高等实分析引论

Gerald B. Folland

2023 年 5 月 22 日

▷ 前言

“实分析” 一词首先是指实单变量或多变量函数的经典理论: 极限, 连续性, 微分, Riemann 积分, 无穷级数等相关主题. 然而, 时至今日, 其包含了一些更抽象的理论, 这些理论将实变函数论的思想扩展到更普遍的情形, 又为某些具体的 “经典” 问题带来了新的启示. 这个更高等的部分是本书的主题.

故本书的受众是那些已通晓经典实变函数论的人. (关于这些主题有很多书, 古老的经典是 Rudin[16], 最近最有吸引力的是 Körner[10]. 此外, 由 Steven Krantz 编写的《MAA 指南》[11] 与这本指南同时出现). 根据 MAA 指南的理念, 我的目的是用简明的文章对该主题进行说明, 为入门者提供概述, 为已学习过者提供复习. 基本定义, 主要定理和证明的关键思想都包括在内, 而不含技术细节. 因此, 书中大多数正式陈述的结果后面都有证明的草图, 其完整程度差别很大. 很少或没有提供证明的结果分为两类, 用 “命题” 和 “定理” 的命名以区分之. “命题” 的证明是很容易的, 读者应它作为练习. 若称其为定理, 则意味着其证明较为冗长且不易删减.

自然, 只有在读者有资源来填补空缺时, 这种介绍才有效. 我把我自己的书 [6] 作为内容远比本书丰富的标准参考, 只因为我对它最熟悉. 本书所示均已在 [6] 证明, 除了某些明确指明其他来源的结果. 再者, Lang[12], Royden[15] 和 Rudin[17] 亦涵盖大部分相同材料.

然而, 本书并非 [6] 的简写. 教科书作者的一个主要问题是办法若干相互联系的材料线性叙出, 如同小说家或历史学家一般, 且解决方案并非唯一. 我利用 MAA 指南所提供的机会, 以一种与 [6] 中完全不同的方式来安排这些主题. 这两本书的读者也许会通过比较这两者得到一些见解.

▷ 章一　引论: 记号, 术语和集合论

在此, 我们简明地讨论一些记号, 术语和集合论的基本事实, 这些结果将贯穿全书.

一　数

命

$$\mathbb{N} = \text{正整数集}, \quad \mathbb{Z} = \text{整数集},$$
$$\mathbb{R} = \text{实数集}, \quad \mathbb{C} = \text{复数集}.$$

用 "两个无穷", ∞(或用 $+\infty$ 以示强调) 和 $-\infty$ 延拓实数系乃人之常情. 在广义实数系 $\mathbb{R} \cap \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$ 中, 任意集合 E 均匀最小上界 (上确界) 和最大下界 (下确界), 用 $\sup E$, $\inf E$ 以记之. 再者, 非负数的无穷求和可在 $[0, \infty]$ 中良定, 亦即部分和之上确界.

若令 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数, 其共轭 $x - \mathrm{i}y$ 用 $\bar{z}$ 记之, 其绝对值或模 $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 记为 $|z|$.

实 (复) n 元有序对空间用 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 表示, 令 $u = (u_1, \ldots, u_n)$ 含于 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$, 则其 Euclidean 范数记为 $|u|$:

$$|u| = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^2\right)^{1/2}.$$

自然地, 定义 $\mathbb{R}^n$ 元素的乘积为

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j.$$

二　集合与映射

现应用集合论的标准记号: $E = F$ 的情形亦可以被 $E \subset F$ 解释, 令其相对补集 $E \setminus F$ 为

$$E \setminus F = \{\, x \in E \mid x \in F \,\}.$$

以 $\varnothing$ 表空集. 不交集族即满足 $\alpha \neq \beta \implies E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$ 的 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

若考虑固定底空间 X 之子集, 可简化其补集描述, 记之为

$$E^{\complement} = X \setminus E.$$

此时应用 De Morgan 律, 若 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的一组子集, 则

$$\Bigl(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\Bigr)^{\complement} = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha^{\complement}, \quad \Bigl(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\Bigr)^{\complement} = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha^{\complement}.$$

以 $\mathcal{P}(X)$ 记 X(含 X 和 $\varnothing$) 的全体子集.

令 X, Y 为非空集. 以严谨集合论之论述, X 至 Y 的映射乃有序对 (x, y) 的全体 f, 其满足 $x \in X$, $y \in X$ 且任意 $x \in X$ 存在唯一 $y \in Y$(以 $f(x)$ 记之) 使 $(x, y) \in f$. (自然, 在较为随意的场合可认为映射乃将 $x \in X$ 射往 $f(x) \in Y$ 的 "规则".) 称映射 $f : X \to Y$ 为单射仅当 $x_1 = x_2$ 时 $f(x_1) = f(x_2)$; 称其满射若 $\{\, f(x) \mid x \in X \,\} = Y$; 称其双射若单满兼得. 如欲描述匿名映射仅以记号 $x \mapsto y$ 标示 y 是 x 在该映射下之像; 兹举一例: $\mathbb{R}^2$ 上的平方函数 $x \mapsto x^2$.

每个映射 $f : X \to Y$ 可诱导一个 $\mathcal{P}(X)$ 至 $\mathcal{P}(Y)$ 的映射, 仍以 f 记之:

$$f(E) = \{\, f(x) \mid x \in E \,\}.$$

$\mathcal{P}(X)$ 至 $\mathcal{P}(Y)$ 的映射 f^{-1} 同理:

$$f^{-1}(E) = \{\, x \mid f(x) \in E \,\}.$$

原像映射 f^{-1} 保持交并补的事实非同小可:

$$f^{-1}\Bigl(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\Bigr) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\Bigl(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\Bigr) = \bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha),$$

$$f^{-1}(E^{\complement}) = \bigl(f^{-1}(E)\bigr)^{\complement}.$$

(像映射 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ 保持并, 但若 f 非单则不保持交, 非双则不保持补.)

令 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为指标集族. 其 Cartesian 积以 $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 记之, 其为所有 $f:A\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ 且 $f(\alpha)\in X_\alpha$ 的映射构成:

$$\prod_{\alpha\in A}X_\alpha=\left\{f:A\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha\;\middle|\;f(\alpha)\in X_\alpha,\forall\alpha\in A\right\}$$

若 $X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$, $\alpha\in A$, 则第 a 个坐标映射 $\pi_\alpha:X\to X_\alpha$ 用 $\pi_\alpha(f)=f(\alpha)$ 定义; 常以 x, x_α 替以 f 和 $f(\alpha)$, 且称 x_α 为 x 第 α 个坐标.

三 Zorn 引理

很多时候, 特别是处理非常普遍的背景时, 我们需要一个定理来断言某些数学对象的存在性, 却无法明确构造之. 通常, 解决这个问题所需的策略来自一些与偏序集相有关的集合论原理. 必要定义陈列如下.

偏序集乃集合 X 赋予二元关系 $\leqslant$ 满足以下所需:

1. 若 $x\leqslant y$, $y\leqslant z$, 则 $x\leqslant z$;
2. 若 $x\leqslant y$, $y\leqslant x$, 则 $x=x$;
3. 对任意 x, $x\leqslant x$.

称偏序集全序若其满足

4. 若 $x,y\in X$, 则 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$.

偏序集的极大元是令满足 $x\leqslant y$ 仅有 x 本身的元素 x.

例如, $\mathbb{R}$ 在一般序 $\leqslant$ 全序; 对任意集合 S, $\mathcal{P}(S)$ 以嵌入关系 $\subset$ 为偏序. 若令 X 为其真子集全体, 赋予嵌入关系偏序, 其极大元是补集单元的子集. 无限集合的全体有限子集无极大元.

在一般的存在性原理中, 最耳熟能详的当属 Zorn 引理:

定理 (Zorn 引理). *令偏序集 X 满足其任一全序子集 L 都有上界 (亦即, $x\in X$ 使得对任意 $y\in L$ 都有 $y\leqslant x$), 则 X 有极大元.*

Hausdorff 极大原理是另一知名表述: 每个偏序集都有一个极大全序子集. (事实上, X 的极大全序子集的上界是 X 的极大元. 反之, 对 X 的极大全序子集全体以嵌入为偏序应用 Zorn 定理, 可得到一个极大全序子集.)

另一个存在性原理是选择公理, 其表述为: 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是非空集族, 则可在 X_α 元素中择一构建集合 Y. 注意到 Cartesian 积 $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 中元之值域即是此类集合, 故可将选择公理陈述如下:

定理 (选择公理). *非空集族的 Cartesian 积非空.*

Zorn 引理蕴含选择公理. (考虑从 A 的子集射往 $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 满足对 f 定义域内的 α 都有 $f(\alpha)\in X_\alpha$ 的 f 组成的函数族 $\mathcal{F}$, 若 $f\leqslant g$ 则 $\mathrm{dom}(g)\supset\mathrm{dom}(f)$ 且 $g|_{\mathrm{dom}(f)}=f$, 以此赋予偏序.) 亦可由 Zorn 引理证明选择公理, 但其讨论错综复杂. (与此相关的材料可见 Halmos [7].) 以上原理都不能由标准集合论推出.

正如 Zorn 引理, 此类非构造性存在性定理的使用并非毫无争议, 然而, 大多数数学家认为它们完全合法, 同时, 当构造性方法可用时, 它们往往更富有信息.

▷ 章二　拓扑

本章所述为点集拓扑学, 亦名一般拓扑学, 乃用以探究极限, 连续性及集合相关几何属性的抽象数学框架.

一　度量空间

二十世纪初, 数学突飞猛进发展, 抽象性, 普遍性大为提升. 彼时, 数学家开创一系列理论, 可广纳万象, 以探究极限与连续之思, 而此前, 此思想只止于 Euclidean 空间中子集, 或是一元, 多元实或复函数.

基于此, Euclidean 空间最直接的推广乃度量空间, 其乃一非空集合 X 赋予一函数

$$\rho : X \times X \to [0, \infty).$$

(一个度量) 满足以下所需:

1. 对任意 $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 成立;
2. (三角不等式) 对任意 $x, y, z \in X$, $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 成立;
3. $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

可认为 $\rho(x, y)$ 是 x 至 y 的距离. 称上为 "度量空间 (X, ρ)", 若 ρ 自明, 则可用度量空间 X 称之.

举数例辅之:

- $X = \mathbb{R}^n$ 中子集; $\rho(x, y) = (\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2)^{1/2}$ (x 至 y 的 Euclidean 度量).
- $X = \mathbb{R}^3$ 中单位球; $\rho(x, y) = x$ 至 y 的大圆距离.

- $X=\mathbb{R}^n$ 中光滑曲线; $\rho(x,y)=x$ 至 y 对应曲线长度. (即, X 是一一 $C^{(1)}$ 映射 $\phi:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ 之像, 使 $x=\phi(s)$, $y=\phi(t)$, 则 $\rho(x,y)=\int_s^t|\psi'|$.)