

高等实分析引论

Gerald B. Folland 著

小飞舞 译

▷ 前言

“实分析”一词首先是指实单变量或多变量函数的经典理论：极限，连续性，微分，Riemann 积分，无穷级数等相关主题。然而，时至今日，其包含了一些更抽象的理论，这些理论将实变函数论的思想扩展到更普遍的情形，又为某些具体的“经典”问题带来了新的启示。这个更高等的部分是本书的主题。

故本书的受众是那些已通晓经典实变函数论的人。（关于这些主题有很多书，古老的经典是 [Rud76]，最近最引人入胜者为 [Kör04]。此外，亦有 Steven Krantz 所著之《MAA 导论》[Kra14] 与本书同时问世）。根据 MAA 导论的理念，我的目的是用简明的文章对该主题进行说明，为入门者提供概述，为已学习过者提供复习。基本定义，主要定理和证明的关键思想都包括在内，而不含技术细节。因此，书中大多数正式陈述的结果后面都有证明的草图，其完整程度差别很大。很少或没有提供证明的结果分为两类，用“命题”和“定理”的命名以区分之。“命题”的证明是很容易的，读者应它作为练习。若称其为定理，则意味着其证明较为冗长且不易删减。

自然，只有在读者有资源来填补空缺时，这种介绍才有效。我把我自己的书 [Fol99] 作为内容远比本书丰富的标准参考，只因为我对它最熟悉。本书所示均已在 [Fol99] 证明，除了某些明确指明其他来源的结果。再者，[Lan12]，[RF88] 和 [Rud87] 亦涵盖大部分相同材料。

然而，本书并非 [Fol99] 的简写。教科书作者的一个主要问题是办法若干相互联系的材料线性叙出，如同小说家或历史学家一般，且解决方案并非唯一。我利用 MAA 导论所提供的机会，以一种与 [Fol99] 中完全不同的方式来安排这些主题。这两本书的读者也许会通过比较这两者得到一些见解。

▷ 章一 引论: 记号, 术语和集合论

在此, 我们简明地讨论一些记号, 术语和集合论的基本事实, 这些结果将贯穿全书.

一 数

命

\mathbb{N} = 正整数集, \mathbb{Z} = 整数集,

\mathbb{R} = 实数集, \mathbb{C} = 复数集.

用“两个无穷”, ∞ (或用 $+\infty$ 以示强调) 和 $-\infty$ 延拓实数系乃人之常情. 在广义实数系 $\mathbb{R} \cap \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$ 中, 任意集合 E 均匀最小上界 (上确界) 和最大下界 (下确界), 用 $\sup E, \inf E$ 以记之. 再者, 非负数的无穷求和可在 $[0, \infty]$ 中良定, 亦即部分和之上确界.

若令 $z = x + iy$ 为复数, 其共轭 $x - iy$ 用 \bar{z} 记之, 其绝对值或模 $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 记为 $|z|$.

实 (复) n 元有序对空间用 \mathbb{R}^n 或 \mathbb{C}^n 表示, 令 $u = (u_1, \dots, u_n)$ 含于 \mathbb{R}^n 或 \mathbb{C}^n , 则其 Euclidean 范数记为 $|u|$:

$$|u| = \left(\sum_{j=1}^n |u_j|^2 \right)^{1/2}.$$

自然地, 定义 \mathbb{R}^n 元素的乘积为

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^n u_j v_j.$$

二 集合与映射

现应用集合论的标准记号: $E = F$ 的情形亦可以被 $E \subset F$ 解释, 令其相对补集 $E \setminus F$ 为

$$E \setminus F = \{x \in E \mid x \notin F\}.$$

以 \emptyset 表空集. 不交集族即满足 $\alpha \neq \beta \implies E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ 的 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

若考虑固定底空间 X 之子集, 可简化其补集描述, 记之为

$$E^c = X \setminus E.$$

此时应用 De Morgan 律, 若 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 X 的一组子集, 则

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha^c.$$

以 $\mathcal{P}(X)$ 记 X (含 X 和 \emptyset) 的全体子集.

令 X, Y 为非空集. 以严谨集合论之论述, X 至 Y 的映射乃有序对 (x, y) 的全体 f , 其满足 $x \in X, y \in Y$ 且任意 $x \in X$ 存在唯一 $y \in Y$ (以 $f(x)$ 记之) 使 $(x, y) \in f$. (自然, 在较为随意的场合可认为映射乃将 $x \in X$ 射往 $f(x) \in Y$ 的“规则”.) 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 为单射仅当 $x_1 \neq x_2$ 时 $f(x_1) \neq f(x_2)$; 称其满射若 $\{f(x) \mid x \in X\} = Y$; 称其双射若单满兼得. 如欲描述匿名映射仅以记号 $x \mapsto y$ 标示 y 是 x 在该映射下之像; 兹举一例: \mathbb{R}^2 上的平方函数 $x \mapsto x^2$.

每个映射 $f: X \rightarrow Y$ 可诱导一个 $\mathcal{P}(X)$ 至 $\mathcal{P}(Y)$ 的映射, 仍以 f 记之:

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

$\mathcal{P}(X)$ 至 $\mathcal{P}(Y)$ 的映射 f^{-1} 同理:

$$f^{-1}(E) = \{x \mid f(x) \in E\}.$$

原像映射 f^{-1} 保持交并补的事实非同小可:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha),$$

$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c.$$

(像映射 $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ 保持并, 但若 f 非单则不保持交, 非双则不保持补.)

令 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为指标集族. 其 Cartesian 积以 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 记之, 其为所有 $f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 且 $f(\alpha) \in X_\alpha$ 的映射构成:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}$$

若 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, $\alpha \in A$, 则第 α 个坐标映射 $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ 用 $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$ 定义; 常以 x, x_α 替以 f 和 $f(\alpha)$, 且称 x_α 为 x 第 α 个坐标.

三 Zorn 引理

很多时候, 特别是处理非常普遍的背景时, 我们需要一个定理来断言某些数学对象的存在性, 却无法明确构造之. 通常, 解决这个问题所需的策略来自一些与偏序集相有关的集合论原理. 必要定义陈列如下.

偏序集乃集合 X 赋予二元关系 \leq 满足以下所需:

1. 若 $x \leq y, y \leq z$, 则 $x \leq z$;
2. 若 $x \leq y, y \leq x$, 则 $x = y$;
3. 对任意 $x, x \leq x$.

称偏序集全序若其满足

4. 若 $x, y \in X$, 则 $x \leq y$ 或 $y \leq x$.

偏序集的极大元是令满足 $x \leq y$ 仅有 x 本身的元素 x .

例如, \mathbb{R} 在一般序 \leq 全序; 对任意集合 S , $\mathcal{P}(S)$ 以嵌入关系 \subset 为偏序. 若令 X 为其真子集全体, 赋予嵌入关系偏序, 其极大元是补集单元的子集. 无限集合的全体有限子集无极大元.

在一般的存在性原理中, 最耳熟能详的当属 Zorn 引理:

定理 (Zorn 引理). 令偏序集 X 满足其任一全序子集 L 都有上界 (亦即, $x \in X$ 使得对任意 $y \in L$ 都有 $y \leq x$), 则 X 有极大元.

Hausdorff 极大原理是另一知名表述: 每个偏序集都有一个极大全序子集. (事实上, X 的极大全序子集的上界是 X 的极大元. 反之, 对 X 的极大全序子集全体以嵌入为偏序应用 Zorn 定理, 可得到一个极大全序子集.)

另一个存在性原理是选择公理, 其表述为: 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是非空集族, 则可在 X_α 元素中择一构建集合 Y . 注意到 Cartesian 积 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 中元之值域即是此类集合, 故可将选择公理陈述如下:

定理 (选择公理). 非空集族的 Cartesian 积非空.

Zorn 引理蕴含选择公理. (考虑从 A 的子集射往 $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 满足对 f 定义域内的 α 都有 $f(\alpha) \in X_\alpha$ 的 f 组成的函数族 \mathcal{F} , 若 $f \leq g$ 则 $\text{dom}(g) \supset \text{dom}(f)$ 且 $g|_{\text{dom}(f)} = f$, 以此赋予偏序.) 亦可由 Zorn 引理证明选择公理, 但其讨论错综复杂. (与此相关的材料可见 Halmos [7].) 以上原理都不能由标准集合论推出.

正如 Zorn 引理, 此类非构造性存在性定理的使用并非毫无争议, 然而, 大多数数学家认为它们完全合法, 同时, 当构造性方法可用时, 它们往往更富有信息.

▷ 章二 拓扑

本章所述为点集拓扑学, 亦名一般拓扑学, 乃用以探究极限, 连续性及集合相关几何属性的抽象数学框架.

一 度量空间

二十世纪初, 数学突飞猛进发展, 抽象性, 普遍性大为提升. 彼时, 数学家开创一系列理论, 可广纳万象, 以探究极限与连续之思, 而此前, 此思想只止于 Euclidean 空间中子集, 或是一元, 多元实或复函数.

基于此, Euclidean 空间最直接的推广乃度量空间, 其乃一非空集合 X 赋予一函数

$$\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty).$$

(一个度量) 满足以下所需:

1. 对任意 $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 成立;
2. (三角不等式) 对任意 $x, y, z \in X$, $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 成立;
3. $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

可认为 $\rho(x, y)$ 是 x 至 y 的距离. 称上为“度量空间 (X, ρ) ”, 若 ρ 自明, 则可用度量空间 X 称之.

举数例辅之:

- $X = \mathbb{R}^n$ 中子集; $\rho(x, y) = (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2)^{1/2}$ (x 至 y 的 Euclidean 度量).
- $X = \mathbb{R}^3$ 中单位球; $\rho(x, y)$ 是 x 至 y 的大圆距离.

- $X = \mathbb{R}^n$ 中光滑曲线; $\rho(x, y)$ 为 x 至 y 对应曲线长度. (即, X 是一一 $C^{(1)}$ 映射 $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 之像, 使 $x = \phi(s)$, $y = \phi(t)$, 则 $\rho(x, y) = \int_s^t |\phi'| \cdot ds$.)

▷ 参考文献

- [Fol99] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [Kör04] Thomas William Körner. *A companion to analysis: a second first and first second course in analysis*, volume 62. American Mathematical Soc., 2004.
- [Kra14] Steven G Krantz. *A guide to real variables*. Number 38. American Mathematical Soc., 2014.
- [Lan12] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142. Springer Science & Business Media, 2012.
- [RF88] Halsey Lawrence Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York, 1988.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-hill New York, 1987.