

# 高等实分析引论

Gerald B. Folland 著



## ▷ 前言

“实分析”一词首先是指实单变量或多变量函数的经典理论：极限，连续性，微分，Riemann 积分，无穷级数等相关主题。然而，时至今日，其包含了一些更抽象的理论，这些理论将实变函数论的思想扩展到更普遍的情形，又为某些具体的“经典”问题带来了新的启示。此更高等者乃本书之主题。

故本书的受众为已通晓经典实变函数论者。（关于这些主题有很多书，古老的经典是 [Rud76]，近来最引人入胜者为 [Kör04]。此外，亦有 Steven Krantz 所著之《MAA 导论》[Kra14] 与本书同时问世）。据 MAA 导论之理念，我将以简明之文对该主题加以阐释，使入门者览其概述，研习者深其洞见。基本定义，主要定理和证明的关键思想都含于其中，而不含技术细节。因此，书中多数正式陈述结果皆有证明思路随后，其完整程度差异甚大。很少或没有提供证明的结果分为两类，命其“命题”或“定理”以区分之。“命题”之证明较为简易，宜供读者以为练习。若称其为定理，则意味着其证明较为繁冗且不易删减。

自然，只有在读者有资源来填补空缺时，这种介绍方能具有效果。我把我自己的书 [Fol99] 作为内容远比本书丰富的标准参考，只因为我对它最熟悉。本书所示均已在 [Fol99] 证明，除了某些明确指明其他来源的结果。再者，[Lan12]，[RF88] 和 [Rud87] 亦涵盖大部分相同材料。

然而，本书并非 [Fol99] 的简写。教科书作者的一个主要问题是办法若干相互联系的材料线性叙出，如同小说家或历史学家一般，且解决方案并非唯一。我利用 MAA 导论所提供的机会，以一种与 [Fol99] 中完全不同的方式来安排这些主题。读者或可比较二者得见一二。

GERALD B. FOLLAND

西雅图，二〇〇九年四月



## ▷ 章一 引论: 记号, 术语和集合论

在此, 我们简明地讨论一些记号, 术语和集合论的基本事实, 这些结果将贯穿全书.

### 一 数

命

$\mathbb{N}$  = 正整数集,  $\mathbb{Z}$  = 整数集,

$\mathbb{R}$  = 实数集,  $\mathbb{C}$  = 复数集.

用“两个无穷”,  $\infty$  (或用  $+\infty$  以示强调) 和  $-\infty$  延拓实数系乃人之常情. 在广义实数系  $\mathbb{R} \cap \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$  中, 任意集合  $E$  均匀最小上界 (上确界) 和最大下界 (下确界), 用  $\sup E, \inf E$  以记之. 再者, 非负数的无穷求和可在  $[0, \infty]$  中良定, 亦即部分和之上确界.

若令  $z = x + iy$  为复数, 其共轭  $x - iy$  用  $\bar{z}$  记之, 其绝对值或模  $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  记为  $|z|$ .

实 (复)  $n$  元有序对空间用  $\mathbb{R}^n$  或  $\mathbb{C}^n$  表示, 令  $u = (u_1, \dots, u_n)$  含于  $\mathbb{R}^n$  或  $\mathbb{C}^n$ , 则其 Euclidean 范数记为  $|u|$ :

$$|u| = \left( \sum_{j=1}^n |u_j|^2 \right)^{1/2}.$$

自然地, 定义  $\mathbb{R}^n$  元素的乘积为

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^n u_j v_j.$$

## 二 集合与映射

现应用集合论的标准记号:  $E = F$  的情形亦可以被  $E \subset F$  解释, 令其相对补集  $E \setminus F$  为

$$E \setminus F = \{x \in E \mid x \notin F\}.$$

以  $\emptyset$  表空集. 不交集族即满足  $\alpha \neq \beta \implies E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$  的  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

若考虑固定底空间  $X$  之子集, 可简化其补集描述, 记之为

$$E^c = X \setminus E.$$

此时应用 De Morgan 律, 若  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$  是  $X$  的一组子集, 则

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha^c.$$

以  $\mathcal{P}(X)$  记  $X$  (含  $X$  和  $\emptyset$ ) 的全体子集.

令  $X, Y$  为非空集. 以严谨集合论之论述,  $X$  至  $Y$  的映射乃有序对  $(x, y)$  的全体  $f$ , 其满足  $x \in X, y \in Y$  且任意  $x \in X$  存在唯一  $y \in Y$  (以  $f(x)$  记之) 使  $(x, y) \in f$ . (自然, 在较为随意的场合可认为映射乃将  $x \in X$  射往  $f(x) \in Y$  的“规则”.) 称映射  $f: X \rightarrow Y$  为单射仅当  $x_1 \neq x_2$  时  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ; 称其满射若  $\{f(x) \mid x \in X\} = Y$ ; 称其双射若单满兼得. 如欲描述匿名映射仅以记号  $x \mapsto y$  标示  $y$  是  $x$  在该映射下之像; 兹举一例:  $\mathbb{R}^2$  上的平方函数  $x \mapsto x^2$ .

每个映射  $f: X \rightarrow Y$  可诱导一个  $\mathcal{P}(X)$  至  $\mathcal{P}(Y)$  的映射, 仍以  $f$  记之:

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

$\mathcal{P}(X)$  至  $\mathcal{P}(Y)$  的映射  $f^{-1}$  同理:

$$f^{-1}(E) = \{x \mid f(x) \in E\}.$$

原像映射  $f^{-1}$  保持交并补的事实非同小可:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha),$$

$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c.$$

(像映射  $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  保持并, 但若  $f$  非单则不保持交, 非双则不保持补.)

令  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  为指标集族. 其 Cartesian 积以  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  记之, 其为所有  $f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  且  $f(\alpha) \in X_\alpha$  的映射构成:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}$$

若  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , 则第  $\alpha$  个坐标映射  $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$  用  $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$  定义; 常以  $x, x_\alpha$  替以  $f$  和  $f(\alpha)$ , 且称  $x_\alpha$  为  $x$  第  $\alpha$  个坐标.

### 三 Zorn 引理

很多时候, 特别是处理非常普遍的背景时, 我们需要一个定理来断言某些数学对象的存在性, 却无法明确构造之. 通常, 解决这个问题所需的策略来自一些与偏序集相有关的集合论原理. 必要定义陈列如下.

偏序集乃集合  $X$  赋予二元关系  $\leq$  满足以下所需:

1. 若  $x \leq y, y \leq z$ , 则  $x \leq z$ ;
2. 若  $x \leq y, y \leq x$ , 则  $x = y$ ;
3. 对任意  $x, x \leq x$ .

称偏序集全序若其满足

4. 若  $x, y \in X$ , 则  $x \leq y$  或  $y \leq x$ .

偏序集的极大元是令满足  $x \leq y$  仅有  $x$  本身的元素  $x$ .

例如,  $\mathbb{R}$  在一般序  $\leq$  全序; 对任意集合  $S$ ,  $\mathcal{P}(S)$  以嵌入关系  $\subset$  为偏序. 若令  $X$  为其真子集全体, 赋予嵌入关系偏序, 其极大元是补集单元的子集. 无限集合的全体有限子集无极大元.

在一般的存在性原理中, 最耳熟能详的当属 Zorn 引理:

**定理 (Zorn 引理).** 令偏序集  $X$  满足其任一全序子集  $L$  都有上界 (亦即,  $x \in X$  使得对任意  $y \in L$  都有  $y \leq x$ ), 则  $X$  有极大元.

Hausdorff 极大原理是另一知名表述: 每个偏序集都有一个极大全序子集. (事实上,  $X$  的极大全序子集的上界是  $X$  的极大元. 反之, 对  $X$  的极大全序子集全体以嵌入为偏序应用 Zorn 定理, 可得到一个极大全序子集.)

另一个存在性原理是选择公理, 其表述为: 若  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  是非空集族, 则可在  $X_\alpha$  元素中择一构建集合  $Y$ . 注意到 Cartesian 积  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  中元之值域即是此类集合, 故可将选择公理陈述如下:

**定理** (选择公理). 非空集族的 Cartesian 积非空.

Zorn 引理蕴含选择公理. (考虑从  $A$  的子集射往  $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  满足对  $f$  定义域内的  $\alpha$  都有  $f(\alpha) \in X_\alpha$  的  $f$  组成的函数族  $\mathcal{F}$ , 若  $f \leq g$  则  $\text{dom}(g) \supset \text{dom}(f)$  且  $g|_{\text{dom}(f)} = f$ , 以此赋予偏序.) 亦可由 Zorn 引理证明选择公理, 但其讨论错综复杂. (与此相关的材料可见 Halmos [7].) 以上原理都不能由标准集合论推出.

正如 Zorn 引理, 此类非构造性存在性定理的使用并非毫无争议, 然而, 大多数数学家认为它们完全合法, 同时, 当构造性方法可用时, 它们往往更富有信息.



## ▷ 章二 拓扑

本章所述为点集拓扑学, 亦名一般拓扑学, 乃用以探究极限, 连续性及集合相关几何属性的抽象数学框架.

### 一 度量空间

二十世纪初, 数学突飞猛进发展, 抽象性, 普遍性大为提升. 彼时, 数学家开创一系列理论, 可广纳万象, 以探究极限与连续之思, 而此前, 此思想只止于 Euclidean 空间中子集, 或是一元, 多元实或复函数.

基于此, Euclidean 空间最直接的推广乃度量空间, 其乃一非空集合  $X$  赋予一函数

$$\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty).$$

(一个度量) 满足以下所需:

1. 对任意  $x, y \in X$ ,  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  成立;
2. (三角不等式) 对任意  $x, y, z \in X$ ,  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  成立;
3.  $\rho(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ .

可认为  $\rho(x, y)$  是  $x$  至  $y$  的距离. 称上为“度量空间  $(X, \rho)$ ”, 若  $\rho$  自明, 则可用度量空间  $X$  称之.

举数例辅之:

- $X = \mathbb{R}^n$  中子集;  $\rho(x, y) = (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2)^{1/2}$  ( $x$  至  $y$  的 Euclidean 度量).
- $X = \mathbb{R}^3$  中单位球;  $\rho(x, y)$  是  $x$  至  $y$  的大圆距离.

- $X = \mathbb{R}^n$  中光滑曲线;  $\rho(x, y)$  为  $x$  至  $y$  对应曲线长度. (即,  $X$  是一一  $C^{(1)}$  映射  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  之像, 使  $x = \phi(s)$ ,  $y = \phi(t)$ , 则  $\rho(x, y) = \int_s^t |\phi'| \cdot ds$ .)

## ▷ 参考文献

- [Fol99] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [Kör04] Thomas William Körner. *A companion to analysis: a second first and first second course in analysis*, volume 62. American Mathematical Soc., 2004.
- [Kra14] Steven G Krantz. *A guide to real variables*. Number 38. American Mathematical Soc., 2014.
- [Lan12] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142. Springer Science & Business Media, 2012.
- [RF88] Halsey Lawrence Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York, 1988.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-hill New York, 1987.