Lecture 2
第二讲

Limit and Continuity
极限与连续

Zhenglu Jiang
姜正禄

Department of Mathematics, Sun Yat-sen University
Guangzhou 510275, China
中山大学数学系，广州 510275

目 录

一、数列的极限

数列极限的基本概念

数列收敛的充要条件

数列收敛的夹逼原则

数列极限不等式（保号性）

数列极限的四则运算

1. 数列极限的基本概念

数列　通项　极限　收敛

无穷多个形如

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

排列而成的有序的数集被称为数列，简记为$\{a_n\}$ 或$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。其中的a_n被称为该数列$\{a_n\}$的通项。

数列可看作定义在自然数集上的函数，即可记作如下

$$f(n) = a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)。$$

如当n无限增大时，数列$\{a_n\}$的通项a_n无限接近于或者说无限趋近于一个常数A，则称A为该数列$\{a_n\}$的极限或称该数列$\{a_n\}$收敛（于A）。记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{或} a_n \to A\,(n\to\infty)。$$

否则，称该数列$\{a_n\}$发散。

收敛数列的几何特征

对任意给定的以该极限A为中心的开区间I，总可找到数列$\{a_n\}$中的某一项，使得从该项以后的一切数a_n全部落在这个区间I内。

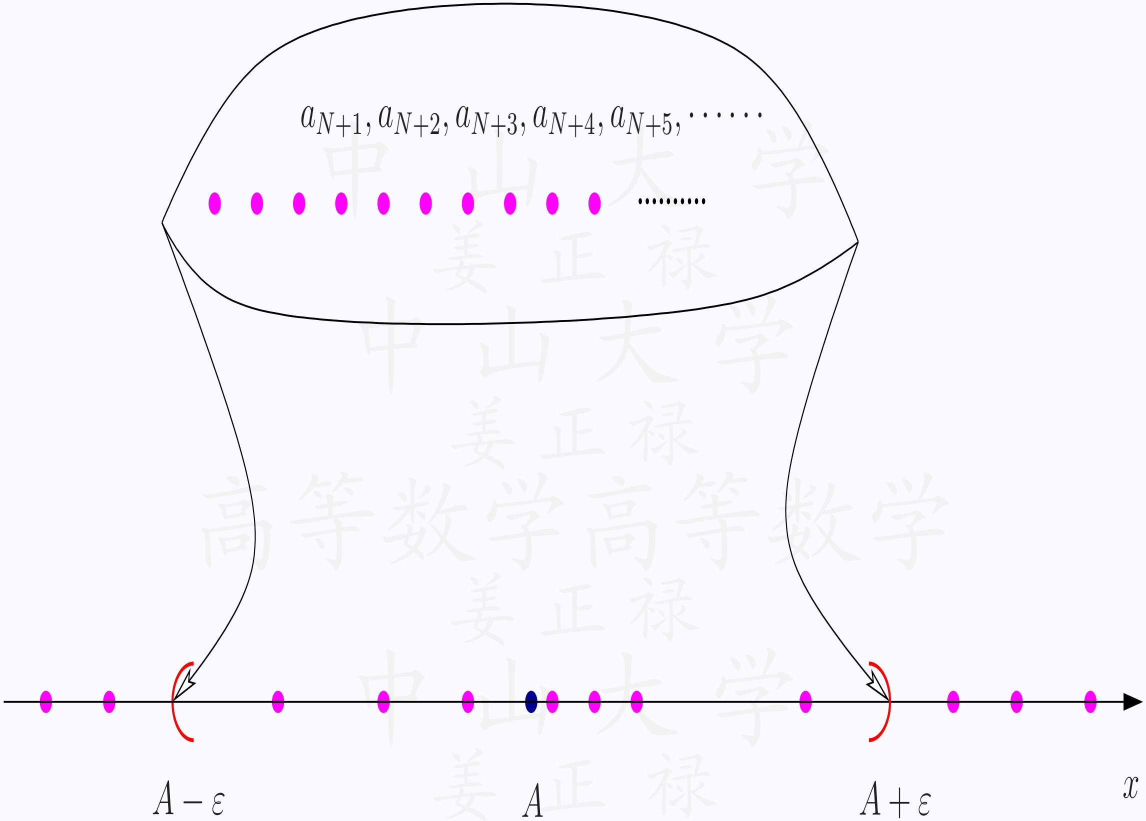
设$\{a_n\}$是一个数列，A是一个常数，如对于任意给定的正数ε，总存在一个正整数N，当$n > N$时都有$|a_n - A| < \varepsilon$，则称A为该数列$\{a_n\}$的**极限**或称该数列$\{a_n\}$**收敛**（于A）。记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{或} a_n \to A\ (n \to \infty)。$$

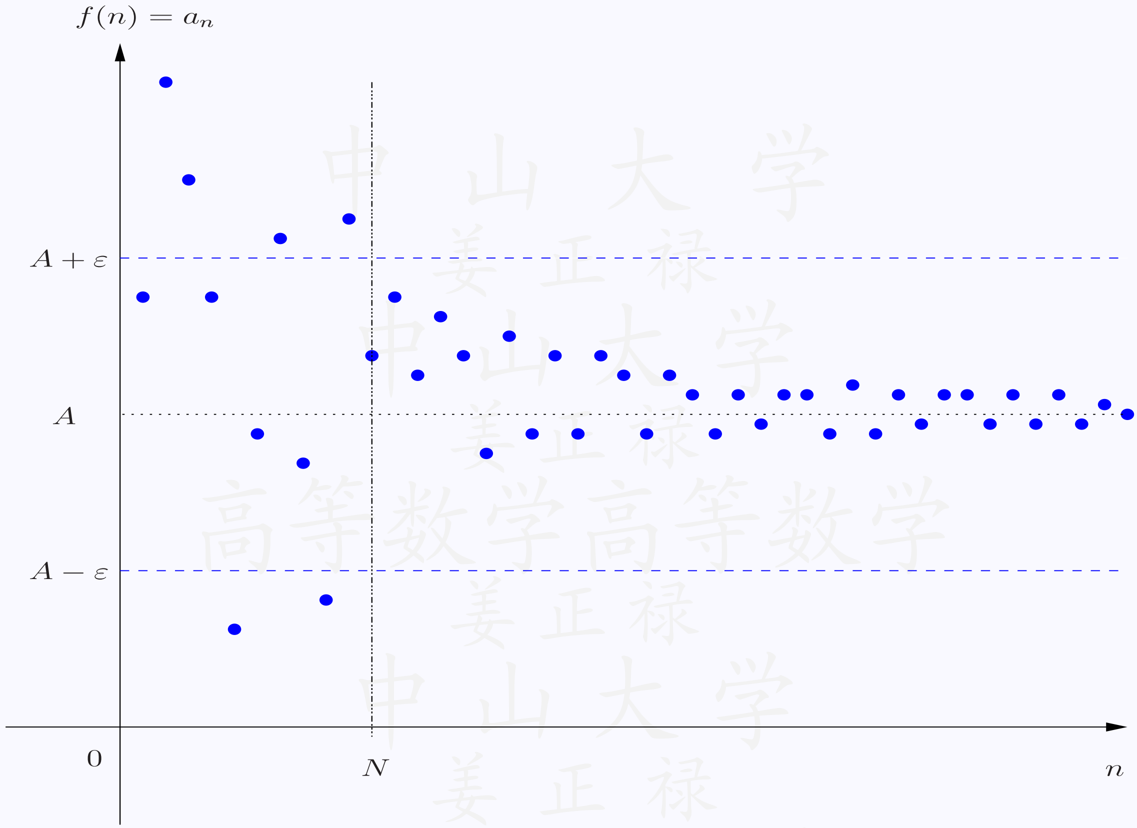
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0, \exists N, \text{当} n > N \text{时}, |a_n - A| < \varepsilon}$$



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$$



$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = A$$

(1) 关于 ε:

① ε **的任意性**. 定义 1 中的正数 ε 的作用在于衡量数列通项 a_n 与常数 a 的接近程度, ε 越小, 表示接近得越好; 而正数 ε 可以任意小, 说明 a_n 与常数 a 可以接近到任何程度.

② ε **的暂时固定性**. 尽管 ε 有其任意性, 但一经给出, 就暂时地被确定下来, 以便依靠它来求出 N.

③ ε **的多值性**. ε 既是任意小的正数, 那么 $\frac{\varepsilon}{2}, 3\varepsilon, \varepsilon^2$ 等等, 同样也是任意小的正数, 因此定义 1 中的不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中的 ε 可用 $\frac{\varepsilon}{2}, 3\varepsilon, \varepsilon^2$ 等来代替. 从而 $|a_n - a| < \varepsilon$ 可用 $|a_n - a| \leq \varepsilon$ 代替.

④ 正由于 ε 是任意小正数, 我们可以限定 ε 小于一个确定的正数.

(2) **关于** N:

① **相应性**. 一般地, N 随 ε 的变小而变大, 因此常把 N 写作 $N(\varepsilon)$, 来强调 N 是依赖于 ε 的. ε 一经给定, 就可以找到一个 N.

② N **多值性**. N 的相应性并不意味着 N 是由 ε 唯一确定的, 因为对给定的 ε, 若 $N = 100$ 时能使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则 $N = 101$ 或更大的数时, 此不等式自然成立. 所以 N 不是唯一的. 事实上, 在许多场合下, **最重要的是 N 的存在性**, 而不是它的值有多大. 基于此, 在实际使用中的 N 也不必限于自然数, 只要 N 是正数即可. 而且把 $n > N$ 改为 $n \geq N$ 也无妨.

用“$\varepsilon - N$”语言证明几个常见的数列的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

当$a>0$时，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

当$|q|<1$时，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q^n=0.$

2. 数列收敛的充要条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当} \min(n,m) > N \text{时}, \ |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

柯西（Cauchy）极限存在准则

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当} \min(n,m) > N \text{时}, \ |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

3. 数列收敛的夹逼原则

如 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，且存在自然数$N$，当$n > N$时不等式$b_n \le a_n \le c_n$成立，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A。$$

当$a > 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

当正整数$k > 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{k-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} = 0.$

当$a > 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0.$

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

4. 数列极限不等式（保号性）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

（1）如$A > B$，则存在自然数N，当$n > N$时

$$a_n > b_n;$$

（2）如$A < B$，则存在自然数N，当$n > N$时

$$a_n < b_n;$$

（3）如存在自然数N，当$n > N$时$a_n \geq b_n$，则

$$A \geq B。$$

5. 数列极限的四则运算

如 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

和

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB;$$

进一步, 如$B \neq 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}。$$

二、数列极限的性质

收敛数列的极限一定是唯一的

收敛的数列必有界

无穷小量与有界量之积还是无穷小量

单调有界数列必有极限

1. 收敛数列的极限一定是唯一的

反证法 设数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$

且$A > B$, 则因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 由极限的定义

知, 对$\frac{A-B}{2} > 0$, 存在正数N_1, 当$n > N_1$时,

$|x_n - A| < \frac{A-B}{2}$, 即得

$$x_n > \frac{A+B}{2}; \tag{1}$$

同理, 对$\frac{A-B}{2} > 0$, 存在正数N_2, 当$n > N_2$时,

$|x_n - B| < \frac{A-B}{2}$, 即得

$$x_n < \frac{A+B}{2}。 \tag{2}$$

取$N = \max(N_1, N_2)$, 当$n > N$时, (1)和(2)不可能成立。因此, 假设不对, 命题成立。

2. 收敛的数列必有界

证明 设数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则由极限的定义知, 对$\varepsilon = 1$, 存在正数$N$, 当$n > N$时, $|x_n - A| < 1$, 即知, 当$n > 0$时, $|x_n| < M$, 其中

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |A|)。$$

3. 无穷小量与有界量之积还是无穷小量

无穷小量是指无穷小数列，即极限为零的数列。有界量是指有界数列，即存在正数M，使得数列中所有的数都落在区间$[-M, M]$中。无穷大量是指无穷大数列，即对任意给定的正数G，存在自然数N，使得数列中第N项之后所有的数都落在区间$[-G, G]$之外。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0$$

4. 单调有界数列必有极限

考虑数列$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，易证它是单调增加且有界（小于3），故可知这个数列极限存在，通常用字母e来表示它，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ 。$$

e是无理数，$e = 2.718281828459045\cdots$。

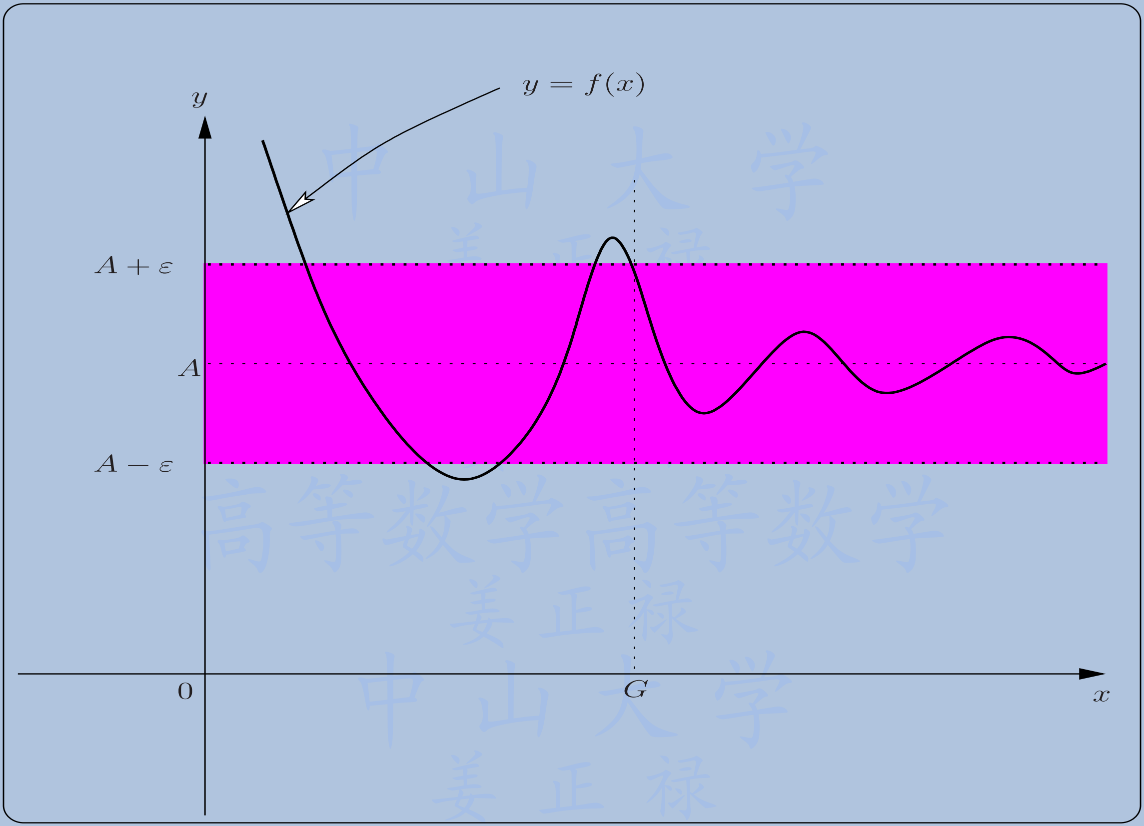
三、函数的极限

定义, 性质, 计算方法

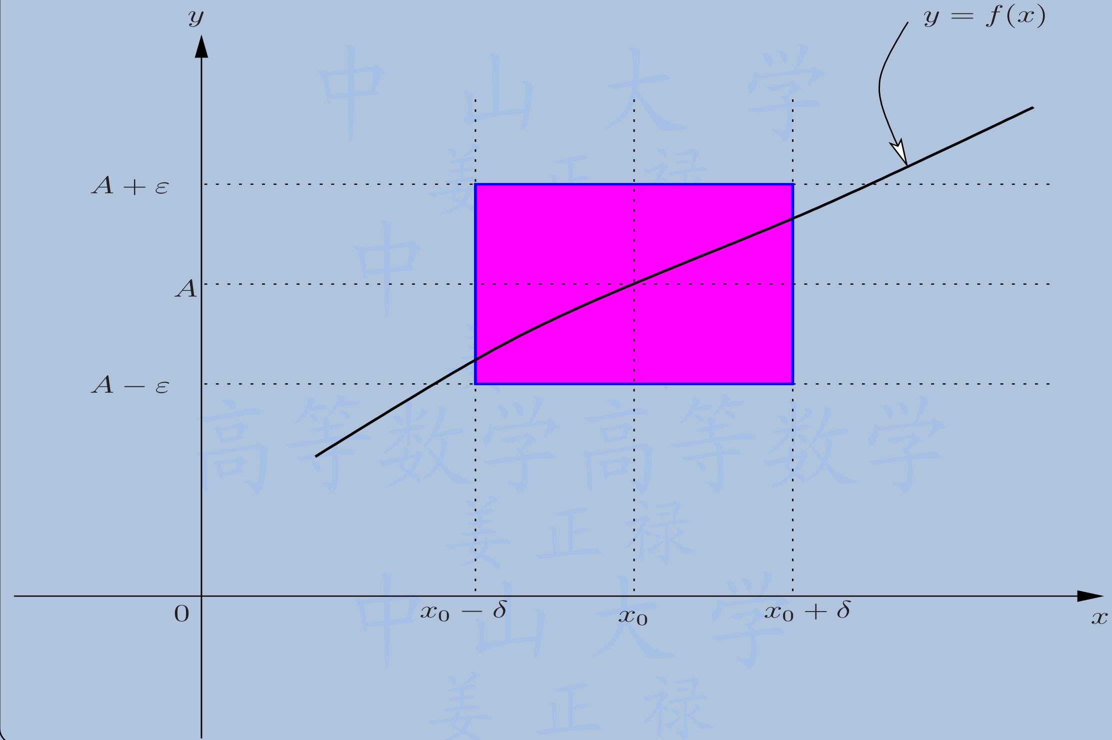
1. 定义

设函数$f(x)$在x_0附近有定义，当x从x_0的附近无限接近于x_0时，函数$f(x)$的值会无限接近于或者说无限趋近于一个常数A，则称A为函数$f(x)$在x_0处的极限。记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{或} f(x) \to A\ (x \to x_0)。$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A}$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

设函数$f(x)$在x_0附近有定义，当x从x_0左边的附近无限接近于x_0时，函数$f(x)$的值会无限接近于或者说无限趋近于一个常数A，则称A为函数$f(x)$在x_0处的左极限。记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{或} f(x) \to A \ (x \to x_0^-)。$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A}$$

$$\Updownarrow$$

$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，当$x_0 - \delta < x < x_0$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

设函数$f(x)$在x_0附近有定义，当x从x_0右边的附近无限接近于x_0时，函数$f(x)$的值会无限接近于或者说无限趋近于一个常数A，则称A为函数$f(x)$在x_0处的右极限。记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A\text{或}f(x)\to A\ (x\to x_0^+)。$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A}$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$x_0 < x < x_0 + \delta$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$y = x - [x] \qquad x = 1$$

$$y = \sin(x) \qquad x = \pi/2$$

$$y = \sin(1/x) \qquad x = 0$$

$$y = x\sin(1/x) \qquad x = 0$$

$$y = \operatorname{sgn}(x) \qquad x = 0$$

用“$\varepsilon-\delta$”语言证明函数极限

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{3x+1}=2$$

$$\lim_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$$

2. *性质*

柯西（Cauchy）极限存在准则、夹逼原则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

四则运算

$$求\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin(x)}$$

$$求\lim_{x\to0}\frac{\sin(5x)-\tan(3x)}{2x}$$

极限不等式（局部保号性）、海涅定理

$$求\lim_{x\to0}\sin(1/x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

3. 计算方法

(1) 用极限的定义计算;

(2) 用极限的性质计算;

(3) 无穷小量化方法;

(4) 用Tayler展开计算;

(5) 洛必达法则;

(6) 用定积分计算。

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{tgnx}{tgmx}$ （n, m **为自然数**）；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$；

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$ $(k>0)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}]$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0+} x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})$ $(a, b>0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{px}{2}}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sqrt{1-x^2}\,ctg\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{\sin x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\ x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos px)^{\frac{1}{x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{p}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(tg\dfrac{px}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

求下列极限（a，b 为实数）：

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

四、连续函数

定义, 性质, 闭区间上连续函数的性质

1. 定义

设函数$f(x)$在x_0的某一邻域内有定义，如$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$在$x_0$处连续，称$x_0$为函数$f(x)$的连续点。记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \text{或} f(x)\to f(x_0)\ (x\to x_0)。$$

否则，称函数$f(x)$在x_0处间断，称x_0为函数$f(x)$的间断点。

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \text{左连续}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \text{右连续}$$

间断点

第一类间断点

（左、右极限都存在的间断点）

可去间断点

跳跃间断点

第二类间断点

（不是第一类间断点的间断点）

无穷间断点

振荡间断点

…

2. 性质

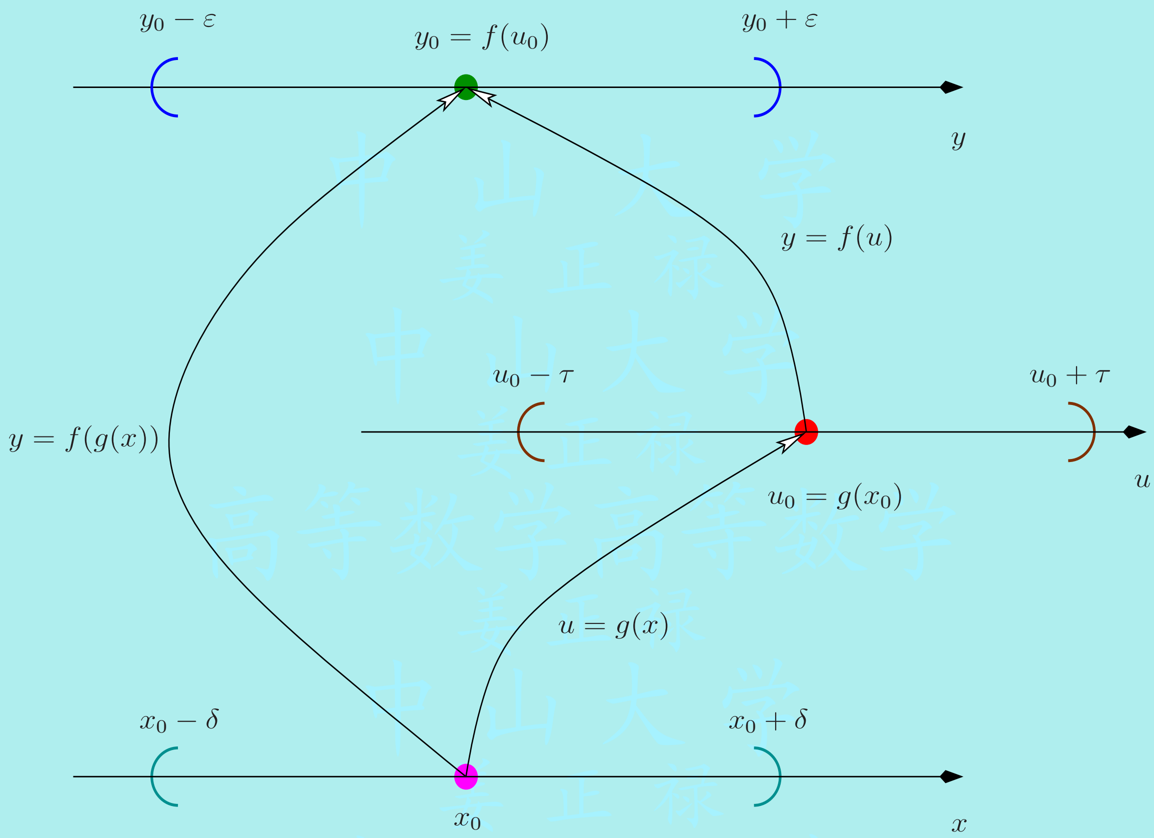
四则运算、复合运算和反函数计算都保持函数的连续性。

四则运算连续定理

设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续，则$f(x) \pm g(x)$和$f(x)g(x)$在点x_0处连续。进一步，若$g(x_0) \neq 0$，则$f(x)/g(x)$在点x_0处也连续。

复合运算连续定理

设函数$y = f(u)$在点u_0处连续，函数$u = g(x)$在点x_0处连续且$u_0 = g(x_0)$，则复合函数$y = f(g(x))$ 在点x_0处连续。



复合运算连续定理证明示意图

反函数连续定理

设$y = f(x)$是从区间(a,b)到区间(c,d)上严格单调增加（或减少）的一一对应的函数，则$y = f(x)$是(a,b)上的连续函数，其反函数$x = \phi(y)$在区间(c,d)上也严格单调增加（或减少）而且连续。

所有初等函数在其定义域内的任一区间上连续

3. *闭区间上连续函数的性质*

有界性定理、最值定理、介值定理

有界性定理

闭区间上连续函数一定有界。

反例

$f(x)=\frac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界。

最值定理

闭区间上连续函数必可取到最大值和最小值。

反例

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & 0<x\le 1 \end{cases}$$

$y=\tan(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内既无最大值又无最小值。

介值定理

设函数$y = f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a) \neq f(b)$且常数μ介于$f(a)$与$f(b)$之间，则存在点$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = \mu$。

小结

$$\underbrace{\text{函数极限和连续函数}}$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\text{定义, 性质, 计算方法及其应用}}$$

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!