第一章　复变函数与解析函数*

目录

§1 复数 **3**

§1.1 复数的定义 3

§1.2 复数的四则运算 3

§1.3 复数的各种表示法 3

§1.4 乘方与开方 5

§1.5 三角不等式 5

本讲义由讲稿整理而成，正在逐步制作和完善中，每年都将更新的版本上网供同学使用．

2003 年完成四章．

2004 年完成八章．

2005 年完成上篇“复变函数论”部分的全部讲义五章和下篇“数学物理方程”部分的讲义七章，共十二章．尚有“柱函数”一章未完成．

2006 年，用 Metapost 重新绘制了第一章的全部插图（原来用 Dia 绘制，Dia 由中科院计算所张林波教授推荐），编入了习题（作业）和补充习题（供同学练习）．

2007 年，订正了少数不妥的讲法，改正了一些打印错误．

2008 年，对一些具体的讲法作了改进，改正了一些打印错误，并给出部分补充习题的答案．

2009 年，用 Metapost 重新绘制了第二章和第五章的全部插图，改进了少数细节，改正了少数打印错误，补充习题的答案也有所增加．

2010 年，对少数细节作了改进，对一些文字作了润色，增加了少量补充习题．

2011 年，调整了第八章和第十章的习题和补充习题，并对少数细节和文字作了改进．

2012 年，订正了 δ 函数的历史介绍，订正了几个术语的英文，并对少数文字作了润色．

2013 年，修订了几处文字和表述，修改了第七章的习题，在书末增加了参考文献．

2014 年，修订了若干文字与符号，改正了第二章图 5b 的一个符号错误．

2015 年，增加了部分补充习题的答案和提示，对少数文字作了修订与润色．

2016 年，改正了第六章 §2 中的一处输入错误，对第八章和第九章作了文字修订，增订了书末的参考文献．

2017 年，调整了第七章的习题和补充习题．全书用 ctexart 格式重新排版（原来采用的 cctart 格式现已逐步淘汰）．重新设计了全书的页眉．页码由原来的各章独立编号改为全书统一编号，便于打印和装订．

2018 年，修订了第一章 §5 并增加了选读内容 §5.5．第五章增加了选读内容 §8．修订了补充习题的答案．“柱函数”一章目前没有课时讲授，暂未整理．

§1.6 复球面与无穷远点 5

§2 复变函数 **6**

§2.1 复平面上的点集 6

§2.2 复变函数 7

§2.3 复变函数的极限 7

§2.4 复变函数的连续性 8

§3 解析函数 **8**

§3.1 复变函数的导数 8

§3.2 解析函数 9

§3.3 奇点 9

§3.4 求导法则 9

§3.5 *Cauchy–Riemann* 条件（*CR* 条件） 10

§3.6 *极坐标下的 *CR* 条件 12

§4 初等单值函数 **12**

§4.1 常数 12

§4.2 幂函数 12

§4.3 多项式和有理分式 12

§4.4 指数函数 13

§4.5 三角函数 13

§4.6 双曲函数 14

§5 初等多值函数 **14**

§5.1 根式函数的支点 14

§5.2 割线与单值分支 16

§5.3 *Riemann* 面 17

§5.4 对数函数 18

§5.5 *多值函数函数值的确定 19

§5.6 多值函数的解析性 20

§5.7 对数函数的导数 20

§5.8 *一般幂函数 20

§6 解析函数的物理意义 **20**

§6.1 调和函数 20

§6.2 解析函数与调和函数的关系 21

§6.3 正交曲线族 21

补充习题 **23**

§1 复数

§1.1 复数的定义

形如

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

的数称为复数（complex number），其中 $\mathbb{R}$ 表示实数的集合，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$（或 $\mathrm{i}^2 = -1$）．x、y 分别称为 z 的实部和虚部，记作

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z. \tag{2}$$

复数

$$z^* = x - \mathrm{i}y \tag{3}$$

称为 z 的共轭（conjugate）复数或复共轭，亦记作 $\bar{z}$.

注 取复共轭是一个超越操作，而不是简单操作．取 z 的多项式（系数为复数）甚至无穷级数均无法得到 $\bar{z}$.

§1.2 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的四则运算规则如下：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{4a}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{4b}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{4c}$$

上式的结果可以从两个角度来理解：

(1) 利用实数的四则运算规则和 $\mathrm{i}^2 = -1$ 即可得到这些结果.

(2) 将以上结果当作运算的定义，则可以验证在这样的定义下，实数的四则运算规则如交换律、结合律、分配律等均对复数成立，且 $\mathrm{i}^2 = -1$．这正是我们所期望的，因为复数包含了实数作为特殊情况，它的运算规则当然要与后者的运算规则相容.

注 由上面的加法规则可见复数的加法和平面上矢量的加法是一致的.

§1.3 复数的各种表示法

1. 代数表示．即上面式 (1).

2. 几何表示．如图 1 所示，几何表示实际上有两种．其一是用 xy 平面上的点 P 来表示复数 z，P 的横坐标为 $x = \mathrm{Re}\, z$，纵坐标为 $y = \mathrm{Im}\, z$，这样复数与平面上的点是一一对应的，所以该 xy 平面亦称为复平面；其二是用矢量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 z，该矢量在 x 轴上的投影为 $x = \mathrm{Re}\, z$，在 y 轴上的投影为 $y = \mathrm{Im}\, z$，这样复数与平面上的矢量也是一一对

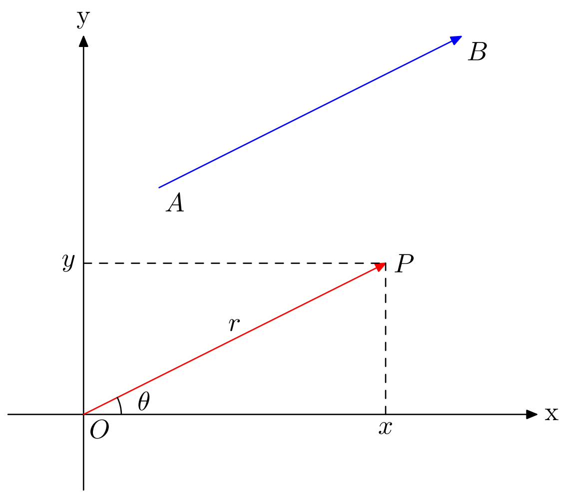

图 1: 复数的几何表示

应的. 需要注意的是，起点不同，但方向和长度相同的矢量是等价的，所以图 1 上的矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与矢量 $\overrightarrow{OP}$ 表示同一复数.

3. 三角表示. 利用点 P 的极坐标 (r, θ)，以及关系 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，可将式 (1) 改写为

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{5}$$

这就是三角表示.

4. 指数表示. 定义

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{6}$$

则式 (5) 又可以写作

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{7}$$

这就是指数表示，其中 r 称为复数 z 的模（module），θ 称为辐角（argument），记作

$$r = |z|, \quad \theta = \operatorname{Arg} z. \tag{8}$$

应当指出，式 (6) 只是一个定义或记号，因此，可以说式 (7) 与式 (5) 是一回事. 但是，引进这个记号是有意义的，因为根据定义，马上可以得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{9}$$

换句话说，宗量（argument，一个函数的自变量可以是一个复杂的对象，这时通常称为宗量）为纯虚数的指数函数与实变量的指数函数具有同样的运算性质. 这样，我们就有以下的推论：

若 θ 是 z 的辐角，则 $\theta + 2n\pi$ 亦是其辐角，其中 $n \in \mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}$ 是整数的集合. 若限制 $0 \le \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \le \pi$，所得的单值分支称为主值分支，记作 $\arg z$.

在指数表示下，乘法和除法变得非常简单：

$$z_1 z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

§1.4 乘方与开方

乘方就是一个复数与自身相乘若干次：

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{10}$$

开方运算的结果是多值的，设 $z - a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，则

$$\sqrt[n]{z-a} = \sqrt[n]{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \sqrt[n]{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}} = \sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{11}$$

这里需要注意两点：第一，当 k 取其它整数时，所得结果与以上重复，比如 $k = n$ 的结果与 $k = 0$ 一致，故一共有 n 个不同的根；第二，根式函数的多值性源于宗量（此处为 $z - a$）的辐角多值性，而非自变量（此处即 z）的辐角多值性.

§1.5 三角不等式

三角不等式有两条：

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \tag{12a}$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \tag{12b}$$

由于复数的加法和矢量的加法一样，所以上面两式实际上就是关于三角形边长的不等式.

第一式的证明如下：

$$|z_1 + z_2|^2 = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2),$$

由于 $\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) \leq |\bar{z}_1 z_2| = |z_1 z_2|$，故

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

开方即得第一式，易见其中等号成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1 z_2|$，也就是 $r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) = r_1 r_2$. 由此可见，等号成立的充要条件是两个复数中有一个为 0，或两者方向相同. 在几何上，这一结论是非常直观的.

第二式等价于

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

利用第一式，有 $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2)| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$，也就是 $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$，同理有 $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$ 或 $|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2|$，合起来即得上式.

§1.6 复球面与无穷远点

作球面与复平面相切于原点 O，过 O 作直线 OZ 垂直于复平面，与球面交于 N，N 即球的北极.

设 z 为任一复数，连结 Nz，与复球面交于 P，易见 z 与 P 一一对应，故复数亦可用球面上的点 P 表示. 该球面称为**复球面**.

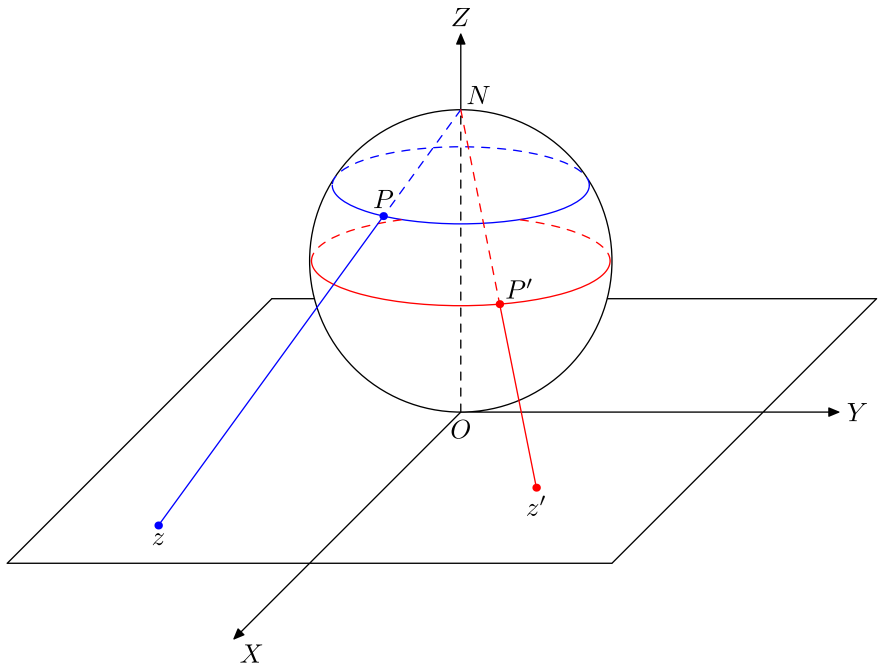

图 2: 复球面

由图 2 可见，当 $z \to \infty$（沿 Oz 方向）时，$P \to N$，当 $z' \to \infty$ （沿 Oz' 方向）时，亦有 $P' \to N$. 因此，作为 N 的对应点，我们把复平面上的无穷远点当作一点，记作 ∞. 包括 ∞ 的复平面称为扩充复平面.

注 ① 将无穷远点当作一点是一种规定；② 以上复球面的作法不是唯一的，另一种常见的作法是将球心放在原点 O.

习题 1 求 $z = x + \mathrm{i}y$ 所对应的复球面上的点 P 的坐标 (x_1, x_2, x_3)，设复球面的半径为 R.

习题 2* （选做）考虑多项式 $P_n(z) = (z+1)^n - 1$ 的 $n-1$ 个非零根的乘积，证明 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) = n/2^{n-1}$.

§2 复变函数

§2.1 复平面上的点集

由于复变函数总是定义在点集上，所以下面介绍关于点集的几个基本概念.

1. **邻域**（neighborhood）：由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集，称为 z_0 的 ε 邻域，记作 $N(z_0, \varepsilon)$，即以 z_0 为中心，ε 为半径的开圆（不包含圆周）.

注 ① 易见这一定义是一维空间（实轴）的邻域概念的推广，后者是一个开区间. ② 我们当然也可以等价地将邻域定义为以 z_0 为中心的某一正方形的内部，不过以上的定义是方便的. ③ 在以上的定义中并没有对 ε 的大小作任何规定，因此，邻域可以很大.

2. **内点**（inner point）：设 E 为点集，$z_0 \in E$，若存在 $\varepsilon > 0$，使 $N(z_0, \varepsilon) \subset E$，则 z_0 称为 E 的内点.

粗略地说，内点就是该点及其周围全属于点集，所以这一定义是相当直观的. 易见一

个邻域内的任意点均为该邻域的内点.

3. **开集**（open set）：若点集 E 的点皆为内点，则称 E 为开集.

显然，邻域就是开集.

4. **边界点**（boundary point）：若点 z_0 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则 z_0 称为 E 的边界点.

边界（boundary）：E 的全部边界点所组成的点集称为 E 的边界，记作 ∂E.

注 ① 边界点 z_0 本身可以不属于 E. ② 如果一点集由有限个点组成，或由一弧段组成，则所有的点均为边界点. ③ 开圆或闭圆的边界都是圆周. ④ 若点集 E 是由开圆（或闭圆）内去掉若干点后所余部分构成，则去掉的点均为边界点.

5. **区域**（domain）：非空点集 D 若满足以下两个条件，则称为区域：一、D 是开集；二、D 是连通的，即 D 中的任意两点均可用全属于 D 的折线连接.

注 ① 区域是一种特殊的点集，是复变函数论中最重要的几何概念. ② 显然，邻域或开圆就是区域. ③ 两个不相交的开圆的并集仍是开集，但不是区域，哪怕两个圆的圆周相切. 在相切的情况下，两个圆加上切点仍不是区域. 因为切点是边界点，所以加上边界点以后虽然连通，但不再是开集.

6. **闭域**（closed domain）：区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域，记作 $\bar{D}$：$\bar{D} = D + \partial D$.

注 ① 区域都是开的，不包括边界. ② 以后我们提到圆或环时总不包括边界，若包括边界，则称为闭圆或闭环.

7. **单通与复通区域**：在区域 D 内画任意简单闭曲线，若其内部全含于 D，则 D 称为单通（simply connected）区域，否则称为复通（multiply connected）区域.

注 圆是单通的，而环是复通的.

§2.2 复变函数

复变函数（function of a complex variable）就是以复数为自变量的函数，其函数值通常也是复数. 当然，它不必在整个复平面上有定义. 严格的定义如下：

设 E 是复平面上的点集，$\forall\ z \in E$，若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了*单值函数* $w = f(z)$，若对 $z \in E$ 有多个（可以无穷多）复数 w 与之对应，则称在点集 E 上确定了*多值函数* $w = f(z)$. E 称为函数 $w = f(z)$ 的*定义域*，$F = \{f(z)|z \in E\}$ 称为其值域.

记 $z = x + \mathrm{i}y$，$w = u + \mathrm{i}v$，则

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y). \tag{13}$$

所以一个复变函数等价于两个二元实变函数，它给出了 z 平面到 w 平面的映射（map）或变换（transform）.

§2.3 复变函数的极限

复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上，z_0 是 E 的聚点（比如内点，参看下面的注解），

如果 $\forall\,\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0.$$

注 ① 在复平面上，$z\to z_0$ 的方式有无穷多种，而在实轴上，$x\to x_0$ 的方式只有两种，即 $x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$. ② 以上要求 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ 成立的范围是 $0<|z-z_0|<\delta$，而不是 $|z-z_0|<\delta$，这对于函数的要求是较弱而非较强，因为这允许 $f(z_0)$ 与 w_0 相差甚大，甚至允许 $f(z)$ 在 z_0 没有定义（因为 z_0 可以不在定义域 E 内）. ③ 若在 z_0 的任意小的邻域内均有属于 E 而异于 z_0 的点，则 z_0 称为 E 的聚点，它本身可以不属于 E. 内点就是典型的聚点.

§2.4 复变函数的连续性

复变函数 $w=f(z)$ 定义在点集 E 上，$z_0\in E$，如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

注 ① 易见连续就是不仅要有极限，而且该极限要等于该点处的函数值. ② 显然，$f(z)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. ③ z_0 应该是 E 的聚点，否则极限没有意义，也就谈不上连续与否.

若 $f(z)$ 在点集 E 上的各点连续，则称 $f(z)$ 在点集 E 上连续.

§3 解析函数

解析函数是复变函数中最重要的一类，它的特点是可导或可微. 为了研究解析函数，需要先定义复变函数的导数. 今后我们研究的复变函数主要定义在区域上.

§3.1 复变函数的导数

复变函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 上，$z_0\in D$，如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z},$$

存在且有限，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处可导或可微（differentiable），且该极限称为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的导数（derivative）或微商，记作

$$f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{14}$$

例 1 $f(z)=z^n$，$n=1,2,\cdots$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\frac{nz^{n-1}\Delta z+o(\Delta z)}{\Delta z}=nz^{n-1}+\frac{o(\Delta z)}{\Delta z},$$

$$\therefore \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = nz^{n-1}.$$

可见函数 $f(z) = z^n$ 在 z 平面上处处可导.

例 2 函数 $f(z) = \bar{z}$ 显然处处连续，但处处不可导，因为 $\Delta f/\Delta z = \overline{\Delta z}/\Delta z$ 的极限不存在（只要看看 $\Delta z = \Delta x$ 和 $\Delta z = \mathrm{i}\Delta y$ 两种情况下的结果，立得结论）.

若 $w = f(z)$ 在 z_0 处可导，则显然在 z_0 处连续.

§3.2 解析函数

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导，则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数（analytic function，亦称全纯函数，holomorphic function），或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

例 3 $f(z) = z^n$（$n = 1, 2, \cdots$）在整个复平面上解析.

注 ① 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与可导是一回事. ② 有时候我们说函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析，这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内可导，而不仅仅是在 z_0 可导. 所以函数在一点解析与可导不是一回事. ③ 函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 内解析，指的是在某区域 D' 内解析，而 $D' \supset \bar{D}$.

§3.3 奇点

若函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不解析，但在 z_0 的任一邻域内都有 $f(z)$ 的解析点，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点（singular point）.

例 4 $z = 0$ 是 $f(z) = 1/z$ 的奇点.

注 ① 函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不解析，可能是在该点没有定义，也可能是有定义但不连续，也可能是连续但不可导，还可能是可导但仍不解析（见例 6），等等. ② 按上述定义，$f(z)$ 在点 z_0 不解析，并不说明 z_0 就是奇点. 比如函数 $f(z) = \bar{z}$ 处处不可导，但所有的点都不是奇点.

§3.4 求导法则

简单的基本初等函数的导数可以用定义计算，以上例 1 是一个典型的例子. 稍微复杂的基本初等函数（如指数函数）的导数计算方法在下一小节给出. 初等函数的导数可由已知的基本初等函数的导数和以下的求导法则得出.

1. 若函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 D 内解析，则其和、差、积、商（分母不为零）均在 D 内解析，且求导法则与实变函数一致. 例如

$$[f_1(z)f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z).$$

2. 复合函数的求导法则. 若函数 $\xi = f(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = g(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，且 $F = \{f(z)|z \in D\} \subset G$，则复合函数 $w = g[f(z)]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{\mathrm{d}g[f(z)]}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}g(\xi)}{d\xi}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}.$$

注 $F \subset G$ 表示第一个函数的值域不能超出第二个函数的定义域.

例 5 多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ （$n \in \mathbb{N}$）. 显然，其各项均在复平面上解析，故 $P_n(z)$ 在整个复平面上解析. 由求导法则

$$P_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k)' = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

§3.5 *Cauchy–Riemann* 条件（*CR* 条件）

本小节研究怎样的函数可导，同时得出导数的一种计算方法.

由定义可以看出，复变函数的可微性是一个非常苛刻的要求，因为导数定义中 $\Delta z \to 0$ 的方式是任意的. 一般来说，若式 (13) 中的 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 相互独立，那么即使 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都具有良好的解析性质，$f(z)$ 仍然不一定是可微的. 例 2 就是典型的例子. 因此，要使 $f(z)$ 可微，则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 之间必须满足一定的关系.

事实上，由于

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关，可先令 $\Delta y = 0$，$\Delta z = \Delta x \to 0$，此时上式成为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) + \mathrm{i}v(x+\Delta x, y)] - [u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)]}{\Delta x} = f'(z),$$

即

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{15a}$$

然后令 $\Delta x = 0$，$\Delta z = \mathrm{i}\Delta y \to 0$，类似可得

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{15b}$$

比较两式，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16}$$

这就是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 之间必须满足的条件，称为 *Cauchy–Riemann* 条件或简称为 CR 条件. 它是 $f(z)$ 在点 z 可微的必要条件，但不是充分条件. 注意式 (15) 同时给出了导数的计算公式，即利用我们熟悉的实变函数的偏导数来计算复变函数的导数. 以下定理给出 $f(z)$ 在点 z 可微的充要条件.

定理 函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，$z \in D$，$f(z)$ 在点 z 可微的充要条件是：(1) 二元函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微；(2) $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在点 (x,y) 满足 CR 条件.

证明 先证必要性. $f(z)$ 在点 z 可微，则

$$f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \eta \Delta z,$$

其中 $\lim_{\Delta z \to 0} \eta = 0$. 记 $f'(z) = \alpha(x,y) + \mathrm{i}\beta(x,y)$，则上式成为

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = (\alpha \Delta x - \beta \Delta y) + \mathrm{i}(\alpha \Delta y + \beta \Delta x) + \eta \Delta z.$$

分开实部和虚部，得

$$\Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \mathrm{Re}(\eta\Delta z), \quad \Delta v = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \mathrm{Im}(\eta\Delta z).$$

记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$，当 $\Delta z \to 0$，$|\eta\Delta z/\rho| = |\eta| \to 0$，故 $\eta\Delta z/\rho \to 0$，从而 $\mathrm{Re}(\eta\Delta z)/\rho \to 0$，$\mathrm{Im}(\eta\Delta z)/\rho \to 0$．这就是说，$u(x,y)$、$v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta. \tag{17}$$

即 CR 条件在点 (x,y) 成立．

再证充分性．由于 CR 条件在点 (x,y) 成立，可将 $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ 记作 α，$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ 记作 $-\beta$，即式 (17) 成立．又 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，故

$$\Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \eta_1, \quad \Delta v = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \eta_2,$$

其中 $\eta_1 = o(\rho)$，$\eta_2 = o(\rho)$．于是

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta z} = \alpha + \mathrm{i}\beta + \frac{\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2}{\Delta z}.$$

当 $\rho \to 0$，$|\eta_1/\Delta z| = |\eta_1/\rho| \to 0$，故 $\eta_1/\Delta z \to 0$，同理，$\eta_2/\Delta z \to 0$，所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \alpha + \mathrm{i}\beta.$$

即 $f(z)$ 在点 z 可微．证毕．

将上述定理中的点 z 和点 (x,y) 同时换为区域 D，立得另一定理．不过，在实用上，下面的定理用来判断函数的解析性是最方便的．

定理 函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：(1) 二元函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数；(2) $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 D 内满足 CR 条件．

注 ① 充分性是很明显的．根据微积分的定理，$u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数，则在 D 内可微．又已知两者在 D 内满足 CR 条件，由上面的定理，则 $f(z)$ 在 D 内解析．② 反过来，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 D 内具有一阶偏导数，且满足 CR 条件．至于一阶偏导数连续，目前还未能论证．在下一章，我们将会看到，若 $f(z)$ 在 D 内解析（即一阶导数存在），则 $f(z)$ 在 D 内具有任意阶导数，如此，则 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数就不在话下了．但要注意，对于实变函数 $f(x)$，类似的结论是不可想象的，因为即使 $f^{(n)}(x)$ 连续也不能保证 $f^{(n+1)}(x)$ 存在．

例 6 考虑函数 $f(z) = |z|^2$．易知 $u(x,y) = x^2 + y^2$，$v(x,y) = 0$，各偏导数为：$\partial u/\partial x = 2x$，$\partial u/\partial y = 2y$，$\partial v/\partial x = 0$，$\partial v/\partial y = 0$．可见，所有一阶偏导数连续（则 u、v 处处可微），但 CR 条件只在 $z = 0$ 处成立（则 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处可微），故 $f(z)$ 处处不解析．

事实上，只要注意到 $f(z) = \bar{z}z$，又已知 $\bar{z}$ 处处不解析，则易得以上结论．如果一个函数中包含 $\bar{z}$、$|z|$ 等因子，则一般来说都是不解析的．

§3.6 *极坐标下的 CR 条件

记

$$w = f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta),$$

则 CR 条件表为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{18}$$

注 ① 这里 z 用的是三角表示，即用极坐标 (r,θ) 代替直角坐标 (x,y)，但 w 用的是代数表示. ② 上式与式 (16) 类似，但多了因子 $1/r$. 在数学上，所有的变量都是纯数，没有量纲. 但我们不妨认为 x、y、r 等具有长度的量纲（这其实更符合客观情况），而 θ 是没有量纲的，这样就不会放错 $1/r$ 的位置. ③ 上式可以利用坐标变换 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 与式 (16) 来证明. 也可以直接用导数的定义来证明，证明时注意 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，因而 $\Delta z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Delta r + \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Delta\theta$，分别令 $\Delta\theta = 0$ 和 $\Delta r = 0$，求出 $f'(z)$ 的形式，比较两个结果，即得上式，同时可得

$$f'(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{19}$$

习题 已知一解析函数 $f(z)$ 的虚部为 $v(x,y) = y/(x^2+y^2)$，且 $f(2) = 0$，求该解析函数.

§4 初等单值函数

初等函数（elementary function）是由基本初等函数（通常认为包括常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经过有限次的加减乘除和复合所构成的函数. 在复变函数中，三角函数定义为指数函数的线性组合，所以和双曲函数类似，它们都不是最基本的，但它们很常用，所以下面会详细介绍. 以上这些函数包括单值函数（single valued function）和多值函数（multivalued function），本节和下节分别介绍其中较简单的几种.

§4.1 常数

$f(z) = c$，其中 $c \in \mathbb{C}$，$\mathbb{C}$ 表示复数集合. 由定义易证 $f'(z) = 0$，故 $f(z)$ 在复平面上解析.

§4.2 幂函数

$f(z) = z^n$，其中 $n = 1, 2, \cdots$. 前面已经证明，$f'(z) = nz^{n-1}$，故 $f(z)$ 在复平面上解析.

一般的幂函数 $f(z) = z^\alpha$（$\alpha \in \mathbb{C}$）是多值函数，本节暂不考虑.

§4.3 多项式和有理分式

多项式（polynomial）是幂函数的线性组合：$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ （$n \in \mathbb{N}$），由上节例 5 可知 $P_n(z)$ 在整个复平面上解析，且导数为 $P_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}$.

令 $Q_m(z)=\sum_{l=0}^{m} b_l z^l$（$m\in\mathbb{N}$），则 $f(z)=P_n(z)/Q_m(z)$ 称为有理分式（亦称有理函数，rational function）. 除去满足 $Q_m(z)=0$ 的点 z_i（$i=1,2,\cdots,m$）之外，$f(z)$ 在复平面上处处解析，z_i 是 $f(z)$ 的奇点（其中可能有相同的）.

§4.4 指数函数

指数函数（exponential function）定义为

$$\mathrm{e}^z\equiv\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y). \tag{20}$$

注意，其中第一个等号是一般复变量的指数函数的定义（这里首次出现），第二个等号则引用了前面关于自变量为纯虚数的指数函数的定义. 易知 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$，$v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$，故得 $\partial u/\partial x=\mathrm{e}^x\cos y=\partial v/\partial y$，$\partial u/\partial y=-\mathrm{e}^x\sin y=-\partial v/\partial x$. 因此，$u(x,y)$、$v(x,y)$ 的一阶偏导数处处连续，CR 条件处处满足，从而 e^z 在整个复平面上解析，而且按式 (15)，有

$$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z. \tag{21}$$

这一结果与实变的指数函数完全一样. 指数函数还具有以下性质，它们都可以用定义直接验证.

(1) $\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

(2) $|\mathrm{e}^z|>0$.

(3) e^z 是周期函数，周期为 $2\pi\mathrm{i}$. 即 $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z$.

§4.5 三角函数

复变量的三角函数（trigonometric function）是通过指数函数来定义的：

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},\quad \sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}. \tag{22}$$

由指数函数的解析性和求导法则，易知它们在整个复平面上解析. 由 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})'=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$，$(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})'=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$，易得它们的导数为

$$(\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z. \tag{23}$$

三角函数还具有以下性质：

(1) $\cos(-z)=\cos z,\quad \sin(-z)=-\sin z$.

(2) 满足三角恒等式，如

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

(3) $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期函数，周期为 2π.

(4) $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 都可以大于 1.

以上性质 (1)(2)(3) 均可由定义直接验证，这些性质与实变情况一致．值得注意的是性质 (4)，这是与实变情况不同的．实际上，$\cos(\mathrm{i}y) = (\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})/2$，显然可以大于任意数.

类似于实变函数，还可以定义 $\tan z$、$\cot z$ 等，这里就不详细讨论了.

注：由定义 (22) 可以得到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$，但不能将该式误解为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 的定义.

§4.6 双曲函数

复变量的双曲函数（hyperbolic function）也是通过指数函数来定义的：

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{24}$$

这称为双曲余弦函数和双曲正弦函数．由指数函数的解析性和求导法则，易知它们在整个复平面上解析．由指数函数的导数容易证明

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z. \tag{25}$$

双曲函数具有一系列与三角函数类似的性质．这里就不一一列举了．由定义容易证明这两类函数之间存在着以下关系

$$\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z, \quad \cosh(\mathrm{i}z) = \cos z, \quad \sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z, \quad \sinh(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sin z. \tag{26}$$

有了这些关系，我们就可以由三角函数的性质得到双曲函数的类似性质，反之亦然．例如，

$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cos(\mathrm{i}z_1 + \mathrm{i}z_2) = \cos(\mathrm{i}z_1)\cos(\mathrm{i}z_2) - \sin(\mathrm{i}z_1)\sin(\mathrm{i}z_2)\\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.\end{aligned}$$

但我们应该用定义先证明其中的一个，否则就变成循环论证了.

类似于实变函数，还可以定义 $\tanh z$、$\coth z$ 等，这里就不详细讨论了.

习题 计算下列数值（其中 a、b 为实数）．(1) $\sin(a + \mathrm{i}b)$．(2) $\cos(a + \mathrm{i}b)$．(3) $\cosh^2 z - \sinh^2 z$．(4) $|\exp(\mathrm{i}az - \mathrm{i}b\sin z)|$.

§5 初等多值函数

§5.1 根式函数的支点

考虑根式函数

$$w = \sqrt{z - a}, \tag{27}$$

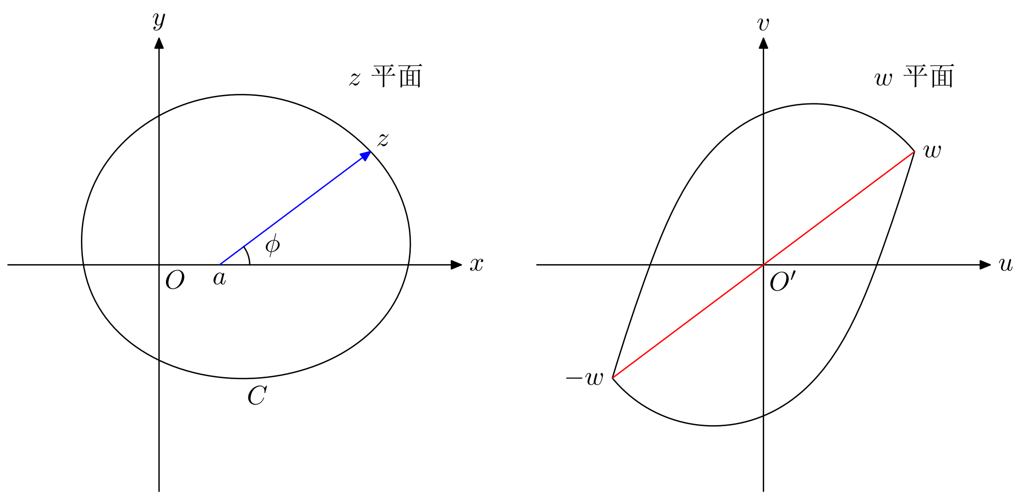

图 3: 支点 a

不失一般性，设 a 为实数，$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，记 $z - a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ （其中 ϕ 只需取定一分支，为方便起见，取为主值），则

$$w = \sqrt{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \sqrt{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)}} = \sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi/2+k\pi)},$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$，对于每一给定的 z，可能导致不同结果的 k 值有 0 和 1 两种，所以有两个函数值：

$$w_1 = \sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}, \quad w_2 = \sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi/2+\pi)} = -\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} = -w_1. \tag{28}$$

我们在前面已经指出，根式函数的多值性源于宗量 $z - a$ 的辐角（即 ϕ）的多值性，而不是自变量 z 的辐角（即 θ）的多值性.

从几何上看，如果让 z 沿闭曲线 C 绕 a 点转一周回到 z，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$ （其中 $+$ 号对应于逆时针绕行，$-$ 号对应于顺时针绕行），函数值也就从 w_1 变成 w_2，参看图 3. 在这一过程中，z 的辐角可能从 θ 变成 $\theta \pm 2\pi$ （如果曲线 C 包围原点，如图 3），也可能仍为 θ （如果曲线 C 不包围原点）. 可见，影响函数值的是 ϕ 的变化而不是 θ 的变化. 如果 z 沿其它曲线转一周，而该曲线不包围 a 点，则 $z - a$ 的辐角不变，因而函数值也不变. 可见 a 点具有特殊地位，这样的点称为多值函数的**支点**（branch point）. 函数 (27) 只有一个有限支点 a.

如果让 z 沿大圆 $|z| = R$（所谓大，指的是它包围所有的有限支点，对函数 (27) 来说就是包围了 a 点）转一周回到 z，则 $z - a$ 的辐角也从 ϕ 变成 $\phi \pm 2\pi$，函数值也从 w_1 变成 w_2. 由于绕大圆一周也可以看作绕 ∞ 点一周，所以 ∞ 点也是函数 (27) 的支点. 这样函数 (27) 在扩充复平面上共有两个支点.

如果让 z 沿闭曲线绕 a 点转两周回到 z，则 $z - a$ 的辐角就从 ϕ 变成 $\phi \pm 4\pi$，这时函数 (27) 的函数值不变，所以 a 点称为函数 (27) 的**一阶支点**. 易知 ∞ 点也是一阶支点.

类似地，函数

$$w = \sqrt[n]{z - a} \tag{29}$$

也具有两个支点，即 a 和 ∞. 当 z 沿闭曲线绕 a 点转 k（$k = 1, \cdots, n-1$）周回到 z，函数值就会发

生变化．当 z 沿闭曲线绕 a 点转 n 周回到 z，函数值才会复原．所以 a 点称为 $n-1$ 阶支点．同理，∞ 点也是 $n-1$ 阶支点．

再看看函数

$$w=\sqrt{(z-a)(z-b)}, \tag{30}$$

令 $z-a=\rho_1\exp(\mathrm{i}\phi_1)$，$z-b=\rho_2\exp(\mathrm{i}\phi_2)$，则

$$w=\sqrt{\rho_1\rho_2\exp[\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)+\mathrm{i}2k\pi]}=\sqrt{\rho_1\rho_2}\exp[\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)/2+\mathrm{i}k\pi].$$

和前面一样，对于给定的自变量 z，有两个函数值，即

$$w_1=\sqrt{\rho_1\rho_2}\exp[\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)/2],\quad w_2=-\sqrt{\rho_1\rho_2}\exp[\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)/2],$$

如所期望．

从几何上看，如果让 z 沿闭曲线 C 绕 a 点转一周回到 z，而闭曲线 C 不包围 b 点，则 $z-a$ 的辐角就从 ϕ_1 变成 $\phi_1\pm 2\pi$，而 $z-b$ 的辐角不变，所以函数值也就从 w_1 变成 w_2．如果让 z 沿闭曲线（不包围 b 点）绕 a 点转两周回到 z，则 $z-a$ 的辐角就从 ϕ_1 变成 $\phi_1\pm 4\pi$，而 $z-b$ 的辐角不变，这时函数值不变，所以 a 点是函数 (30) 的一阶支点．同理 b 点也是一阶支点．不难看出，该函数没有其它有限支点，所以它共有两个有限支点 a 和 b．

如果让 z 沿大圆 $|z|=R$ （这里的所谓大，指的是它同时包围了 a 点和 b 点）转一周回到 z，则 $z-a$ 和 $z-b$ 的辐角同时增加或减少 2π，因而函数值不变．所以 ∞ 点不是函数 (30) 的支点．

考察某点 a 是否函数 $w=f(z)$ 的支点，就是看 z 沿包围 a 点的闭曲线 C 转一周回到原处时，函数值是否发生变化．这里闭曲线 C 必须有任意性，否则点 a 附近的其它点也会被误判为支点．但是 C 又不是完全任意的，它不能包围其它支点．这样一来就必须把所有支点同时找出来才能解决问题．一般来说，这只能通过观察和验证，并无一般规则可循．不过，对于根式函数，比如 $[f(z)]^{2/3}$，其中 $f(z)$ 是单值解析函数 (允许有奇点)，则 $f(z)$ 的零点和奇点通常都是 (但不必然是) 该函数的支点．如果 $f(z)$ 是多项式或有理分式，则结论比较容易理解．但必须注意，如果 $f(z)$ 包含因式 $(z-a)^{\pm 3}$，则 a 并不是支点．对于对数函数 $\ln f(z)$ (参考 §5.4)，可以类似讨论．下面再看几个例子．

函数 $w=\sqrt{z^4+1}$ 有 4 个一阶支点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4}$．它们位于单位圆上，是一个内接正方形的顶点．

函数 $w=\sqrt{\mathrm{e}^z}=\pm\mathrm{e}^{z/2}$ 显然也是多值函数，但是并没有支点．

最后考察函数 $w=\sqrt{\sin z}$．根据无穷乘积展开式 (证明从略)

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)\left(1+\frac{z}{n\pi}\right),$$

不难看出，$z=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ 都是 $w=\sqrt{\sin z}$ 的一阶支点．所以该函数存在无穷多支点．实际上，这个结论可以用更初等的方法得出，在 $k\pi$ 附近，可有 $z=k\pi+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$．其中 $r\ll 1$．保持最低价近似，有 $\sin z=\sin(k\pi+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=(-)^k\sin(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\approx r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\pi+\theta)}$．其中最后一步用到 $z\to 0$ 时 $\sin z=z+o(z)$ 的事实，而后者又是 $\sin z/z=(\sin z-\sin 0)/(z-0)\to(\sin z)'|_{z=0}=1$ 的推论．当 z 绕点 $k\pi$ 一周 (在这一过程中 r 不必保持不变，只要保持 $r\ll 1$ 即可)，θ 有 $\pm 2\pi$ 的变化，$w=\sqrt{\sin z}$ 的函数值即由一支变到另一支，由此即得上述结论．

§5.2 割线与单值分支

前面已经指出，根式函数的多值性源于宗量的辐角的多值性．从几何上看，是因为自变量 z 可以绕支点转动，导致辐角的变化．如果以某种方式把 z 平面割破，使得自变量 z

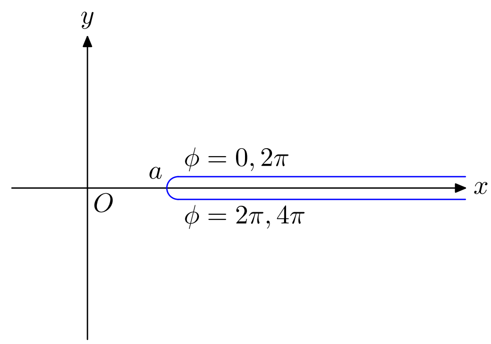

图 4: 函数 $w = \sqrt{z-a}$ 的割线与单值分支

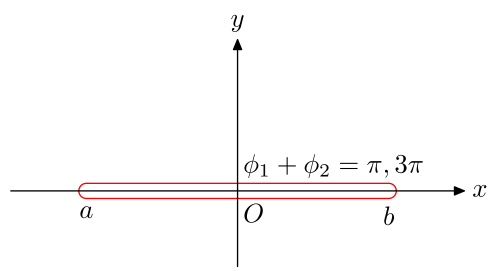

图 5: 函数 $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的割线与单值分支

不能绕支点转动，这等价于对宗量的辐角的取值范围加以限制，则函数值就变成确定的，也就是得到了一个单值分支．对宗量辐角取值范围加以不同的限制就得到不同的单值分支．

以函数 (27) 来说，我们可以把割线取为由 a 点出发沿 x 轴正向至 ∞ 点的射线，如图 4．在这样割破的 z 平面上，自变量 z 再也不能绕支点 a 转动，宗量的辐角就被限制在一定的范围内，因而函数值也被限制在某个单值分支内．如果规定割线上岸的 $\phi = 0$，则在整个割破的 z 平面上，$0 \le \phi < 2\pi$，我们就得到一个单值分支；如果规定割线上岸的 $\phi = 2\pi$，则在整个割破的 z 平面上，$2\pi \le \phi < 4\pi$，我们就得到另一个单值分支．实际上，任何由 a 点出发至 ∞ 点的射线甚至曲线都可以作为该函数的割线．

对于函数 (29)，也可以取图 4 的割线．分别取割线上岸的 ϕ 为 $0, 2\pi, \cdots, 2(n-1)\pi$，可以得到 n 个单值分支．

对于函数 (30)，割线可以取为 a 至 b 的线段．为叙述方便，设 a 与 b 均为实数且 $a < b$，则割线为实轴上由 a 至 b的线段．分别取割线上岸的 $\phi_1 + \phi_2$ 为 π 和 3π，可以得到两个单值分支．对于割线上岸 $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ 的取法，可以认为 $\phi_1 = 0$，$\phi_2 = \pi$．但此时不可认为割线下岸 $\phi_1 = 2\pi$，$\phi_2 = -\pi$．(否则上下岸函数值连续，何需割线？)而需要看 z 沿什么曲线由上岸连续变化到达下岸．如果 z 绕点 a 逆时针转动到达下岸，则 $\phi_1 = 2\pi$，$\phi_2 = \pi$，而 $\phi_1 + \phi_2 = 3\pi$．如果 z 绕点 b 顺时针转动到达下岸，则 $\phi_1 = 0$，$\phi_2 = -\pi$，而 $\phi_1 + \phi_2 = -\pi$．虽然 $\phi_1 + \phi_2$ 在两种情况下不一样，但是函数值是一样的，它与上岸对应点的函数值相差一个负号．

§5.3 *Riemann* 面

还是以函数 (27) 为例，如果规定割线上岸的 $\phi = 0$，则在所得的单值分支中，

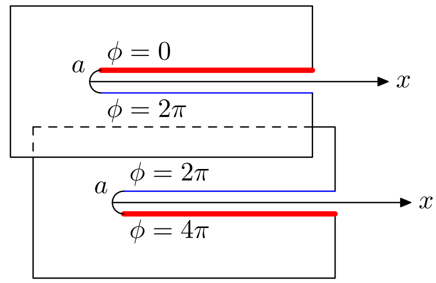

图 6: Riemann 面

$0\le \arg w<\pi$；如果规定割线上岸的 $\phi=2\pi$，则在所得的单值分支中，$\pi\le\arg w<2\pi$. 可见，两个分支的函数值合起来充满了整个 w 平面，然而，自变量却要用两张 z 平面来表示，这显然是不太令人满意的. 实际上，这两张 z 平面是有联系的. 易知第一张 z 平面的下岸与第二张 z 平面的上岸都对应于 $\phi=2\pi$，而第二张 z 平面的下岸对应于 $\phi=4\pi$，对于函数 (27) 来说，这与 $\phi=0$ 是等价的，换句话说，第二张 z 平面的下岸与第一张 z 平面的上岸是一回事. 于是，我们可以把第一张 z 平面的下岸与第二张 z 平面的上岸粘在一起，而把第二张 z 平面的下岸与第一张 z 平面的上岸粘在一起，其示意图如图 6. 这样得到的具有两页的 z 平面就称为函数 (27) 的 *Riemann 面*. 在 Riemann 面上，函数 (27) 是单值的.

对于函数 (29)，如果取图 4 的割线，则其 Riemann 面类似于图 6，但由 n 页构成，其中第 k 页的下岸与第 $k+1$ 页的上岸粘连（$k=1,2,\cdots,n-1$），而第 n 页的下岸与第一页的上岸粘连. 对于函数 (30)，其 Riemann 面也由两页构成，但不管割线怎么取，画起来都有一定的难度，需要有美术技巧. 对于更复杂的多值函数，比如

$$w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)^2(z-c)^2},$$

其 Riemann 面如何构造，实际上是一个相当困难的问题.

§5.4 对数函数

对数函数（logarithmic function）定义为指数函数的反函数. 如果 w 满足

$$\mathrm{e}^w=z, \tag{31}$$

我们就说

$$w=\mathrm{Ln}z. \tag{32}$$

令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=u+\mathrm{i}v$，代入式 (31)，得 $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，比较两边的模和辐角，得

$$u=\ln r,\quad v=\theta+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

换句话说，

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln r+\mathrm{i}(\theta+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{33}$$

由此可见，对数函数也是一个多值函数，且具有无穷多个单值分支. 易知其支点为 $z=0$ 和 $z=\infty$. 由于自变量绕 $z=0$ 转动任意周回到出发点，函数值都不能复原，故 $z=0$

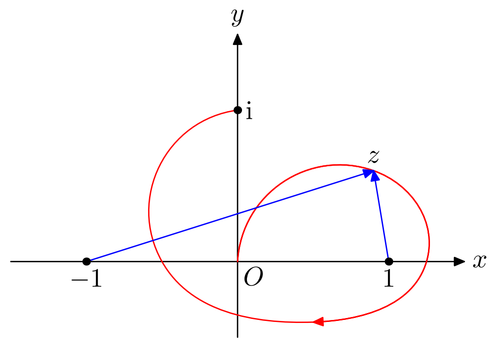

图 7: 确定多值函数函数值的第二种方式

称为超越支点．同样，$z=\infty$ 也是超越支点．割线可以取为由 $z=0$ 出发沿 x 轴正向至 $z=\infty$ 的射线，即 x 轴的正半轴．Riemann 面具有无穷多页，类似于螺旋楼梯．

若 θ 取为辐角主值并置 $k=0$，所得单值分支称为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值分支，记作 $\ln z$，即

$$\ln z = \ln r + \mathrm{i}\theta = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

§5.5 *多值函数函数值的确定

对于多值函数 $w(z)$，给定自变量 z，存在多个函数值，因此需要一定的附加条件才能完全确定函数值．附加条件通常有两种形式，相应地有两种确定函数值的方法，分别叙述并举例如下．

第一种方法是沿适当的割线将 z 平面割破，这样就可以分出 $w(z)$ 的单值分支．然后，给定宗量在割线一侧的辐角，或者给定某点 z_0 (非支点) 的函数值，就可以确定具体的单值分支，从而确定 $w(z)$ 在各点的函数值．

考虑函数 $w(z)=\sqrt{z^2-1}$，函数值可以表示为

$$w(z)=\sqrt{|z+1||z-1|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathrm{Arg}(z+1)+\mathrm{Arg}(z-1)]/2}.$$

采用图 5 (现在 $a=-1$、$b=1$) 的割线割开 z 平面，并取上岸 $\mathrm{Arg}(z+1)=0$ 和 $\mathrm{Arg}(z-1)=\pi$ (实际上规定两者之和即可)，则在这样割破并规定辐角的 z 平面上，每个点的函数值都是确定的．例如，对于 $z=\mathrm{i}$，易得 $|\mathrm{i}+1|=|\mathrm{i}-1|=\sqrt{2}$， $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}+1)=\pi/4$ 和 $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}-1)=3\pi/4$，于是得到 $w(\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

第二种方法不需要将 z 平面割开，也不必关心 $w(z)$ 的具体单值分支．其附加条件是给定某点 z_0 (非支点) 的函数值，并指定由 z_0 到 z 连续变化的曲线．根据变化过程中相关宗量辐角的变化，就可以确定 $w(z)$．改变 z_0 到 z 的曲线，可以得到其他分支的 $w(z)$ 值．这种方法使得我们可以从一点出发到达 Riemann 面上所有各点并求得其函数值，同时又不需要掌握 Riemann 面的整体构造．所以它在复分析中非常有用．

仍然考虑函数 $w(z)=\sqrt{z^2-1}$，给定 $w(0)=\mathrm{i}$ (相当于上面做法中上岸的函数值)，并规定 $z_0=0$ 经由图 7 中的曲线连续变化到 $z=\mathrm{i}$，今欲确定 $w(\mathrm{i})$．易知 $\mathrm{Arg}\,w(0)=\pi/2$，而从起点到终点，辐角的变化为 $\Delta\,\mathrm{Arg}(z+1)=\pi/4$，$\Delta\,\mathrm{Arg}(z-1)=-9\pi/4$，所以

$$\mathrm{Arg}\,w(\mathrm{i})=\mathrm{Arg}\,w(0)+\frac{1}{2}[\Delta\,\mathrm{Arg}(z+1)+\Delta\,\mathrm{Arg}(z-1)]=-\frac{\pi}{2}.$$

最终得到 $w(\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$．显然，这与前面所得的结果不属于同一分支．这是容易理解的．与方法一所确定的单值分支比较，可知 $w(0)=\mathrm{i}$ 是上岸的函数值．如果从该值出发，让 z 由 $z_0=0$ 沿

虚轴连续变化到 $z=\mathrm{i}$，则得到的 $w(\mathrm{i})$ 即等于方法一所得结果，这容易由 $\mathrm{Arg}(z\pm1)$ 的变化看出．而现在的曲线等价于先绕支点 $z=1$ 一周回到 $z_0=0$，再由 $z_0=0$ 出发沿虚轴连续变化到 $z=\mathrm{i}$．因为绕了支点 $z=1$ 一周，当然就变到另一分支了．

§5.6 多值函数的解析性

多值函数在其 Riemann 面上变成单值的，所以可以象单值函数一样定义导数并讨论其解析性.

但是，支点为 Riemann 面各页所共有，在支点的邻域内，函数值是不确定的，因而支点的导数没有定义，所以支点必为奇点.

§5.7 对数函数的导数

在多值函数的单值分支内，反函数存在，所以可用反函数求导法（与实变函数相同）来计算导数．这一方法可以方便地用于根式函数和对数函数．以对数函数为例，由式 (31)，有 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}w=\mathrm{e}^w$，故 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-w}$，再由式 (31)，$e^{-w}=1/z$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Ln}z=\frac{1}{z}. \tag{34}$$

注意，这是一个单值函数．这一结果也可由式 (19) 求得.

§5.8 *一般幂函数

一般幂函数定义为

$$z^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z},\quad \alpha\in\mathbb{C}.$$

这可以写作

$$z^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha2k\pi},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

若 $\alpha\in\mathbb{Z}$，这是单值函数．特别地，若 $\alpha=1,2,\cdots$，它就是通常的乘方．其它情况下都是多值函数，支点为 $z=0$ 和 $z=\infty$．若 α 为分数，它类似于前面讨论的根式函数．具体来说，若 $\alpha=q/p$，其中 q、p 均为整数且互素（即没有公约数），则两支点均为 $p-1$ 阶支点．若 α 为无理数，或 α 为复数且虚部不为 0，则两支点均为超越支点．由指数函数和对数函数的导数，不难得到

$$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}.$$

§6 解析函数的物理意义

§6.1 调和函数

如果二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内具有连续的二阶偏导数，且满足二维 Laplace 方程

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, \tag{35}$$

则 $u(x,y)$ 称为区域 D 内的**调和函数**．类似可以定义三维或更高维的调和函数.

§6.2 解析函数与调和函数的关系

若 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 均为 D 内的调和函数.

注 由此可以判断一个给定的二元实变函数是否可以作为解析函数的实部或虚部.

事实上，由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析，它就在 D 内具有各阶导数（见下章），所以 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 在 D 内具有连续的各阶偏导数. 又 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 在 D 内满足 CR 条件 (16)，将其中的第一式对 x 求导，第二式对 y 求导，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

两式相加即得式 (35)，所以 $u(x, y)$ 是 D 内的调和函数. 同理 $v(x, y)$ 也是 D 内的调和函数. 由于 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 并不是相互独立的，而是由 CR 条件紧密联系着，所以它们称为*共轭调和函数*.

若已知函数 $u(x, y)$，则由

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

积分即可求出 $v(x, y)$，反之亦然.

由于 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 满足二维 Laplace 方程，所以它们可以表示无电荷区域的静电场的电势. 当然，它们也可以用来描述其它满足二维 Laplace 方程的物理量.

§6.3 正交曲线族

若 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 相互正交.

事实上，曲线 $u(x, y) = c_1$ 的法向矢量是（未归一化）$\boldsymbol{n}_u = \nabla u$，曲线 $v(x, y) = c_2$ 的法向矢量是（未归一化）$\boldsymbol{n}_v = \nabla v$. 在交点处，其自变量相同，故

$$\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

其中最后一步用到了 CR 条件. 所以两曲线在交点处是正交的. 这一结论与 c_1、c_2 的取值无关，所以两个曲线族是正交曲线族.

由以上讨论可知，若 $u(x, y) = c_1$ 表示某平面静电场的等势线族，则 $v(x, y) = c_2$ 表示其电力线族，反之亦然. 因此，知道了等势线方程即可求电力线方程，反之亦然.

例 已知某平面静电场的电力线方程为 $x^2 - y^2 = c_1$，求等势线方程.

解 令 $v(x, y) = x^2 - y^2$，它是调和函数，可以作为某解析函数的虚部，求出其实部 $u(x, y)$，则等势线方程为 $u(x, y) = \mathrm{constant}$. 今

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x,$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=-2y\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(-2xy+c'),$$

其中 c' 为常数，故 $u(x,y)=-2xy+c'$，等势线方程为

$$xy=c_2.$$

本例的电力线和等势线都是双曲线.

注 ① 如果给定的电力线方程为 $t(x,y)=c_1$，而 $t(x,y)$ 不是调和函数，则不能直接把 $t(x,y)$ 作为某解析函数的虚部（或实部），而应该寻找函数 $v(x,y)=F(t)$ 使得该函数为调和函数，则 $v(x,y)$ 可以作为某解析函数的虚部，注意到电力线方程等价于 $v(x,y)=c_1'$，求出相应的实部 $u(x,y)$，令 $u(x,y)=c_2$，即得等势线方程. 若给定的是等势线方程，可类似求解电力线方程. 比如给定等势线方程为 $t(x,y)=x^2+y^2=c_1$，显然不能令 $u(x,y)=x^2+y^2$，因为它不是调和函数，而应该令 $u(x,y)=F(t)$，求出各偏导数，如 $\partial u/\partial x=2xF'(t)$，$\partial^2u/\partial x^2=2F'(t)+4x^2F''(t)$ 等，然后令 $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=0$，得到 $F(t)$ 所满足的微分方程，解之得 $F(t)=a\ln t+b$，其中 a、b 是积分常数，只需取一特解 $F(t)=\frac{1}{2}\ln t$，即得 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，或 $u(x,y)=\ln r$. 这一结果其实很容易猜出来，因为 $\ln r$ 是解析函数 $w=\mathrm{Ln}z$ 的实部，故必为调和函数. 由此立得 $v(x,y)=\mathrm{Arctan}(y/x)+c_2'$. 当然 $v(x,y)$ 也可由 CR 条件按部就班地算出来. 易知电力线族的方程就是 $y=c_2x$，它和等势线族显然是正交的. ② 如果只是求正交曲线族，则并不一定要借助于复变函数的技术. 实际上，用微积分中学过的方法来处理可能更简单一些. 以刚才的问题为例，设电力线的方程为 $y=g(x)$，在点 (x,y) 处，其切线斜率为 $k_2=g'(x)$，而经过该点的等势线在该点的切线的斜率为 $k_1=-x/y$. 两者要正交，必须 $k_2=-1/k_1=y/x$，即 $g'(x)=g(x)/x$，积分立得 $g(x)=c_2x$，即电力线方程为 $y=c_2x$.

习题 1 已知一解析函数 $f(z)$ 的实部为 $u(x,y)=\sin 2x/(\cosh 2y-\cos 2x)$，且 $f(\pi/2)=0$，求该解析函数.

习题 2* （选做）已知某静电场的等势线方程为 $x^2+y^2=c_1$，用复变函数方法求电力线方程.

补充习题

1. 求解方程 $\sin z = 2$.

   答案：$z = \pi/2 + 2k\pi - \mathrm{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}$.

2. 试由 Cauchy–Riemann 条件 (18) 消去 v，由此所得的 u 所满足的方程即为二维 Laplace 方程在极坐标系中的形式.

3. 已知函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且在区域 D 内满足下列条件之一，试证 $f(z)$ 在 D 内为常数.

   (a) $f'(z) = 0$.

   (b) $v(x, y)$ 为常数.

   (c) $|f(z)|$ 为常数.

   (d) $\arg f(z)$ 为常数.

4. 已知一解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 或虚部 $v(x, y)$ 和附加条件，求该解析函数.

   (a) $u(x, y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y)$，$f(0) = 0$.

   答案：$f(z) = z\mathrm{e}^z$.

   (b) $u(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$，$f(\infty) = 0$.

   答案：$f(z) = 1/z^2$.

   (c) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$，$f(0) = 0$.

   答案：$f(z) = z^4$.

   (d) $v(x, y) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$，$f(0) = 0$.

   答案：$f(z) = \sqrt{2z}$.

5. 记 $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，试证 Cauchy–Riemann 条件 (16) 等价于 $\partial f(z, \bar{z})/\partial \bar{z} = 0$.