《高等数学》第十一章习题解答

习题11.1

1. 判别下列广义积分的敛散性; 若收敛, 求出其值.

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^{+\infty} = 1$.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln\frac{x+1}{x+2}|_0^{+\infty} = \ln 2$.

(3) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x-a=\sqrt{2}\sigma t}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1\ (\sigma > 0)$.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx \overset{u=x-x^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(5) $\int_0^{+\infty} x\sin xdx = (-x\cos x + \sin x)|_0^{+\infty}$, 发散.

(6) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1} = 2\arctan t|_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$.

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}dx = \arctan(x+1)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

(9) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xdx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

(10) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$.

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x|_0^{\frac{1}{2}}$, 发散.

(12) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}$.

3. 判断下列积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+3}}$. 因为$\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+3}} < \frac{1}{x^2}$, 且积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$收敛, 原积分收敛.

(2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}$. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}/\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, 且积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$发散, 原积分发散.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^3}$. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^3}/\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{3}$, 且积分$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$收敛, 原积分收敛.

(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$. 因为$\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}/\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 且积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$收敛, 原积分收敛.

(5) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$. 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^{3/2}}/\frac{1}{x^{1/2}} = 1$, 且积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{1/2}}$收敛, 原积分收敛.

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$, 积分无瑕点. 因为当$x \to +\infty$时, 函数$\frac{1}{x}$单调趋于0, 且$|\int_0^A \sin xdx| \le 2$, 根据狄利克雷判别法, 原积分收敛.

(7) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x^2}dx\ (\alpha > 0)$. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha e^{-x^2}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 0$, 且积分$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$收敛, 原积分收敛.

(8) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, 1不是瑕点. 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{1-x}/\ln x = 1$, 且积分$\int_0^1 \ln xdx = (x\ln x - x)|_0^1 = -1$收敛, 原积分收敛.

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. 0与$\frac{\pi}{2}$是瑕点. 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}/\frac{1}{x^2} = 1$, 且积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^2}$发散, 原积分发散.

4. 判断下列积分是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+3}dx$.

解. 当n为非负整数时, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sqrt{n\pi}|\cos x|}{(n+1)\pi+3}dx = \frac{2\sqrt{n\pi}}{(n+1)\pi+3}$. $\int_0^{n\pi} \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\sqrt{k\pi}}{(k+1)\pi+3}$. 所以积分$\int_0^A \frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx$无界, 原积分不绝对收敛.

因为$(\frac{\sqrt{x}}{x+3})' = \frac{3-x}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$, 所以当$x$充分大时, 函数$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$单调递减. 由于$x \to +\infty$时, $\frac{\sqrt{x}}{x+3} \to 0$, 又因为$|\int_0^A \cos x dx| \leq 2$, 由狄利克雷判别法, 原积分收敛.
综上所述, 原积分条件收敛.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{x^3+1}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

解. 因为$|\frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{x^3+1}\sqrt[3]{x^2+1}}| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}}$, 且积分$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}}$收敛, 原积分绝对收敛.

5. 叙述关于瑕积分的狄利克雷判别法及阿贝尔判别法.

(i) 狄利克雷判别法: 设函数$f(x), g(x)$在$(a, b]$上有定义, 且a是它们的瑕点. 设存在常数$M > 0$, 使得对一切$0 < \varepsilon < b-a$, $|\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx| \leq M$. 又设函数$g(x)$在$x \to a+0$时单调趋于0, 则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

(ii) 阿贝尔判别法: 设函数$f(x), g(x)$在$(a, b]$上有定义, 且a是它们的瑕点. 若瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛, 且函数$g(x)$在$(a, b]$上单调有界, 则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

习题11.2

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{k\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. 以$\varphi, k$为变量的二元函数$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$在$[0, \frac{\pi}{2}]\times[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$上连续, 因此原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{k\to 1-0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$. 以$\varphi, k$为变量的二元函数$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$在$[0, \frac{\pi}{2}]\times [0, 1]$上连续, 因此原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{k\to 1-0} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 1$.

(4) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_0^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$. 二元函数$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$在全平面上连续, 所以$\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. 又因为$|\int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}| \leq |\int_1^{1+\alpha} dx| = |\alpha|$, 所以$\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = 0$. 综上所述, 原式$= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$.

(5) $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 \frac{e^x \sin xy}{y+1}dx$. 以$x, y$为变量的二元函数$\frac{e^x\sin xy}{y+1}$在$[0, 1]\times[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$上连续, 因此原式$= \int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^x\sin xy}{y+1}dx = \int_0^1 0dx = 0$.

2. 求下列函数的导函数.

(1) $g(y) = \int_{a-ky}^{a+ky} f(x)dx$, 其中$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续.

解. $g'(y) = kf(a+ky) + kf(a-ky)$.

(2) $g(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

解. $g'(y) = -\sin y e^{y\sin x} - \cos y e^{y\cos y} + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx$.

(3) $g(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$, $0 < y < +\infty$.

解. $g'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{y} + \int_0^y \frac{1}{1+xy} dx = \frac{\ln(1+y^2)}{y} + \frac{\ln(1+xy)}{y}\big|_0^y = \frac{2\ln(1+y^2)}{y}$.

(4) $g(y) = \int_0^{y^2} \sin(x^2+y^2) dx$, $-\infty < y < +\infty$.

解. $g'(y) = 2y\sin(y^4+y^2) + \int_0^{y^2} 2y\cos(x^2+y^2) dx$.

3. 利用积分号下求导数的方法求下列积分.

(1) $g(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx$, $-\infty < a < +\infty$.

解. 当$(x,a) \to (0,a_0)$时, $\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} = \frac{a\cdot\arctan(a\tan x)}{a\tan x} \to a_0$.
当$(x,a) \to (\frac{\pi}{2},a_0)$时, 由夹逼定理, $\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} \to 0$.
因此补充定义后, 以x,a为变量的二元函数$\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{R}$上连续.
所以$g'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$.
当$a>0$且$a\neq 1$时, $g'(a) \overset{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-a^2}(\arctan t - a\arctan at)\big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2(a+1)}$. 注意到$g'(a)$是处处连续的偶函数, 故$g'(a) = \frac{\pi}{2(|a|+1)}$. 又因为$g(0)=0$, 积分可得$g(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\cdot\ln(|a|+1)$.

(2) $g(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$, $-1 < a < 1$.

解. 当$(x,a) \to (\frac{\pi}{2},a_0)$时, $a\cos x \to 0$, $\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{a\cos x} \to 2$. 补充定义后, 以$x,a$为变量的二元函数$\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times(-1,1)$上连续. 所以$g'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x} \overset{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. 因为$g(0)=0$, 所以$g(a) = \pi\arcsin a$.

(3) $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + \cos^2 x) dx$, $a \neq 0$.

解. 二元函数$\ln(a^2\sin^2 x+\cos^2 x)$在$a\neq 0$时连续, 所以$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x dx}{a^2\sin^2 x+\cos^2 x}$.
当$a>0$且$a\neq 1$时, $I'(a) \overset{t=\tan x}{=} 2a\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} = \frac{2a}{a^2-1}(\arctan t - \frac{1}{a}\arctan at)\big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a+1}$. 注意到$I'(a)$在$a\neq 0$时连续, 故等式$I'(a) = \frac{\pi}{a+1}$在$a=1$处亦成立. 又因为$I(1)=0$, 所以当$a>0$时$I(a) = \pi\ln\frac{a+1}{2}$. 又因为$I(a)$是偶函数, 所以$I(a) = \pi\ln\frac{|a|+1}{2}$.

习题11.3

1. 讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2} dx$, $(-\infty < t < +\infty)$.

解. $|\frac{\sin tx}{1+x^2}| \le \frac{1}{1+x^2}$, 且积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分一致收敛.

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dx$, $(0 < t_0 < t < +\infty)$.

解. 当$t > t_0 > 0$时, $|e^{-t^2x^2}| \le e^{-t_0^2x^2}$, 积分$\int_0^{+\infty} e^{-t_0^2x^2} dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$(t_0,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx$, (i) $(0 < \alpha_0 \le \alpha \le +\infty)$, (ii) $(0 < \alpha \le +\infty)$.

解. (i) 当$x \in [0,+\infty)$且$0 < \alpha_0 \le \alpha \le +\infty$时, $|e^{-\alpha x}\sin x| \le e^{-\alpha_0 x}$, 积分$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛.

(ii) 当$\alpha > 0$时, $\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx = \frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}|_A^{+\infty} = \frac{e^{-\alpha A}(\alpha\sin A+\cos A)}{1+\alpha^2}$. 则不论$M$多么大, 取$\alpha = \frac{1}{M}$及$A = 2k\pi$使得$M < A < 2M$时, $|\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx| > \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$. 所以原积分在区间$(0,+\infty)$上不一致收敛.

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-bx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, $(0 \le b < +\infty)$.

解. e^{-bx}是x的单调函数, 且$|e^{-bx}| \le 1$. 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$收敛. 由阿贝尔别法, 原积分在区间$[0,+\infty)$上一致收敛.

(5) $\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx$, (i) $(0 < c \le t \le d)$, (ii) $(0 < t \le d)$.

解. (i) 当$x \in [0,+\infty)$且$0 < c \le t \le d$时, $|te^{-tx}| \le de^{-cx}$, 积分$\int_0^{+\infty} de^{-ct}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$[c,d]$上一致收敛.

(ii) 当$t > 0$时, $\int_A^{+\infty} te^{-tx}dx = -e^{-tx}|_A^{+\infty} = e^{-tA}$. 则不论$M$多么大, 取$t = \frac{1}{M}$, $A = 2M$时, $\int_A^{+\infty} te^{-tx}dx = e^{-\frac{1}{2}}$. 所以原积分在区间$(0,d]$上不一致收敛.

(6) $\int_0^1 \frac{dx}{x^t}$, $(0 < t \le b < 1)$.

解. 当$x \in (0,1]$且$0 < t \le b < 1$时, $|\frac{1}{x^t}| \le \frac{1}{x^b}$, 积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^b}$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$(0,b]$上一致收敛.

2. 求下列积分的值.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $(0 < a < b)$.

解. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_0^{+\infty} dx\int_a^b e^{-tx}dt$. 因为积分$\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx$在区间$[a,b]$上一致收敛, 所以原式$= \int_a^b dt\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \int_a^b \frac{1}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$.

(2) $\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx$, $(a > -1, b > -1)$.

解. 不失一般性, 假设$a > b$. $\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}dx = \int_0^1 dx\int_b^a x^t dt$. 因为积分$\int_0^1 x^t dx$在区间$[b,a]$上一致收敛, 所以原式$= \int_b^a dt\int_0^1 x^t dx = \int_b^a \frac{1}{1+t}dt = \ln\frac{1+a}{1+b}$.

(3) $\int_{-\frac{1}{4}}^{+\infty} e^{-(2x^2+x+1)}dx$.

解. 设$t = \sqrt{2}(x+\frac{1}{4})$, 原式$= \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{7}{8}}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{8}}$.

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\cdot\cos\beta x}{x}dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

解. 原式$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{2x}dx = \frac{\pi}{4}(1+\mathrm{sgn}(\alpha-\beta))$.

3. 求积分$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx$的初等函数表达式.

解. 将积分记做$I(t)$. 当$t \in [-a,a]$且$x \in (0,+\infty)$时, $|e^{-x}\frac{\sin tx}{x}| \le |e^{-x}t| \le ae^{-x}$, 积分$\int_0^{+\infty} ae^{-x}dx$收敛, 所以积分$I(t)$在区间$[-a,a]$上一致收敛. 所以当$t \in (-a,a)$时, $I'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos tx dx = \frac{e^{-x}(t\sin tx-\cos tx)}{1+t^2}|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t^2}$. 由$a$的任意性, 及等式$I(0) = 0$, 得$I(t) = \arctan t$, $t \in \mathbb{R}$.