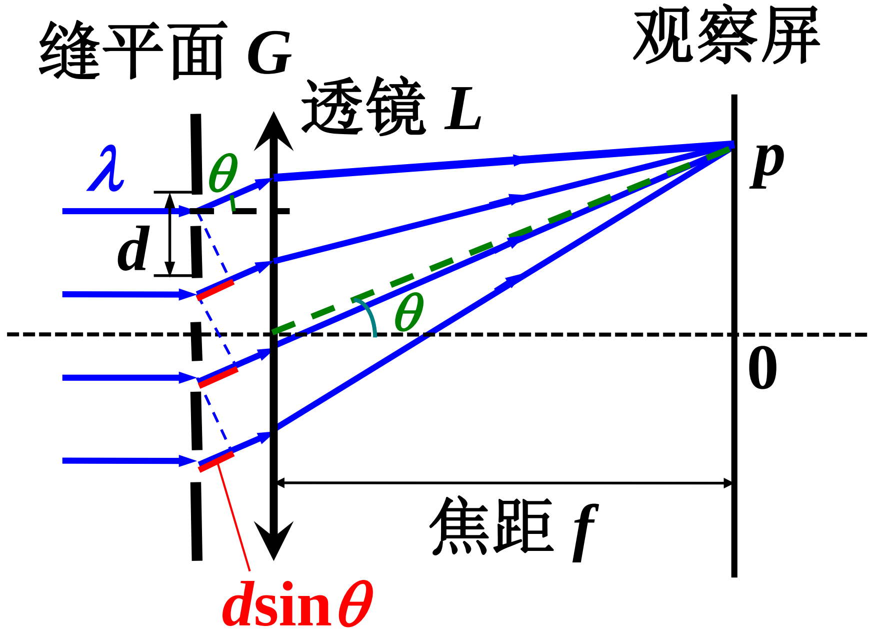
二. 光栅的夫琅禾费衍射

1.光栅各缝衍射光的叠加

衍射角相同的光线，会聚在接收屏的相同位置上。

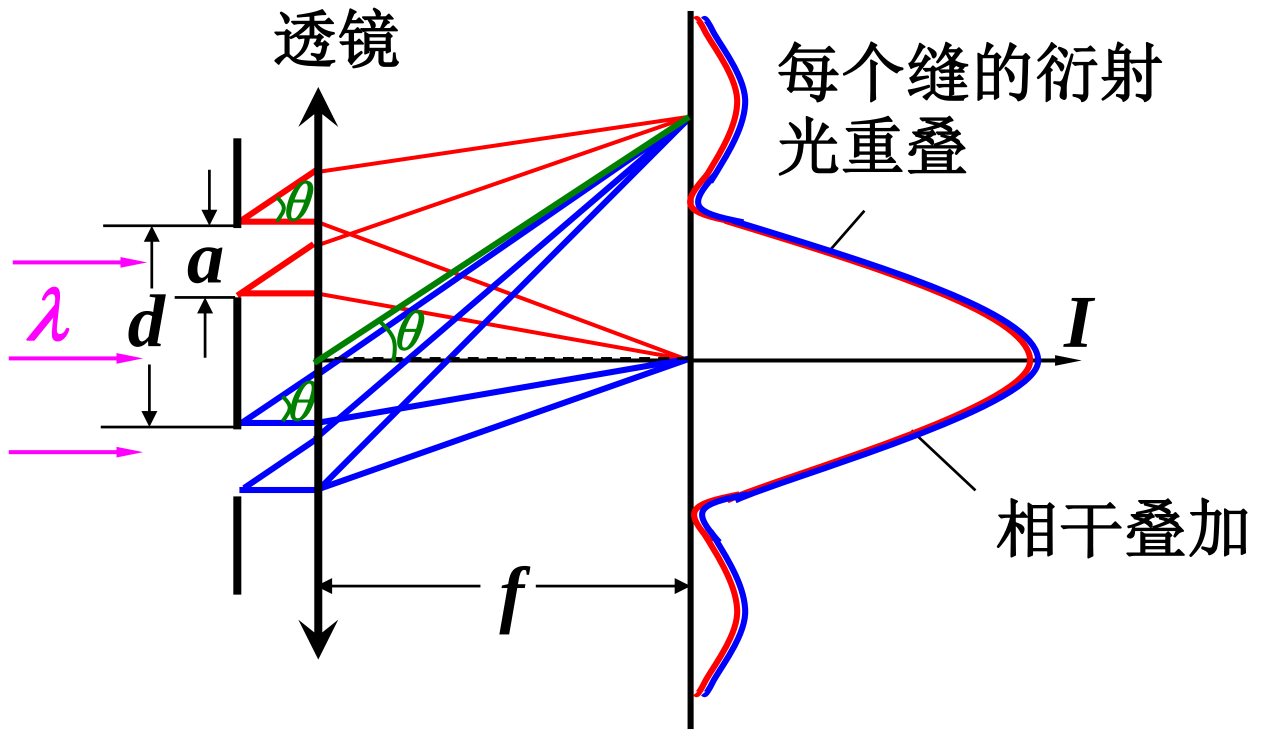


衍射　每个缝衍射在衍射角相同的地方有相同的条纹

干涉　缝与缝之间将产生干涉，这是一种多缝干涉

以双缝的夫琅和费衍射光的叠加为例来分析：

干涉条纹各级主极大的**强度**将不再相等，而是**受到了衍射的调制**。但是各个干涉主极大的位置仍由 d 决定，而没有变化。



2. 多光束干涉（multiple-beam interference）

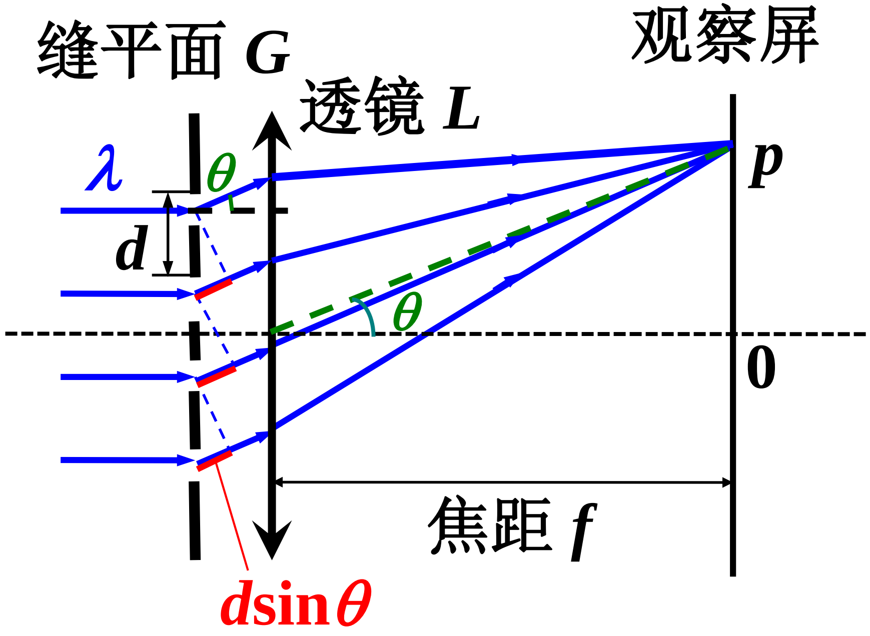
先不考虑衍射对光强的影响

明纹（主极大）条件:

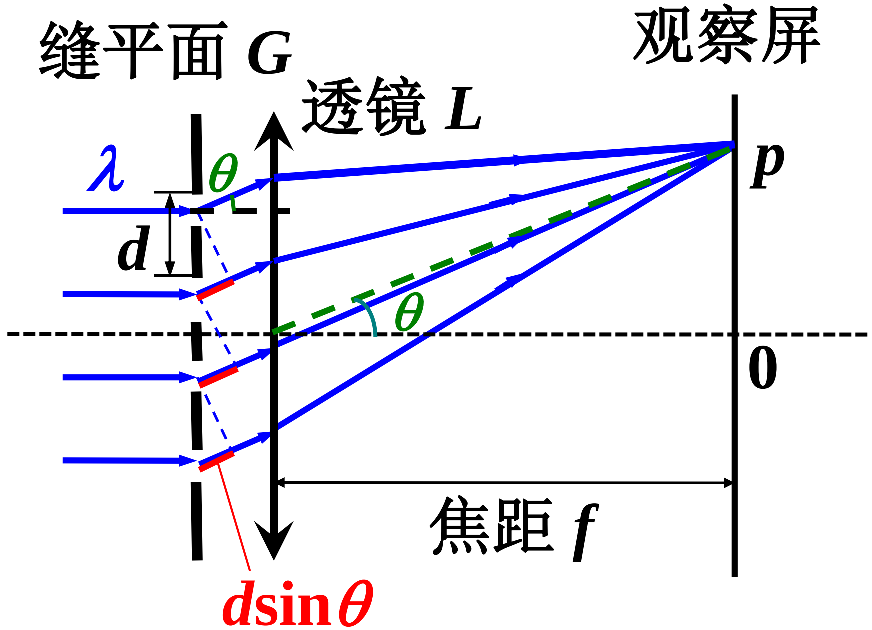
$$\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda}$$

（k = 0,1,2,...）

—正入射光栅方程



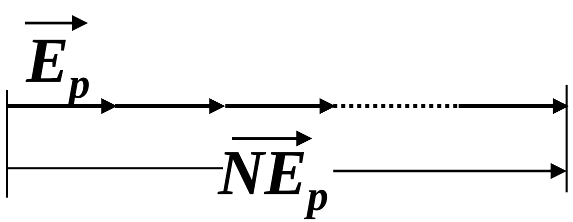
光栅方程是光栅的基本方程



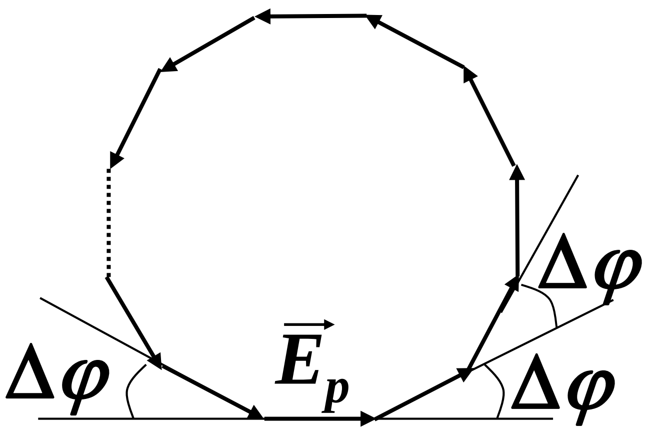
设有N个缝，每个缝发的光在对应衍射角θ方向的 p点的光振动的振幅为E_p，相邻缝发的光在 p点的相位差为$\Delta\varphi$ 。

p点为干涉主极大时，

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$$



$$I_p \propto N^2 E_p^2$$



暗纹条件：

各振幅矢量构成闭合多边形，多边形外角和：

$$N\Delta\varphi = \pm 2k'\pi \qquad (1)$$

$$k' = 1,2,\cdots \neq Nk$$

$$\Delta\varphi = \frac{d\cdot\sin\theta}{\lambda}\cdot 2\pi \qquad (2)$$

由(1),(2)得 $\boxed{d\cdot\sin\theta = \frac{\pm k'}{N}\lambda}$ $(k' \neq Nk，k' \neq 0)$ (3)

由(3)和 $d\sin\theta = \pm k\lambda \Rightarrow$ 暗纹间距 $= \dfrac{\text{主极大间距}}{N}$

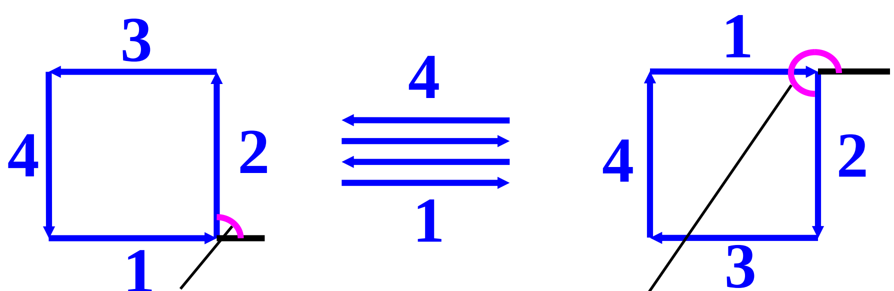
相邻主极大间有 $N-1$ 个暗纹和 $N-2$ 个次极大。

例如 $N = 4$，在 0 级和 1 级亮纹之间 k' 可取1、2、3，即有三个极小：

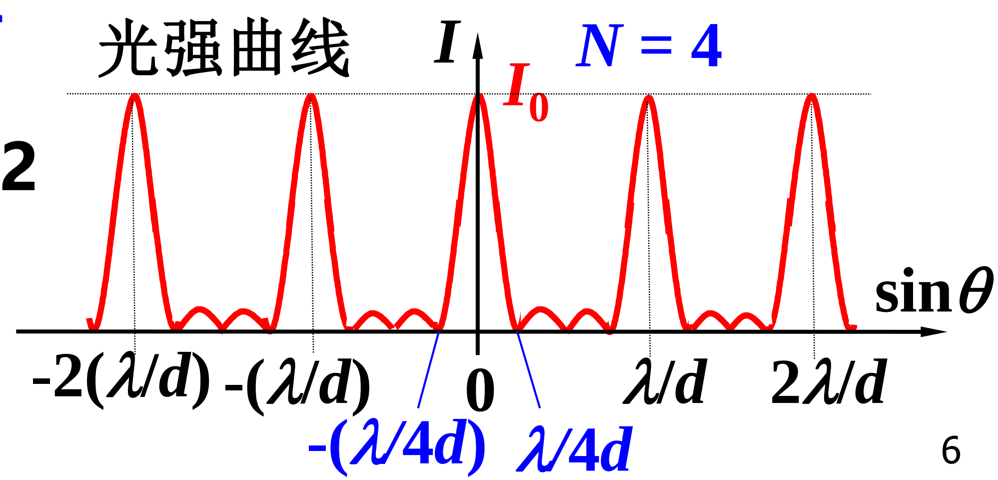
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda}{d}\ ,\ \frac{2}{4}\cdot\frac{\lambda}{d}\ ,\ \frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda}{d}$$

$$(k'=1),(k'=2),(k'=3)$$



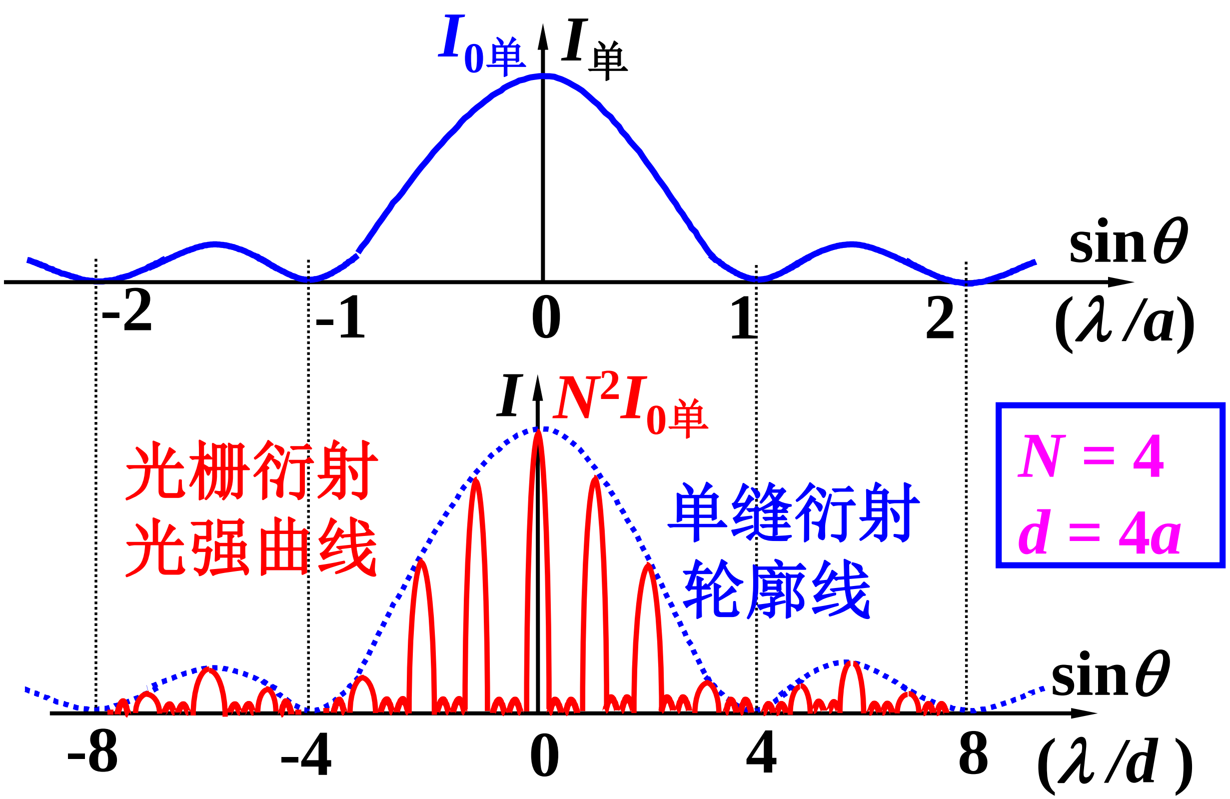
$\Delta\varphi = \pi/2$ $\Delta\varphi = \pi$ $\Delta\varphi = 3\pi/2$



N大时光强向主极大集中，使条纹亮而窄。

3. 光栅衍射（grating diffraction）

(1) 各干涉主极大受到单缝衍射的调制。



主 极 大 缺
±4,±8···级

主极大的半角宽：$\Delta\theta_k = \dfrac{\lambda}{d\cos\theta_k N}$

$$\boxed{d\cdot\sin\theta = \frac{\pm k'}{N}\lambda}$$

缝数N越多，条纹越细锐。

相邻主极大明条纹的角间距：

$$\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda}$$

$$\Delta\theta_k = \left(\frac{\Delta k\cdot\lambda}{d\cos\theta_k}\right)_{\Delta k=1} = \frac{\lambda}{d\cos\theta_k}$$

光栅常数越小，条纹分布就越稀疏；反之越密。

(2)　d/a为整数比时，会出现缺级。

明纹缺级现象的分析：

干涉明纹位置：　$d\sin\theta = \pm k\lambda$，$k = 0,1,2,\cdots$

衍射暗纹位置：　$a\sin\theta' = \pm k'\lambda$，$k' = 1,2,3,\cdots$

$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}$ 时，$\theta = \theta'$，此时在应该干涉加强的位置上没有衍射光到达，从而出现缺级。

干涉明纹缺级级次　$\boxed{k = \frac{d}{a} k'}$

例如$d = 4a$，则缺±4级，±8级…

(3) *d*、*a* 对条纹的影响：

d/a决定衍射中央明纹范围内的干涉条纹数。

这是因为 $\frac{\lambda}{a}$ 决定衍射中央明纹的宽度，

而 $\frac{\lambda}{d}$ 决定干涉主极大的的间距。

▲ 若 a 不变 $\Rightarrow$ 单缝衍射的轮廓线不变；

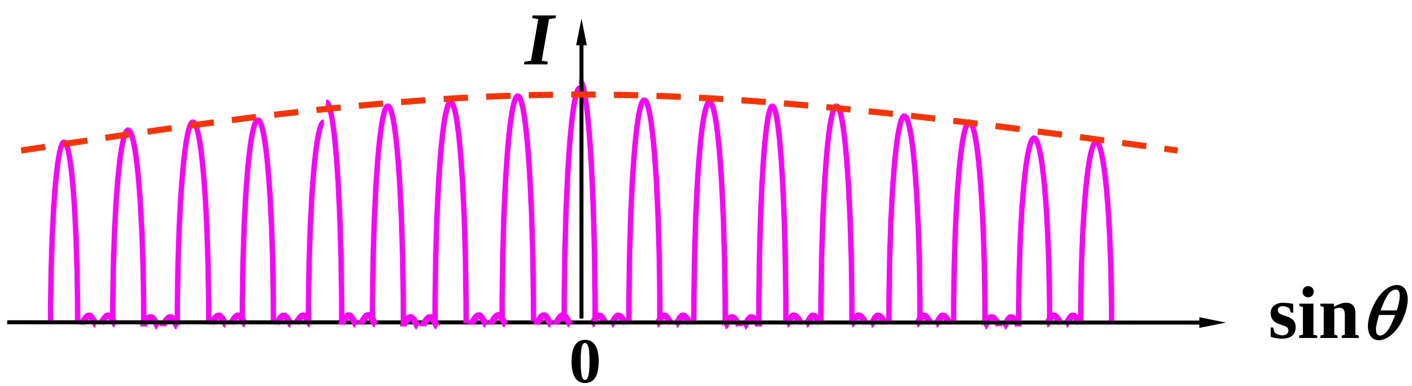
d 减小$\Rightarrow$主极大间距变稀，单缝中央亮纹范围内的主极大个数减少，如果出现缺级的话，则缺级的级次变低。

▲ 若 d 不变 ⇒ 各主极大位置不变；

a 减小 ⇒单缝衍射的轮廓线变宽，单缝中央明纹范围内的主极大个数增加，缺级的级次变高。

极端情形： 当 $a \to \lambda$ 时，单缝衍射的轮廓线变为很平坦，第一暗纹在距中心 ∞ 处，此时各主极大光强几乎相同。

多缝衍射图样 → 多光束干涉图样：



4. 光栅夫琅禾费衍射的光强公式

每个单缝在 ***p***点（对应衍射角θ）均有

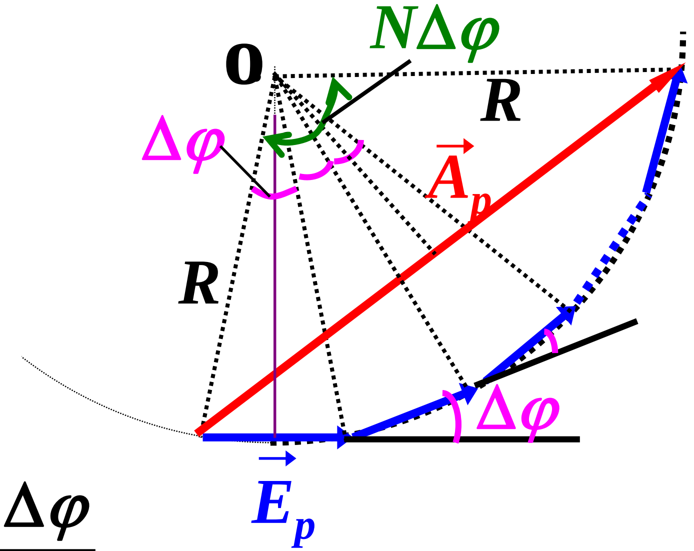
$$E_p = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad ,\ \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

相邻缝在 ***p***点的相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot\sin\theta$$

p点合振幅为

$$A_p = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2} \quad , \quad E_p = 2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$



$$\boxed{\therefore\ A_p = E_p \cdot \frac{\sin N\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = E_{0单} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}}$$

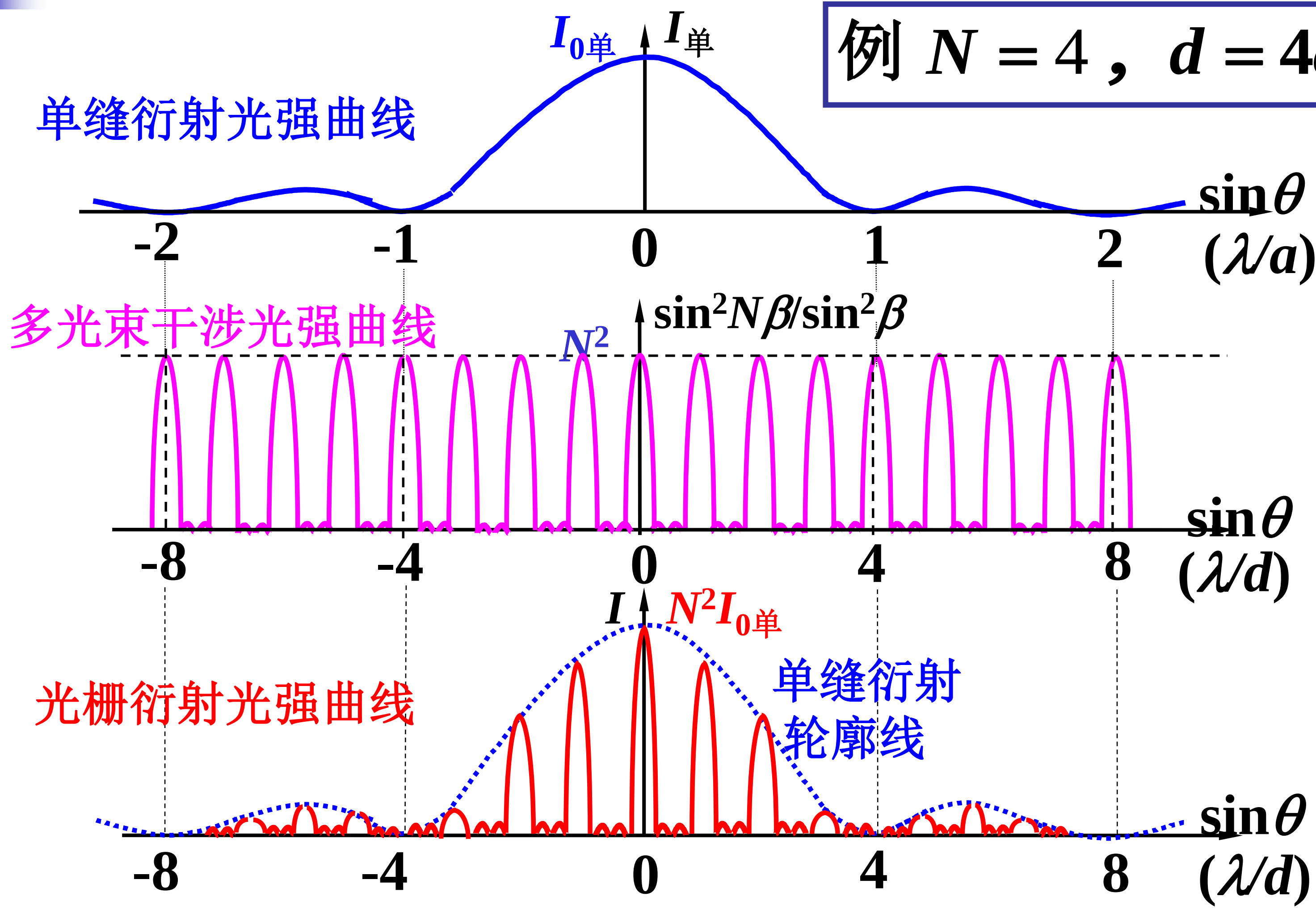
$$\boxed{I_p = I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2} \quad \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\cdot\sin\theta$$

$I_{0单}$ ——单缝中央主极大光强

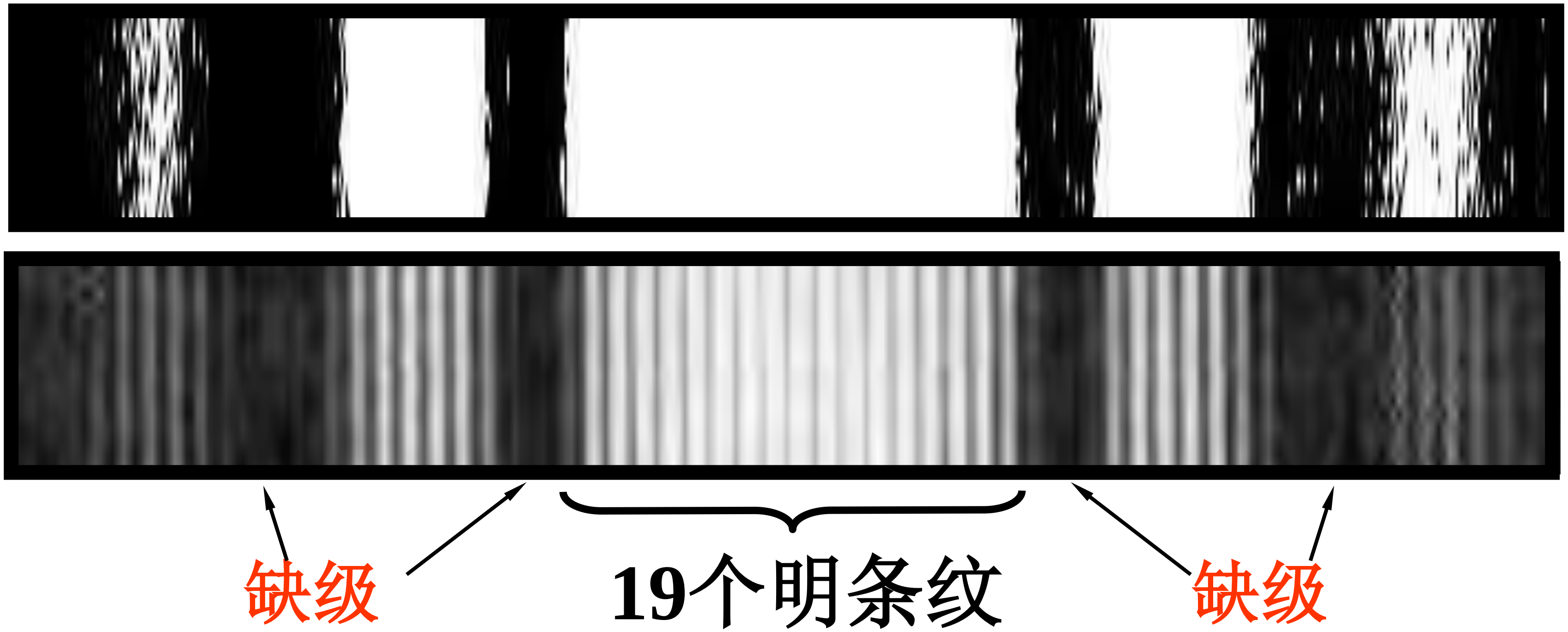
$\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ ——单缝衍射因子

$\left(\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$ ——多光束干涉因子

例 $N=4$，$d=4a$



单缝衍射光强曲线
$I_{0单}$
$I_{单}$
$\sin\theta$
(λ/a)
-2
-1
0
1
2
多光束干涉光强曲线
$\sin^2 N\beta/\sin^2\beta$
N^2
$\sin\theta$
(λ/d)
-8
-4
0
4
8
光栅衍射光强曲线
I
$N^2 I_{0单}$
单缝衍射
轮廓线
$\sin\theta$
(λ/d)
-8
-4
0
4
8



单缝衍射和多缝衍射干涉的对比 （$d = 10\,a$）