第四章　随机变量的 6 大数字特征

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

随机变量的数学期望（均值）、方差、标准差及其性质　随机变量函数的数学期望　矩、协方差、相关系数及其性质

考试要求

1．理解随机变量数字特征（数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数）的概念，会运用数字特征的基本性质，并掌握常用分布的数字特征。

2．会求随机变量函数的数学期望。

$\boxed{\text{考点导读}}$ 数学期望 EX；方差 DX；协方差 $Cov(X,Y)$ 或 σ_{XY}；相关系数 ρ_{XY}；矩；协方差及其矩阵 Σ。

一、数学期望

考研数学 4 种平均概念：算数平均；几何平均；区间平均；加权平均，即概率平均，也就是数学期望。

1 一维随机变量及函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

- 离散型　$P\{X=x_k\}=p_k \Rightarrow EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad or \quad \sum_{K=1}^{\infty} g(x_k)p_k$
- 连续型　$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \quad or \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$，$f(x)$ 为 X 的概率密度。

2 二维随机变量函数 $Z=g(X,\ Y)$ 的数学期望 EZ

- 离散型 $P\{X=x_i,\ Y=y_i\}=p_{ij} \Rightarrow EZ=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,\ y_i)p_{ij}$
- 连续型 $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,\ y)f(x,\ y)dxdy$

3 数学期望的常用结论

3.1　$E(C)=C$；$E(EX)=EX$

3.2　$E(aX+bY)=aEX+bEY$

3.3　$EXY=EXEY+E[(X-EX)(Y-EY)]$　$\boxed{X,\ Y \text{ 独立} \Rightarrow EXY=EXEY}$

3.4　$\boxed{[EXY]^2 \le E^2(X)E^2(Y)}$

3.5　$\boxed{\varphi(x)\sim N(0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)\varphi(x-a)dx=0}$

二、方 差

$\boxed{DX=E(X-EX)^2=EX^2-E^2X}$，　$\sqrt{D(X)}=\sigma_X \to$ 标准方差。

1．离散型　$\boxed{DX=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-EX)^2 p_k}$

2．连续型　$\boxed{DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx}$

3　方差的常用结论

3.1 $\boxed{D(C)=0;\quad D\left(EX\right)=0}$

3.2 $\boxed{D(CX)=C^2DX}$

3.3

$$\boxed{\begin{aligned}D(X\pm Y)&=DX+DY\pm 2E\left\{\left[X-EX\right]\left[Y-EY\right]\right\}=DX+DY\pm 2Cov\left(X,\ Y\right)=DX+DY\pm 2\sigma_{XY}\\&=DX+DY\pm 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}\end{aligned}}$$

3.4　X 与 Y 独立　$\boxed{D(aX\pm bY)=a^2DX+b^2DY}$

3.5　X 与 Y 独立　$\boxed{D\left(XY\right)=DXDY+DX\left(EY\right)^2+DY\left(EX\right)^2}$

3.6 $\boxed{DX\le E\left(X-C\right)^2}$，$C$ 为任意常数。

三、13 大分布的数学期望与方差

1．　0-1 分布　$P(X=k)=p^k\left(1-p\right)^{1-k}\sim B(1,p),\ k=0,\ 1$

$$P\{X_i=0\}=1-p;\quad P\{X_i=1\}=p,\quad E(X_i)=\sum_{k=0}^{1}x_kp_k=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$D(X_i)=\sum_{k=0}^{1}[x_k-E(X_i)]^2p_k=\sum_{k=0}^{1}[x_k-p]^2p_k=(0-p)^2\times(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)$$

$$\boxed{EX=p\qquad DX=p(1-p)}$$

2．　二项分布　$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}\sim B(n,p)$，为 n 个 $0-1$ 分布之和

$$\boxed{EX=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np\qquad DX=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)}$$

3．泊松分布　$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}\sim P(\lambda)\quad(\lambda>0)$，当 $x=k=0\to P=e^{-\lambda}$

$$\boxed{\begin{aligned}&EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda\\&EX^2=E[X(X-1)+X]=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda\\&DX=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda\end{aligned}}$$

4．均匀分布　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}\sim U\left(a,\ b\right)$

$$\boxed{\begin{aligned}&EX=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2};\qquad EX^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}\\&DX=EX^2-\left(EX\right)^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}}$$

5．正态分布　　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}\sim N(u,\ \sigma^2)$

$$E(X)=\int_{\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}dx\xrightarrow{\frac{x-u}{\sigma}=t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}(\sigma t+u)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma te^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{0}+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}}_{2\times\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\mu。$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\xrightarrow{\frac{x-\mu}{\sigma}-t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}[\sigma t+\mu]^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\sqrt{2\pi}}+\underbrace{\frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{0}+\underbrace{\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\times\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sigma^2+\mu^2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$

$$\boxed{EX=\mu\qquad EX^2=\mu^2+\sigma^2\qquad DX=\sigma^2}$$

6．　指数分布　　$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\ \ (\lambda>0)\\ 0, & x<0\end{cases}\sim E(\lambda)$

$$\boxed{\begin{array}{l}EX=\int_{\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\infty}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\dfrac{1}{\lambda};\ \ EX^2=\int_{\infty}^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}=\dfrac{1}{\lambda^2}\int_{\infty}^{+\infty}t^2e^{-t}dt=\dfrac{2}{\lambda^2}\\ DX=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{\lambda^2}\end{array}}$$

7．几何分布　　$\boxed{P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\sim G(p)\quad k=1,2,\cdots}$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=P\left(\sum_{k=1}^{\infty}-(1-p)^k\right)'=-p\left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right)'=-p(1-p)\times\frac{-p-(1-p)}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p\left[-\sum_{k=r}^{\infty}k(1-p)^k\right]'=-p\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(1-p)^k-\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right]'$$

$$=-p\left[-\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k+1}\right)'-\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right]'=-p\left[-\left(\frac{(1-p)^2}{p}\right)'-\frac{1-p}{p}\right]'=p\left[\frac{p^2-1}{p^2}+\frac{1-p}{p}\right]'=\frac{2-p}{P^2}$$

$$\boxed{E(X)=\frac{1}{p}\qquad E(X^2)=\frac{2-p}{P^2}\qquad D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1-p}{p^2}}$$

8．　超几何分布　$P(X=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\sim H(N,\ M,\ n)$

$$\boxed{E(X)=\frac{nM}{N}\qquad D(X)=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

9．　$\chi^2(n)$分布　　$\boxed{E(X)=n\qquad D(X)=2n}$

评 注　这个公式的证明如下：

$$X_i \sim N(0,\ 1) \Rightarrow EX_i = 0,\ DX_i = 1 \Rightarrow EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = 1$$

$$EX_i^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3 \qquad (\text{利用 } EX_i^{2n} = (2n-1)!!)$$

$$DX_i^4 = EX_i^4 - \left[EX_i^2\right]^2 = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow E\chi^2 = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \sum_{i=1}^n EX_i^2 = n;\quad D\chi^2 = D\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \sum_{i=1}^n DX_i^2 = 2n.$$

10.　$t(n)$分布　$\boxed{E(X) = 0 \qquad D(X) = \dfrac{n}{n-2}\ (n > 2)}$

11.　$F(n_1,\ n_2)$分布　$\boxed{E(X) = \dfrac{n_2}{n_2 - 2}\ (n_2 > 2) \qquad D(X) = \dfrac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}\ (n_2 > 4)}$

12.　二维均匀分布的数学期望和方差　$\boxed{f(x,\ y) \sim U(a,b;\ c,d) \Rightarrow \begin{cases} E(X,\ Y) = \left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c+d}{2}\right) \\ D(X,\ Y) = \left(\dfrac{(b-a)^2}{12},\ \dfrac{(d-c)^2}{12}\right) \end{cases}}$

13.　二维正态分布的数学期望和方差　$\boxed{f(x,\ y) \sim N(\mu_1, \mu_2;\ \sigma_1^2, \sigma_2^2;\ \rho) \Rightarrow \begin{cases} E(X,\ Y) = (\mu_1,\ \mu_2) \\ D(X,\ Y) = (\sigma_1^2,\ \sigma_2^2) \end{cases}}$

■一维随机变量数学期望题型题法

【例 1】　设随机变量 X 分布列为 $\left(\begin{array}{c|ccccc} X & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ p & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$，　求 $E(X)$,　$E(-X+1)$,　$E(X^2)$。

解：由随机变量 X 的分布得

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$-X+1$	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1
X^2	1	0	$\frac{1}{4}$	1	4
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

故

$$E(X)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

$$E(-X+1)=2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{12}-1\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=1\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{12})+0\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{4}=\frac{35}{24}$$

【例 2-1】设 $X\sim U\left(-2,\ 2\right)$，$Y=Max\left(\left|x\right|,\ 1\right)$，求 EY。

解：$EY=E\left[Max\left(\left|x\right|,\ 1\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}Max\left(\left|x\right|,\ 1\right)f\left(x\right)dx=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}Max\left(\left|x\right|,\ 1\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}Max\left(\left|x\right|,\ 1\right)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}\left(-x\right)dx+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}1\cdot dx+\frac{1}{4}\int_{1}^{2}xdx=\frac{5}{4}。$$

【例 2-2】设 $X\sim U\left(-1,\ 2\right)$，$Y=\begin{cases}1, & X>0\\ 0, & X=0\\ -1, & X<0\end{cases}$，求 DY。

解：$P\left\{Y=-1\right\}=\frac{0-\left(-1\right)}{2-\left(-1\right)}=\frac{1}{3},\ P\left\{Y=0\right\}=0,\ P\left\{Y=1\right\}=\frac{1-\left(-1\right)}{2-\left(-1\right)}=\frac{2}{3}$

$$P\left\{Y^2=0\right\}=0,\ P\left\{Y^2=1\right\}=1$$

$$EY=\left(-1\right)\times\frac{1}{3}+0\times0+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow DY=EY^2-\left(EY\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

【例 3】设 $X\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ $\left(\sigma>0\right)$，其分布函数 $F\left(x\right)$ 曲线的拐点为 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，该点的斜率为 1，求 EX^2。

解：$X\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ $\left(\sigma>0\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，根据题意有

$$F''\left(x\right)=f'\left(x\right)=0\Rightarrow x=\mu=1$$

$$F'\left(x\right)=f\left(x\right)=1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=1\Rightarrow\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$EX^2=DX+\left(EX\right)^2=\sigma^2+\mu^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2+1=\frac{1}{2\pi}+1$$

【例 4】设排球队 A 和 B 比赛，若有一队胜三场，则比赛结束，假定 A 获胜的概率为 $p=\frac{1}{2}$，求比赛场数 X 的数学期望。

解：X 的可能取值为 3，4，5，$X\sim B\left(n,\ p\right)=C_n^kp^k\left(1-p\right)^{n-k}=P\left\{\mu=k\right\}$

$X=3$，表示 A 或 B 全胜，$P\left\{X=3\right\}=C_3^3p^3+C_3^0\left(1-p\right)^3=\frac{1}{4}$

$X=4$，表示 A 在第四场取胜或 B 在第四场取胜，

$$P\left\{X=4\right\}=p\cdot C_3^2p^2\left(1-p\right)+\left(1-p\right)\cdot C_3^2\left(1-p\right)^2p=\frac{3}{8}$$

$X=5$，表示 A 在第五场取胜或 B 在第五场取胜

$$P\{X=4\}=p\cdot C_4^2p^2(1-p)^2+(1-p)\cdot C_4^2(1-p)^2p^2=\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow X\sim\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}\Rightarrow EX=3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}\approx 4。$$

【例5】设球队 A 与 B 进行比赛，若有一队胜4场则比赛结束，已知 A，B 两队在每场比赛中获胜概率都是 $\frac{1}{2}$，求需要比赛的场数的 $E(X)$。

解：设比赛的场数为 X，则 X 的可能取值=4，5，6，7，相应的概率为

$$P(X=4)=C_2^1(\frac{1}{2})C_3^3(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8};\quad C_2^1\text{——第一场比赛中某队胜一场，}$$

$$C_3^3\text{——该队还需连胜三场，比赛结束。}$$

$$P(X=5)=C_2^1(\frac{1}{2})C_4^3(\frac{1}{2})^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\quad \text{最后的}\frac{1}{2}\text{表示胜出一队输一场，以此类推。}$$

$$P(X=6)=C_2^1(\frac{1}{2})C_5^3(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^2=\frac{5}{16}$$

$$P(X=7)=C_2^1(\frac{1}{2})\cdot C_6^3(\frac{1}{2})^3\cdot(\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$$

$$E(X)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=\frac{93}{16}\approx 6$$

【例6】一辆汽车沿街道行使，需要通过三个相互独立的红绿信号灯路口，已知红绿信号显示时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯已通过的路口个数，求 $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$。

解：X 的可能取值为0，1，2，3。记 $A_i=\{\text{汽车在第 } i \text{ 个路口首次遇到红灯}\}$，则 $P(A_i)=P(\overline{A_i})=\frac{1}{2}$。

$$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=1\}=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=3\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=\frac{1}{8}$$

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{67}{96}。$$

【例7】已知甲乙两箱中装有同种产品，其中甲中正品和次品各3件，乙只有3件正品，现从甲箱任取3件产品放入乙箱后，求 (1) 乙箱中的次品数 X 的 EX；(2) 从乙箱中任取一件是次品的概率 P。

解：(1) 记 $X_i=\begin{cases}0, & 从甲箱中取出的第\ i\ 件产品是正品\\ 1, & 从甲箱中取出的第\ i\ 件产品是次品\end{cases}\quad (i=1,\ 2,\ 3)$

$$X_i\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow EX=E\left(X_1+X_2+X_3\right)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(2) 应用全概率公式，记事件 A={从乙箱中任取一件是次品}

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}k\cdot P\{X=k\}=\frac{1}{6}\times EX=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}。$$

【例 8】设两个相互独立的事件 $A,\ B$ 都 不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，事件 A 发生 B 不发生的概率与事件 A 不发生 B 发生的概率相等，令 $X=\begin{cases}1, & 事件A,\ B\ 同时发生\\ -1, & 其他\end{cases}$，求 EX 。

解：事件 A 发生 B 不发生的概率与事件 A 不发生 B 发生的概率相等，即 $P\left(A\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}B\right)$

$$\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B)\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{B}\right)$$

$$P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)=\left[P\left(\overline{A}\right)\right]^2=\frac{1}{9}\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow EX=1\times P(AB)+(-1)P\left(\overline{AB}\right)=P(A)P(B)-\left[1-P(A)P(B)\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{5}{9}=-\frac{1}{9}$$

【例 9】设 $X,\ Y$ 是两个相互独立且都服从正态分布 $N\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，求 $E|X-Y|$。

解：令 $Z=X-Y$， $EZ=0,\ \ DZ=1\Rightarrow Z\sim N(0,\ 1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$E|X-Y|=E\left(|Z|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

【例 10】一个系统由两个系统并联而成，若只有一个系统发生故障，则系统还能工作，两个系统的工作寿命分别为 X 与 Y，且相互独立，并均服从指数分布 $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}} & t\ge 0\\ 0 & t\le 0\end{cases}\quad(\lambda>0)$，求系统工作寿命下的 ET 。

解：　联合密度函数为： $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}, & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}\quad(\lambda>0)$

由 $T=Max(X,\ Y)$ 得　$T=Max(x,\ y)=\begin{cases}x & x\ge y\\ y & x<y\end{cases}$

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Max(x,\ y)f(x,\ y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}Max(x,\ y)f(x,\ y)\cdot\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y y\cdot\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}dx+\int_0^{+\infty}dx\int_0^x x\cdot\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}dy=2\lambda-\frac{\lambda}{2}。$$

评 注 重要关系 $\boxed{Max\{X,\ Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)\qquad Min\{X,\ Y\}=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)}$

【例11】设 X_1 和 X_2 相互独立，且都服从 $N(\mu,\ \sigma^2)$，求 $E[Max(X_1,\ X_2)]$。

解：方法一：定义积分法 $f(x,\ y)=f_{X_1}(x)f_{X_2}(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$E[Max(X,\ Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Max\{X,\ Y\}f(x,\ y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}xf(x,\ y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}yf(x,\ y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-\mu)f(x,\ y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}(y-\mu)f(x,\ y)dy+\mu$$

$$\xrightarrow{\text{第一个积分交换积分次序；第二个积分互换变量 }x,y}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)f(x,\ y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)f(x,\ y)dx+\mu$$

$$=\mu+2\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)f(x,\ y)dx=\mu+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy\int_{y}^{+\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\mu+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

方法二：利用重要关系 $\boxed{Max\{X,\ Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)}$，先标准化 X_1 和 X_2 的分布

令 $Y_1=\frac{X_1-\mu}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$； $Y_2=\frac{X_2-\mu}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$

$$E[Max(Y_1,\ Y_2)]=E\left[\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+|Y_2-Y_1|)\right]=\frac{1}{2}E[|Y_1-Y_2|]$$

$$Z=Y_1-Y_2\sim N(0,\ 2)$$

$$\Rightarrow E[|Y_1-Y_2|]=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{4}}dx=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow E[Max(Y_1,\ Y_2)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow E[Max\{X_1,\ X_2\}]=E[Max\{(\mu+\sigma Y_1),\ (\mu+\sigma Y_2)\}]=E[\mu+\sigma Max\{Y_1,\ Y_2\}]=\mu+\sigma E[Max\{Y_1,\ Y_2\}]$$

$$=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

【例12】设 $X\sim B(n,\ p)$， $Y=\begin{cases}0, & X\text{ 为偶数}\\1, & X\text{ 为奇数}\end{cases}$，求 EY。

解： $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ p_{偶} & p_{奇}\end{pmatrix}\Rightarrow EY=p_{奇}$

$$\begin{cases} p_{偶}+p_{奇}=1 \\ p_{偶}-p_{奇}=\sum\limits_{k=偶}C_n^k(-p)^k q^{n-k} \ +\sum\limits_{k=奇}C_n^k(-p)^k q^{n-k} \ =\sum\limits_{k}C_n^k(-p)^k q^{n-k} \ =(-p+q)^n=(1-2p)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{奇}=\frac{1-(1-2p)^n}{2}; \qquad p_{偶}=\frac{1+(1-2p)^n}{2}\Rightarrow EY=\frac{1-(1-2p)^n}{2}$$

■一维随机变量方差题型题法

【例 13】设 X_1, X_2, X_3 相互独立，其中，$X_1\sim U(0,\ 6)$，$X_2\sim N(0,\ 2^2)$，$X_3\sim P(3)$，

$Y=X_1-2X_2+3X_3$，求 DY。

解：$DY=1\times\dfrac{6^2}{12}+(-2)^2\times 2^2+3^2\times 3=46$。

【例 14】$(X,\ Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2;\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\ \rho)$，则 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充要条件是什么？

解：$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$

$\Leftrightarrow D(2X)=D(X+Y)+D(X-Y)\Leftrightarrow D(2X)=2DX+2DY\Leftrightarrow DX=DY$

评 注　$\rho=0$ 是 $X,\ Y$ 不相关或独立的充要条件。

【例 15】已知 X_1，X_2，X_3 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\ \sigma^2)$，$D(X_1X_2X_3)=\dfrac{1}{8}$，求 σ^2。

解：$D(X_1X_2X_3)=\dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow E(X_1X_2X_3)^2-\left[E(X_1X_2X_3)\right]^2=\dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow EX_1^2\cdot EX_2^2\cdot EX_3^2-EX_1\cdot EX_2\cdot EX_3=(\sigma^2)^3-0=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\sigma^2=\dfrac{1}{2}$

【例 16】$U\sim[-3,\ 3]$，$X=\begin{cases}-1, & U\le -1\\ 1, & U>-1\end{cases}$，$Y=\begin{cases}-1, & U\le 1\\ 1, & U>1\end{cases}$，求 $D(X+Y)$。

解：$(X,\ Y)$ 有四种可能值：$(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ 1)$

$P\{X=-1,\ Y=-1\}=P\{U\le -1,\ U\le 1\}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$P\{X=-1,\ Y=1\}=P\{U\le -1,\ U>1\}=0$

$P\{X=1,\ Y=-1\}=P\{U>-1,\ U\le 1\}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$P\{X=1,\ Y=1\}=P\{U>-1,\ U>1\}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$$(X,\ Y)\sim\begin{bmatrix}(-1,\ -1) & (-1,\ 1) & (1,\ -1) & (1,\ 1)\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow(X+Y)^2\sim\begin{pmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(X+Y)=E(X+Y)^2-\left[E(X+Y)\right]^2=4\times\frac{2}{3}-0=\frac{8}{3}$$

【例 17】设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-a|}$，$-\infty<x<+\infty$，$a$ 为常数

求　$E(X)$ 与 $D(X)$，并判断 X 与 $|X|$ 的独立性。

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x-a|}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)e^{-|x-a|}dx+\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-a|}dx$

令　$x-a=t$　则 $te^{-|t|}$ 为奇函数

$$E(X)=0+\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-a|}dx=a \qquad \text{（归一性）}$$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x-a|}dx$$

$$\underline{\underline{x-a=t}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-|t|}dt=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt=2$$

设 $0<a<+\infty$，事件 $(|X|<a)\subset(X<a)$，则 $0<P\{|X|<a\}\le P\{X<a\}<1$

于是有　$P\{|X|<a,\ X<a\}=P\{|X|<a\}$

$$P\{|X|<a\}\cdot P\{X<a\}<P\{|X|<a\}=P\{|X|<a,\ X<a\}$$

故　$|x|$ 与 x 不是相互独立。

【例 18】$X\sim f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，求　EX，DX，$E\{Min(|x|,\ 1)\}$。

解：$EX=0,\quad EX^2=2\int_0^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-x}dx=\Gamma(3)=2$；$DX=EX^2-(EX)^2=2$

$$E\{Min(|x|,\ 1)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}Min(|x|,\ 1)f(x)dx=\int_{|x|<1}|x|f(x)dx+\int_{|x|>1}f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx+\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$=\int_0^1xe^{-x}dx+\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-e^{-1}$$

【例 19】　设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，试求：

（1）　$E(3X)$ 与 $D(3X)$　　　（2）$E\left(e^{-3X}\right)$ 与 $D\left(e^{-3X}\right)$

解：　$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，　$\lambda=2$

（1） $E(3X)=3E(X)=3\times\frac{1}{\lambda}=\frac{3}{2}$; $D(3X)=9D(X)=9\times\frac{1}{\lambda^2}=9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

（2） $E(e^{-3X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3x}f(x)dx=\int_{o}^{+\infty}e^{-3x}2e^{-2x}dx=\frac{2}{5}$

$$E(e^{-6X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-6x}f(x)dx=\int_{o}^{+\infty}e^{-6x}2e^{-2x}dx=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow D(e^{-3X})=E(e^{-6X})-E^2(e^{-3X})=\frac{1}{4}-\frac{1}{25}=\frac{9}{100}$$

【例 20】 设 $X\sim B\left(n,\ p\right)$，试求 （1） EX, DX；（2） $E\left(e^{2X}\right)$

解：$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 　　　　$k=0,1,2,\cdots$

（1） $E(X)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!\cdot p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}}{(k-1)![((n-1)-(k-1)]!}$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}C_{n-1}^s p^s(1-p)^{n-1-s}=np(p+1-p)^{n-1}=np$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(n-2)!\,p^{k-2}(1-p)^{n-2-(k-2)}}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!}+np$$

$$=n(n-1)P^2(P+1-P)^{n-2}+np=n(n-1)P^2+np$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)$$

（2） $E(e^{2X})=\sum_{k=0}^{n}e^{2k}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(pe^2)^k(1-p)^{n-k}=(pe^2+1-p)^n$。

【例 21】设随机变量 $X\sim U\left(-1,\ 2\right)$，$Y=\begin{cases}1, & X>0\\ 0, & X=0\\ -1, & X<0\end{cases}$，求 DY。

解： $X\sim U\left(-1,\ 2\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & other\end{cases}$

$$EY=1\times P\left\{X>0\right\}+0\times P\left\{X=0\right\}+\left(-1\right)\times P\left\{X<0\right\}=1\times\frac{2-0}{3}+\left(-1\right)\times\frac{0-\left(-1\right)}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$EY^2=1\times\left[P\left\{X>0\right\}+P\left\{X<0\right\}\right]+0\times P\left\{X=0\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

$$\Rightarrow DY=EY^2-\left(EY\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

四、二维随机变量的数字特征

1. 数学期望

- 边缘分布离散型：$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_{i.}$；$E(Y)=\sum_{i=1}^{n} y_i p_{.j}$
- 边缘分布连续型：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$；$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy$
- 联合分布函数型：

$$E(G(X,Y))=\sum_i\sum_j G(x_i,y_j)p_{ij};\quad E(G(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

2. 方 差

- 边缘分布离散型：$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2 p_{i.}$；$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-E(Y)\right]^2 p_{.j}$
- 边缘分布连续型：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f_X(x)dx$；$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[y-E(Y)\right]^2 f_Y(y)dy$
- 联合分布函数型：

$$D[G(X,Y)]=\sum_i\sum_j\left[G(x_i,y_j)-E(G(X,Y))\right]^2 p_{ij}$$

$$D[G(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G(x,y)-E[G(X,Y)]\right]^2 f(x,y)dxdy;$$

- 随机变量的标准化方法　$Y=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}\sim N(0,1)$

3. 协方差与相关系数 矩

EX，EY 只反映了 X 和 Y 各自的平均值，而 DX，DY 反映的是 X 和 Y 各自偏离平均值的程度，而协方差则反映 X 和 Y 之间的关系。

① 协方差　$Cov(X,Y)=\sigma_{XY}=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$

② 协方差的性质

1) X 和 Y 独立或不相关，则 $Cov(X,Y)=0$；

2) $Cov(X,X)=E\left[(X-EX)^2\right]=DX$

3) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)=abCov(Y,X)$

4) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

③ 协方差的计算方法

1) 离散型 $\boxed{Cov\ (X,Y)=\sum_i\sum_j\left(x_i-E\right)\left(y_i-EY\right)p_{ij}}$ $\left(p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_i\right)$

2) 连续型 $\boxed{Cov\ (X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-EX\right)\left(y-EY\right)f(x,\ y)dxdy}$

3) 利用 $Cov\ (X,Y)$ 与 E 和 D 的关系是**计算的主要方法**

$$\boxed{Cov\ (X,Y)=EXY-EXEY=\sigma_{XY}}$$

$$\boxed{D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)}$$

④ **相关系数** $\boxed{\rho_{XY}=\dfrac{Cov\ (x,\ y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\dfrac{\sigma_{XY}}{\sqrt{DXDY}}}$ 描述 X，Y 的线性相关程度

● 相关系数本质上是一种线性逼近。考虑以 X 的线性函数 $a+bX$ 来近似表示 Y，这种表示程度的好坏由下式 e 的最小值决定

$$\boxed{e_{Min}=E\left[Y-\left(a+bX\right)\right]_{Min}^2=\left(1-\rho_{XY}^2\right)DY\quad 其中\ \ a=EY-bEX,\ \ b=\frac{Cov\left(X,\ Y\right)}{DX}}$$

证明：令 $e=E\left[Y-\left(a+bX\right)\right]^2=EY^2+b^2EX^2+a^2-2bEXY+2abEX-2aEY$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial e}{\partial a}=2a+2bEX-2EY=0\\ \dfrac{\partial e}{\partial b}=2bEX^2-2EXY+2aEX=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=EY-\dfrac{EX}{DX}\left[EXY-EX\cdot EY\right]=EY-\dfrac{EX}{DX}Cov\left(X,\ Y\right)=EY-bEX\\ b=\dfrac{1}{DX}\left[EXY-EX\cdot EY\right]=\dfrac{Cov\left(X,\ Y\right)}{DX}\end{cases}$$

$$\Rightarrow e_{Min}=E\left[Y-\left(a+bX\right)\right]_{Min}^2=E\left[Y-\left(EY-\frac{EX}{DX}Cov\left(X,\ Y\right)+\frac{Cov\left(X,\ Y\right)}{DX}X\right)\right]^2$$

$$=\left(1-\left[\frac{Cov\left(X,\ Y\right)}{\sqrt{DXDY}}\right]^2\right)DY=\left(1-\rho_{XY}^2\right)DY$$

● $Y\to\left(a+bX\right)$，$b=\dfrac{Cov\left(X,\ Y\right)}{DX}$， $DX>0\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{Cov\left(X,\ Y\right)}{DX}>0\Leftrightarrow Cov\left(X,\ Y\right)>0,\ 正相关\\ b=\dfrac{Cov\left(X,\ Y\right)}{DX}<0\Leftrightarrow Cov\left(X,\ Y\right)<0,\ 负相关\end{cases}$

● 相关系数 ρ_{XY} 的性质反应了两个随机变量 X 和 Y 的**线性**关系

1) $e_{Min}\geq 0\Rightarrow\left|\rho_{XY}\right|\leq 1$。

2) X 和 Y 独立，说明 X 和 Y 什么关系都没有，当然也不会有线性关系，从而

$Cov(X,\ Y)=0 \Rightarrow \rho_{XY}=0$；$\rho_{XY}=0 \Rightarrow X$ 和 Y 不相关，但只能说明 X 和 Y 没有线性关系，但 X 和 Y 可能有非线性关系，X 和 Y 当然不一定独立。也就是说，独立必不相关，不相关不一定独立。**只有对正态分布和二值分布而言，独立和不相关才是完全等价。**

3）$|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是使 $P\{Y=aX+b\}=1 \quad a\neq 0$ ，表示 X 和 Y 是完全的线性关系。

● 不相关的等价命题（均为充要条件）

1) $Cov(X,\ Y)=0$

2) $\rho_{XY}=0$

3) $EXY=EX\cdot EY$

4) $D(X\pm Y)=DX+DY$

⑤ **矩和协方差矩阵**

1) k 阶矩原点矩　$\boxed{E(x^k)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k p_i=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx}$　　$P\{X=x_i\}=p_i$

2) k 阶中心矩　$\boxed{E[X-E(X)]^k=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^k p_i=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^k f(x)dx}$

3) $k+\ell$ 阶混合矩　$\boxed{E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^\ell\}}$

显然，EX 为 X 的一阶原点矩，DX 是 X 的二阶中心矩，$Cov\ (X,\ Y)$ 是 X，Y 的 1+1 阶混合中心矩，也就是说随机变量的全部数字特征最终都可以由**矩**来统一。

4.　协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的$1+1$阶混合中心矩，

$$\sigma_{ij}=Cov(X_i,\ Y_j)=E\{[X_i-E(X_i)][x_j-E(X_j)]\}$$

则协方差矩阵定义为：
$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$$

由于 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，$\sum$ 是一个对称矩阵，它给出了 n 维随机变量的全部方差和协方差。

如对二维随即变量 $(X_1,\ X_2)$，有四个二阶中心矩，下面的 $\Sigma(X_1,X_2)$ 是重要考点。

$$\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$$

$$\sigma_{11}=E\left\{\left[X_1-E(X_1)\right]^2\right\}=\operatorname{cov}(X_1,X_1)=DX_1$$

$$\sigma_{12}=E\left\{\left[X_1-E(X_1)\right]\left[X_2-E(X_2)\right]\right\}=\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\sigma_{21}$$

$$\sigma_{22}=E\left\{\left[X_2-E(X_2)\right]^2\right\}=\operatorname{cov}(X_2,X_2)=DX_2$$

$$\Sigma(X_1,X_2)=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}DX_1 & \operatorname{cov}(X_1,X_2)\\ \operatorname{cov}(X_1,X_2) & DX_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}DX_1 & \rho_{X_1X_2}\sqrt{DX_1DX_2}\\ \rho_{X_1X_2}\sqrt{DX_1DX_2} & DX_2\end{bmatrix}$$

5. n 维正态随机变量的性质

● n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是

$$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}C_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma_i^2\right)$$，即他们的线性组合服从一维正态分布。

● 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性函数，则 $(Y_1,\cdots,Y_k)$ 服从 k 维正态分布。

● $(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态的分布，则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关，这是正态分布的特别之处。

■二维随机变量或两个随机变量函数的数字特征题型题法

【例 22】已知 $(X,\ Y)$ 分布率为

X \ Y	-1	0	1	$f_X(x)=P_{.j}$
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$f_Y(y)=P_{i.}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

试求 ρ_{XY}。

解：$EX=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$$EX^2=(-1)^2\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1^2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{3}{4}$；同理 $EY=0,\quad DY=\frac{3}{4}$。

$$EXY=\sum_i\sum_j ijp_{ij}=(-1)\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times0\times\frac{1}{8}+(-1)\times1\times\frac{1}{8}+0\times(-1)\times\frac{1}{8}$$

$$+0\times0\times\frac{1}{8}+0\times1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+0\times0\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0$$

$$Cov(X,\ Y)=EXY-EXEY=0\Rightarrow\rho_{XY}=0$$

【例 23】设 $f(x,y)=\begin{cases}8xy,\ 0\le x\le1,\ 0\le y\le x\\0,\qquad other\end{cases}$，求 ρ_{XY}。

解：$EX=\int_0^1\int_0^x x\cdot8xydxdy=\frac{4}{5}$； $EX^2=\int_0^1\int_0^x x^2\cdot8xydxdy=\frac{2}{3}$； $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$

$$EY=\int_0^1\int_0^x y\cdot8xydxdy=\frac{8}{15};\quad EY^2=\int_0^1\int_0^x y^2\cdot8xydxdy=\frac{1}{3};\ DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225}$$

$$EXY=\int_0^1\int_0^x xy\cdot8xydxdy=\frac{4}{9}\Rightarrow Cov(X,\ Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

$$\Rightarrow\rho_{XY}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{2}{75}\cdot\frac{11}{225}}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}$$

【例 24】X 和 Y 在 $X^2+Y^2\le r^2$ 上服从联合均匀分布，求 ρ_{XY}。

解：　$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2},\ x^2+y^2\le r^2\\0,\qquad other\end{cases}$

$$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2},\quad |x|\le r\\0,\qquad other\end{cases};\quad f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2},\quad |y|\le r\\0,\qquad other\end{cases}$$

$$\Rightarrow EX=\int_{-r}^r x\cdot\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}dx=0;\quad EY=\int_{-r}^r y\cdot\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}dy=0;\quad EXY=\iint_{x^2+y^2\le r^2}xy\cdot\frac{1}{\pi r^2}dxdy=0$$

$$\Rightarrow\rho_{XY}=\frac{Cov(X,\ Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX\cdot DY}}=0$$

评 注　上例中，由于 $\rho_{XY}=0$，所以 X，Y 不相关；又由于 $f(x,\ y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X，Y 并不独立。本题形象地表明：虽然没有线性关系，但存在二次关系（非线性关系），因此不独立。也说明了独立的本质是：既没有线性关系，也没有非线性关系。

【例 25】已知 $(X,\ Y)$ 在以点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ 为顶点的三角形区域服从均匀分布，对 $(X,\ Y)$ 作 4 次独立重复观察，观察值 $X+Y$ 不超过 1 出现的次数为 Z，求 EZ^2。

解：$f(x,\ y)=\begin{cases}2, & 0<y<x<1\\ 0, & other\end{cases}$；$Z\sim B(4,\ p)$

$$p=P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,\ y)dxdy=\frac{1}{2}\Rightarrow EZ^2=DZ+(EZ)^2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)^2=5。$$

【例 26】在长为 l 的线段上任取两点，试求两点间距离的数学期望与方差。

解：　将线段置于 x 轴的区间 $[0,\ l]$ 上，设 X，Y 表示线路上任取两点的坐标，随机变量 $Z=|X-Y|$ 表示这两点的距离，则由 X、Y 相互独立，且均服从 $[0,l]$ 上的均匀分布 $U(0,\ l)$，得 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数为 $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{l^2} & 0\le x\le l;\quad 0<y<l\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$EZ=E|X-Y|=\int_0^l\int_0^l|x-y|\frac{1}{l^2}dxdy=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[\int_0^x(x-y)dy+\int_x^l(y-x)dy\right]dx$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(l^2-x^2)-x(l-x)\right]dx=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[x^2-lx+\frac{1}{2}a^2\right]dx=\frac{1}{l^2}\left(\frac{1}{3}l^3+\frac{1}{2}l^3-\frac{1}{2}l^3\right)=\frac{l}{3}。$$

$$D(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=\int_0^l\int_0^l(x-y)^2\cdot\frac{1}{l^2}dxdy-(\frac{l}{3})^2=\frac{l^2}{6}-\frac{l^2}{9}=\frac{l^2}{18}。$$

【例 27】设 $(X,Y)\sim N\left(1,\ 2,\ 1,\ 4,\ -\dfrac{1}{8}\right)$，求 $D|2X-Y|$。

解：$(X,Y)\sim N\left(1,\ 2,\ 1,\ 4,\ -\dfrac{1}{8}\right)\Rightarrow X\sim N(1,\ 1),\ Y\sim N(2,\ 4),\ \rho_{XY}=-\dfrac{1}{8}$

$$E(2X-Y)=2EX-EY=2\times1-2=0$$

$$D(2X-Y)=4DX+DY-4\rho_{XY}\sqrt{DX\cdot DY}=4\times1+4-4\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times\sqrt{1\cdot4}=9$$

$$2X-Y\sim N(0,\ 9)\Rightarrow U=\frac{2X-Y}{3}\sim N(0,\ 1)$$

$$E|2X-Y|=3\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{6}{\sqrt{2\pi}}$$

$$D|2X-Y|=E(2X-Y)^2-(E|2X-Y|)^2=D(2X-Y)+[E(2X-Y)]^2-\frac{18}{\pi}=9+0-\frac{18}{\pi}=9-\frac{18}{\pi}$$

【例 28】设 X，Y，Z 相互独立，且两两构成的二维随机变量均服从二维正态分布。

$(X,\ Y)\sim N(1,\ 1;\ 1,\ 1;\ 0)$

$(X,\ Z)\sim N(1,\ 1;\ 1,\ 1;\ \dfrac{1}{2})$　　试求 $W=X+Y+Z$ 的$D(W)$。

$(Y,\ Z)\sim N(1,\ 1;\ 1,\ 1;\ -\dfrac{1}{2})$

解：$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=\rho=0,\ \rho_{XZ}=\frac{1}{2},\ \rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow Cov\ (X,\ Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0;\quad Cov\ (X,\ Z)=\frac{1}{2};\quad Cov\ (Y,\ Z)=-\frac{1}{2}$$

$$D(W)=D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z)+2Cov\ (X,Y)+2Cov\ (X,Z)+2Cov\ (Y,Z)=3$$

【例 29】$X,\ Y$ 独立同分布，$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$U=Max\{X,\ Y\}$，$V=Min\{X,\ Y\}$。求 $Cov\ (U,\ V)$。

解：$(U,\ V)$ 有三个可能值 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$。

$$P\{U=1,\ V=1\}=P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P\{U=2,\ V=1\}=P\{X=1,\ Y=2\}+P\{X=2,\ Y=1\}=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P\{U=2,\ V=2\}=P\{X=2,\ Y=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

U \ V	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\Rightarrow U\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix},\qquad V\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow EU=\frac{14}{9},\quad EV=\frac{10}{9},\quad EUV=1\times1\times\frac{4}{9}+1\times2\times0+2\times1\times\frac{4}{9}+2\times2\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow Cov(X,\ Y)=EUV=EU\cdot EV=\frac{16}{9}-\frac{14}{9}\times\frac{10}{9}=\frac{4}{81}$$

【例 30】将一枚硬币重复掷 n 次，以 $X,\ Y$ 分别表示正面向上和反面向上，求 ρ_{XY}。

解：$X+Y=n,\quad X\sim B\left(n,\ \frac{1}{2}\right),\quad Y\sim B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow EX=EY=np=\frac{n}{2},\ \ DX=DY=np(1-p)=\frac{n}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma_{XY}=Cov(X,\ Y)=EXY-EX\cdot EY=E\left[X(n-X)\right]-\frac{n^2}{4}=E(nX)-\left[DX+(EX)^2\right]-\frac{n^2}{4}$$

$$=\frac{n^2}{2}-\left(\frac{n}{4}+\frac{n^2}{4}\right)-\frac{n^2}{4}=-\frac{n}{4}\Rightarrow \rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{-\frac{n}{4}}{\sqrt{\left(\frac{n}{4}\right)^2}}=-1$$

【例31】X, Y独立同分布，$U=X+Y$，$V=X-Y$，则U, V必然（　）

(A) 不独立　　　　(B) 独立

(C) 相关系数不为零　　　　(D) 相关系数为零

解：$EUV=E\left[(X+Y)(X-Y)\right]=EX^2-EY^2=0=EU\cdot EV$，故$(D)$成立。

当X, Y为正态分布时，则U, V也为正态，由U, V不相关得出U, V独立，但X, Y为非正态分布时，就未必，如取 $P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，则有

$$\Rightarrow P\{U=-1\}=P\{X=0,\ Y=1\}=P\{X=0\}P\{\ Y=1\}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P\{U=2\}=P\{X=1,\ Y=1\}=P\{X=1\}P\{\ Y=1\}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P\{U=-1,\ U=2\}=P\left\{X=\frac{1}{2},\ Y=\frac{3}{2}\right\}=0\neq P\{U=-1\}P\{U=2\}=\frac{1}{16}$$

故(A)，(B)都不一定成立。

【例32】设$(X,\ Y)$的分布律为

$Y\backslash X$	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

求 $Cov\ (X,Y)$ 和 ρ_{XY}。

解：易知X的分布律　$P\{X=0\}=1-p,\ P\{X=1\}=p$

Y的分布律　$P\{X=0\}=1-p,\ P\{Y=1\}=p$

故：
$$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p)$$
$$E(Y)=p,\quad D(Y)=p(1-p)$$

$$E(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_i P_{ij}=p$$ （仅当$x_i=y_i=1$时不为0）

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=p-p^2=p(1-p)$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{p(1-p)}\cdot\sqrt{p(1-p)}}=1$$

【例33】　设$(X,\ Y)$的概率密度为 $f(x,\ y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1,\quad 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求$Cov\ (X,Y)$。

解：$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 (x+y)dy = x+\dfrac{1}{2}, & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$；　　$f_Y(y)=\begin{cases} y+\dfrac{1}{2} & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$E(X)=\int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx=\frac{7}{12};\quad E(Y)=\int_0^1 y(y+\frac{1}{2})dy=\frac{7}{12}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

$$Cov(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$$

【例 34】点 $(X,\ Y)$ 在以 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ 为顶点的三角形内服从均匀分布，求 ρ_{XY}。

解：　$f(x,\ y)=\begin{cases}2, & (x,\ y)\in D\\ 0, & other\end{cases}$

$$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{1-x}2dy=2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & other\end{cases};\quad f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{1-y}2dx=2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & other\end{cases}$$

$$\Rightarrow EX=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3};\qquad EY=\int_0^1 y\cdot 2(1-y)dy=\frac{1}{3};\qquad EXY=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2\cdot xydy=\frac{1}{12}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx-\frac{1}{9}=\frac{1}{18};\quad DY=EY^2-(EY)^2=\int_0^1 y^2\cdot 2(1-y)dy-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \rho_{XY}=\frac{Cov(X,\ Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)^2}}=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{评\ 注}$　尽管 $f(x,\ y)$ 为常数，相当于可分离变量，但由于正概率区间非矩形，故 $(X,\ Y)$ 一定是部分相关的，本质上相当于两个随机变量存在取值纠缠。

【例 35】$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\le x<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<2\\ \dfrac{1}{2}, & other\end{cases}$，$Y=X^2$。求 (1) $f_Y(y)$；(2) $Cov(X,\ Y)$；(3) $F\left(-\dfrac{1}{2},\ 4\right)$。

解：

$$(1)\ F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=\begin{cases}0, & y<0\\ P\{-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^0\frac{1}{2}dx+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ P\{-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\}=\int_{-1}^0\frac{1}{2}dx+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le y<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & other\end{cases}$$

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}xdx+\int_0^2\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{4}$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^2dx+\int_0^2\frac{1}{4}x^2dx=\frac{5}{6}$$

$$EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^3dx+\int_0^2\frac{1}{4}x^3dx=\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow Cov(X,\ Y)=Cov\left(X,\ X^2\right)=EX^3-EX\cdot EX^2=\frac{2}{3}$$

(3) $F\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)=P\left\{X\le-\frac{1}{2},\ Y\le4\right\}=P\left\{X\le-\frac{1}{2},\ X^2\le4\right\}$

$$=P\left\{X\le-\frac{1}{2},\ -2\le X\le2\right\}=P\left\{-2\le X\le-\frac{1}{2}\right\}=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}。$$

【例36】设$(X,\ Y)$服从二维正态分布概率密度

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

求 $Cov\ (X,Y)$ 和 ρ_{XY} 及协方差矩阵形式。

解：易知$(X,\ Y)$的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}};\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

且 $E(X)=\mu_1;\quad E(Y)=\mu_2;\qquad D(X)=\sigma_1^2;\quad D(Y)=\sigma_2^2$

$$Cov\ (X,\ Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}]^2}dxdy$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right);\ u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ 则

$$Cov\ (X,Y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)e^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}dtdu$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t}{2}}dt\right)+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{y}{2}}du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t}{2}}dt\right)$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}=\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\Rightarrow \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

在二维正态分布的概率密度函数中，令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$

$$\boxed{\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2&\mathrm{P}\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{pmatrix};\quad |\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}$$

由于　$(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$

$$=\frac{1}{|\Sigma|}(x-\mu\quad x_2-\mu_2)\begin{pmatrix}\sigma_2^2&-\rho\sigma_1\sigma_2\\-\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

故

$$\boxed{f(x_1,\ x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}}$$

上式很容易推广到 n 维情况。

令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\\x_n\end{pmatrix}$，$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\\E(X_n)\end{pmatrix}$，则 $\boxed{f(x_1,\ x_2\cdots,\ x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}}$

【例 37】设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的密度函数为 $f(x,\ y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,\ y)+\varphi_2(x,\ y)]$，$\varphi_1(x,\ y)$，$\varphi_2(x,\ y)$ 为二维正态密度函数，它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1。求

(1) $f_X(x)$，$f_Y(y)$，ρ_{XY}；　(2) 证明 X，Y 是否独立。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[\varphi_1(x,\ y)+\varphi_2(x,\ y)]dy$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_{1X}(x)+\varphi_{2X}(x)\right]=\ \varphi_{1X}(x)=\varphi_{2X}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理，$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$\rho_{XY}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX\cdot DY}}=EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\ y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_1(x,\ y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_2(x,\ y)dxdy\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]=0$$

故 X，Y 不相关。　又

$$\varphi_1(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2)}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)\right]=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)}$$

$$\varphi_2(x,\ y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}$$

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x,\ y)+\varphi_2(x,\ y)\right]=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}+e^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)}\right]$$

$$\Rightarrow f(x,\ y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X，Y 不独立。

$\boxed{\text{评 注}}$ 本题中，两个分量都是正态分布的联合分布不是二元正态分布，不相关但是也不独立。

【例 38】设 $A,\ B$ 为随机事件，$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生}\\ 0, & A\text{ 不发生}\end{cases}$，

$Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生}\\ 0, & B\text{ 不发生}\end{cases}$。求 ρ_{XY} 和 $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布。

解：$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，　$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow P\{X=1,\ Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1,\ Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=0,\ Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=P(\overline{A}\ \overline{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

$$\Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad Y^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow EX = \frac{1}{4},\ DX = \frac{3}{16};\quad EY = \frac{1}{6},\ DY = \frac{5}{36};\quad EXY = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DXDY}} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{5}{36}}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$Z = X^2 + Y^2 \Rightarrow P\{Z \le z\} = P\{X^2 + Y^2 \le z\}\quad (z = 0,\ 1,\ 2)$$

$$\Rightarrow P\{X^2 + Y^2 \le 0\} = P\{X = 0,\ Y = 0\} = \frac{2}{3}$$

$$P\{X^2 + Y^2 \le 1\} = P\{X = 0,\ Y = 1\} + P\{X = 1,\ Y = 0\} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X^2 + Y^2 \le 2\} = P\{X = 1,\ Y = 1\} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow Z = X^2 + Y^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

【例 39】$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\ (n > 2)$ 独立同分布，服从 $N(0,\ 1)$，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$Y_i = X_i - \overline{X}$。

求 (1) DY_i；(2) $Cov\ (Y_1,\ Y_n)$；(3) $P\{Y_1 + Y_n \le 0\}$。

解：(1) $DY_i = D\left(X_i - \overline{X}\right) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n}\sum_{k \ne i} X_k\right]$ （注意 X_i 和 $\overline{X}$ 不独立）

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_i + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k \ne i} DX_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (n-1) = \frac{n-1}{n}$$

(2) $Cov\ (Y_1,\ Y_n) = E\left[(Y_1 - EY_1)(Y_n - EY_n)\right] = E\left(X_1 - \overline{X}\right)\left(X_n - \overline{X}\right)$

$$=EX_1X_n+E\overline{X}^2-EX_1\overline{X}-EX_n\overline{X}$$

$$=EX_1EX_n+\left[D\overline{X}+\left(E\overline{X}\right)^2\right]-\left[\frac{1}{n}EX_1^2+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}EX_1X_i\right]-\left[\frac{1}{n}EX_n^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}EX_nX_i\right]$$

$$=EX_1EX_n+\left[\frac{1}{n}+0\right]-\left[\frac{1}{n}\left(DX_1+(EX_1)^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}EX_1X_i\right]-\left[\frac{1}{n}\left(DX_n+(EX_n)^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}EX_nX_i\right]$$

$$=0+\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}(1+0)+\frac{1}{n}\times 0\right]-\left[\frac{1}{n}(1+0)+\frac{1}{n}\times 0\right]=-\frac{1}{n}$$

(3) $Y_1+Y_n=\left(X_1-\overline{X}\right)+\left(X_n-\overline{X}\right)=\dfrac{n-2}{n}X_1+\dfrac{n-2}{n}X_n-\dfrac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i$

$$E\left(Y_1+Y_n\right)=E\left(\frac{n-2}{n}X_1+\frac{n-2}{n}X_n-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i\right)=0,$$

可见 Y_1+Y_n 属于对称轴为Y轴的对称正态分布，故 $P\left\{Y_1+Y_n\le 0\right\}=\dfrac{1}{2}$。

【例 40】 设 $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y) & 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

求 $E(X),\ E(Y),\ D(X),\ D(Y),\ Cov\ (X,\ Y),\ \rho_{XY}$ 与 Σ_{XY}。

解： $E(X)=\int_0^2\int_0^2 xf(x,y)dxdy=\dfrac{7}{6}=E(Y)$

$$D(X)=\int_0^2\int_0^2 x^2f(x,y)dxdy-\left(E^2(X)\right)=\frac{11}{36}=D(Y)$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2 xy(x+y)dxdy-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}$$

$$\boxed{\Sigma_{XY}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}DX & \mathrm{cov}(X,Y)\\ \mathrm{cov}(X,Y) & DY\end{bmatrix}}\Rightarrow\Sigma_{XY}=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{36} & -\dfrac{1}{36}\\ -\dfrac{1}{36} & \dfrac{11}{36}\end{pmatrix}$$

【例 41】设随机变量$(X,\ Y)$的联合分布函数为 $f(x,\ y)=\begin{cases}Cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty\\ 0, & other\end{cases}$,

求$P\left\{X<1|Y=2\right\}$，并求$E\left[Y-(aX+b)\right]^2$的最小值。

解：$E\left[Y-(aX+b)\right]^2$取得最小值时，有

$$E\left[Y-(aX+b)\right]^2=DY\left(1-\rho_{XY}^2\right);\qquad a=\frac{Cov(X,\ Y)}{DX};\quad b=EY-aEX$$

又 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}dy\int_0^y Cxe^{-y}dx=\frac{C}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy \xrightarrow{\int_0^{+\infty}y^{n-1}e^{-y}dy=\Gamma(n)=(n-1)!} =\frac{C}{2}\Gamma(3)=1\Rightarrow C=1$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}xe^{-y}dy=xe^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y xe^{-y}dy=\frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

显然，X，Y 不独立。又

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0<x<y<\infty\\ 0, & other\end{cases}\Rightarrow f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & other\end{cases}$$

$$\Rightarrow P\{X<1|Y=2\}=\int_{-\infty}^{1}f_{X|Y}(x|2)dx=\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases}EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2\\ EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=6\end{cases}\Rightarrow DX=EX^2-(EX)^2=6-4=2$$

$$\begin{cases}EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{1}{2}y^2e^{-y}dy=3\\ EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}y^2\cdot\frac{1}{2}y^2e^{-y}dy=12\end{cases}\Rightarrow DY=EY^2-(EY)^2=12-9=3$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y xy\cdot xe^{-y}dx=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}y^4e^{-y}dy=8$$

$$\Rightarrow \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DXDY}}=\frac{8-2\times3}{\sqrt{2\times3}}=\frac{\sqrt6}{3}$$

$$\Rightarrow E[Y-(aX+b)]^2=DY(1-\rho_{XY}^2)=3\times\left[1-\left(\frac{\sqrt6}{3}\right)^2\right]=1;$$

$$a=\frac{Cov(X,Y)}{DX}=\frac{2}{2}=1;\quad b=EY-aEX=3-2=1.$$

【例 42】设随机变量 X，Y 相互独立，都服从 $E(\lambda)$，求

(1) X^n 的概率密度；(2) $Max\{X^2,Y\}$ 的分布函数和概率密度；(3) $Cov(X^2+Y^2, X^2+Y^2)$

解：(1) $F_{X^2}(x)=P\{X^2\le x\}=P\left\{X\le x^{\frac{1}{n}}\right\}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \int_0^{x^{\frac{1}{n}}}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x^{\frac{1}{n}}}, & x>0\end{cases}$

$$\Rightarrow f_{X^2}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\lambda}{n}x^{\frac{1}{n}-1}e^{-\lambda x^{\frac{1}{n}}}, & x>0\end{cases}$$

(2) 令　$Z=Max\{X^2,\ Y\}$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{Max\{X^2,\ Y\}\le z\}=P\{X^2\le z,\ Y\le z\}=P\{X^2\le z\}P\{\ Y\le z\}=F_{X^2}(z)F_Y(z)$$

$$F_{X^2}(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-\lambda z^{\frac{1}{2}}}, & z>0\end{cases};\quad F_Y(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-\lambda z}, & z>0\end{cases}\Rightarrow F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \left(1-e^{-\lambda z^{\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\lambda z}\right), & z>0\end{cases} \quad (3)$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \lambda e^{-\lambda z}\left(1-e^{-\lambda z^{\frac{1}{2}}}\right)+\dfrac{\lambda}{2z}e^{-\lambda z^{\frac{1}{2}}}\left(1-e^{-\lambda z}\right), & z>0\end{cases}$$

$Cov\left(X^2+Y^2,\ X^2+Y^2\right)=DX^2-DY^2=0$。

【例43】设$(X,\ Y)$服从G上的均匀分布，其中$G=\{(x,\ y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$，

设$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases}$，　$V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}$，求$\rho_{UV}$。

解法一：利用面积比。

$$EU=1\cdot P\{X>Y\}=1-P\{X\le Y\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\qquad EU^2=EU=\frac{3}{4}\Rightarrow DU=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$$

$$EV=1\cdot P\{X>2Y\}=1-P\{X\le 2Y\}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\qquad EV^2=EV=\frac{1}{2}\Rightarrow DV=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$EUV=1\times 1\times P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}\Rightarrow \rho_{UV}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

解法二：利用$(X,\ Y)$的分布律。$(U,\ V)=(0,\ 0)$；$(0,\ 1)$；$(1,\ 0)$；$(1,\ 1)$

$$P\{X\le Y\}=\frac{1}{4};\quad P\{X>2Y\}=\frac{1}{2};\quad P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=0,\ V=0\}=P\{X\le Y,\ X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=0,\ V=1\}=P\{X\le Y,\ X>2Y\}=P\{\Phi\}=0$$

$$P\{U=1,\ V=0\}=P\{X>Y,\ X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=1,\ V=1\}=P\{X>Y,\ X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}$$

$V\backslash U$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

$$EU=0\times\frac{1}{4}+1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

$$DU=\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$$

$$EV=0\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$DV=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$EUV=0\times0\times\frac{1}{4}+0\times1\times0+1\times0\times\frac{1}{4}+1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\rho_{UV}=\frac{EUV-EU\cdot EV}{\sqrt{DU\cdot DV}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

【例44】已知 $X\sim N(0,\ 1)$，在 $X=x$ 条件下，$Y\sim N(x,\ 1)$，求 Y 的分布和 ρ_{XY}。

解：$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$；$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2}$

$$\Rightarrow f(x,\ y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2\right)}=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{x-0}{1}\right)^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-0}{1}\right)\left(\frac{y-0}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{y-0}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}$$

$$\sim N\left(0,\ 0;\ 1,\ 2;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow Y\sim N(0,\ 2);\quad \rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

【例45】已知 X_1，X_2 相互独立且服从 $P(\lambda_1)$ 和 $P(\lambda_2)$，$P\{X_1+X_2>0\}=1-e^{-1}$，求 $E(X_1+X_2)^2$。

解：$E(X_1+X_2)^2=E\left(X_1^2+X_2^2+2X_1X_2\right)=EX_1^2+EX_2^2+2EX_1\cdot EX_2$

$$=\left(\lambda_1+\lambda_1^2\right)+\left(\lambda_2+\lambda_2^2\right)+2\lambda_1\lambda_2=\left(\lambda_1+\lambda_2\right)+\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2$$

$$P\{X_1+X_2>0\}=1-e^{-1}\Rightarrow 1-P\{X_1+X_2\ge 0\}=1-P\{X_1+X_2=0\}$$
$$=1-P\{X_1=0,\ X_2=0\}=1-P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}$$
$$=1-e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$
$$\Rightarrow 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=1-e^{-1}\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2=1$$
$$\Rightarrow E(X_1+X_2)^2=(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1+\lambda_2)^2=2$$

【例 46】$X\sim U[-1,\ 1]$，$Y=|x-a|$，$a\in[-1,\ 1]$，$\rho_{XY}=0$，求 a 的值。

解：
$$X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}\Rightarrow EX=0$$

$$\rho_{XY}=0\to EXY=EX\cdot EY=0$$
$$EXY=EX|X-a|=\int_{-1}^{1}x|x-a|dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{a}x(a-x)dx+\int_{a}^{1}x(x-a)dx\right]=\frac{a}{6}(a^2-3)=0\Rightarrow a=0$$

【例 47】已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，方差相同 $\sigma^2\ne 0$，求 $D(X_1-\overline{X})$ 和 $\rho_{X_1\overline{X}}$。

解：
$$D(X_1-\overline{X})=D\left(X_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=D\left(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}X_i\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2+(n-1)\cdot\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$
$$Cov(X_1,\ \overline{X})=\operatorname{cov}\left(X_1,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{cov}(X_1,\ X_i)=\frac{1}{n}\operatorname{cov}(X_1,\ X_1)=\frac{\sigma^2}{n}$$
$$\Rightarrow \rho_{X_1\overline{X}}=\frac{\operatorname{cov}(X_1,\ \overline{X})}{\sqrt{DX_1}\cdot\sqrt{D\overline{X}}}=\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sigma\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

【例 48】设 $(X,\ Y)\sim N\left(1,\ 0,\ 9,\ 16;\ -\frac{1}{2}\right)$，$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，求 $EZ,\ DZ,\ \rho_{XZ}$，并说明 X 、Z 是否独立。

解：
$$EZ=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{0}{2}=\frac{1}{3};$$
$$DZ=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{DX}{9}+\frac{DY}{4}+2\operatorname{cov}\left(\frac{X}{3},\ \frac{Y}{2}\right)=1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=5+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times 4=3$$
$$\operatorname{cov}(X,\ Z)=\frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,\ X)+\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,\ Y)=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3-3=0\Rightarrow \rho_{XZ}=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$$

因为 $(X,\ Y)$ 是正态分布，故 $\left(X,\ \frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$ 即 $(X,\ Z)$ 也是正态分布，又 $\rho_{XZ}=0$，对正态分布不相关与独立等价，故 X 、Z 独立。

【例 49】设 X_1、X_2 相互独立，$X_i \sim B(i,\ p)$，$i=1,2$。令随机变量 $Y_1=\begin{cases}0,\ X_1+X_2=1\\1,\ X_1+X_2\neq 1\end{cases}$，

$Y_2=\begin{cases}0,\ X_2-X_1=2\\1,\ X_2-X_1\neq 2\end{cases}$，试确定 p 使 $\sigma_{X_1X_2}$ 最小。

解：根据题意，$X_1+X_2\sim B(3,\ p)$，又 Y_1、Y_2、Y_1Y_2 都服从 $0-1$ 分布。故 $EY_i=P\{Y_i=1\}$。

$$EY_1=P\{Y_1=1\}=1-P\{Y_1=0\}=1-P\{X_1+X_2=1\}=1-C_3^1p(1-p)^2=1-3pq^2$$

$$EY_2=P\{Y_2=1\}=1-P\{Y_2=0\}=1-P\{X_2-X_1=2\}$$

$$=1-P\{X_1=0,\ X_2=2\}=1-C_0^0p^0(1-p)^0C_2^2p^2(1-p)=1-p^2q$$

$$P\{Y_1=0,\ Y_2=0\}=P\{X_2+X_1=1,\ X_2-X_1=2\}=P\{\Phi\}=0$$

$$P\{Y_1Y_2=0\}=P\{Y_1=0\cup Y_2=0\}=P\{Y_1=0\}+P\{Y_2=0\}-P\{Y_1=0,\ Y_2=0\}=3pq^2+p^2q$$

$$EY_1Y_2=P\{Y_1Y_2=1\}=1-P\{Y_1Y_2=0\}=1-3pq^2-p^2q$$

$$\operatorname{cov}(Y_1,Y_2)=\sigma_{Y_1Y_2}=EY_1Y_2-EY_1EY_2=1-3pq^2-p^2q-(1-3pq^2)(1-p^2q)=-3p^3(1-p)^3$$

$$(\sigma_{Y_1Y_2})'=-9p^2(1-p)^2(1-2p)=0\Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

$$(\sigma_{Y_1Y_2})_{Min}=-3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{3}{64}$$

【例 50】$\Phi(x)\sim N(0,\ 1)$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\Phi\left(x+\frac{a}{x}\right)}{1-\Phi(x)}$

解：$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\Phi\left(x+\frac{a}{x}\right)}{1-\Phi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\varphi\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{a}{x^2}\right)}{-\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x+\frac{a}{x}\right)^2}{2}}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-a-\frac{a^2}{2x^2}}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)}{e^{-\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-a-\frac{a^2}{2x^2}}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)=e^{-a}。$$

【例 51】设 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$P\left\{Y=-\frac{1}{2}\right\}=1$，$n$ 维向量 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性无关，求向量

$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+2\alpha_3,\ X\alpha_3+Y\alpha_1$ 线性相关的概率。

解：$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+2\alpha_3,\ X\alpha_3+Y\alpha_1$ 线性相关，必有

$$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+2\alpha_3,\ X\alpha_3+Y\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\Y & 0 & X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\Y & 0 & X\end{vmatrix}=0\Rightarrow X+2Y=0$$

$$P\{X+2Y=0\}=P\{X=0,\ Y=0\}+P\left\{X=1,\ Y=-\frac{1}{2}\right\}\xrightarrow{\because P\left\{Y=-\frac{1}{2}\right\}=1}=P\left\{X=1,\ Y=-\frac{1}{2}\right\}=P\left\{Y=-\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{4}$$

【例52】$(X,Y)\sim U(0,\ 2;\ 0,\ 1)$，求 $A=\begin{pmatrix}0 & -Y & 0\\ X & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值全为实根的概率。

解：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & Y & 0\\ -X & \lambda-2 & 0\\ -2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+XY)=0\Rightarrow\Delta=4-4XY\geq 0\rightarrow XY\leq 1$$

$$P\{XY\leq 1\}=\iint_{xy\leq 1}f(x,y)dxdy=\iint_{xy\leq 1}\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}(S_1+S_2)=\frac{1}{2}\left(1+\int_1^2dx\int_0^{\frac{1}{x}}dy\right)=\frac{1}{2}(1+\ln 2)。$$

第四章 随机变量的数字特征模拟题

一．填空题

1．某产品的次品率为0.1，检验员每天检验4次。每次随机地取10件产品进行检验，如发现其中的次品数多于1，就去调整设备，以X表示一天中调整设备的次数，则X的数学期望为________，方差为________（设诸产品是否为次品是相互独立的）。

2．设X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$ 且$E(X)=\frac{1}{2}$，则$a=$_____，$b=$_____.

3．设随机变量X的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, x<-1, \\ 0.2, -1\le x<0, \\ 0.6, 0\le x<1, \\ 1, x\ge 1. \end{cases}$ 则$E(|X|)=$____，　$D(|X|)=$_____.

4．设随机变量X和Y的相关系数 $\rho_{XY}=0.7$，若Z=X+0.8，则Y与Z的相关系数为_____.

5．设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=X^{2n}$（n为正整数），则相关系数$\rho_{XY}=$________。

二．选择题

1．设离散型随机变量X的所有可能取值为：$x_1=1, x_2=2, x_3=3$，且$E(X)=2.3$，　$D(X)=0.61$，则

x_1, x_2, x_3所对应的概率为

（A）$p_1=0.1, p_2=0.2, p_3=0.7.$　　（B）$p_1=0.2, p_2=0.3, p_3=0.5.$

（C）$p_1=0.3, p_2=0.5, p_3=0.2$　　（D）$p_1=0.2, p_2=0.5, p_3=0.3.$　　[　]

2．设X是一随机变量，且$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$（μ,σ^2为常数），则对任意常数c必有

（A）$E[(X-c)^2]\ge E[(X-\mu)^2].$　　（B）$E[(X-c)^2]=E[(X-\mu)^2].$

（C）$E[(X-c)^2]<E[(X-\mu)^2].$　　（D）$E(X-c)^2=E(X^2)-c.$　　[　]

3．设随机变量X和Y相互独立，且同服从（0，1）上的均匀分布，则服从相应区间或区域上均匀分布的是

（A）X^2　　（B）X＋Y　　（C）X－Y　　（D）（X，Y）　　[　]

4．设随机变量X与Y相互独立，则

（A）D(X Y)＝D(X)D(Y)　　（B）$E\left(\frac{X}{Y}\right)=\frac{E(X)}{E(Y)}$

（C）D(X Y)<D(X)D(Y)　　（D）$E\left(\frac{X}{Y}\right)=E(X)E(\frac{1}{Y})$　　[　]

5．设二维连续型随机变量（X，Y）服从 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$ 上的均匀分布，则

（A）X和Y不相关，不独立。　　　　（B）X和Y相互独立。

（C）X和Y相关。　　　　（D）X和Y均服从 $(-a,\ a)$ 上的均匀分布。　[　]

6．设随机变量 X_1和X_2 独立同分布（方差大于零），令 $X=X_1+aX_2, Y=X_1+bX_2$，$(ab\ne 0)$。如果X与Y不相关，则有

（A）a与b可以是任意实数。　　　　（B）a与b一定相等。

（C）a与b互为负倒数。　　　　（D）a与b互为倒数。　[　]

7．已知随机变量X在区间［－1，　1］上服从均匀分布，随机变量 $Y=X^2$，则X与Y

（A）相关且不独立　　　　（B）不相关且独立

（C）不相关且不独立　　　　（D）相关且独立　[　]

三．解答题

1．从1,2,3,4,5中任取一个数，记为X，再从1,2,…，X中任取一个数，记为Y，求Y的数学期望E(Y)。

2．一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他的信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以X表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数。求 $E(\frac{1}{1+X})$。

3．设（X,Y）的分布律为：

Y \ X	−1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	0.15	0	0.1

求E(XY)，D(XY)。

4．设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

求E(XY)，D(XY)。

5.两台自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 $\lambda=5$ 的指数分布。若先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自动开启。试求两台记录仪无故障工作的总时间T的数学期望与方差。

6．设 X_1 与 X_2 相互独立，且均服从 $N(\mu,\sigma^2)$，试求 $E[\min(X_1,X_2)]$.

7．在线段[0,1]上取n个点，求其中最远两点间距离的数学期望。

8．设随机变量（X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

求E(X)，E(Y)，Cov(X,Y)，ρ_{XY}，D(X+Y)。

9．假设一部机器在一天内发生故障的概率为0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周5个工作日无故障，可获利润10万元；发生一次故障，可获利润5万元；发生二次故障，可获利润0元；发生三次或

三次以上故障就要亏损2万元。求一周内期望利润是多少？

10. 设某种商品每周的需求量X是服从区间[10，30]上均匀分布的随机变量，而经销商店进货量为区间[10，30]中的某一整数，商店每销售一单位商品可得利润500元；若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损100元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每单位仅获利300元。为使商店所获利润期望值不少于9280元，试确定最少进货量。

第四章 随机变量的数字特征模拟题答案

一．填空题

1．E(X)＝1.0556，D(X)=0.7778.　2．a=0，b=1.　3.E(|X|)＝0.6，D(|X|)＝0.24

4. $\rho_{ZY}=0.7$　　5. $\rho_{XY}=0$

二．选择题

1.（B）　2. （A）　3. （D）　4. （D）　5. （A）　6. （C）　7. （C）

三．解答题

1. E(Y) =2。

2. 先求 X 的分布律，再按函数数学期望公式进行计算。$E(\frac{1}{1+X})=\frac{67}{96}$。

3. E(XY)＝0,　D(XY)＝2.9

4. E(XY)＝1,　D(XY)＝3

5．E(T)＝$\frac{2}{5}$, $D(T)=\frac{2}{25}$

6. 令$Y_1=\frac{X_1-\mu}{\sigma},Y_2=\frac{X_2-\mu}{\sigma}$,则$Y_1$与$Y_2$独立且均服从 N（0,1），

$$\min(Y_1,Y_2)=\frac{1}{2}(Y_1+Y_2-|Y_1-Y_2|),E(\min(X_1,X_2))=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

7. 数轴上两点间的距离为对应坐标之差的绝对值，问题为求随机变量函数的数学期望与方差。$E(Z)=\frac{n-1}{n+1}$.

8. $E(X)=\frac{7}{6},\ E(Y)=\frac{7}{6},\ Cov(X,Y)=-\frac{1}{36},\ \rho_{XY}=-\frac{1}{11},\ D(X+Y)=\frac{5}{9}.$

9. 期望利润为 5.20896（万元）。

10. 先写出每周利润 Y 是进货量 a 和需求量 X 的函数，再求含参数的一维随机变量函数的数学期望，最少进货量为 21 个单位。