第 二 十 三 讲

上次课

- 波导中的模式：$k_z = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$
- 截止频率：$\omega_c^{mn} = c\sqrt{\left(\left(m\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(n\dfrac{\pi}{b}\right)^2\right)}$ **(基模：** $TE_{10}(TE_{01})$，TM_{11}**)**
- 谐振腔 - $\omega_{mnp} = c\sqrt{\left(m\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(n\dfrac{\pi}{b}\right)^2+\left(p\dfrac{\pi}{d}\right)^2}$， 基模为（**110**，**011**，**101**）

---

§ 12.1 势、规范、及其满足的方程

1．势的定义

原则上讲，对确定的电荷分布 $\rho(\vec{r},t)$ 和电流分布 $\vec{j}(\vec{r},t)$，我们求它的辐射电磁场就是求解 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{12.1.1}$$

直接求解 $\vec{E},\vec{B}$ 场的方程通常比较麻烦，可以使用并矢格林函数的方法（参考 JA Kong 的书）。类似处理静电、静磁时的情况，我们在处理与源有关的辐射问题时解“势”的问题更加方便。与静电、静磁时相比，在一般情况下标势、矢势的定义有所不同。根据 Maxwell 方程第三式，可定义矢势 A 为

$$\boxed{\nabla\times\vec{A} = \vec{B}} \tag{12.1.2}$$

将其带入 Maxwell 方程第二式，可得

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0 \tag{12.1.3}$$

因此可以定义标势，其满足

$$\boxed{\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\nabla\varphi \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\varphi} \tag{12.1.4}$$

2．规范条件（Gauge）

（12.1.2）与（12.1.4）所定义的势并不唯一。给定任意一个标量函数$\Lambda(\vec{r})$，由此定义一对新的标势和矢势：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \tag{12.1.5}$$

将上式代入（12.1.2）和（12.1.4），我们发现$\{\vec{A}', \varphi'\}$给出与$\{\vec{A}, \varphi\}$完全一样的$\vec{E}, \vec{B}$场。在经典电动力学的范畴内，$\vec{E}, \vec{B}$对应着真实的物理场，$\{\vec{A}, \varphi\}$并不对应真实的物理场。因此对于同样的物理体系，$\{\vec{A}, \varphi\}$的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为规范条件。通常使用的规范是库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{12.1.6}$$

和洛仑兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{12.1.7}$$

值得注意的是：洛仑兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

3．势所满足的方程

将（12.1.2）与（12.1.4）带入 Maxwell 方程中的第一和第四式，我们得到对势的方程：

$$\begin{gathered}\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -\rho / \varepsilon_0 \\ -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})\end{gathered} \tag{12.1.8}$$

这组方程是$\{\vec{A}, \varphi\}$耦合在一起的，使用起来不方便。利用 Lorentz 规范条件可以将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式

$$\begin{gathered}\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -\rho / \varepsilon_0, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}\end{gathered} \tag{12.1.9}$$

因此，我们首先根据源的情况求解（12.1.9）得到势，然后再由势求出电磁场。

§ 12.2 推 迟 势

由于$\vec{A}$和φ满足同样的方程，因此我们只要讨论一个标量方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t)=-\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0 \qquad （12.1.9'）$$

的解。求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数，满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t') \qquad （12.2.1）$$

这个函数其实就是当t'时刻在$\vec{r}\,'$处做一个单位强度的扰动时，空间所激发的场。

定义$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,',T=t-t'$，我们发现当格林函数已知后，对任意的电荷分布，其电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{R},T)\rho(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt' \qquad （12.2.2）$$

证明（12.2.2）式并不困难，只要对等式两端都作用一个$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$算符，再利用（12.2.1），则发现（12.2.2）是（12.1.9’）的正确解。下面求解格林函数。在 R，T 空间求解非常不方便，利用 Fourier 变换可得

$$\begin{aligned}G(\vec{R},T)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega\\ \delta(\vec{R},T)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega\end{aligned} \qquad （12.2.3）$$

带入（12.2.1）可以解得$(\vec{k},\omega)$空间的格林函数的解为

$$G(\vec{k},\omega)=\frac{1}{k^2-k_0^2} \qquad （12.2.4）$$

其中,

$$k_0^2=(\omega/c)^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2 \qquad （12.2.5）$$

因此，将（12.2.4）带回（12.2.3）可得$(\vec{R},T)$空间的格林函数为

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int G(\vec{R},\omega)d\omega \qquad (12.2.6)$$

求解（12.2.6）这个积分并不容易。先计算对 k 的积分：

$$
\begin{aligned}
G(\vec{R},\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2-k_0^2}k^2 dk\sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2 iR}\int_0^\infty \frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{k^2-k_0^2}kdk = \frac{1}{2(2\pi)^2 iR}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2-k_0^2}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^2 iR}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk \qquad (12.2.7) \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^2 iR}\times \\
&\left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{ikR}dk - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{-ikR}dk \right\}
\end{aligned}
$$

上面的积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设 k_0 具有一个很小的虚部。

但这个虚数的符号应当取 + 还是取 - 呢？

选择的依据是“因果关系”！--- 在正常介质中这个虚部必须为正。

“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得能量被耗散。而 k_0 是介质中向前传播的波矢，假设 $k_0=\mathrm{Re}(k_0)+i\delta$，

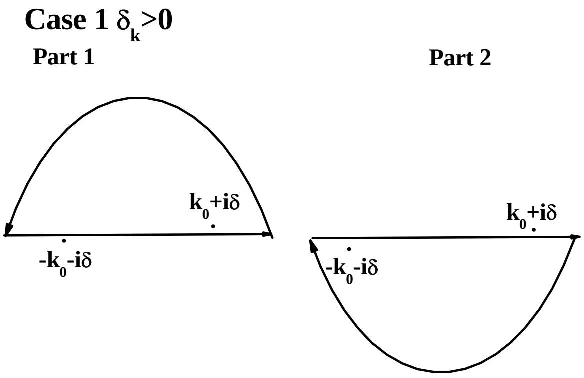
则 $e^{ik_0 r}e^{-i\omega t}=e^{i\,\mathrm{Re}(k_0)r}e^{-\delta r}e^{-i\omega t}$，因此 δ 一定为正。

Tips：

1）这里我们考虑的就是在实轴上的全积分，不是主轴积分(P)，因此一定要选择合适的路径；

2）由（12.2.5）可知，当处于一定介质中时（如空气），因为介质的 ε,μ 一定因为耗散而有虚部，则 k_0 一定带有虚部！即是是真空，也会因为涨落而对电磁波有耗散。因此给 k_0 一个小的虚部不仅是数学的要求，还是物理的必然！

对上面的两个积分分别选择如下图所示的闭合回路，将被积函数解析延拓到复平面，则利用留数定理容易推出



$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times 2\pi i-\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times(-2\pi i)=\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R} \qquad (12.2.8)$$

在（12.2.8）式中加入时间振荡因子$e^{-i\omega T}$，则发现这个解对应这样一个单频波，

$\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}$，其物理意义为一个点源的"出射波"--- 即从源点向*外*发射的球面波。

显然这是符合"因果关系"的解。*若选择k_0的虚部为负，则结果为不符合因果关系的"会聚波"。*进而将（12.2.8）代入（12.2.6）可得最终的格林函数

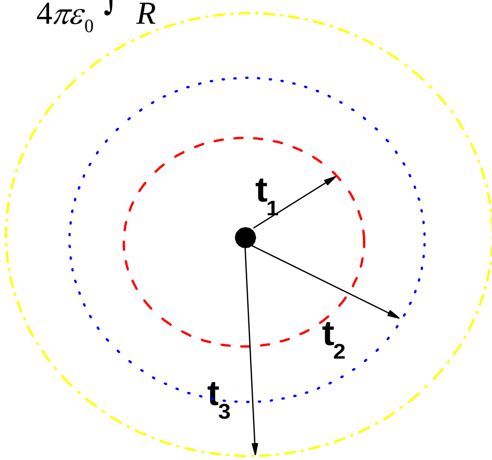
$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}d\omega=\frac{1}{4\pi R}\delta\left(R/c-T\right) \qquad (12.2.9)$$

这个解的物理意义更加明晰 – 在原点处 0 时刻作一个激发，则激励的波以球面波的形式传播出去 – 波振幅以 1/R 形式衰减，且只在 R=ct 处有值。将格林函数形式（12.2.9）带入（12.2.4）得到

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{R}\delta(R/c-T)\rho(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}d\tau' \qquad (12.2.10)$$

式中方括号[ ]表示$t'=t-\frac{R}{c}$，同理可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{R}d\tau' \qquad (12.2.11)$$



我们注意到$\varphi,\vec{A}$的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时t时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需的时间。这就是推迟势，其物理的根据是因果关系。

§ 12.3 多 极 辐 射

很多情况下辐射源电流、电荷分布于空间一很小区域内，而我们则关心远场的行为，此时类似静电、静磁时的处理方法，我们可以作多极展开。

1．推迟势的多极展开

我们讨论的是远离源的场，即$r>>l$（图 12.2），l为源的线度。被积函数是$\vec{R}$的函数，我们可以将它在$\vec{r}$处展开为级数，即

$$\frac{[\rho]}{R}=\left.\frac{[\rho]}{R}\right|_{R=r}+\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\left(\frac{[\rho]}{R}\right)_{R=r}+\ldots=\frac{[\rho]_0}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r}+\cdots \qquad (12.3.1)$$

式中$[\rho]_0$表示$\rho\left(\vec{r}',t-\frac{r}{c}\right)$，以后为简便起见，**脚标 0 不再写出**。同理可得

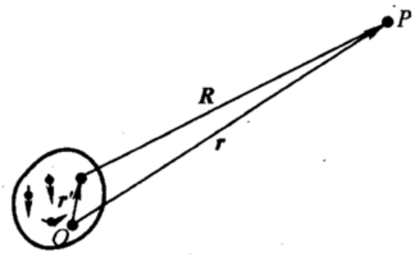


图 12.2

$$\frac{[\vec{j}]}{R}=\frac{[\vec{j}]}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\vec{j}]}{r}+\ldots$$

故

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{[\rho]}{r}d\tau'-\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{r}d\tau'+\ldots\right]$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'+\cdots$$

我们下面分别研究$\vec{A}$、φ展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质。

2．电偶极辐射

φ展开式中的第一项

$$\varphi_0=\int\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r}d\tau'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int[\rho]d\tau'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (12.3.2)$$

Q是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。第二项

$$\varphi_1=-\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r}d\tau'=-\nabla\cdot\frac{[\vec{p}]}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (12.3.3)$$

式中$[\vec{p}]=\int \vec{r}'[\rho]d\tau'$，表示系统总的电偶极矩。

$\vec{A}$展开式中的第一项：

$$\begin{aligned}\vec{A}_1&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int[\vec{v}\rho]d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\sum_i q_i\vec{v}_i\right]\\&=\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d}{dt}\left[\sum_i q_i\vec{r}_i\right]=\frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\dot{\vec{p}}\right]\end{aligned}\tag{12.3.4}$$

所以，电偶极矩系统所产生的$\vec{A}$和φ为（12.3.3）及（12.3.4）。下面考虑单频的辐射源，$\rho(\vec{r}',t')=\rho(\vec{r}')e^{-i\omega t'},\vec{j}(\vec{r}',t')=\vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t'}$（任意情况总可以展开成单频结果的叠加）。从联系$\vec{B}$与$\vec{A}$的公式，我们得到电偶极辐射场中的磁场部分为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\left[\dot{\vec{p}}\right]}{r}=-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r}\tag{12.3.5}$$

电场当然也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地由磁场导出

$$\vec{E}=-\frac{c^2}{i\omega}\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r}\tag{12.3.6}$$

下面仔细分析一下在（12.3.5）和（12.3.6）式中要用到的一项：

$$\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r}=\left(\nabla\times[\vec{p}]\right)\frac{1}{r}+\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times[\vec{p}]\right)\qquad\text{（12.3.7）}$$

考虑第一项，因为$[\vec{p}]=\vec{p}_0e^{-i\omega t}e^{i\frac{\omega}{c}r}$，则微分运算可以代换成

$$\boxed{\nabla\leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r=ik\vec{e}_r}\qquad\text{（12.3.8）}$$

再考虑第二项，因$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$，最终，（12.3.7）变为

$$i\frac{\omega}{c}\left[\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right]-\frac{1}{r}\left[\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right]\qquad\text{（12.3.7’）}$$

因此，$\frac{\omega}{c}$和$\frac{1}{r}$的比较决定了哪一项大，哪一项小。下面我们分三个区域来讨论。

（1）近区： $r<<\lambda$，但仍满足 $r>>l$。这时公式(12.3.5)和(12.3.6)中的旋度算

子只要对分母运算即可。因为每对分母运算一次得到一个$\frac{1}{r}$因子，而对分子运算得到一个$\frac{1}{\lambda}$因子，显然$\frac{1}{r}$比$\frac{1}{\lambda}$贡献大。于是我们得到近区的场强为

$$
\begin{aligned}
&\vec{B}=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r\times[\vec{p}],\\
&\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot[\vec{p}]\right)-[\vec{p}]\right)
\end{aligned}
\tag{12.3.9}
$$

我们注意到此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间而已 – 事实上在这个条件下，“准静态”近似适用（参考第6章）。

（2） 远区：不仅要求 $r>>l$，而且 $r>>\lambda$，λ为辐射场的波长，此时，公式(12.3.7)中第一项远大于第二项。因此在计算电磁场时，只需计算∇算子作用到$[\vec{p}]$上即可，无需计算其作用到$\frac{1}{r}$上。这等价于做代换（12.3.8）。因此，远区场强的公式为

$$
\begin{aligned}
&\vec{B}=\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times[\vec{p}]\\
&\vec{E}=-\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r\times\left(\vec{e}_r\times[\vec{p}]\right),
\end{aligned}
\tag{12.3.10}
$$

(3) 中间区域：虽然 $r>>l$，但 $r\approx\lambda$，这时我们必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。这是因为对两者运算得到的因子$\frac{1}{r}$和 $\frac{\omega}{c}=\frac{1}{\lambda}$是同数量级。

思考题：与远场区不同，在近场区电场与磁场差一个 i，这中间有什么物理值得我们思考呢？能否联系第六章准静态的知识，对上述事实作一番讨论？

习题

P. 343, 12.1

补充

（1）仿照课件中对真空中格林函数的解（12.2.9）的推导，利用因果关系，推导出一个均匀的负折射介质（$\varepsilon<0,\mu<0$）中的格林函数的解，并解释所得的格林函数的物理意义。

（2）推导（12.3.9）式，计算一个偶极振子在近场条件下的能流分布的时间平均值。

（3）利用矢量运算，根据 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial\vec{A}/\partial t$ 直接由势推导出偶极辐射对应的 E 的表达式，并证明其与（12.3.6）的一致性。