电动力学习题课 (四)

Nov. 29, 2012

1 部分作业习题解答:

习题6.2 厚度为d的平板型导体(电导率为σ_c)置于xy平面, 假设沿x方向流有圆频率为ω的交流电流(沿y 方向均匀). 设导线边界上($z=0,d$)的电流密度为$j_0 e^{-i\omega t}\hat{e}_x$. 在准静态近似下, 求解导体内部电流密度$\vec{j}$，电场$\vec{E}$, 以及磁场$\vec{H}$的分布.
解:
根据准静态近似下扩散方程:

$$\left(\nabla^2-\mu_0\sigma_c\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E}=0 \tag{1}$$

考虑到单频, 电流沿x方向, 沿y方向均匀, 扩散方程Eq. (1)变成:

$$\left(\partial_z^2+i\mu_0\sigma_c\omega\right)E_x\left(z\right)=0 \tag{2}$$

解得电场$\vec{E}$的分布:

$$\vec{E}=\hat{e}_x\left(E_0 e^{-\alpha(1-i)z}+E_0' e^{\alpha(1-i)z}\right)e^{-i\omega t} \tag{3}$$

其中$\alpha=\sqrt{\mu_0\sigma_c\omega/2}$, 利用边界条件:

$$\vec{E}\left(0\right)=\vec{E}\left(d\right)=\frac{j_0 e^{-i\omega t}}{\sigma_c}\hat{e}_x \tag{4}$$

求解待定常数E_0和E_0':

$$\begin{aligned}E_0&=\frac{j_0}{\sigma_c}\frac{e^{\alpha(1-i)d}-1}{e^{\alpha(1-i)d}-e^{-\alpha(1-i)d}}\\ E_0'&=\frac{j_0}{\sigma_c}\frac{1-e^{-\alpha(1-i)d}}{e^{\alpha(1-i)d}-e^{-\alpha(1-i)d}}\end{aligned} \tag{5}$$

容易求出电流$\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$和磁场$\vec{H}$的分布:

$$\vec{H}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\hat{e}_y\partial_z E_x=\hat{e}_y\frac{\alpha\left(1-i\right)}{i\omega\mu_0}\left(-E_0 e^{-\alpha(1-i)z}+E_0' e^{\alpha(1-i)z}\right)e^{-i\omega t} \tag{6}$$

2 Example 1

如Fig. 1所示,

(a) 对于任意形状的电流回路, 在非远场条件下, 考虑其标量场φ_m的分布. (即课件十五讲, 第3页)

(b) 严格求解束缚在磁介质柱表面上的磁化电流$\vec{\imath}$, 以及磁介质柱的磁化强度$\vec{M}$. 另外,

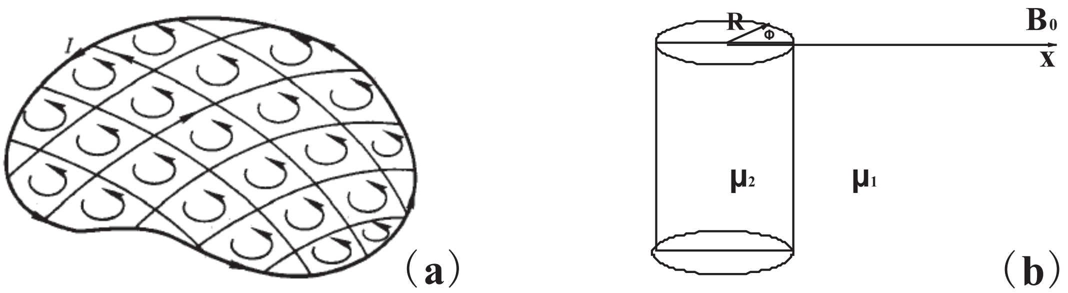

Figure 1: 例一示意图

- 将磁介质柱表面的磁化电流等效成"3维磁偶极子", 计算其在远场$\vec{r}=\rho\left(\hat{e}_x\cos\phi+\hat{e}_y\sin\phi\right)$处对矢势$\vec{A}$的贡献.
- 将磁介质柱表面的磁化电流等效成"2维磁偶极子", 计算其在远场$\vec{r}=\rho\left(\hat{e}_x\cos\phi+\hat{e}_y\sin\phi\right)$处对矢势$\vec{A}$的贡献. (即课件十三讲, 选做题)

解:
(a) 分别应用严格解和等效解两种方法来求解此题.
严格解: 对于非远场情况, 电流回路不再等效为单个磁偶极子. 根据Biot-Savart定律, 求解磁感应强度$\vec{B}\left(\vec{r}\right)$的分布:

$$\begin{aligned}
\vec{B}\left(\vec{r}\right) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'} I\mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\left(I\mathrm{d}\vec{S}'\times\nabla'\right)\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{S'}\nabla'\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}'-\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\right)\mathrm{d}\vec{S}' \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\int_{S'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega
\end{aligned} \tag{7}$$

上述推导应用了公式[1]:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\times\vec{F}=\int_S\left(\mathrm{d}\vec{S}\times\nabla\right)\times\vec{F} \tag{8}$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \tag{9}$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C} \tag{10}$$

Eq. (7)中立体角Ω的定义为:

$$\Omega=\int_{S'}\mathrm{d}\Omega=\int_{S'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'=-\int_{S'}\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' \tag{11}$$

负号是否有违我们平时的直觉? 课件曾给出立体角正负号的规定:"按电流的右手法则, 决定面法线方向$\hat{e}_n$以后, 若观察点在$\hat{e}_n$的正方向, 则取$\Omega>0$, 反之$\Omega<0$". 实际上, 正负号来源于两个矢量$\vec{r}-\vec{r}'$和$\mathrm{d}\vec{S}'$之间的夹角余弦, $\mathrm{d}\vec{S}'$的正方向按电流的右手法则给出.

[1]提示: 可以在等式两边同时乘以任意常矢量$\vec{c}$, 即可得证.

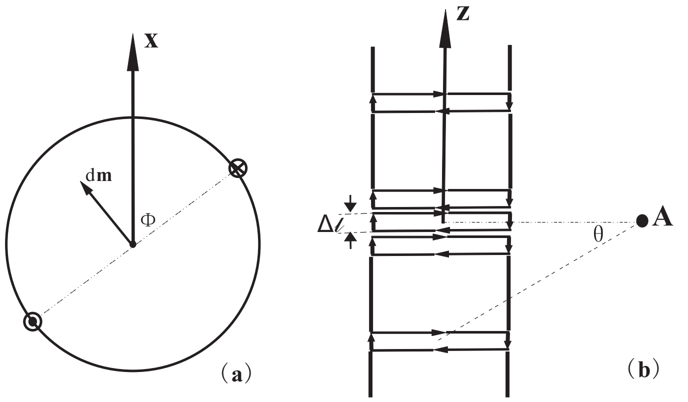

Figure 2: 3维磁偶极子等效原理图

等效解: 在非远场条件下, 虽然电流回路不再等效成单个磁偶极子, 但是可以把整个电流回路等效成一系列微小电路(磁偶极子)的叠加, 如Fig. 1 (a)所示, 利用一系列磁偶极子的磁标势叠加, 然后求得总磁场$\vec{B}$. (详细过程可参见课件) 两种方法得到的结果是一致的.

$$\varphi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi}\int_{S'} I\mathrm{d}\vec{S}'\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{12}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0\nabla\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\int_{S'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}' \tag{13}$$

(b) 在柱坐标中严格求解矢势A_z的拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 A_z = 0 \tag{14}$$

其解为:

$$A_z^{(1)}(\vec{r}) = C + \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0\frac{R^2}{\rho}\sin\phi + A_z^{ext}(\vec{r}) \tag{15}$$

$$A_z^{(2)}(\vec{r}) = C + \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0\rho\sin\phi + A_z^{ext}(\vec{r}) \tag{16}$$

其中外场为$A_z^{ext}(\vec{r}) = B_0\rho\sin\phi$, 根据边界条件算出表面的磁化电流$\vec{\pi}$:

$$\begin{aligned}\vec{\pi} &= \frac{1}{\mu_0}\,\hat{e}_\rho\times\left[\nabla\times\left(\vec{A}^{(1)}-\vec{A}^{(2)}\right)\right]\Big|_{\rho=R}\\ &= \frac{1}{\mu_0}\,\hat{e}_\rho\times\left(-\hat{e}_\phi\partial_\rho A_z^{(1)}+\hat{e}_\phi\partial_\rho A_z^{(2)}\right)\big|_{\rho=R}\\ &= \hat{e}_z\frac{2}{\mu_0}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0\sin\phi\\ &= \hat{e}_z\alpha_0\sin\phi\end{aligned} \tag{17}$$

其中$\alpha_0 = \frac{2}{\mu_0}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}B_0$. 由$\vec{\pi} = \vec{M}\times\hat{e}_\rho$可以得到磁介质柱的磁化强度$\vec{M}$:

$$\vec{M} = \alpha_0\hat{e}_x \tag{18}$$

3维磁偶极子等效法: 对Eq. (17)所示的电流分布$\vec{\pi}$, 作如Fig. 2 (a) 等效:
那么高度为Δl的扁平盒所对应的磁偶极子$\Delta\vec{m}$为:

$$\Delta\vec{m} = \int\mathrm{d}\vec{m} = \int_0^\pi\alpha_0\sin\phi R\mathrm{d}\phi\cdot 2R\Delta l\left(\sin\phi\hat{e}_x-\cos\phi\hat{e}_y\right) = \alpha_0\pi R^2\Delta l\hat{e}_x \tag{19}$$

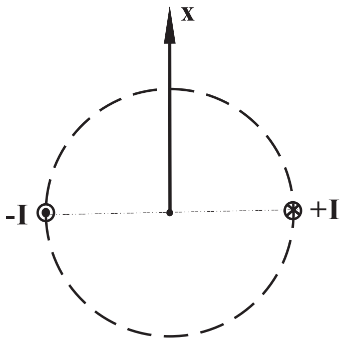

Figure 3: 2维磁偶极子等效原理图

进一步得到磁化强度$\vec{M}$:

$$\vec{M} \equiv \frac{\Delta \vec{m}}{V} = \alpha_0 \hat{e}_x \tag{20}$$

如Fig. 2 (b) 所示, 计算3维磁偶极子在远场$\vec{r} = \rho\left(\hat{e}_x \cos\phi + \hat{e}_y \sin\phi\right)$位置上对矢势$\vec{A}$的贡献:[2]

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\Delta \vec{m} \times (\vec{r} + \vec{e}_z \rho \tan\theta)}{|\vec{r} + \vec{e}_z \rho \tan\theta|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_0 \pi R^2 \cos\theta \mathrm{d}\theta \hat{e}_x \times \left(\hat{e}_x \cos\phi + \hat{e}_y \sin\phi + \hat{e}_z \tan\theta\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\rho} \alpha_0 \pi R^2 \hat{e}_z 2 \sin\phi \\
&= \frac{\mu_0 \alpha_0}{2} \frac{R^2}{\rho} \sin\phi
\end{aligned} \tag{21}$$

与Eq. (15)的结果一致.
2维磁偶极子等效法: 关于2维磁偶极子的定义, 请参看教材P141习题5.3.等效方法如下:
如Fig. 3 所示, 将整个磁介质柱表面的磁化电流等效成yz平面内的两条无穷长直导线, 代替磁化电流对空间磁场的贡献. 则2维磁偶极子产生的矢势$\vec{A}$为: [3]

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= -\hat{e}_z \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\rho_+ - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\rho_-\right) \\
&= \hat{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\rho^2 + R^2 + 2\rho R \sin\phi}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \sin\phi} \\
&\approx \hat{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{4R}{\rho} \sin\phi\right) \\
&= \hat{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{4R}{\rho} \sin\phi \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}_{2D} \times \hat{e}_\rho}{\rho}
\end{aligned} \tag{22}$$

形式上与Eq. (21)相同, 其中,

$$\vec{m}_{2D} = \hat{e}_x I 2R \tag{23}$$

对比严格结果Eq. (15), 得到:

$$\vec{m}_{2D} = \hat{e}_x \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} B_0 R^2 \tag{24}$$

[2]取$\Delta l = \mathrm{dz}$, 对每一个位于$-\vec{e}_z \rho \tan\theta$的磁偶极子对$\vec{A}$的贡献求和.
[3]通有直流电的无限长导线在空间中激发的矢势$\vec{A}(x, y) = -\hat{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\rho$.

进一步计算磁化强度$\vec{M}$为:

$$\vec{M} \equiv \frac{\vec{m}_{2D}}{S} = \hat{e}_x \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} B_0 \tag{25}$$

Eq. (21)和Eq. (25)得到的结果是一致, 即这两种等效方法等价.

讨论:

- 在横向外场$\vec{B}^{ext} \parallel \hat{e}_x$的条件下, 无穷长柱的退极化因子是多少? 提示:

$$\vec{B}^{(2)} = \nabla \times \vec{A}^{(2)} = \hat{e}_x \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} B_0 + \vec{B}^{ext} = \frac{\mu_0}{2} \vec{M} + \vec{B}^{ext} \tag{26}$$

  在纵向外场$\vec{B}^{ext} \parallel \hat{e}_z$的条件下, 无穷长柱的退极化因子又是多少?

- 对比Eq. (26)和电介质球的退极化电场:

$$\vec{E}^{(2)} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P} + \vec{E}^{ext} \tag{27}$$

  发现退极化场的符号一正一负, 为什么?

- 两种等效磁偶极子实际上是参考了严格解的结果, 如果我们不知道严格解, 该怎样用等效解法? (提示: 我们现在将表面的磁化电流等效成磁偶极子. 除了一个待定系数, 等效磁偶极子在远场对矢势$\vec{A}$的贡献与严格解形式是一致的.)

- 这两道题都是关于磁场等效解法的, 对比以前的电场等效解法, 有什么相同和不同之处?

3 Example 2

无限大平面上下分别充满磁导率为μ_1和μ_2的各向同性均匀线性介质, 在μ_1区距离界面为a的地方有一无限长且平行于界面的导线, 通有电流为I. 应用磁像法, 求解空间中磁场$\vec{H}$的分布.

解:

建立坐标系, 设介质分界面为xy平面, 导线平行于x轴位于xz平面中, 体系在x方向是平移不变的, 只需考虑yz平面即可. 类比电像法, 假设:

(1) 对于$z > 0$区，磁场$\vec{H}_1$等效为原导线$\mathrm{I}; (\mathrm{x}, 0, \mathrm{a})$和像导线$\mathrm{I}'; (\mathrm{x}, 0, -\mathrm{a})$的叠加.

(2) 对于$z < 0$区，磁场$\vec{H}_2$等效为像导线$\mathrm{I}''; (\mathrm{x}, 0, \mathrm{a})$的贡献.

则空间中磁场$\vec{H}$的分布为:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \frac{\mathrm{I}}{2\pi r_1} \hat{e}_x \times \hat{r}_1 + \frac{\mathrm{I}'}{2\pi r_2} \hat{e}_x \times \hat{r}_2 \quad z > 0 \quad or \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \vec{H}_2 &= \frac{\mathrm{I}''}{2\pi r_1} \hat{e}_x \times \hat{r}_1 \qquad\qquad\qquad\quad z < 0 \quad or \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{aligned} \tag{28}$$

其中,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \hat{e}_y r \sin\theta + \hat{e}_z (r\cos\theta - a) \\ \vec{r}_2 &= \hat{e}_y r \sin\theta + \hat{e}_z (r\cos\theta + a) \end{aligned} \tag{29}$$

r为场点$(0, y, z)$到坐标系原点的距离, θ为$\vec{r}$跟z轴的夹角. 边界条件: (取$z = 0$, 或者$\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \hat{e}_z \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\Big|_{z=0} &= 0 \\ \hat{e}_z \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

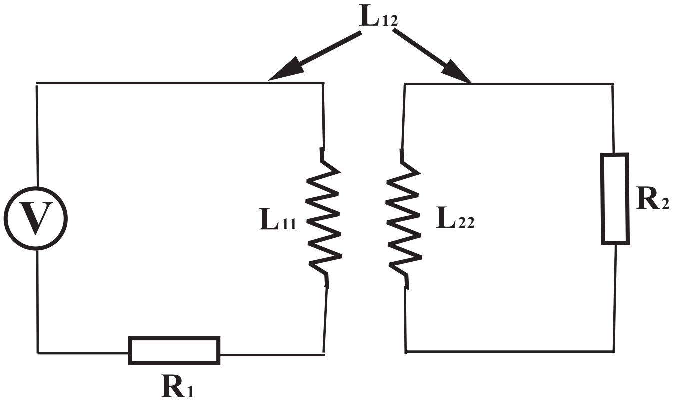

Figure 4: 例三示意图

将Eq. (28)代入Eq. (30), 得到:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}-\mathrm{I}' &= \mathrm{I}'' \\ \mu_1\left(\mathrm{I}+\mathrm{I}'\right) &= \mu_2\mathrm{I}'' \end{aligned} \tag{31}$$

解得:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}' &= \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\mathrm{I} \\ \mathrm{I}'' &= \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{I} \end{aligned} \tag{32}$$

讨论:

- 讨论I, I'和I''方向的关系.
- 若界面为PMC($\mu_2 \to \infty$)和真空($\mu_1 = \mu_0$)的交界面, 求出此时的像电流, 以及相应的磁场强度$\vec{H}$和磁感应强度$\vec{B}$. 并与电像法比较.

$$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \qquad \mathrm{I}'' = 0 \tag{33}$$

- 综合Example 1和Example 2, 电介质与磁介质之间有什么异同?

4 Example 3

在准静态近似下, 考虑下面的问题:

(a) 类比电容系数C_{ij}, 引入电感系数L_{ij}, 证明$L_{ij} = L_{ji}$, 并写出RL电路中电流所满足的方程.

(b) 如Fig. 4 所示, 电源为$V_0e^{-i\omega t}$, 求这两个电路中电流的稳定解.

解:
(a) 考虑空间有n个电流回路, 在准静态近似下, 第k个回路满足:

$$R_kI_k = V_k - \frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} \tag{34}$$

其中Φ_k表示第k个回路的总磁通量, 可以由第k个回路本身的磁场带来, 也可以通过别的回路在第k个回路处产生的磁场带来. 因此类比电容系数, 定义电感系数:

$$\Phi \equiv \sum_i L_{ki}I_i = L_{ki}I_i \tag{35}$$

L_{ii}称为自感系数, $L_{ij}(i \neq j)$称为互感系数, 可以证明$L_{ij} = L_{ji}$:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1 = \int_{S_2} \vec{B}_1 (\vec{r}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = \int_{S_2} \left[\nabla \times \vec{A}_1 (\vec{r}_2) \right] \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = \oint_{\partial S_2} \vec{A}_1 (\vec{r}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \tag{36}$$

已知$\vec{A}_1 (\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_1} \frac{\vec{j}(\vec{r}_1) \mathrm{d}^3 \tau_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$, 代入Eq. (36), 得到:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{37}$$

即:

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = L_{12} \tag{38}$$

请将$L_{ij} = L_{ji}$推广到多个线圈的情况. 将Eq. (35)代入Eq. (34)得到:

$$R_k I_k + L_{ki} \dot{I}_i = V_k \tag{39}$$

Eq. (39)是电工学中的基本方程.
(b) 根据Eq. (39):

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 &= V_0 e^{-i\omega t} \\ R_2 I_2 + L_{21} \dot{I}_1 + L_{22} \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

设稳态解为:

$$I_1 = i_1 e^{-i\omega t} \qquad I_2 = i_2 e^{-i\omega t} \tag{41}$$

将Eq. (41)代入Eq. (40)得到:

$$\begin{aligned} (R_1 - i\omega L_{11}) \, i_1 - i\omega L_{12} i_2 &= V_0 \\ -i\omega L_{21} i_1 + (R_2 - i\omega L_{22}) \, i_2 &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

并解得:

$$i_1 = \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - t^2} V_0 \qquad i_2 = -\frac{t}{Z_1 Z_2 - t^2} V_0 \tag{43}$$

其中$Z_1 = R_1 - i\omega L_{11}$, $Z_2 = R_2 - i\omega L_{22}$, $t = -i\omega L_{12} = -i\omega L_{21}$. 进一步,

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{t}{Z_2} = \frac{i\omega L_{12}}{R_2 - i\omega L_{22}} = \frac{i\omega L_{12} R_2 - \omega^2 L_{12} L_{22}}{R_2^2 + \omega^2 L_{22}^2} \tag{44}$$

即:

$$\begin{aligned} \left| \frac{i_2}{i_1} \right| &= \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_{22}^2}} \\ \arg \left(\frac{i_2}{i_1} \right) &= -\tan^{-1} \frac{R_2}{\omega L_{22}} \end{aligned} \tag{45}$$

显然, 两电路的耦合越大, 即L_{12}越大, 电路2中的电流越大.
讨论:

- 为什么说Eq. (34)是准静态近似下成立的？提示:

$$\sigma_c = \frac{ne^2}{m(\gamma - i\omega)} \tag{46}$$

- 考虑Eq. (44)的几种极限情况, 并讨论之.