电动力学习题课(二)

Oct. 18, 2012

1 部分作业习题解答:

习题1.3 证明:

$$\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{B}\vec{A}=\oint \mathrm{d}\tau\left[\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{A}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}\right] \tag{1}$$

解:
方法1: 应用高斯定理Eq. (2):

$$\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}=\oint \mathrm{d}\tau\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{B}\vec{A}&=\int \mathrm{d}\tau\nabla\cdot\left(\vec{B}\vec{A}\right)=\int \mathrm{d}\tau\hat{e}_i\cdot\left(\vec{B}_{,i}\vec{A}+\vec{B}\vec{A}_{,i}\right)\\&=\int \mathrm{d}\tau\left(\hat{e}_i\cdot\vec{B}_{,i}\vec{A}+\vec{B}\cdot\hat{e}_i\vec{A}_{,i}\right)=\oint \mathrm{d}\tau\left[\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{A}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}\right]\end{aligned} \tag{3}$$

方法2: 应用高斯定理Eq. (4):

$$\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{F}=\oint \mathrm{d}\tau\nabla\cdot\vec{F} \tag{4}$$

引入常矢量$\vec{C}$,

$$\begin{aligned}\left(\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{B}\vec{A}\right)\cdot\vec{C}&=\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)=\int \mathrm{d}\tau\nabla\cdot\left[\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\right]\\&=\int \mathrm{d}\tau\hat{e}_i\cdot\left[\vec{B}_{,i}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)+\vec{B}\left(\vec{A}_{,i}\cdot\vec{C}\right)\right]\\&=\int \mathrm{d}\tau\left[\hat{e}_i\cdot\vec{B}_{,i}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)+\vec{B}\cdot\hat{e}_i\left(\vec{A}_{,i}\cdot\vec{C}\right)\right]\\&=\oint \mathrm{d}\tau\left[\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{A}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}\right]\cdot\vec{C}\end{aligned} \tag{5}$$

等式Eq. (1)得证, 类似地可以证明$\oint_{\partial S}\mathrm{d}\vec{r}\varphi=\int_S \mathrm{d}\vec{S}\times\nabla\varphi$, $\oint_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\varphi=\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\varphi$.
习题1.9 求在真空中产生的汤川势φ:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}e^{-r/a} \tag{6}$$

的电荷分布ρ, 半径为R的球内总电荷Q_R是多少?

$$\begin{aligned}\vec{E}=-\nabla\varphi&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(e^{-r/a}\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\nabla e^{-r/a}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-e^{-r/a}\frac{\vec{r}}{r^3}-\frac{1}{r}e^{-r/a}\frac{\vec{r}}{ar}\right)\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+\frac{\vec{r}}{ar^2}\right)e^{-r/a}\end{aligned} \tag{7}$$

电荷分布ρ:

$$\begin{aligned}
\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}&=\frac{q}{4\pi}\left[e^{-r/a}\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+\frac{\vec{r}}{ar^2}\right)+\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+\frac{\vec{r}}{ar^2}\right)\cdot\nabla e^{-r/a}\right]\\
&=\frac{q}{4\pi}\left[e^{-r/a}\left(4\pi\delta\left(\vec{r}\right)+\frac{1}{ar^2}\right)+\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+\frac{\vec{r}}{ar^2}\right)\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{ar}\right)e^{-r/a}\right]\\
&=\frac{q}{4\pi}e^{-r/a}\left[4\pi\delta\left(\vec{r}\right)-\frac{1}{a^2r}\right]\\
&=q\left[\delta\left(\vec{r}\right)-\frac{1}{4\pi a^2r}e^{-r/a}\right]
\end{aligned}\tag{8}$$

半径为R的球内总电荷Q_R:

$$\begin{aligned}
Q_R=\int\rho\mathrm{d}\tau&=q\left[1-\int_{0,0,0}^{R,\pi,2\pi}\frac{1}{4\pi a^2r}e^{-r/a}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right]\\
&=q\left[1-\frac{1}{a^2}\int_0^R re^{-r/a}\mathrm{d}r\right]\\
&=q\left[1-\frac{1}{a^2}\left(-are^{-r/a}\Big|_0^R-a^2e^{-r/a}\Big|_0^R\right)\right]\\
&=q\left[1+\frac{1}{a^2}\left(aRe^{-R/a}+a^2e^{-R/a}-a^2\right)\right]\\
&=q\left(1+\frac{R}{a}\right)e^{-R/a}
\end{aligned}\tag{9}$$

当$R\to+\infty$时, $Q_R\to 0$.
习题1.19 设某种介质的本构关系为:

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}+\alpha\vec{H}\qquad\vec{B}=\beta\vec{E}+\mu\vec{H}\tag{10}$$

其中$\alpha,\beta,\varepsilon,\mu$为常数, 并且满足$\alpha\beta-\varepsilon\mu\neq 0$. 证明: 在无源的情况下, $\vec{E},\vec{H}$满足方程:

$$\nabla^2\vec{E}+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+(\alpha\beta-\varepsilon\mu)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\tag{11}$$

$$\nabla^2\vec{H}+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+(\alpha\beta-\varepsilon\mu)\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\tag{12}$$

解:
将本构关系Eq. (10), 代入无源介质中的Maxwell方程组:

$$\nabla\cdot\vec{D}=\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}+\alpha\nabla\cdot\vec{H}=0\tag{13}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\beta\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\tag{14}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=\beta\nabla\cdot\vec{E}+\mu\nabla\cdot\vec{H}=0\tag{15}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\tag{16}$$

Eq. (13) 和Eq. (15) 表明: 当$\alpha\beta-\varepsilon\mu\neq 0$时, 线性方程有唯一解$\nabla\cdot\vec{E}=0$, $\nabla\cdot\vec{H}=0$.

对Eq. (14) 和Eq. (16) 分别取旋度:

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) &= -\beta\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E}-\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{H}\\
\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E} &= -\beta\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)\\
\nabla^2\vec{E}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\beta\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= 0\\
\nabla^2\vec{E}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(-\beta\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\nabla\times\vec{E}\right)-\beta\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= 0\\
\nabla^2\vec{E}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}+(\alpha\beta-\varepsilon\mu)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

同理,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right) &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{H}\\
\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H} &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\beta\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)+\alpha\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}\\
\nabla^2\vec{H}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\alpha\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} &= 0\\
\nabla^2\vec{H}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}-\alpha\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)+\alpha\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} &= 0\\
\nabla^2\vec{H}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}+(\alpha\beta-\varepsilon\mu)\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$\nabla\cdot\vec{E}=0$, $\nabla\cdot\vec{H}=0$代入Eq. (17) 和Eq. (18) 得证.

2 Example 1:

如Fig. 1 (a) 所示, 空间中$r<r_0$的区域内存在着随时间线性变化, 沿着$\hat{e}_z$方向的均匀磁场, 即:

$$
\vec{B}=\begin{cases}\alpha t\hat{e}_z & r<r_0\\ 0 & r>r_0\end{cases}
\tag{19}
$$

(a) 计算空间中矢势$\vec{A}$和电场$\vec{E}$的分布. 若在$(a,0,0)$处置一点电荷q, 施加一外力$\vec{F}$保持其静止, 求外力$\vec{F}$, t时刻体系的正则动量$\vec{p}$, 以及在$0\sim t$的时间内外力$\vec{F}$对电荷的冲量$\vec{I}$, 比较正则动量$\vec{p}$和冲量$\vec{I}$的大小并讨论之.

(b) 若在空间连接一电路Fig. 1 (b), 求电压表V_1, V_2的读数, 比较V_1和V_2的大小并讨论之. (注: 电压表仅显示电阻两端的压降, 外场的电动势对其读数显示没有影响.)

解: **(a)** 应用$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$的积分形式[1], 解得:

$$
\vec{A}=\begin{cases}\frac{r}{2}\alpha t\hat{e}_\phi & r<r_0\\ \frac{r_0^2}{2r}\alpha t\hat{e}_\phi & r>r_0\end{cases}
\tag{20}
$$

[1]对于均匀磁场$\vec{B}=\vec{B}_0$, 矢势$\vec{A}$可以表示为: $\vec{A}=-\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}_0$.

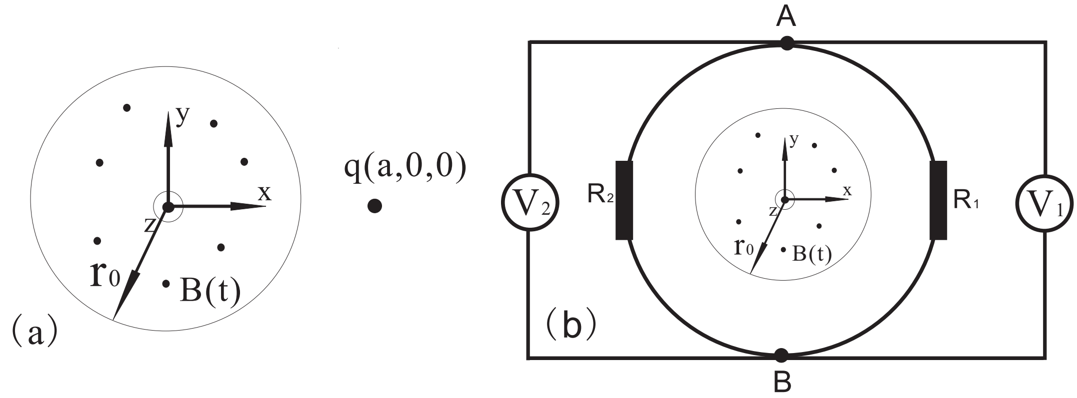

Figure 1: Example 1示意图

应用$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$的积分形式, 或者$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, 解得:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{r}{2}\alpha \hat{e}_\phi & r < r_0 \\ -\frac{r_0^2}{2r}\alpha \hat{e}_\phi & r > r_0 \end{cases} \tag{21}$$

根据题意$\vec{F} + q\vec{E} = 0$,

$$\vec{F} = \frac{q r_0^2}{2r}\alpha \hat{e}_y \tag{22}$$

那么点电荷q在$0 \sim t$的时间内受到的冲量$\vec{I}$:

$$\vec{I} = \int \vec{F} \mathrm{d}t' = \frac{q r_0^2}{2r}\alpha t \hat{e}_y \tag{23}$$

在t时刻体系的正则动量$\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} = \frac{q r_0^2}{2r}\alpha t \hat{e}_y = \vec{I} \tag{24}$$

(b) 磁通量Φ:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} \alpha t \pi r^2 & r < r_0 \\ \alpha t \pi r_0^2 & r > r_0 \end{cases} \tag{25}$$

则电路中的电动势ε:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\alpha \pi r_0^2 \tag{26}$$

注意Eq. (26) 中是对时间的全微分. 进一步, 电流I为:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = -\frac{\alpha \pi r_0^2}{R_1 + R_2} \tag{27}$$

注意这里负号表示电流是顺时针方向的.
电压表V_1的读数为:

$$V_1 = V_{1B} - V_{1A} = R_1 I = -\frac{\alpha \pi r_0^2}{R_1 + R_2} R_1 \qquad \text{(A点电势高于B点)} \tag{28}$$

电压表V_2的读数为:

$$V_2 = V_{2A} - V_{2B} = R_2 I = -\frac{\alpha \pi r_0^2}{R_1 + R_2} R_2 \qquad \text{(A点电势低于B点)} \tag{29}$$

讨论与思考:

- 第一小题的Eq. (24) 说明在该过程中外力$\vec{F}$对电荷产生的冲量$\vec{I}$实际上以电磁动量的形式储存在了电磁场中.
- 第二小题的$V_1 \neq V_2$的原因是:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0 \tag{30}$$

  换句话说, 此时电势多值, 没有明确意义.
- 如果大家有兴趣, 可以尝试算出此题中的能流密度$\vec{S}$.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \begin{cases} -\frac{r}{2\mu_0}\alpha^2 t\hat{e}_r & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \tag{31}$$

  在边界处$r = r_0$, 能流$\vec{S}$发生突变.

3 Example 2:

如Fig. 2 所示, 空间中有一长度为$l \gg 1$的同轴电缆, 内导体半径为a, 外导体半径为b, 其两端: 一端连接电压为V的直流电源, 另一端连接阻值为R的电阻. 内导体电荷线密度为λ, 电流大小I, 外导体带反号的电荷和反向的电流.

在$a < r < b$, $0 < z < l$的区间内, 计算电磁场的能量密度w_{em}和能流密度$\vec{S}$分布, 动量密度$\vec{p}$和动量流密度$\overleftrightarrow{T}$分布, 单位时间通过同轴电缆横截面的能量$\int \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$和动量$\int \overleftrightarrow{T} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$, 电磁场的总能量$\int w_{em}\mathrm{d}\tau$和总动量$\int \vec{g}\mathrm{d}\tau$, 以及内外导体之间的作用力$\vec{F}_{int}$.

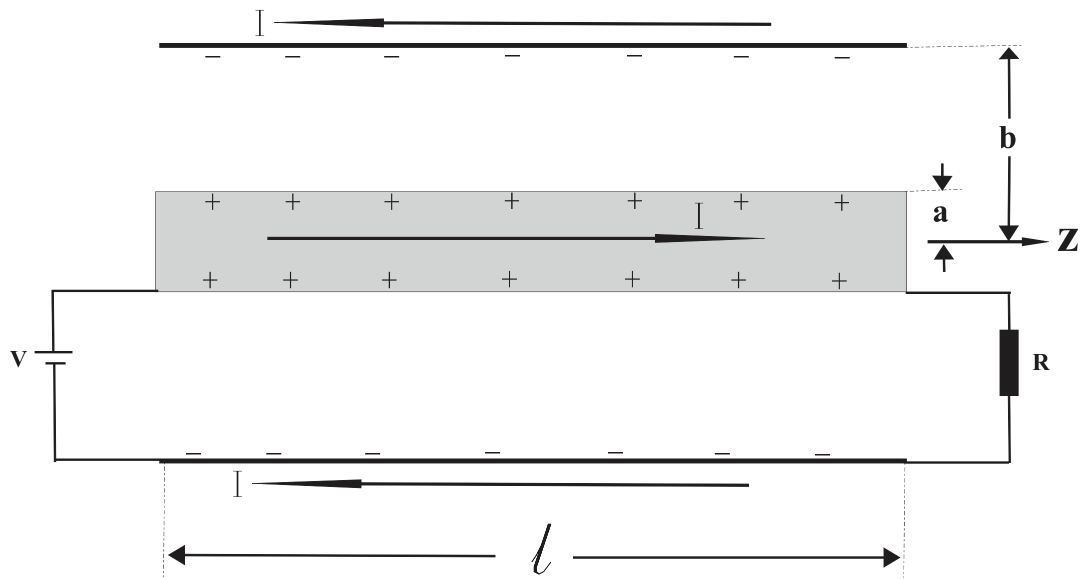

Figure 2: Example 2示意图

解: 易求得$a < r < b$, $0 < z < l$区间内的电场$\vec{E}$和磁场$\vec{H}$的分布:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{e}_r \qquad \vec{H} = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{e}_\phi \tag{32}$$

先考虑电磁场的能量, 其能量密度w_{em}和能流密度$\vec{S}$分布为:

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0} + \mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2} \tag{33}$$

$$\vec{S}=\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_z \tag{34}$$

单位时间内通过同轴电缆横截面的能量:

$$P=\int\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=\int\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \tag{35}$$

按照能流的方向, 很明显, 能量是从电池流向电阻的.
利用电场计算内导体和外导体之间的电势差V[2]:

$$V=V_a-V_b=\int_b^a\mathrm{d}\varphi=\int_b^a\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b E\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \tag{36}$$

那么,

$$P=IV \tag{37}$$

Eq. (37) 的物理意义十分明确, 单位时间内通过同轴电缆横截面的能量P等于电路的功率IV.
电磁场的总能量U为:

$$U=\int w_{em}\mathrm{d}\tau=\frac{l}{4\pi}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\ln\frac{b}{a} \tag{38}$$

接着考虑电磁场的动量, 其动量密度$\vec{g}$和动量流密度$\overleftrightarrow{T}$分布为:

$$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}=\frac{\mu_0\lambda I}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\hat{e}_z \tag{39}$$

$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2}\overleftrightarrow{I}-\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\hat{e}_r-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\hat{e}_\phi\hat{e}_\phi \tag{40}$$

单位时间内通过同轴电缆横截面的动量$\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\vec{F}&=\int\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=\int\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi=\int\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2}\hat{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\ln\frac{b}{a}\hat{e}_z\end{aligned} \tag{41}$$

电磁场的总动量$\vec{P}$:

$$\vec{P}=\int\vec{g}\mathrm{d}\tau=\frac{\mu_0\lambda I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{42}$$

最后考虑内外导体之间的作用力$\vec{F}_{int}$:

$$\vec{F}_{int}=-\int\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=-\int\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{e}_r r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z=-\int\left[\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}+\mu_0 I^2\right)\frac{1}{r^2}\hat{e}_r-\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\right]r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z=0 \tag{43}$$

讨论与思考:

- 电阻的能量来自空间电磁场, 所以电路中能量的传播速度(电场建立的速度)为光速.
- 整个体系静止, 为什么会有电磁动量? (提示: $\vec{A}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r\hat{e}_z$)
- 为什么会存在表面电荷: J.D.Jackson, Am. J. Phys. 64, 855 (1996).

[2] 若V固定, 当$a\to 0$时, $\lambda\to 0$.