

第四章 解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点*

目录

§1 解析函数的 Laurent 展开	66
§1.1 双边幂级数	66
§1.2 解析函数的 <i>Laurent</i> 展开	67
§1.3 展开实例	69
§2 解析函数的零点与孤立奇点	70
§2.1 解析函数的零点	70
§2.2 解析函数的孤立奇点及其分类	72
§3 各种孤立奇点的判断	72
§3.1 可去奇点	72
§3.2 极点	73
§3.3 本性奇点	74
§4 *无穷远点	75
补充习题	77

*© 1992–2018 林琼桂

本讲义是中山大学物理学院学生学习数学物理方法课程的参考资料，由林琼桂编写制作，欢迎任何个人复制用于学习或教学参考，欢迎批评指正，请勿用于出售。

本章研究解析函数的 Taylor 展开式的推广, 即 Laurent 展开式. 它是研究解析函数的奇点的重要工具.

§1 解析函数的 Laurent 展开

§1.1 双边幂级数

考虑两个级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (1)$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (2)$$

级数 (1) 即是上章研究的幂级数, 它和级数 (2) 之和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (3)$$

称为双边幂级数.

假设级数 (1) 的收敛半径为 R ($0 < R \leq +\infty$), 则它在圆 $|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛, 并具有解析的和函数, 记作 $f_1(z)$. 对于级数 (2), 令 $\zeta = 1/(z-a)$, 则可改写为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n,$$

假设它的收敛半径为 $1/r$ ($0 < 1/r \leq +\infty$), 则它在圆 $|\zeta| < 1/r$ 上绝对收敛且内闭一致收敛, 并具有解析的和函数. 换句话说, 级数 (2) 当 $|z-a| > r$ ($0 \leq r < +\infty$) 时绝对收敛且内闭一致收敛, 并具有解析的和函数, 记作 $f_2(z)$.

若 $r > R$, 则级数 (1) 和 (2) 没有公共收敛区域, 因而双边幂级数 (3) 处处发散.

例 1 双边幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 1/z^n$ 的正幂部分在圆 $|z| < 1/2$ 内绝对收敛, 负幂部分在单位圆外 $|z| > 1$ 绝对收敛. 所以原双边幂级数处处发散.

若 $r = R$, 则级数 (1) 和 (2) 亦没有公共收敛区域. 但在圆周 $|z-a| = R = r$ 上可能存在收敛点.

例 2 双边幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n/n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 z^n$ 的正幂部分在单位圆内 $|z| < 1$ 绝对收敛, 负幂部分在单位圆外 $|z| > 1$ 绝对收敛. 所以原双边幂级数没有公共收敛区域, 但它在单位圆周 $|z| = 1$ 上绝对收敛.

若 $r < R$, 级数 (1) 和 (2) 有公共的收敛区域, 即环域

$$H: \quad r < |z-a| < R \quad (0 \leq r < R \leq +\infty).$$

这时, 根据上章的 Weierstrass 定理, 有如下

定理 双边幂级数 (3) 具有下列性质:

(1) 在收敛环 H 内绝对收敛于 $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, 且在闭环: $r < \rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2 < R$ 上一致收敛 (即在 H 上内闭一致收敛);

(2) 和函数 $f(z)$ 在 H 内解析;

(3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在 H 内可以逐项求导和逐项积分.

例 3 双边幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (z/2)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (z/2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 1/z^n$ 的正幂部分在圆 $|z| < 2$ 内绝对收敛于函数 $2/(2-z)$, 负幂部分在单位圆外 $|z| > 1$ 绝对收敛于函数 $1/(z-1)$. 所以原双边幂级数在环域 $H: 1 < |z| < 2$ 中绝对收敛于函数 $-z/(z-1)(z-2)$. 容易看出, 该和函数在 H 中解析.

§1.2 解析函数的 Laurent 展开

由上面的分析, 双边幂级数在收敛环内具有解析的和函数, 换句话说, 它在收敛环内代表一个解析函数. 反过来, 在环域内解析的函数是否可以展开为双边幂级数呢? 下面的定理给出了肯定的答案.

定理 (Laurent) 设函数 $f(z)$ 在环域 $H: r < |z-a| < R$ ($0 \leq r < R \leq +\infty$) 内解析, 则在 H 内可以展开为双边幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad (4)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

而 Γ 是环内包围内圆的任一围线. 且展开式是唯一的.

式 (4) 称为 $f(z)$ 在 a 点的 *Laurent* 展开式, 右边称为 *Laurent* 级数, 式 (5) 称为 *Laurent* 系数.

注 ① Laurent 定理在形式上与 Taylor 定理非常相似, 证明的方法也相似 (参见以下详细的证明). 了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的. ② 一般来说, 即使正幂项的系数也不能表示为高阶导数的形式. 这是因为 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leq r$ 上有奇点, 所以在 Γ 上的积分不满足应用 Cauchy 高阶导数公式的条件. ③ 如果 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leq r$ 上确实没有奇点, 那么它就在圆 $|z-a| < R$ 上解析, 这时 Laurent 级数应该退化为 Taylor 级数. 事实上, 这时有

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = 0, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

其中最后一步用了 Cauchy 积分定理, 因为被积函数中的两个因子均在 Γ 所包围的闭域上解析. 可见 Taylor 级数是 Laurent 级数的特殊情况. ④ 一般情况下, 展开式中有负幂项, 因为 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leq r$ 上有奇点. 但是, $f(z)$ 的奇点不一定在 a . 所以, 不要因为

展开式中有 $z - a$ 的负幂项就误以为 a 是 $f(z)$ 的奇点. 例如, 当 $1 < |z| < +\infty$ 时, 有

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}.$$

展开式中全是 z 的负幂项, 但 $z = 0$ 并不是被展开函数的奇点. 这是因为展开式在 $z = 0$ 附近并不成立. ⑤ 知道了展开式的唯一性, 我们就可以用任何方法来求展开式, 而不一定要用式 (5) 来计算系数. 最常用的方法是利用已知的 Taylor 级数展开式. 具体方法参见下面的展开实例.

下面给出 Laurent 定理的

证明 $\forall z \in H$, 在 H 内作圆周 $\Gamma_1: |\zeta - a| = \rho_1$ 和 $\Gamma_2: |\zeta - a| = \rho_2$, 使得 $r < \rho_1 < |z - a| < \rho_2 < R$. 由于 $f(\zeta)$ 在闭环 $\rho_1 \leq |\zeta - a| \leq \rho_2$ 上解析, 故由 Cauchy 积分公式, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta,$$

其中积分皆沿曲线的正方向进行. 对于第一项, 仿照 Taylor 定理的证明, 易得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

对于第二项, 由于 $|\zeta - a| < |z - a|$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} &= \frac{f(\zeta)}{(z - a) - (\zeta - a)} = \frac{f(\zeta)}{z - a} \frac{1}{1 - (\zeta - a)/(z - a)} = \frac{f(\zeta)}{z - a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} (z - a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n. \end{aligned}$$

上式右边在 Γ_1 上一致收敛, 故可逐项积分, 而得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = -1, -2, \dots$$

设 Γ 为 H 中包围内圆的任一围线, 由 Cauchy 积分定理, 有

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

综合以上结果, 即得式 (4) 和式 (5).

下面证明展开式的唯一性. 设有另一展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z - a)^n,$$

两边乘以 $(z-a)^{-m-1}$, 得

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-a)^{n-m-1}.$$

在 Γ 上积分, 由于右边在 Γ 上一致收敛, 故可逐项积分, 利用第二章例题结果, 右边积分只有一项不为零, 即

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \int_{\Gamma} (z-a)^{n-m-1} dz = 2\pi i c'_m,$$

所以

$$c'_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta = c_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

这就证明了唯一性. 证毕.

§1.3 展开实例

例 4 在 $a=0$ 处展开 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 为 Laurent 级数.

解 $f(z)$ 有奇点 $z=0$ 和 $z=1$, 故分别在 $H_1: 0 < |z| < 1$ 和 $H_2: 1 < |z| < +\infty$ 上解析. 在 H_1 上,

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n.$$

在 H_2 上,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{z^n}.$$

例 5 在 $0 < |z| < +\infty$ 中可展开 $\cosh(z+1/z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, 试证 $c_{-n} = c_n$, $c_{2n-1} = 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

解 在原式中令 $z=1/\zeta$, 可得

$$\cosh\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \zeta^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n, \quad 0 < |\zeta| < +\infty.$$

把自变量重新写作 z , 则有

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

与原式比较, 利用展开式的唯一性, 即得

$$c_{-n} = c_n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

另一方面, 在原式中令 $z=-\zeta$, 可得

$$\cosh\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n c_n \zeta^n, \quad 0 < |\zeta| < +\infty.$$

把自变量重新写作 z , 则有

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n c_n z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

与原式比较, 利用展开式的唯一性, 即得

$$c_n = (-)^n c_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

考虑到 $c_{-n} = c_n$, 独立的结论有

$$c_{2n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

最后, 展开式可以写成

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right), \quad 0 < |z| < +\infty,$$

其中 c_{2n} 可用积分表出, 这里从略. 以上结论也可以用系数的积分公式证明, 但比较麻烦.

例 6 求函数 $f(t) = e^{(z/2)(t-1/t)}$ 在 $0 < |t| < +\infty$ 中的 Laurent 展开式, 其中 z 是参数.

解 暂略.

习题 将下列各函数在指定的环域内展开为 Laurent 级数. (1) $1/z^2(z-1)$, $0 < |z-1| < 1$; (2) $(z-1)(z-2)/(z-3)(z-4)$, $4 < |z| < \infty$; (3) $\cot z$, $0 < |z| < \pi$ (计算三个非零项).

§2 解析函数的零点与孤立奇点

§2.1 解析函数的零点

为了后面讨论的需要, 这里简单介绍一下解析函数的零点的概念.

定义 (m 阶零点) 若函数 $f(z)$ 在 a 点解析, 且 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$, 而 $f^{(m)}(a) \neq 0$, 则 a 称为 $f(z)$ 的 m 阶零点. 一阶零点亦称为单零点.

注 $f(z)$ 在 a 点解析, 即在某圆 $K: |z-a| < R$ 内解析, 在该圆内, $f(z)$ 可展开为 Taylor 级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, 其中 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. 如果所有的系数均为零, 则 $f(z)$ 在 K 内恒为零. 若 $f(z)$ 在 K 内不恒为零, 则上述定义中的 m 值总是存在的.

例 1 $f(z) = \sin z$ 的零点为 $z_n = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). 由于 $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-)^n \neq 0$, 故所有的 z_n 均为单零点.

例 2 显然 $z = 0$ 是函数 $f(z) = z - \sin z$ 的零点. 由于 $f'(0) = (1 - \cos z)|_{z=0} = 0$, $f''(0) = \sin z|_{z=0} = 0$, 而 $f'''(0) = \cos z|_{z=0} = 1 \neq 0$, 故 $z = 0$ 是 $f(z)$ 三阶零点.

例 3 $f(z) = (z-a)^m$, $m \in \mathbb{N}^+$. 显然 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

例 4 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 a 点解析且 $\varphi(a) \neq 0$. 显然 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

多项式是最简单的解析函数. 如果 a 是多项式 $P_n(z)$ 的 m 重根 ($m \leq n$), 则有 $P_n(z) = (z-a)^m Q_{n-m}(z)$, 其中 $Q_{n-m}(z)$ 是 $n-m$ 次多项式, 且 $Q_{n-m}(a) \neq 0$. 容易验证, $P_n(z)$ 在 a 点满足以上条件, 所以 a 是 $P_n(z)$ 的 m 阶零点. 一般解析函数的 m 阶零点是多项式 m 重根的推广. 所以, 类似于多项式的情况, 有以下

定理 (m 阶零点) 若函数 $f(z)$ 在 a 点的邻域 $K: |z-a| < R$ 内解析且不恒为零, 则 $f(z)$ 以 a 为 m 阶零点的充要条件是 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$.

证明 充分性. 若 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, 且 $\varphi(a) \neq 0$, 则容易验证 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$, 而 $f^{(m)}(a) = m! \varphi(a) \neq 0$, 故 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

必要性. $f(z)$ 在 K 内解析, 故可展开为 Taylor 级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, 其中 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. 由于 a 是 m 阶零点, 故 $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$, 而 $c_m \neq 0$, 所以

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m} = (z-a)^m \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+m} (z-a)^k \equiv (z-a)^m \varphi(z).$$

显然 $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+m} (z-a)^k$ 在 K 内解析 (注意 $\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 只相差一个因子 $(z-a)^m$, 且没有奇性), 且 $\varphi(a) = c_m \neq 0$. 证毕.

由上面的定理容易推出零点的孤立性, 即有下面的

定理 (零点的孤立性) 若函数 $f(z)$ 在 a 点的邻域 $K: |z-a| < R$ 内解析且不恒为零, a 是 $f(z)$ 的零点, 则必存在邻域 $K': |z-a| < r$, 在其中 $f(z)$ 只有 a 一个零点.

证明 由于 $f(z)$ 在 K 内解析, 故可展开为 Taylor 级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, 其中 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. 如果所有的系数均为零, 则 $f(z)$ 在 K 内恒为零, 这与假设矛盾. 故必存在 $m \in \mathbb{N}^+$, 使得 a 满足 m 阶零点的条件. 按以上定理, 必有 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$. 由于 $\varphi(z)$ 连续, 故存在邻域 $K': |z-a| < r$, 在其中 $\varphi(z) \neq 0$, 从而 $f(z)$ 在其中只有 a 一个零点. 证毕.

这一定理有一个重要的

推论 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在 D 内有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 满足 $z_n \neq a$, $z_n \rightarrow a \in D$, $f(z_n) = 0$, 则在 D 内 $f(z) \equiv 0$.

证明 由于 $f(z)$ 连续, 易得 $f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = 0$, 故 a 是 $f(z)$ 的非孤立零点. 由上述定理, 在 a 点的某邻域 $K: |z-a| < R$ 内必有 $f(z) \equiv 0$, 只要 $K \subset D$. 如果 D 本身就是 a 点的邻域, 或者 D 是复平面, 则结论得证. 否则, 设 $b \neq a$ 是 D 内任一点, 只需证明 $f(b) = 0$ 即可. 今在 D 内作折线 L 连接 a 和 b , 设 L 与 $C = \partial D$ 的最小距离为 d ($d > 0$). 在 L 上由 a 至 b 取分点 a_1, a_2, \dots, a_m , 使 $|a_1 - a| = |a_2 - a_1| = \cdots = |a_m - a_{m-1}| = R/2$, 而 $|b - a_m| \leq R/2$, 其中 $0 < R < d$. 考虑一系列圆 $K: |z-a| < R$ 和 $K_i: |z-a_i| < R$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 它们都在 D 内. 如上所述, 在 K 内必有 $f(z) \equiv 0$. 按分点的取法, a_1 落在 K 内, 且是 $f(z)$ 的非孤立零点, 故可推知在 K_1 内必有 $f(z) \equiv 0$, 继续同样的推理, 最后可得在 K_m 内必有 $f(z) \equiv 0$, 而 b 落在 K_m 内, 故 $f(b) = 0$. 证毕.

由这一推论, 马上可以推出非常重要的唯一性定理:

定理 (解析函数的唯一性) 若函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 均在区域 D 内解析, 在 D 内有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 满足 $z_n \neq a$, $z_n \rightarrow a \in D$, $f_1(z_n) = f_2(z_n)$, 则在 D 内必有 $f_1(z) = f_2(z)$.

证明 令 $F(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 则 $F(z)$ 在区域 D 内解析, 且在点列 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 上有 $F(z_n) = 0$, 根据以上推论, 在 D 内必有 $F(z) \equiv 0$, 从而 $f_1(z) = f_2(z)$. 证毕.

唯一性定理表明, 解析函数在区域 D 内一个点列上的取值, 就完全决定了它在区域 D 内的形式. 这里我们再次看到, 解析性对于函数值的分布给予了极大的限制. 如果将定理中的点列改为区域 D 内的一个弧段或子区域, 定理当然还是成立的. 下面是应用唯一性定理的例子.

例 5 函数 $\sin 2z$ 和 $2 \sin z \cos z$ 均在复平面上解析, 而在实轴上有 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, 由唯一性定理, 在复平面上必有 $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$. 按照这种方式, 可以将实变函数中的许多恒等式推广到复变函数中.

例 6 上章介绍了解析开拓的基本概念, 并且指出, 如果区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 可以解析开拓到 G ($G \supset D$), 则结果是唯一的. 现在用唯一性定理容易证明这一结论. 事实上, 如果 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 都是 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓, 由于在 G 的子区域 D 上必须有 $F_1(z) = F_2(z) = f(z)$, 根据唯一性定理, 在 G 内必有 $F_1(z) = F_2(z)$.

§2.2 解析函数的孤立奇点及其分类

定义 (孤立奇点) 如果函数 $f(z)$ 以 a 为奇点, 但在 a 的某去心邻域 $K \setminus \{a\}$: $0 < |z - a| < R$ 中解析, 则 a 称为 $f(z)$ 的孤立奇点 (isolated singularity).

粗略地说, 如果函数 $f(z)$ 以 a 为奇点, 但在 a 附近没有别的奇点, 则 a 就是 $f(z)$ 的孤立奇点. 所以这一定义是非常直观的.

去心邻域 $K \setminus \{a\}$: $0 < |z - a| < R$ 是内半径为零的环域, $f(z)$ 在其中解析, 则可以展开为 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n.$$

展开式中的正幂部分, 即 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ 称为正则部分, 而负幂部分, 即 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} / (z - a)^n$ 称为主要部分. 由于现在展开式在 a 点附近成立, 故其中负幂项的多少可以刻画 $f(z)$ 在 a 点的奇性的大小. Laurent 展开式的主要用途正在于此. 根据主要部分的不同情况, 我们有如下

定义 (孤立奇点的分类) (1) 如果主要部分为零, 则 a 称为 $f(z)$ 的可去奇点 (removable singularity). (2) 如果主要部分为 $\sum_{k=1}^m c_{-k} / (z - a)^k$, 其中 $c_{-m} \neq 0$, 则 a 称为 $f(z)$ 的 m 阶极点 (pole). $m = 1$ 时亦称为单极点. (3) 如果主要部分有无穷多项, 则 a 称为 $f(z)$ 的本性奇点 (essential singularity).

§3 各种孤立奇点的判断

§3.1 可去奇点

先看看下面的例子.

例 1 函数 $\sin z / z$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析, 故可以展开为 Laurent 级数:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}. \quad (6)$$

由于展开式的主要部分为零, 按定义, $z = 0$ 是可去奇点. 如果只看右边的幂级数, 易知其收敛半径为 $+\infty$, 故它在复平面上解析, 包括 $z = 0$ 点. 由于函数

$$f(z) = \begin{cases} \sin z / z, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

在整个复平面上与式 (6) 右边的幂级数相等, 故 $f(z)$ 在复平面上解析, 包括 $z = 0$ 点. 这就是说, 只要对原来的函数 $\sin z / z$ 适当补上 $z = 0$ 处的定义, 即可构造出一个解析函数. 所以 $z = 0$ 称为可去奇点是非常恰当的. 一般情况下, 只要令 $f(a) = c_0$ 即可将可去奇点 a 变为解析点.

下面的定理用于判断可去奇点.

定理 (可去奇点) 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为可去奇点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b (\neq \infty)$.

证明 必要性. 按定义, 此时 Laurent 展开式没有负幂项, 即

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R.$$

显然, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 (\neq \infty)$.

充分性. 此时 $f(z)$ 在 a 的某去心邻域 $K: 0 < |z-a| < R_0$ 内有界: $|f(z)| < M$. (事实上, 按极限定义, 取 $\epsilon = 1$, $\exists R_0$, 当 $0 < |z-a| < R_0$, 有 $|f(z) - b| < 1$, 则 $|f(z)| < |b| + 1$.) 按公式 (5), Laurent 展开式的负幂项系数

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

其中 $\rho > 0$ 可以任取, 但不超过展开环域的外半径. c_{-n} 实际上与 ρ 的大小无关, 取 $0 < \rho < R_0$, 则易得

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta \right| < \frac{M}{2\pi} \rho^{n-1} \int_{|\zeta-a|=\rho} |d\zeta| = M\rho^n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

最后, 令 $\rho \rightarrow 0$, 则得 $c_{-n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$). 所以, 展开式的主要部分为零, 即 a 是可去奇点. 证毕.

下面是关于可去奇点的一个更一般的

定理 若 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列三命题等价:

- (1) $f(z)$ 在 a 的主要部分为零, 即 a 为可去奇点;
- (2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b (\neq \infty)$;
- (3) $f(z)$ 在 a 的某去心邻域内有界.

这类定理的证明方式是 (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). 本定理的具体证明基本上已包含在上一定理的证明中, 故从略.

§3.2 极点

先看一个简单的例子.

例 2 函数 e^z/z 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析, 故可以展开为 Laurent 级数:

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}. \quad (7)$$

由于展开式的主要部分有一项, 按定义, $z=0$ 是单极点.

判断极点, 主要用下面的

定理 (m 阶极点) 若 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列三命题等价:

- (1) $f(z)$ 在 a 的主要部分为 $\sum_{k=1}^m c_{-k}/(z-a)^k$ (其中 $c_{-m} \neq 0$), 即 a 为 m 阶极点;
- (2) $f(z)$ 在 a 的某去心邻域内可表为 $f(z) = \varphi(z)/(z-a)^m$, 其中 $\varphi(z)$ 在 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$;
- (3) $g(z) = 1/f(z)$ 以 a 为 m 阶零点.

注 其中第一条是 m 阶极点的定义, 其它两条也很直观. 下面的证明供有兴趣的读者参考.

证明 (1) \Rightarrow (2). 在 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^{-m} \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^{n+m} = (z-a)^{-m} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m}(z-a)^k \equiv \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}.$$

其中 $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m}(z-a)^k$ 是 Taylor 级数, 且收敛半径不为零 (否则 $\varphi(z)$ 除 $z=a$ 外处处发散, 由上式, $f(z)$ 在 a 的任一去心邻域内发散, 与假设矛盾), 故在 a 点解析, 且 $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$.

(2) \Rightarrow (3). 由已知条件, 得 $g(z) = (z-a)^m/\varphi(z)$. 因为 $\varphi(z)$ 在 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$, 故在 a 的某邻域内 $\varphi(z) \neq 0$, 在该邻域内 $1/\varphi(z)$ 亦解析, 且显然 $1/\varphi(a) \neq 0$. 根据 §2 的定理, a 是 $g(z)$ 的 m 阶零点.

(3) \Rightarrow (1). 根据 §2 的定理, 有 $g(z) = (z-a)^m\psi(z)$. 其中 $\psi(z)$ 在 a 解析且 $\psi(a) \neq 0$, 故在 a 的某邻域内 $\psi(z) \neq 0$, 在该邻域内 $1/\psi(z)$ 亦解析, 故可展开为 Taylor 级数: $1/\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-m}(z-a)^n$, 其中系数的写法是为了下面的方便. 于是

$$f(z) = \frac{(z-a)^{-m}}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-m}(z-a)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

其中 $c_{-m} = 1/\psi(a) \neq 0$. 所以 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点. 证毕.

下面就用以上定理来分析几个实例.

例 3 再回头看例 2 的函数 e^z/z , 由于 e^z 解析, 且 $e^0 = 1 \neq 0$, 根据定理的第二条, $z=0$ 是该函数的单极点.

例 4 考虑函数 $\cot z = \cos z/\sin z$, 易知 $z = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) 都是其孤立奇点, 而且它们都是 $1/\cot z = \sin z/\cos z$ 的单零点, 根据定理的第三条, $z = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) 都是 $\cot z$ 的单极点.

例 5 考虑函数 $f(z) = 1/(z - \sin z)$, 由 §2 例 2 知 $z=0$ 是 $z - \sin z$ 的三阶零点, 根据定理的第三条, $z=0$ 是 $f(z)$ 三阶极点.

由上述定理, 容易得到以下

推论 (极点的判定) 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为极点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

这一推论主要用来判定一个孤立奇点是否极点, 若要进一步判定其阶数, 就需要用上面的定理.

§3.3 本性奇点

由前面关于可去奇点和极点的讨论, 容易得到以下判定本性奇点的

定理 (本性奇点) 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 不存在, 即不为有限值, 亦不为 ∞ .

这说明在本性奇点处极限 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 与 $z \rightarrow a$ 的方式有关.

例 6 函数 $e^{1/z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析, 故可以展开为 Laurent 级数:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

展开式的主要部分有无穷多项, 按定义, $z = 0$ 是本性奇点. 当 $z = x$, 容易知道

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0,$$

可见极限 $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ 不存在.

实际上, 关于本性奇点, 有下述

定理 (Weierstrass) 若 a 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则对任意复数 A (有限或无穷), 都有点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

证明 首先, 如果 $A = \infty$, 必能找到所要求的点列. 否则, 必存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 当 $0 < |z - a| < \delta$, 有 $|f(z)| < M$, 如此, 则 a 为可去奇点, 与假设矛盾.

其次, 对任何有限的 A , 亦必能找到所要求的点列. 否则, 必有 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 当 $0 < |z - a| < \delta$, 有 $|f(z) - A| \geq \epsilon$, 于是 $1/[f(z) - A]$ 在 $0 < |z - a| < \delta$ 内解析, 且 $1/|f(z) - A| \leq 1/\epsilon$, 如此, 则 a 为 $1/[f(z) - A]$ 的可去奇点, 而有

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z) - A} = B,$$

其中 B 为有限的复数. 若 $B = 0$, 则得 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, 从而 a 为极点; 若 $B \neq 0$, 则得 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A + 1/B$, 从而 a 为可去奇点, 均与假设矛盾. 证毕.

这一定理是 Weierstrass 在 1876 年给出的, 它表明, 在本性奇点附近, 函数值可以无限接近于任何事先给定的复数, 包括 ∞ . 1879 年, Picard 给出了下述更为精密的

定理 (Picard) 若 a 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则除去可能的一个例外值 A_0 , 对于任意的有限复数 A , 都有点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 使 $f(z_n) = A$.

这一定理表明, 在本性奇点附近, 函数值可以无限次地取得任何事先给定的有限复数, 最多有一个例外值 (称为 Picard 例外值). 可见, 在本性奇点附近, 分布着非常丰富的函数值, 而且是 “取之不尽, 用之不竭” 的.

例 7 由例 6 知道, $z = 0$ 是函数 $f(z) = e^{1/z}$ 的本性奇点. 对任意的有限复数 $A \neq 0$, 存在点列 $z_n = 1/(\ln A + i2\pi n)$ (其中 $n \in \mathbb{N}^+$), 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, $f(z_n) = A$. 由于 $e^{1/z} \neq 0$, 故 $A_0 = 0$ 是 Picard 例外值. 但存在点列 $z_n = -1/n$ (其中 $n \in \mathbb{N}^+$), 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$. 另外, 存在点列 $z_n = 1/n$ (其中 $n \in \mathbb{N}^+$), 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$.

习题 指出下列函数在 z 平面上的奇点及其类型:

$$(1) f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}, \quad (2) f(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{e^z - 1}.$$

§4 *无穷远点

由于函数在无穷远点没有定义, 所以无穷远点总是一个奇点. 我们关心的是, 什么情况下, 无穷远点是孤立奇点? 下面是一个非常直观的

定义 如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内解析, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

在 ∞ 是孤立奇点的情况下, 我们可以作变换 $t = 1/z$, 将 $z = \infty$ 化作 $t = 0$ 来研究. 若 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内解析, 则 $f(1/t)$ 在 $0 < |t| < 1/R$ (若 $R = 0$, 则令 $1/R = +\infty$) 内解析, 即 $t = 0$ 是 $f(1/t)$ 的孤立奇点. 于是有以下

定义 如果 $t = 0$ 是 $f(1/t)$ 的可去奇点, m 阶极点或本性奇点, 则相应地称 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, m 阶极点或本性奇点.

由于 $f(1/t)$ 在 $0 < |t| < 1/R$ 内解析, 故可展开为 Laurent 级数:

$$f(1/t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n,$$

展开式的主要部分是 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}/t^n$, 换回自变量 z , 就是说, $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内的 Laurent 展开式的主要部分是 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n$. 由此可见:

如果 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内的 Laurent 展开式没有正幂项;

如果 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内的 Laurent 展开式的正幂部分为 $\sum_{k=1}^m c_{-k} z^k$ (其中 $c_{-m} \neq 0$);

如果 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内的 Laurent 展开式有无穷多正幂项.

这些结果表明以上的定义是恰当的, 因为在 ∞ 附近, 正幂项的多少才体现奇性的大小.

如果 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 我们也说 $f(z)$ 在 ∞ 解析. 所以, 所谓 $f(z)$ 在 ∞ 解析, 无关乎 $f(z)$ 在 ∞ 的导数, 事实上, 我们从未定义过 $f(z)$ 在 ∞ 的导数.

例 1 函数 $f(z) = 1/(z-1)$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点, 因为 $f(1/t) = 1/(1/t-1) = t/(1-t)$ 以 $t = 0$ 为可去奇点. 另一方面, 在 ∞ 的去心邻域内, 即当 $1 < |z| < +\infty$, 有 Laurent 展开式

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n},$$

它没有正幂项, 这正是可去奇点的特征.

例 2 n 次多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (其中 $a_n \neq 0$) 以 $z = \infty$ 为 n 阶极点, 因为 $P_n(1/t) = \sum_{k=0}^n a_k/t^k$ 以 $t = 0$ 为 n 阶极点. 另一方面, 多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 本身已具有 z 的 Laurent 级数的形式 (在复平面上, 即 $|z| < +\infty$ 成立), 它只有正幂项, 且最高正幂项为 $a_n z^n$, 正是 n 阶极点的特征.

例 3 指数函数 e^z 以 $z = \infty$ 为本性奇点, 因为 $e^{1/t}$ 以 $t = 0$ 为本性奇点. 另一方面, 在复平面上, 即 $|z| < +\infty$, 有 $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$, 这是通常的 Taylor 展开式, 但它也是 ∞ 的去心邻域内的 Laurent 展开式, 它有无穷多正幂项, 这正是本性奇点的特征.

例 4 $f(z) = \cot z$ 以 $z = \infty$ 为非孤立奇点, 因为 $z_n = n\pi$ (其中 $n \in \mathbb{Z}$) 是其单极点, 而 $z_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). (参看上节例 4.)

补充习题

1. 将下列各函数在指定的环域内展开为 Laurent 级数.

(a) $1/(z-a)(z-b)$ (其中 $b \neq a$), $|b-a| < |z-a| < \infty$;

(b) $1/(z-a)(z-b)$ (其中 $b \neq a$), $0 < |z-a| < |b-a|$;

(c) $e^{1/(1-z)}$, $1 < |z| < \infty$ (计算五个非零项);

(d) $1/(z^2 - 3z + 2)$, $1 < |z| < 2$;

(e) $1/(z^2 - 3z + 2)$, $2 < |z| < \infty$.

2. 研究下列函数在 z 平面上的奇点及其类型.

(a) $z^2/(e^z - 1)$;

(b) $\cot \pi z/(z - 1)$;

(c) $(\sin z - z)/z^3$;

(d) $(e^{az} - e^{bz})/z^2$ (其中 $b \neq a$);

(e) $\cos(1/z^2)$;

(f) $1/\cos z$.