§2 等可能概型与几何概型

目 录 索 引

返回主目录

1.　等可能概型（古典概型）

生活中有这样一类试验，它们的共同特点是：

- ♣ 样本空间的元素只有有限个；
- ♣ 每个基本事件发生的可能性相同。

比如：足球比赛中扔硬币挑边，围棋比赛中猜先。

我们把这类实验称为等可能概型，考虑到它在概率论早期发展中的重要地位，又把它叫做古典概型。

A ♥　2 ♠♠　3 ♦♦♦　4 ♣♣♣♣

北

西　　东

南

e_1　e_2　……　e_k　…　…　e_n

返回主目录

设 $S=\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$，由古典概型的等可能性，得

$$P\{e_1\}=P\{e_2\}=\cdots=P\{e_n\}.$$

又由于基本事件两两互不相容；所以

$$1=P\{S\}=P\{e_1\}+P\{e_2\}+\cdots P\{e_n\},$$

$$P\{e_i\}=\frac{1}{n}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

等可能概型

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_1, e_2, \ldots e_k\}$，

则有：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}.$$

例 1 将一枚硬币抛掷三次。设：

☆ 事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，

✠ 事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，

求 $P(A_1)$, $P(A_2)$。

等可能概型

解： 根据上一节的记号，E_2 的样本空间

S_2={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH,TTT},

$n = 8$，即 S_2 中包含有限个元素，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，属于古典概型。

☆ A_1为"恰有一次出现正面"，

A_1={HTT, THT, TTH},

$k=3$， $P(A_1)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{3}{8}$,

等可能概型

※ 事件 A_2为“至少有一次出现正面”，

A_2={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH }

$$k_2=7,\qquad P(A_2)=\frac{k_2}{n}=\frac{7}{8},$$

另解：由于$\overline{A}_2$={TTT}, $k_{\overline{A}_2}=1$，$P(\overline{A}_2)=\frac{k_{\overline{A}_2}}{n}=\frac{1}{8}$,

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

例 2 一口袋装有 6 只球，其中 4 只白球、2 只红球。从袋中取球两次，每次随机的取一只。考虑两种取球方式：

- **放回抽样**　第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，　搅匀后再取一球。
- **不放回抽样**　第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球 中再取一球。

分别就上面两种方式求：

1）取到的两只都是白球的概率；

2）取到的两只球颜色相同的概率；

3）取到的两只球中至少有一只是白球的概率。

返回主目录

解：从袋中取两球，每一种取法就是一个基本事件。

设 A=“ 取到的两只都是白球 ”，

B=“ 取到的两只球颜色相同 ”，

C=“ 取到的两只球中至少有一只是白球”。

有放回抽取:

$$P(A)=\frac{4^2}{6^2}=0.444 \quad P(B)=\frac{4^2+2^2}{6^2}=0.556$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2^2}{6^2}=0.889$$

返回主目录

等可能概型

无放回抽取:

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2} \qquad \boldsymbol{P(B)=\frac{C_4^2+C_2^2}{C_6^2}}$$

$$\boldsymbol{P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_2^2}{C_6^2}}$$

例 3　将 n 只球随机的放入 $N\ (N \ge n)$ 个盒子中去，求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子的容量不限）。

解：　将 n 只球放入 N 个盒子中去, 共有

$$N \times N \times \cdots \times N = N^n$$ 种放法，

而每个盒子中至多放一只球，共有

$$N \times (N-1) \times \cdots \times [N-(n-1)] = A_N^n$$ 种放法,

故 $$p = \frac{N \times (N-1) \times \cdots \times [N-(n-1)]}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

等可能概型

其对立事件发生的概率： $p_1 = 1 - \dfrac{A_N^n}{N^n}$

取 N=365, 经计算可得下述结果：

n	20	23	30	40	50	64	100
p_1	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

“在一个有64人的班级里，至少有两人生日相同”的概率为 99.7%。

返回主目录

例4　设有 N 件产品，其中有 D 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 k $(k \le D)$ 件次品的概率是多少?

1）不放回抽样

解：在 N 件产品中抽取 n 件，取法共有 C_N^n 种，

又在 D 件次品中取 k 件，所有可能的取法有 C_D^k 种，

在 N-D 件正品中取 n-k 件，所有可能的取法有 C_{N-D}^{n-k} 种，

由乘法原理知：在 N 件产品 中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有 $C_D^k C_{N-D}^{n-k}$ 种，

于是所求的概率为：

$$p = \frac{C_D^k \, C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

此式即为**超几何分布**的概率公式。

等可能概型

2）　有放回抽样

从N件产品中有放回地抽取n件产品进行排列，可能的排列数为 N^n 个，将每一排列看作基本事件，总数为 N^n 。

而在 N 件产品 中取 n 件，其中恰有 k件次品的取法共有

$$C_n^k D^k (N-D)^{n-k}$$

于是所求的概率为：

$$P=\frac{C_n^k D^k (N-D)^{n-k}}{N^n}=C_n^k\left(\frac{D}{N}\right)^k\left(1-\frac{D}{N}\right)^{n-k}$$

此式即为二项分布的概率公式。

返回主目录

例 5 在 1~2000 的整数中随机的取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

解： 设 A 为事件“取到的整数能被 6 整除”， B 为“取到的整数能被 8 整除”，则所求的概率为：

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B),$$

$$\text{其中} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

由于 $333 < \dfrac{2000}{6} < 334$，所以能被 6 整除的整数为：6，12，18…1998 共 333 个，

$P(A)=\frac{333}{2000}$, 同理得： $P(B)=\frac{250}{2000}$, $P(AB)=\frac{83}{2000}$.

其中 $B=\{8, 16, \ldots 2000\}$, $AB=\{24, 48 \ldots 1992\}$,

AB 为“既被 6 整除又被 8 整除”或“能被 24 整除”

于是所求的概率为:

$$p=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-\frac{333+250-83}{2000}=1-\frac{500}{2000}=\frac{3}{4}.$$

例 6 将 15 名新生随机地平均分配到 3 个班中去，这 15 名新生中有 3 名是优秀生。问：

(1) 每个班各分配到一名优秀生的概率是多少？

(2) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率是多少？

解：15名新生平均分配到 3 个班级中去的分法总数为：

$$C_{15}^{5}\times C_{10}^{5}\times C_{5}^{5}$$

$$=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{5!}\times\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5!}\times\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5!}=\frac{15!}{5!\times5!\times5!},$$

等可能概型

(1) 将 3 名优秀生分配到 3 个班级，使每个班级都有一名优秀生的分法共有 3! 种。其余 12 名新生平均分配到 3 个班级中的分法共有

$$12!/(4!\,4!\,4!) \text{ 种，}$$

每个班各分配到一 名优秀生的分法总数为：

$$3!\times[12!/(4!\,4!\,4!)]$$

于是所求的概率为：

$$p_1 = \frac{3!\times 12!}{4!4!4!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{3!\times 12!\times 4!4!4!}{15!\times 5!5!5!} = \frac{25}{91} = 0.2747\,.$$

返回主目录

(2) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率为：

$$p_2 = 3 \times \frac{12!}{2!5!5!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{3 \times 12! \times 5!}{2! \times 15!} = \frac{6}{91} = 0.0659 .$$

三名优秀生分配在同一班级内

其余12名新生，一个班级分2名，另外两班各分5名

等可能概型

例 7 某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的。问是否可以推断接待时间是有规定的？

解： 假设接待站的接待时间没有规定，各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12 次接待来访者都在周二、周四的概率为:

$$2^{12}/7^{12}=0.0000003,$$

即千万分之三。

返回主目录

等可能概型

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次实验中几乎是不发生的”（称之为实际推断原理）。现在概率很小的事件在一次实验中竟然发生了，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

等可能概型

例 8　袋中有 a 只白球，b 只黑球．从中任意取出 k 只球，试求第 k 次取出的球是黑球的概率．

解：　设：A=“第 k 次取出的球是黑球”

从 $a+b$ 个球中依次取出 k 个球，有取法 P_{a+b}^{k} 种（样本点总数）.

第 k 次取出黑球，有取法 b 种，前 $k-1$ 次取球，有取法 P_{a+b-1}^{k-1} 种，因此事件 A 所含样本点数为 $b \cdot P_{a+b-1}^{k-1}$.

所以，$$P(A)=\frac{b\cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\frac{b}{a+b}.$$

注意：此结果与次数 k 无关.

也说明另外一个问题：在没有人出老千的情况下，抽签的先后顺序不影响中签的结果.

例 9 一部10卷文集，将其按任意顺序排放在书架上试求其恰好按先后顺序排放的概率.

解： 设 A={ 10卷文集按先后顺序排放 }

将10卷文集按任意顺序排放，共有 10! 种不同的排法（样本点总数）.

1, 2, …, 10,

或 10, 9, …, 1,

所以 $$P(A)=\frac{2}{10!}$$

返回主目录

例10　同时掷 5 颗骰子，试求下列事件的概率：

A={ 5 颗骰子不同点 }；

B={ 5 颗骰子恰有 2 颗同点 }；

C={ 5 颗骰子中有 2 颗同点，另外 3 颗同是另一个点数}.

解：同时掷5颗骰子，所有可能结果 共有 6^5 个

所以 $P(A)=\dfrac{P_6^5}{6^5}$

事件 B 所含样本点数为 $C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3$，

所以 $P(B)=\dfrac{C_5^2\cdot 6\cdot P_5^3}{6^5}=0.4630$；

返回主目录

例10（续）

等可能概型

事件 C 所含样本点数为 $C_5^2 \cdot P_6^2$ ，

所以，
$$P(C)=\frac{C_5^2 \cdot P_6^2}{6^5}$$

=0.03858

例 11 从 1～9 这 9 个数中有放回地取出 n 个数，试求取出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

解：A ={取出的 n 个数的乘积能被 10 整除}；

B={ 取出的 n 个数至少有一个偶数 }；

C ={取出的n 个数至少有一个 5 } .

则 A=B∩C

$$P(A)=P(BC)=1-P(\overline{BC})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})$$

$$=1-\left[P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\,\overline{C})\right]$$

$$=1-\frac{5^n}{9^n}-\frac{8^n}{9^n}+\frac{4^n}{9^n}$$

返回主目录

二 几何概型

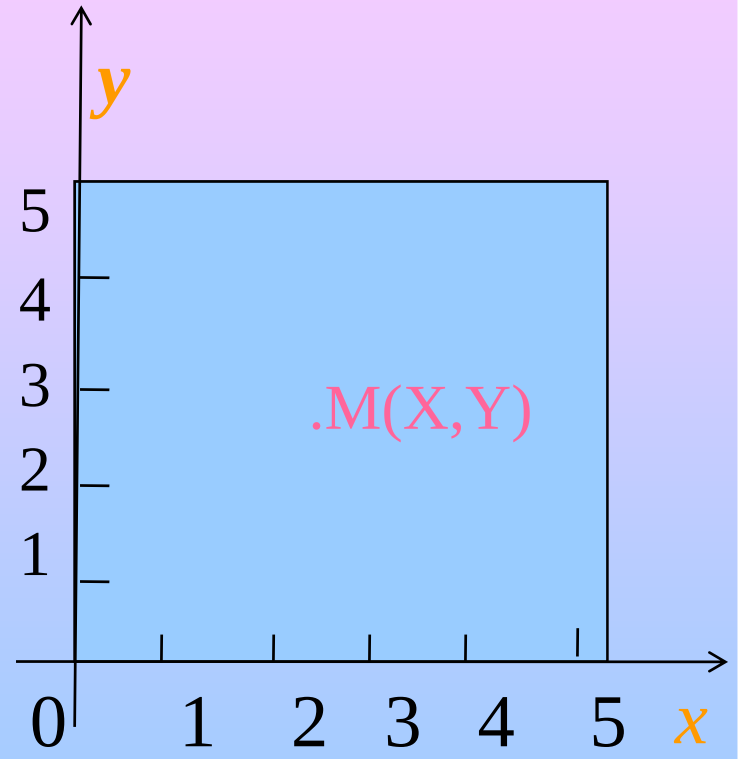
几何概型考虑的是有穷多个等可能无结果的随机试验。

首先看下面的例子。

例 1 (会面问题）甲、乙二人约定在 12 点到 5 点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，且二人互不影响。求二人能会面的概率。

解： 以 X, Y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是 $0 \le X \le 5,\ 0 \le Y \le 5.$

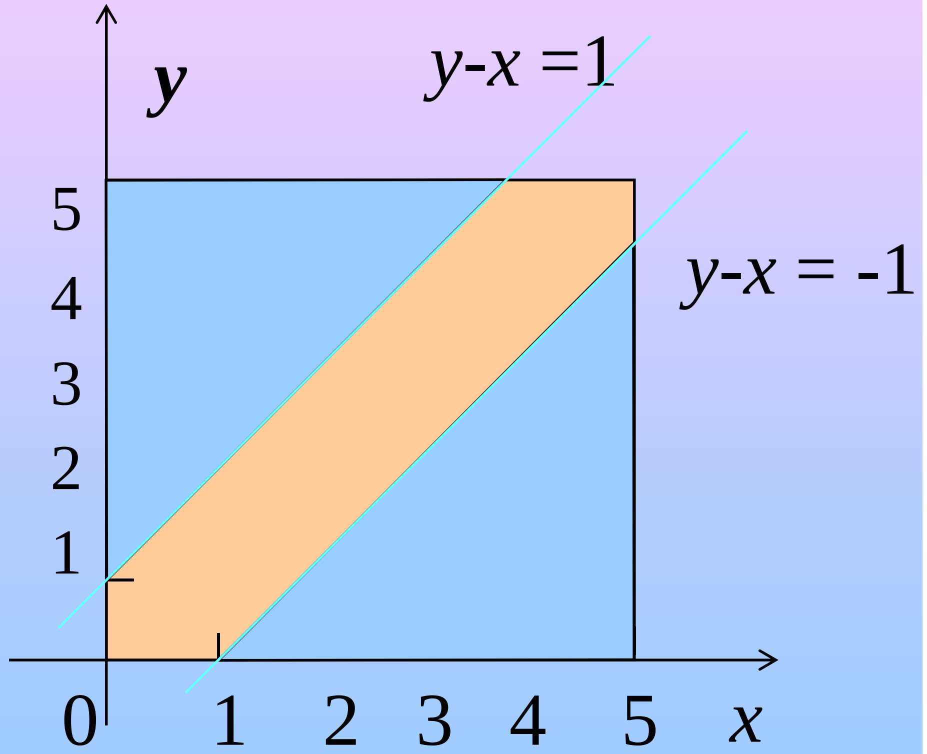
即 点 M 落在图中的阴影部分。所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果。由于每人在任一时刻到达都是等可能的，所以落在正方形内各点是等可能的。



二人会面的条件是：$|X-Y|\le 1$,

$$p=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}$$

$$=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}.$$



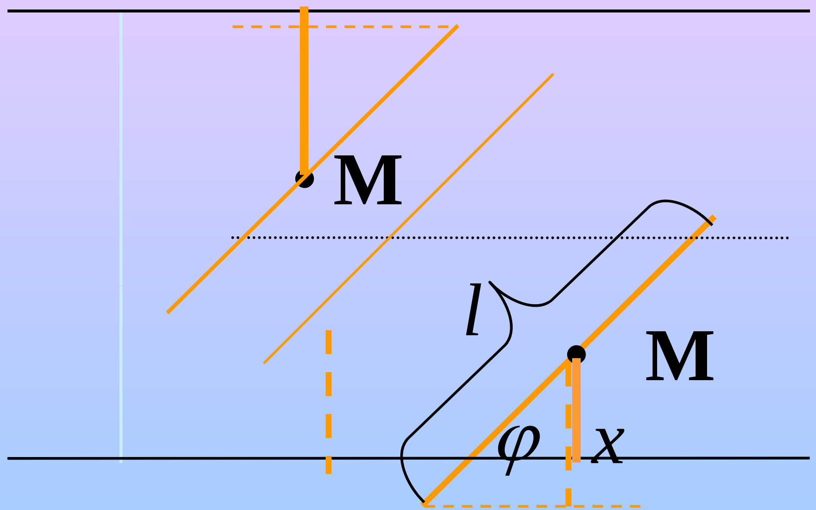
一般，设某个区域 D (线段，平面区域，空间区域），具有测 度 m_D(长度，面积，体积)。如果随机实验 E 相当于向区域内任意地取点，且取到每一点都是等可能的，则称此类试验为几何概型。

如果试验 E 是向区域内任意取点，事件 A 对应于点落在 D 内的某区域 A，则

$$P(A) = \frac{m_A}{m_D}.$$

几何概型

例 2 (蒲丰投针问题）平面上有一族平行线。其中任何相邻的两线距离都是 a ($a>0$) 。向平面任意投一长为 l ($l<a$) 的针，试求针与一条平行线相交的概率。



解：设 x 是针的中点 M 到最近的平行线的距离，φ是针与此平行线的交角，投针问题就相当于向平面区域 D 取点的几何概型。

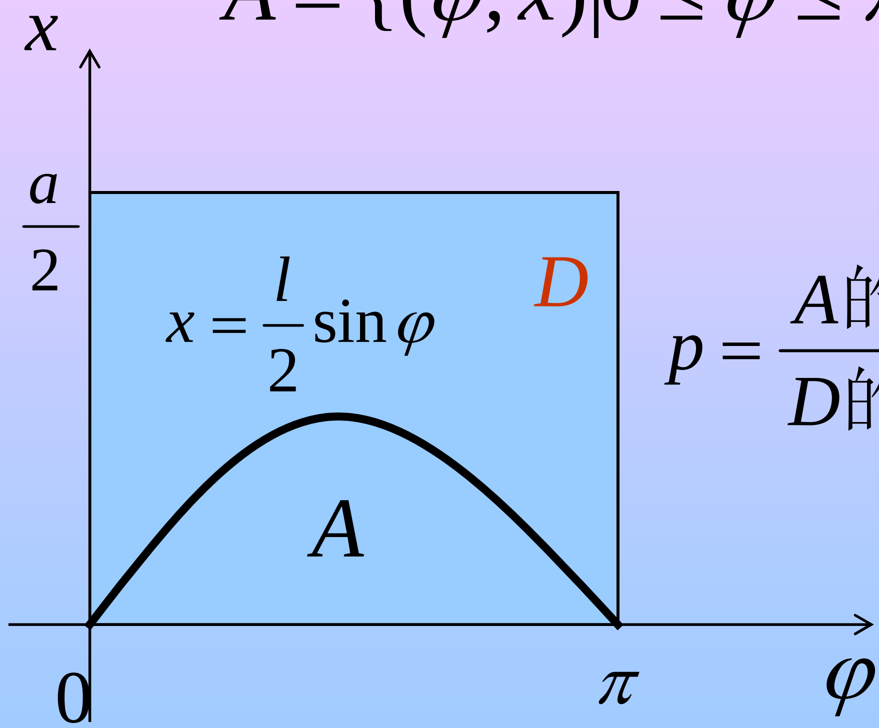
$$D = \{(\varphi, x) | 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le x \le \frac{a}{2}\}$$

返回主目录

几何概型

$$D=\{(\varphi,x)|0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$

$$A=\{(\varphi,x)|0\le\varphi\le\pi,0\le x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$$



$$p=\frac{A\text{的面积}}{D\text{的面积}}=\frac{\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$

几何概型

思考题

1. 某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电 台报时，　求他等待的时间不超过 10 分钟的概率。　(1/6)

2. 在线段 *AD* 上任意取两个点 *B*、*C*，在 *B*、*C* 处折断此线段 而得三折线，求此三折线能构成三角形的概率。(1/4)

3. 甲、乙两船停靠同一码头，各自独立地到达，且每艘　船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊 1小时，乙船需停泊 2小时，而该码头只能停泊一艘船。试求其中一艘船要等待码头空出的概率。(0.121)

返回主目录

4. 在区间 (0, 1) 中随机地取两个数，求下列事件的概率：

(1) 两个数中较小(大)的小于 1/2； (3/4, 1/4)

(2) 两数之和小于 3/2； (7/8)

(3) 两数之积小于 1/4 。 (0.5966)