第 七 章　参数估计

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

点估计的概念　估计量与估计值　矩估计法　最大似然估计法　估计量的评选标准　区间估计的概念　单个正态总体的均值和方差的区间估计　两个正态总体的均值差和方差比的区间估计

考试要求

1. 理解参数的点估计、估计量与估计值的概念
2. 掌握矩估计法（一阶矩、二阶矩）和最大似然估计法。
3. 了解估计量的无偏性、有效性（最小方差性）和一致性（相合性）的概念，并会验证估计量的无偏性。
4. 理解区间估计的概念，会求单个正态总体的均值和方差的置信区间，会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间。

本章导读　统计推断有两类基本问题，核心是八大枢轴量。

(1) 当分布函数形式为已知，如为 $F(x,\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，但分布函数中的**部分参数**为未知时（如 x 已知，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 未知），我们需要根据样本所提供的信息对总体进行统计推断，估计其未知的参数，如数学期望、方差等，这类问题称为**参数估计**，分为**点估计**与**区间估计**两种方法。根据样本是以**随机变量** X 还是**观察值** x 形式给出，参数估计的结果又有估计量和估计值之分，对应的字母有大小写之分。参数估计中，用来自总体的一个样本或样本观测值去近似代替总体分布中的未知参数值，称为**点估计**的估计量或估计值；点估计量或估计值接近真值有多大的把握？很难说，比如，估计一个人的身高，如果你确切说他一米七，很可能不符合事实，如果你说他一米七左右，可能更精确，即估计时给出一定的误差范围，而真值极大可能在这一误差区域内，这种估计方法称为区间估计，它是根据 8 个枢轴量之一来判断。

(2) 当分布函数形式为未知，或只知道分布函数的形式，参数为未知时，我们也可以先假设它的形式或参数值，然后再根据 8 个枢轴量之一，根据小概率原理和样本值检验其假设的真实，这一过程称为**假设检验**，这是第八章的内容。

一、点估计

点估计分为矩估计与极大似然法两种。

1. 矩估计法

矩估计的原则是【同型估计】，即总体的矩是几阶矩，就使用几阶的样本矩形式来估计。简单地说，用样本的各阶矩作为总体分布函数中的未知矩的估计。考纲范围内只要求掌握一个（单参数）或两个（双参数）未知参数（如期望和方差）的情形，即我们只需要掌握 1-2 阶和两个参数的矩估计。

用矩法构造未知参数估计量的步骤如下：

(1) 计算 $\boxed{\text{总体 } EX \text{ 和方差 } EX^2}$；

(2) 用 $\boxed{\text{样本一二阶原点矩 } \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ 和 } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ 替换 $\boxed{\text{总体 } EX \text{ 和方差 } EX^2}$；

列出方程组$\begin{cases} EX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \\ DX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2 \end{cases}$ 求解几得结论。

由于$DX=EX^2-\left(EX\right)^2 \to EX^2=DX+\left(EX\right)^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\overline{X}\right)^2$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\cdot\overline{X}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\,\overline{X}+n\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sum_{i=1}^{n}2X_i\,\overline{X}+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \Rightarrow DX\to\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

所以$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=EX^2$ 等价于$DX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，故上述在实际计算中步骤改写如下

(1)计算$\boxed{\text{总体 } X \text{ 的数学期望和方差}}$，并记$EX^k=\nu_k\left(\theta_1,\ \theta_2\right)$；

(2)用$\boxed{\text{样本一二阶原点矩 } \overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \text{ 和 } \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$ 替换 $\boxed{\text{总体 } X \text{ 的数学期望和方差}}$，

列出方程组$\begin{cases} EX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \\ DX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2 \end{cases}$。

(3)解上述方程组，得$\theta_r=\hat{\theta}_r\left(X_1,\ X_2\right)\ \left(r=1,\ 2\right)$，则以$\theta_r=\hat{\theta}_r\left(X_1,\ X_2\right)$作为$\theta_r$的估计量。

并称$\boxed{\theta_r=\hat{\theta}_r\left(X_1,\ X_2\right)\ \left(r=1,\ 2\right) \text{ 为 } \theta_r\ \left(r=1,\ 2\right) \text{ 的矩估计量}}$；

而称$\boxed{\hat{\theta}_r\left(x_1,\ x_2\right) \text{ 为 } \theta_r\ \left(r=1,\ 2\right) \text{ 的矩估计值}}$。

$\boxed{\text{评 注}}$ 矩估计具有**传递性**，如$\overline{X}$是μ的矩估计，则$\overline{X}^2$是μ^2的矩估计，反之，不行。

■**矩估计题型题法**

【例 1】设总体$X\sim U\left(a,\ b\right)$，试求$a,\ b$的据估计量和估计值。

解：$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & other \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EX=\dfrac{a+b}{2} \\ DX=\dfrac{\left(b-a\right)^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=EX-\sqrt{3DX} \\ b=EX+\sqrt{3DX} \end{cases}$

分别用用$\overline{X}$和$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$代换$EX$和$DX$，得

$a,\ b$估计量为$\begin{cases}\hat{a}=EX-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\\ \hat{b}=EX+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\end{cases}$；　$a,\ b$估计值为$\begin{cases}\hat{a}=EX-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\\ \hat{b}=EX+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\end{cases}$。

评 注 按照定义，解法如下：

$$\begin{cases}EX=\dfrac{a+b}{2}=\overline{X}\\ EX^2=DX+\left(EX\right)^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}EX=\dfrac{a+b}{2}=\overline{X}\\ DX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}\hat{a}=EX-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\\ \hat{b}=EX+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\end{cases}$，其结果是一样的。

【例 2】$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$\mu,\ \sigma^2$未知，试估计$\mu,\ \sigma^2$。

解：　$EX=\mu;\ \ DX=\sigma^2$

$\begin{cases}EX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\\ DX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=\overline{X}\\ \sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=B_2\end{cases}$　为$\mu,\ \sigma^2$的矩估计量。

如果X_i给出了全部观察值，则应为

$\begin{cases}EX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ DX=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=\overline{x}\\ \sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{x}\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=B_2\end{cases}$为$\mu,\ \sigma^2$的矩估计值。

评 注 使用一阶矩估计数学期望，都是无偏的；使用二阶矩估计方差，就不一定无偏，例如，σ^2的矩估计量为$\hat{\sigma}^2=B_2$或$\hat{\sigma}^2=S^2$，但只有后者是无偏的。

【例 3】设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的一个简单随机样本，则EX^2的矩估计量是（）

$(A)\ S_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$　　$(B)\ S_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

$(C)\ S_1^2+\overline{X}^2$　　$(D)\ S_2^2+\overline{X}^2$

解：选$\left(D\right)$。分析如下

EX^2是总体X的二阶原点矩，其对应的矩估计量为样本的二阶原点矩，即$B_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$。

将它与四个选项对比，显然$\left(A\right)\left(B\right)$不正确。将$\left(C\right)\left(D\right)$的式子化简，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$

$$S_1^2+\overline{X}^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)+\overline{X}^2\neq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

$$S_2^2+\overline{X}^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)+\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

故(D)正确。

【例 4】设$X_1,\ldots,X_n$是来自$X\sim P(\lambda)$的简单随机样本，证明$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\left(X_i-1\right)$为$\lambda^2$的无偏估计量。

证明：$ET=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\left(X_i-1\right)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[DX_i+\left(EX_i\right)^2\right]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda==\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda+\lambda^2\right]-\lambda=\lambda^2$，结论成立。

【例 5】设$X_1,\ldots,X_n$是来自总体$X\sim\begin{pmatrix}X_i & -1 & 0 & 1\\ P & \theta & 1-2\theta & \theta\end{pmatrix}$，$0<\theta<\frac{1}{2}$的简单随机样本，求未知参数$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}$。

解：$EX=-1\times\theta+0\times\left(1-2\theta\right)+1\times\theta=0$，无法用$EX=\overline{X}$来估计$\theta$，进一步考虑二阶矩，有

$$EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2;\ EX^2=\left(-1\right)^2\times\theta+0\times\left(1-2\theta\right)+1^2\times\theta=2\theta\Rightarrow2\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\ 。$$

2．最大似然法

● 最大似然法的基本思想：“当我们用联合分布函数来估计总体参数时，应使得当参数取一定值时，使所观察到的样本出现的概率最大”，

● 具体计算步骤

① 写出似然函数　$L=L(x;\ \theta_1,\ \theta_2)$

（连续型$L=\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}f(x_i;\theta_1,\theta_2)$为联合分布密度函数；离散型$L=\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}P(x_i;\theta_1,\theta_2)$为联合分布律）

② 为方便计算，取对数$LnL=\sum_{i=1}^{n}\ln f$　或$LnL=\sum_{i=1}^{n}\ln P$

③ 求解方程组　$\frac{\partial LnL}{\partial\theta i}=0\quad(i=1,2,\cdots,k)$　解出θ_i，然后用 $\hat{\theta}_i$取代θ_i。

也就是说，$L=L(x\ ;\theta_1,\ \theta_2)$在$\left(\widehat{\theta_1},\ \widehat{\theta_2}\right)$处取得最大值。

●最大似然估计量的不变性原理

设$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计量，$g\left(\theta\right)$有单值反函数，则$g\left(\hat{\theta}\right)$是$g\left(\theta\right)$最大似然估计量。比如$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\Rightarrow\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$。注意点估计没有不变性原理。

■最大似然法题型题法

【例 6】$X \sim P(\lambda) = P\{X = x\} = \dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$，估计$\lambda$。

解：$L = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = \mathop{\pi}\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda n} \cdot \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \mathop{\pi}\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i!}$

$$LnL(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i Ln\lambda - Ln \mathop{\pi}\limits_{i=1}^{n}(x_i!) \Rightarrow \frac{dln(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \theta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

即λ的最大似然法的估计量为 $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$ ，这一结果与点估计结果一致，但不能由此推断其他情形最大似然法和点估计结果都一致。

【例 7】设$X_1, \ldots, X_n$是来自总体$U(-a,\ a)$的简单随机样本，求a的最大似然估计量$\hat{a}$。

解：似然函数$L = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2a}\right)^n, & -a \le X_1, \ldots, X_n \le a \\ 0, & other \end{cases} \Rightarrow \ln L = -n\ln 2a,\ -a \le X_1, \ldots, X_n \le a$。如果求导，将得不出结论，所以对于这类题型，只能按照定义求解：

要使L最大，即a尽量小，但由于$-a \le X_1, \ldots, X_n \le a$

可知必有$a \ge \mathop{Max}\limits_{1 \le i \le n}(X_i)$，故当$a = \mathop{Max}\limits_{1 \le i \le n}(|X_i|)$，$L$最大$\Rightarrow \hat{a} = \mathop{Max}\limits_{1 \le i \le n}(|X_i|)$。

【例 8】设$X \sim U(0,\ \theta),\ \theta > 0$，求$\theta$的最大似然估计量和矩估计量。

解：(1)由于$X \sim U(0,\ \theta)$，分布密度为$f(\ x;\ \theta\ ) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & other \end{cases}$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\ x_i;\ \theta\ ) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0 < x_i < \theta \\ 0, & other \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

对于这类分布函数不连续的间断函数不能求导取极值了，我们必须回到定义思想上去。因为$\theta > 0$，$L(\theta)$随θ减少而增大，由于$\theta > \mathop{Max}\limits_{1 \le i \le n}\{X_i\}$，故$\theta$的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \mathop{Max}\limits_{1 \le i \le n}\{X_i\}$。

$$(2)\ EX = \frac{\theta}{2},\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow EX = \overline{X} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}.$$

可见，两种点估计的结论并不相等。

【例 9】设$X \sim U(\theta_1,\ \theta_2)$，，求$\theta$的矩估计和极大自然法估计量。

解：(1) θ矩估计，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，$B_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$

$$\mu_1=EX=\frac{a+b}{2}=\frac{\theta_1+\theta_2}{2};\quad \mu_2=DX+(EX)^2=EX^2=\frac{(b-a)^2}{12}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}+\frac{(\theta_1+\theta_2)^2}{4}$$

$$\begin{cases}\mu_1=\overline{X}\\ \mu_2=B_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}=\overline{X}\\ \dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}+\dfrac{(\theta_1+\theta_2)^2}{4}=B_2\end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{\theta}{2}=\bar{x}\Rightarrow\hat{\theta}=2\bar{x}$ 为 θ 的矩估计量。

(2) θ 的极大自然法估计，联合密度函数为 $f(x;\ \theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1},\ \theta_1<x<\theta_2\\ 0,\quad other\end{cases}$

$$\Rightarrow L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n},\ \theta_1<x_i<\theta_2\\ 0,\quad other\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots n)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=\dfrac{n}{\theta_2-\theta_1}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=\dfrac{-n}{\theta_2-\theta_1}=0\end{cases}$$

上述方程不可能解得 θ_1，θ_2 的最大似然估计量。

对于这类分布函数 $f(x;\ \theta)$ 不连续的题型，不能通过求导得出结论，需要按照极大自然法的原理来求解

因为 $\theta>0$，所以 $L(\theta)$ 随 θ 的减少而增大，而 $\theta_1<x_i<\theta_2$，即

$$\theta_1<Min\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\};\quad \theta_2>Max\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$$

显然 θ_1 的最大值为 $\theta_1=Min\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$; θ_2 的最小值为 $\theta_2=Max\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$，则当 $\theta_1=Min\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\};\theta_2=Max\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$ 时 $\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}$ 达到最大值。

故 θ_1，θ_2 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_1=Min\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\};\quad \hat{\theta}_2=Max\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$

【例 10】设总体 X 有概率分布，

x_i	1	2	3
p_i	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

已知观察 3 个样本的数值为 $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1$，求 θ 的最大似然估计值。

解：似然函数为

$$L(\theta)=P_\theta(X_1=1,\ X_2=2,\ X_3=1)=P_\theta(X_1=1)P_\theta(X_2=2)P_\theta(X_3=1)=\theta^2\cdot2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$
$$\Rightarrow lnL(\theta)=\ln2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$$

$\Rightarrow\dfrac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$，故 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$。

【例 11】$X \sim B(n,\ p),\ n$ 已知，求 p 的矩估计和最大似然估计值。

解：（1） $X \sim B(n,p), E(X)=np,$ 令 $np=\overline{X}$，所以 $\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$。

（2） $L(p)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{n!}{x_i!(n-x_i)!}p^{x_i}(1-P)^{n-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{n!}{x_i!(n-x_i)!}$

$$LnL(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+(n^2-\sum_{i=1}^{n}X_i)\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}(\ln!-\ln x_i(n-x_i)!)$$

$$\frac{dLnL(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{1}{1-p}\left(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0\Rightarrow \hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n^2}=\frac{\overline{X}}{n}\text{。}$$

可见二项分布的两种估计结果是相同的，请读者记住这个结论。

3、点估计的 3 大评价标准

3.1 无偏性 （即没有系统误差）

如 $E(\hat{\theta})=\theta$，则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量，其中 θ 为原分布的真值。 例如 $E\left(\overline{X}\right)=\mu;E\left(S^2\right)=\sigma^2$ 对于正态分布 $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ 都具有无偏性，而 $E\left(B_2\right)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$ 是有偏的，这也是为什么定义样本方差为 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，而不是 $S^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 的原因。

无偏性没有传递性，如 $E\left(S^2\right)=\sigma^2 \not\Rightarrow E\left(S\right)=\sigma$ 。

3.2 有效性

在都无偏的条件下，如 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$ 则 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。

3.3 一致性（相合性）

满足 $\lim_{n\to\infty}P\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\}=1$ 的 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量，一般使用大数定理验证。

一般来说，一致性是自动满足的，因为点估计的理论根据就是辛钦大数定理。例如：当用 $\overline{X}$ 估计 μ 时，根据辛钦大数定理，$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\}=1$ 恒成立，也可以利用切贝雪夫不等式来验证相合性。

- 利用辛钦大数定理可以证明：$\overline{X}$ 是总体均值 μ 的一致估计量，S^2 及 B_2 都是总体方差 σ^2 的一致估计量。
  由辛钦大数定理得：

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1\Rightarrow \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}EX=EX_i=\mu$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_1\right|<\varepsilon\right\}=1\Rightarrow \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}EX^2=EX_i^2=\mu_1$$

$$\Rightarrow S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2\xrightarrow[n\to\infty]{\text{矩估计定义}}EX^2-\left(EX\right)^2=\sigma^2$$

$$\Rightarrow B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2\xrightarrow{\text{矩估计定义}}EX^2-\left(EX\right)^2=\sigma^2$$

■点估计的3大评价标准题型题法

【例12】试讨论正态分布常用一阶矩和二阶矩估计的评价标准。

解：已知点估计为 $\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\hat{\sigma}^2=B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

$EX=\mu,$；$EX_i=\mu$，$E\hat{\theta}=E\hat{\mu}=E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\mu$，所以 X_i 和 $\overline{X}=\hat{\mu}$ 都是 μ 的无偏估计量。

$$E(B_2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_1^2)-E(\overline{X})^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)\right)-\left\{D(\bar{x})+E^2(\overline{X})\right\}$$

$$=\frac{1}{n}(n\sigma^2+n\mu^2)-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$。所以 B_2 不是 σ^2 的无偏估计量；

而 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{nB_2}{n-1}\Rightarrow E(S^2)=E\left(\frac{nB_2}{n-1}\right)=\frac{n}{n-1}E(B_2)=\sigma^2$，故 S^2 是 σ^2 的无偏估计量，这正是我们称 S^2 为样本方差的理由。

对正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 X_i 都是 $E(X)=\mu$ 的无偏估计量，但 $D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\leq D(X_i)=\sigma^2$，故 $\overline{X}$ 比 X_i 更有效。

【例13】设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中：$0<\theta<1$，$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。求

(1) θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；(2) θ 的极大似然法估计 $\hat{\theta}$，(3) 判断 θ 的无偏性和一致性。

解：(1) 根据点估计的定义：用对应的样本一阶和二阶原点矩（对正态总体使用二阶中心矩）分别替换分布函数中的 EX 或 DX 。

$$EX=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta\Rightarrow-2\hat{\theta}+3=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$$

(2) 注意此题一般需要给出样本点来写出联合分布函数。故本题的关键是根据分布率写出代数分布形式，可以验证：总体 X 的分布律可以等价写成

$$P\{X=k\}=C_2^{k-1}(1-\theta)^{k-1}\theta^{3-k},\ k=1,\ 2,\ 3\quad\left(\because\begin{cases}k=1\Rightarrow C_2^{k-1}(1-\theta)^{k-1}\theta^{3-k}=\theta^2\\k=2\Rightarrow C_2^{k-1}(1-\theta)^{k-1}\theta^{3-k}=2\theta(1-\theta)\\k=3\Rightarrow C_2^{k-1}(1-\theta)^{k-1}\theta^{3-k}=(1-\theta)^2\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta\right)=P\left\{X=x_1\right\}P\left\{X=x_2\right\}\cdots P\left\{X=x_n\right\}$$

$$=\left[C_2^{x_1-1}\left(1-\theta\right)^{x_1-1}\theta^{3-x_1}\right]\left[C_2^{x_2-1}\left(1-\theta\right)^{x_2-1}\theta^{3-x_2}\right]\cdots\left[C_2^{x_n-1}\left(1-\theta\right)^{x_n-1}\theta^{3-x_n}\right]$$

$$=C_2^{x_1-1}C_2^{x_2-1}\cdots C_2^{x_n-1}\left(1-\theta\right)^{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)}\theta^{\left(3n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}$$

$$\Rightarrow lnL=\sum_{i=1}^{n}\ln C_2^{x_i-1}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\ln\left(1-\theta\right)+\left(3n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\theta$$

$$\Rightarrow\frac{\partial lnL}{\partial\theta}=\frac{1}{1-\theta}\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+\frac{1}{\theta}\left(3n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0\Rightarrow\theta=\frac{3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{2}=\frac{3-\overline{X}}{2}$$

(3) $E\hat{\theta}=E\left(\frac{3-\overline{X}}{2}\right)=\frac{3-E\overline{X}}{2}=\frac{3-EX}{2}=\frac{3-\left(3-2\theta\right)}{2}=\theta$ 故 $\hat{\theta}$ 估计是无偏的。

根据大数定理，$\overline{X}$ 依概率收敛到 θ，于是 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$ 依概率收敛到 θ，即 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$ 为 θ 的一致估计量。

【例 14】设 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ 是总体的一个简单随机样本，则下列哪个估计量最有效。

(1) $\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$；　(2) $\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3$；　(3) $\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}X_3$。

解：讨论估计量的有效性，首先检查他们是否都是无偏的，否则，不能比较。设 $Ex_i=\mu$

$$E\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu$$

$$E\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}EX_1+\frac{1}{4}EX_2+\frac{5}{12}EX_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\mu=\mu$$

$$E\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}EX_1+\frac{3}{4}EX_2-\frac{1}{12}EX_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)\mu=\mu$$

$$\Rightarrow D\hat{\mu}_1=\left(\frac{1}{5}\right)^2DX_1+\left(\frac{3}{10}\right)^2DX_2+\left(\frac{1}{2}\right)^2DX_3=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)DX=\frac{19}{50}DX$$

$$D\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2DX_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2DX_2+\left(\frac{5}{12}\right)^2DX_3=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{25}{144}\right)DX=\frac{25}{72}DX$$

$$D\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2DX_1+\left(\frac{3}{4}\right)^2DX_2+\left(\frac{1}{12}\right)^2DX_3=\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{16}+\frac{1}{144}\right)DX=\frac{49}{72}DX$$

$$\Rightarrow D\hat{\mu}_2<D\hat{\mu}_1<D\hat{\mu}_3\Rightarrow\hat{\mu}_2\ \text{最有效.}$$

【例 15】$X_1,X_2,X_3\sim N(\mu,\sigma^2)$　试证明：统计量

$$\hat{\mu}_1=\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{3}+\frac{X_3}{6};\quad \mu_2=\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{4}+\frac{X_3}{4};\quad \mu_3=\frac{X_1}{3}+\frac{X_2}{3}+\frac{X_3}{3}$$

都是总体 X 期望值 μ 的无偏估计量，并比较哪一个更有效。

解：$E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{6}E(X_3)=\mu$

$E(\mu_2)=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{4}\mu=\mu$

$E(\mu_3)=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu=\mu$

$D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2=\frac{7}{18}\sigma^2$

$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2$

$D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2=\frac{1}{3}\sigma^2$

可见$D(\mu_3)<D(\mu_2)<D(\mu_1)$，$\hat{\mu}_3$更有效。

【例 16】设总体X,Y相互独立，$X\sim N\left(\mu_1,\ \sigma^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\ \sigma^2\right)$，从中分别取容量为$n_1,n_2$的简单随机样本，$Z=aS_1^2+bS_2^2$是$\sigma^2$的无偏估计量，求$D\left(Z\right)$的最小值。

解：$EZ=E\left[aS_1^2+bS_2^2\right]=aES_1^2+ES_2^2=\left(a+b\right)\sigma^2=\sigma^2\Rightarrow a+b=1$

$$DZ=a^2DS_1^2+b^2DS_2^2=a^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n_1-1}+b^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n_2-1}=2\sigma^4\left[\frac{a^2}{n_1-1}+\frac{(1-a)^2}{n_2-1}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{d}{da}\left(DZ\right)=2\sigma^4\left[\frac{2a}{n_1-1}-\frac{2\left(1-a\right)}{n_2-1}\right]=0\Rightarrow a=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2};\quad b=1-a=\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$$

$$\Rightarrow Min\left(DZ\right)=\frac{2\sigma^4}{n_1+n_2-2}$$

【例 17】设总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是抽自于该总体的一个简单机样本，要使

$\hat{\theta}=a\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\overline{X}\right|$为$\sigma$的无偏估计量，求$a$的值。

解：依题意，$X_i\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$E\hat{\theta}=E\left(a\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\overline{X}\right|\right)=naE\left|X_1-\overline{X}\right|$$

$$X_1-\overline{X}=X_1-\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}\left(X_2+X_3+\cdots+X_n\right)$$

$$\Rightarrow E\left(X_1-\overline{X}\right)=\mu-\mu=0,\quad D\left(X_1-\overline{X}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\Rightarrow X_1-\overline{X}\sim N\left(0,\ \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow E\left|X_1-\overline{X}\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{\frac{2(n-1)\sigma^2}{n}}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$$\Rightarrow E\hat{\theta}=na\cdot\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\sigma\Rightarrow a=\sqrt{\frac{\pi}{2n\left(n-1\right)}}$$

【例 18】设总体$X\sim U(0,\ \theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是抽自于该总体的一个样本，试证明：

$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$和$\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$是$\theta$的相合估计量。

证明：对于均匀分布，一般我们规定 $X_{(1)}=Max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$； $X_{(n)}=Min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

而X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{\theta}{x}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$X_{(1)}$的分布函数为$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n\Rightarrow f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^{n-1}, & 0<x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

$X_{(n)}$的分布函数为$F_n(x)=[F(x)]^n\Rightarrow f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0<x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$EX_{(n)}=\int_0^\theta x\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{n\theta}{n+1}$$

$$DX_{(n)}=E\left[X_{(n)}^2\right]-E\left[X_{(n)}\right]^2=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx-\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2=\frac{n\theta^2}{n+2}-\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$E\hat{\theta}_1=2E\overline{X}=2\times\frac{a+b}{2}=\theta,\quad D\hat{\theta}_1=4D\overline{X}=4\times\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{\theta^2}{3}$$

$$E\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}EX(n)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n\theta}{n+1}=\theta$$

$$D\hat{\theta}_2=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2DX(n)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

根据切比雪夫不等式：对任意$\varepsilon>0$，当$n\to\infty$时有

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_1-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\hat{\theta}_1}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\hat{\theta}_1}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

所以，$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是相合估计量。

【例 19】 $X\sim P(\lambda)$（泊松分布），证明$\overline{X}$和S^2都是参数λ的无偏估计，并且对任一值$0<\alpha<1$，证明：

$\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$也是$\lambda$的的无偏估计量。

解： $X\sim P(\lambda)$　$E(X)=\lambda$， $D(X)=\lambda$

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda,\quad D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Dx_i=\frac{\lambda}{n}$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\right)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda+\lambda^2)-n(\frac{\lambda}{n}+\lambda^2)\right]=\lambda$$

故，$\overline{X}$与S^2都是参数λ的无偏估计。

又，$E(\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2)=\alpha E(\overline{X})+(1-\alpha)E(S^2)=\alpha\lambda+(1-\alpha)\lambda=\lambda$，故也是$\lambda$的无偏估计量。

【例 20】 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_n$是从总体$X$中取出的一个简单随机样本，若已知$\sigma^2$的估计量 $\hat{\sigma}^2=C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，试确定$C$使之成为$\sigma^2$的无偏估计量。

解：因为$E(\hat{\sigma}^2)=C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=C\sum_{i=1}^{n-1}\left[D(X_{i+1}-X_i)+\left(E(X_{i+1}-X_i)\right)^2\right]$

$$=C\sum_{i=1}^{n-1}\left[D(X_{i+1})+D(X_i)+0\right]=C2(n-1)\sigma^2=\sigma^2\Rightarrow C=\frac{1}{2(n-1)}$$

【例 21】设$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$是参数θ的二个相互独立的无偏估计量，且$D(\hat{\theta}_1)=2D\,(\hat{\theta}_2)$，找出$k_1,k_2$,使$k_1\hat{\theta}_1+k_2\hat{\theta}_2$也是$\theta$的无偏估计量，并且使方差最小。

解：∵ $E(\hat{\theta}_1)=E\,(\hat{\theta}_2)=\theta$

要使 $E(k_1\hat{\theta}_1+k_2\,\hat{\theta}_2)=k_1E(\hat{\theta}_1)+k_2E\,(\hat{\theta}_2)=(k_1+k_2)\theta=\theta$，则必有：　$k_1+k_2=1$

又因为：　$D(k_1\hat{\theta}_1+k_2\,\hat{\theta}_2)=k_1^2D\,(\hat{\theta}_1)+k_2^2D\,(\hat{\theta}_2)=(2k_1^2+k_2^2)D\,(\hat{\theta}_2)=[2k_1^2+(1-k_1)^2]D(\hat{\theta}_2)$

$$f(k_1)=2k_1^2+(1-k_1)^2=3k_1^2-2k_1+1\Rightarrow f'(k_1)=0\Rightarrow k_1=\frac{1}{3}$$

$f''(k_1)=6>0$　可知　$k_1=\frac{1}{3}$，　$k_2=\frac{2}{3}$为所求。

【例 22】设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自对数正态总体X的一个简单随机样本，即$\ln X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，其中$-\infty<\mu<+\infty,\ 0<\sigma^2<+\infty$，试求$\mu$及$\sigma^2$的极大似然法估计量。

解：　利用公式可求得X的密度函数为

$$f(x;\ \mu,\ \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(\ln x)'e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x>0$$

则似然函数为 $L(\mu,\sigma^2)=\mathop{\pi}\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x_i}e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\left(\mathop{\pi}\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2}$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2\sigma}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\mu=0\Rightarrow\mu=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=-\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2=0\Rightarrow\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\hat{\mu})^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\hat{\mu})^2$$

【例 23】　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个简单样本，总体 X 概率密度函数为

$$f(x;\ \theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \theta>-1\text{是未知参数}$$

试用矩法和极大自然法求 θ 的估计量。

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{o}^{1}(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

令 $E(X)=\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

（2）似然（联合）函数 $L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}x_i^{\theta}\right)^n & 0<x_i<1\\ 0 & \end{cases}$

$$0<x_i<1:\ LnL(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{dLnL(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\Rightarrow\theta=1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\Rightarrow\hat{\theta}=1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

【例 24】$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，试证 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 θ 的无偏、一致、最有效估计。

证 明：由于 $E(X_i)=\int_{o}^{+\infty}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{0}}dx=\theta$

$E(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{1}{n}\cdot n\theta=\theta$，故为无偏估计。

又因为 $E(X_i^2)=\int_{o}^{+\infty}\dfrac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\cdot n\theta^2=\frac{\theta^2}{n}$$

而 $E\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]^2=E\left(\dfrac{1}{\theta^4}(x-\theta^2)\right)=\dfrac{1}{\theta^2}$

则 $D_o(\theta)=\dfrac{1}{nE\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]}=\dfrac{\theta^2}{n}=D(\overline{X})$ 故为**最有效**估计量（公式参见相关教材）

又由切贝雪夫不等式得 $P\{\left|\overline{X}-\theta\right|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}=\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$ 故为一致估计量。

【例 25】假设总体 $X\sim U(a,\ b)$， $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为来自总体的简单随机样本，如果分别以 $\hat{a}=Min(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 和 $\hat{b}=Max(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 作为总体 X 的未知参数的估计量，问 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 是否无偏？

解：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & other\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b\\ 1, & x\geq b\end{cases}$

$$F_{\hat{a}}=P\left(\hat{a}\leq x\right)=P\left\{Min\left(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\right)\leq x\right\}=1-P\left\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\right\}$$

$$=1-\left[1-F(x)\right]^n=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n, & a\leq x<b\\ 1, & x\geq b\end{cases}\Rightarrow f_{\hat{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a<x<b\\ 0, & other\end{cases}$$

$$F_{\hat{b}}=P\left(\hat{b}\leq x\right)=P\left\{Max\left(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\right)\leq x\right\}=1-P\left\{X_1\geq x,X_2\leq x,\cdots,X_n\leq x\right\}$$

$$=\left[F(x)\right]^n=\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n, & a\leq x<b\\ 1, & x\geq b\end{cases}\Rightarrow f_{\hat{b}}(x)=\begin{cases}\dfrac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}, & a<x<b\\ 0, & other\end{cases}$$

$$E\hat{a}=\int_a^b x\cdot\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}dx=\frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b\left[b-(b-x)\right](b-x)^{n-1}dx=\frac{na+b}{n+1}\neq a,\text{有偏。}$$

$$E\hat{a}=\int_a^b x\cdot\frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}dx=\frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b\left[a+(x-a)\right](x-a)^{n-1}dx=\frac{a+nb}{n+1}\neq b,\text{有偏。}$$

【例 26】设总体 $X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & other\end{cases}$，求 $\hat{\theta},\ D\hat{\theta}$ 并讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性和一致性。

解：$EX=\int_0^\theta x\cdot\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\dfrac{\theta}{2}$， $EX=\overline{X}\Rightarrow\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}\Rightarrow\theta=2\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=2\overline{X}$

$D\hat{\theta}=4D\overline{X}=\dfrac{4}{n}DX$

$$EX^2=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{3\theta^2}{10}\Rightarrow DX=EX^2-(EX)^2=\frac{3\theta^2}{10}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20}\Rightarrow D\hat{\theta}=\frac{4}{n}\times\frac{\theta^2}{20}=\frac{\theta^2}{5n}$$

$E\hat{\theta}=2E\overline{X}=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta$，无偏。

$$D\hat{\theta}=\frac{\theta^2}{5n}\xrightarrow{n\to\infty}0,\text{根据切比雪夫不等式}P\left\{\left|\hat{\theta}-\frac{\theta}{2}\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\frac{D\hat{\theta}}{\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\frac{\theta}{2}\right|<\varepsilon\right\}=1$$

一致性成立。

二、区间估计

1、置信度与置信区间

前面的点估计是对总体进行了极其“精确”的估计（缩到一点的值），但由于样本的随机性，反而很难接近总体真实值，如果在某个区间估计，将更加合理，所以，人们往往不以得到近似值为满足，还要估计误差，这也是实际工程所需要的结果。

设总体 X 含有一个待估的未知参数 θ，如果我们从样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 出发，找出两个统计量，$\theta_1=\theta_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ 与 $\theta_2=\theta_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$，$\theta_1<\theta_2$，使得区间 $\left(\theta_1,\ \theta_2\right)$ 以 $1-\alpha$ 的大概率包含这个待估的未知参数 θ，即 $\boxed{P\left\{\theta_1<\theta<\theta_2\right\}=1-\alpha}$ $\left(0<\alpha<1\right)$，那么，我们称区间 $\left(\theta_1,\ \theta_2\right)$ 为 θ 的**置信区间**，$1-\alpha$ 为该区间的**置信度**（**置信水平、置信概率**），**上述两个统计量的寻找方法正式源自第六章的 8 个枢轴量**（**即样本函数**）。

2、枢轴量

满足以下三个条件的样本函数称为统计量。

① 是待估参数 θ 与样本 $\overline{X}$ 的函数；

② 不含其它未知参数；

③ 服从与未知参数无关的已知分布。

不是统计量就是样本函数，能解出待估参数的样本函数称为**枢轴量**

第六章讲到的 8 **大枢轴量**就是**枢轴量**。在本章和下一章都会用到，因为这是考点的内容。

3、单正态总体的期望和方差的区间估计

智轩第 12 技　利用 8 大枢轴量全面解决区间估计和假设检验的 8 大估计方式。

3.1 均值 μ 的区间估计　$\left(X\sim N(\mu,\sigma^2)\right)$

①σ^2 已知，求 μ 的区间估计

选择枢轴量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，由正态分布图形曲线所围面积可知 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\boxed{(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow\left(\overline{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

评 注　注意关系：$z_{\frac{\alpha}{2}}=-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

②σ^2 未知，求 μ 的区间估计

选择枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/n}\sim t(n-1)\Rightarrow P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/n}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$，则$1-\alpha$的置信区间为

$$\boxed{(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow\left(\overline{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)}$$

评 注 注意关系：$t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)$

3.2 方差σ^2的区间估计 $\left(X\sim N(\mu,\sigma^2)\right)$

③ μ已知，求σ^2的区间估计

选择枢轴量 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)\Rightarrow P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=1-\alpha$，则$1-\alpha$的置信区间为

$$\boxed{(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\quad\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)}$$

或 $S^2=\dfrac{n}{n-1}B_2\Rightarrow(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\dfrac{nB_2}{x^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\quad\dfrac{nB_2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$ 其中$B_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。

④ μ未知，求σ^2的区间估计

取枢轴量 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$

$$\boxed{(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)}$$

4、两个正态总体均值差的区间估计

$X\sim N(\mu,\sigma_1^2);\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2);\qquad X$和$Y$独立同，$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{n})$。

4.1 $\mu_1-\mu_2$区间估计

⑤σ_1^2,σ_2^2已知，区间估计$\mu_1-\mu_2$

取枢轴量$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)\Rightarrow P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\overline{X}-\overline{Y}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right)\Leftrightarrow\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$$

⑥ σ_1^2，σ_2^2 未知但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，估计 $\mu_1-\mu_2$

取枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$，其中 $S_W^2=\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$ ，

$$\Rightarrow P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}=1-\alpha$$

，则置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\cdot(n+m-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$$

4.2 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计

⑦ μ_1，μ_2 已知，估计方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

选择枢轴量 $$Q=\frac{\dfrac{1}{m\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{\dfrac{1}{n\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_2\right)^2}\sim F\left(m,\ n\right)\Rightarrow P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)<\frac{\dfrac{1}{m\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{\dfrac{1}{n\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_2\right)^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)\right\}=1-\alpha$$

则置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_2\right)^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)},\quad \frac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_2\right)^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\right)$$

⑧ μ_1，μ_2 未知，估计方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

选择枢轴量 $Q=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,\ n-1)\Rightarrow P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)<\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)\right\}=1-\alpha$，

则置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\right)$$

或 $(\theta_1,\theta_2)=\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,\ m-1)\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,\ m-1)\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right)$，

$\boxed{\text{评 注}}$ 注意关系：$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)=\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,\ m-1)}$；　$F(m,\ n)=\dfrac{1}{F(n,\ m)}$。

注意，考研范围仅限于上述 8 个正态整体的双侧置信区间，其它不做要求，读者不要作无用功。

5、单侧置信区间

定义：$P\{\theta>\theta_L\}=1-\alpha$ 或 $P\{\theta<\theta_u\}=1-\alpha$，则 $(\theta_L,\ +\infty),(-\infty,\ \theta_u)$ 为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间。

确定技巧：利用前述的双侧区间的上下限，把 $\dfrac{\alpha}{2}$ 改为 α，就可以了。如

$a)$ $X\sim N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma^2$ 均未知，估计 μ（单侧）下上侧置信区间为

$$(\theta_L,+\infty)=\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),\ +\infty\right) \text{ 或 } (-\infty,\theta_u)=\left(-\infty,\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right)$$

$b)$ $X\sim N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma^2$ 均未知，单侧估计 σ^2

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为 $\left(0,\ \dfrac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha}^2(n-1)}\right)$

注意，考研范围仅限于 4 个单正态整体的单侧置信区间。

■区间估计题型题法

【例 27】假设 0.5，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值，已知 $Y=\ln X\sim N(\mu,1)$。

(1) 求 $b=EX$；

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(3) 求 b 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：(1) $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$　　$y\in(-\infty,\ +\infty)$

$$\Rightarrow b=EX=E\left[e^Y\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$$

$$\xrightarrow{t=y-\mu}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu-\frac{1}{2}t^2}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

(2) $1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.975}=1.96$

$$\overline{Y}\sim N\left(\mu,\ \frac{1}{4}\right);\quad \overline{Y}=\frac{\ln0.5+\ln0.8+\ln1.25+\ln2}{4}=\frac{\ln1}{4}=0$$

$$\overline{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow0-1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}<\mu<\overline{Y}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\Rightarrow\mu\in(-0.98,\ \ 0.98)$$

(3) 由于 e^x 的严格递增，有 $0.95=P\left\{-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48\right\}=P\left\{e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48}\right\}$

求 b 的置信度为 0.95 的置信区间为 $e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48}$。

【例 28】某自动包装机包装洗衣粉，其重量符合正态分布，随机抽查 12 袋（克），分别为：

1001，1004，1003，1000，997，999，1004，1000，996，1002，998，999。

(1) 求平均每袋重的点估计；

(2) 求 σ^2 的点估计；

(3) 求 μ 的 95%的置信区间；

(4) 求 σ^2 的 95%的置信区间；

(5) 求 $\sigma^2=5$ 时，μ 的 95%的置信区间。

解：(1) $\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{12}(1001+1004+1003+1000+997+999+1004+1000+996+1002+998+999)=1000.25$

(2) $\hat{\sigma}^2=S^2=\frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{12}\left(x_i-\overline{X}\right)^2\approx 6.93$

(3) σ^2 未知，关于 μ 的置信区间使用枢轴量 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$，有

$$\mu\in\left(\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$
$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{1-\frac{0.5}{2}}(12-1)=t_{0.975}(11)\approx 2.201,\quad \frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{6.3}}{\sqrt{12}}\approx 0.794$$
$$\Rightarrow \mu\in(998.50,\quad 1002.00)$$

(4) μ 未知，关于 σ^2 的置信区间选用枢轴量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，有

$$\sigma^2\in\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$
$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{\frac{0.5}{2}}(12-1)=\chi^2_{0.025}(11)\approx 21.920,\quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(11)\approx 3.816$$
$$\Rightarrow \sigma^2\in(3.48,\quad 19.98)$$

(5) $\sigma^2=8$ 已知，关于 μ 的置信区间使用枢轴量 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim u$，有

$\mu \in \left(\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$　　　（注意：$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{\frac{\alpha}{2}}$）

$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = -u_{0.025} \approx 1.96,\quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} \approx 0.815$

$\Rightarrow \mu \in (998.65,\quad 1001.85)$

【例 29】设两个总体 X,Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, 60),\ Y \sim N(\mu_2, 36)$，从 X,Y 中分别抽取容量为 $n_1 = 75,\ n_2 = 50$ 的样本，且已知 $\overline{X} = 82,\quad \overline{Y} = 76$，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95%的置信区间。

解：已知 σ_1^2，σ_2^2，但 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$， 关于 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$;　$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in (3.59,\ 8.41)$ 或 $\mu_1 - \mu_2 \in 6 \pm 2.41$。

【例 28】为提高某一化学生产的得率，试图采用一种新的催化剂。已知原催化剂进行 $n_1 = 8$ 次试验，得率的平均值 $\overline{x_1} = 91.73,\quad S_1^2 = 3.89$；新催化剂进行 $n_2 = 8$ 次试验，得率的平均值 $\overline{x_1} = 93.75,\quad S_1^2 = 4.02$。假设两总体都服从正态分布，且方差相等。求

(1) $\mu_1 - \mu_2$ 的 95%的单侧置信下限；(2) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 95%的置信区间。

解：(1) $\overline{x_1} - \overline{x_2} - t_\alpha(4) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = -2.02 - 1.98\ t_\alpha(4)$。注意：$S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

(2) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left(\frac{3.89}{4.02} \times \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(7,7)},\quad \frac{3.89}{4.02} \times F_{\frac{\alpha}{2}}(7,7) \right)$。

【例 30】设 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2),\ \mu$ 的置信区间的长度为 $L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1),\ P\{t(n-1) \le t_\alpha(n-1)\} = \alpha$，求置信水平。

解：$L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \Rightarrow$

$$P\left\{ \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \le \mu \le \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right\} = P\left\{ \left| \frac{\overline{X} - \mu}{S\sqrt{n}} \right| \le t_\alpha(n-1) \right\} = 2P\left\{ \frac{\overline{X} - \mu}{S\sqrt{n}} \le t_\alpha(n-1) \right\} - 1 = 2\alpha - 1。$$

【例 30】设 $X_1,\ X_2 \cdots X_n$ 来自正态总体 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间长度为 L，求 EL^2 和 DL^2。

解：μ 置信水平为 $1-\alpha$ 区间为 $\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$

$$\Rightarrow L=\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\Rightarrow L^2=\frac{4S^2}{n}t^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)$$

$$EL^2=E\frac{4S^2}{n}t^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)=\frac{4}{n}t^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)ES^2=\frac{4\sigma^2}{n}t^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)$$

$$DL^2=D\left[\frac{4S^2}{n}t^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\right]=\frac{16t^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)}{n^2}DS^2=\frac{16t^4_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)}{n^2}\times\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{32\sigma^4}{n^2\left(n-1\right)}t^4_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)$$

第七章 参数估计模拟题

一．填空题

1. 设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, 若x>\theta, \\ 0, \quad 若x\le\theta, \end{cases}$ 而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自 X 的简单随机样本，则未知参数θ的矩估计量为________，最大似然估计量为_________.

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一个样本，且 E(X)＝$\mu, D(X)=\sigma^2, \overline{X}, S^2$是样本均值和样本方差，则当$c=$________时，统计量$\left(\overline{X}\right)^2-cS^2$是$\mu^2$的无偏估计。

二．选择题

1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X～N(μ,σ^2)的样本，则$\mu^2+\sigma^2$的矩法估计量为

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　（B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

（C）$\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-n\overline{X}$　　（D）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$　　[　]

2. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自均值为θ的指数分布总体的样本，其中θ为未知，则下列估计量中不是μ的无偏估计的为

（A）$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)$　　（B）$T_2=\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{5}$

（C）$T_3=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$　　（D）$T_4=\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{4}+\frac{X_3}{8}+\frac{X_4}{8}$　　[　]

3. 设$\hat{\theta}$是参数θ的无偏估计，且有$D(\hat{\theta})\ne 0$,则$\hat{\theta}^2$必为（$\hat{\theta}$)^{2}的

（A）无偏估计　　（B）一致估计
（C）有效估计　　（D）有偏估计　　[　]

4. 设总体 X 的数学期望为 0，σ是总体 X 的标准差，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本，则总体方差σ^2的无偏估计是

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　（B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$

（C）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{1/2})^2$　　（D）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$　　[　]

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体 X～N(μ,σ^2)的简单随机样本,$\overline{X}$是样本均值，S^2 是样本方差，

则

（A）$E(\overline{X}^2-S^2)=\mu^2-\sigma^2$　　（B）$E(\overline{X}^2+S^2)=\mu^2+\sigma^2$

（C）$E(\overline{X}-S^2)=\mu^2-\sigma^2$　　（D）$E(\overline{X}^2-S^2)=\mu^2+\sigma^2$　　[ ]

三．解答题

1. 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$为未知参数。已知取得了样本值$x_1=1,x_2=2,x_3=1$。试求参数θ 的矩估计值和最大似然估计值。

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本，其中总体 X 的概率分布为

X	－1	0	2
p_k	2θ	θ	$1-3\theta$

其中$0<\theta<\dfrac{1}{3}$，试求未知参数θ的矩估计量。

3. 假设总体 X 在区间[θ，θ+1]上均匀分布，其中θ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本，

$\overline{X}$是样本均值，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$是最小观测值。

（1）求参数θ的矩估计量和最大似然估计量；

（2）若所得估计是有偏的，试将其修正为无偏的。

4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本，其中 X 的密度函数为（拉普拉斯分布）

$$f(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}(-\infty<x<\infty)$$

试求未知参数θ（θ>0）的最大似然估计量。

5. 假设总体 X 服从参数为λ的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本，试求：

（1）λ的最大似然估计量；

（2）λ^2的无偏估计量。

6. 设正态总体 X 的方差$\sigma=10$，问抽取样本容量 n 最少应为多大，才能使μ的置信度为 95%的置信区间长度不超过 1.

第七章 参数估计模拟题答案

一．填空题

1. θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}=\overline{X}-1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$，最大似然估计量为：$\hat{\theta}=\min_{1\le i\le n}\{X_i\}$。

2. $\frac{1}{n}$

二．选择题

1.（D）　2.（B）　3.（D）　4.（D）　5.（C）

三．解答题

1. θ 的矩估计值和最大似然估计值均为：$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$

2. $\hat{\theta}=\frac{2-\overline{X}}{8}$

3.（1）θ 的矩估计量和最大似然估计量分别为 $\hat{\theta}_1=\overline{X}-\frac{1}{2},\hat{\theta}_2=X_{(1)}$ 或 $X_{(n)}-1$

（2）$\hat{\theta}_1$ 是无偏的，而 $\hat{\theta}_2$ 是有偏的，其无偏修正为 $\hat{\theta}_2^{*}=X_{(1)}+\frac{1}{n+1}$ 或 $X_{(n)}-\frac{n}{n+1}$

4. $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

5.（1）$\hat{\lambda}=\overline{X}$;　（2）$\hat{\lambda}^2=\overline{X}^2-\frac{1}{n}\overline{X}$

6. 样本容量 n 最少应取 1537.