数学物理方法作业答案

潘逸文*, 余钊焕†
中国广州中山大学物理学院

January 1, 2020

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 QQ 群文件，或 `https://panyw5.github.io/courses/mmp.html` 以及 `http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html` 找到。

*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn
†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{e}, \qquad (b)\ 2+\sqrt{2}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \qquad (d)\ \sqrt{3}+i \text{ 的所有 7 次方根} \tag{1.1}$$

答 (辐角可任意添加 $2\pi n$ 都对)

$$(a)\ \frac{i}{e}=\frac{e^{\pi i/2}}{e}=\left(\frac{1}{e}\right)e^{\pi i/2} \tag{1.2}$$

$$(b)\ |2+\sqrt{2}i|=\sqrt{2^2+2}=\sqrt{6}, \Rightarrow 2+\sqrt{2}i=\sqrt{6}e^{i\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}} \tag{1.3}$$

$$(c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}=1+e^{\frac{9\pi i}{14}+\frac{-\pi i}{7}}=1+e^{\frac{\pi i}{2}}=1+i=\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))=\sqrt{2}e^{\pi i/4} \tag{1.4}$$

$$(d)\sqrt{3}+i=2e^{i\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{6}}\Rightarrow(\sqrt{3}+i)^{1/7}=2^{1/7}e^{\frac{i\pi}{42}}e^{\frac{2\pi k i}{7}}, \qquad k=0,1,2,\ldots 6 \tag{1.5}$$

2. 定义点集 $S_N\equiv\{z^N|z\in N(0,R)\}$, 其中 $R>0$, $N=1,2,\ldots\in\mathbb{N}_{>0}$。讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集，是否真子集，写明推理。

答：S_N 实际上可以写成 $S_N=\{z\in\mathbb{C}||z|<R^N\}=N(0,R^N)$.

(1) 当 $R>1$, $R^{N+1}>R^N$, 因此 $S_N\subset S_{N+1}$，是真子集

(2) 当 $R=1$, $R^{N+1}=R^N$, 因此 $S_N=S_{N+1}$，不是真子集

(3) 当 $R<1$, $R^{N+1}<R^N$, 因此 $S_{N+1}\subset S_N$，是真子集

3. 设点集 $S\equiv\{z\in\mathbb{C}\mid|z|\le R\}$，其中 $R>0$。求解最大的 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

(1) 当 $0<R\le1$，z 作为任意内点，有 $|z|<R\le1$。因此对于任何 $N>1$, $|z^N|=|z|^N<|z|$，从而 z^N 也还是内点。因此，$0<R\le1$ 时 N 可以任意大，没有最大值，或说 $N_{\max}=+\infty$。

(2) 当 $R>1$，则 z 作为任意内点，可能有 $|z|>1$，尤其是极为靠近边界的内点。对于这些点，$|z^2|=|z|^2$ 已经大于 R 了，但是 $z^1=z$ 自然还是内点。因此 $N_{\max}=1$。

4. 考虑点集 $S\equiv\{z\in\mathbb{C}\mid|z-1|+|z+1|<R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域？是否单连通？

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R>2$ 时，点集恰为以 ±1 为焦点的椭圆内部，因此是区域，且单连通。

当 $R\le2$ 时，点集为空集，不是区域，说连不连通都可以。

2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|+|z+1|<R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域？是否单连通？

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R>2$ 时，点集恰为以 ± 1 为焦点的椭圆内部，因此是区域，且单连通。

当 $R \le 2$ 时，点集为空集，不是区域，说连不连通都可以。

1. 用代数式 (即 $x+iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a>0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

答：(有多值现象时可以只写某个单值分支的结果)

$$(a)\ a^i = e^{i\ln a} = \cos(\ln a) + i\sin(\ln a) \tag{2.2}$$

$$(b)\ i^{a+bi} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i(a+bi)} = e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})ia-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b} \tag{2.3}$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b}\cos(\frac{\pi a}{2}+2k\pi a) + ie^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)b}\sin(\frac{\pi a}{2}+2k\pi a) \tag{2.4}$$

$$(c)\ \sin(a+ib) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+ib)} - e^{-i(a+ib)}) = \frac{1}{2i}(e^{-b}e^{ia} - e^{b}e^{-ia}) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{2i}((\cos a + i\sin a)e^{-b} - (\cos a - i\sin a)e^{b}) = \frac{1}{2}\Big((e^b+e^{-b})\sin a + i(e^b-e^{-b})\cos a\Big)\ . \tag{2.6}$$

2. 设 $u(x,y) = e^x\sin y,\ v(x,y) = -e^x\cos y$，并考虑复变函数 $w = u(x,y)+iv(x,y)$。验证 w 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数。

答：直接计算

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x\cos y\ . \tag{2.7}$$

显然满足 CR 条件。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

答：由于 f 的值域是 $\mathbb{R}$ 的子集，因此 $f = u+iv$ 中 $v=0$。因此由 CR 条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \tag{2.8}$$

即 u 与 x, y 都无关，是常数。因此 $f = u =$ 常数。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = e^x x\cos y - e^x y\sin y$，求其虚部，并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

答：设 $v(x,y)$ 存在，则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x x\sin y - e^x y\sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x x\cos y + e^x\cos y - e^x y\sin y\ . \tag{2.9}$$

从而可以计算

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} -(e^x x\sin y + e^x y\sin y)dx + (e^x x\cos y + e^x\cos y - e^x y\sin y)dy \tag{2.10}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} -(e^x x\sin y + e^x y\sin y)dx + \int_{(0,x)}^{(x,y)} (e^x x\cos y + e^x\cos y - e^x y\sin y)dy \tag{2.11}$$

$$= +e^x x\int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y)dy + e^x\int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y)dy - e^x\int_{(x,0)}^{(x,y)} (y\sin y)dy \tag{2.12}$$

$$= e^x(y\cos y + x\sin y) \tag{2.13}$$

因此 $v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + C$。于是

$$u + iv = e^x x\cos y - e^x y\sin y + ie^x(y\cos y + x\sin y) + iC \tag{2.14}$$

$$= e^x(x\cos y - y\sin y + iy\cos y + ix\sin y) + iC \tag{2.15}$$

$$= e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) + iC \tag{2.16}$$

$$= ze^z + iC\ . \tag{2.17}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$。

3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z}dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R > 0$，逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R > 0$，逆时针方向)。

答：利用参数积分计算积分。令 $z = re^{i\theta}$, 于是沿着积分曲线有 $dz = rie^{i\theta}d\theta$，

$$I(C) = \int_C \bar{z}dz = \int_C re^{-i\theta}rie^{i\theta}d\theta = (r^2)\big|_{r=R} i\int d\theta\ . \tag{3.1}$$

于是有

$$I(C_1) = i\int_0^\pi d\theta = \pi iR^2, \qquad I(C_2) = i\int_{-\pi}^0 d\theta = i\pi R^2\ . \tag{3.2}$$

2. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z,\bar{z})d\bar{z}dz\ , \tag{3.3}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

答：对于题目所述的复变函数，我们可以先对 f 复积分作实部虚部分解（如果直接对 f 用格林公式，没有实虚分解，也算对），并分别利用格林公式，

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_{\partial G}(udx - vdy) + i\int_{\partial G}(vdx + udy) \tag{3.4}$$

$$= -\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)dxdy + i\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy\ . \tag{3.5}$$

又注意到

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\ , \tag{3.6}$$

因此代入 $d\bar{z}dz = 2idxdy$，有

$$\partial_{\bar{z}} f d\bar{z}dz = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)2idxdy + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)2idxdy \tag{3.7}$$

$$= i\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy - \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy\ . \tag{3.8}$$

比较 $\int_G \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}dz$ 与上面结果可得目标结果。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z}dz\ . \tag{4.1}$$

答：由于 $\sin(\cos z)$ 在全平面解析，我们可以利用 Cauchy 积分公式

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z}dz = 2\pi i \sin(\cos z)|_{z=0} = 2\pi i \sin(1)\ . \tag{4.2}$$

1. 计算围道积分

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\ \}. \tag{4.3}$$

答:

$$\Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k \frac{1}{z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{z^{n-2k}}\ . \tag{4.4}$$

因此

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{n} \oint_C C_n^k \frac{1}{z^{n-2k+1}}dz\ . \tag{4.5}$$

只有当 $n-2k+1=1$ 才有非零积分值，即此时 $n=2k$，即 n 是偶数。积分值为

$$2\pi i C_n^k = 2\pi i C_{2k}^k \ . \tag{4.6}$$

也可以用高阶导数公式来做。

$$\oint \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int (z^2+1)^n \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=0} (z^2+1)^n \tag{4.7}$$

$$= \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=0} \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{2m} \ . \tag{4.8}$$

注意到

$$\frac{d^k}{dz^k}\Big|_{z=0} z^\ell = k!\delta_{k\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ k!, & k = \ell \end{cases} \ , \tag{4.9}$$

因此

$$\frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\Big|_{z=0} \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{2m} = \frac{2\pi i}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m n! \delta_{n,2m} = 2\pi i C_n^{n/2} \quad \text{if } n \in \mathbb{Z}_{\text{even}}, \quad \text{and } 0 \text{ if } n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \ . \tag{4.10}$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} \ , \qquad C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\ \} \ . \tag{4.11}$$

答：由高阶导数公式，可以得到

$$= \frac{2\pi i}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} [(e^z)^{(n)}]_{z=0} = \frac{2\pi i}{n!} \ . \tag{4.12}$$

也可以用泰勒展开

$$\oint \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} = \oint \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{z^m}{z^n} \frac{1}{z} dz \tag{4.13}$$

由于只有 $1/z$ 会对积分有贡献，因此只有 $m=n$ 会有贡献，

$$\oint \sum_m \frac{1}{m!} \frac{z^m}{z^n} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \frac{1}{n!} \ . \tag{4.14}$$

也可以用实函数泰勒展开

$$\oint \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} = \oint \frac{e^z \bar{z}^{n+1}}{z^n \bar{z}^n} \frac{dz}{z\bar{z}} = \oint e^z \bar{z}^{n+1} dz = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} (\cos\theta - i\sin\theta)^{n+1} i(\cos\theta + i\sin\theta) d\theta \tag{4.15}$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i\cos\theta} (\cos\theta - i\sin\theta)^n d\theta \ , \tag{4.16}$$

其中用到 $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=1$。于是

$$
\begin{aligned}
& i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}e^{i\cos\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)^n d\theta & (4.17)\\
=& i\int_0^{2\pi}\sum_{k,\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\ell!}\cos^k\theta(i\sin\theta)^\ell(\cos\theta-i\sin\theta)^n d\theta & (4.18)\\
=& i\int_0^{2\pi}\sum_{K=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!(K-k)!}\cos^k\theta(i\sin\theta)^{(K-k)}(\cos\theta-i\sin\theta)^n d\theta & (4.19)\\
=& i\int_0^{2\pi}\left[\sum_{K=0}^{+\infty}\frac{1}{K!}\sum_{k=0}^{K}\frac{K!}{k!(K-k)!}\cos^k\theta(i\sin\theta)^{(K-k)}\right](\cos\theta-i\sin\theta)^n d\theta & (4.20)\\
=& i\int_0^{2\pi}\left[\sum_{K=0}^{+\infty}\frac{1}{K!}(\cos\theta+i\sin\theta)^K\right](\cos\theta-i\sin\theta)^n d\theta\ . & (4.21)
\end{aligned}
$$

积分时，只有 $\cos\theta\pm i\sin\theta$ 的零次方项有贡献，因为

$$\int_0^{2\pi}(\cos\theta\pm i\sin\theta)^N d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\pm iN\theta}d\theta=0,\ \text{unless } N=0\ . \tag{4.22}$$

于是只有 $K=n$ 才有贡献，此时积分函数为 $(n!)^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta)^n(\cos\theta-i\sin\theta)^n=1/n!$，因此

$$\int=2\pi i\frac{1}{n!}\ . \tag{4.23}$$

5 第五周 (10 月 8 日交；作为一次考查)

1. 设函数 $f(z)$ 在 $\overline{N(0,R)}$ 上解析。计算积分

$$\oint_C f(z)\bar{z}^{n+1}dz,\qquad C=\partial N(0,R)\ . \tag{5.1}$$

其中 $n\in\mathbb{N}$，$R>0$。

答：在积分路径上 $z\bar{z}=R^2\Rightarrow\bar{z}=R^2/z$，得到

$$\int_C f(z)\bar{z}^{n+1}dz=R^{2(n+1)}\int_C f(z)\frac{1}{z^{n+1}}dz=R^{2(n+1)}\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(0)\ . \tag{5.2}$$

2. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty}r_kc_k$, 其中 $r_k=(-1)^{k^2}$, $c_k=(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{k}$。分情况 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 讨论级数是否收敛，是否绝对收敛，给出简要说明。

答：级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k^2}(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k}\ . \tag{5.3}$$

当 $\theta = 0$, 级数为

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{5.4}$$

是个发散级数。

当 $\theta = \pi$，级数为

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 \tag{5.5}$$

是收敛级数，但不是绝对收敛。

3. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n \ , \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n \ . \tag{5.6}$$

答：

$$\ell \equiv \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \infty \ . \tag{5.7}$$

因此第一个级数收敛，收敛半径是无穷大。

$$\ell \equiv \lim_{n\to\infty} \left[(1 - \frac{1}{n})^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = 1 \ . \tag{5.8}$$

第二个级数收敛，收敛半径是 1.

4. 设 $f(z)$ 是 $N(0,1)$ 内的解析函数。计算 $(1-z)^{-1} f(z)$ 以原点 $a = 0$ 为中心的泰勒展开（给出泰勒级数通项，用 f 的各阶导数表达）。

答：可分别对 $1/(1-z)$ 与 $f(z)$ 作泰勒展开，

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) z^m\right) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} z^{m+n} 1^n \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) = \sum_{N=0}^{+\infty} \left[\sum_{m=0}^{N} 1^{N-m} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)\right] z^N \tag{5.9}$$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty} c_N z^N \ , \tag{5.10}$$

其中

$$c_N \equiv \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) \tag{5.11}$$

5. 考虑 3 个互异复数 $a_i, i = 1, 2, 3$。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} dz, \tag{5.12}$$

其中 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$。化简最后结果。

答：首先，积分曲线是个大圆，把三个奇点 $a_1, a2, a3$ 包含在内。可以用复连通区域 Cauchy 积分定理，得到

$$\oint_C = \sum_i \oint_{\partial N(a_i, \epsilon)} \ . \tag{5.13}$$

接着使用 Cauchy 积分公式，得到

$$= -\frac{2\pi i}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)} - \frac{2\pi i}{(a_1-a_3)(a_3-a_2)} + \frac{2\pi i}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} = 0 \ . \tag{5.14}$$

也可以使用留数定理。

6 第七周 (10 月 15 日交)

考虑二元函数 $u(x, y)$

$$u(x,y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \ . \tag{6.1}$$

设 $u(x, y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z = x + iy)$ 的实部。

(1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x, y)$，并写出函数 $f(z)$ 关于 $z = x + iy$ 的表达式；

(2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类；

(3) 分别以 $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$ 为展开中心，作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

答：

(1) 对 $u(x, y)$ 求偏导得到

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \ , \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = +\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \ . \tag{6.2}$$

虚部函数 $v(x, y)$ 必然满足

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \ , \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \ . \tag{6.3}$$

于是 (也可以直接观察到 $v(x, y)$ 是什么，然后验证满足 Cauchy-Riemann 条件)

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} dx - \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} dy \ . \tag{6.4}$$

路径可以选为先沿 x 轴 $(y=0)$ 然后沿线段 $(x,0)\to(x,y)$。于是有 (dx 积分不贡献)

$$= \int_{(x,0)}^{(x,y)} -\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}dy = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + C\ . \tag{6.5}$$

于是，(积分常数不能漏)

$$u+iv = \frac{x^2-y^2-2ixy}{(x^2+y^2)^2} + iC = \frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{1}{z^2} + iC\ . \tag{6.6}$$

(2) 奇点为 $z=0$，是二阶极点。

(3) $z=\pm1$ 为解析点，可以以它们为中心作 Taylor 展开。又知导数

$$\frac{d^k}{dz^k}z^{-2} = (-2)(-2-1)\ldots(-2-k+1)z^{-2-k} = (-1)^k 2\cdot 3\cdot\ldots(k+1)z^{-k-2} = (-1)^k(k+1)!z^{-k-2}\ , \tag{6.7}$$

因此

$$\left.\frac{d^k}{dz^k}\right|_{z=1} z^{-2} = (-1)^k(k+1)!, \qquad \left.\frac{d^k}{dz^k}\right|_{z=-1} z^{-2} = (-1)^k(k+1)!(-1)^{-k-2} = (k+1)!\ . \tag{6.8}$$

因此以 1 为中心的 Taylor 展开为 (积分常数不能漏)

$$f(z) = iC + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(z-1)^k\ , \tag{6.9}$$

因此以 -1 为中心的 Taylor 展开为

$$f(z) = iC + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z+1)^k\ . \tag{6.10}$$

在环形区域 $0<|z|<\infty$ 内函数可以作 Laurent 展开，就是函数本身

$$\frac{1}{z^2} + iC = \frac{1}{z^2} + iC\ . \tag{6.11}$$

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1}\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ . \tag{6.12}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域；

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$ 然后比较)。

答：

(1) 有圆盘状解析区域 $|z|<1$ 和环状解析区域 $1<|z|<\infty$。

(2) 在 $|z|<1$ 区域内可以作 Taylor 展开，

$$-\frac{z^n}{1-z}=-z^n\sum_{k=0}^{\infty}z^k=-\sum_{k=0}^{\infty}z^{n+k}=-z^n-z^{n+1}-z^{n+2}-\ldots\ . \tag{6.13}$$

的确每个系数都与 $f^{(n)}(0)/n!$ 相等，

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)_{n=2}=0,1,1,\qquad \text{当}\ k=1,2,3\ . \tag{6.14}$$

在环状区域 $0<|z|<\infty$ 可以作 Laurent 展开,

$$-\frac{z^n}{1-z}=+\frac{1}{z}\frac{z^n}{1-z^{-1}}=+\frac{1}{z}z^n\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=+\sum_{k=0}^{\infty}z^{n-k-1}=+z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\ldots\ . \tag{6.15}$$

当 $n=2$,

$$-\frac{z^2}{1-z}=+z+1+z^{-1}+\ldots\ , \tag{6.16}$$

与 $f^{(k)}(0)/k!$ 不相等。

7 第八周 (10 月 22 日交)

1. 计算下面函数在 $z=0$ 的留数

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3}\ ,\qquad (b)\ \frac{e^z}{z^3}\ . \tag{7.1}$$

答：(a) 中 0 为 3-阶极点，可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 0}\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=0}\left[(z)^3\frac{\cos z}{z^3}\right]=-\frac{1}{2}\ . \tag{7.2}$$

(b) 中 0 为 3-阶极点，可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 0}\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=0}\left[(z)^3\frac{e^z}{z^3}\right]=+\frac{1}{2}\ . \tag{7.3}$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a)\ \frac{1}{\sinh\pi z},\quad z=ni,\ n\in\mathbb{Z}\ ,\qquad (b)\ \frac{e^z}{z^2-1},\quad z=1\ . \tag{7.4}$$

答：(a) 中 $z=ni$, $n\in\mathbb{Z}$ 是 $\sinh(\pi z)$ 的单极点，因此可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z=ni}\frac{1}{\sinh\pi z}=\frac{1}{(\sinh\pi z)'_{z=ni}}=\frac{1}{\pi\cosh n\pi i}=(-1)^n\frac{1}{\pi}\ . \tag{7.5}$$

(b) 中 $z=1$ 为单极点，因此可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 1}\frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e^1}{(z^2-1)'_{z=1}} = \frac{e}{2} \ . \tag{7.6}$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \oint_{|z|=\rho>1}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz\ , \qquad (b)\ \oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n}}dz\ , n=1,2,\dots\ . \tag{7.7}$$

答：(a) 由于围道的半径大于一，所以包含在围道内部的奇点有 $z=0$ 和 $z=1$。积分等于 $2\pi i$ 乘以留数之和，而两个奇点分别为单极点，因此可以简单计算留数

$$\mathrm{Res}_{z=0} = \frac{-2}{-1} = 2\ , \qquad \mathrm{Res}_{z=1} = \frac{3}{1} = 3\ . \tag{7.8}$$

因此积分为 $2\pi i(2+3) = 10\pi i$。

(b) 由于围道包围 $(2n)$-阶极点 $z=0$，因此只需要收集该处留数。又由于 $\cos z$ 在 z 处的泰勒展开只有偶数次幂项，因此分式的 Laurent 展开只有偶数次幂项。因此 z^{-1} 次幂项为零，留数为零。因此积分为零。

4. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ a>0\ , \qquad (b)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx\ , \quad m\in\mathbb{Z}_+, a>0\ . \tag{7.9}$$

(a) 见林老师讲义中第 7 小节例 1 $m=1$ 的计算

(b) 首先积分函数是个偶函数，因此可以先扩充积分区域

$$I(m) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{i}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\sin mx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx + i\sin mx}{x(x^2+a^2)} \tag{7.10}$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x(x+ia)(x-ia)}\ . \tag{7.11}$$

函数 $\frac{1}{x(x+ia)(x-ia)}$ 在上半平面和实轴上有单极点 0 和 ia。因此可以用公式

$$I(m) = \frac{1}{2i}2\pi i\Big(\frac{1}{2}\mathrm{Res}_{z\to 0}\frac{1}{z(z-ia)(z+ia)}e^{imz} + \mathrm{Res}_{z\to ia}\frac{1}{z(z-ia)(z+ia)}e^{imz}\Big) \tag{7.12}$$

$$= \frac{1}{2i}2\pi i\left(\frac{1}{2}\frac{1}{-ia(ia)} + \frac{1}{ia}\frac{1}{2ia}e^{imia}\right) \tag{7.13}$$

$$= \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-ma}\right)\ . \tag{7.14}$$

8 第九周 (11 月 5 日交；作为期中考查)

1. 列出以下函数的 (除无穷远点外) 的所有孤立奇点及其类型。

$$(a)\ \frac{z}{(\sin z)^3}, \qquad (b)\ \frac{1}{z^2+a^2},\ a\in\mathbb{R}, \qquad (c)\ \cosh\frac{1}{z}\ . \tag{8.1}$$

答

(a) $z = n\pi$ 当 $n \neq 0$ 是三阶极点，$z = 0$ 是二阶极点。

(b) 当 $a \neq 0$，$z = \pm a$ 是两个单极点；当 $a = 0$，$z = 0$ 是个二阶极点。

(c) $z = 0$ 是个本性奇点。

2. 考虑互异有限复数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, 且 $m > n$，定义函数

$$f(z) \equiv \frac{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}{(z-b_1)\ldots(z-b_m)} \ . \tag{8.2}$$

(a) 记 D 为 $f(z)$ 的解析区。则 b_j 和 a_i 为 D 的什么点 (内点、聚点、边界点)? D 是单连通还是复连通?

(b) 说明 a_i 和 b_j 分别是 $f(z)$ 的什么特殊点，指出分类。

(c) 求 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, 指出 ∞ 的奇点分类，并计算 $\mathrm{Res}_{z\to\infty} f(z)$。

答：(a) a_i 是内点，也是聚点；b_i 是边界点，也是聚点。由于 $m > n \geq 0$，因此至少有一个奇点 b_1，使得解析区是复连通。

(b) a_i 是 f 的一阶零点，b_i 是单极点。

(c) 由于 $m > n$，$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ 极限存在且有限，无穷远点是可去奇点（也可以考虑 $f(1/z')$ 并且发现 $z' = 0$ 是可去奇点来说明）。当 $|z| > |b_i|, \forall i$，可以作展开

$$f(z) = \frac{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}{z^m}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{b_1}{z}\right)^k\right]\ldots\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{b_m}{z}\right)^k\right] \ . \tag{8.3}$$

第一个因子的领头项是 z^{n-m}，后面的因子的领头项是 1，然后会有 z 的高负幂次项，因此

$$f(z) = z^{n-m} + p_1 z^{n-m-1} + p_2 z^{n-m-2} + \ldots \ . \tag{8.4}$$

(1) 当 $n - m = -1$，即 $m = n + 1$，$f(z)$ 展开的 z^{-1} 项系数为 1, 此时 $\mathrm{Res}_{z\to\infty} f(z) = -1$; (2) 当 $m = n+2, n+3, \ldots$ 时，$f(z)$ 的 z^{-1} 项系数为零，此时 $\mathrm{Res}_{z\to\infty} f(z) = 0$。

若用留数定理计算积分，然后通过观察 m, n 比较小的时候的行为，作出正确的结论，也算对。

3. 考虑双边幂级数

$$\Theta(\zeta; q) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n^2}{2}} \zeta^n \ , \qquad |q| < 1. \tag{8.5}$$

(a) 求该 ζ-双边级数的收敛环。

(b) 求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \frac{\Theta(\zeta;q)}{\zeta^n} d\zeta \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ . \tag{8.6}$$

(c) 定义 $\vartheta(z|\tau) \equiv \Theta(e^{2\pi i z}; e^{2\pi i \tau})$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$。证明 $\vartheta(x|it)$ 是某热扩散方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \tag{8.7}$$

的一个解，并确定参数 a^2 的值。

答:

(a) 由于 $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^{\frac{(n+1)^2}{2}}}{q^{\frac{n^2}{2}}} = 0$，因此收敛环是 $0 < |z| < +\infty$。

(b) 显然原题级数即为 Θ 的 Laurent 级数，因此

$$q^{\frac{n^2}{2}} = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{\Theta(z;q)}{z^{n+1}}dz \Rightarrow q^{\frac{(n-1)^2}{2}} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint \frac{\Theta(z;q)}{z^n}dz \ , \tag{8.8}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\Theta(z;q)}{z^n}dz = \frac{1}{(n-1)!}q^{\frac{(n-1)^2}{2}} \ . \tag{8.9}$$

(c) 直接代入，

$$\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(x|it) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_n e^{2\pi i i t\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i x} = -2\pi \sum_n \frac{n^2}{2} e^{2\pi i i t\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i n x} \tag{8.10}$$

$$= \ -\pi \sum_n n^2 e^{2\pi i i t\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i n x} \tag{8.11}$$

$$= \ -\pi \sum_n \frac{-1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{2\pi i i t\frac{n^2}{2}} e^{2\pi i n x} \ , \tag{8.12}$$

hence we have

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vartheta(x|it) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = \frac{1}{4\pi} \ . \tag{8.13}$$

4. 深受广大人民群众喜爱的 Γ 函数是自然数的阶乘函数的一种解析延拓。当 $\mathrm{Re}\,z > 0$，定义

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx \ . \tag{8.14}$$

(a) 证明当 $\mathrm{Re}\,z > 0$，有 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$。

(b) 求 $\Gamma(1)$，并推出 $\Gamma(n+1) = n!$。

(c) $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到几乎整个复平面。证明 $0, -1, -2, \ldots$ 等非正整数为延拓后 $\Gamma(z)$ 的单极点。

(d) 求 $\mathrm{Res}_{z\to -n}\,\Gamma(z)$。

答:

(a) 使用分部积分

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} x^z e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^z de^{-x} = -e^{-x}x^z\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^z \tag{8.15}$$

$$= 0 + z\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = z\Gamma(z) \ . \tag{8.16}$$

注意，$\lim_{x\to+0} x^z = \lim_{x\to+0} x^{\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z}$，只有当 $\operatorname{Re} z > 0$，这个极限才是零。

(b) 显然

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)}\cdots\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}\Gamma(1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n! \ . \tag{8.17}$$

(c) 首先可以看出之前的递推公式也可以随着延拓，因为可以定义

$$f(z) \equiv \Gamma(z+1) - z\Gamma(z) \ , \tag{8.18}$$

这个函数在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 区域处处为零，因此在整个延拓后的解析区域也为零，因此只要 $\Gamma(z+1)$ 与 $\Gamma(z)$ 有定义，就必然满足该递推公式。

因此对 $\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} \ , \qquad \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+2)} = \frac{1}{z+1}, \quad \ldots \quad \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z+n+1)} = \frac{1}{z+n} \ . \tag{8.19}$$

乘起来，有

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \ , \tag{8.20}$$

于是

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z+n} \times \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \ . \tag{8.21}$$

注意到，当 $z \to -n$, $z+n+1 \to +1 \in \operatorname{Re} z > 0$，于是第二个因子的分子和分母都在 $z = -n$ 附近解析，因此 $z = -n$ 是单极点。

(d) 记

$$\varphi(z) \equiv \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \ , \tag{8.22}$$

则 $\varphi(z)$ 是个在 $z = -n$ 处解析。因此

$$\operatorname{Res}_{z\to-n} = \frac{\varphi(-n)}{(z+n)'|_{z\to-n}} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \ . \tag{8.23}$$

5. 弦在阻尼介质中横向振动，t 时刻 x 处单位长度所受阻力 (与振动方向相反) 为

$$F(x,t) = -R\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{8.24}$$

其中 R 称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

答：考虑弦上平衡时位于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段，记该小段的平均阻力密度为 $\bar{F}$，则该小段在 u 方向的运动方程为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 + \bar{F}\Delta x = T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) - R\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\Delta x, \tag{8.25}$$

即

$$\rho\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = T\frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) - R\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}. \tag{8.26}$$

令 $\Delta x \to 0$，则 $\bar{u} \to u(x,t)$，上式成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{R}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{8.27}$$

（写到这里可以认为已经完成。）记 $a = \sqrt{T/\rho}$，$b = R/\rho$，则上式可以表达为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{8.28}$$

9 第十一周（11 月 12 日交）

1. 长为 l 的均匀导热细杆，热导率为 k，侧面绝热。$x=0$ 端的温度保持为 0 度，$x=l$ 端有热流进入，强度为 $q(t)$。已知杆的初始温度分布为 $x(l-x)$，写出杆内任意时刻温度分布的定解问题。

答：$x=0$ 端的温度保持为 0 度，即 $u|_{t=0}=0$。根据热传导定律，从 $x=l$ 端内侧看，流入的热流强度为 $k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$；从 $x=l$ 端外侧看，热流强度为已知量 $q(t)$；故 $k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = q(t)$。相应的定解问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (0<x<l, \quad t>0), \tag{9.1}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{q(t)}{k} \qquad (t \geq 0), \tag{9.2}$$

$$u|_{t=0} = x(l-x) \qquad (0 \leq x \leq l). \tag{9.3}$$

2. 长为 l 的弹性细杆，上端固定在电梯天花板，杆身竖直，下端自由。杆随电梯匀速下降，速度为 v_0，杆上各点处于平衡位置。$t=0$ 时电梯突然停止，求解 $t>0$ 时杆的纵振动。不考虑重力作用。

(1) 写出关于位移 $u(x,t)$ 的定解问题。

(2) 利用分离变量法，寻找 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 形式的特解，推出 $T(t)$ 满足的常微分方程和 $X(x)$ 满足的本征值问题。

(3) 求解关于 $X(x)$ 的本征值问题，得出相应的本征值和本征函数。

(4) 求解 $T(t)$，写出一般解 $u(x,t)$。

(5) 根据初始条件求出一般解的系数，写下定解问题的解。

答：(1) 定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (0<x<l,\quad t>0), \tag{9.4}$$

$$u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \qquad (t\geq 0), \tag{9.5}$$

$$u|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0 \qquad (0\leq x\leq l). \tag{9.6}$$

(2) 将 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程 (9.4)，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0, \tag{9.7}$$

故

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}\equiv-\lambda, \tag{9.8}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。因此，$T(t)$ 满足的常微分方程为

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, \tag{9.9}$$

$X(x)$ 满足的常微分方程为 $X''(x)+\lambda X(x)=0$。另一方面，由边界条件 (9.5) 得

$$X(0)T(t)=0,\quad X'(l)T(t)=0. \tag{9.10}$$

$T(t)$ 不恒为零，故 $X(0)=0$，$X'(l)=0$。于是，$X(x)$ 满足的本征值问题是

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{9.11}$$

$$X(0)=0,\quad X'(l)=0. \tag{9.12}$$

(3) 下面求解关于 $X(x)$ 的本征值问题。

a) 如果 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2$（其中 $\mu>0$），则方程的解为

$$X(x)=C\cosh\mu x+D\sinh\mu x. \tag{9.13}$$

由 $X(0)=0$ 得 $C=0$，则 $X'(l)=D\cosh\mu l=0$。由于 $\cosh\mu l\neq 0$，必有 $D=0$。这是平庸解，故 $\lambda<0$ 不是本征值。

b) 如果 $\lambda = 0$，则方程的解为

$$X(x) = Cx + D. \tag{9.14}$$

由 $X(0) = 0$ 得 $D = 0$。再由 $X'(l) = 0$ 得 $C = 0$。这是平庸解，故 $\lambda = 0$ 不是本征值。

c) 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$（其中 $\mu > 0$），则方程的解为

$$X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x. \tag{9.15}$$

由 $X(0) = 0$ 得 $C = 0$，则 $X'(l) = D\cos\mu l = 0$。因此，仅当 $\cos\mu l = 0$ 时存在非平庸解，此时 μ 的取值是 $\mu_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2l}$ $(n \in \mathbb{N})$。于是，本征值和本征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2 = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.16}$$

本征函数族 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,1]$ 上正交完备，满足

$$\big(X_m(x), X_n(x)\big) \equiv \int_0^l \sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx = \frac{l}{2}\delta_{mn}. \tag{9.17}$$

(4) 将本征值 λ_n 代入常微分方程 (9.9)，得

$$T_n''(t) + \left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 T_n(t) = 0, \tag{9.18}$$

解为

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.19}$$

从而，一般解是

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + B_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \tag{9.20}$$

(5) 将一般解代入初始条件 $u|_{t=0} = 0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = 0, \tag{9.21}$$

故

$$A_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.22}$$

根据

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \tag{9.23}$$

由初始条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = v_0. \tag{9.24}$$

利用本征函数族 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的正交完备性，有

$$\begin{aligned} B_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l} &= \frac{2}{l}\int_0^l v_0 \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = -\frac{2v_0}{l}\frac{2l}{(2n+1)\pi}\cos\left.\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right|_0^l \\ &= -\frac{4v_0}{(2n+1)\pi}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} - 1\right] = \frac{4v_0}{(2n+1)\pi}, \end{aligned} \tag{9.25}$$

故

$$B_n = \frac{4v_0}{(2n+1)\pi}\frac{2l}{(2n+1)\pi a} = \frac{8v_0 l}{(2n+1)^2\pi^2 a}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.26}$$

于是，定解问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8v_0 l}{(2n+1)^2\pi^2 a} \sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \tag{9.27}$$

10 第十二周（11 月 19 日交）

1. 矩形薄板，板面绝热，$x = 0, l$ 两边保持恒定温度零度，$y = 0, d$ 两边绝热，初始温度分布为 $f(x,y) = u_0 x/l$，其中 u_0 为常数，求以后的温度分布，并讨论 $t \to \infty$ 的极限。

答：（解法一）

定解问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < x < l, \quad 0 < y < d, \quad t > 0), \tag{10.1}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \qquad (t \geq 0), \tag{10.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=d} = 0 \qquad (t \geq 0), \tag{10.3}$$

$$u|_{t=0} = \frac{u_0 x}{l} \qquad (0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq d). \tag{10.4}$$

将 $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ 代入方程 (10.1)，得

$$X(x)Y(y)T'(t) - a^2 X''(x)Y(y)T(t) - a^2 X(x)Y''(y)T(t) = 0, \tag{10.5}$$

即

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \equiv -\lambda, \tag{10.6}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。从而有

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{10.7}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda \equiv -\mu, \tag{10.8}$$

其中 μ 是进一步分离变量时引入的常数。于是得到

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \tag{10.9}$$

其中 $\nu \equiv \lambda - \mu$，即

$$\lambda = \mu + \nu. \tag{10.10}$$

另一方面，由边界条件 (10.2) 和 (10.3) 可得

$$u|_{x=0} = X(0)Y(y)T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l)Y(y)T(t) = 0, \tag{10.11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = X(x)Y'(0)T(t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=d} = X(x)Y'(d)T(t) = 0. \tag{10.12}$$

故 $X(0) = X(l) = 0$，$Y'(0) = Y'(d) = 0$。

求解关于 $X(x)$ 的本征值问题

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \tag{10.13}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{10.14}$$

得到本征值和本征函数

$$\mu_m = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{l}, \quad m \in \mathbb{N}^+. \tag{10.15}$$

求解关于 $Y(x)$ 的本征值问题

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0 = 0, \tag{10.16}$$

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(d) = 0, \tag{10.17}$$

得到本征值和本征函数

$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \quad Y_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{d}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.18}$$

于是，关于 $T(t)$ 的常微分方程化为

$$T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0, \quad \lambda_{mn} = \mu_m + \nu_n = \left(\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{d^2}\right)\pi^2, \tag{10.19}$$

解为

$$T_{mn} = A_{mn} \exp\left[-\left(\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{d^2}\right)\pi^2 a^2 t\right]. \tag{10.20}$$

因此，一般解是

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\exp\left[-\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{d^2}\right)\pi^2a^2t\right]\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{d}. \tag{10.21}$$

将一般解代入初始条件 (10.4)，得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{d}=\frac{u_0x}{l}. \tag{10.22}$$

利用

$$\int_0^l\sin\frac{p\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{l}{2}\delta_{pm}, \tag{10.23}$$

可以推出

$$\begin{aligned}\int_0^l\frac{u_0x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx&=\int_0^l\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{pn}\sin\frac{p\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{d}dx\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{pn}\frac{l}{2}\delta_{pm}\cos\frac{n\pi y}{d}=\frac{l}{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos\frac{n\pi y}{d},\end{aligned} \tag{10.24}$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos\frac{n\pi y}{d}&=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{u_0x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=-\frac{2u_0}{l^2}\frac{l}{m\pi}\int_0^l x\,d\cos\frac{m\pi x}{l}\\&=-\frac{2u_0}{m\pi l}\left[x\cos\frac{m\pi x}{l}\bigg|_0^l-\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}dx\right]=-\frac{2u_0}{m\pi l}\left[l\cos m\pi-\frac{l}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\bigg|_0^l\right]\\&=-\frac{2u_0(-)^m}{m\pi}.\end{aligned} \tag{10.25}$$

由上式可得看出，

$$A_{m0}=-\frac{2u_0(-)^m}{m\pi},\quad A_{mn}=0,\quad m,n\in\mathbb{N}^+. \tag{10.26}$$

于是，$t>0$ 时的温度分布为

$$u(x,y,t)=-\frac{2u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-)^m}{m}\exp\left(-\frac{m^2\pi^2a^2t}{l^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{10.27}$$

当 $t\to\infty$ 时，$u(x,y,t)\to 0$。

(解法二)

由于初始温度分布与 y 无关，而且 $y=0,d$ 两边绝热，这个问题可以化为与 y 无关的一维问题。定解问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0\qquad(0<x<l,\quad t>0), \tag{10.28}$$

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0\qquad(t\geq 0), \tag{10.29}$$

$$u|_{t=0}=\frac{u_0x}{l}\qquad(0\leq x\leq l). \tag{10.30}$$

将 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入方程 (10.28)，得

$$X(x)T'(t)-a^2X''(x)T(t)=0, \tag{10.31}$$

即

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\equiv-\lambda, \tag{10.32}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。因此，$T(t)$ 满足的常微分方程为

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, \tag{10.33}$$

$X(x)$ 满足的常微分方程为 $X''(x)+\lambda X(x)=0$。另一方面，由边界条件 (10.29) 得

$$X(0)T(t)=0, \quad X(l)T(t)=0. \tag{10.34}$$

$T(t)$ 不恒为零，故 $X(0)=0$，$X(l)=0$。于是，$X(x)$ 满足的本征值问题是

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{10.35}$$

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{10.36}$$

相应的本征值和本征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n\in\mathbb{N}^+. \tag{10.37}$$

从而，关于 $T(t)$ 的常微分方程化为

$$T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0, \tag{10.38}$$

解为

$$T_n=A_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}\right). \tag{10.39}$$

因此，一般解是

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{10.40}$$

将一般解代入初始条件 (10.30)，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{u_0x}{l}, \tag{10.41}$$

则系数为

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{u_0x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{2u_0(-)^n}{n\pi}. \tag{10.42}$$

于是，$t>0$ 时的温度分布为

$$u(x,y,t)=u(x,t)=-\frac{2u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{10.43}$$

当 $t\to\infty$ 时，$u(x,y,t)\to 0$。

2. 长为 l 的柱形管，$x=0$ 端开放，$x=l$ 端封闭。管外空气中含有某种杂质气体，浓度为 $u_0e^{-\alpha^2t}$，其中 $\alpha>0$，$\alpha\neq\mu_na$，而 $\mu_n=(2n-1)\pi/2l$，$n\in\mathbb{N}^+$。杂质向管内扩散。设初始时管内没有该种杂质，求以后时刻该杂质在管内的浓度分布 $u(x,t)$。

答：定解问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0 \qquad (0<x<l,\quad t>0), \tag{10.44}$$

$$u\big|_{x=0}=u_0e^{-\alpha^2t},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \qquad (t\geq 0), \tag{10.45}$$

$$u\big|_{t=0}=0 \qquad (0\leq x\leq l). \tag{10.46}$$

为了使边界条件齐次化，令

$$u(x,t)=v(x,t)+u_0e^{-\alpha^2t}, \tag{10.47}$$

则 $v(x,t)$ 满足的定解问题为

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=\alpha^2u_0e^{-\alpha^2t} \qquad (0<x<l,\quad t>0), \tag{10.48}$$

$$v\big|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \qquad (t\geq 0), \tag{10.49}$$

$$v\big|_{t=0}=-u_0 \qquad (0\leq x\leq l). \tag{10.50}$$

相应齐次方程的本征函数是

$$\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l},\quad n\in\mathbb{N}^+. \tag{10.51}$$

根据本征函数展开法，将 $v(x,t)$ 展开为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\mu_nx,\quad \mu_n\equiv\frac{(2n-1)\pi}{2l}. \tag{10.52}$$

另一方面，$\alpha^2u_0e^{-\alpha^2t}$ 和 $-u_0$ 可以展开为

$$\alpha^2u_0e^{-\alpha^2t}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\mu_nx,\quad -u_0=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin\mu_nx, \tag{10.53}$$

其中系数为

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \alpha^2 u_0 e^{-\alpha^2 t}\sin\mu_n x dx = \frac{2}{l}\alpha^2 u_0 e^{-\alpha^2 t}\,\frac{-1}{\mu_n}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\bigg|_0^l = \frac{2\alpha^2 u_0 e^{-\alpha^2 t}}{\mu_n l}, \tag{10.54}$$

$$g_n = -\frac{2}{l}\int_0^l u_0 \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} dx = -\frac{2u_0}{\mu_n l}. \tag{10.55}$$

将这些展开式代入方程 (10.48) 和初始条件 (10.50)，得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\mu_n^2 a^2 T_n(t)\right]\sin\mu_n x &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^2 u_0 e^{-\alpha^2 t}}{\mu_n l}\sin\mu_n x,\\ \sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\mu_n x &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0}{\mu_n l}\sin\mu_n x,\end{aligned} \tag{10.56}$$

故

$$T_n'(t)+\mu_n^2 a^2 T_n(t) = \frac{2\alpha^2 u_0 e^{-\alpha^2 t}}{\mu_n l}, \quad T_n(0) = -\frac{2u_0}{\mu_n l}. \tag{10.57}$$

根据常数变易法，以上常微分方程的解可以写成 $T_n(t)=A_n(t)e^{-\mu_n^2 a^2 t}$，代入常微分方程，得

$$A_n'(t) = \frac{2\alpha^2 u_0}{\mu_n l}\, e^{(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)t}. \tag{10.58}$$

上式的解为

$$A_n(t) = C_n + \frac{2\alpha^2 u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)}\, e^{(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)t}, \tag{10.59}$$

故

$$T_n(t) = \left[C_n + \frac{2\alpha^2 u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)}\, e^{(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)t}\right] e^{-\mu_n^2 a^2 t}. \tag{10.60}$$

代入初始条件，得

$$T_n(0) = C_n + \frac{2\alpha^2 u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)} = -\frac{2u_0}{\mu_n l}, \tag{10.61}$$

从而推出

$$C_n = -\frac{2u_0}{\mu_n l} - \frac{2\alpha^2 u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)} = -\frac{2u_0}{\mu_n l}\left[1+\frac{\alpha^2}{\mu_n^2 a^2-\alpha^2}\right] = -\frac{2u_0\mu_n^2 a^2}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)}. \tag{10.62}$$

因此，得到

$$\begin{aligned}T_n(t) &= \left[-\frac{2u_0\mu_n^2 a^2}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)} + \frac{2\alpha^2 u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)}\, e^{(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)t}\right] e^{-\mu_n^2 a^2 t}\\ &= -\frac{2u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)}\left(\mu_n^2 a^2 e^{-\mu_n^2 a^2 t} - \alpha^2 e^{-\alpha^2 t}\right).\end{aligned} \tag{10.63}$$

于是，关于 $v(x,t)$ 的定解问题的解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\mu_n x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0}{\mu_n l(\mu_n^2 a^2-\alpha^2)}\left(\mu_n^2 a^2 e^{-\mu_n^2 a^2 t} - \alpha^2 e^{-\alpha^2 t}\right)\sin\mu_n x. \tag{10.64}$$

$t>0$ 时，杂质在管内的浓度分布为

$$u(x,t)=v(x,t)+u_0e^{-\alpha^2t}=u_0e^{-\alpha^2t}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0}{\mu_n l(\mu_n^2a^2-\alpha^2)}\left(\mu_n^2a^2e^{-\mu_n^2a^2t}-\alpha^2e^{-\alpha^2t}\right)\sin\mu_n x. \tag{10.65}$$

11 第十三周（11 月 26 日交）

1. 半圆形薄板，半径为 a，用坐标描述即 $\rho\le a,\ 0\le\phi\le\pi$。板面绝热，直边保持温度为 0 度，弧边保持温度为常数 u_0，求稳定状态下板面上的温度分布。

答：记板面上的温度分布为 $u(\rho,\phi)$，则定解问题为

$$\nabla^2u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}=0\quad(\rho<a,\ 0<\phi<\pi), \tag{11.1}$$

$$u\big|_{\phi=0}=0,\quad u\big|_{\phi=\pi}=0, \tag{11.2}$$

$$u\big|_{\rho=a}=u_0. \tag{11.3}$$

将 $u(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi)$ 代入方程 (11.1)，得到两个方程

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0, \tag{11.4}$$

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0, \tag{11.5}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。由边界条件 (11.2) 得

$$R(\rho)\Phi(0)=R(\rho)\Phi(\pi)=0, \tag{11.6}$$

故 $\Phi(0)=\Phi(\pi)=0$.

求解关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0, \tag{11.7}$$

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi(\pi)=0, \tag{11.8}$$

得到本征值和本征函数为

$$\lambda_m=m^2,\quad \Phi_m(\phi)=\sin m\phi,\quad m\in\mathbb{N}^+. \tag{11.9}$$

这个本征函数族在区间 $[0,\pi]$ 上是正交完备的，满足

$$\int_0^\pi\sin m\phi\sin n\phi\,d\phi=\frac{\pi}{2}\delta_{mn}. \tag{11.10}$$

将本征值 λ_m 代入方程 (11.4)，得

$$\rho^2R_m''(\rho)+\rho R'_m(\rho)-m^2R_m(\rho)=0. \tag{11.11}$$

这是 Euler 方程，解为

$$R_m(\rho)=\{\rho^m,\rho^{-m}\},\quad m\in\mathbb{N}^+. \tag{11.12}$$

在 $\rho=0$ 处，温度应该取有限值，而解 ρ^{-m} 在 $\rho=0$ 处有奇性，应该舍弃。

从而，方程 (11.1) 的一般解可以写成

$$u(\rho,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\left(\frac{\rho}{a}\right)^m\sin m\phi. \tag{11.13}$$

代入边界条件 (11.3)，可得

$$u_0=u(a,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin m\phi. \tag{11.14}$$

根据 (11.10) 式，有

$$A_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_0\sin m\phi\,d\phi=-\frac{2u_0}{m\pi}\cos m\phi\Big|_0^{\pi}=-\frac{2u_0}{m\pi}(\cos m\pi-1)=\frac{2u_0}{m\pi}[1-(-)^m]. \tag{11.15}$$

于是，板面上的温度分布为

$$u(\rho,\phi)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-)^m}{m}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m\sin m\phi. \tag{11.16}$$

2. 计算下列函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$。

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{l}, & |x|<l,\\ 0, & |x|>l.\end{cases}$ (2) $f(x)=e^{-a|x|}$，其中 $a>0$。

答：(1)

$$\begin{aligned}F(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}\frac{x}{l}e^{-ikx}dx=-\frac{i}{l\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}x\sin kx\,dx\\&=\frac{i}{kl\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}xd\cos kx=\frac{i}{lk\sqrt{2\pi}}\left[x\cos kx|_{-l}^{l}-\int_{-l}^{l}\cos kxdx\right]\\&=\frac{i}{kl\sqrt{2\pi}}\left[l\cos kl+l\cos(-kl)-\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-l}^{l}\right]=\frac{i}{kl\sqrt{2\pi}}\left[2l\cos kl-\frac{1}{k}\sin kl+\frac{1}{k}\sin(-kl)\right]\\&=\frac{i}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos kl-\frac{\sin kl}{kl}\right).\end{aligned} \tag{11.17}$$

(2)

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}e^{-ikx}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos kx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}I. \tag{11.18}$$

这里，积分

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \int_0^\infty e^{-ax}\cos kx\,dx = -\frac{1}{a}\int_0^\infty \cos kx\,de^{-ax} = -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos kx\Big|_0^\infty - \frac{k}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin kx\,dx \\
&= \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2}\int_0^\infty \sin kx\,de^{-ax} = \frac{1}{a} + \frac{k}{a^2}e^{-ax}\sin kx\Big|_0^\infty - \frac{k^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos kx\,dx = \frac{1}{a} - \frac{k^2}{a^2}I, \qquad (11.19)
\end{aligned}
$$

故

$$
I = \frac{a}{a^2+k^2}. \qquad (11.20)
$$

从而得到

$$
F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}. \qquad (11.21)
$$

12 第十四周（12 月 3 日交）

1. 用 Fourier 变换法求解如下定解问题，

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad y > 0), \qquad (12.1)
$$

$$
u|_{y=0} = \varphi(x), \qquad u|_{y=+\infty} = 0, \qquad (12.2)
$$

$$
u|_{x=\pm\infty} = 0. \qquad (12.3)
$$

并在下列两种情形下计算解 $u(x,y)$ 的具体形式。

(1) $\varphi(x) = \delta(x)$. (2) $\varphi(x) = \theta(x)$，其中阶跃函数 $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

提示：可能会用到积分公式

$$
\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad b > 0. \qquad (12.4)
$$

答：由于 x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$，可以对 x 作 Fourier 变换，设

$$
u(x,y) \leftrightarrow U(k,y), \quad \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(k). \qquad (12.5)
$$

利用微分定理，对定解问题中各式作 Fourier 变换，可得

$$
\frac{d^2U}{dy^2} - k^2 U = 0, \qquad (12.6)
$$

$$
U|_{y=0} = \Phi(k), \qquad (12.7)
$$

$$
U|_{y=+\infty} = 0. \qquad (12.8)
$$

方程 (12.6) 的解为

$$
U(k,y) = C(k)e^{ky} + D(k)e^{-ky}. \qquad (12.9)
$$

代入 (12.7) 式，得

$$\Phi(k) = U|_{y=0} = C(k) + D(k). \tag{12.10}$$

当 $k > 0$ 时，由 (12.8) 式得

$$0 = U|_{y=+\infty} = \lim_{y\to\infty} C(k)e^{ky}, \tag{12.11}$$

故

$$C(k) = 0, \quad U(k, y) = D(k)e^{-ky} = \Phi(k)e^{-|k|y}. \tag{12.12}$$

当 $k < 0$ 时，由 (12.8) 式得

$$0 = U|_{y=+\infty} = \lim_{y\to\infty} D(k)e^{-ky}, \tag{12.13}$$

故

$$D(k) = 0, \quad U(k, y) = C(k)e^{ky} = \Phi(k)e^{-|k|y}. \tag{12.14}$$

因此，$k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况的解可以归纳为

$$U(k, y) = \Phi(k)e^{-|k|y}. \tag{12.15}$$

利用积分项关于 k 的奇偶性，根据积分公式 (12.4)，可得 $e^{-|k|y}$ 的原函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(e^{-|k|y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|y}e^{ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|y}\cos kx\, dk \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ky}\cos kx\, dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}.\end{aligned} \tag{12.16}$$

由卷积定理得

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-|k|y}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi.\end{aligned} \tag{12.17}$$

(1) 若 $\varphi(x) = \delta(x)$，则

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}. \tag{12.18}$$

(2) 若 $\varphi(x) = \theta(x)$，则

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{y}\frac{1}{[(\xi-x)/y]^2+1}\, d\xi. \tag{12.19}$$

作变量替换 $z=(\xi-x)/y$，得

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-x/y}^{\infty}\frac{1}{z^2+1}\,dz=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}z\Big|_{-x/y}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(-\frac{x}{y}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{x}{y}. \tag{12.20}$$

2. 证明 $\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{|a|}$，其中 $a\neq 0$。

证：对于任意连续函数 $f(x)$，作变量替换 $y=ax$，当 $a>0$ 时，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax)dx=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)dy=\frac{1}{a}f(0)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx. \tag{12.21}$$

当 $a<0$ 时，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax)dx=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)dy=-\frac{1}{a}f(0)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx. \tag{12.22}$$

可见，无论 $a>0$ 还是 $a<0$，均有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\delta(x)}{|a|}dx. \tag{12.23}$$

由于 $f(x)$ 是任意的，必有

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}. \tag{12.24}$$

3. 计算函数 $f(x)=\cos ax$ 的 Fourier 变换 $F(k)$。

答：

$$\begin{aligned}F(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos ax\,e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{iax}+e^{-iax}\right)e^{-ikx}dx\\&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(k-a)x}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(k+a)x}dx\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(k-a)+\delta(k+a)\right].\end{aligned} \tag{12.25}$$

13 第十五周（12 月 10 日交）

1. 试在平面极坐标系中对二维齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=0 \tag{13.1}$$

分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

答：在平面极坐标系中，二维齐次波动方程表达为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\frac{a^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0. \tag{13.2}$$

令 $u(\rho,\phi,t)=R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$，代入上式得

$$R\Phi T''-\frac{a^2}{\rho}\Phi T(\rho R''+R')-\frac{a^2}{\rho^2}RT\Phi''=0, \tag{13.3}$$

整理一下，有

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{1}{\rho R}(\rho R''+R')+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{13.4}$$

上式左边与 ρ、ϕ 无关，右边与 t 无关，因而与 ρ、ϕ、t 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$。从而得到两个方程

$$T''+\lambda a^2T=0 \tag{13.5}$$

和

$$\frac{1}{R}(\rho^2R''+\rho R')+\lambda\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{13.6}$$

其中，第二个方程左边与 ϕ 无关，右边与 ρ 无关，因而与 ρ、ϕ 均无关，即为常数，记作 μ。于是导出两个方程

$$\rho^2R''+\rho R'+(\lambda\rho^2-\mu)R=0 \tag{13.7}$$

和

$$\Phi''+\mu\Phi=0. \tag{13.8}$$

2. 在量子力学中，氢原子定态问题的 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2u-\frac{e^2}{r}u=Eu, \tag{13.9}$$

其中 $u(r,\theta,\phi)$ 是波函数，μ 是电子质量，e 是单位电荷量，E 是能量，$\hbar$ 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对该方程分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

答：在球坐标系中，可以将方程 (13.9) 表达为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}\right]-\frac{e^2}{r}u=Eu. \tag{13.10}$$

令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$，代入上式得

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right]-\frac{e^2}{r}RY=ERY, \tag{13.11}$$

整理一下，有

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\right]-\left(\frac{e^2}{r}+E\right)r^2=\frac{\hbar^2}{2\mu Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right]. \tag{13.12}$$

上式左边与 θ、ϕ 无关，右边与 r 无关，因而与 r、θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$。从而得到径向方程

$$r^2R'' + 2rR' + \frac{2\mu}{\hbar^2}(Er^2 + e^2r - \lambda)R = 0, \tag{13.13}$$

和角向方程

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] + \lambda Y = 0. \tag{13.14}$$

对角向方程可以进一步分离变量。令 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$，代入角向方程，有

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \frac{H}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right] + \lambda H\Phi = 0. \tag{13.15}$$

整理，得

$$\frac{1}{H}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)\right] + \frac{2\mu\lambda}{\hbar^2}\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}. \tag{13.16}$$

上式左边与 ϕ 无关，右边与 θ 无关，因而与 θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 ν。从而导出两个方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \left(\frac{2\mu\lambda}{\hbar^2} - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)H = 0 \tag{13.17}$$

和

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0. \tag{13.18}$$

14　第十六周（12 月 17 日交）

1. 根据递推关系

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2k}, \quad k \in \mathbb{N}^+, \tag{14.1}$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \tag{14.2}$$

证明：由递推关系可得

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} - \frac{-\beta}{2^2} = \frac{(-)^1 a_0}{2^2(1!)^2} - \frac{(-)^1\beta}{2^2(1!)^2}\sum_{r=1}^{1}\frac{1}{r}, \tag{14.3}$$

故 (14.2) 式对 $k = 1$ 成立。

假设当 $k = n$ 时，(14.2) 式成立，即

$$a_{2n} = \frac{(-)^n a_0}{2^{2n}(n!)^2} - \frac{(-)^n\beta}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}. \tag{14.4}$$

那么，根据递推关系可以推出

$$
\begin{aligned}
a_{2n+2} &= -\frac{a_{2n}}{(2n+2)^2} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2(n+1)} \\
&= -\frac{1}{(2n+2)^2}\left[\frac{(-)^n a_0}{2^{2n}(n!)^2} - \frac{(-)^n\beta}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\right] - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2(n+1)} \\
&= \frac{(-)^{n+1}a_0}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2(n+1)} \\
&= \frac{(-)^{n+1}a_0}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\sum_{r=1}^{n+1}\frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{14.5}
$$

可见，(14.2) 式对 $k=n+1$ 也成立。

因此，(14.2) 式对任意 $k\in\mathbb{N}^+$ 成立。

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 Hermite 方程

$$
y''-2xy'+(\lambda-1)y=0. \tag{14.6}
$$

(1) 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式解的最高次幂项具有 $(2x)^n$ 形式，这些多项式称为 Hermite 多项式，记作 $\mathrm{H}_n(x)$。求出 Hermite 多项式的显式。

(3) 写出前 6 个 Hermite 多项式的具体形式。

答：(1) 在 $x_0=0$ 的邻域上，设

$$
y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, \tag{14.7}
$$

则有

$$
y''=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k, \quad xy'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k. \tag{14.8}
$$

代入 Hermite 方程 (14.6)，得

$$
\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2}-2ka_k+(\lambda-1)a_k]x^k=0. \tag{14.9}
$$

比较两边，得到递推关系

$$
a_{k+2}=\frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{14.10}
$$

由此递推关系，所有 a_{2k} $(k\in\mathbb{N}^+)$ 均可由 a_0 确定，所有 a_{2k+1} $(k\in\mathbb{N}^+)$ 均可由 a_1 确定，于是得到级数解

$$
y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x), \tag{14.11}
$$

其中

$$y_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{a_0}x^{2k},\quad y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_1}x^{2k+1}. \tag{14.12}$$

由递推关系 (14.10) 可以看出，如果

$$\lambda=2n+1,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{14.13}$$

则 $a_{n+2}=a_{n+4}=\cdots=0$。因此，若 n 是偶数，则 $y_0(x)$ 中断为 n 次多项式；若 n 是奇数，则 $y_1(x)$ 中断为 n 次多项式。

(2) 将 $\lambda=2n+1$ 代入递推关系 (14.10)，得

$$a_{k+2}=\frac{2k+1-(2n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k, \tag{14.14}$$

改写成 $a_k=\dfrac{2k-3-(2n+1)}{k(k-1)}a_{k-2}$，即

$$a_{k-2}=\frac{k(k-1)}{2(k-n-2)}a_k. \tag{14.15}$$

适当选取 a_0 或 a_1，使多项式解的最高次幂项具有 $(2x)^n$ 形式，即

$$a_n=2^n. \tag{14.16}$$

应用递推关系 (14.15)，可得

$$a_{n-2}=\frac{n(n-1)}{2(n-n-2)}a_n=\frac{n(n-1)}{-2^2\cdot 1}2^n=(-)^1\frac{n!}{(n-2)!}2^{n-2}, \tag{14.17}$$

$$a_{n-4}=\frac{(n-2)(n-3)}{2(n-2-n-2)}a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)}{-2^2\cdot 2}\frac{n(n-1)}{-2^2\cdot 1}2^n=\frac{(-)^2}{2\cdot 1}\frac{n!}{(n-4)!}2^{n-4}. \tag{14.18}$$

由此推测一般系数为

$$a_{n-2k}=\frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!}2^{n-2k},\quad k=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]. \tag{14.19}$$

接着，用数学归纳法证明一般系数的表达式 (14.19)。由

$$a_n=2^n=\frac{(-)^0 n!}{0!(n-0)!}2^{n-0} \tag{14.20}$$

可知 (14.19) 式对 $k=0$ 成立。

假设当 $k=m$ $\left(0\le m\le\dfrac{n}{2}-1\right)$ 时，(14.19) 式成立，即

$$a_{n-2m}=\frac{(-)^m n!}{m!(n-2m)!}2^{n-2m}. \tag{14.21}$$

那么，根据递推关系 (14.15) 可以推出

$$
\begin{aligned}
a_{n-2m-2} &= \frac{(n-2m)(n-2m-1)}{2(n-2m-n-2)}a_{n-2m} = \frac{(n-2m)(n-2m-1)}{-2^2(m+1)}\frac{(-)^m n!}{m!(n-2m)!}2^{n-2m} \\
&= \frac{(-)^{m+1}n!}{(m+1)!(n-2m-2)!}2^{n-2m-2}
\end{aligned} \tag{14.22}
$$

可见，(14.19) 式对 $k=m+1$ 也成立。

因此，(14.19) 式对任意 $k=0,1,\cdots,[n/2]$ 成立。证毕。

根据一般系数 (14.19)，Hermite 多项式的显式为

$$
\mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}. \tag{14.23}
$$

(3) 前 6 个 Hermite 多项式的具体形式为

$$
\mathrm{H}_0(x) = \frac{(-)^0 0!}{0!(0-0)!}(2x)^0 = 1, \tag{14.24}
$$

$$
\mathrm{H}_1(x) = \frac{(-)^0 1!}{0!(1-0)!}(2x)^{1-0} = 2x, \tag{14.25}
$$

$$
\mathrm{H}_2(x) = \frac{(-)^0 2!}{0!(2-0)!}(2x)^{2-0} + \frac{(-)^1 2!}{1!(2-2)!}(2x)^{2-2} = 4x^2-2, \tag{14.26}
$$

$$
\mathrm{H}_3(x) = \frac{(-)^0 3!}{0!(3-0)!}(2x)^{3-0} + \frac{(-)^1 3!}{1!(3-2)!}(2x)^{3-2} = 8x^3-12x, \tag{14.27}
$$

$$
\mathrm{H}_4(x) = \frac{(-)^0 4!}{0!(4-0)!}(2x)^{4-0} + \frac{(-)^1 4!}{1!(4-2)!}(2x)^{4-2} + \frac{(-)^2 4!}{2!(4-4)!}(2x)^{4-4} = 16x^4-48x^2+12, \tag{14.28}
$$

$$
\mathrm{H}_5(x) = \frac{(-)^0 5!}{0!(5-0)!}(2x)^{5-0} + \frac{(-)^1 5!}{1!(5-2)!}(2x)^{5-2} + \frac{(-)^2 5!}{2!(5-4)!}(2x)^{5-4} = 32x^5-160x^3+120x. \tag{14.29}
$$

15 第十七周（12 月 24 日交）

1. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 Laguerre 方程

$$
xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0. \tag{15.1}
$$

(1) 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，这些多项式称为 Laguerre 多项式，记作 $\mathrm{L}_n(x)$。求出 Laguerre 多项式的显式。

(3) 写出前 4 个 Laguerre 多项式的具体形式。

答：(1) 将 Laguerre 方程 (15.1) 化为

$$
y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{\lambda}{x}y = 0. \tag{15.2}
$$

可见，$x=0$ 是方程的正则奇点。在 $x_0=0$ 的去心邻域内，可设解的形式为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}, \quad a_0 \neq 0, \tag{15.3}$$

则有

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)(k+s-1)a_k x^{k+s-2}, \quad y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)a_k x^{k+s-1}. \tag{15.4}$$

代入 Laguerre 方程 (15.1)，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+s)(k+s-1)a_k x^{k+s-1}+(k+s)a_k x^{k+s-1}-(k+s)a_k x^{k+s}+\lambda a_k x^{k+s}\right]=0. \tag{15.5}$$

故

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+s)^2 a_k x^{k+s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda-(k+s)]a_k x^{k+s} \\
&= s^2 a_0 x^{s-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+s)^2 a_k x^{k+s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda-(k+s)]a_k x^{k+s} \\
&= s^2 a_0 x^{s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+s+1)^2 a_{k+1}+(\lambda-k-s)a_k\right]x^{k+s}.
\end{aligned} \tag{15.6}$$

上式各项系数必须为零。由于 $a_0 \neq 0$，即得

$$s=0, \tag{15.7}$$

以及递推关系

$$a_{k+1}=\frac{k-\lambda}{(k+1)^2}a_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15.8}$$

可以看出，如果

$$\lambda=n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15.9}$$

则 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$，即解 $y(x)$ 中断为 n 次多项式。

(2) 将 $\lambda=n$ 代入递推关系 (15.8)，得

$$a_{k+1}=\frac{k-n}{(k+1)^2}a_k, \tag{15.10}$$

可改写成

$$a_k=\frac{k-n-1}{k^2}a_{k-1}. \tag{15.11}$$

接下来有两种解法。

（解法一）

反复利用递推关系，可以推出

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{k-n-1}{k^2}a_{k-1} = \frac{(k-n-1)(k-n-2)}{[k(k-1)]^2}a_{k-2} = \cdots \\
&= \frac{(k-n-1)(k-n-2)\cdots(1-n)(0-n)}{[k(k-1)\cdots 2\cdot 1]^2}a_0 \\
&= \frac{(-)^k n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{(k!)^2}a_0 = \frac{(-)^k n!}{(n-k)!(k!)^2}a_0,
\end{aligned}
\tag{15.12}
$$

从而

$$
a_n = \frac{(-)^n n!}{(n-n)!(n!)^2}a_0 = \frac{(-)^n}{n!}a_0. \tag{15.13}
$$

适当选取 a_0，使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，即 $a_n = (-)^n$，故

$$
a_0 = n!\,. \tag{15.14}
$$

于是，Laguerre 多项式的显式为

$$
\mathrm{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!(k!)^2}\, a_0 x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-k)!(k!)^2}\,(-x)^k. \tag{15.15}
$$

（解法二）

适当选取 a_0，使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，即

$$
a_n = (-)^n. \tag{15.16}
$$

将递推关系 (15.11) 改写为

$$
a_{k-1} = \frac{k^2}{k-n-1}\,a_k, \tag{15.17}
$$

从而可得

$$
a_{n-1} = \frac{n^2}{n-n-1}a_n = (-)^{n-1}n^2 = \frac{(-)^{n-1}}{1!}\left[\frac{n!}{(n-1)}\right]^2, \tag{15.18}
$$

$$
a_{n-2} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)-n-1}a_{n-1} = \frac{(-)^{n-2}}{2\cdot 1}[n(n-1)]^2 = \frac{(-)^{n-2}}{2!}\left[\frac{n!}{(n-2)!}\right]^2. \tag{15.19}
$$

由此推测一般系数为

$$
a_{n-k} = \frac{(-)^{n-k}(n!)^2}{k![(n-k)!]^2}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{15.20}
$$

接着，用数学归纳法证明一般系数的表达式 (15.20)。由

$$
a_n = (-)^n = \frac{(-)^{n-0}(n!)^2}{0![(n-0)!]^2} \tag{15.21}
$$

可知 (15.20) 式对 $k=0$ 成立。

假设当 $k=m\ (0\le m\le n-1)$ 时，(15.20) 式成立，即

$$a_{n-m}=\frac{(-)^{n-m}(n!)^2}{m![(n-m)!]^2}. \tag{15.22}$$

那么，根据递推关系 (15.17) 可以推出

$$a_{n-m-1}=\frac{(n-m)^2}{(n-m)-n-1}a_{n-m}=\frac{(n-m)^2}{-(m+1)}\frac{(-)^{n-m}(n!)^2}{m![(n-m)!]^2}=\frac{(-)^{n-m-1}(n!)^2}{(m+1)![(n-m-1)!]^2}. \tag{15.23}$$

可见，(15.20) 式对 $k=m+1$ 也成立。

因此，(15.20) 式对任意 $k=0,1,\cdots,n$ 成立。证毕。

根据一般系数 (15.20)，Laguerre 多项式的显式为

$$\mathrm{L}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{k![(n-k)!]^2}(-x)^{n-k}. \tag{15.24}$$

上式与 (15.15) 式等价。

(3) 前 4 个 Laguerre 多项式的具体形式为

$$\mathrm{L}_0(x)=\frac{(0!)^2}{0![(0-0)!]^2}(-x)^{0-0}=1, \tag{15.25}$$

$$\mathrm{L}_1(x)=\frac{(1!)^2}{0![(1-0)!]^2}(-x)^{1-0}+\frac{(1!)^2}{1![(1-1)!]^2}(-x)^{1-1}=-x+1, \tag{15.26}$$

$$\mathrm{L}_2(x)=\frac{(2!)^2}{0![(2-0)!]^2}(-x)^{2-0}+\frac{(2!)^2}{1![(2-1)!]^2}(-x)^{2-1}+\frac{(2!)^2}{2![(2-2)!]^2}(-x)^{2-2}=x^2-4x+2, \tag{15.27}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_3(x)&=\frac{(3!)^2}{0![(3-0)!]^2}(-x)^{3-0}+\frac{(3!)^2}{1![(3-1)!]^2}(-x)^{3-1}+\frac{(3!)^2}{2![(3-2)!]^2}(-x)^{3-2}+\frac{(3!)^2}{3![(3-3)!]^2}(-x)^{3-3}\\&=-x^3+9x^2-18x+6.\end{aligned} \tag{15.28}$$

2. 长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，左端保持恒定温度零度，右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量，即右端边界条件为

$$\left.\left(u+h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0,\quad h>0. \tag{15.29}$$

已知 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，求杆上温度的变化规律。

答：记细杆上各时刻的温度分布为 $u(x,t)$，定解问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\quad(0<x<l,\quad t>0), \tag{15.30}$$

$$u|_{x=0}=0,\quad \left.\left(u+h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0, \tag{15.31}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x). \tag{15.32}$$

分离变量，设

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{15.33}$$

代入方程 (15.30)，得

$$XT'-a^2X''T=0, \tag{15.34}$$

即

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}. \tag{15.35}$$

上式左边与 t 无关，右边与 x 无关，因而与 t、x 均无关，是常数，记作 $-\lambda$。从而得到两个方程

$$T'+\lambda a^2T = 0, \tag{15.36}$$

$$X''+\lambda X = 0. \tag{15.37}$$

另一方面，边界条件 (15.31) 化为

$$X(0)T(t)=0, \quad [X(l)+hX'(l)]T(t)=0. \tag{15.38}$$

$T(t)$ 不恒为零，故

$$X(0)=0, \quad X(l)+hX'(l)=0. \tag{15.39}$$

上式与方程 (15.37) 构成 Sturm-Liouville 本征值问题，权函数 $\rho(x)=1$，因此本征值非负，即 $\lambda\geq 0$。

(1) 如果 $\lambda=0$，则方程 (15.37) 的解为

$$X(x)=Cx+D. \tag{15.40}$$

代入 (15.39) 式，得 $X(0)=D=0$，$X(l)+hX'(l)=Cl+Ch=0$。由于 $l>0$，$h>0$，必有 $C=0$。这是平庸解，故 $\lambda=0$ 不是本征值。

(2) 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\mu^2$（其中 $\mu>0$），则方程 (15.37) 的解为

$$X(x)=C\cos\mu x+D\sin\mu x. \tag{15.41}$$

代入 (15.39) 式，得 $X(0)=C=0$，$X(l)+hX'(l)=D(\sin\mu l+\mu h\cos\mu l)=0$，故非平庸解的存在要求

$$\tan\mu l=-\mu h. \tag{15.42}$$

这个方程有无穷多个分立的解，记为 μ_n，其中 $n\in\mathbb{N}^+$。它们对应于无穷多个分立的本征值 $\lambda_n=\mu_n^2$，相应的本征函数族是 $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$。

将本征值 λ_n 代入方程 (15.36)，得到的解为

$$T_n(t)=A_n\exp(-\lambda_n a^2t). \tag{15.43}$$

于是，$u(x,t)$ 的一般解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp(-\lambda_n a^2 t)\sin\mu_n x. \tag{15.44}$$

代入初始条件 (15.32)，得

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\mu_n x. \tag{15.45}$$

另一方面，根据 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论，本征函数族 $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,l]$ 上是正交完备的，而上式实际上就是 $\varphi(x)$ 的广义 Fourier 级数展开式，因此展开系数可通过下式计算：

$$A_n=\frac{\int_0^l\varphi(x)\sin\mu_n x\,dx}{\int_0^l\sin^2\mu_n x\,dx}. \tag{15.46}$$

将展开系数代入 (15.44) 式，就得到杆上温度的变化规律。

16 第十八周（12 月 31 日交；作为一次考查）

1. 两个同心的球面，内球面半径为 r_1，具有电势 u_0，外球面半径为 r_2，具有电势 $u_1\cos^2\theta$，其中 u_0 和 u_1 均为常数，区域 $r_1<r<r_2$ 之中无电荷，求该区域中的电势分布。

答：这是一个轴对称问题，因而电势与 ϕ 无关，可以设区域 $r_1<r<r_2$ 中的电势分布为 $u(r,\theta)$。定解问题为

$$\nabla^2 u=0\quad(r_1<r<r_2), \tag{16.1}$$

$$u|_{r=r_1}=u_0,\quad u|_{r=r_2}=u_1\cos^2\theta. \tag{16.2}$$

将一般解写作

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{16.3}$$

代入边界条件 (16.2)，利用

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\quad \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{2}[3x^2-\mathrm{P}_0(x)],\quad x^2=\frac{1}{3}\mathrm{P}_0(x)+\frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x), \tag{16.4}$$

可以导出

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r_1^l+\frac{B_l}{r_1^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)=u_0=u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta), \tag{16.5}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r_2^l+\frac{B_l}{r_2^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)=u_1\cos^2\theta=\frac{1}{3}u_1\mathrm{P}_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}u_1\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{16.6}$$

比较这两个等式最左边和最右边，可得

$$A_0 + \frac{B_0}{r_1} = u_0, \tag{16.7}$$

$$A_l r_1^l + \frac{B_l}{r_1^{l+1}} = 0 \quad (l = 1, 2, \cdots), \tag{16.8}$$

$$A_0 + \frac{B_0}{r_2} = \frac{1}{3}u_1, \tag{16.9}$$

$$A_2 r_2^2 + \frac{B_2}{r_2^3} = \frac{2}{3}u_1, \tag{16.10}$$

$$A_l r_2^l + \frac{B_l}{r_2^{l+1}} = 0 \quad (l \neq 0, 2). \tag{16.11}$$

(16.7) 与 (16.9) 两边分别相减，得

$$\frac{B_0}{r_1} - \frac{B_0}{r_2} = u_0 - \frac{u_1}{3}, \quad 故\ B_0 = \left(u_0 - \frac{u_1}{3}\right)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \tag{16.12}$$

从而，由 (16.7) 式有

$$A_0 = u_0 - \frac{B_0}{r_1} = u_0 - \left(u_0 - \frac{u_1}{3}\right)\frac{r_2}{r_2 - r_1} = \frac{u_1 r_2 - 3u_0 r_1}{3(r_2 - r_1)}. \tag{16.13}$$

当 $l = 2$ 时，(16.8) 式变成

$$A_2 r_1^2 + \frac{B_2}{r_1^3} = 0, \quad 即\ A_2 = -\frac{B_2}{r_1^5}, \tag{16.14}$$

代入 (16.10) 式，得

$$-\frac{B_2}{r_1^5}r_2^2 + \frac{B_2}{r_2^3} = \frac{2}{3}u_1, \quad 故\ B_2 = -\frac{2u_1 r_1^5 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}. \tag{16.15}$$

于是，

$$A_2 = -\frac{B_2}{r_1^5} = \frac{2u_1 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}. \tag{16.16}$$

当 $l \neq 0, 2$ 时，由 (16.8) 式有

$$A_l = -\frac{B_l}{r_1^{2l+1}}, \tag{16.17}$$

代入 (16.11) 式，得

$$-\frac{B_l}{r_1^{2l+1}}r_2^l + \frac{B_l}{r_2^{l+1}} = \frac{r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}}{r_1^{2l+1} r_2^{l+1}}B_l = 0. \tag{16.18}$$

由于 $r_1 \neq r_2$，可以推出

$$B_l = 0, \quad A_l = -\frac{B_l}{r_1^{2l+1}} = 0 \ \ (l \neq 0, 2). \tag{16.19}$$

将这些系数的表达式代回一般解，就得到区域 $r_1 < r < r_2$ 中的电势分布

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \left[\frac{u_1 r_2 - 3u_0 r_1}{3(r_2 - r_1)} + \left(u_0 - \frac{u_1}{3}\right)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{1}{r}\right]\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \left[\frac{2u_1 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}r^2 - \frac{2u_1 r_1^5 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}\frac{1}{r^3}\right]\mathrm{P}_2(\cos\theta) \\ &= \frac{u_1 r_2 - 3u_0 r_1}{3(r_2 - r_1)} + \left(u_0 - \frac{u_1}{3}\right)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{1}{r} + \frac{2u_1 r_1^2 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]\mathrm{P}_2(\cos\theta). \end{aligned} \tag{16.20}$$

2. 已知半径为 a 的球面上的电势为 $u|_{r=a} = 2\sin^2\theta\,(\sin 2\phi + 1)$，球内外均没有电荷，将电势零点取在无穷远处，求空间各处的电势分布。

答：定解问题为

$$\nabla^2 u = 0 \quad (r > a), \tag{16.21}$$

$$u|_{r=a} = 2\sin^2\theta\,(\sin 2\phi + 1), \qquad u|_{r=\infty} = 0. \tag{16.22}$$

令 $u(\mathbf{r}) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$，对 Laplace 方程 (16.21) 分离变量。考虑到关于 ϕ 的周期性边界条件，可得

$$\Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{16.23}$$

令 $\cos\theta = x$，$H(\theta) = P(x)$，考虑到 $\theta = 0, \pi$ 处的自然边界条件，则 $P(x)$ 满足连带 Legendre 方程的本征值问题，本征值和本征函数为

$$\lambda_l = l(l+1), \qquad P(x) = \{\mathrm{P}_l^m(x)\}, \qquad l = m, m+1, \cdots \tag{16.24}$$

故

$$H(\theta) = \{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\}, \qquad l = m, m+1, \cdots \tag{16.25}$$

将本征值 λ_l 代回关于 $R(r)$ 的径向方程，可以解出

$$R(r) = \{r^l, r^{-(l+1)}\}. \tag{16.26}$$

根据 $\mathrm{P}_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$，有

$$\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) = \mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{2}[3(1-\sin^2\theta) - 1] = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta, \tag{16.27}$$

则

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) = \frac{2}{3}\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{2}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta). \tag{16.28}$$

由 $\mathrm{P}_2''(x) = (3x)' = 3$，可得

$$\mathrm{P}_2^2(x) = (1-x^2)\mathrm{P}_2''(x) = 3(1-x^2), \qquad \mathrm{P}_2^2(\cos\theta) = 3(1-\cos^2\theta) = 3\sin^2\theta. \tag{16.29}$$

于是，$r = a$ 处的边界条件可以表达成

$$u|_{r=a} = 2\sin^2\theta(\sin 2\phi + 1) = 2\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\sin 2\phi = \frac{4}{3}\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{4}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{16.30}$$

对于球内 $(r < a)$ 的情况，$r = 0$ 处电势应该有限，必须舍弃 $R(r) = r^{-(l+1)}$ 的解，一般解可写作

$$u_1(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l (A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{16.31}$$

代入 $r=a$ 处的边界条件 (16.30)，得

$$\begin{aligned} u_1(a,\theta,\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) \\ &= \frac{4}{3}\,\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{4}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) + \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \end{aligned} \tag{16.32}$$

可见，有

$$A_{00} = \frac{4}{3}, \quad A_{20} = -\frac{4}{3}, \quad B_{22} = \frac{2}{3}, \tag{16.33}$$

而其它系数均为零。于是得到球内的解为

$$u_1(a,\theta,\phi) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{P}_2(\cos\theta) + \frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{16.34}$$

对于球外 $(r>a)$ 的情况，由于无穷远 $(r=\infty)$ 处的电势已取为零，必须舍弃 $R(r)=r^l$ 的解，一般解可写作

$$u_2(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{16.35}$$

代入 $r=a$ 处的边界条件 (16.30)，得

$$\begin{aligned} u_2(a,\theta,\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) \\ &= \frac{4}{3}\,\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{4}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) + \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \end{aligned} \tag{16.36}$$

可见，有

$$C_{00} = \frac{4}{3}, \quad C_{20} = -\frac{4}{3}, \quad D_{22} = \frac{2}{3}, \tag{16.37}$$

而其它系数均为零。于是得到球外的解为

$$u_2(a,\theta,\phi) = \frac{4}{3}\frac{a}{r} - \frac{4}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathrm{P}_2(\cos\theta) + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\phi. \tag{16.38}$$

17　第十九周（不用交）

1. 考虑 Poisson 方程第三边值问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in D, \tag{17.1}$$

$$\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\mathbf{r}\in S} = \varphi(\mathbf{r}), \quad \alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0. \tag{17.2}$$

其中 S 是区域 D 的边界面。定义相应的 Green 函数，并给出解的积分公式。

答：定义相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 满足下列定解问题

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r},\mathbf{r}_0 \in D, \tag{17.3}$$

$$\left[\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \beta \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]\Bigg|_{\mathbf{r}\in S} = 0. \tag{17.4}$$

(17.1) 式两边乘以 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$，(17.3) 式两边乘以 $u(\mathbf{r})$，得

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}), \tag{17.5}$$

$$u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \tag{17.6}$$

两式相减，有

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}). \tag{17.7}$$

根据第二 Green 公式，可得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_0) &= \int_D u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)d\mathbf{r} = \int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \int_D [G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)]d\mathbf{r} \\ &= \int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \int_S \left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right] d\sigma. \end{aligned} \tag{17.8}$$

现在有两种解法求出两个等价结果（求出任何一个结果都是对的）。

（解法一）

由 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的边界条件 (17.4) 有

$$\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r}\in S} = -\beta \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\Bigg|_{\mathbf{r}\in S}. \tag{17.9}$$

从而可以推出

$$\begin{aligned} &\int_S \left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right] d\sigma = \frac{1}{\alpha}\int_S \left[\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - \alpha u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right] d\sigma \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_S \left[-\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - \alpha u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right] d\sigma = -\frac{1}{\alpha}\int_S \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\left[\beta\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} + \alpha u(\mathbf{r})\right] d\sigma \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_S \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\varphi(\mathbf{r})d\sigma. \end{aligned} \tag{17.10}$$

最后一步用到 $u(\mathbf{r})$ 的边界条件 (17.2)。于是，解的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{1}{\alpha}\int_S \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\varphi(\mathbf{r})d\sigma. \tag{17.11}$$

（解法二）

由 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的边界条件 (17.4) 有

$$\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\bigg|_{\mathbf{r}\in S}=-\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}\in S}. \tag{17.12}$$

从而可以推出

$$\begin{aligned}&\int_S\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma=\frac{1}{\beta}\int_S\left[\beta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-\beta u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma\\&=\frac{1}{\beta}\int_S\left[\beta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}+\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)u(\mathbf{r})\right]d\sigma=\frac{1}{\beta}\int_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\left[\beta\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}+\alpha u(\mathbf{r})\right]d\sigma\\&=\frac{1}{\beta}\int_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r})d\sigma.\end{aligned} \tag{17.13}$$

最后一步用到 $u(\mathbf{r})$ 的边界条件 (17.2)。于是，解的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0)=\int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{\beta}\int_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r})d\sigma. \tag{17.14}$$

2. 考虑三维半无界空间的定解问题

$$\nabla^2u(\mathbf{r})=0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad 0<z<+\infty, \tag{17.15}$$

$$u(\mathbf{r})|_{z=0}=\varphi(x,y). \tag{17.16}$$

(1) 写出相应的 Green 函数的定解问题。

(2) 求出这个 Green 函数。

(3) 求出 $u(\mathbf{r})$ 的积分公式，即用 Green 函数和定解条件表示出 $u(\mathbf{r})$。

答：(1) 相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的定解问题为

$$\nabla^2G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\quad -\infty<x,x_0,y,y_0<+\infty,\quad 0<z,z_0<+\infty, \tag{17.17}$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|_{z=0}=0. \tag{17.18}$$

(2) 用镜像法求解，将 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的定解问题看作静电场问题，表述为：$z>0$ 空间中某点 $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处有一个点电荷，电量为 ϵ_0，而 $z=0$ 平面上的电势为零，求解 $z>0$ 空间的电势分布。为了保持 $z=0$ 平面上的电势为零，应该在 $z<0$ 空间中的点 $\mathbf{r}_0'=(x_0,y_0,-z_0)$ 处放置一个点电荷，电量为 $-\epsilon_0$。它们在 $z>0$ 空间中产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$\begin{aligned}G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)&=\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|}\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right].\end{aligned} \tag{17.19}$$

上式已满足边界条件 (17.18)，不需要常数项。

(3) $z>0$ 空间的边界面 S（即 $z=0$ 平面）的外法线方向是 $-z$ 方向，故

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left.\left[-\frac{1}{2}\frac{2(z-z_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}+\frac{1}{2}\frac{2(z+z_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2\right]^{3/2}}\right]\right|_{z=0} \\
&= -\frac{z_0}{2\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{17.20}$$

于是，$u(\mathbf{r})$ 的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0) = -\int_S \varphi(x,y)\,\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\,d\sigma = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,\frac{\varphi(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}, \tag{17.21}$$

也可以写成

$$u(\mathbf{r}) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_0\int_{-\infty}^{+\infty}dy_0\,\frac{\varphi(x_0,y_0)}{\left[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{17.22}$$