第二十五讲

上次课

- 电磁偶极辐射的对称性：$\dfrac{\vec{p}}{\varepsilon_0} \to \mu_0 \vec{m}, \quad \vec{E} \to \vec{B}$

- 天线辐射：短天线 --- 电偶极辐射 ~ $f(\theta,\varphi) \sim p^2 \sin^2\theta$，

$l = \lambda / 2$ 半波天线效率最高

长天线 --- 辐射图案出现分叉，辐射效率振荡

---

§ 12.5 天 线 阵

天线最重要的两个品质是辐射图案和辐射效率。虽然半波天线的辐射效率比较高，但它在ϕ角上没有任何的定向性，在θ角上有一定的定向性，但不是很好。在实际应用中，为了获得更好的辐射方向性，我们常把一系列天线排布成天线阵，利用干涉效应来获得较好的方向性。最常用的是把半波天线当作基元天线列阵。惯常的排布有两种：一种是线性排列。如图 12.8，或横向排列，如图 12.9；再有是 $m \times n$ 方阵，如图 12.10。

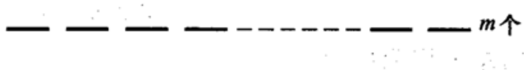


图 12.8

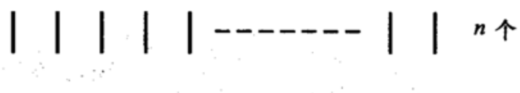


图 12.9

我们只讨论在线性排列的情况下，它的辐射方向性同单一的半波天线有什么不同。如图 12.11，m 个半波天线线性排列，它们所激发的场到达远处某点的路程不同，这就使它们彼此间有相位差，从而发生干涉使辐射具有方向性，如图 12.11 所示。每个天线与其邻近的天线之间的路程差为$a\cos\theta$（a 为两天线间的距离），若第一个天线的辐射场为

$$\vec{E}_1 = \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_1}}{R_1}$$

则第二个半波天线的辐射场为

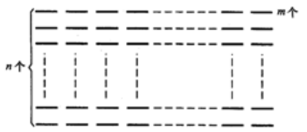


图 12.10

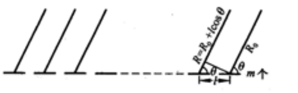


图 12.11

$$\vec{E}_2 = \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_2}}{R_2}$$

由于$R_2 \approx R_1 + a\cos\theta$，在远场条件下（$R >> \lambda$），有

$$\vec{E}_2 \approx \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_1}}{R_1}e^{ika\cos\theta} = \vec{E}_1 e^{ika\cos\theta}$$

定义$\alpha = ka\cos\theta$，则同理可得第三个半波天线的场为

$$\vec{E}_3 \approx \vec{E}_1 e^{i2\alpha}$$

依次类推，得m个半波天线产生的总场为

$$\vec{E}_{total} = \sum_{N=0}^{m-1}\vec{E}_1 e^{iN\alpha} = \vec{E}_1\frac{1-e^{im\alpha}}{1-e^{i\alpha}} \qquad (12.33)$$

可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子：

$$f(\alpha) = \left|\frac{1-e^{imka\cos\theta}}{1-e^{ika\cos\theta}}\right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{m}{2}ka\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}ka\cos\theta\right)}$$

因此总的辐射角分布为

$$f_{\text{total}}(\theta,\phi) = f_{\text{single}}(\theta,\phi)\cdot f(\alpha) \qquad (12.34)$$

即在原有的单个天线的角分布的图案基础上加上一个干涉后的“形状因子”。可以看出：

（1） 当 $\alpha = 0$时 $f(\alpha)$有极大值，其值为 $f(0) = m^2$。 这说明向前传播的方向仍然是体系辐射最强的方向，而且辐射能力增强了m^2倍。这不奇怪，因为干涉相应使得此方向的所有天线都是相干叠加，场的振幅增强了 m 倍，功率增强m^2倍。

（2） 当$\alpha = \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \cdots, \frac{(m-1)2\pi}{m}$时有极小值，分布情况如图 12.12 所示，两个极小之间有个极大，但高阶的极大值急剧减少。

（3） 主极大在$\alpha = 0$处，第一个极小在$\alpha = \frac{2\pi}{m}$处，即 $ka\cos\theta = \frac{2\pi}{m}$处。若令$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$，则$ka\sin\psi = \frac{2\pi}{m}$。$m$很大时主极大峰所处的角度范围为

$$|\psi| \le \sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{mka}\right) \approx \frac{\lambda}{ma}$$

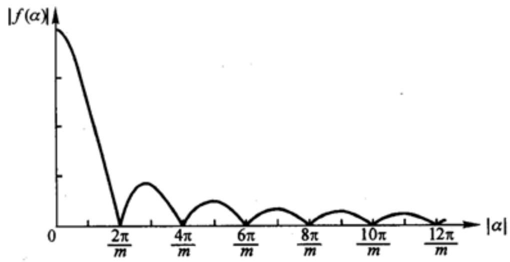


图 12.12

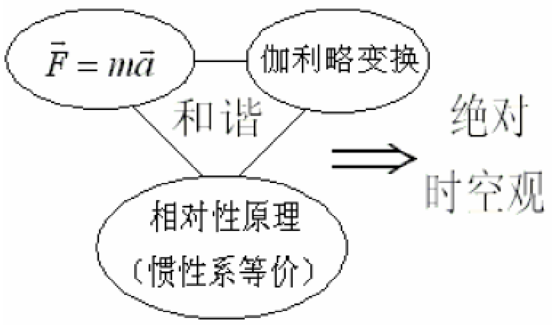
可见，m大则ψ角度小，这表示θ的方向性很强。

第十一章　相对论电动力学

到现在为止，我们已经系统地研究了电磁场理论在不同条件下（静电、静磁、准静、辐射）的表现。然而，这些结果至今仍然是针对某一个特定坐标系成立的。在不同坐标系下的电磁现象之间的关联如何呢？这就是本章的研究内容。

§11.1　狭义相对论的时空观

要想联系不同坐标系下的物理现象，就必须建立正确的时空变换，而后者是建立在一定的时空观下的。我们在本课程中只关心惯性坐标系之间的变换。牛顿在总结其发展的力学规律时得到了如下绝对时空观。



1．绝对时空观

A．相对性原理

物理世界的规律是通过时间和空间坐标来描述的，而物理规律本身应当与（惯性）坐标系的选取无关，这就是说，在不同的惯坐标系中，物理规律表述的形式始终保持不变，这是一个重要的基本假定，称为相对性原理，思想最先由伽利略提出。

B．力学规律

牛顿力学的基本方程是

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (11.1.1)$$

C．伽利略变换

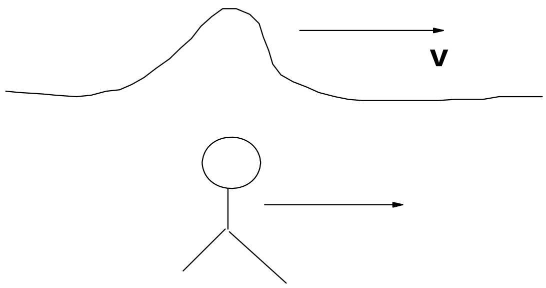
两个相对运动的惯性坐标系 S 和 S' 之间由伽利略变换联系起来，

$$\begin{cases} \vec{r}\,'=\vec{r}-\vec{v}t \\ t'=t \end{cases} \qquad (11.1.2)$$

将（11.1.2）代入（11.1.1）发现力学规律在不同的坐标系中保持相同，因此，牛顿力学，伽利略变换与相对性原理和谐统一。

2．绝对时空观的困难

但是，当人们把绝对时空观应用到电磁理论时遇到了巨大的困难，主要表现在对光的传播规律的描述上。对于经典的力学规律描述的波，如水波，当它在一个坐标系中的速度为 $\vec{u}$ 时，在相对于这个坐标系做匀速运动的另一个坐标系中测出的速度为 $\vec{u}\,'=\vec{u}-\vec{v}$ 。特别是，当 $\vec{u}=\vec{v}$ 时， $\vec{u}\,'=0$ ，即水波不再运动。



电磁波也是一种波，有一个运动速度 c，因此人们自然要问：究竟这个光速 c 是在哪个坐标系中测得的？假设光速为 C 的这个坐标系叫做以太系，是否可以测得地球相对于以太系的运动速度？抑或地球就是那个绝对坐标系？

迈克耳孙和莫雷设计了精妙的干涉实验测量了不同条件下测量点相对于以太系的运动速度。然而实验测不到任何的以太漂移速度。换言之，在任何惯性坐标系中测得的光速是同一个常数 c，与传播方向无关，与光源运动的速度无关。这个结果是惊人的，揭示了描述电磁规律的麦克斯韦方程组，与伽利略变换以及相对性原理不和谐。

3．爱因斯坦的选择

相对性原理、Maxwell 方程以及伽利略变换不和谐，则必须放弃（改造）其中一个使得这三者和谐。爱因斯坦选择保留前面 2 个，放弃伽利略变换。他提出如下两条基本假设：

(1) 相对性原理

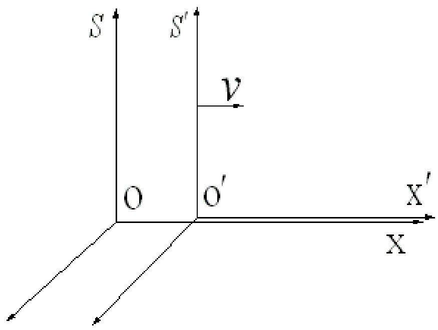
自然规律在不同惯性系中的表达式相同。

(2) 光速不变原理 （选择 Maxwell 方程在一切惯性系中形式不变）

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同。这事实上并非爱因斯坦的假设，而是麦-莫实验所揭示的基本实验事实。在这个基础上，Maxwell 方程组在所有坐标系下都保持不变，人们必须

寻找新的时空变换来替代伽利略变换。

4．洛伦兹变换



基于不同惯性系中测出的光速不变这一假设，洛伦兹提出了他的时空变换。

考虑在$t=t^{'}=0$时，S与$S^{'}$重合，$S^{'}$系相对于S系沿 x 轴以速度v运动。

假设此时从原点发射一束光波，光沿各方向的传播方向都是c。所以t时刻S系中光到达的位置满足

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=c^2t^2} \qquad (11.1.3)$$

存在两事件： 1 发射 $(0,0,0,0)$

2 接收 (x,y,z,t)

在$S^{'}$看来，同样的事件应该用如下时空点描述

1 发射 $(0,0,0,0)$

2 接收 $(x^{'},y^{'},z^{'},t^{'})$

根据光速不变原理，变换后的$(x^{'},y^{'},z^{'},t^{'})$必须满足

$$\boxed{x^{'2}+y^{'2}+z^{'2}=(ct')^2} \qquad (11.1.4)$$

基于变换后满足（11.1.3-4）这个基本约束，数学家洛伦兹提出如下（线性）时空变换：

$$\boxed{\begin{cases} x^{'}=(x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ y^{'}=y \\ z^{'}=z \\ t^{'}=\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases}} \qquad (11.1.5)$$

容易证明，若两个时空点原本满足（11.1.3），则洛仑兹变换后的是空间一定满足（11.1.4）– **也就是说，在$S^{'}$系中观测事件传播的速度仍为c，而且是各向同性的—尽管$S^{'}$相对S沿x轴运动，在$S^{'}$系中看到的速度沿x轴与其它轴没有任何的不同！这个结果相当惊人，因为实施洛伦兹变换时貌似选择打破空间的对称**

性（选择了 v 为 x 方向），然而对测量光速来讲在这个扭曲的时空内没有任何各向异性。

引入一个虚构的由三维实空间和虚的时间轴构成的四维空间（闵可夫斯基空间），一个时空点在这个空间中的表示为

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \qquad (11.1.6)$$

则 Lorentz 变换可以写成

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \qquad (11.1.7)$$

变换矩阵为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad (11.1.8)$$

其中 $\beta = v/c$，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 。容易证明 α 是个正交矩阵，即

$$\alpha \cdot \alpha^T = I, \quad \alpha^{-1} = \alpha^T \qquad (11.1.9)$$

一个直接的结果就是

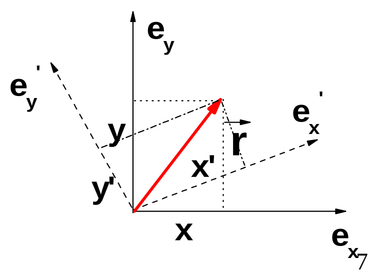
$$x_\mu = \alpha_{\nu\mu} x'_\mu \qquad (11.1.7')$$

§ 11.2 物理规律协变性的数学形式

相对性原理要求物理规律在不同的惯性坐标系下保持不变，而不同惯性系之间的物理量之间的关系由洛伦兹变换给出，***这就要求描述物理规律的物理方程式的形式一定要在 Lorentz 变换下保持不变***。我们下面首先研究不同物理量在 Lorentz 变换是如何变换的。

1．物理量按时空变换性质分类

我们首先将所遇到的各种物理量作一番分类。先考虑大家熟知的三维空间中的一个纯坐标转动变换下，比如将坐标系以 z 轴为转轴转动 θ 角度



（如图所示）。在这个变换下我们看不同的物理量具有怎样的变换关系。比如

(1) 任意一点到原点的空间距离 $r=\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ 在变换下保持不变，这就是一个标量。

(2) 位置矢量 $\vec{r}=\{x_1,x_2,x_3\}$ 经过坐标旋转变换后变成 $\vec{r}\,'=\{x_1',x_2',x_3'\}$，$\{x_1,x_2,x_3\}$ 与 $\{x_1',x_2',x_3'\}$ 两组数之间的变换关系为

$$x_i'=T_{ij}x_i \tag{11.2.1}$$

其中，转动矩阵的形式为

$$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{11.2.2}$$

容易证明，所有三维空间的矢量（$\vec{E},\vec{H},\vec{F}$ 等）的三个分量都满足上面的变换关系。我们把满足（11.2.1）式变换关系的三个数组成的物理量叫做矢量。

（3）同样道理，2 阶张量（如电四极矩 $\vec{\vec{D}}$）中的 9 个元素在坐标变换下满足

$$D_{ij}'=T_{il}T_{jk}D_{lk} \tag{11.2.3}$$

将上面对 3 维坐标变换的定义推广到 4 维时空变换

(1) 标量

一个 Lorentz 变换下保持不变的物理量叫做标量。正交性质（11.1.9）显示：四维矢量的标积是个变换不变量，

$$x_i'x_i'=\alpha_{ij}\alpha_{ik}x_jx_k=x_jx_j \tag{11.2.4}$$

因此这是个“四维标量”。（11.2.4）是光速不变（11.1.3-11.1.4）的另外一种表述方式。通常将两个时空点之间的四维距离

$$\Delta s^2=-\Delta x_\mu\Delta x_\mu=(c\Delta t)^2-|\Delta\vec{r}|^2 \tag{11.2.5}$$

叫做间隔，它描述的是两个事件之间的时空间隔，是个不依赖于惯性系的“标量”。在相对论时空观中，时间空间耦合在一起，单独讨论两个时件的时间和空间间隔都没有意义（依赖于具体的参照系），但“间隔”却是有意义的物理量。

(2) 矢量（一阶张量）

定义一个由四个数量定义的集合$\{V_x, V_y, V_z, V_4\}$，若这些量在 Lorentz 变换下满足与四维坐标一样的变换关系

$$V'_\mu = \alpha_{\mu\nu} V_\nu \tag{11.2.4}$$

则这样的集合称为一个四维矢量（或是一阶张量）

(3) 二阶张量

进一步，若有一物理量用4×4矩阵$T_{\mu\nu}$表示，在坐标变换$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$下，其变换关系为

$$T'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu k}\alpha_{\nu l} T_{kl} \tag{11.2.5}$$

则称此物理量为二阶张量。

（4）几个例子

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$的变换行为为一阶张量

因为 $$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \quad \Rightarrow \quad x_\nu = \left(\alpha^{-1}\right)_{\nu\mu} x'_\mu = \left(\alpha^T\right)_{\nu\mu} x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\mu \tag{11.2.6}$$

故 $$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{11.2.7}$$

上式显示$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right\} = \left\{\nabla, -i\dfrac{\partial_t}{c}\right\}$就是一个四维矢量。

(b) 任意两个四维矢量的标积为四维标量

比如四维间隔就是两个（四维时空位置）矢量的标积。同理，因为$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$是一个矢量，故有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box^2 \tag{11.2.8}$$

即$\Box^2$算符为四维不变量。由此推知，若A_μ为四维矢量，则此矢量的四维散度$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu$为一不变量，即

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \alpha_{\mu\beta} A_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\nu \tag{11.2.9}$$

3．物理规律的协变性

相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在坐标变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变。*如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式。*例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu = B_\mu \tag{11.2.10}$$

式中 A_μ, B_μ 分别代表 S 系中这一物理过程的不同物理量。当把它变换到 S' 系时，由于 A_μ, B_μ 都是一阶张量(即矢量)，其变换规律分别为

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \alpha_{\mu\nu} A_\nu \\ B'_\mu &= \alpha_{\mu\nu} B_\nu \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

故

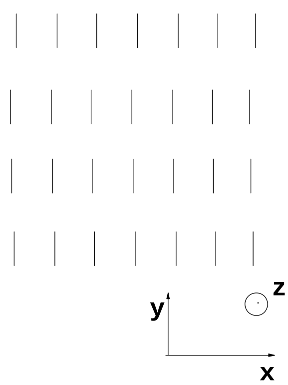
$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu = B'_\mu \tag{11.2.12}$$

由此可见，要判断规律是否满足相对性原理，只要看其物理方程是否为 Lorentz 协变。反之，在我们构造任何新规律时，原则上都应当使其满足 Lorentz 协变。

<u>第二十五讲作业</u>

习题

1） 天线的辐射图案的定向性由如下定向性指标来描述：$D = \dfrac{4\pi}{\Delta\Theta_1 \cdot \Delta\Theta_2}$，其中 $\Delta\Theta_1, \Delta\Theta_2$ 分别为天线辐射主极大在两个相互垂直的方向上的半宽值。如图所示，由 $m \cdot n$ 个半波天线组成的天线阵列，沿 x (y)方向的周期为 a (b)，分别计算天线阵列在 xz 面内的辐射的主极大的宽度的一半（定义为 $\Delta\Theta_1$）以及其在 yz 面内的辐射主极大的宽度的一半（定义为 $\Delta\Theta_2$），并由此计算天线阵列的定向性指标 D。（提示：主极大的峰宽可定义为两个相邻零点之间的角度差）



P. 297, 11.1