n, \quad U \cap E \neq \varnothing \implies m(E \cap U) > 0.$$

最显然的反例无非是 E 中含孤立点. 若这样的 U 存在, 只需考虑 0 和 $x \mapsto \inf\{\,|x-y| \mid y \in U^c\,\}$ 即可. 反之由于

第二款仅需考虑对连续函数 g, $\{g > a\}$ 必然是 E 中开集, 只需找一个集合 $F \subset R$ 与任何 E 中开集的对称差都恒正再令 $f = \mathbb{1}_F$ 即可. 另一个简明的例子如 $E = \mathbb{R}^n$, $f = \mathbb{1}_{[0,1]^n}$.

练习 6⁶ 试证当 $m(E) < \infty$ 时, 任意一个在 $\mathfrak{L}^p(E)$ 中收敛的函数列, 在 $\mathfrak{L}^r(E)$ 中也收敛, 并且极限函数相同. 其中 $1 \leqslant r < p$.

解答 6⁶ 见 [6²].

练习 6⁷ 若 $\{f_\bullet\}$ 是 $\mathfrak{L}^p([0,1])$ 中的函数列, 且依测度收敛于 0, $\|f_\bullet\|_p \leqslant 1$. 证明:

$$r \in [1,p) \implies \int |f_\bullet|^r \to 0.$$

解答 6⁷ 令 $E_\bullet = \{\,|f_\bullet| > \varepsilon\,\}$, 则 $m(E_\bullet) \to 0$. 估计 $\int |f_\bullet|^r$ 有:

$$\int |f_\bullet|^r = \int_{E_\bullet} |f_\bullet|^r + \int_{E_\bullet^c} |f_\bullet|^r \leqslant m(E_\bullet)^{p-r/p} + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon \to 0$ 得到.

练习 6⁸ 若 $\{f\} \cup \{f_\bullet\} \subset \mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$, 并且 $f_\bullet \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 证明

$$f_\bullet \xrightarrow{\mathfrak{L}^p} f \iff \|f_\bullet\|_p \to \|f\|_p.$$

解答 6⁸ ($\Longleftarrow$) 定义.

($\Longrightarrow$) 假令 $\lim \|f_{\bullet\bullet} - f\|_p > \varepsilon$. 为了利用 FL, 我们需要借用控制函数 $2^p(|f_\bullet|^p + |f|^p)$:

$$\begin{aligned} 2^{p+1}\|f\|_p^p &= \int \lim \left(2^p(|f_{\bullet\bullet}|^p + |f|^p) - |f_{\bullet\bullet} - f|^p\right) \\ &\leqslant \liminf \int \left(2^p(|f_\bullet|^p + |f|^p) - |f_{\bullet\bullet} - f|^p\right). \end{aligned}$$

由于 $\|f_\bullet\|^p \to \|f\|^p$, 两端相减可以得到 $\limsup \|f_{\bullet\bullet} - f\|_p \leqslant 0$, 即证所欲.

练习 6⁹ 设 $K \in \mathfrak{L}^0(\mathbb{R}^2)$, 且 $\int |K(x,y)|\,\mathrm{d}x \leqslant M$, $\int |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \leqslant M$ 对几乎处处的 x 和 y 都成立. 证明算子:

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

是强 (p,p) 的, 即 $\sup_{\|f\|^p \neq 0} \|Tf\|^p / \|f\|^p < \infty$. 其中 $p \in [1, \infty]$.

解答 6⁹ 先证明 $p \in (1, \infty)$ 的版本.

先凑出 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned} \int |K(x,-)f| = \int |K(x,-)|^{1/q}(|K(x,-)|^{1/p}|f|) &\leqslant \|K(x,-)^{1/q}\|_q \||K(x,-)|^{1/p} f\|_p \\ &\leqslant M^{1/q}\||K(x,-)|^{1/p} f\|_p. \end{aligned}$$

(对几乎处处的 x 成立), 直接积分:

$$\int \left(\int |K(x,y)f(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \leqslant M^{p/q} \int \|K(x,-)f^p\|_1\,\mathrm{d}x \leqslant M^{1+p/q}\|f\|_p^p.$$

即 $\|Tf\|_p \leqslant M\|f\|_p$.

$p = 1$ 时. $\int \left[\int |K(x,y)f(y)|\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \leqslant \int \left[\int |K(x,y)f(y)|\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \leqslant M \int |f| = M\|f_1\|$. $p = \infty$ 时, $\left|\int K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant Mf(x)$ 对几乎处处的 x 成立, 因此 $\|Tf\|_\infty \leqslant M\|f\|_\infty$.

练习 6¹⁰ 若 $f_\bullet \xrightarrow{\mathfrak{L}^2} f$, $g_\bullet \xrightarrow{\mathfrak{L}^2} g$, 证明 $f_\bullet g_\bullet \xrightarrow{\mathfrak{L}^1} fg$.

解答 6¹⁰ 只需注意到

$$\int |f_\bullet g_\bullet - fg| \leqslant \int |f_\bullet||g - g_\bullet| + \int |g||f - f_\bullet| \leqslant M(\|f - f_\bullet\|_2 + \|g - g_\bullet\|_2).$$

即可.

练习 6[11] 设 $\{f_\bullet\} \subset \mathfrak{L}^2$, 并且存在 $g \in \mathfrak{L}^2$ 满足 $|f_\bullet| \leqslant g$. 证明

$$f_\bullet \xrightarrow{\mathfrak{L}^2} f \iff f_\bullet \xrightarrow{\text{mea.}} f.$$

解答 6[11] $(\implies)$ 由 $\|f_\bullet - f\|^2 \leqslant 4g^2 \in \mathfrak{L}^1$ 和依测度控制收敛定理得到.

$(\implies)$ 由 $0 \leftarrow \int |f_\bullet - f| \geqslant \varepsilon^2 m(\{|f_\bullet - f| > \varepsilon\})$ 得到.

练习 6[12] 令 $f \in \mathfrak{L}^0$, $p \in (1, \infty)$, 若:

$$\forall g \in \mathfrak{L}^p(E), \quad \int |fg| < \infty \iff f \in \mathfrak{L}^q.$$

且

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_p \leqslant 1} \left| \int fg \right|.$$

解答 6[12] 先证后者:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^q, \quad \|f\|_q = \sup_{\|g\|_p \leqslant 1} \left| \int fg \right|.$$

令 $g = (\overline{\operatorname{sgn} f})|f|^{q-1}\|f\|_q^{1-q}$. 故 $\|g\|_p^p = \int |(\overline{\operatorname{sgn} f})|f|^{q-1}\|f\|_q^{1-q}|^p = 1$. 且

$$\left| \int fg \right| = \int \frac{f^q}{\|f\|_q^{q-1}} = \|f\|_q.$$

若题意中 $f \notin \mathfrak{L}^q$, 但 $\forall g \in \mathfrak{L}^p(E)$, $\int |fg| < \infty$. 令 E_n 满足:

$$4^n < \int_{E_n} |f|^q < \infty, \quad f_n = f\mathbb{1}_{E_n}, \quad g_n = \frac{(\overline{\operatorname{sgn} f_n})|f_n|^{q-1}}{\|f_n\|_q^{q-1}}.$$

因此 $\int |fg_n| \geqslant \int |f_n g_n| = \|f_n\|_q = 2^n$. 令 $g = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n}|g_n|$, 则

$$\|g\|_p \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{\|g_n\|_p}{2^n} = 1, \quad \int |fg| \geqslant \frac{1}{2^n} \int |fg_n| = 2^n.$$

矛盾!

练习 6[14] 设 $f \in \mathfrak{L}^2([0,1])$, 令 $Tf(x) = \int_0^x f$, 证明:

$$\|Tf\|_2 < \|f\|_2, \quad \text{除非 } f \overset{\text{a.e.}}{=} 0.$$

解答 6¹⁴ 假如令 $f \overset{\text{a.e.}}{\neq} 0$, 则存在 $z \in [0,1)$, $m(\{f \neq 0\}_{[0,z]}) > 0$. 在 [6⁹] 中利用 $K_c(x,t) = \mathbb{1}_{\{(a,b)\,|\,0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c\}}(x,t)$ 得到

$$\|T(f\mathbb{1}_{[0,z]})\|_2 \leqslant z\|f\mathbb{1}_{[0,z]}\|_2, \quad \|T(f\mathbb{1}_{[z,1]})\|_2 \leqslant \|f\mathbb{1}_{[z,1]}\|_2.$$

故 $\|Tf\|_2 \leqslant \|T(f\mathbb{1}_{[0,z]})\|_2 + \|T(f\mathbb{1}_{[z,1]})\|_2 < \|f\|_2$.

练习 6¹⁵ 证明: 若 $f \in \mathfrak{L}([0,1])$, 则 $f \in \mathfrak{L}^2([0,1])$ 当且仅当, 存在增函数 g 使得

$$\forall [a,b] \subset [0,1], \qquad \left|\int_a^b f\right|^2 \leqslant (g(b)-g(a))(b-a).$$

解答 6¹⁵ ($\Longrightarrow$) 由 HÖLDER 不等式, $|\int_a^b f|^2 \leqslant \int_a^b |f|^2 \int_a^b 1 = (b-a)\int_a^b |f|^2$. 只需令 $g(x) = \int_0^x |f|^2$ 即可.

($\Longleftarrow$) 由上, 容易猜想 g 应当就是 $|f|^2$ 的变上限积分, 因此考虑凑微分的变形:

$$\frac{|\int_a^b f|}{b-a} \leqslant \sqrt{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}.$$

令 $b \to a$ 得到 $|f(a)| \leqslant \sqrt{g'(a)}$ 对几乎所有 a 成立. 因此

$$\int |f|^2 \leqslant \int |g'| \leqslant g(b)-g(a).$$

练习 6¹⁶ 假定 $\{\varphi_\bullet\}$ 是 $\mathfrak{L}^2$ 上的标准正交基, $\{\psi_\bullet\}$ 是正交族且满足 $\sum \|\varphi_\bullet - \psi_\bullet\|_2^2 < 1$, 证明 $\{\psi_\bullet\}$ 也是完备的.

解答 6¹⁶ 假定 $f \perp \bigoplus \psi_\bullet$. 那么 $\langle f, \varphi_\bullet\rangle = \langle f, \varphi_\bullet - \psi_\bullet\rangle$. 由 PARSEVAL 等式:

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \sum |\langle f,\varphi_\bullet\rangle|^2 = \sum |\langle f, \varphi_\bullet - \psi_\bullet\rangle|^2 \\ &\leqslant \sum \|f\|_2^2 \|\varphi_\bullet - \psi_\bullet\|_2^2 \implies \sum \|\varphi_\bullet - \psi_\bullet\|_2^2 \geqslant 1.\end{aligned}$$

矛盾!

练习 6¹⁷ 设 $\{\varphi_\bullet\}$ 是 $\mathfrak{L}^2([a,b])$ 的标准正交基, $f \in \mathfrak{L}^2([a,b])$. 试证明对 (a,b) 的任一个可测子集 E 有

$$\int_E f = \sum \langle f, \varphi_\bullet\rangle \int_E \varphi_\bullet.$$

解答 6[17] 由 $f=\sum\langle f,\varphi_\bullet\rangle\varphi_\bullet$ 只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\int\sum\nolimits_{\geqslant N}\langle f,\varphi_\bullet\rangle\varphi_\bullet\to 0.$$

即可. 由 Hölder 不等式: $\left|\int\sum_{\geqslant N}\langle f,\varphi_\bullet\rangle\varphi_\bullet\right|\leqslant\left(\int\left|\sum_{\geqslant N}\langle f,\varphi_\bullet\rangle\varphi_\bullet\right|^2\right)^{1/2}\sqrt{m(E)}$. 积分号里的东西可以直接用 Parseval 等式估计:

$$\int\left|\sum\nolimits_{\geqslant N}\langle f,\varphi_\bullet\rangle\varphi_\bullet\right|^2=\sum\nolimits_{\geqslant N}\int|\langle f,\varphi_\bullet\rangle\varphi_\bullet|^2\xrightarrow{f\in\mathfrak{L}^2}0.$$

因此 $\int_E f=\sum\langle f,\varphi_\bullet\rangle\int_E\varphi_\bullet$.

图 7: 感谢您翻到最后一页, 该图是用于反馈的二维码. »