# §1　数学期望

例 1：某班有 N 个人，其中有 $n_i$ 个人为 $a_i$ 分，$i=1,2,\cdots k$，

$\sum_{i=1}^{k} n_i = N$，　求平均成绩。

解：

平均成绩为：$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} a_i n_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{n_i}{N}$

若用 X 表示成绩，则 $P\{X=a_i\} \approx \frac{n_i}{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n_i}{N} \approx \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P\{X=a_i\}$$

# 1、数学期望定义

## (1) 离散型

设离散型随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X=x_k\}=p_k\,,\quad k=1,2,\cdots\quad,$$

若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，

则称级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望。

记为 E(X)，即 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 。

数学期望也称为均值。

## (2)、连续型

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

的值为 X 的数学期望。记为 E(X)= $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$，

数学期望也称为均值。

## 说　明

(1) $X$ 的数学期望刻划了 $X$ 变化的平均值.

(2)由于随机变量 $X$ 的数学期望表示的是随机变量 $X$ 变化的平均值，因此，只有当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 绝对收敛时，才能保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 的和与其级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 的求和顺序无关.

## 例2

甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出：

$X$：甲击中的环数；

$Y$：乙击中的环数；

| X | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.3 | 0.6 |

| Y | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

试问哪一个人的射击水平较高?

例2（续）

解：

甲、乙的平均环数可写为

$$E(X)=8\times 0.1+9\times 0.3+10\times 0.6=9.5$$

$$E(Y)=8\times 0.2+9\times 0.5+10\times 0.3=9.1$$

因此，从平均环数上看，甲的射击水平要比乙的好.

例3

设随机变量 $X$ 服从Cauchy分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=+\infty$$

这表明积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 不绝对收敛，因而 $EX$ 不存在.

例 4

设离散型随机变量 X 的分布律为：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.7 |

则　E(X) = 0*0.1+1*0.2+2*0.7 =1.6

若离散型随机变量 X 的分布律为：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | 0.7 | 0.2 | 0.1 |

则　E(X) = 0*0.7+1*0.2+2*0.1 =0.4

此例说明了数学期望更完整地刻化了x的均值状态。

例 5

按规定，火车站每天 8:00~9:00，9:00~10:00 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立，其规律为：

| 到站时间 | 8:10,9:10 | 8:30,9:30 | 8:50,9:50 |
|---|---|---|---|
| 概率 | 1/6 | 3/6 | 2/6 |

(1) 旅客 8:00 到站，求他侯车时间的数学期望。
(2) 旅客 8:20 到站，求他侯车时间的数学期望。

解：设旅客的候车时间为 X（以分记）

(1) X 的分布律：

| X | 10 | 30 | 50 |
|---|---|---|---|
| P | 1/6 | 3/6 | 2/6 |

$$E(X)=10*(1/6)+30*(3/6)+50*(2/6)=33.33(\text{分})$$

（2）旅客8：20分到达

X的分布率为

| X | 10 | 30 | 50 | 70 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 3/6 | 2/6 | (1/6)*(1/6) | (3/6)*(1/6) | (2/6)*(1/6) |

E(X)=10*(3/6)+30*(2/6)+50*(1/36) +70*(3/36) +90*(2/36)
=27.22(分)

| 到站时间 | 8:10,9:10 | 8:30,9:30 | 8:50,9:50 |
|---|---|---|---|
| 概率 | 1/6 | 3/6 | 2/6 |

## 2、随机变量函数的数学期望

**定理 1:**

设 Y=g(X), g(x) 是连续函数，

（1）若 X 的分布率为 $P_k = P\{X = x_k\} \quad k = 1,2,\cdots$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} P_k g(x_k)$ 绝对收敛，则 E(Y)= $\sum_{k=1}^{\infty} P_k g(x_k)$

(2).若 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛，

则 E(Y)= $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ 。

定理 2：

若$(X,Y)$是二维随机变量， $g(x,y)$是二元连续函数，

$$Z=g(x,y)$$

(1). 若$(X,Y)$的分布律为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P_{ij}$，

且$\sum_{i,j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)P_{ij}$绝对收敛；则 E(Z)=$\sum_{i,j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)P_{ij}$。

(2). 若$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)$，

且 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$绝对收敛,

则：E(Z)=$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$。

例 6

设风速 V 在(0,a)上服从均匀分布，又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数：$W = kV^2$，(k>0)；求 E(W)。

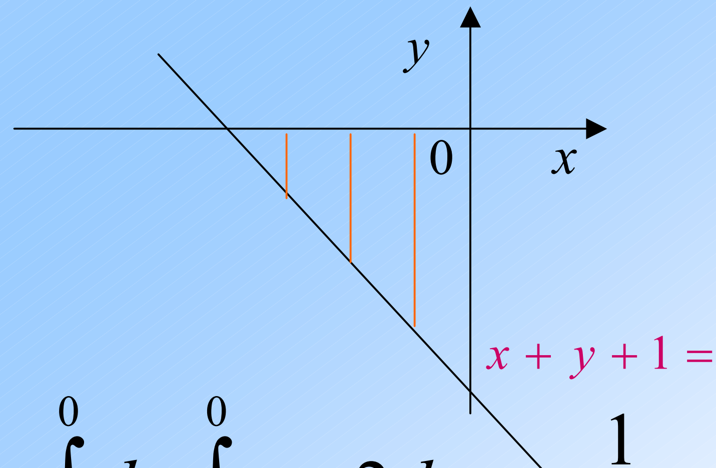
解：

$$f_V(v) = \begin{cases} 1/a, 0 < v < a; \\ 0, 其它; \end{cases}$$

$$E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f_V(v)dv = k\int_0^a v^2(1/a)dv = \frac{1}{3}ka^2$$

## 例 7

设(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A为x轴，y轴和直线x+y+1=0所围成的区域。求E(X)，E(-3X+2Y)，E(XY)。




解：
$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A\\ 0,其它;\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y)=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{3}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2ydy=\frac{1}{12}$$

例 8

设在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X（吨），它在[2000,4000]上服从均匀分布，又设每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇 3 万元，但假如销售不出而囤积在仓库，则每吨需浪费保养费 1 万元。问需要组织多少货源，才能使国家收益最大。

---

解：设 y 为预备出口的该商品的数量，这个数量可只 介于 2000 与 4000 之间，

用 Z 表示国家的收益（万元）

$$Z=\begin{cases}3y, & X\ge y\\ 3X-(y-X), & X<y\end{cases}$$

（例8续）

$$z = g(x) = \begin{cases} 3y, & x \geq y \\ 3x-(y-x), & x < y \end{cases} \qquad 2000 \leq y \leq 4000$$

下面求 E(Z) 并求使 E(Z) 达到最大的y 值，

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{2000}^{y} \frac{3x-(y-x)}{2000} dx + \int_{y}^{4000} \frac{3y}{2000} dx$$

$$= -\frac{1}{1000}[y^2 - 7000y + 4*10^6]$$

$$= -\frac{1}{1000}[(y-3500)^2 - 3500^2 - 4*10^4]$$

$$= -\frac{1}{1000}(y-3500)^2 + 8250$$

即，组织 3500 吨此种商品是最佳的决策。

## 3、数学期望的性质

I)　E(C)=C，C 是常数，若 $a \le X \le b$，

则 $a \le E(X) \le b$，

II)　E(CX)=CE(X)，C 是常数，

III)　E( aX+bY)= aE(X)+bE(Y)

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

IV)　若x，y独立，则 E(XY)=E(X)E(Y)

例 9　对N个人进行验血，有两种方案：

（1）对每人的血液逐个化验，共需N次化验；

（2）将采集的每个人的血分成两份，然后取其中的一份，按k个人一组混合后进行化验（设N是k的倍数），若呈阴性反应，则认为k个人的血都是阴性反应，这时k个人的血只要化验一次；如果混合血液呈阳性反应，则需对k个人的另一份血液逐一进行化验，这时k个人的血要化验k+1次；

假设所有人的血液呈阳性反应的概率都是P，且各次化验结果是相互独立的。

试说明适当选取k可使第二个方案减少化验次数。

（例9续）

解：设X表示第二个方案下的总化验次数，$X_i$ 表示第i个组的化验次数，则

$$X=\sum_{i=1}^{N/k}X_i\text{，且 }EX=\sum_{i=1}^{N/k}EX_i$$

$EX$表示第二种方案下总的平均化验次数，$EX_i$表示第$i$个组的平均化验次数。

下面求 $EX_i$：

$X_i$ 只可能取两个值 1 或 k+1，

$$P\{X_i=1\}=q^k\quad，\qquad q=1-p\,;$$

$$P\{X_i=k+1\}=1-q^k\quad;$$

（例 9续）

$$E(X_i) = q^k + (k+1)(1-q^k) = k+1-kq^k \quad ,$$

$$i = 1,2,\cdots,N/k \ ;$$

所以 $$E(X) = \frac{N}{k}(k+1-kq^k) = N(1+\frac{1}{k}-q^k)$$

只要选 k 使 $1+1/k-q^k<1$，即$1/k<q^k$，就可使第二个方案减少化验次数；当 q 已知时，若选 k 使 $f(k)=1+1/k-q^k$ 取最小值，就可使化验次数最少。

例如：当p=0.1，q=0.9时，可证明k=4可使最小；这时，

$$E(X) = N(1+1/4-0.9^4) = 0.5939N$$

工作量将减少40%.

返回主目录

例 10

一民航送客载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数。

求 EX（设每个旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）。

解：设 $X_i=\begin{cases}0, & \text{第}i\text{站没人下车}\\ 1, & \text{第}i\text{站有人下车}\end{cases}$，　$i=1,2,\cdots,10$，

易见 $X=X_1+\cdots+X_{10}$，$EX=\sum_{i=1}^{10}EX_i$，

$P\{X_i=0\}=(9/10)^{20}$，$P\{X_i=1\}=1-(9/10)^{20}$，$i=1,\cdots,10$，

$E(X_i)=1-(9/10)^{20}$，　$i$

$E(X)=10[1-(9/10)^{20}]=8.784$

此时，$X_i$　$i=1,2,\cdots,10$

不是相互独立的

例 11

用某台机器生产某种产品，已知正品率随着该机器所用次数的增加而指数下降，即

$$P\{\text{第k次生产出的产品是正品}\}=e^{-\lambda k}, k=1,2,\cdots,\lambda>0.$$

假设每次生产100件产品，试求这台机器前10次生产中平均生产的正品总数。

解: 设X是前10次生产的产品中的正品数，并设

$$X_{ki}=\begin{cases}1, \text{第}k\text{次生产的第}i\text{件产品是正品;}\\ 0, \text{否则.}\end{cases}$$

$k=1,2,\cdots,10,\ i=1,2,\cdots,100,$ 则

$$X=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}X_{ki}.$$

# 例 11（续）



而$X_{ki}$服从 $p=e^{-\lambda k}$ 的$(0—1)$分布，$E(X_{ki})=e^{-\lambda k}$.

$i=1,2,\cdots,100$, 所以

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}E(X_{ki})=\sum_{k=1}^{10}100e^{-k\lambda}=100\sum_{k=1}^{10}e^{-k\lambda}$$

$$=\frac{100\mathrm{e}^{-\lambda}(1-e^{-10\lambda})}{1-e^{-\lambda}}$$

例 12

对产品进行抽样，只要发现废品就认为这批产品不合格，并结束抽样。若抽样到第n件仍未发现废品则认为这批产品合格。

假设产品数量很大，抽查到废品的概率是p，试求平均需抽查的件数。

解：设X为停止检查时，抽样的件数，则X的可能取值为1,2,…,n，且

$$P\{X=k\}=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1,2,\cdots,n-1; \\ q^{n-1}, & k=n. \end{cases}$$

其中$q=1-p$，于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}p+nq^{n-1}$$

例 12（续）



$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}(1-q)+nq^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k}+nq^{n-1}$$

$$=(1+2q+3q^2+\cdots+(n-1)q^{n-2})-$$

$$-(q+2q^2+\cdots+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1})+nq^{n-1}$$

$$=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$$

$$=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-(1-p)^n}{p}$$