电动力学准备课 第1课

三维矢量场分析

电磁力是三维矢量场。本节为描写电磁力作数学准备.

一. 矢量场及其通量

本节讨论的矢量场是三维物理空间的切矢量场，它给物理空间每一点$\boldsymbol{x}$指定一个三维矢量$\boldsymbol{f}$的映射，记为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

物理上，这个矢量$\boldsymbol{f}$可以是位移矢量、速度矢量、加速度矢量、电流密度和力矢量等。其数学性质和位移矢量相同，同一点的矢量构成线性向量空间，每个矢量有长度和方向。

通常假定物理空间是平直的欧几里得空间，其中平行移动矢量有明确意义。将平行移动得到的矢量视为同一矢量，从而不同点的矢量可以看着同一个矢量空间，矢量可以相加减。

例：矢量场$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在不同点的矢量$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$和$\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$. 在$\boldsymbol{x}'$定义矢量$\boldsymbol{f}_p=\boldsymbol{f}_1$，它由$\boldsymbol{f}_1$平行移动到$\boldsymbol{x}$所得. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$定义为$\Delta\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_2-\boldsymbol{f}_\mathrm{p}$.

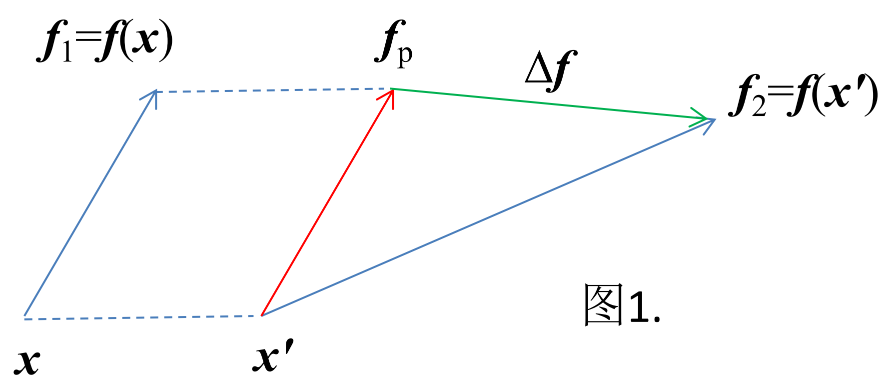
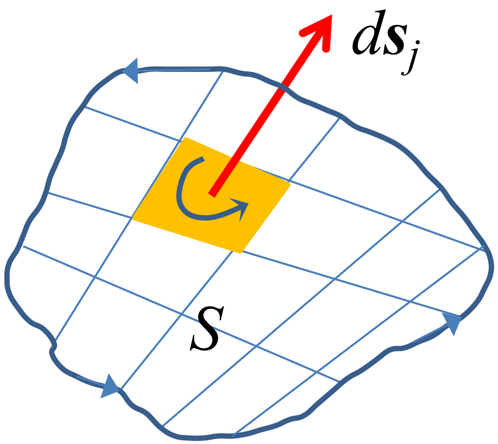


图1.

通量



$L=\partial S$

图2. 有限曲面分解. L是有向面S的边界，记为∂S. 曲面S可以分解为一些面元($d\boldsymbol{s}_j$)的之集合. 在三维空间中面元可看作（赝）矢量，方向沿右手法则规定的法向，大小为面积. 注意，面元集合不是面元按矢量规则相加.

矢量场$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在面元$d\boldsymbol{s}$的通量

$$d\Phi = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s}$$

有限曲面S的通量定义为

$$\Phi = \sum_j \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j) \cdot d\boldsymbol{s}_j = \iint_S \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s}$$

如果$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是电流密度矢量场，它的通量就是流过曲面的电流，即单位时间流过曲面的电荷量.

二. 矢量场的散度

1. 散度定义

矢量场通过体元表面发出的通量与体元体积之比定义为矢量场的散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} \equiv \frac{1}{dV} \oiint_{\partial(dV)} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} \qquad (1)$$

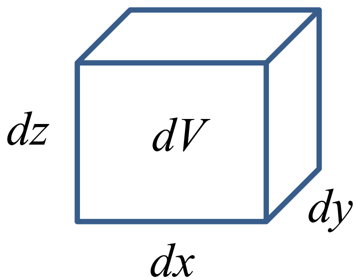


图3. 体元. $\partial(dV)$表示体元dV的边界（一个闭合曲面）

在笛卡尔坐标中，正方体微元dV相对两面元的方向相反

$$\begin{aligned}\int_{\partial(dV)} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} &= \big(f_x(x+dx,y,z) - f_x(x,y,z)\big)ds_{yz} \\ &\quad + \big(f_y(x,y+dy,z) - f_y(x,y,z)\big)ds_{zx} \\ &\quad + \big(f_z(x,y,z+dz) - f_z(x,y,z)\big)ds_{xy} \\ &= \partial_x f_x dx ds_{yz} + \partial_y f_y dy ds_{zx} + \partial_z f_z dz ds_{xy} \\ &= (\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z) dV\end{aligned}$$

根据定义(1)式，笛卡尔坐标中的散度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z \qquad (2)$$

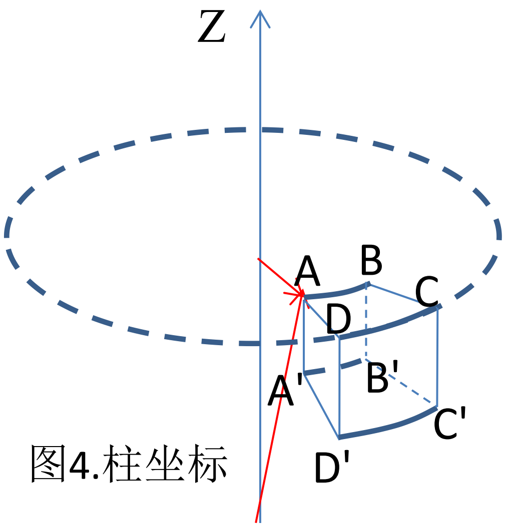


图4.柱坐标

柱坐标线元 $d\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{e}}_\rho d\rho+\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \rho d\varphi+\hat{\boldsymbol{e}}_z dz$

体元 $dV=\rho d\rho d\varphi dz$

$A(\rho,\varphi,z)$ $A'(\rho,\varphi,z-dz)$

$B(\rho,\varphi+d\varphi,z)$ $B'(\rho,\varphi+d\varphi,z-dz)$

$C(\rho+d\rho,\varphi+d\varphi,z)$ $C'(\rho+d\rho,\varphi+d\varphi,z-dz)$

$D(\rho+d\rho,\varphi,z)$ $D'(\rho+d\rho,\varphi,z-dz)$

ABB'A'面元和DCC'D'面元的通量

$$d\Phi_1=f_\rho(\rho+d\rho,\varphi,z)(\rho+d\rho)d\varphi dz-f_\rho(\rho,\varphi,z)\rho d\varphi dz=\left[f_\rho(\rho,\varphi,z)+\frac{\partial f_\rho}{\partial\rho}\rho\right]d\rho d\varphi dz$$

ADD'A'面元和BCC'D面元的通量

$$d\Phi_2=f_\varphi(\rho,\varphi+d\varphi,z)d\rho dz-f_\varphi(\rho,\varphi,z)d\rho dz=\frac{\partial f_\varphi}{\partial\rho}d\rho d\varphi dz$$

ABC'D面元和A'B'C'D'面元的通量

$$d\Phi_3=f_z(\rho,\varphi,z+dz)\rho d\rho d\varphi-f_z(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi=\frac{\partial f_z}{\partial z}\rho d\rho d\varphi dz$$

从而柱坐标中的散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\frac{1}{dV}\left(d\Phi_1+d\Phi_2+d\Phi_3\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho f_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\qquad(3)$$

2. 高斯公式

有限体域V可分解成体元之集合（形式上用求和表示）： $V=\sum_j dV_j$

矢量场散度的体积分

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}dV=\sum_j\iiint_{dV_j}\nabla\cdot\boldsymbol{f}dV=\sum_j\nabla\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j)\iiint_{dV_j}dV=\sum_j\nabla\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j)dV_j$$

根据散度的定义，

$$\sum_j\nabla\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j)dV_j=\sum_j\oiint_{\partial(dV_j)}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{s}$$

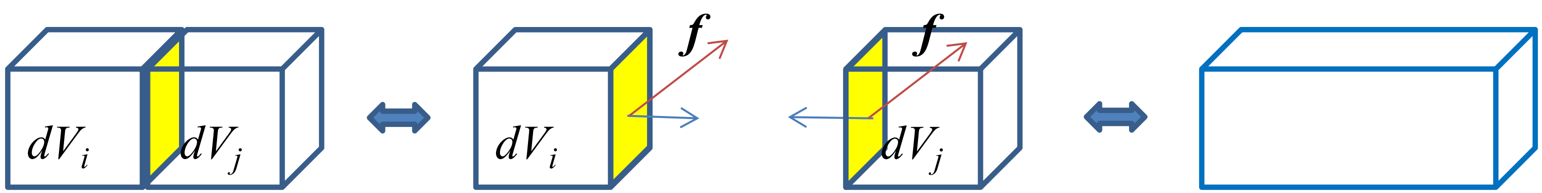


图5. 相邻体元共面贡献的通量为零.

在相邻体元共面上$\boldsymbol{f}$的投影相反，从而通量相反. 故从所有体元发出的总通量等于从他们集合体表面发出的通量，两体元的共面没有贡献. 综上结果得

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{f}dV=\oiint_{\partial V}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{4}$$

三. 矢量场的旋度

1. 环量

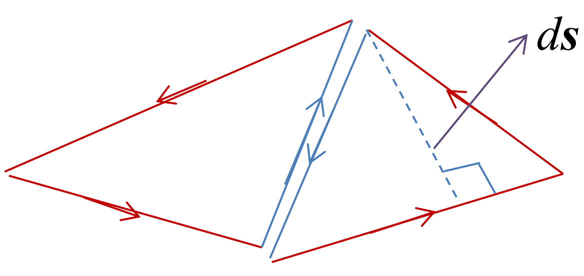
任意定向曲面S的边界都是一个环路$C=\partial S$，其方向由曲面方向按右手法则诱导出来. 矢量场沿环路的线积分为环量，

$$\Gamma[C]=\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{5}$$

如果$\boldsymbol{f}$是作用于粒子上的力，环量便是在粒子沿C运动一周过程中力对粒子做的功.

前面已述，曲面可以分解为面元之集合. 相应地，曲面的边界可以分解为一些面元边界之集合. 从而任意曲面边界的环量都可以分解为面元边界环量之和.

图6. 面元及其边界. 不失一般性，面元可取为三角形.



任意三角面元$d\boldsymbol{s}$ 可以进一步分解为三个互相垂直的面元之集合.

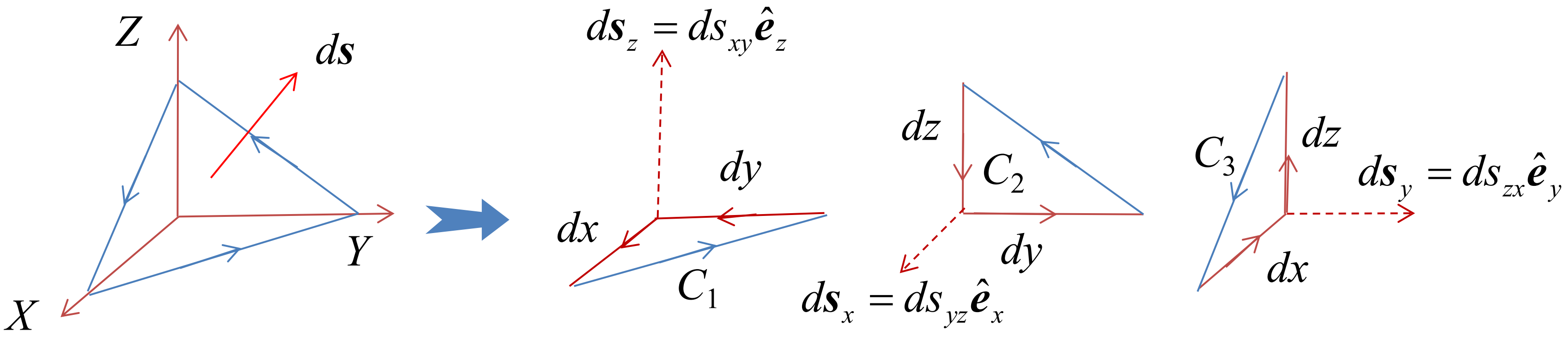


图7. 面元分解及相应边界环路分解.

$$d\boldsymbol{s} = \frac{dxdy}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_z + \frac{dydz}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{dzdx}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_y = ds_{xy}\hat{\boldsymbol{e}}_z + ds_{yz}\hat{\boldsymbol{e}}_x + ds_{zx}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

形式上用求和表示环路集合

$$C \equiv \partial(d\boldsymbol{s}) = \partial(d\boldsymbol{s}_z) + \partial(d\boldsymbol{s}_x) + \partial(d\boldsymbol{s}_y) = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\oint_{C=\partial d\boldsymbol{s}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} + \oint_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} + \oint_{C_3} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (6)$$

以C_2环量为例（C_1环量的推导见附录2）.

$$O(x,y,z)$$
$$A(x,y+dy,z)$$
$$B(x,y,z+dz)$$

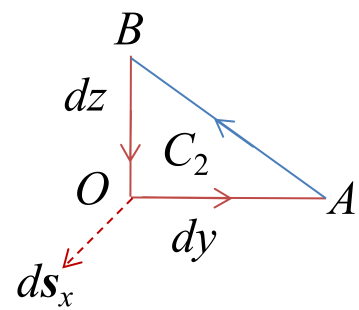


图8. C_2的环量.

$$\oint_{C_2}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{OA}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{AB}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{BO}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{y(OA)}^{y+dy}f_y(\boldsymbol{x}')dy'+\int_{(AB)}\left[f_y(\boldsymbol{x}')dy'+f_z(\boldsymbol{x}')dz'\right]+\int_{z+dz(BO)}^{z}f_z(\boldsymbol{x}')dz'$$

$$=\int_{y(OA)}^{y+dy}f_y(\boldsymbol{x}')dy'+\int_{y+dy(AB)}^{y}\left[f_y(\boldsymbol{x}')+f_z(\boldsymbol{x}')\frac{dz'}{dy'}\right]dy'+\int_{z+dz(BO)}^{z}f_z(\boldsymbol{x}')dz'$$

其中$\dfrac{dz'}{dy'}=\dfrac{dz}{dy}$与积分变量$y'$无关. 在$O$点展开$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$,

$$f_i(\boldsymbol{x}')=f_i(\boldsymbol{x})+\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x}(x'-x)+\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial y}(y'-y)$$

其中$i=x,y,z$

把展式代入C_2环路积分，只需保留领头无穷小量，得到（请自行验证）

$$\oint_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\frac{dydz}{2} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)ds_{yz}$$

其他两个直角三角形的环量可以类似得到，从而任意三角面元$d\boldsymbol{s}$边界的环量

$$\begin{aligned}\oint_{C=\partial d\boldsymbol{s}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} &= \oint_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}+\oint_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}+\oint_{C_3} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}\\ &= \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)ds_{xy}+\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)ds_{yz}+\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)ds_{zx}\\ &= (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{s}\end{aligned}$$

其中

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x+\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (7)$$

上式不依赖于所选面元及其边界环路，可用来反映矢量场的特征，称为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的旋度.

2. 旋度

(7)式是旋度在笛卡尔坐标的表达式. 不依赖于坐标系，矢量场$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的旋度rot$\boldsymbol{f}$定义为把任意面元$d\boldsymbol{s}$映射为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$沿该面元边界的环量的映射.

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f}: \quad d\boldsymbol{s} \to \oint_{\partial(d\boldsymbol{s})} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{l}$$

维数为n(>1)的空间每一点有n!/(n-2)!/2个线性独立面元，该处任意面元都可以写成独立面元的线性组合. 因此某点的旋度映射需要而且只需要由n!/(n-2)!/2个数值来确定.在三维空间，旋度需要3个数值来确定，因此可以表示为一个赝矢量（转动行为和矢量一样，但反演不变号），记为 $\nabla\times\boldsymbol{f}$.

$$(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{\partial(d\boldsymbol{s})} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (8)$$

上式是三维空间中矢量场旋度的普遍定义.

2. 斯托克斯公式

任意有向曲面的边界（红色环路）可以分解为系列微环路（蓝色环路）之集合.

$$C=\partial S=\sum_i \partial(d\boldsymbol{s}_i)=\sum_i C_i \qquad (9)$$

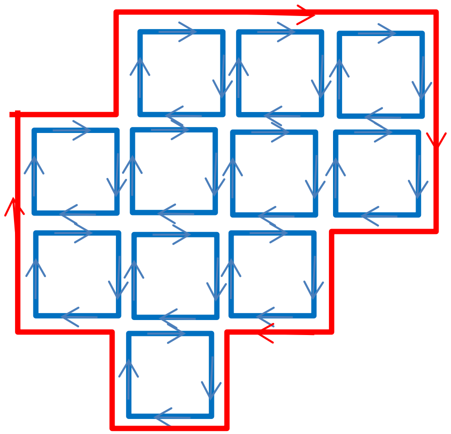


图8. 环路分解

从而

$$\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (10)$$

按照旋度定义(8)式，

$$\sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}_i=\sum_i (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{s}_i=\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{s}$$

所以有斯托克斯公式

$$\oint_{C=\partial S} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{s} \qquad (11)$$

四. 标量场的梯度

在笛卡尔坐标下（采用一般坐标的讨论见附录1）的线元矢量

$$d\boldsymbol{l} = dx\hat{\boldsymbol{e}}_x + dy\hat{\boldsymbol{e}}_y + dz\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{11}$$

标量场$\varphi(\boldsymbol{x})$的微分

$$d\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \tag{12}$$

定义φ的**梯度**

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi \\ \partial_y\varphi \\ \partial_z\varphi \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{e}}_x\partial_x\varphi + \hat{\boldsymbol{e}}_y\partial_y\varphi + \hat{\boldsymbol{e}}_z\partial_z\varphi \tag{13}$$

则

$$d\varphi(\boldsymbol{x}) = \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{l}$$

对任意给定方向$\boldsymbol{e}_u=\boldsymbol{u}/u$，取$d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_u du$，梯度给出$\varphi(\boldsymbol{x})$沿$\boldsymbol{e}_u$的方向导数

$$\left.\frac{d\varphi}{du}\right|_{\hat{\boldsymbol{e}}_u} = \frac{1}{du}\left[\varphi(\boldsymbol{x}+\hat{\boldsymbol{e}}_u du) - \varphi(\boldsymbol{x})\right] = e_{ux}\partial_x\varphi + e_{uy}\partial_y\varphi + e_{uz}\partial_z\varphi = \hat{\boldsymbol{e}}_u \cdot \nabla\varphi \tag{14}$$

因此$\varphi(\boldsymbol{x})$增加最快的方向就是梯度的方向. 梯度垂直于$\varphi(\boldsymbol{x})$的等值面，指向$\varphi(\boldsymbol{x})$增加最快的方向. 若 $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) = 0$，则$\boldsymbol{x}_0$是函数的极值点（极大或极小）.

五. 矢量场的分解

亥姆霍兹定理： 在单连通区域矢量场可分解成横场和纵场（附录3）

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}^{(l)}(\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

横场满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}^{(t)}=0$ (16)

纵场满足 $\nabla\times\boldsymbol{f}^{(l)}=0$ (17)

取包含$\boldsymbol{x}$的单连通区域V，横场和纵场可分别写成（但不唯一，依赖于V）

$$\boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}dV'+\frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\oint_{\partial V}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times d\boldsymbol{s}'\right] \tag{18}$$

$$\boldsymbol{f}^{(l)}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}dV'+\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\oint_{\partial V}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot d\boldsymbol{s}'\right] \tag{19}$$

若V趋向无穷的极限存在，可取V为全空间，则上两式右边第二项均等于零. 在此情形，矢量场被它的旋度和散度唯一确定.

六. 若干数学定理

连续可微的标量场和矢量场在单连通的区域有下列性质：

① $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ (20)

② $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0$ (21)

③ 若 $\nabla \times \boldsymbol{f} = 0$ ，则存在（但不唯一）标量场$\varphi(\boldsymbol{x})$使得 $\boldsymbol{f} = \nabla \varphi$ (22)

（附录4）

④ 若 $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$ ，则存在（但不唯一）另一矢量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$使得 $\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ (23)

（附录5）

小 结

- 散度、旋度、梯度的概念
- 高斯公式、斯托克斯公式
- 亥姆霍兹定理
- 若干公式

（第1课 完）

SUN YAT-SEN UNIVERSITY 中山大學

1. 距离和线元

建立光滑坐标系$x = (x^1, x^2, x^3)$. 无穷邻近两点的距离平方为

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}(x)dx^i dx^j = g_{ij}(x)dx^i dx^j \qquad （附1-1）$$

注意本节上下标意义不同，要小心区分. 第二等式省略了对每一对同名上下指标求和的求和号，称为重复指标求和约定. 上式中$\{g_{ij}\}$一般依赖于坐标，称为度规矩阵，容易性质：(1)$g_{ij}=g_{ji}$；(2)可逆. 记$\{g_{ij}\}$逆矩阵为$\{g^{ij}\}$. 从而

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \equiv \begin{cases} 1 & ,k = i \\ 0 & ,k \neq i \end{cases} \qquad i,k = 1,2,3 \qquad （附1-2）$$

线元是长度无穷小的切矢量. 采用重复指标求和约定和狄拉克符号，线元记为

$$|dl\rangle = dx^j |j\rangle$$

其中$|j>$理解为基矢量. 任意矢量可写成

$$|v\rangle = v^j |j\rangle$$

与|j>对应，定义余矢量基 $<j|$. 与 $|v>$ 对应的余矢量为

$$\langle v| = v_j \langle j|$$

其中余矢量的分量$\{v_j\}$和矢量的分量$\{v^j\}$存在关系（黎曼空间的特定·）

$$v_j = g_{jk} v^k \qquad j = 1,2,3 \qquad \text{（附1-3）}$$

余矢量和矢量不属于同一个矢量空间，所以他们不能相加，但他们之间存在一一对应，有内积

$$\langle u|v\rangle = u_j v^k \langle j|k\rangle \qquad \text{（附1-4）}$$

它是一个数. 因此余矢量是矢量的线性泛函，即把一个矢量映射为一个数的线性映射. 反之，矢量亦是余矢量的线性泛函. 通常所称的矢量点乘实质是余矢量和矢量的内积. 计算（附1-4）只需规定余矢量基和矢量基的内积. 常用规定

$$\langle j|k\rangle = \delta_{jk} \qquad j,k = 1,2,3 \qquad \text{（附1-5）}$$

无穷邻近两点距离平方可表示为

$$\langle dl|dl\rangle = dx_j dx^k \langle j|k\rangle = dx_j dx^k \delta_k^j = dx_k dx^k = g_{jk} dx^k dx^j = dl^2$$

2. 函数的方向导数和梯度

标量函数 $f(x)$ 沿线元|dl>方向的方向导数

$$df(x)=\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j=\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\langle j|\right)\left(dx^k|k\rangle\right)=\langle \mathrm{grad}f|dl\rangle \qquad （附1-6）$$

其中余矢量定义为

$$\langle \mathrm{grad}f|=\frac{\partial f}{\partial x^j}\langle j| \qquad （附1-7）$$

与该余矢量对应的矢量称为$f(x)$的梯度

$$|\mathrm{grad}f\rangle=g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x^k}|j\rangle \qquad （附1-8）$$

它通过（附1-6）式反映函数沿不同方向的变化率.

例. 柱坐标 $x=(x^1,x^2,x^3)=(\rho,\varphi,z)$

$$dl^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2 \qquad \{g_{jk}\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad （附1-9）$$

$$|dl\rangle=d\rho|\rho\rangle+d\varphi|\varphi\rangle+dz|z\rangle, \qquad \langle dl|=dx_1\langle\rho|+dx_2\langle\varphi|+dx_3\langle z|=d\rho\langle\rho|+\rho^2d\varphi\langle\varphi|+dz\langle z|$$

$$|\mathrm{grad}f\rangle=\frac{\partial f}{\partial\rho}|\rho\rangle+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}|\varphi\rangle+\frac{\partial f}{\partial z}|z\rangle, \qquad \langle\mathrm{grad}f|=\frac{\partial f}{\partial\rho}\langle\rho|+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\langle\varphi|+\frac{\partial f}{\partial z}\langle z|$$

在柱坐标通常把线元矢量写成（见第5页）

$$d\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{e}}_\rho d\rho + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \rho d\varphi + \hat{\boldsymbol{e}}_z dz$$

这样的基底下度规矩阵为单位矩阵，内积直接等于矢量分量的平方和，与矢量点乘一样. 用现在的记号，

$$d\boldsymbol{x} \to |dl\rangle, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \to |\rho\rangle, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \to |\lambda\rangle = \rho^{-1}|\varphi\rangle, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_z \to |z\rangle$$

$$|dl\rangle = d\rho|\rho\rangle + \rho d\varphi|\lambda\rangle + dz|z\rangle$$

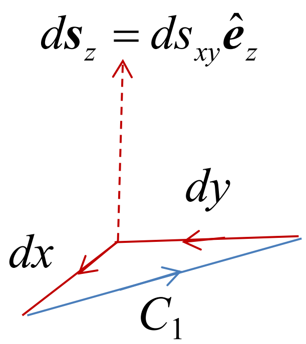
以|λ>为基底的矢量变换到余矢量时，度规矩阵采用单位矩阵. 以 $|\varphi\rangle$ 为基底的矢量变换到余矢量时，度规矩阵采用（附1-9）式.

$$\langle\lambda| = g_{22}\rho^{-1}\langle\varphi| = \rho\langle\varphi|, \qquad \langle dl| = d\rho\langle\rho| + \rho d\varphi\langle\lambda| + dz\langle z|$$

梯度矢量和梯度余矢量分别写成

$$|\mathrm{grad}\, f\rangle = \frac{\partial f}{\partial \rho}|\rho\rangle + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}|\lambda\rangle + \frac{\partial f}{\partial z}|z\rangle, \ \langle \mathrm{grad}\, f| = \frac{\partial f}{\partial \rho}\langle\rho| + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\langle\lambda| + \frac{\partial f}{\partial z}\langle z| \qquad (附1\text{-}10)$$

附录2：三角形微环路的环量



下面给出三角形ds_z的边界 $C_1=\partial(ds_z)$环路的较详细推导.

C_1的环量由沿三条路径的积分给出

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_x^{x+dx} f_x(x',y,z)dx' + \left[\int_{x+dx}^{x} f_x(x',y'(x'),z)dx' + \int_y^{y+dy} f_y(x'(y'),y',z)dy'\right] + \int_{y+dy}^{y} f_y(x,y',z)dy'$$

$$-\int_x^{x+dx}\left[\int_y^{y'(x')}\frac{\partial f_x(x',y'',z)}{\partial y''}dy''\right]dx' \qquad \int_y^{y+dy}\left[\int_x^{x'(y')}\frac{\partial f_y(x'',y',z)}{\partial x''}dx''\right]dy'$$

连续可微函数的偏导数在面元上可看作常数，

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} = \left[\frac{\partial f_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x,y,z)}{\partial y}\right]\frac{dxdy}{2} = \left[\frac{\partial f_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x,y,z)}{\partial y}\right]ds_{xy} \qquad \text{(附2-1)}$$

附录3：亥姆霍兹定理

设$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在无穷远处足够快的趋向于零，使以下积分都收敛. 对V内$\boldsymbol{x}$定义

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\nabla\times\nabla\times\int_V\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV' \qquad \text{(附3-1)}$$

分量形式

$$g_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial_m\int_V\frac{f_n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\partial_m\int_V f_n(\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV' \qquad \text{(附3-2)}$$

利用公式 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}$ 将(附3-2)化为

$$g_i=\partial_j\partial_i\int_V\frac{f_j(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'-\partial_j\partial_j\int_V\frac{f_i(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'$$

$$=\partial_i\int_V f_j(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'-\int_V f_i(\boldsymbol{x}')\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'$$

利用公式 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}=-\frac{\partial}{\partial x_j'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}$ 和 $\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$

$$g_i=-\partial_i\int_V f_j(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x_j'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+4\pi f_i(\boldsymbol{x})$$

第一项分步积分

$$g_i=-\partial_i\int_V\frac{\partial}{\partial x_j'}\frac{f_j(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+\partial_i\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+4\pi f_i(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(附3-3)}$$

(附3-2)又可写成

$$g_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial_m\int_V\frac{f_n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\int_V f_n(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'$$

$$=-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\int_V f_n(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial x'_m}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'$$

$$=-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\int_V\frac{\partial}{\partial x'_m}\frac{f_n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\int_V\frac{\partial'_m f_n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV' \qquad (附3-4)$$

由(附3-3)和(附3-4)相等得

$$-\partial_i\int_V\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{f_j(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+\partial_i\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+4\pi f_i(\boldsymbol{x})$$

$$=-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\int_V\frac{\partial}{\partial x'_m}\frac{f_n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\int_V\frac{\partial'_m f_n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'$$

写成矢量形式

$$-\nabla\int_V\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+\nabla\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+4\pi\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$=-\nabla\times\int_V\nabla'\times\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV'+\nabla\times\int_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}dV' \qquad (附3-5)$$

整理(附3-5)得

$$
\begin{aligned}
&4\pi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\
&= -\nabla \times \int_V \nabla' \times \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} dV' + \nabla \times \int_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} dV' + \nabla \int_V \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} dV' - \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} dV'
\end{aligned}
$$

利用高斯公式把第1和第3项化为面积分，最后得到亥姆霍兹定理

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^{(l)}(\boldsymbol{x}) \tag{附3-6}$$

其中

$$\boldsymbol{f}^{(t)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\partial V} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} \times d\boldsymbol{s}' + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} dV' \tag{附3-7}$$

$$\boldsymbol{f}^{(l)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\partial V} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} \cdot d\boldsymbol{s}' - \frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} dV' \tag{附3-8}$$

附录4：无旋场可表示为标量场的梯度

无旋场即纵场，满足$\nabla\times\boldsymbol{f}=0$，等价于对任意环路 $\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}=0$

对给定参考点$\boldsymbol{x}_0$定义势函数

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}+\varphi(\boldsymbol{x}_0) \qquad \text{(附4-1)}$$

因为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$无旋，右边积分与积分路径无关而只依赖于$\boldsymbol{x}$和参考点$\boldsymbol{x}_0$.

$$\frac{\partial\ \ (\boldsymbol{x})}{\partial x}=\frac{1}{dx}\left(-\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}+\hat{\boldsymbol{e}}_x dx}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}\right)=-\frac{1}{dx}\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}+\hat{\boldsymbol{e}}_x dx}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l}=-\boldsymbol{f}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x=-f_x$$

类似可得$\varphi(\boldsymbol{x})$对y和z的偏导数. 根据梯度的定义，

$$\nabla\varphi=\hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-f_x\hat{\boldsymbol{e}}_x-f_y\hat{\boldsymbol{e}}_y-f_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

所以

$$\boldsymbol{f}=-\nabla\varphi \qquad \text{(附4-2)}$$

若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是一个力场，则(附4-1)是粒子从$\boldsymbol{x}_0$到$\boldsymbol{x}$的过程中力场对粒子作的负功，因此$\varphi(\boldsymbol{x})$是粒子在$\boldsymbol{x}$处相对$\boldsymbol{x}_0$的势能. 而(附4-2)给出一个保守力和它的势能的关系.

附录5：在开邻域横场可表示为另一矢量场的旋度

设矢量场$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在开区域$V$内为横场，$\nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$． 因为$V$是开的，所以对任意属于$V$的$\boldsymbol{x}$，存在包含$\boldsymbol{x}$的完全属于$V$的球邻域，使得$\boldsymbol{x}$和球邻域内任意取定参考点$\boldsymbol{x}_0$能够用一条直线联结起来. 用0到1取值的实参数$t$ 标记直线上的点，

$$\boldsymbol{g}(t)=t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0,\qquad \boldsymbol{g}(0)=\boldsymbol{x}_0,\qquad \boldsymbol{g}(1)=\boldsymbol{x} \tag{附5-1}$$

令

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\int_0^1 dt\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\times(\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{x}_0) \tag{附5-2}$$

则

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\int_0^1 dt\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\times(\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{x}_0)=\int_0^1 dt\nabla\times[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\times(\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{x}_0)]$$

利用公式 $\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\cdot\nabla\boldsymbol{f}+(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\int_0^1 dt[(\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))+(\nabla\cdot\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\cdot\nabla\boldsymbol{g}(t)-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})(\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{x}_0)]$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{g}(t)=3t,\qquad \boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}=t\boldsymbol{f},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\int_0^1 dt[(\boldsymbol{g}(t)-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))+2t\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))] \tag{附5-3}$$

考察

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\right) = t^2 \frac{d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))}{dt} + 2t\boldsymbol{f}$$
$$= t^2 \frac{dg_i(t)}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})}{\partial g_i} + 2t\boldsymbol{f}$$
$$= t^2 (x_i - x_{0i})\frac{\partial \boldsymbol{f}}{t\partial x_i} + 2t\boldsymbol{f}$$

应用（附5-1）得

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\right) = (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{f} + 2t\boldsymbol{f} \qquad (附5-4)$$

把上式代入(附5-3)得

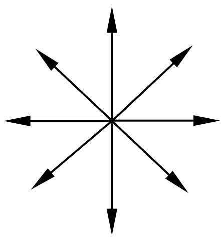
$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \int_0^1 dt \frac{d}{dt}\left(t^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t))\right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(1)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (附5-5)$$

因此$\boldsymbol{f}$可表示成矢量的旋度.

作业一：详细推导下面三个题的结果.

题1：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \quad \longrightarrow \quad \nabla\varphi=-\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

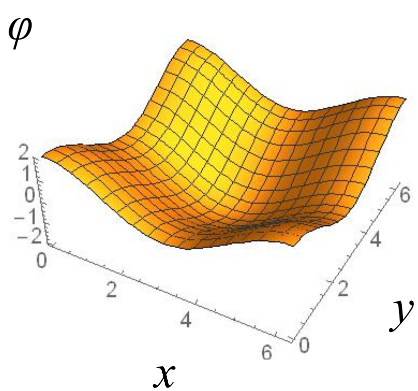


$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \quad \longrightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=4\pi\delta(\boldsymbol{x}), \qquad \nabla\times\boldsymbol{f}=0$$

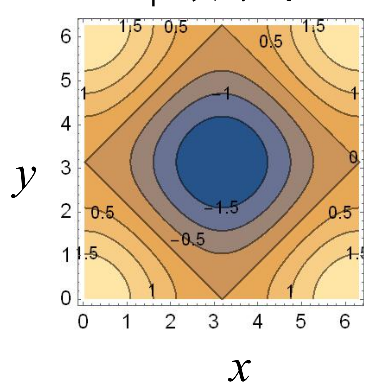
$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\equiv\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})$$

题2：

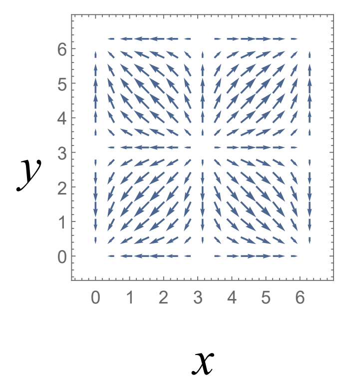
$$\varphi(\boldsymbol{x})=\cos x+\cos y \quad \longrightarrow \quad \nabla\varphi=-\hat{e}_x\sin x-\hat{e}_y\sin y$$



φ等高线



梯度

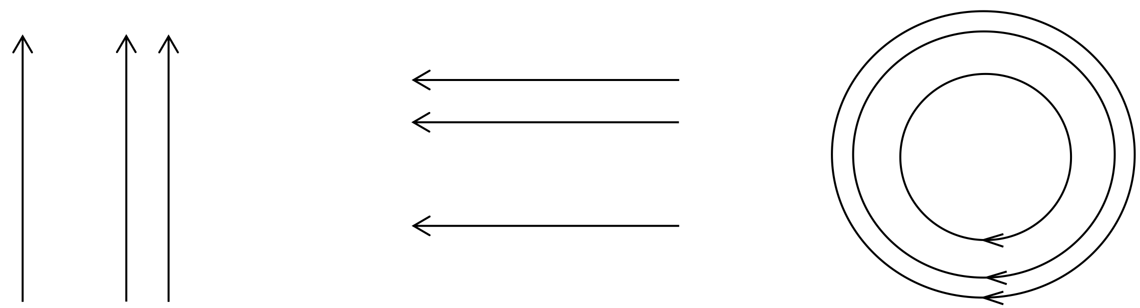


题3：$\boldsymbol{f} = (0, Bx, 0), \qquad \boldsymbol{f}' = (-By, 0, 0), \qquad \boldsymbol{f}'' = (-\tfrac{1}{2}By, \tfrac{1}{2}Bx, 0)$

$$\rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f}' = \nabla \times \boldsymbol{f}'' = B\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{f}' = \nabla \cdot \boldsymbol{f}'' = 0$$

三个矢量场的场线图



$\boldsymbol{f}$ $\qquad$ $\boldsymbol{f}'$ $\qquad$ $\boldsymbol{f}''$

作业二：仿照第5页推导球坐标中的散度.

作业三：详细推导第8页C_3微环路的旋量.