东校区 2010 学年度第一学期 10 级《高等数学一》期末考试题

专业 ______________ 学号 ______________ 姓名 ______________ 评分 ______________

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一．完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$.

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin(2xy)}$ $\overset{\text{令 } xy=t}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{\sin 2t} \overset{\text{方法(1)}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+t}}{2\cdot\cos 2t} = \dfrac{1}{2}$.

$\overset{\text{方法(2)}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{2\,\frac{\sin 2t}{2t}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}{\frac{\sin 2t}{2t}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln e}{1} = \dfrac{1}{2}$

3. $y = x\arccos(x^2)$，求 y' $\overset{\text{方法(1)}}{=} 1\cdot\arccos(x^2) + x\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot(x^2)'$

$= \arccos(x^2) - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

方法(2) $dy = \arccos(x^2)\,dx + x\,d\arccos(x^2)$

$= \arccos(x^2)\,dx - x\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \left(\arccos(x^2) - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}\right)dx$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \arccos x^2 - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$.

2011 4/1

4. 设$z+\cos(xy)=e^z$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

方法(1). 由 $z+\cos(x\cdot y)=e^z$, 两边对x求偏导得: $\frac{\partial z}{\partial x}-y\sin(x+y)=e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$(1-e^z)\frac{\partial z}{\partial x}=y\sin(x\cdot y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sin(xy)}{1-e^z}$

方法(2) 设 $F(x,y,z)=z+\cos(xy)-e^z=0$

则 $F_x=-y\sin(xy)$, $F_z=1-e^z$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y\sin(xy)}{1-e^z}$.

5. 设$f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$,求$df(1,11)$.

方法(1)

解: 取对数: $\ln f(x,y,z)=\frac{1}{z}[\ln x-\ln y]=\frac{\ln x-\ln y}{z}$

$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{xz}$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f}{xz}=\frac{\sqrt[z]{\frac{x}{y}}}{xz}$,

$\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{yz}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\sqrt[z]{\frac{x}{y}}}{xz}$

$\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\ln x-\ln y}{z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\ln x-\ln y}{z^2}\cdot\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$

方法(2) $f(x,y,z)=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}\cdot(-\frac{x}{y^2})$

$\frac{\partial f}{\partial z}=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot(-\frac{1}{z^2})$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1)}=0$

所以 $df(1,1,1)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}dx+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}dy+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}dz=1dx-dy-0dz=dx-dy$

方法3: $f_x(1,1,1)=(x)'_x\Big|_{x=1}=1$

$f_y(1,1,1)=(\frac{1}{y})'_y\Big|_{y=1}=-1$

$f_z(1,1,1)=(\sqrt[z]{1})'_z\Big|_{z=1}=0$

6 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

$=2\int\frac{1}{1+x}d\sqrt{x}$

$=2\arctan\sqrt{x}+C$.

7. 求$\int x\ln(1+x)dx$ $=\frac{1}{2}\int \ln(1+x)\,dx^2$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x)-\int x^2\,d\ln(1+x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\cdot\ln(1+x)-\int\frac{x^2}{1+x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\cdot\ln(1+x)-\int\frac{x^2-1+1}{1+x}dx\right]$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1)\,dx-\int\frac{dx}{1+x}$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\ln|1+x|+C$$

8. 求$\int_{-1}^{1}\left(x^2+\arctan x\right)dx$

$$=\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}\arctan x\,dx=\int_{-1}^{1}x^2dx+0$$

$$=2\int_0^1x^2dx=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

注 $\int_{-1}^{1}\arctan x\,dx=0$

因为 $\arctan x$ 为奇函数.

9. 已知$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，求一个同时垂直于$\vec{a},\vec{b}$的向量。[redacted]

$\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

解 由于 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$, 故 $\vec{a}\times\vec{b}$ 即为所求向量.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&3\\2&3&-1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$$

2011/4/1

10. 求$f(x)=\ln(x-1)$在$x=2$处的n阶泰勒公式。

$$f(x)=\ln(x-1)=\ln[1+(x-2)]$$
$$=(x-2)-\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(x-2)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-2)^n}{n}+o\left[(x-2)^n\right]\quad(x\to 2)$$

二．完成下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 求过直线$L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ 2x-3y+z=0\end{cases}$和点$P_0(1,2,3)$的平面方程。

方法(1). 作过直线L的平面束：$x+2y-z+1+\lambda(2x-3y+z)=0$

平面过(1,2,3)，将此点代入上式得：$1+4-3+1+\lambda(2-6+3)=0$，$\lambda=3$.

所求平面为：$x+2y-z+1+3(2x-3y+z)=0$，即 $7x-7y+2z+1=0$

方法(2) 联立方程有解$A(1,4,10)$，因为P_0在L上，L方向$\vec{L}=(1,2,-1)\times(2,-3,1)$

$\vec{AP_0}=(0,-2,-7)$，所求平面法方向 $\vec{n}=\vec{L}\times\vec{AP_0}=(7,-7,2)$ $=(-1,-3,-7)$

平面为：$7(x-1)-7(y-2)+2(z-3)=0$

2. 设$u=f(x,xy,xyz)$，其中f有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

$7x-7y+2z+1=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+y\cdot f_2'+yz\cdot f_3'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[f_1'+y\cdot f_2'+yz\cdot f_3']$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}f_1'+\frac{\partial}{\partial y}(y\cdot f_2')+\frac{\partial}{\partial y}(y\cdot z\cdot f_3')$$
$$=f_{12}''\cdot x+f_{13}''\cdot xz+f_2'+y[f_{22}''\cdot x+f_{23}''\cdot xz]+zf_3'+yz[f_{32}''\cdot x+f_{33}''\cdot xz]$$
$$=x\cdot f_{12}''+xzf_{13}''+f_2'+xyf_{22}''+xyzf_{23}''+zf_3'+xyzf_{32}''+xyz^2f_{33}''$$
$$=x\cdot f_{12}''+xz\cdot f_{13}''+f_2'+xyf_{22}''+zf_3'+xyz(f_{23}''+f_{32}'')+xyz^2f_{33}''$$

3. 求函数$z = x e^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数。

解: $\vec{l} = \overrightarrow{PQ} = (1,-1)$, $\vec{l}^0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos\alpha, \cos\beta)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x \cdot e^{2y}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} \cdot \cos\alpha + \left.2x \cdot e^{2y}\right|_{(1,0)} \cdot \cos\beta$$

$$= e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot e^0 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. 求函数$u = \sin x \sin y \sin z$在条件$x + y + z = \frac{\pi}{2} (x > 0, y > 0, z > 0)$下的极值和极值点。

解 设 $F(x,y,z,\lambda) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$

$$\begin{cases} F_x = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z + \lambda \stackrel{令}{=} 0 \\ F_y = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin z + \lambda \stackrel{令}{=} 0 \\ F_z = \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z + \lambda \stackrel{令}{=} 0 \\ F_\lambda = x+y+z-\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

从而, $\cos x \cdot \sin y \cdot \sin z = \sin x \cdot \cos y \sin z = \sin x \sin y \cdot \cos z = -\lambda$.

得 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin z}{\cos z}$, 即 $\tan x = \tan y = \tan z$

从而 $x=y=z$ 代入 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

得 $3x=3y=3z=\frac{\pi}{2}$, $x=y=z=\frac{\pi}{6}$

极值点为 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

极值为 $u(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}) = (\sin\frac{\pi}{6})^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

2011 4/1

5. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ **在原点** $(0,0)$ **不连续，但它在该点可微。**

解：① 由定义，$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x^2+0^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}=0$

② 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(-1)\cdot\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\neq 0.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)\xlongequal{y=x}\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$，(不存在)

$$=0-\infty=-\infty$$

所以，$f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续。

同理，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 也不连续。

③ 又 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

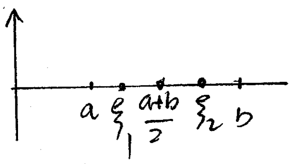
$=0$

从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

6. 设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **连续，在** (a,b) **二阶可导，证明存在** $\eta\in(a,b)$**，使得下式成立**

$$f(b)+f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)。$$

证



证：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 二阶可导，

从而由拉格朗日中值定理可得：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)=f'(\xi_1)\cdot\left(\frac{a+b}{2}-a\right)=f'(\xi_1)\cdot\frac{(b-a)}{2} \quad ①$$

$a<\xi_1\leq\dfrac{b+a}{2}$ ✓

$$f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(\xi_2)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)=f'(\xi_2)\cdot\frac{(b-a)}{2} \quad ②$$

$\dfrac{b+a}{2}\leq\xi_2<b.$

② − ① 得 $f(b)+f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\dfrac{(b-a)}{2}$

再由拉格朗日中值定理：

$=f''(\eta)\cdot(\xi_2-\xi_1)\cdot\dfrac{(b-a)}{2}$，$\left(\dfrac{b+a}{2}-a\leq\xi_2-\xi_1\leq b-\dfrac{b+a}{2}\right.$

$\dfrac{b-a}{2}\leq\xi_2-\xi_1\leq\dfrac{b-a}{2}$

即 $f''(\eta)\cdot\dfrac{(b-a)}{2}\cdot\dfrac{(b-a)}{2}=f''(\eta)\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$ 其 $b<\xi_1<\eta\leq\xi_2<a$