第一章　行列式

1.

(1) $\tau(23154)=1+1+0+1+0=3$ 该数列为奇排列

(2) $\tau(631254)=5+2+0+0+1+0=8$ 该排列为偶排列

(3) $\tau[n(n-1)\ldots 321]=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$

　当 $n=4m$ 或 $n=4m+1$ 时，$\tau[n(n-1)\ldots 321]$ 为偶数，排列为偶排列

　当 $n=4m+2$ 或 $n=4m+3$ 时，$\tau[n(n-1)\ldots 321]$ 为奇数，排列为奇排列（其中 $m=0,1,2\ldots$）

(4) $\tau[135\ldots(2n-1)246\ldots(2n)]=0+1+2+3+\ldots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

　当 $n=4m$ 或 $n=4m+1$ 时，$\tau[135\ldots(2n-1)246\ldots(2n)]$ 为偶数，排列为偶排列

　当 $n=4m+2$ 或 $n=4m+3$ 时，$\tau[135\ldots(2n-1)246\ldots(2n)]$ 为奇数，排列为奇排列（其中 $m=0,1,2\ldots$

2.解：已知排列 $i_1i_2\ldots i_n$ 的逆序数为 k，这 n 个数按从大到小排列

时逆序数为 $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个.

设第 x 数 i_x 之后有 r 个数比 i_x 小，则倒排后 i_x 的位置

变为 i_{n-x+1}，其后 $n-x-r$ 个数比 i_{n-x+1} 小，两者相加为 $n-x$

故 $\tau(i_ni_{n-1}\ldots i_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-\tau(i_1i_2\ldots i_n)$

3　证明：. 因为：对换改变排列的奇偶性，即一次变换后，奇排列改变为偶排列，偶排列改变为奇排列∴当 n≥2 时，将所有偶排列变为奇排列，将所有奇排列变为偶排列 因为两个数列依然相等，即所有的情况不变。∴偶排列与奇排列各占一半。

4　（1）$a_{13}a_{24}a_{33}a_{41}$ 不是行列式的项　$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是行列式的项 因为它的列排排列逆序列 $\tau=(4321)=3+2+0+0=5$ 为奇数，∴应带负号

（2）$a_{51}a_{42}a_{33}a_{24}a_{51}$ 不是行列式的项　$a_{13}a_{52}a_{41}a_{35}a_{24}=a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}$　因为它的列排排列逆序列 τ (34512)=2+2+2+0+0=6 为偶数∴应带正号。

5　解：$\begin{matrix} a_{11} & a_{23} & a_{32} & a_{44} \\ a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_{41} \\ a_{14} & a_{23} & a_{31} & a_{42} \end{matrix}$ 利用 τ 为正负数来做，一共六项，τ 为正，则带正号，τ 为负则带负号来做。

6　解：（1）因为它是左下三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \ldots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \ldots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} & \ldots & a_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \ldots & a_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

（2）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{3} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$a_{12}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\cdot 0 - a_{12}a_{21}(-1)^{1+1}\cdot 0 = 0$$

（3）$\begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 34 & 0 & 0 \\ 21 & -1 & 3 \\ 17 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$=32

（4）

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & x \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 0 \\ x & y \end{vmatrix}(-1)^{2+3+1+2}\begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & 0 & x \end{vmatrix} = x^5 + y^5$$

7. 证明：$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$将行列式转化为$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{1} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & \ldots & 0 \end{vmatrix}$若 零元多于 n^2-n 个时，

行列式可变为$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$故可知行列式为 0.

8. （1）

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 3 & -13 & 12 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 21 & 21 & 0 \\ 13 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 630$$

第一章　　高数　3册

9.（1）. $y = mx + b$.经过$(x_1，y_1)(x_2，y_2)$.

斜率$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$y = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + b$代入$(x_1，y_1)$

$y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - \dfrac{(y_1 - y_2)x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$

则$y = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$

又由$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

左边=$(y_1 - y_2)x - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 =$ 右边

则$y = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$

问题特征：

$$10.(1)\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & b''+a'' \end{vmatrix}$$

利用性质(4)和(5).分成六个行列式相加

其余结合为零故

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} b & c & a \\ b' & c' & a' \\ b'' & c'' & a'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ c' & a' & b' \\ c'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}(\text{性质}2)$$

$$(2)\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\cos^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1-\cos^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ 1-\cos^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}\overline{\overline{\text{-(2)列+(1)列}}}-\begin{vmatrix} 2\cos^2\alpha-1 & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ 2\cos^2\beta-1 & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ 2\cos^2\gamma-1 & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}=0(\text{性质}(5))$$

$$(3).\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \xrightleftharpoons[\substack{(3)\text{列}\times xz \\ (4)\text{列}\times xz}]{(2)\text{列}\times yz} \frac{1}{yz\cdot xz\cdot xy}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix}$$

(4)列$\times xy$

$$=\frac{xyz\cdot xyz}{yz\cdot xz\cdot xy}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$11.(1)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$$\xrightleftharpoons[(2)\cdot(3)(4)\text{列}]{(1)\text{列}\cdot(-1)\text{加到}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}\xrightleftharpoons[(2)\text{行}\cdot(-3)+(4)\text{行}]{(2)\text{行}\cdot(-2)+(3)\text{行}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 6a+3b \end{vmatrix}$$

$$\xrightleftharpoons{(3)\text{行}\cdot(-3)+(4)\text{行}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

$$(2)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}\xrightarrow[\substack{(1)列\times(-3)+(3)列\\\cdots\\(1)列\times(-n)+(n)列}]{(1)列\times(-2)+(2)列}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-1&2&6&\cdots&2n\\-1&0&3&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{降阶}}1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&6&&\cdots&2n\\0&3&&\cdots&2n\\0&0&4&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=2\times3\times4\times\cdots\times n=n\,!$$

$$(3)\begin{vmatrix}x_1&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\x_1&x_2&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\x_1&x_2&x_3&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\end{vmatrix}=x_1\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\1&x_2&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\1&x_2&x_3&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&x_2&x_3&\cdots&x_n\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\cdots\\(1)列\times(-x_n)+(n)列}]{(1)列\times(-x)+(2)列}x_1\begin{vmatrix}1&a_{12}-x_2&a_{13}-x_3&\cdots&a_{1n}-x_n\\1&0&a_{23}-x_3&\cdots&a_{2n}-x_n\\1&0&0&\cdots&a_{3n}-x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}\underline{\underline{降阶}}\,x_1 1\times(-1)^{1+1}\times1\times\begin{vmatrix}a_{12}-x_2&a_{13}-x_3&\cdots&a_{1n}-x_n\\&a_{23}-x_3&\cdots&a_{2n}-x_n\\&&\cdots&a_{3n}-x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\&&\cdots&a_{(n-1)n}-x_n\end{vmatrix}$$

习题一

13 （1）

$$\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}=D$$

根据“定义法” $D=x^n+(-1)^{I(2.3.4.5\ldots n)}y^n=x^n+(-1)^{n-1}y^n$

$$（2）\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&+2&-2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}=D$$

根据“降阶法” $D \xrightarrow[\text{第(1)列上得}]{\text{将第2~n列加到}} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{到后一行得}]{\text{将前一行乘以-1加}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

变为(n-1)阶 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{到(1)列上得}]{\text{将(2)~(n)列加}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{(2)~(n)列}]{\text{-1×(1)列加到}} -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)^{n-2} \frac{n(n+1)}{2} = (-1)^{\frac{n^2-3n+2}{2}+\frac{2n-2}{2}} n^{n-1} \frac{n+1}{2} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1} \frac{n+1}{2}$$

（3）

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 & \cdots & (a-1)^{n-1} \\ 1 & a-2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a-n+1 & (a-n+1)^2 & \cdots & (a-n+1)^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n+1 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n+1)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n+1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{范达蒙行列式}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1!2!\cdots(n-1)!$$

注：根据范达蒙行列式原式$=(-1)\bullet(-2)\cdots(-n+1) = (-1)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} 1!2!\cdots(n-1)!$

$$(-1)\bullet(-2)\cdots(-n+2)$$

……

$$-1 \quad = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1!2!\cdots(n-1)!$$

（4）$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} \underline{\underline{第n行提出a_n^n得}}$

$$a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix} 1 & a_1^{-1}b_1 & a_1^{-2}b_1^2 & \cdots & a_1^{1-n}b_1^{n-1} & \frac{b_1^n}{a_1^n} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \cdots & \frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}} & \frac{b_2^n}{a_2^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} & \cdots & \frac{b_{n+1}^{n-1}}{a_{n+1}^{n-1}} & \frac{b_{n+1}^n}{a_{n+1}^n} \end{vmatrix}$$

$$=a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_1^2}{a_1^2} & \cdots & \frac{b_1^{n-1}}{a_1^{n-1}} & \frac{b_1^n}{a_1^n} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \cdots & \frac{b_2^{n-1}}{a_2^{n-1}} & \frac{b_2^n}{a_2^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} & \cdots & \frac{b_{n+1}^{n-1}}{a_{n+1}^{n-1}} & \frac{b_{n+1}^n}{a_{n+1}^n} \end{vmatrix}=a_1^na_2^na_3^n\cdots a_{n+1}^n\pi(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j})=\pi(a_jb_i-a_ib_j)$$

14 （1）证明：$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$

$$=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

$$+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2})-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2})$$

$$+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2})$$

$$=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\gamma)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\right]$$

(2)证明：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$ $\quad x_1+x_2+x_3+x_4=1$

（3）$\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & & a+x_n & a \\ a & a & a & & a & a \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{\text{最后一行乘以(-1)加到(1)\textasciitilde(}n\text{)行得}}}$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n & 0 \\ a & a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n a=ax_1x_2x_3\cdots x_n$$

（4）“递推法”$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{\text{降阶}}}(-1)^{\mathrm{n+n}}x\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}+a_{n-1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}(-1)^{n+1}$$

$$=xD_{n-1}+a_{n-1}$$

由此类推:

$D_{n-1}=xD_{n-2}+a_{n-2}$

$\cdots$

$D_2=xD_1+a_1$

$\therefore D=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

15. (1) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{bmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

=(ab+1)(cd+1)−[a(−d)]=(ab+1)(cd+1)+ad

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ =(4−6) · (−1−15)=32

(3)

$\begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{1+2+1+3} \begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & d^2 \\ ab & bc & 0 \\ cd & da & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+5} \begin{pmatrix} a & a \\ b & d \end{pmatrix} \cdot$

$\begin{pmatrix} 0 & c^2 & 0 \\ ab & 0 & bc \\ cd & 0 & da \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+3+5} \begin{pmatrix} a & a \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & ab & bc \\ 0 & cd & da \end{pmatrix}$

=−a(c−d) $\cdot\ d^2(a^2bd - c^2bd)$ −a(d−b) $[-c^2(a^2bd - c^2bd)]$ −a(d−c) $\cdot\ b^2(a^2bd - c^2bd)$

=abd$(a^2 - c^2)[bd^2 - cd^2 + dc^2 - bc^2 - db^2 + cb^2]$

= abd$(a^2 - c^2)$ (c−b)(d−b)(c−d)

(4) $|A| = \begin{bmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \iddots & \\ & & & & & b & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & & \ddots & \\ b & & & & & & & a \end{bmatrix} \xlongequal{\text{选定（1）（2n）行}} (-1)^{1+2n+1+2n} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & & & \boldsymbol{b} \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ \boldsymbol{b} & & & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}^{\}n-1\text{行}}_{\}n-1\text{行}} = (a^2-b^2)\cdot A_{n-1}$

$\frac{|A|}{|A_{n-1}|} = a^2 - b^2$. $\frac{|A_{n-1}|}{|A_{n-2}|} = (a^2-b^2)$ …… $\frac{A_2}{A_1} = ((a^2-b^2)$ $A_1 = a^2 - b^2$

$\therefore \frac{|A|}{|A_{n-1}|}\cdot\frac{|A_{n-1}|}{|A_{n-2}|}\cdots\frac{A_2}{A_1}\cdot A_1 = |A| = (a^2-b^2)^n$

16.范达行列式

V($x_1 \cdots\cdots x_n$) = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} =$ $(x_2 - x_1)$ $(x_3 - x_1)$ …

$(x_n - x_1) = (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})$ $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$ $\underset{\text{行列式}}{\overset{\text{转量}}{\rightleftarrows}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} = (a_1-x)(a_2-x)\cdots\cdots(a_{n-1}-x)(a_2-a_1)\cdots\cdots(a_{n-1}-a_1)(a_3-a_2)\cdots$$

$(a_{n-1}-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})$

（1）因为 $a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$ 为常数。所以 p(x)是 n-1 次的多项式

（2）令 p(x)=0.得 x= a_1.x= a_2 ...... a_{n-1} 即 p(x)的根为 $a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$

第二章　矩阵代数

4.计算下列矩阵乘积

（1）$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*2+0*(-2) & 3*1+(-2)(-1) & 3(-1)+(-2)2 \\ 0*2+1*0 & 0*1+1(-1) & 0*(-1)+1*2 \\ 2*2+4*0 & 2*1+4(-1) & 2*(-1)+4*2 \\ -1*2+0*0 & -1*1+0(-1) & (-1)(-1)+0*2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 6 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2+2*1+(-1)2 & 1*3+2(-1)+(-1)4 \\ -2*2+1*1+0*2 & -2*3+1(-1)+0*4 \\ 1*2+0*1+3*2 & 1*3+0(-1)+3*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$

(3). (1,-1，2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ =（1*2+（-1）*1+2*4,1*1+(-1）*1+2*2，1*0+（-1）*3+2*1=（9，4，1）

（4）（x,y,1）$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$　　$(a_{12}=a_{21})$

=（x,y,1）$\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+b_2 \\ b_1x+b_2y+c \end{pmatrix}$

$\left[x(a_{11}x+a_{12}y+b_1)+y(a_{21}x+a_{22}y+b_2)+b_1x+b_2y+c\right]$

$=(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c)$

（5）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^2, B^2, A^2B^2与$(AB)^2$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2B^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 63 & 0 \\ 35 & 28 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$(AB)^2=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 66 & 24 \\ 20 & 34 \end{pmatrix}$

6.

(1)A=$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

n=1 时　A=$\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$

n=2 时　$A^2=\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \cos\ 2\varphi & \sin\ 2\varphi \\ -\sin\ 2\varphi & \cos\ 2\varphi \end{pmatrix}$

n=3 时　$A^3=A^2\cdot$A=$\begin{pmatrix} \cos\ 2\varphi & \sin\ 2\varphi \\ -\sin\ 2\varphi & \cos\ 2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \cos\ 3\varphi & \sin\ 3\varphi \\ -\sin\ 3\varphi & \cos\ 3\varphi \end{pmatrix}$

∴假设$A^n=\begin{pmatrix} \cos\ n\varphi & \sin\ n\varphi \\ -\sin\ n\varphi & \cos\ n\varphi \end{pmatrix}$

（1 当 n A^n ==1 时，$A^1=\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$

（2 假设当 n≥2 时（n 为自然数）成立，令 n=k，则$A^k=\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$成立；

当 n=k+1 时

$A^{k+1}=A^k\cdot$A=$\begin{pmatrix} \cos\ k\varphi & \sin\ k\varphi \\ -\sin\ k\varphi & \cos\ k\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \cos\ k\varphi\sin\ k\varphi-\sin\ k\varphi\sin\ \varphi & \cos\ k\varphi\sin\ \varphi-\sin\ k\varphi\cos\ \varphi \\ -\sin\ k\varphi\cos\ \varphi+\cos\ k\varphi\sin\ \varphi & -\sin\ k\varphi\sin\ \varphi+\cos\ k\varphi\cos\ \varphi \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \cos\ \left[(k+1)\varphi\right] & \sin\ \left[(k+1)\varphi\right] \\ -\sin\ \left[(k+1)\varphi\right] & \cos\ \left[(k+1)\varphi\right] \end{pmatrix}$成立

综上当 n 微自然数时$A^n=\begin{pmatrix} \cos\ n\varphi & \sin\ n\varphi \\ -\sin\ n\varphi & \cos\ n\varphi \end{pmatrix}$

$(2)A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

当 n=1 时，$A^1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

当 n=2 时，$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

当 n=3 时，$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 假设 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

当 n=1 时　$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

假设 n=k+1 时

$$A^{k+1} = A^K A = \begin{pmatrix} 1 & 1+k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & k+\dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & \dfrac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 成立

综上当 n 为自然数时，$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

当 A=2 时 $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

n=3 时 $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$

n=4 时 $A^4=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a \\ 0 & a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$

n=5 时 $A^5=\begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 & 10a^2 \\ 0 & a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 假设 n$\geq$3 时成立 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$

当 n=3 时 $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$

假设 n=k 时成立 $A^k=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & C_k^2a^{k-2} & C_k^3a^{k-3} \\ 0 & a^n & na^{k-1} & C_k^2a^{k-2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$

当 n=k+1 时 $a^{k+1}=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & C_k^2a^{k-2} & C_k^3a^{k-3} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} & C_k^2a^{k-2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a^k & a+ka^{k-1} & ka^{k-1}+C_k^2a^{k-1} & C_k^2a^{k-2}+C_k^3a^{k-2} \\ 0 & a^{k+1} & a^k+ka^k & ka^{k-1}+C_k^2a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} & a^k+ka^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

整理得

$$a^{k+1}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k & C_{k+1}^2a^{(k+1)-2} & C_{k+1}^3a^{(k+1)-3} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k & C_{k+1}^2a^{(k+1)-2} \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$成立

所以 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}(n\geq 3)$

综上

$$A^n=\left\{\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}(n=1)\begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}(n=2)\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}(n=3)\right\}$$

7、已知 B=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

证明 $B^n=\{$E, 当 n 为偶数;

B, 当 n 为奇数

证明：∵

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ $B^{2k}=(B^2)^k=E^k=E$

$B^{2k+1}=B^{2k}B=EB=B$

∴ $B^n=\{$E,当 n 为偶数;

B,当 n 为奇数

8、证明两个 n 阶上三角形矩阵的乘积仍为一个上三角形矩阵。

证明：设两个 n 阶上三角形矩阵为 A,B,

且 A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ``` & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ``` & a_{2n} \\ ``` & ``` & ``` & ``` \\ 0 & 0 & ``` & a_{nn} \end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ``` & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ``` & b_{2n} \\ ``` & ``` & ``` & ``` \\ 0 & 0 & ``` & b_{nn} \end{pmatrix}$

根据矩阵乘法，有

AB=$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & ``` & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+```+a_{nn}b_{nn} \\ 0 & a_{22}b_{22} & ``` & a_{22}b_{2n}+```+a_{nn}b_{nn} \\ ``` & ``` & ``` & ``` \\ 0 & 0 & ``` & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$

则可知 AB 为上三角形矩阵

同理，可得 BA 也为上三角形矩阵。

9、若 AB=BA,AC=CA,证明：A、B、C 为同阶矩阵，且 A(B+C)=(B+C)A,A(BC)=BCA.

证：设 A=$(a_{ij})_{m\times n}$，B=$(B_{ij})_{n\times t}$，C=$(C_{ij})_{n\times s}$

由题知 AB、BA 有意义，则可知必有 m=s,又由于 AB=BA,且 AB 为 m×n 阶矩阵，则可知 m=n,所以 A、B 均为 n 阶矩阵。同理可知 A、C 均为 n 阶矩阵，故可得 A、B、C 为同阶矩阵

②

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

又由于$AB=BA,AC=CA$

则$(B+C)A=BA+CA=AB+AC=A(B+C)$

③

$$A(BC)=(AB)C=B(AC)=B(CA)=BCA$$

10、已知 n 阶矩阵 A 和 B 满足等式 AB=BA，证明：

（1）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

（2）$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

（3）$(A+B)^m=A^m+mA^{m-1}B+C_m^2A^{m-2}B^2+\cdots+B^m$

$(m$为正整数$)$

解:$(1)(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$$=A\cdot A+AB+BA+B\cdot B$$

$$=A^2+AB+BA+B^2$$

由于$AB=BA$,则原式$\left(A+B\right)^2=A^2+2AB+B^2$

$(2)\left(A-B\right)\left(A+B\right)=A^2+AB-BA-B^2$

由于$AB=BA$，则$AB-BA=0$

故$\left(A-B\right)\left(A+B\right)=A^2-B^2$

(3)数学归纳法

当$m=2$时,$\left(A+B\right)^2=A^2+2AB+B^2$成立

设$m=n$时成立，

$$\left(A+B\right)^{n-1}=A^{n-1}+\left(n-1\right)A^{n-2}B+C_{n-1}^2A^{n-3}B^2+\cdots+B^{n-1}$$

当$m=n$时,$\left(A+B\right)^n=\left(A+B\right)\left(A+B\right)^{n-1}$

$$=\left(A+B\right)\left(A^{n-1}+\left(n-1\right)A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1}\right)$$

$$=\left(A^n+\left(n-1\right)A^{n-1}B+C_{n-1}^2A^{n-2}B^2+C_{n-1}^3A^{n-3}B^3+\cdots\right)$$

$$+\left(A^{n-1}B+\left(n-1\right)A^{n-2}B^2+\cdots+B^n\right)$$

$$=A^n+nA^{n-1}B+\left[C_{n-1}^2+\left(n-1\right)\right]A^{n-2}B^2$$

$$+\left[C_{n-1}^3+C_{n-1}^2\right]A^{n-3}B^3+\cdots+B^n$$

$$=A^n+nA^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+\cdots+B^n$$

综上,$\left(A+B\right)^m=A^m+mA^{m-1}B+C_m^2A^{m-2}B^2+\cdots+B^m$

11、

解：由题知B必为n阶矩阵，设$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

则$AB=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & & & \\ & a_2b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}a_1 & b_{12}a_2 & \cdots & b_{1n}a_n \\ b_{21}a_1 & b_{22}a_2 & \cdots & b_{2n}a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}a_1 & b_{n2}a_2 & \cdots & b_{nn}a_n \end{pmatrix}$$

由于$AB=BA$，且a_1，$a_2,\cdots$，a_n两两互不相等，

则必有除b_{11}，$b_{22},\cdots$，b_{nn}等元之外的元均为零，

$$故B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

即B必为对角矩阵。

12、证明

$(1)\ A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{n\times s}$

将A分成$m\times n$块，B分成一行为一块

$$即A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$则AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_n \end{pmatrix}$$

$\therefore AB$的第i个行向量为

$a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\cdots+a_{in}\beta_n, i=1,2,\cdots,m$

(2)若将A分成一列为一块，B分成$n\times s$块

即$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n), B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$

$$\therefore AB=(A_1,A_2,\cdots,A_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}A_1+b_{21}A_2+\cdots+b_{n1}A_n \\ b_{12}A_1+b_{22}A_2+\cdots+b_{n2}A_n \\ \\ b_{1s}A_1+b_{2s}A_2+\cdots+b_{ns}A_n \end{pmatrix}^T$$

$\therefore AB$的第j个列向量为

$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{nj}A_n, j=1,2,\cdots,s$

13、

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$\therefore AA^T=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

从而$\left|AA^T\right|=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$

又$\because \left|A\right|^2=\left|AA^T\right|$

$\therefore \left|A\right|=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$

14、

$$(1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}\text{记为}D_n$$

当$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix}=\left(x_1-x_2\right)\left(y_1-y_2\right)$

当$n\geq 3$时，

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\text{故原行列式}D_n=\begin{cases} \left(x_1-x_2\right)\left(y_1-y_2\right)，& n=2 \\ 0, n\geq 3 \end{cases}$$

(2)记

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right) & \cos\left(\alpha_1-\alpha_3\right) & \cdots & \cos\left(\alpha_1-\alpha_n\right) \\ \cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right) & 1 & \cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right) & \cdots & \cos\left(\alpha_2-\alpha_n\right) \\ \cos\left(\alpha_1-\alpha_3\right) & \cos\left(\alpha_2-\alpha_3\right) & 1 & \cdots & \cos\left(\alpha_3-\alpha_n\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\left(\alpha_1-\alpha_n\right) & \cos\left(\alpha_2-\alpha_n\right) & \cos\left(\alpha_3-\alpha_n\right) & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

当n=2时，$D_2=\begin{vmatrix} 1 & \cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right) \\ \cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right) & 1 \end{vmatrix}$

$=1-\cos^2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)=\sin^2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)$

当$n\geq 3$时，

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cdots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \cdots & \cdots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0$$

故$D_n=\begin{cases}\sin^2\left(\alpha_1-\alpha_2\right), n=2\\ 0, n\geq 3\end{cases}$

(2)记

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{1-a_1{}^n b_1{}^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1{}^n b_2{}^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1{}^n b_n{}^n}{1-a_1 b_n}\\ \frac{1-a_2{}^n b_1{}^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2{}^n b_2{}^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2{}^n b_n{}^n}{1-a_2 b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1-a_n{}^n b_1{}^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n{}^n b_2{}^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n{}^n b_n{}^n}{1-a_n b_n}\end{vmatrix}$$

$\alpha_{ij}=1+a_i b_j+a_i{}^2 b_j{}^2+\cdots+a_i{}^{n-1}b_j{}^{n-1}$

$$则D_n=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1{}^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2{}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n{}^{n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_1{}^{n-1} & b_2{}^{n-1} & \cdots & b_n{}^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(a_j-a_i\right)\right)\left(\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(b_j-b_i\right)\right)$$

$$=\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(a_j-a_i\right)\left(b_j-b_i\right)$$

15、

$(1)\,A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\left(ad-bc\neq 0\right)$

$$则A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{bc-ad}\\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$$

其中A^*为A的T伴随矩阵（下同）

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$(3)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1,A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(2)A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

当 n=1 时， $A^{1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

当 n=2 时， $A^{2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

当 n=3 时， $A^{3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 假设 $A^{n}=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

当 n=1 时 $A^{1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

假设 n=k+1 时

$$A^{k+1}=A^K A=\begin{pmatrix}1 & 1+k & \frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1+k & k+\frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1+k & \frac{k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & 1+k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$成立

综上当 n 为自然数时，$A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

当 A=2 时　$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 2a & 1 & 0\\ 0 & a^2 & 2a & 1\\ 0 & 0 & a^2 & 2a\\ 0 & 0 & 0 & a^2\end{pmatrix}$

n=3 时　$A^3=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2 & 3a & 1\\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a\\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2\\ 0 & 0 & 0 & a^3\end{pmatrix}$

n=4 时　$A^4=\begin{pmatrix}a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a\\ 0 & a^4 & 4a^3 & 6a^2\\ 0 & 0 & a^4 & 4a^3\\ 0 & 0 & 0 & a^4\end{pmatrix}$

n=5 时 $A^5=\begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 & 10a^2 \\ 0 & a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 假设 n$\geq$3 时成立 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$

当 n=3 时 $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$

假设 n=k 时成立 $A^k=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & C_k^2a^{k-2} & C_k^3a^{k-3} \\ 0 & a^n & na^{k-1} & C_k^2a^{k-2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$

当 n=k+1 时 $a^{k+1}=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & C_k^2a^{k-2} & C_k^3a^{k-3} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} & C_k^2a^{k-2} \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^k & a+ka^{k-1} & ka^{k-1}+C_k^2a^{k-1} & C_k^2a^{k-2}+C_k^3a^{k-2} \\ 0 & a^{k+1} & a^k+ka^k & ka^{k-1}+C_k^2a^{k-1} \\ 0 & 0 & a^{k+1} & a^k+ka^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$

整理得

$a^{k+1}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k & C_{k+1}^2a^{(k+1)-2} & C_{k+1}^3a^{(k+1)-3} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k & C_{k+1}^2a^{(k+1)-2} \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$成立

所以 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}(n\geq 3)$

综 上

$$A^n=\left\{\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}(n=1)\begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}(n=2)\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & C_n^3a^{n-3} \\ 0 & a^n & na^{n-1} & C_n^2a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}(n=3)\right\}$$

16、（1）

解：设 $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_3=4① \\ 2x_2+5x_4=-6② \\ x_1+3x_3=2③ \\ x_2+3x_4=1④ \end{cases}$$

由①②③④得：

$x_1=2; x_2=-23; x_3=0; x_4=8;$

得 $x=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

（2）设 $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=2① \\ 6x_1+8x_2=4② \\ 3x_3+4x_4=9③ \\ 6x_3+8x_4=18④ \end{cases}$$

由①②③④，得：

$x_1=x_1; x_2=\frac{1}{4}(2-3x_1); x_3=x_3; x_4=\frac{1}{4}(9-3x_3)$

得：$x=\begin{pmatrix} x_1 & \frac{1}{4}(2-3x_1) \\ x_3 & \frac{1}{4}(9-3x_3) \end{pmatrix}$

（3）设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=2\\x_1+2x_2+0=-1\\-x_1+2x_2-2x_3=3\end{cases}$$

由方程组，得：

$x_1=1;x_2=-1;x_3=-3$

得 $x=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

（4）设 $x=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\\x_5&x_6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-3&3\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\\x_5&x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9\\1&11\\7&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3x_1-x_3+2x_5=3\\3x_2-x_4+2x_6=9\\4x_1-3x_3+x_5=1\\4x_2-3x_4+3x_6=11\\x_1+3x_3=7\\x_2+3x_4=5\end{cases}$$

得 $x_1=x_1;x_2=x_2;x_3=\frac{1}{3}(7-x_1);$

$x_4=\frac{1}{3}(7-x_2);x_5=\frac{1}{3}(8-5x_1);x_6=\frac{1}{3}(8-5x_2);$

得：$x=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\\frac{1}{3}(7-x_1)&\frac{1}{3}(7-x_2)\\\frac{1}{3}(8-5x_1)&\frac{1}{3}(8-5x_2)\end{pmatrix}$

（5）

设 $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_4 & x_6 & x_5 \\ x_1 & x_3 & x_2 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\begin{matrix} x_1=2; x_2=-1; x_3=0; x_4=1; \\ x_5=3; x_6=-4; x_7=1; x_8=0; x_9=-2 \end{matrix}$

得 $x=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

19、

（1）

解：

$$D=|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12\neq 0$$

$$\therefore D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix}=24$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix}=-24$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix}=36$$

$\therefore$ 方程组的解为：

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,)=\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right)=(2\quad -2\quad 3\ )$$

（2）

$$D=|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=-142\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=-142;\ D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=-284$$

$$D_3\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}=-426;D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142$$

$\therefore$ 方程组的解为：

$$(x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_{4,})=\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\ \ \frac{D_4}{D}\right)=(\ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ -)$$

（3）

$$D=|A|=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6\\1&5\end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}5&0\\1&6\end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}1&6&0\\0&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=19\times 65-30\times 19=19\times 35=665\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}=703;D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=-395\ D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}=212$$

方程组的解为：

$$(x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4,\ \ x_5,)=\left(\frac{D_1}{D},\ \ \frac{D_2}{D},\ \ \frac{D_3}{D},\ \ \frac{D_4}{D},\ \ \frac{D_5}{D},\right)$$ （4）

$$=\left(\frac{1507}{665},\ \ \frac{-1145}{665},\ \ \frac{703}{665},\ \ \frac{-395}{665},\ \ \frac{212}{665}\right)$$

$$D=|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ca&ab\end{vmatrix}=ab^2+bc^2+ca^2-b^2c-a^2b-c^2a$$ 有且仅有 $a=b=c$ 或 $a=b=c=0$ 时，D=0 无

$$=ab(b-a)+bc(c-b)+ac(a-c)$$

意义；则其他情况 $D=|A|\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2 & b & c \\ 3ac & ca & ab \end{vmatrix}=a^2b^2+abc^2+a^3c-ab^2c-a^3b-a^2c^2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & 1 \\ a & a^2+b^2+c^2 & c \\ bc & 3abc & ab \end{vmatrix}=ab^3+b^2c^2+a^2bc-b^3c-a^2b^2-abc^2$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b+c \\ a & b & a^2+b^2+c^2 \\ bc & ca & 3abc \end{vmatrix}=ab^2c+bc^3+a^2c^2$$ 方程组的解为：

$-b^2c^2-a^2bc-ac^3$

$$(x,\quad y,\quad z)=\left(\frac{D_1}{D},\quad \frac{D_2}{D},\quad \frac{D_3}{D}\right)=(a,\quad b,\quad c)$$

（4）

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-1$$

$$A^*=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

（5）

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

由$(A\quad E)\overline{\overline{\text{经过初等变换}}}(\mathrm{E}\quad A^{-1})$

$$
得\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{-C_1+C_3 \\ -C_1+C_4}]{-2C_1+C_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & : & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & : & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & : & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{-C_2+C_3 \\ -2C_2+C_3}]{C_2\times(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & : & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & : & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & : & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[-\frac{5}{3}C_3+C_4]{C_3\times(\frac{1}{3})}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & : & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & : & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & : & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{-C_4+C_3 \\ -18C_4+C_2 \\ -12C_4+C_1}]{C_4\times 3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & : & -22 & 5 & 30 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 4 & -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}
\xrightarrow[-3C_3+C_1]{-5C_3+C_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & : & -12 & 4 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-2C_2+C_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}
$$

(6)

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$|A|=32$$

$$A^*=\begin{pmatrix}16&-8&4&-2&1\\0&16&8&4&-2\\0&0&16&-8&4\\0&0&0&16&-8\\0&0&0&0&16\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}&\frac{1}{32}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

24.证： ∵ A 为对称矩阵

∴ A=A'

$A^{-1}A=A^{-1}A'=E$

$A^{-1}A'(A')^{-1}=E(A')^{-1}$

$A^{-1}=(A')^{-1}$

∵ A 为可逆对称矩阵

∴（A'）$^{-1}$=(A^{-1})'

∴ A^{-1}=(A^{-1})'

∴ 可逆对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵。

25.证：（1）（A^2 ）'=(AA)'=A'A'

∵ A 为 n 阶对称矩阵

∴ A'=A

∴（A^2 ）'=A^2

∴ A^2 为对称矩阵

$(B^2)'=(BB)'=B'B'$

∵ B 是 n 阶反对称矩阵

∴ B'=-B

∴（B^2）'=(BB)'=B'B'

∵ B 是 n 阶反对称矩阵

∴ B'=-B

∴ $(B^2)'=(-B)(-B)=B^2$

B^2 是对称矩阵

（AB-BA）'

=(AB)'-(BA)'

=B'A'-A'B'

=-B • A-A • (-B)

=AB-BA

∴ AB-BA 为对称矩阵。

（2）必要性：∵ AB 为反对称矩阵

∴（AB）'=-AB

又∵（AB）'=B'A'=-BA

∴ AB=BA

充分性：∵ AB=BA

∴ (AB)'=B'A'=-BA

∴ AB 为反对称矩阵

综上所述：AB 是反对称矩阵的充分必要条件是 AB=BA。

26.解：设矩阵 X 为 x=$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$

则 $x^T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \bullet\bullet\bullet & x_{n1} \end{pmatrix}$

∵ x^T Ax=o

$$\therefore \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \bullet\bullet\bullet & x_{n1} \end{pmatrix}_{1\times n} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \bullet\bullet\bullet & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \bullet\bullet\bullet & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \bullet\bullet\bullet & A_{3n} \\ A_{41} & A_{42} & \bullet\bullet\bullet & A_{4n} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1} =0$$

即

$$\begin{pmatrix} A_{11}x_{11}+A_{21}x_{21}+\cdots+A_{n1}x_{n1} \bullet A_{12}x_{11}+A_{22}x_{21}+\cdots+A_{n2}x_{n1} \cdots A_{1n}x_{11}+\cdots A_{nn}x_{n1} \end{pmatrix}_{1\times n}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1} =0$$

$$x_{11}\left(A_{11}x_{11}+\cdots+A_{n1}x_{n1}\right)+x_{21}\left(A_{12}x_{11}+\cdots+A_{n2}x_{n1}\right)+\cdots+x_{n1}\left(A_{1n}x_{11}+\cdots+A_{nn}x_{n1}\right)_{1\times 1}=0$$

$\therefore\ x_{11}{}^{2}A_{11}+x_{11}x_{21}A_{21}+\cdots+x_{11}x_{n1}A_{n1}+x_{11}x_{21}A_{12}+x_{21}{}^{2}A_{22}+\cdots+x_{n1}{}^{2}A_{nn}=0$

$\because$ 对任意 $n\times 1$ 矩阵都成立

$\therefore\ A_{11}=A_{21}=\cdots=A_{nn}=0$

$\therefore$ A=0

27.证：$\Rightarrow$：$\because$ A 为正交矩阵

$\therefore\ A^{T}=A^{-1}$

$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=A^*=A^{T}$

又$\because$ 正交矩阵为可逆矩阵

$\therefore\ A^{-1}=A$

$\therefore\ A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2\cdots n)$

$\Leftarrow$：$\because\ A_{ij}=a_{ij}\ |A|=1$

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=A^*=A$

$A^{T}=(A^{-1})^{T}$

$=(A^{T})^{-1}$

$=(AE^{T})^{-1}$

$=EA^{-1}$

$=A^{-1}$

28.解：$A\bullet A^{-1}=(B+UV')\left[B^{-1}-\dfrac{1}{r}\bullet\left(B^{-1}U\right)\left(V'B^{-1}\right)\right]$

$=E-\dfrac{1}{r}UV'B^{-1}\left(1-r+UV'B^{-1}\right)$

$=E-E=0$

$\therefore V=1+UV^{'}B^{-1}$时 $A\bullet A^{-1}=E$

依次用 V 左乘和用 U 右乘$V=1+UV^{'}B^{-1}$消去$V^{'}U$

得从而得证

29.解：（1）判断 X 可逆即：

$$|X|=\begin{vmatrix}0 & A\\ C & 0\end{vmatrix}=(-1)|A||C|$$

因 A、C 可逆，

则$|A|\neq 0|C|\neq 0$即$|X|\neq 0$

则 X 可逆。

（2）设 $x^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$则

$$由\ x\bullet x^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A\\ C & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}Ca_{11} & Aa_{12}\\ Ca_{21} & Aa_{22}\end{pmatrix}$$

=E

$$\therefore\begin{cases}Ca_{12}=E\\ Ca_{11}=0\\ Ca_{22}=0\\ Aa_{21}=E\end{cases}\therefore\begin{cases}a_{12}=C^{-1}\\ a_{11}=0\\ a_{22}=0\\ a_{21}=A^{-1}\end{cases}$$

$$x^{-1}=\begin{vmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{vmatrix}$$

30.证明：$A^2-A+E=0$

$\therefore A-A^2=E$

$\therefore E=A(E-A)$

$\therefore A$为可逆矩阵

$A^{-1}=E-A$

31.解：（1）$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}^3$

$$\therefore A_1^3=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A_2^3=[8]$$

$$A_3^3=\begin{bmatrix}-3&1&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}9&-6&1\\0&9&-6\\0&0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27&-27&-9\\0&-27&27\\0&0&-27\end{bmatrix}$$

$$原式=\begin{bmatrix}A_1^3&1&0\\0&A_2^3&1\\0&0&A_3^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&8&0&0&0\\0&0&0&-27&27&-9\\0&0&0&0&-27&27\\0&0&0&0&0&-27\end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix}1&3&0&0&0\\2&8&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&2&3&2\\0&0&3&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}4&-\frac{3}{2}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{7}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$原式=\begin{bmatrix}4&-\frac{3}{2}&0&0&0\\-1&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{7}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

（3）$\begin{bmatrix}1&3&0&0&0\\2&8&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&2&3&2\\2&3&3&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1&0\\A_2&A_3\end{bmatrix}^{-1}$

$\because AA^{-1}=E$

$\therefore\begin{bmatrix}A_1&0\\A_2&A_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&Y\\Z&T\end{bmatrix}=E$

$\therefore\begin{bmatrix}A_1X&A_1Y\\A_2X+A_3Z&A_2Y+A_3T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_2&0\\0&Z_3\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}A_1X=Z_2\\A_1Y=0\\A_2X+A_3Z=0\\A_2Y+A_3T=E_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=A_1^{-1}\\Y=0\\Z=-A_3^{-1}A_2A_1^{-1}\\T=A_3^{-1}\end{cases}$

$|A_1|=8-6=2A_1^*=\begin{bmatrix}8&-3\\-2&1\end{bmatrix}$

$A_1^*=\begin{bmatrix}8&-3\\-2&1\end{bmatrix}$

$\therefore X=A_1^{-1}=\begin{bmatrix}4&-\frac{3}{2}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

同理$EA_3^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{7}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore Z=-\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{7}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-\frac{3}{2}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&\frac{7}{12}\\3&-\frac{7}{6}\\-2&\frac{11}{12}\end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & \frac{11}{12} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 24 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -\frac{7}{2} & -1 & -1 & 3 \\ 18 & -7 & -4 & 2 & 0 \\ -12 & \frac{11}{2} & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

第三章　线性方程组

1.　证：假设 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，

则 $\exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不会为 0，使得

$$\lambda_1(\alpha_1+\alpha_2),\lambda_2(\alpha_2+\alpha_3),\lambda_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

整理得：$(\lambda_1+\lambda_3)\alpha_1+(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_2+\lambda_3)\alpha_3=0$

又由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

由于 $|D|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$

故由克莱默法则知：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$ 矛盾

故结论正确。

2.　解：$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

由 $3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$ 可得：

$3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3=6\alpha$

即$3(2,5,1,3)+2(10,1,5,10)-5(4,1,-1,1)$

$=6(x_1,x_2,x_3,x_4)$

根据矩阵相等，则对应元相等，得

$$\begin{cases} 6x_1=3\times2+2\times10-5\times4 \\ 6x_2=3\times5+2\times1-5\times1 \\ 6x_3=3\times1+2\times5-5\times(-1) \\ 6x_4=3\times3+2\times10-5\times1 \end{cases}$$

得：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\therefore \alpha=(1,2,3,4)$

3、不一定。原式：$k_1(\alpha_1+\beta_1)+k_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+k_m(\alpha_m+\beta_m)=0$

故仅可得到$(\alpha_1+\beta_1),(\alpha_2+\beta_2),\cdots,(\alpha_m+\beta_m)$线性无关

将每个向量任意拆分得到的新向量显然不一定仍然线性相关

例如向量成比例或含有零向量

例：$\begin{matrix}\alpha_1=(0,1),\beta_1=(0,2) \\ \alpha_2=(1,0),\beta_2=(2,0)\end{matrix}$ 或 $\begin{matrix}\alpha_1=(0,1) \\ \alpha_2=(1,0)\end{matrix}$ β_1,β_2任一一个为零向量

4、不正确 使两等式成立的两组系数一般来说是不相等的，所以不可以做那样的公式提取

即$k_1\neq k_1' \cdots k_m\neq k_m'$

5、提示：含有零向量就一定线性相关

极大线性相关组中每一向量都无法用其他组中向量给出，因此可用一极大线性无关组加零向量构成向量组

6.证：假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，

由题意知，必存在一组使得

$\beta=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m <1>$

由假设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_{m}线性相关

必存在一组不全为0的数$\mathrm{k}_1,k_2,\cdots k_m$

使得：$k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m=0<2>$

由$\langle1\rangle$与$\langle2\rangle$可能：

$\beta=(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m$

但β的表示式是唯一的，故

$\lambda_1+k_1=\lambda_1,\cdots,\lambda_n+k_m=\lambda_m$

即得：$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$矛盾

故结论成立。

7.证：设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_{n}为A的列向量，

则$AB=0$可写成：

$$\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots\alpha_{\mathrm{n}}\right)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}=\begin{cases} \alpha_1 b_{11}+\alpha_2 b_{21}+\cdots+\alpha_n b_{n1}=0 \\ \alpha_1 b_{12}+\alpha_2 b_{22}+\cdots+\alpha_n b_{n2}=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_1 b_{1p}+\alpha_2 b_{2p}+\cdots+\alpha_n b_{np}=0 \end{cases}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则

$b_{ij}=0,1\le i\le n,1\le j\le p,$故B=0。

6、证明：假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta$线性相关（部分相关则全体相关）

所以存在 m+1 个不完全为 0 的数满足

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda\beta=0$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$本来线性相关，故$\lambda$可为 0，可不为 0

（1）$\lambda=0$ 则β无法用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出

（2）$\lambda\ne0\ \Rightarrow\beta=-\dfrac{1}{\lambda}\left[\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m\right]$

而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，根据定义，至少有一个向量可用其他 m-1 个向量表出，我们不妨设

$\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$

则$\beta=-\dfrac{1}{\lambda}\left[\left(\lambda_1+k_1\right)\alpha_1+\left(\lambda_2+k_2\right)\alpha_2+\cdots+\left(\lambda_{m-1}+k_{m-1}\right)\alpha_{m-1}+0\times\alpha_m\right]$

这样得到了β的另一种表出式，即表出不唯一

综上，假设成立条件下得到的结论与“β可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$唯一表出”矛盾

故假设不成立，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

7、将 A 表示为 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，B 表示为 $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$$AB=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n=0$$

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则必有 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=0\Rightarrow B=0$

同理可证 A

P117 T8

解：（1）

$$\begin{bmatrix}1&4&10&0\\7&8&18&4\\17&18&40&10\\3&7&13&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-7(1)行+(2)行]{\substack{-3(1)行+(4)行\\-17(1)行+(3)行}}\begin{bmatrix}1&4&10&0\\0&-20&18&4\\0&-50&-130&10\\0&-5&-17&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}(2)行+(4)行\\-\frac{5}{2}(2)行+(3)行}}\begin{bmatrix}1&4&10&0\\0&-20&-52&4\\0&0&0&0\\0&0&-4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{互换(3),(4)行}\begin{bmatrix}1&4&10&0\\0&-20&-52&4\\0&0&-4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此 r=3

解：（2）

$$\begin{bmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{互换(1),(2)行}\begin{bmatrix}1&2&11&2\\0&1&4&-1\\4&11&56&5\\-1&2&5&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-4(1)行+(3)行\\(1)行+(4)行}}\begin{bmatrix}1&2&11&2\\0&1&4&-1\\0&3&12&-3\\0&4&16&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-3(2)行+(3)行\\-4(2)行+(4)行}}\begin{bmatrix}1&2&11&2\\0&1&4&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此 r=2

解：（3）

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\\4&5&6&32&77\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{互换(1),(3)行\\互换(2),(4)行}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\1&2&3&14&32\\4&5&6&32&77\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-4(1)行+(3)行\\-(1)行+(2)行}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\0&2&3&13&28\\0&5&6&28&61\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{5}{2}(2)行+(3)行\\-\frac{1}{2}(2)行+(4)行}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\0&2&3&13&28\\0&0&-\frac{3}{2}&-\frac{9}{2}&-18\\0&0&-\frac{3}{2}&-\frac{9}{2}&-18\\0&0&1&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-(3)行+(4)行\\\frac{2}{3}(3)行+(5)行}}\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\0&2&3&13&28\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此 r=3

解：（4）

$$\begin{bmatrix}2&0&3&1&4\\3&-5&4&2&7\\1&5&2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{3}{2}(1)行+(2)行]{-\frac{1}{2}(1)行+(3)行}\begin{bmatrix}2&0&3&1&4\\0&-5&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\0&5&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)行+(3)行}\begin{bmatrix}2&0&3&1&4\\0&-5&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此 r=2

解：（5）

$$\begin{bmatrix}3&2&-1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\4&5&-5&-6&1\end{bmatrix}\xrightarrow{互换(2),(3)行}\begin{bmatrix}2&-1&3&1&-3\\3&2&-1&-3&-2\\4&5&-5&-6&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{3}{2}(1)行+(2)行]{-2(1)行+(3)行}\begin{bmatrix}2&-1&3&1&-3\\0&\frac{7}{2}&-\frac{11}{2}&-\frac{9}{2}&\frac{5}{2}\\0&7&-11&-8&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2(2)行+(3)行}\begin{bmatrix}2&-1&3&1&-3\\0&\frac{7}{2}&-\frac{11}{2}&-\frac{9}{2}&\frac{5}{2}\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

由此 r=3

解：（6）

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{互换(4),(5)行}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-(1)行+(2)行}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(2)行+(4)行]{-(2)行+(3)行}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-(3)行+(4)行}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

由此 r=5

T9 解（1）：设向量组线性相关，则

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4$$

$$=(\lambda_1,3\lambda_1,5\lambda_1,-4\lambda_1,0)+(\lambda_2,3\lambda_2,2\lambda_2,-2\lambda_2,\lambda_2)+(\lambda_3,-2\lambda_3,\lambda_3,-\lambda_3,-\lambda_3)+(\lambda_4,-4\lambda_4,\lambda_4,\lambda_4,-\lambda_4)$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,3\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3-4\lambda_4,5\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,-4\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4,\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)$$

$$=0$$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0(1) \\ 3\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3-4\lambda_4=0(2) \\ 5\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0(3) \\ -4\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=0(4) \\ \lambda_2-\lambda_3-\lambda_4=0(5) \end{cases}$$

由(1)，(3)得：$\lambda_1 = -2\lambda_2$

由(3)，(4)得：$\lambda_1 = -2\lambda_4$

$\therefore$ $\lambda_2 = \lambda_4$，$\lambda_3 = 0$

代入(3)式，得：$5\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_4=-10\lambda_2+3\lambda_2=0$

$\therefore \lambda_2=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

$\therefore$线性无关

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-(1)\text{行}+(4)\text{行}]{\substack{-(1)\text{行}+(2)\text{行} \\ -(1)\text{行}+(3)\text{行}}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{互换}(2),(4)\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{7}(2)\text{行}+(3)\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{21}{8}(3)\text{行}+(4)\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

由此 r=4

10（1）证：由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

则必有一组不全为 0 的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

使得$\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_m\alpha_m=0$

既有：$\lambda_1 a_{11},\lambda_2 a_{21},\cdots,\lambda_m a_{m1}=0$

$$(*)\begin{cases}\lambda_1 a_{12},\lambda_2 a_{22},\cdots,\lambda_m a_{m2}=0\\ \qquad\qquad\ldots\\ \lambda_1 a_{1n},\lambda_2 a_{2n},\cdots,\lambda_m a_{mn}=0\end{cases}$$

从$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中每一个向量中去掉第$i_1,i_2,\cdots,i_s$，就相当于在上述方程组中去掉 S 个方程

剩下的方程仍成立

既有不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$

使得：$\lambda_1\alpha_1',\lambda_2\alpha_2',\cdots,\lambda_s\alpha_s'=0$

从而：$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s'$线性相关

显然当$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s'$线性无关时

由上面的证明可知$\alpha_1{}^p,\alpha_2{}^p,\cdots,\alpha_s{}^p$肯定线性无关

（2）由（1）的证明很显然得到结论

11、证明：把$\alpha_i=(1,t_i,t_i^2,\ldots,t_i^{n-1})\quad(i=1,2,\ldots,r,r\le n)$作为矩阵 A 行向量写成矩阵 A

即：$A=\begin{pmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{r-1}\\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{r-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & t_r & t_r^2 & \cdots & t_r^{r-1}\end{pmatrix}$

只须证 A 的行量组线性无关即可

即证：$r_A=r$

显然 A 中有一个r阶子式

$D_r=\begin{vmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{r-1}\\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{r-1}\\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & t_r & t_r^2 & \cdots & t_r^{r-1}\end{vmatrix}\ne 0$而 A 内的所有$r+1$阶子式为 0，因为 A 的行数

故有$r_A=r$，从而结论成立

12、证：先证当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示出时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩小于等于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的秩

不妨设：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$的极大无关组为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

只须证：$r\le t$即可

假设$r>t$

那么由条件可知：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，即存在一矩阵 $k_{t\times r}$，使得

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{rt} \end{pmatrix}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)k_{t\times r}$$

在上式两端同右乘一列向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$，即得：

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{rt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

只要找到一组不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，使得：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{rt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=0 \text{成立}$$

就能说明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关矛盾

事实上：由于 $r>t\geq r_{k_{s\times t}}$，所以上述方程组一定有非 0 解

故结论成立，同理可证 $r\geq t$，从而有 $r=t$

13．证：

（1）$r=s$ 时，

若 $\det(k)=|k|\neq 0$，

则 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}=k^{-1}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$

说明，向量组 B 与 A 可相互线性表示，又由 A 线性无关，其秩

所以 $r(B)=S$，从而 B 线性无关

反之：若 B 线性无关，考察 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_s\beta_s=0$

代入并整理得：

$$\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\right)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\right)k\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$$

令 $k=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & \cdots & a_{2s}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{s1} & \cdots & a_{ss}\end{pmatrix}_{r\times s}$

由上式可得：

$(\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}+\cdots+\lambda_s a_{s1})\alpha_1+$

$(\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_s a_{s2})\alpha_2+\cdots+$

$(\lambda_1 a_{1s}+\lambda_2 a_{2s}+\cdots+\lambda_s a_{ss})\alpha_s$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以

$$(*)\begin{cases}\lambda_1 a_{11}+\cdots+\lambda_s a_{s1}=0\\ \qquad\cdots\\ \lambda_1 a_{s1}+\cdots+\lambda_s a_{ss}=0\end{cases}$$

若 $|k|=0$，则 $(*)$ 有非 0 角

从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

由 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$

故 $\left(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_r^T\right)=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T\right)k^T$

考查：$\lambda_1\beta_1^T+\lambda_2\beta_2^T+\cdots+\lambda_r\beta_r^T=0$

即 $\left(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_r^T\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}=0$

将 $\left(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_r^T\right)=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T\right)k^T$ 代入上式得：

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T\right)k^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T$也线性无关

故$k^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}=0$

而方程组$k^T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=0$只有 0 解$\Leftrightarrow r_{k^T}=r$

而$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_r^T$线性无关$\Leftrightarrow k^T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=0$只有 0 解，故结论成立

14.记住一下常用矩阵秩的性质

（1）$r_{A_{\min}}\le\min\{m,n\}$

（2）$r_A=r_{A^r}$

（3）若P,Q可逆，则$r_{PAQ}=r_A$

（4）$\max\{r_A,r_B\}\le r_{(A,B)}\le r_A+r_B$

证法一：由上述性质（4）条，$r_{(A,B)}\le r_A+r_B$

而$(A+B,B)\xrightarrow{\text{列变}}(A,B)$

所以$r_{A+B}\le r_{(A+B,B)}-r_{(A,B)}\le r_A+r_B$

证法二：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$（A,B 同型，所以列

则$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$

显然$A+B$的列向量组可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的极大无关组线性表出

若设$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的极无关组

那么$A+B$的列向量组可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$线性表出，所以

$r_{A+B}\le r_A+r_B$

14、（第二种）证明：设有向量组 A＝$\left(a_{ij}\right)_{mxn}$，$\mathrm{B}=\left(b_{ij}\right)_{mxn}$

A的行向量组为：α_1，α_2，. . . ，α_m　①

其极大线性无关组为：$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{irA}$

B的行向量组为：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$　②

其极大线性无关组为：$\beta_{j1},\beta_{j2},\ldots,\beta_{jrB}$

A＋B的行向量组记为：$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$

其中$\gamma_1=\alpha_1+\beta_1$，$\gamma_2=\alpha_2+\beta_2$，. . . ，$\gamma_m=\alpha_m+\beta_m$　⊗

则$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$，$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{rA}$，$\beta_{j1},\beta_{j2},\ldots,\beta_{jrB}$　③

$\therefore$ 有$\gamma_{\otimes}\leqslant\gamma$ ③$\leqslant\gamma_A+\gamma_B$. 又$\gamma_{\otimes}=\gamma_{A+B}$

即有$\gamma_A\leq\gamma_A+\gamma_B$

习题三

15、⑴解：对增广矩阵进行初等变换.

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\3&-2&5&-3&2\\2&1&2&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(-2)\times(1)行+(3)行]{(-3)\times(1)行+(2)行}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&5&-4&0&-1\\0&5&-4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)\times(2)行+(3)行}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&5&-4&0&-1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

则$\gamma_A\neq\gamma_B$　$\therefore$无解

⑵解：对方程组的增广矩阵进行初等变换.

$$B=\begin{pmatrix}3&-5&2&4&2\\7&-4&1&3&5\\5&7&-4&-6&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\left(-\frac{5}{3}\right)\times(1)行+(4)行]{\left(-\frac{7}{3}\right)\times(1)行+(2)行}\begin{pmatrix}3&-5&2&4&2\\0&\frac{23}{3}&-\frac{11}{3}&-\frac{19}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{46}{3}&-\frac{22}{3}&-\frac{38}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)\times(2)行+(3)行}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则 $\gamma_A \neq \gamma_B$　　$\therefore$ 无解

⑶解：对方程组的增广矩阵进行初等变换．（课本第 1 1 9 页题目出错，应该为

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

B= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times(1)\text{行}+(4)\text{行}]{(-2)\times(1)\text{行}+(2)\text{行}\ \ -1\times(1)\text{行}+(3)\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{5}{2}\times(3)\text{行}+(4)\text{行}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $\gamma_A = \gamma_B = 3$ 有唯一解。即唯一解为（3, 2, 1, ）。

由方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ \quad\ \ -7x_2 + 7x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\ \ x_3 = 1 \end{cases}$　　解得：$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

（4）、解：对方程组的增广矩阵进行初等变换．

B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\times(1)\text{行}+(3)\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[(-2)\times(2)\text{行}+(4)\text{行}]{(2)\text{行}+(3)\text{行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\text{行}+(4)\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $\gamma_A=\gamma_B=3<6$ 只方程组有无穷多解。

先求它的一个特解，与阶梯形矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ \qquad\qquad + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 2 \end{cases}$$

令上式中的 $x_3=x_5=x_6=0$，解得 $x_1=1, x_2=-1, x_4=2$。

于是得到特解：$x_0=(1,-1,0,2,0,0)$

导出组的方程为：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ \qquad\qquad + x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases}$$

令 $x_3=1, x_5=x_6=0$. 解得：$x_1=1, x_2=-1, x_4=0$.

令 $x_3=0, x_5=1, x_6=0$. 解得：$x_1=1, x_2=1, x_4=-2$.

令 $x_3=x_5=0, x_6=1$ 。解得：$x_1=-1, x_2=2, x_4=-3$.

可求得导出组的基础解系：$x_1=(1,-1,1,0,0,0)$，$x_2=(1,1,0,-2,1,0)$，$x_3=(-1,2,0,-3,0,1)$

于是方程组的通解为：

$$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

16.（1）欲使方程有解，须使 $r_A=r_B$

其中 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\1 & 2 & -1 & 4\\1 & 7 & -4 & 11\end{pmatrix}$　　　　$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & -1 & 4 & 2\\1 & 7 & -4 & 11 & \lambda\end{pmatrix}$

对 B 进行初等行变换，过程如下：

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & -1 & 4 & 2\\1 & 7 & -4 & 11 & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换(1)(2)行}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\2 & -1 & 1 & 1 & 1\\1 & 7 & -4 & 11 & \lambda\end{pmatrix}$$

$-2\cdot$(1)行+(2)行　　$-1\cdot$(1)行+(3)行$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

(2)行+(3)行$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$

显然，$\lambda=5$ 时，$r_A=r_B=2$

此时$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ -5x_2+3x_3-7x_4=-3 \end{cases}$　　　　取$\left(x_3,x_4\right)=$（$\tilde{x}3$，$\tilde{x}4$）

故$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{5}\left(4-\widetilde{x_3}-\widetilde{6x_4}\right) \\ x_2=\dfrac{1}{5}\left(3+\widetilde{3x_3}-\widetilde{7x_4}\right) \end{cases}$

（2）同样地，欲使该方程有解，须使$r_A=r_B$

其中A$=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$　　B$=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$

对B进行初等行变换，得

B$=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$交换(1)(2)行$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$-\lambda\cdot$(1)行+(2)行　$-1\cdot$(1)行+(3)行$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$

交换(2)(3)行$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$

$-\left(1+\lambda\right)\cdot$(2)行+(3)行$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda(\lambda-1) \\ 0 & 0 & \left(1-\lambda\right)\left(\lambda+2\right) & \left(\lambda+1\right)^2\left(1-\lambda\right) \end{pmatrix}$

①$\lambda=1$ 时

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 此时 $r_A=r_B$，故方程有解。

且 $x_1+x_2+x_3=1$　　解为 $\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$

②$\lambda=-2$ 时

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&3&-3&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$ 由于 $r_A\neq r_B$，故方程无解。

③$\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 2$ 时，$r_A=r_B=3$，方程有唯一解，且

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\(1-\lambda)x_2+(\lambda-1)x_3=\lambda(\lambda-1)\\(1-\lambda)(\lambda+2)x_3=(\lambda+1)^2(1-\lambda)\end{cases}$$

故 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{1+\lambda}{2+\lambda}\\x_2=\dfrac{1}{2+\lambda}\\x_3=\dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\end{cases}$

（此处只考虑 $\lambda=1$ 及 $\lambda=-2$ 两种特殊情形，原因在于，当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时会使得矩阵第二、三行的首先为零，从而引起 $r_A\neq r_B$ 情况的出现）

综上，①$\lambda=1$ 时，方程有无穷多解

$$\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$$

②$\lambda=-2$ 时，方程无解

③$\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1+\lambda}{2+\lambda} \\ x_2 = \dfrac{1}{2+\lambda} \\ x_3 = \dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda} \end{cases}$$

17. 证明：记系数矩阵为 A，增广矩阵为 B。

另外：C = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$

假设 $r_A = r$，可设 A 的前 r 行线性无关且第（r+1）行可用前 r 行线性表出，那么对于第（r+1）行中的每一个值都有 $a_{r+1,j} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ia_i,j} (j = 1,2,3\cdots n)$。但 B 与 A 相比多了一列，有可能使得 $b_{r+1} \neq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i$（当然，这种关系也有可能满足）。

但当这种关系部满足时，$r_A > r_B$，故 $r_A \geqslant r_B$，同理 $r_c \geqslant r_B$。

综上：$r_c \geqslant r_B \geqslant r_A$

由于 $r_A = r_c$，故 $r_c = r_B = r_A$，方程有解。

18. 解：首先明确在平面直角坐标系中，直线的方程应为 A x+By=C.

那么 $\begin{cases} Ax_1 + By_1 = C \\ Ax_2 + By_2 = C \\ Ax_3 + By_3 = C \end{cases}$

用矩阵表示，即为 $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix}$

若将 A.B 都看做自变量，将 $x_i.y_i$ 看做系数，那么，增广矩阵即为

B = $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & C \\ x_2 & y_2 & C \\ x_3 & y_3 & C \end{pmatrix}$

由于列向量线向相关，故$|B| = C\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

故$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$=0

若为 n(n > 3)点共线，则增广矩阵 B′ =$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & C \\ x_2 & y_2 & C \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & C \end{pmatrix}$

该矩阵中第 3 个列向量可用前两个线向表出，故$r_B' < 3$。

考虑直线的特殊情形：

当该直线经过原点（0，0）时，$r_B' = 1$；其余情形下，$r_B' = 2$

故，n 点共线的充要条件为$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & C \\ x_2 & y_2 & C \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & C \end{pmatrix}$的秩 < 3

即$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$的秩 < 3

19. 解：对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2+a_3+a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3+a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \end{pmatrix} = B_1$$

方程组有解的充要条件为$r_A = r_B = 4$，则需$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$

解出B_1矩阵对应的方程组得：

$$x_1 - x_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$x_2 - x_5 = a_2 + a_3 + a_4$$

$$x_3 - x_5 = a_3 + a_4$$

$$x_4 - x_5 = a_4$$

令 $x_5 = 0$ 得到方程组的特解

$\overrightarrow{x_0}$ =（$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$， $a_2 + a_3 + a_4$， $a_3 + a_4$， a_4， 0 ）

导出组的方程为 $x_1 - x_5 = 0$　　$x_2 - x_5 = 0$　　$x_3 - x_5 = 0$　　$x_4 - x_5 = 0$

令 $x_5 = 1$ 则得导出组的基础解系为 $\overrightarrow{x_1}$ =(1, 1, 1, 1, 1)

则方程组通解为 $\vec{x}$ =（$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$， $a_2 + a_3 + a_4$， $a_3 + a_4$， a_4， 0 ）+k(1, 1, 1, 1, 1)

20. 证明

（1）方程组的系数矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b & c & d & e \\ a & -1 & c & d & e \\ a & b & -1 & d & e \\ a & b & c & -1 & e \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & b & c & d & e \\ a+1 & -(b+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & -(c+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 & -(b+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 & -(e+1) \end{bmatrix} = A_1$$

系数 a, b, c, d, e 中有两个等于−1

即 a+1, b+1, c+1, d+1, e+1 中有两个等于 0

则 r_A =4, 因此方程组必有非零解

（2）

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & b & c & d & e \\ a+1 & -(b+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & -(c+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 & -(d+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d+1 & -(e+1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+1 & -(b+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & -(c+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 & -(d+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d+1 & -(e+1) \\ -1 & b & c & d & e \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 & -(e+1) \\ 0 & b+1 & 0 & 0 & -(e+1) \\ 0 & 0 & c+1 & 0 & -(e+1) \\ 0 & 0 & 0 & d+1 & -(e+1) \\ -1 & b & c & d & e \end{bmatrix} \to$$

已知任何系数都不等于−1, 且 $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} + \frac{e}{e+1}$ =1

则$\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}+\dfrac{d}{d+1}+\dfrac{e}{e+1}-\dfrac{1}{a+1}$=0 得 r_A=4, 因此方程组必有非零解.

21.

（1）方程组的系数矩阵 A 通过初等行变换化简

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -3\\ 3 & 5 & -13 & 11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A_1$$

矩阵的秩 r_A=2<4, 基础解系由 2 个线性无关的解向量构成,

A_1矩阵对应的方程组

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{9}\widetilde{x_3}+\dfrac{2}{9}\widetilde{x_4}\\ x_2=\dfrac{8}{3}\widetilde{x_3}-\dfrac{7}{3}\widetilde{x_4}\end{cases}$$

令 $\widetilde{x_3}=1$,$\widetilde{x_4}=0$ 代入解得 $x_1=-\dfrac{1}{9}$　 $x_2=\dfrac{8}{3}$

对应的解的向量为$\overrightarrow{x_1}=\left(-\dfrac{1}{9},\dfrac{8}{3},1,0\right)$

令 $\widetilde{x_3}=0,\widetilde{x_4}=1$ 代入解得 $x_1=\dfrac{2}{9}$　 $x_2=-\dfrac{7}{3}$

对应的解的向量为$\overrightarrow{x_2}=\left(\dfrac{2}{9},-\dfrac{7}{3},0,1\right)$

x_1, x_2是方程组的一个基础解系

则方程组通解为$\vec{x}=k_1\overrightarrow{x_1}=k_2\overrightarrow{x_2}$. 其中$k_1$.　k_2为任意的实数

（2）方程组的系数矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A_1$$

矩阵 A 的秩 r_A=2<4, 基础解系由 2 个线性无关的解构成

A_1对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2\widetilde{x_2} + \dfrac{2}{7}\widetilde{x_4} \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}\widetilde{x_4} \end{cases}$$

令 $\widetilde{x_2} = 1, \widetilde{x_4} = 0$　可解得 $x_1 = 2, x_3 = 0$

对应的解向量为 $\overrightarrow{x_1} = (2,1,0,0)$

令 $\widetilde{x_2} = 0, \widetilde{x_4} = 1$　可解得 $x_1 = \dfrac{2}{7}, x_3 = -\dfrac{5}{7}$

对应的解向量为 $x_2 = \left(\dfrac{2}{7}, 0, -\dfrac{5}{7}, 1\right)$

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ 是方程组的一个基础解系

方程组的通解为

$\vec{x} = k_1\overrightarrow{x_1} = k_2\overrightarrow{x_2}$, 其中 k_1． k_2 为任意的实数

（3）方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r_A=4，基础解系由 2 个线性无关的解向量构成

写出阶梯形对应的方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\widetilde{x_5} \\ x_2 = \widetilde{x_4} \\ x_3 = \widetilde{x_4} \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

令 $\widetilde{x_4} = 1, \widetilde{x_5} = 0$ 解出对应的解向量为 $\overrightarrow{x_1} = (0,1,1,1,0,0)$

令 $\widetilde{x_4} = 0, \widetilde{x_5} = 1$ 解出对应的解向量为 $\overrightarrow{x_2} = (-1,0,0,0,1,0)$

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ 是方程组的一个基础解系

方程组的通解为

$\vec{x} = k_1\overrightarrow{x_1} = k_2\overrightarrow{x_2}$, 其中 k_1． k_2 为任意的实数

（4）方程组的系数矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix}5&6&-2&7&4\\2&3&-1&4&2\\7&9&-3&5&6\\5&9&-3&1&6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

r_A=3,基础解系应由 2 个线性无关的解构成

阶梯矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=\frac{1}{3}\widetilde{x_3}-\frac{2}{3}\widetilde{x_5}\\x_4=0\end{cases}$$

令 $\widetilde{x_3}=1,\widetilde{x_5}=0$　解得对应的解向量为 $\overrightarrow{x_1}=\left(0,\frac{1}{3},1,0,0\right)$

令 $\widetilde{x_3}=0,\widetilde{x_5}=1$　解得对应的解向量为 $\overrightarrow{x_2}=\left(0,-\frac{2}{3},0,0,1\right)$

$\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}$ 构成方程组的一个基础解系

方程组的通解为

$\vec{x}=k_1\overrightarrow{x_1}=k_2\overrightarrow{x_2}$，其中 k_1．　k_2 为任意的实数

22.

（1）假设 $\overrightarrow{x^*},\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\cdots\cdots\cdots\cdots,\overrightarrow{x_{n-r}}$ 线性相关

则存在一组不全为零的一组数 $k_{1,}k_{2,}k_{3,}\cdots\cdots\cdots,k_{n-r},k_{n-r=1}$

使 $k_1\overrightarrow{x_1}+k_2\overrightarrow{x_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{n-r}\overrightarrow{x_{n-r}}+k_{n-r=1}\overrightarrow{x^*}=0,$ 成立

若 $k_{n-r=1}\neq 0$ 则

$$\overrightarrow{x^*}=-(\frac{k_1}{k_{n-r+1}}\overrightarrow{x_1}+\frac{k_2}{k_{n-r+1}}\overrightarrow{x_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{k_{n-r}}{k_{n-r+1}}\overrightarrow{x_{n-r}})$$

$$=-\frac{1}{\vec{A}k_{n-r+1}}\left(k_1\vec{A}\overrightarrow{x_1}+k_2\vec{A}\overrightarrow{x_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{n-r}\vec{A}\overrightarrow{x_{n-r}}\right)=0$$

则 $\overrightarrow{x^*}$ 是方程 $\vec{A}\cdot\vec{x}=0$ 的解，与题设矛盾

21-24 页

第三章 线性方程 2.2

若$k_{n-r+1}=0$则$k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+\ldots+k_{n-r}\vec{x}_{n-r}=0$
因为$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_{n-r}$是导出组的基础解系
则$k_1=k_2=\ldots k_{n-r}=0$时等式才成立
得$\vec{x}^*,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_{n-r}$线性无关

（2）$\vec{A}(\vec{x}*+\vec{x}_i)=\vec{A}\vec{x}*+\vec{A}\vec{x}_i=b+0=b(i=1,2,3,\ldots n-r)$
即$\vec{x}*+\vec{x}_i$是方程组$\vec{A}\vec{x}=b$的解
假设$\vec{x}*,\vec{x}*+\vec{x}_1,\vec{x}*+\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}*+\vec{x}_{n-r}$是线性相关
则一定存在一组不全为零的解$k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}$使
$k_0\vec{x}*+k_1(\vec{x}*+\vec{x}_1)+k_2(\vec{x}*+\vec{x}_2)+\ldots+k_{n-r}(\vec{x}*+\vec{x}_{n-r})=0$成立
即$(k_0+k_1+k_2+\ldots+k_{n-r})\vec{x}*+k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+\ldots k_{n-r}\vec{x}_{n-r}=0$成立
由（1）已证当且仅当$k_0+k_1+\ldots k_{n-r}=k_1=k_2=\ldots=k_{n-r}=0$时上式成立
即$k_0=k_i=0(i=1,2,\ldots,n-r)$
所以$\vec{x}^*,\vec{x}^*+\vec{x}_1,\vec{x}^*+\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}^*+\vec{x}_{n-r}$线性无关
则$\vec{x}^*,\vec{x}^*+\vec{x}_1,\vec{x}^*+\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}^*+\vec{x}_{n-r}$是$\vec{A}\vec{x}=b$是$n-r+1$个线性无关的解

习题三　P121　23-26 题

23.解：$\because x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$
$\therefore Ax=kAx_1+kAX_2+\cdots+k_sAx_s$
又$\because x_1,x_2,\cdots,x_s$是非齐次线性方程组Ax=b的s个解
$\therefore Ax_1=b$，$Ax_2=b$，$\cdots$，$Ax_s=b$
$\therefore Ax=k_1b+k_2b+\cdots+k_sb=b(k_1+k_2+\cdots+k_s)$
又$\because k_1+k_2+\cdots+k_s=1$
$\therefore Ax=b(k_1+k_2+\cdots+k_s)=b$
$\therefore Ax=b$
$\therefore x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$是非齐次线性方程组Ax=b的解

24. 解：$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r+1}x_{n-r+1}$
$\because k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$
$\therefore k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r+1}x_{n-r+1}$
$=(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r+1}x_{n-r+1}$
$=x_1+k_2(x_2-x_1)+k_3(x_3-x_1)+\cdots+k_{n-r+1}(x_{n-r+1}-x_1)$
$\because x_1$是Ax=b的一个特解
$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r+1}$是非齐次线性方程组Ax=b的n-r+1个线性无关的解
$\therefore Ax_1=b,Ax_2=b,\cdots Ax_{n-r+1}=b$
$\therefore x_2-x_1,x_3-x_1,x_4-x_1,\cdots x_{n-r+1}-x_1$是齐次方程组Ax=0的线性无关解的组合

$\therefore$ 根据非齐次线性方程组解的结构

$x=x_1+k_2(x_2-x_1)+k_3(x_3-x_1)+\cdots+k_{n-r+1}(x_{n-r+1}-x_1)$

$=(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r+1}x_{n-r+1}$

又 $\because k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$

$\therefore x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r+1}x_{n-r+1}$ 是非齐次方程组 Ax=b 的解，其中 k_1 k_2，$\cdots k_{n-r+1}$ 是任意常数。

25. 解 $A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad \overline{A}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

$A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}=\overline{A}_1^T$ $\quad A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{pmatrix}$

因（I）有解，故 $r(A_1)=r(\overline{A}_1)$

由于（$b_1,b_2,\cdots b_m,1$）不能由（$a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1},0$）$(a_{21},a_{22},\cdots a_{m2},0)\cdots(a_{1n},a_{2n},\cdots a_{mn},0)$ 线性表出所以

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 1 \end{pmatrix}=r(\overline{A}_2)$$

$\|$

$r(A_2^T)=r(A_2)$

即 $r(A_2)\neq r(\overline{A}_2)$

所以方程组（II）无解

26. $AZ=0 \quad r_A=r$, 基础解中该有 $n-r$ 个解向量

设 $B=(B_1, B_2,\cdots B_p)$ 又 $\because AB=0$

$(AB_1,AB_2,\cdots AB_p)=0$

$AB_i=0 \therefore B_1, B_2,\cdots, B_p$ 都是方程 $AZ=0$ 的解

向量 $\therefore r_B\le n-r_A \quad r_A+r_B\le n$

27. 解：$\because$ 由 $A^2=A$ 得 $A(A-E)=0$，再由第 26 题解得 $r_A+r_{A-E}\leqslant n$

又 $\because r_A+r_{(E-A)}\geqslant r[A+(E-A)]=r_E=n$ 即 $r_A+r_{A-E}\geqslant n$

$\therefore r_A+r_{A-E}=n$

28. 证：$\because A^2=E$

$\therefore (A+E)(A-E)=0$

$\therefore r_{(A+E)}+r_{(A-E)}\leqslant n$

$r_{[(A+E)+(E-A)]}=r_{2E}=n\leqslant r_{(A+E)}+r_{(E-A)}=r_{(A+E)}+r_{(A-E)}$

$\therefore r_{(A+E)}+r_{(A-E)}=n$

29.证：（1）①当 $r_A=n$ 时 $|A|\neq 0$

由 $AA^*=|A|E$ 知 $|AA^*|=|AE|$

$|A||A^*|=|A|^n$，$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

故 A^* 可 $r_A^*=n$

②当 $r_A=n-1$ 时，$|A|\neq 0$ 且存在一个（n－1）阶的非零子式

从而 $r_A^*\geqslant 1$

$\because AA^*=|A|E=0$

$\therefore r_A+r_{A^*}\leqslant n$

$r_{A^*}\leqslant n-r_A\leqslant 1$

$\therefore r_{A^*}>1$

③当 $r_A=n$ 时知 A 的所有（n－1）阶子式为零

$\therefore A^*=0$

（2）∵当 $r_A=n$ 时（1）中已证 当 $r_A=n-1$ 时 $r_{A^*}=1$

$\therefore |A|=0$

$\therefore |A^*|=|A|^{n-1}=0$ 成立

又∵当 $r_A<n-1$ 时，由（1）中③知 $|A|=0$

$\therefore |A^*|=|A|^{n-1}$ 亦成立。

第四章

1、（1）是；

（2）、否，因为题中的非零向量可以由不平行于该非零向量的向量通过向量的加法表示出来，所以该非零向量必须也包含在题中的全体向量中才能构成实线性空间。

（3）是

（4）是

（5）否，$k^0\alpha=0$ 的解为 $k=0$ 或 $\alpha=0$，k 与 α 不具有任意性不满足线性空间的定义。

2、（1）能

（2）不能

（1）中由 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=0\Rightarrow -x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}=x_n$ 得任意一个向量都可以用其余的向量线性表示

而（2）中 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1\ \Rightarrow\ x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}=1-x_n$ 不满足（1）中的线性关系，∴不能构成 R^n 的子空间

3、当平面不过原点时，否

当平面过原点时，是

解析：当平面过原点时，所有的起点位于原点，终点位于给定平面上的所有向量在一个平面上，构成了一个二维的向量空间，（比如 xoy 平面上所有的向量），而当给定平面不过原点时，所有的向量构成一个体（体分布），是次三维空间中所有向量的一部分，不是闭合的，不能构成子空间。

第四章

P139

4.解（1）假设存在 $\lambda_1\lambda_2$，使得 $\lambda_1\cos^2 x+\lambda_2\sin^2 x=0$

要使上式对任意的 x 都成立

则 $\lambda_1 = \lambda_2$ =0

所以，$\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 线性无关

$\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 为极大线性无关组

所以，它们的积为 2

（2）因为，$\cos 2x$ =2$\cos^2 x$ -1

所以，$\cos^2 x$，$\cos 2x$，1 线性相关

假设存在 λ_1 λ_2，使得 $\lambda_1 \cos^2 x + \lambda_2$ =0

则 $\lambda_1 = \lambda_2$ =0

所以，$\cos^2 x$，1 线性无关

所以，$\cos^2 x$，1 为 $\cos^2 x$，$\cos 2x$，1 的一个极大线性无关组

所以，它们的秩为 2

（3）假设存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2,\quad \lambda_n$ 使得

$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \quad + \lambda_n e^{nx} = 0$

对任意的 x 都成立

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$

所以，$e^x, e^{2x},\quad , e^{nx}$ 线性无关

它们的秩为 n

5 证明：因为，$\left(x-a\right)^k = x^k - akx^{k-1} + a^2 c_k{}^2 x^{k-2} + \quad + \left(-a\right)^k$

$= l_0 x^k + l_1 x^{k-1} + l_2 x^{k-2} + \quad + l_k$

$l_0 = c_k{}^0 \left(-a\right)^0, l_1 = c_k^1 (-a)^1, \ldots\ldots\ldots, l_k = c_k^k (-a)^k$

则 $(x-a)^0 = l_0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \quad + 0 \cdot x^n$

$(x-a)^1 = l_0 \cdot 1 + l_1 \cdot x + \quad + 0 \cdot x^n$

-
-

$\left(x-a\right)^n = l_0 \cdot 1 + l_1 x + \quad + l_n x^n$

其中$l_k = c_n^k(-a)^k$

即1，x-a, (x−a)^2，,$(x-a)^n$

可用$1,x,x^2$，,x^n线性表式

由上式可得，约

$$x=\frac{1}{l_1}(x-a)-\frac{l_0}{l_1}$$

$$x^2=\frac{1}{l_2}(x-a)^2-\frac{l_1}{l_2}x-\frac{l_0}{l_2}$$

.

.

.

$$x^n=\frac{1}{l_n}(x-a)^n-\frac{l_{n-1}}{l_n}(x-a)^{n-1}-\quad-\frac{l_0}{l_n}$$

即$1,x,x^2,....,x^n$可用$1,x-a,(x-a)^2$，,$(x-a)^n$线性表示

$\therefore$向量组$1,x,x^2,....,x^n$与向量组$1,x-a,(x-a)^2$，,$(x-a)^n$等价

6, **证明：假设存在**λ_1，λ_2，λ_3使得$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=\overline{0}$

即$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(1,1,0)=(0,0,0)$

即$(\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2)=\overline{0}$

$$\therefore\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}$$

$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$\therefore\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$线性无关

$\therefore\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$为线性区间$R^3$中约一组基底，

即向量$\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}$所生成的线性区间就是$R^3$本身

7、由于$\alpha_1=\frac{1}{2}$（$\beta_1+3\beta_2$）

$\alpha_2=\frac{1}{2}$（$\beta_1+\beta_2$）

∴α_1与α_2均可由β_1与β_2线性表示

∴它们分别生产的子空间相同即$V_1=V_2$

8、解：

（1）因为是对称的，$a_{ij}=a_{ji}$. ∴维数只取决于对角线和上半（或下半）部分的元素为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维

（2）由于反称矩阵 $a_{ij}=\{^{-a_{ij}\ i\neq j}_{0\quad i=j}$, ∴维数只取决于上半（或下半）部分元素为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 维。

（3）由于前两个分量线性相关 ∴维数为 n－1

9、证明 ε_1，ε_2，ε_3，ε_4 组成 R^4 的一个基，只需证这几个向量在同一个基下的坐标作为行或列的 n 阶行列式不为 0

对于（1）即证 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\neq 0$ 对于（2）即证 $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&1&3&1\\1&1&0&0\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\neq 0$ 或 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}\neq 0$

求 β 在这个基下的坐标。

（1）设（x_1 x_2 x_3 x_4）

（1 2 1 1）＝x_1 （1，1,1,1）＋x_2（1,1，-1，-1）＋x_3(1,-1,1,1,）＋x_4 （1，-1，-1,1）

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2-x_3-x_4=2\\x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=1\end{cases}$$ ∴$x_1=\dfrac{5}{4}$ $x_2=\dfrac{1}{4}$ $x_3=-\dfrac{1}{4}$ $x_4=-\dfrac{1}{4}$

∴坐标为（$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{4}$）

(2)设（x_1 x_2 x_3 x_4）

（1 2 1 1）＝x_1 （1，1,0,1）＋x_2（2,1，3，1）＋x_3(1,1,0,0,）＋x_4（0，1，-1, -1）。

∴x_1＝2　x_2＝1　x_3＝-3　x_4＝2

∴坐标为（2,1，-3,2）

10.（1）

$$\because [1, x, x^2, x^3, x^4]\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=[1，1+x，1+x+x^2，1+x+x^2+x^3，1+1+x+x^2+x^3+x^4]$$

$$\therefore 旧基底到新基底的过渡矩阵 M=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）令：

$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4=a+b(1+x)+c(1+x+x^2)+d(1+x+x^2+x^3)+e(1+x+x^2+x^3+x^4)$

用待定系数法可得：

$$\begin{cases}e=5\\d+e=4\\c+d+e=3\\b+c+d+e=2\\a+b+c+d+e=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e=5\\d=-1\\c=-1\\b=-1\\a=-1\end{cases}$$

∴多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 在新基底下的坐标为（－1，－1，－1，－1,5）

（3）∵多项式在新基底下的坐标为（1，2，3，4，5）

$\therefore 1+2(1+x)+3(1+x+x^2)+4(1+x+x^2+x^3)+5(1+x+x^2+x^3+x^4)$

$=15+14x+12x^2+9x^3+5x^4$

多项式为 $15+14x+12x^2+9x^3+5x^4$

$$11.(1)[\varepsilon_1，\varepsilon_2，\varepsilon_3，\varepsilon_4]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=E$$

令 $A=[\eta_1，\eta_2，\eta_3，\eta_4]$

根据过渡矩阵的定义 $E\cdot M=A$

又∵E 是单位矩阵

$$\therefore 过渡矩阵 M=A=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$A=[\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4,\quad]=\begin{pmatrix}2&0&6&x_1\\1&3&6&x_2\\-1&1&1&x_3\\1&0&3&x_4\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)+(3)]{(3)+(2)}\begin{pmatrix}2&0&5&6&x_1\\0&4&5&7&x_2+x_3\\0&1&3&4&x_4+x_3\\1&0&1&3&x_4\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)\times(-\frac{1}{2})+(4)}\begin{pmatrix}2&0&6&5&x_1\\0&4&7&5&x_2+x_3\\0&1&4&3&x_4+x_3\\0&0&0&-\frac{3}{2}&x_4-\frac{x_1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(4)\times\frac{10}{3}+(2)\\(4)\times 2+(3)\\(4)\times 2}]{(4)\times\frac{10}{3}+(1)}\begin{pmatrix}2&0&0&6&\frac{10}{3}x_4-\frac{2}{3}x_1\\0&4&0&7&x_2+x_3+\frac{10}{3}x_4-\frac{5}{3}x_1\\0&1&0&4&x_3+3x_4-x_1\\0&0&-3&0&2x_4-x_1\end{pmatrix}\xrightarrow[(1)\times\frac{1}{2}-]{(2)\times\frac{-1}{4}+(3)}\begin{pmatrix}1&0&0&3&\frac{5}{3}x_4-\frac{1}{3}x_1\\0&1&0&\frac{7}{4}&\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3+\frac{5}{6}x_4-\frac{5}{12}x_1\\0&0&0&\frac{9}{4}&-\frac{7}{12}x_1-\frac{1}{4}x_2+\frac{3}{4}x_3+\frac{13}{6}x_4\\0&0&-3&0&2x_4-x_1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)与(4)交换}\begin{pmatrix}1&0&0&3&\frac{5}{3}x_4-\frac{1}{3}x_1\\0&1&0&\frac{7}{4}&-\frac{5}{12}X_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3+\frac{5}{6}x_4\\0&0&-3&0&2x_4-x_1\\0&0&0&\frac{9}{4}&-\frac{7}{12}-\frac{1}{4}x_2+\frac{3}{4}x_3+\frac{13}{6}x_4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(4)\times\left(-\frac{7}{9}\right)+(2)\\(3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\(4)\times\left(\frac{4}{9}\right)}]{(4)x\left(\frac{-4}{3}\right)+(1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4\\0&1&0&0&\frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4\\0&0&1&0&\frac{x_1}{3}-\frac{2}{3}x_4\\0&0&0&1&-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4\end{pmatrix}$$

设 =（x_1, x_2, x_3, x_4）在[1， 2 3 4]下的坐标为(y_1, y_2, y_3, y_4)

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4\\\frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4\\\frac{x_1}{3}-\frac{2}{3}x_4\\-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4\end{pmatrix}$$

(2)单位矩阵 E=$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$

$$\therefore\begin{cases}(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4)=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})\bullet M_1\\(\vec{\eta}_1,\ \vec{\eta}_2,\ \vec{\eta}_3,\ \vec{\eta}_4)=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})\bullet M_2\end{cases}$$

$\Rightarrow(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4)=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4)\,M_1^{-1}\bullet\ M_2$

$\therefore$基底$[\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,\vec{\varepsilon}_4]$到$[\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4]$的过渡矩阵

$\mathrm{M}=M_1^{-1}\bullet M_2$

由（1）小题可知：

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\ 又\because(M_1,E_n)\xrightarrow{初等行变换}(E_n,M_1^{-1})$$

$$\therefore\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\2&-1&2&-1&0&1&0&0\\-1&1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{初等行变换}\begin{pmatrix}&&&&0&0&-1&1\\1&0&0&0&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\\0&1&0&0&&&&\\0&0&1&0&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{7}{5}&\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

$$\therefore M_1^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

由（1）小题可知 $M_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore M = M_1^{-1} \bullet M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$A=[\vec{\varepsilon}_1,\overrightarrow{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon}_3,\overrightarrow{\varepsilon_4}]$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \therefore\ \vec{\xi}=0\vec{\varepsilon}_1+\frac{1}{5}\overrightarrow{\varepsilon_2}-\frac{1}{5}\vec{\varepsilon}_3-\frac{3}{5}\overrightarrow{\varepsilon_4}$$

ξ=（1,0,0,0）在$[\vec{\varepsilon}_1,\overrightarrow{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon}_3,\overrightarrow{\varepsilon_4}]$下的坐标为： $(0,\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5})$

第五章

第五章

1.（1）当$\alpha \neq 0$时

$$T(\varsigma_1+\varsigma_2)=\varsigma_1+\varsigma_2+\alpha$$

$$\neq T\varsigma_1+T\varsigma_2$$

$\therefore$ 不满足线性变换条件

当$\alpha=0$时

$$T(\varsigma_1+\varsigma_2)=\varsigma_1+\varsigma_2$$

$$=T\varsigma_1+T\varsigma_2$$

$\therefore$ 满足线性变换条件

（2）当$\alpha \neq 0$时

$T(\varsigma_1+\varsigma_2)=\alpha \neq T\varsigma_1+T\varsigma_2$

$\therefore$ 不满足线性变换条件

当 $\alpha=0$ 时

$T(\varsigma_1+\varsigma_2)=0=T\varsigma_1+T\varsigma_2$

$T(k\varsigma)=0=k\cdot 0=kT\varsigma$

$\therefore$ 满足线性变换条件

（3）

$T(x_{11}+x_{12},x_{21}+x_{22},x_{31}+x_{32})$

$=[(x_{11}+x_{12})^2,x_{21}+(x_{22}+x_{31}+x_{32},(x_{31}+x_{32})^2]$

$\neq T(x_{11},x_{21},x_{31})+T(x_{12},x_{22},x_{32})$

$\therefore$ 不满足线性变换条件

（4）

$T:[f_1(x)+f_2(x)]\big|\to f_1(x+1)+f_2(x+1)$

又 $\because T:f_1(x)\big|\to f_1(x+1)\qquad T:f_2(x)\big|\to f_2(x+1)$

$T:kf(x)\big|\to kf(x+1)$

$\therefore T:f(x)\big|\to f(x+1)$ 满足线性变换条件

（5）$T:[f_1(x)+f_2(x)]\big|\to f_1(x_0)+f_2(x_0)$

又 $\because T:f_1(x)\big|\to f_1(x_0)$

$T:f_2(x)\big|\to f_2(x_0)$

$T:kf(x)\big|\to kf(x_0)$

$\therefore T:f(x)\big|\to f(x_0)$ 满足线性变换条件

（6）$T(x_1+x_2)\big|\to B(x_1+x_2)C=Bx_1C+Bx_2C$

又 $\because T(x_1)\big|\to Bx_1C\qquad T(x_1)\big|\to Bx_2C$

$T(kx)\big|\to B(kx)C=BkxC$

$\therefore Tx\big|\to BxC$ 满足线性变换条件

2. 证明 $T[f_1(x)+f_2(x)]$

$=\int_a^x K(t)[f_1(t)+f_2(t)]dt$

$$=\int_a^x K(t)f_1(t)dt+\int_a^x K(t)f_2(t)dt$$

$$=Tf_1(x)+Tf_2(x)$$

$$T[kf(x)]=\int_a^x K(t)kf(t)dt$$

$$=k\int_a^x K(t)f(t)dt$$

$$=kTf(x)$$

$\therefore T$ 是一个线性变换

3. 证明：

$\because\ T[f_1(x)+f_2(x)]$

$$=\frac{d^2[f_1(x)+f_2(x)]}{dx^2}+\frac{d[f_1(x)+f_2(x)]}{dx}+(\sin x)[f_1(x)+f_2(x)]$$

$$=\frac{d^2f_1(x)}{dx^2}+x\frac{df_1(x)}{dx}+(\sin x)f_1(x)+\frac{d^2f_2(x)}{dx^2}+x\frac{df_2(x)}{dx}+(\sin x)f_2(x)$$

$$=Tf_1(x)+Tf_2(x)$$

又$\because\ T[kf(x)]$

$$=\frac{d^2[kf(x)]}{dx^2}+x\frac{d[kf(x)]}{dx}+(\sin x)[kf(x)]$$

$$=k[\frac{d^2f(x)}{dx^2}+x\frac{df(x)}{dx}+(\sin x)f(x)]$$

$$=kTf(x)$$

$\therefore T$ 是线性变换

4. 不一定

例如$T\alpha=0\cdot\alpha=0$

此时$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$是$n$个线性无关的向量，而$T\alpha_1\quad T\alpha_2\quad\cdots\quad T\alpha_n$线性相关

5、

（1）解

$$T\varepsilon_1=T\left(1,0,0\right)=\left(2,0,1\right)=2\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

$$T\varepsilon_2=T\left(0,1,0\right)=\left(-1,1,0\right)=-\varepsilon_1+\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3$$

$$T\varepsilon_3=T\left(0,0,1\right)=\left(0,1,0\right)=0\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（2）解

$$T_1\varepsilon_1=T_1(1,0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2$$

$$T_1\varepsilon_2=T_1(0,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$T_2\varepsilon_1=T_2(1,0)=(0,0)=0\cdot\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2$$

$$T_2\varepsilon_2=T_2(0,1)=(0,1)=0\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

（3）解

$$T\alpha_1=e^{ax}\left[a\cos bx-b\sin bx\right]$$

$$=a\cdot\alpha_1-b\cdot\alpha_2$$

$$T\alpha_2=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$$

$$=a\alpha_2+b\alpha_1$$

$$T\alpha_3=e^{ax}\cos bx+xae^{ax}\cos bx-bxe^{ax}\sin bx$$

$$=\alpha_2+a\alpha_3-b\alpha_4$$

$$T\alpha_4=e^{ax}\sin bx+axe^{ax}\sin bx+bxe^{ax}\cos bx$$

$$=\alpha_2+a\alpha_4+b\alpha_3$$

$$T\alpha_5=xe^{ax}\cos bx+\frac{a}{2}x^2e^{ax}\cos bx-\frac{b}{2}x^2e^{ax}\sin bx$$

$$=\alpha_3+a\alpha_5-b\alpha_6$$

$$T\alpha_6=xe^{ax}\sin bx+\frac{a}{2}x^2e^{ax}\sin bx+\frac{b}{2}x^2e^{ax}\cos bx$$

$$=\alpha_4+a\alpha_6+b\alpha_5$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

（4）解

$$T\alpha_1=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$$

$$T\alpha_2=3\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\alpha_3$$

$$T\alpha_3=5\alpha_1-\alpha_2+0\cdot\alpha_3$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（5）解

$$e_1=-\frac{1}{7}\alpha_1+\frac{2}{7}\alpha_2+\frac{3}{7}\alpha_3$$

$$e_2=\frac{3}{7}\alpha_1+\frac{6}{7}\alpha_2-\frac{1}{7}\alpha_3$$

$$e_3=\frac{3}{7}\alpha_1+\frac{1}{7}\alpha_2+\frac{1}{7}\alpha_3$$

$$Te_1=-\frac{1}{7}T\alpha_1+\frac{2}{7}T\alpha_2+\frac{3}{7}T\alpha_3=2\alpha_1-\frac{1}{7}\alpha_2+\frac{3}{7}\alpha_3$$

$$Te_2=\frac{3}{7}T\alpha_1+\frac{6}{7}T\alpha_2-\frac{1}{7}T\alpha_3=\frac{19}{7}\alpha_1-\frac{2}{7}\alpha_2+\frac{3}{7}\alpha_3$$

$$Te_3=\frac{3}{7}T\alpha_1+\frac{1}{7}T\alpha_2+\frac{1}{7}T\alpha_3=2\alpha_1-\frac{4}{7}\alpha_2-\frac{2}{7}\alpha_3$$

又$Te_1=-\frac{5}{7}e_1-\frac{4}{7}e_2+\frac{25}{7}e_3$

$$Te_2=\frac{20}{7}e_1-\frac{5}{7}e_2+\frac{18}{7}e_3$$

$$Te_3=-\frac{20}{7}e_1-\frac{2}{7}e_2+\frac{24}{7}e_3$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{20}{7} & -\frac{20}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{27}{7} & \frac{18}{7} & \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

6、

（1）解：由题意可知：

$$T\varepsilon_3 = a_{33}\varepsilon_3 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_1$$

$$T\varepsilon_2 = a_{32}\varepsilon_3 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_1$$

$$T\varepsilon_1 = a_{31}\varepsilon_3 + a_{21}\varepsilon_2 + a_{11}\varepsilon_1$$

$\therefore T$在基底$[\varepsilon_3，\varepsilon_2，\varepsilon_1]$下的矩阵$B$为：

$$\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

（2）解：由题意可知：

$$T\varepsilon_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + a_{31}\varepsilon_3$$

$$= a_{11}\varepsilon_1 + \frac{a_{21}}{k}\cdot k\varepsilon_2 + a_{31}\varepsilon_3 \qquad T(k\varepsilon_2) = kT\varepsilon_2 = ka_{12}\varepsilon_1 + ka_{22}\varepsilon_2 + ka_{32}\varepsilon_3$$

$$= ka_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\cdot k\varepsilon_2 + ka_{32}\varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_3) = a_{13}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3$$

$$= a_{13}\varepsilon_1 + \frac{a_{23}}{k}\cdot k\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3$$

$\therefore T$在基底$[\varepsilon_1，k\varepsilon_2,\varepsilon_3](k\neq 0)$下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{k} & a_{22} & \frac{a_{23}}{k} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}(k\neq 0)$$

（3）解：

$$T(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = T\varepsilon_1 + T\varepsilon_2$$

$$= (a_{11}+a_{12})\varepsilon_1 + (a_{21}+a_{22})\varepsilon_2 + (a_{31}+a_{32})\varepsilon_3$$

$$= (a_{11}+a_{12})(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + (a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12})\varepsilon_2$$

$$+(a_{31}+a_{32})\varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3$$

$$= a_{12}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + (a_{22}-a_{12})\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3$$

$T(\varepsilon_3)=a_{13}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+(a_{23}-a_{13})\varepsilon_2+a_{33}\varepsilon_3$

$\therefore T$在$[\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3]$下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

7、

（1）证明：设一组数k_0、$k_1 \cdots k_{n-1}$，使

$k_0\xi+k_1\mathrm{T}\xi+k_2\mathrm{T}^2\xi+\cdots+k_{n-2}T^{n-2}\xi+k_{n-1}T^{n-1}\xi=0$

对上式进行线性变换，得:

$k_0T\xi+k_1\mathrm{T}^2\xi+\cdots+k_{n-2}T^{n-1}\xi+k_{n-1}T^n\xi=0$

$\because T^n\xi=0$

故上式可化为：$k_0T\xi+k_1\mathrm{T}^2\xi+\cdots+k_{n-2}T^{n-1}\xi=0$

再线性变换，以此类推得:

$k_0T^{n-1}\xi+k_1\mathrm{T}^n\xi=0$

即$k_0T^{n-1}\xi=0$

$\because T^{n-1}\xi\neq 0$

故$k_0=0$

同理可证：$k_1=k_2=\cdots=k_{n-2}=k_{n-1}=0$

$\therefore \xi$，$T\xi,\cdots$，$T^{n-1}\xi$是V中n个线性无关的向量。

（2）

$\because T\xi=T\xi$

$T(T\xi)=T^2\xi$

$T(T^2\xi)=T^3\xi$

$\vdots$

$T(T^{n-1}\xi)=T^n\xi$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

8、

（1）

证明：$\mathrm{T}(\alpha A+\beta B)=T\left[\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1 & \alpha x_2+\beta y_2 \\ \alpha x_2+\beta y_2 & \alpha x_3+\beta y_3\end{pmatrix}\right]$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1 & \alpha x_2+\beta y_2 \\ \alpha x_2+\beta y_2 & \alpha x_3+\beta y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1 & \alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2) \\ \alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2) & \alpha(x_1+x_2+x_3+x_4)+\beta(y_1+y_2+y_3+y_4)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x_1 & \alpha(x_1+x_2) \\ \alpha(x_1+x_2) & \alpha(x_1+x_2+x_3+x_4)\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}\beta y_1 & \beta(y_1+y_2) \\ \beta(y_1+y_2) & \beta(y_1+y_2+y_3+y_4)\end{pmatrix}$$

$$=\alpha TA+\beta TB$$

$\therefore T$为线性变换

（2）

$$\because TA_1=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=A_1+A_2+A_3$$

$$TA_2=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}=A_2+2A_3$$

$$TA_3=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=A_3$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

9、

证明：$\because T(\alpha_1+\alpha_2)=T\alpha_1+T\alpha_2=\beta_1+\beta_2$

$$T(\alpha_1-\alpha_2)=T\alpha_1-T\alpha_2=\beta_1-\beta_2$$

$$\therefore T=S$$

10、求下列矩阵的特征根与特征向量

（1）

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

解：$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-2)^2-1=0$$

$$\therefore \lambda=1或3$$

当$\lambda=1$时：

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

即$-x_1-x_2=0$

$x_2=-c_1,x_1=c_1$

$\therefore$特征向量为:$(c_1,-c_1)(c_1\neq 0)$

当$\lambda=3$时：

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$特征向量为:$(c_2，c_2)(c_2\neq 0)$ 综上所述：$\lambda=1$时，特征向量$(c_1,-c_1)(c_1\neq 0)$

$\lambda=3$时，特征向量$(c_2，c_2)(c_2\neq 0)$

（2）

$$A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix},(a\neq 0)$$

解：由$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-a\\a&\lambda\end{vmatrix}$

$$=\lambda^2+a^2=0$$

$\therefore \lambda=ai$或$\lambda=-ai$

当$\lambda=ai$时：

$$\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix} ai & -a \\ a & ai \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} ai & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 特征向量为$\left(c，ci\right)\left(c\neq 0\right)$

当$\lambda=-ai$时：

$$\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix} -ai & -a \\ a & -ai \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -ai & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 特征向量为$\left(c，-ci\right)\left(c\neq 0\right)$

综上所述：$\lambda=ai$时，特征向量$\left(c,ci\right)\left(c\neq 0\right)$

$\lambda=-ai$时，特征向量$\left(c，-ci\right)\left(c\neq 0\right)$

（3）

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

解：由$\varphi_A\left(\lambda\right)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 & -2 \\ \lambda+3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+1 & 2\lambda+3 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+1 & 2\lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \left(\lambda+2\right)\left(\lambda^2+\lambda-1\right)+2\lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda+2\right)\left(\lambda^2+\lambda-1\right)+2\lambda+3=0$$

即$\left(\lambda+1\right)^3=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$

$$\therefore\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&1&-2\\-5&2&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\\\quad x_3\neq0\end{cases}$$

$\therefore$ 特征向量$\mathrm{k}\left(1,1,-1\right),\left(k\neq0\right)$

（4）

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

解：由$\varphi_A\left(\lambda\right)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\4&\lambda-4&0\\2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$=\left(\lambda-2\right)\left[\lambda\left(\lambda-4\right)+4\right]$$

$$=\left(\lambda-2\right)^3=0$$

当λ=2时，

$$\therefore\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 特征向量为$\mathrm{k}_1\left(1,\,2,\,0\right)+\mathrm{k}_2\left(0,0,1\right)$

$\left(k_1,k_2\text{不全为}0\right)$

（5）

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{pmatrix}$$

解：由$\varphi_A\left(\lambda\right)=\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-7&12&-6\\-10&\lambda+19&-10\\-12&24&\lambda-13\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-7)\left[(\lambda+19)(\lambda-13)+240\right]$$

$$-12\left[-10(\lambda-13)-120\right]-6\left[-240+12(\lambda+19)\right]$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时：

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-6 & 12 & -6\\ -10 & 20 & -10\\ -12 & 24 & -12\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore$特征向量$(2c_2-c_1, c_2, c_1)$$(c_1,c_2$不同为$0)$

当$\lambda_3=-1$时：

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-8 & 12 & -6\\ -10 & 18 & -10\\ -12 & 24 & -14\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-8 & 12 & -6\\ -10 & 18 & -10\\ -20 & 36 & -20\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-8 & 12 & -6\\ -10 & 18 & -10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-4 & 6 & -3\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}-2x_1+x_3=0\\ 6x_2-5x_3=0\end{cases}$$

$\therefore$特征向量$c(3, 5, 6),(c\neq 0)$

（6）

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

解：由$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\lambda^2(\lambda-1)^2=0$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时：

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\therefore$特征向量$(0,\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,0)(c_1,c_2$不全为$0)$

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时：

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$特征向量$(0,0,0,\ \mathrm{c}),(c\neq0)$

综上，当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，特征向量$(0,\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,0)$

$(c_1,c_2$不全为$0)$

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，特征向量$(0,0,0,\ \mathrm{c}),(c\neq0)$

（7）

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解：由$\varphi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\-1&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\lambda^2(\lambda-1)^2=0$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时：

$$\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 特征向量 $\left(0,\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,0\right)\left(c_1{}^2+c_2{}^2\neq 0\right)$

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时：

$$\left(\lambda E-A\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 特征向量 $\left(\mathrm{c}_1,0,\mathrm{c}_1，\mathrm{c}_2\right),\left(c_1{}^2+c_2{}^2\neq 0\right)$

综上，当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，

特征向量 $\left(0,\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,0\right)\left(c_1{}^2+c_2{}^2\neq 0\right)$

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时，

特征向量 $\left(\mathrm{c}_1,0,\mathrm{c}_1，\mathrm{c}_2\right),\left(c_1{}^2+c_2{}^2\neq 0\right)$

9.（2）解：设向量组线性相关，则 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4$

$=(\lambda_1,-2\lambda_1,3\lambda_1,-4\lambda_1)+(0,\lambda_2,-\lambda_2,\lambda_1)+(\lambda_3,3\lambda_3,0,-\lambda_3)+(0,-7\lambda_4,3\lambda_4,\lambda_4)$

$=(\lambda_1+\lambda_3,-2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3-7\lambda_4,3\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_4,-4\lambda_1+\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4)=0$

则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0 & (1)\\ -2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3-7\lambda_4=0 & (2)\\ 3\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_4=0 & (3)\\ -4\lambda_1+\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4=0 & (4)\end{cases}$ 由（1）+（3）得 $\lambda_1+3\lambda_3-4\lambda_4=0$，$\lambda_2=2\lambda_4$ 代入（3）得

$3\lambda_1-2\lambda_4+3\lambda_4=0\ \therefore\lambda_4=-3\lambda_1=3\lambda_3$，代入（4）得 $-4\lambda_1+2\lambda_4+\lambda_1+\lambda_4=0$，$3\lambda_1=3\lambda_4$

$\therefore\lambda_1=\lambda_4=-\lambda_3=-3\lambda_3\ \therefore\lambda_3=\lambda_1=\lambda_4=\lambda_2=0\ \therefore$ 线性无关

$$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&-1\\0&-7&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{-(1)行+(3)行}}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&5&-3&3\\0&-7&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{7(2)行+(4)行}]{\text{-5(2)行+(3)行}}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&2&-2\\0&0&-4&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2(3)行+(4)行}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&2&-2\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$ 由此 r=4

（3）：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0$ 线性相关

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)行+(5)行}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&-1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)行+(5)行}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)行+(5)行}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(4)行+(5)行}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ 由此 r=4

10. 解：（1）当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ 线性相关时，$\lambda_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{1n})+\lambda_2(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{2n})+\quad+$ $\lambda_m(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \alpha_{mn})$=0 去掉的一列分量 $\lambda_1\alpha_{1n}+\lambda_2\alpha_{2n}+\lambda_3\alpha_{3n}+\quad+\lambda_{mn}\alpha_{mn}=0$ $\therefore \alpha_1', \alpha_2', \alpha_m'$ 也线性相关；当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ 线性无关时，$\therefore \alpha_1', \alpha_2', \alpha_m'$ 也线性无关。

(2)(i)：向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_m\alpha_m=0$ 互换 i，j 个分量得 $\alpha_{ni}\to\alpha_{nj}$ 则向量 $k_1'\alpha_1''+k_2'\alpha_2''+\quad+k_m'\alpha_m''=0$ $\therefore$ 同时线性相关（无关）。

（ii）：向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_m\alpha_m=0$ 用非零常熟乘第 i 个分量 $\alpha_{ni}\to c\alpha_{ni}$ 则向量 $k_1'\alpha_1''+k_2'\alpha_2''+\quad+k_m'\alpha_m''=0$ $\therefore$ 同时线性相关（无关）。

（iii)：向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_m\alpha_m=0$ 把第 i 个分量的 λ 倍加到第 j 个分量上 $\alpha_{ni}\to\lambda\alpha_{ni}+\alpha_{nj}$ 则向量 $k_1'\alpha_1''+k_2'\alpha_2''+\quad+k_m'\alpha_m''=0$ $\therefore$ 同时线性相关（无关）。

11. 证明：$\because$ 向量组 $\alpha_i=\left(1,t_i,t_i^2,\quad t_i^{n-1}\right)$ $(i=1,2,\quad,r,r\le n)$ 则有

$$Ar=\begin{vmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{r-1}\\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{r-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & t_r & t_r^2 & \cdots & t_r^{r-1}\end{vmatrix}=\pi\left(t_j-t_i\right)(1\le i\le j\le r)$$

$\because t_1,t_2\cdots t_n$是互不相同的 n 个数，切$r\le n$，$\therefore\left|Ar\right|\ne 0\ \therefore\left|A\right|$的 n 个行向量线性无关。

12.证明：记 A 的向量组为：α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s， B 的向量组为$\because\ \mathrm{r_k}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\therefore\det\left(\lambda\right)\ne 0$。

A 的极大线性无关组：α_{i1}，$\alpha_{i2},\cdots$，α_{ir_1}，B 的极大线性无关组：β_{j1}，$\beta_{j2},\cdots$，β_{jr_2}。

$\because$向量组 A、B 是等价的，$\therefore$每个向量组中的向量都是另一个向量组中向量的线性组合。

既有α_{i1}，$\alpha_{i2},\cdots$，α_{ir_1}与β_{j1}线性相关，同理α_{i1}，$\alpha_{i2},\cdots$，α_{ir_1}分别与$\beta_{j2},\cdots$，β_{jr_2}线性相关。

则 $\beta_{j(r_2+1)}\cdots\beta_{jm}$ 均可由 α_{i1}，$\alpha_{i2},\cdots$，α_{ir_1} 的表示式线性表出。所以 α_{i1}，$\alpha_{i2},\cdots$，α_{ir_1} 与 β_{j1}，$\beta_{j2},\cdots$，β_{jr_2}的数目相同，即$r_1=r_2$，所以向量组$\alpha_1,\cdots$，α_s与向量组$\beta_1,\cdots$，β_m等价时，它们的秩相等。

13.证明：（1）当 r=s 时，充分性证明。$\because\ \det\left(K\right)\ne 0$，则矩阵$\mathrm{K}=\left(\mathrm{kij}\right)_{\mathrm{rxs}}$必存在可逆矩阵$K^{-1}$

$\because\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=\mathrm{K}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\therefore$应有$K^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$又$\because$向量组 A 线性无关$\therefore$向量组 B 也是线性无关的。

必要性证明：$\because\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=\mathrm{K}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}\therefore$有$\beta_1=k_{11}\alpha_1+\cdots+k_{1s}\alpha_s$，$\cdots$，$\beta_r=k_{s1}\alpha_1+\cdots+k_{ss}\alpha_s$。

又$\because$向量组 A、B 均为线性无关组，$\therefore\ \det\left(K\right)\ne 0$

(2)当对一般的 r 和 s 时，充分性证明：$\because\ \mathrm{r_k}=\mathrm{r}$，$\therefore$向量组必含一个有 r 个向量的子组满足

$\therefore\det\left(K^*\right)\ne 0$。则有$K^{*-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$。又$\because$向量组 A 线性无关$\therefore$向量组 B 也是线性无关的。

必要性证明：$\because$B 是线性无关组，$\therefore$存在一个向量组λ，$\det\left(\lambda\right)\ne 0$。

若向量组K(r×s的矩阵）的秩为 r，则可用向量组 K 的子组来代替λ使其满足，$K^{*-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$

则矩阵 K 的秩 $r_k=r$ 。

11. 证明：

（1）设 λ 为 A 的特性值，

假设 $\lambda=0$ 则 A$\vec{x}=\vec{0}$，

因为 $\vec{x}\neq 0$，

所以 $|A|=0$ 这与 A 为可逆矩阵相矛盾，

所以假设不成立。

（2）因为 λ 为 A 的特性值，

所以 $\vec{x}\neq 0$ 满足 A $\vec{x}=\lambda\vec{x}$ ①，

又因 A 可逆，

则①式两边同时左乘 A^{-1} 得 A^{-1}（A$\vec{x}$）= A^{-1}（$\lambda\vec{x}$），

所以存在 $\vec{x}=\lambda A^{-1}\vec{x}$

所以 $\frac{1}{\lambda}\vec{x}=A^{-1}\vec{x}$

所以 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值。

12. 证明：假设 $\xi_1+\xi_2$ 为 A 的属于 λ 的特征向量，

则 A（$\lambda_1+\lambda_2$）= λ（$\lambda_1+\lambda_2$）…①，

由于 $\xi_1\xi_2$ 满足 A$\xi_1=\lambda_1\xi_1$，A$\xi_2=\lambda_2\xi_2$，

从而 A($\xi_1+\xi_2$)=Aξ_1+Aξ_2 …②，

由①②得 λ（$\xi_1+\xi_2$）= $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$，

∴（$\lambda-\lambda_1$）ξ_1+（$\lambda-\lambda_2$）$\xi_2=0$，

∵ $\xi_1\xi_2$ 线性无关，

∴ $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，

∴ $\lambda_1=\lambda_2$ 这与已知条件 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾，

∴假设不成立即 $\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征方程。

13. 假设向量 ξ 是 A 的不同特征根的特征向量，

∴ $A\xi=\lambda_1\xi\cdots$①，

$A\xi=\lambda_2\xi\cdots$②，

①-②得（$\lambda_1-\lambda_2$）ξ=0，

∴ $\lambda_1-\lambda_2=0$，

∴ $\lambda_1=\lambda_2$ 这与已知条件矛盾，

故假设不成立，即一个向量 ξ 不可能是 n 阶矩阵 A 的不同特征根的特征向量。

14. φ_A（λ）$=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$，

$\lambda^n\lambda^{n-1}$ 的系数均由多项式（$\lambda-a_{11}$）（$\lambda-a_{22}$）…（$\lambda-a_{nn}$）中的项所决定，

因为如果不全取对角线上的元素，λ 的最高幂次为 n—2「可由行列式的计算规则得出」，上述多项式中 λ^n 的系数为 1，λ^{n-1} 的系数为—（$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$），

当 $\lambda=0$ 时，φ_A（λ）$=|0\cdot E-A|=|-A|=(-1)^n|A|$，

∴常数项为 $(-1)^n|-A|$。

15. $\langle 1\rangle$ 解：求其特征根：

$$|\lambda\overline{E}-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3 & 1\\ 3 & \lambda-5 & 1\\ 3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3 & 1\\ -\lambda+2 & \lambda-2 & 0\\ 4-\lambda^2 & 3\lambda-6 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3 & 1\\ 2-\lambda & \lambda-2 & 0\\ -\lambda^2+3\lambda-2 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$，

∴其特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$

① 当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

$r=1$，故其基础解系为 3—1=2 个，

$\therefore 3x_1-3x_2+x_3=0$

令 $x_1=1$，$x_2=1$，

则 $x_3=0 \Rightarrow \overline{x_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

令 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=-3 \Rightarrow \overline{x_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

② 当 $\lambda_3=1$ 时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}2&-3&1\\3&-4&1\\3&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&-1&0\\3&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

$\because \begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=0\\x_1-x_2=0\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}x_1=1\\x_2=1\\x_3=1\end{cases}$ 即 $\overline{x_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

故可以对角化，其相似对角形矩阵为 $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$，过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-3\end{bmatrix}$

$\langle 2\rangle$. 解：求其特征根：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-6&5&3\\-3&\lambda+2&-2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&5&3\\\lambda-1&\lambda+2&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&5&3\\1&\lambda+2&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&5&3\\0&\lambda-3&-1\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left[\lambda(\lambda-3)-(-2)\right]=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$，

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-5&5&3\\-3&3&2\\-2&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&5&3\\0&3&2\\0&2&1\end{bmatrix}$，

$r=2 > 3-1$,

故它的特征向量的极大线性无关组只有一个向量，小于特征根$\lambda_1=1$的重数，
所以 A 不可对角化。

$\langle 3\rangle$. 解：求其特征根：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & -1 & -2\\ 0 & \lambda+1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$$

,

$\therefore$ 其特征根为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=\lambda_4=2$

① 当$\lambda_1=1$时，

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}0&-3&-1&-2\\0&2&-1&-3\\0&0&-1&-5\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-3&-1&-2\\0&5&0&-1\\0&0&-1&-5\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{cases}-3x_2-x_3-2x_4=0\\5x_2-x_4=0\\-x_3-5x_4=0\\-x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}$$

即 $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

第七章

1、(1) $f(x)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$

$=(x_1+\frac{5}{2}x_2)^2-(\frac{25}{4}x_2^2+3x_2x_3)$

$=(x1+$ ，$\frac{5}{2}x_2)2-\frac{25}{4}(x2+\frac{6}{25}x_3)2+\frac{9}{25}x_3^2$

令$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\ y_2=x_2+\frac{6}{25}x_3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)\\ y_3=x_3\end{cases}$

则 $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$

由（a）可得：$\begin{cases} x_3 = y_3 \\ x_2 = y_2 - \frac{6}{25}y_3 \\ X_1 = y_1 - \frac{5}{2}y_2 + \frac{3}{5}y_3 \end{cases}$ $\therefore$坐标变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

(3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 + (y_1 - y_2)(y_3 + y_4) + (y_1 + y_2)(y_3 - y_4)$

$= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_1y_4 - y_2y_3 - y_2y_4 + y_1y_3 - y_1y_4 + y_2y_3 - y_2y_4$

$= (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - (y_2 + y_4)^2 + y_4^2$

$= (y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_4)^2 - y_3^2 + y_4^2$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 + y_4 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = y_4 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 - z_4 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2$

坐标变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 - z_3 - z_4 \\ x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2 - z_3 + z_4 \\ x_3 = y_3 + y_4 = z_3 + z_4 \\ x_4 = y_3 - y_4 = z_3 - z_4 \end{cases}$

(2) $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

$= 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3\right) + 3\left(x_2^2 + \frac{4}{9}x_3^2 - \frac{4}{3}x_2x_3\right) + \frac{5}{3}x_3^2$

$= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\oplus$

$\therefore f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$

由$\oplus$可得：$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$\therefore$坐标变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(4) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^5 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

$$= (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - 2(x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_3 + x_4)^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_1 + 2x_3 + x_4 \\ y_2 = x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_3 = x_3 + x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \\ x_2 = y_2 - \frac{3}{2}y_3 + y_4 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$

$\therefore f = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$

坐标变换：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

(5) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$$= \overline{X}^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overline{X} = \overline{X}^T A \overline{X}$$

$$\therefore |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即 $\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = 0$

又因为 $\begin{vmatrix} 3\text{-}2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3\text{-}2\lambda & 3\text{-}2\lambda & 1 & 1 \\ 3\text{-}2\lambda & 1 & 3\text{-}2\lambda & 1 \\ 3\text{-}2\lambda & 1 & 1 & 3\text{-}2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\text{-}2\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1\text{-}2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1\text{-}2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\text{-}2\lambda \end{vmatrix} = (3\text{-}2\lambda)(-1\text{-}2\lambda)^3$

$$\therefore (3\text{-}2\lambda)(-1\text{-}2\lambda)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

对于$\lambda = \frac{3}{2}$解齐次线性方程组

$$\left(\frac{3}{2}E - A\right)X = 0$$

由$\frac{3}{2}E - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得到基础解系：$x_1 = (1,1,1,1)$...单位化得$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

对于$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}$，解齐次线性微分方程组$(E - A)X = 0$

由E-A=$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得到基础解系:$\mathrm{x}_2 = (1,0,0,1)$ $\quad \mathrm{x}_3 = (0,1,0,-1)$ $\quad \mathrm{x}_4 = (0,0,0,-1)$

将x_2, x_3, x_4正变化，标准化得：$\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad \varepsilon_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$\varepsilon_4 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

取$p = \left(\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}\overline{\varepsilon_3}\overline{\varepsilon_4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

则有$P^T AP = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$从而令$\overline{\mathrm{x}} = p\overline{y}$

则$\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x^{-1}} A\overline{x} = \overline{y}^T P^T AP\overline{y}$

$$= \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2$$

坐标变换为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

此题如用配方相反麻烦而且不易解出，建议用正交法解，且此大题的解不唯一

第三册(第五页)

习题五

15（5）$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $|\lambda Z-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+6\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$=\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda+4$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2)$

得到 $\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda_3=1-\sqrt{3}$

对于 $\lambda_1=2$，解方程组

$$(2Z-A)X=\begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=0$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=0$$

有一个 XXXXX

$X_1=(-2 \quad 1 \quad 0)$

对于 $\lambda_2=1+\sqrt{3}$ 解方程组

$$\left[\left(1+\sqrt{2}\right)Z-A\right]x=\begin{bmatrix}\sqrt{3}-4 & -6 & 3\\ 1 & 1+\sqrt{3} & -1\\ -1 & -2 & 2+\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1+\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\\ 0 & -5+3\sqrt{3} & \sqrt{3}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1+\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0$$

得一个 XXXXX $X_2=(3 \quad 1 \quad \sqrt{3}-2)$

对于 $\lambda_3=1-\sqrt{3}$ 解方程组

$$\left[\left(1-\sqrt{3}\right)Z-A\right]X=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}-4 & -6 & 3\\ 1 & 1-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -2 & 2-\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1-\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ 0 & -5-3\sqrt{3} & -\sqrt{3}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1-\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=0$$

$\therefore$ 有一个 XXXXX

$X_3=\left(-3 \quad -1 \quad 2+\sqrt{3}\right)$

$\therefore$ 由上面知，存在相应过渡矩阵

$$M=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & \sqrt{3}-2 & 2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

得相似对角形矩阵 $\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1+\sqrt{3} & \\ & & 1-\sqrt{3}\end{bmatrix}$

（6）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解：对应 $|\lambda Z - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= \lambda\left[\lambda^3 - \lambda\right] - \left(\lambda^2 - 1\right)$

$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^4 - \lambda^2\right) - \left(\lambda^2 - 1\right) = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = 0$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$

对应双生根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 解方程组

$$(Z - A)X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

得二个 XXXXX $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对于双生根 $\lambda_3 = \lambda_4 - 1$ 解方程组

$$(-Z - A)X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

得二个 XXXXX $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

由上知，存在相应过渡矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

得相似对角形矩阵$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}$

第六章

1.证明：A、B$\in V_1$

$A=(a_{ij})_{nxn} \quad B=(b_{ij})_{nxn}$ 且 $a_{ij}=a_{ji}, b_{ij}=b_{ji}$

（1）

$$\left\langle A,B\right\rangle = tr\left(AB\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

$$\left\langle B,A\right\rangle = tr\left(BA\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

所以 $\left\langle A,B\right\rangle = \left\langle B,A\right\rangle$

（2）

$$\left\langle A+B,C\right\rangle = tr\left[\left(A+B\right)C\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}+b_{ik}\right)c_{ki}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{ki}$$

$$\left\langle A,C\right\rangle + \left\langle B,C\right\rangle = tr\left(AC\right)+tr\left(BC\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{ki}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{ki}$$

所以 $\left\langle A+C,C\right\rangle = \left\langle A,C\right\rangle + \left\langle B,C\right\rangle \quad \left(c\in V\right)$

(3)

$$\left\langle aA,B\right\rangle = tr\left\langle aAB\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}aa_{ik}b_{ki}$$

$$=a\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

$$a\left\langle A,B\right\rangle = atr\left(AB\right)$$

$$=a\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

所以$\left\langle aA,B\right\rangle = a\left\langle A,B\right\rangle \left(a\in R\right)$

(4) 当$A \neq 0$时，

$\langle A, A\rangle = tr\left(A^2\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}a_{ii}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 > 0$

所以$\langle A, B\rangle$是 V 中的一个内积

2.证明：

（1）在R^n中定义$\langle \alpha, \beta\rangle = \alpha A\beta^T$

则$\langle \beta, \alpha\rangle = \beta A\alpha^T$

$\beta A\alpha^T$为一个数，转置之后;不变

所以$\langle \beta, \alpha\rangle = \left(\beta A\alpha^T\right)^T = \alpha A^T\beta^T$

因为 A 为 n 阶正定矩阵

所以$\langle \beta, \alpha\rangle = \alpha A\beta^T \langle \alpha, \beta\rangle$

（2）

$\langle \alpha+\beta, \gamma\rangle = (\alpha+\beta)A\gamma^T = \alpha A\gamma^T + \beta A\gamma^T$

$= \langle \alpha, \beta\rangle + \langle \beta, \gamma\rangle (\gamma \in V)$

(3)

$\langle a\alpha, \beta\rangle = a^{\alpha}A\beta^{T} = a\langle \alpha, \beta\rangle (a \in R)$

(4)

当$\alpha \neq 0$时，$\langle \alpha, \alpha\rangle = \alpha A\alpha^{'}$

因为 A 为 n 阶正定矩阵，其中任意 n 维向量

$x = \left(x_{1,} x_2, \ldots, x_n\right) \neq 0$，都恒有$xAx^{'} > 0$

而$\alpha = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$为 n 维向量

所以$\langle \alpha, \alpha\rangle > 0$

所以 由上述，这样定义的$\langle \alpha, \beta\rangle$也是$R^n$中的一个内积

3.证明：必需性：???????正交，所以$\langle \alpha, \beta\rangle = 0$

$$|\alpha + t\beta|^2 - |\alpha|^2 = \langle \alpha + t\beta, \alpha + t\beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle$$

所以$= \langle \alpha, \alpha\rangle + 2t\langle \alpha, \beta\rangle + t^2\langle \beta, \beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle = t^2\langle \beta, \beta\rangle$

当 $t \neq 0$，β 不是零向量，则 $t^2\langle\beta,\beta\rangle > 0$

当 $t = 0$ 或 β 为零向量，$t^2\langle\beta,\beta\rangle = 0$

所以 $\left|\alpha + t\beta^2\right| \geq |\alpha|^2$

所以 $|\alpha + t\beta| \geq |\alpha|$

充分性：对于 $\forall t$ 都有 $|\alpha + t\beta| \geq |\alpha|$

$$\langle\alpha + t\beta, \alpha + t\beta\rangle - \langle\alpha,\alpha\rangle \geq 0$$

所以 $\langle\alpha,\alpha\rangle + 2t\langle\alpha,\beta\rangle + t^2\langle\beta,\beta\rangle - \langle\alpha,\alpha\rangle \geq 0$

所以

$2t\langle\alpha,\beta\rangle + t^2\langle\beta,\beta\rangle \geq 0$

$\Delta = 4\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leq 0$

则 $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ 即 α,β 正交

综上，在欧式空间中两个向量 α,β 正交的充分必要条件是，对任意的实数 t 恒有

$|\alpha + t\beta| \geq |\alpha|$

4.（1）

$$\begin{aligned}&|\alpha+\beta|^2 - (|\alpha| + |\beta|)^2\\&= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\langle\alpha,\beta\rangle - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|\\&= 2\langle\alpha,\beta\rangle - 2|\alpha||\beta|\end{aligned}$$

所以

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leq \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$$

$$\langle\alpha,\beta\rangle \leq \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle} = |\alpha||\beta|$$

所以

$2\langle\alpha,\beta\rangle - 2|\alpha||\beta| \leq 0$

所以

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

（2）

$$\begin{aligned}&|\alpha-\gamma|^2 - (|\alpha-\beta| + |\beta-\gamma|)^2\\&= |\alpha-\beta+\beta-\gamma|^2 - (|\alpha-\beta| + |\beta-\gamma|)^2\\&= |\alpha-\beta|^2 + |\beta-\alpha|^2 + 2\langle\alpha-\beta,\beta-\gamma\rangle - |\alpha-\beta|^2 - |\beta-\gamma|^2 - 2|\alpha-\beta||\beta-\gamma|\\&= 2\langle\alpha-\beta,\beta-\gamma\rangle - 2|\alpha-\beta||\beta-\gamma| \leq 0\end{aligned}$$

所以$|\alpha-\gamma|\le|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|$

P186

5、设单位向量（x1、x2、x3、x4）

则由题意知：

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases} \Rightarrow$$ （x2=0，x3=$\frac{1}{4}$x1，x4=-$\frac{3}{4}$x1）①

由$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2=1$ ②

将①代入②得：

$$x_1{}^2+\frac{1}{16}x_1{}^2+\frac{9}{16}x_1{}^2=1$$

解得：$x_1=\pm\frac{4}{\sqrt{26}}$

故所求向量为$\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3)$。

6、由施米特正交化方法求出等价的正交组为：

$$\beta_1=\alpha_1=(1,2,1,3)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1=(4,1,1,1)-\frac{10}{15}(1,2,1,3)=\frac{1}{3}(10,-1,1,-3)$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2$$
$$=(3,1,1,0)-\frac{6}{16}(1,2,1,3)-\frac{10}{\frac{37}{3}}\times\frac{1}{3}(10,-1,1,-3)$$
$$=\frac{1}{185}(-19,87,61,-72)$$

7、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可表示为下面的形式：

$$\alpha_1=(1,0,0,0,1)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix} \qquad \alpha_2=(1,-1,0,1,0)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix} \qquad \alpha_3=(2,1,1,0,0)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix}$$

令 $a_1=(1,0,0,0,1),a_2=(1,-1,0,1,0),a_3=(2,1,1,0,0)$

利用施米特正交化方法将 a_1， a_2， a_3 正交化。有：

$$b_1=(1,0,0,0,1)$$

$$b_2=a_2-\frac{<a_2,b_1>}{<b_1,b_1>}b_1=(1,-1,0,1,0)-\frac{1}{2}(1,0,0,0,1)=(\frac{1}{2},-1,0,1,-\frac{1}{2})$$

$$b_3=a_3-\frac{<a_3,b_1>}{<b_1,b_1>}b_1-\frac{<a_3,b_2>}{<b_2,b_2>}b_2$$

$$=(2,1,1,0,0)-(1,0,0,0,1)-\frac{0}{\frac{5}{2}}(\frac{1}{2},-1,0,1,-\frac{1}{2})=(1,1,1,0,-1)$$

故 v_1 的一个正交组可表示为

$$\beta_1=(1,0,0,0,1)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix}\beta_2=(\frac{1}{2},-1,0,1,-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix}\beta_3=(1,1,1,0,-1)\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\end{pmatrix}$$

即 $\beta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,\beta_2=\frac{1}{2}\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4-\frac{1}{2}\varepsilon_5,\beta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5$

单位化后为：

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_5),e_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-\varepsilon_5),e_3=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5)$$

8.设五维向量 $\partial=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$

由题意可得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0\\x_1+x_4-2x_5=0\\2x_1+x_2-x_3+2x_5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3-2x_4-x_5\\x_2=x_3+2x_4-6x_5\\x_3=-\frac{1}{3}x_2-\frac{4}{3}x_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3-2x_4-x_5\\x_2=-x_3-x_4-3x_5\\x_3=-\frac{3}{2}x_4+\frac{3}{2}x_5\end{cases}$$

令　　，得　,,

　　，得　,,

∴ A=（-2,1，-3,2,0）　　　　B=（4,-9,3,0,2）

A、B 线性无关

则令

$\therefore A=(-2,1,-3,2,0) \qquad B=(4,-9,3,0,2)$

A，B 线性无关

则令

$$\alpha_2 = B-\frac{\langle B,\alpha_1\rangle}{\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle}\alpha_1=(4,-9,3,0,2)+\frac{26}{18}(-2,1,-3,2,0)=(\frac{10}{9},-\frac{68}{9},-\frac{4}{3},\frac{26}{9},2)$$

故 $\alpha=(-2,1,-3,2,0)$

$$\beta=(\frac{10}{9},-\frac{68}{9},-\frac{4}{3},\frac{26}{9},2)$$

9 解：用初等行变换把方程组的系数矩阵 A 化为最简行矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

γ_A=2，该方程组的基础解系应有 2 个线性无关的解向量构成阶梯式矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{7}\tilde{x}_3-\frac{1}{7}\tilde{x}_4\\ x_2=\frac{2}{7}\tilde{x}_3+\frac{4}{7}\tilde{x}_4\end{cases}$$

令

对应的解向量为

对应的解向量为

=（0, 2, 1, 3）+（

=（

再把

$$\overrightarrow{\varepsilon_1}=\frac{\overrightarrow{\beta_1}}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}(1,0,2,-1) \qquad \overrightarrow{\varepsilon_2}=\frac{\overrightarrow{\beta_2}}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{498}}(1,12,8,17)$$

$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$可构成解空间的标准正交组

12、证明：（1）设β_1，β_2为M空间任意两向量，

得：$\langle\beta_1,\alpha\rangle=0,\langle\beta_2,\alpha\rangle=0$

$\langle a\beta_1+b\beta_2,\alpha\rangle=\langle a\beta_1,\alpha\rangle+\langle b\beta_2,\alpha\rangle=0$,

∴M中的元素的线性运算在V中是封闭的.

即M是V的一个子空间.

（2）V是n维欧式空间，则存在一个正交基底为$[\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}]$

所以$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，

且$\langle\alpha_i,\alpha\rangle=0.(i=1,2,\cdots,n-1)$

$\therefore\alpha_i\in M,(i=1,2,\cdots,n-1)$

$\langle\alpha,\alpha\rangle=|\alpha|^2\neq 0,\therefore\alpha\notin M.$

由（1）知M是V的一个子空间

$\therefore[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}]$可作为$M$空间的一组正交基底

$\therefore\dim M=n-1$

第六章

13.证明：设$\partial 1$，$\partial 2\cdots\cdots\partial n$ 线性相关

则存在$\partial 1\partial 1+\partial 2\partial 2+\cdots\cdots+\partial n\partial n=0$，则$\lambda 1$，$\lambda 2\cdots\cdots\lambda n=0$

$$\therefore \lambda 1(\partial 1,\partial 1)+\lambda 2(\partial 1,\partial 2)+\cdots\cdots+\lambda n(\partial 1,\partial n)=0$$
$$\lambda 1(\partial 2,\partial 1)+\lambda 2(\partial 2,\partial 2)+\cdots\cdots+\lambda n(\partial 2,\partial n)=0$$
$$\vdots$$
$$\lambda 1(\partial n,\partial 1)+\lambda 2(\partial n,\partial 2)+\cdots\cdots+\lambda n(\partial n,\partial n)=0$$

$$\begin{pmatrix}(\partial 1,\partial 1),(\partial 1,\partial 2)\cdots\cdots(\partial 1,\partial n)\\(\partial 2,\partial 1),(\partial 2,\partial 2)\cdots\cdots(\partial 2,\partial n\\\vdots\\(\partial n,\partial 1),(\partial n,\partial 2\cdots\cdots(\partial n,\partial n)\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\lambda 1\\\lambda 2\\\vdots\\\lambda n\end{pmatrix}$$

$$\because\begin{pmatrix}(\partial 1,\partial 1))\cdots\cdots(\partial 1,\partial n)\\(\partial 2,\partial 1)\cdots\cdots(\partial 2,\partial n)\\(\partial n,\partial 1)\cdots\cdots(\partial n,\partial n)\end{pmatrix}$$

$\therefore\lambda I=0$

$\therefore\partial 1$，$\partial 2\cdots\cdots\partial n$ 线性相关

（6）$f=X_1X_{2n}+X_2X_{2n-1}+\cdots\cdots+X_nX_{n+1}$

举行合同法

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots\cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots\cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots\cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots\cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{看不清}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots\cdots \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots\cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \cdots\cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . & . & \\ 1 & & & & & 1 \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -(n-1) & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{看不清}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ & -\frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & n & & & \\ \frac{2n-1}{2n} & & & & \\ & & \frac{2n-1}{2n} & & \\ \frac{-1}{2n} & \frac{-1}{2n} & & & -(2n-1) \end{pmatrix}$$

$\therefore f=-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2\cdots\cdots+ny_{2n}^2$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 。 \\ 。 \\ X_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2n} & & 1 & \\ & 1-\frac{1}{2n} & 1 & \\ & & 。 & \\ & & 。 & \\ -\frac{1}{2n} & -\frac{1}{2n} & -(2n-1) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ y_{2n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

第七章

1（1） $f=X_1^3+5X_1X_2-3X_2X_3$

配方法：

$$f\left(X_1 \quad X_2 \quad X_3\right)=X_1^2+5X_1X_2+\frac{25}{4}X_2^2-\frac{25}{4}X_2^2-3X_2X_3$$

$$=\left(X_1+\frac{5}{2}X_2\right)^2-\left(\frac{25}{4}X_2^2+3X_2X_3+\frac{X}{X}X_3^2\right)+\left(\frac{3}{5}X_3\right)^2$$

$$=\left(X_1+\frac{5}{2}X_2\right)^2-\left(\frac{5}{2}X_2^2+\frac{3}{5}X_3^2\right)+\left(\frac{3}{5}X_3\right)^2$$

$$令\begin{cases} y_1=X_1+\dfrac{5}{2}X_2 \\ y_2=\dfrac{5}{2}X_2+\dfrac{3}{5}X_3 \\ y_3=\dfrac{3}{5}X_3 \end{cases}$$

则 $f\left(X_1 \quad X_2 \quad X_3\right)=y_1^2-y_2^2+y_3^2$

$$\therefore\begin{cases} X_1=y_1-y_2+y_3 \\ X_2=\dfrac{2}{5}y_2-\dfrac{2}{5}y_3 \\ X_3=\dfrac{5}{3}y_3 \end{cases}$$

$$矩阵合同法：\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第（1）列}\times\frac{5}{2}+\text{第（2）列}]{\text{第（1）}\times-\frac{5}{2}+\text{第（2）行}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{25}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第（3）列}\times\frac{3}{5}+\text{第1列}]{\text{第（3）行}\times\frac{3}{5}+\text{第}XX}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{25}{4} & -\frac{3}{2}\\ 0 & -\frac{3}{2} & 0\\ 1 & -\frac{5}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{3}{5} & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第（2）列}\times\frac{6}{25}+\text{第（3）列}]{\text{第（2）行}\times-\frac{6}{25}+\text{第（3）行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{25}{4} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & \frac{9}{25}\\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{6}{25}\\ \frac{3}{5} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第（3）列}\times X+\text{第（2）行}]{\text{第（3）行}\times X+\text{第（2）行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{25}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{9}{25}\\ 1 & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{6}{25}\\ \frac{3}{5} & \frac{25}{6} & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore f\left(X_1 \quad X_2 \quad X_3\right)=y_1^2-\frac{25}{4}y_2^2+\frac{9}{25}y_3^2$$

坐标变换 $\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{6}{25}\\ \frac{3}{5} & \frac{25}{6} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

（2）$f\left(X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4\right)=2X_1^2+5X_2^2+5X_3^2+4X_1X_2-4X_1X_3-8X_2X_3$

配方法：$f\left(X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4\right)=2(X_1+X_2-X_3)^2+3(X_2-\frac{2}{3}X_3)^2+\frac{5}{3}X_3^2$

令 $\begin{cases}y_1=X_1+X_2-X_3\\ y_2=X_2-\frac{2}{3}X_3\\ y_3=X_3\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}X_1=y_1-y_2+\frac{1}{3}y_3\\ X_2=y_2+\frac{2}{3}y_3\\ X_3=y_3\end{cases}$

坐标变换∴ $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

矩阵 x 同法 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第（1）列×-1+第（2）列　第（3）×1+第（3）列}]{\text{第（1）行×-1+第（2）行　第（1）×1+第（2）行}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第（3）列}\times\frac{2}{3}\text{+第3行}]{\text{第（2）}\times\frac{2}{3}\text{+第3行}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列}\times\frac{6}{5}\text{+第2列}]{\text{第3行}\times\frac{6}{5}\text{　第2行}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第1列}\times-\frac{2}{3}\text{+第x列}]{\text{第2行}\times-\frac{2}{3}\text{+第1行}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{17}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列}\times\frac{6}{5}\text{+第1列}]{\text{第3行}\times\frac{6}{5}\text{+第1行}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{5} & -\frac{19}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$

（3）

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3$$

配方法：

令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_3 + y_4 \\ x_2 = y_3 - y_4 \end{cases}$$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2-y_2^2+(-y_2)(y_3+y_4)+(y_1+y_2)(y_3-y_4)$

$=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_1y_4-y_2y_3-y_2y_4+y_1y_3$

$\quad -y_1y_4+y_2y_3-y_2y_4$

$=y_1^2-y_2^2+2y_1y_2-2y_2y_4$

$=(y_1+y_3)^2-y_3^2-(y_2+y_4)^2$

$=(y_1+y_3)^2-(y_2+y_4)^2-y_3^2+y_4^2$

令

$$\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2+y_4 \\ z_3=y_3 \\ z_4=y_4 \end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{cases} y_1=z_1-z_3 \\ y_2=z_2-z_4 \\ y_3=z_3 \\ y_4=z_4 \end{cases}$$

$\therefore$

$f_{(x_1,x_2,x_3,x_4)}=z_1^2-z_2^2-z_3^2-z_4^2$

坐标互换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

矩阵合同法

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第（1）列第（4）列互换}]{\text{第（1）行与第（4）行互换}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第（1）列*（-1）+第（2）列}]{\text{第（1）行*（-1）+第（2）行}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第（2）列*（-1）+第（4）列}]{\text{第（2）行*（-1）+第（4）行}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{互换第（2）列第（3）列}]{\text{互换第（2）行第（3）行}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$f_{(x_1,x_2,x_3,x_4)}=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2+\frac{1}{2}y_4^2$$

坐标变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

（4）

配方法

$$f=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

$$=\left(x_1+5x_2+5x_4-x_3\right)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{5}{2}x_4\right)^2+\frac{1}{2}\left(x_3+x_4\right)^2+3x_4^2$$

$\therefore$坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 5x_2 + 5x_4 - x_3 \\ y_2 = x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 + \dfrac{5}{2}x_4 \\ y_3 = x_3 + x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \\ x_2 = y_2 - \dfrac{3}{2}y_3 + y_4 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$f = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + 3y_4^{x}$$

矩阵合同法

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第（1）列*（-2）+第（2）列} \\ \text{第（1）列*（-2）+第（3）列} \\ \text{第（1）列*（-1）+第（x）列}}]{\substack{\text{第（2）行*（−2）+第（2）行} \\ \text{第（1）行*（−2）+第（3）行} \\ \text{第（1）行*（−1）+第（x）行}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第（2）列*（}\frac{-3}{2}\text{）+第（3）列} \\ \text{第（2）列*（}\frac{-1}{2}\text{）+第（4）列}}]{\substack{\text{第（2）行*（}\frac{-3}{2}\text{）+第（3）行} \\ \text{第（2）行*（}\frac{-1}{2}\text{）+第（4）行}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第（3）列*（-1）+第（4）列}]{\text{第（3）行*（−1）+第（4）行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第（4）列*（}\frac{1}{6}\text{）+第（3）列} \\ \text{第（4）列*（}\frac{1}{3}\text{）+第（2）列} \\ \text{第（4）列*（}\frac{1}{3}\text{）+第（1）列}}]{\substack{\text{第（4）行*（}\frac{1}{6}\text{）+第（3）行} \\ \text{第（4）行*（}\frac{1}{3}\text{）+第（2）行} \\ \text{第（4）行*（}\frac{1}{3}\text{）+第（1）行}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第（3）列*6+第（2）列} \\ \text{第（3）列*（-4）+第（1）列}}]{\substack{\text{第（3）行*6+第（2）行} \\ \text{第（3）行*（-4）+第（-4）行}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -\frac{19}{3} & -\frac{26}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ -3 & \frac{14}{3} & \frac{5}{6} & -1 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第（2）列+第（3）列}]{\text{第（2）行+第（3）行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & -\frac{26}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{14}{3} & \frac{5}{6} & -1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + 3y_4^2$$

坐标变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & -\frac{26}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{14}{3} & \frac{5}{6} & -1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

1.（5）f=$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$

配方：此二次型中无平方项，利用平方差公式先作坐标变换

$x_1=y_1+y_2$ ， $x_2=y_1-y_2$ ， $x_3=y_3$ ， $x_4=y_4$

有：f=$y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_4+y_1y_3-y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4+y_3y_4$

$=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_1y_4+y_3y_4$

$=y_1^2+2y_1(y_3+y_4)+(y_3+y_4)^2-(y_3+y_4)^2-y_2^2+y_3y_4$

$=(y_1+y_3+y_4)^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2-2y_3y_4+y_3y_4$

$=(y_1+y_3+y_4)^2-y_2^2-y_3^2-y_3y_4-y_4^2$

$=(y_1+y_2+y_4)^2-y_2^2-y_3^2-y_3y_4-\frac{y_4^2}{4}+\frac{y_4^2}{4}-y_4^2$

$=(y_1+y_2+y_4)^2-y_2^2-(y_3+\frac{y_4}{2})^2-\frac{3}{4}y_4^2$

令 $X_1=y_1+y_2+y_4$ ， $X_2=y_2$ ， $X_3=y_3+\frac{y_4}{2}$ ， $X_4=\frac{\sqrt{3}}{2}y_4$

则 f=$X_1^2-X_2^2-X_3^2-X_4^2$

$\therefore$ 用的坐标变换为：$\begin{cases} X_1=y_1+y_2=X_1-X_2-\frac{2\sqrt{3}}{3}X_4+X_3 \\ X_2=y_1-y_2=X_1-X_2-X_3-\frac{2\sqrt{3}}{3}X_4 \\ X_3=y_3=X_3-\frac{\sqrt{3}}{3}X_4 \\ X_4=y_4=\frac{2\sqrt{3}}{3}X_4 \end{cases}$

（5）f=$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$

合同矩阵法：

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第（4）列}*(-1)+\text{第（i）列} \\ i=1,2,3}]{\substack{\text{第（4）行}*(-1)+\text{第（i）行} \\ i=1,2,3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第（i）列}+\text{第（4）列} \\ i=1,2,3}]{\substack{\text{第（i）行}+\text{第（4）行} \\ i=1,2,3}}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第（4）列}*(-\frac{1}{3})+\text{第（i）列} \\ i=1,2,3}]{\substack{\text{第（4）行}*(-\frac{1}{3})+\text{第（i）行} \\ i=1,2,3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ f=$-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2+\frac{3}{2}y_4^2$

坐标变换：

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

（6）配方法 f=$X_1X_{2n}+X_2X_{2n-1}+\cdots\cdots+X_nX_{n+1}$

令 $X_1=y_1+y_{2n}$ $X_{2n}=y_1-y_{2n}$

$X_2=y_2+y_{2n-1}$ $X_{2n-1}=y_2-y_{2n-1}$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$X_n=y_n+y_{n+1} \quad X_{n+1}=y_n-y_{n+1}$

$\therefore f=y_{12}-y_{2n}^2+y_2^2-y_{2n-1}^2\cdots\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2$

$\therefore$ 坐标变换 $\begin{cases} X_1=y_1+y_{2n} & X_{2n}=y_1-y_{2n} \\ X_2=y_2+y_{2n-1} & X_{2n-1}=y_2-y_{2n} \quad \backslash \\ \vdots & \vdots \\ X_n=y_n+y_{n+1} & X_{n+1}=y_n-y_{n+1} \end{cases}$

2、证明：秩为1的对称矩阵中所有非零元素应在对角线上，而且有且只有一个非零元素

假设秩为r的对称矩阵中非零元素只在对角线上，

即有r个非零常数.

可表示为$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \bigcirc \\ & a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_r & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \bigcirc & \\ \bigcirc & & & & & & \bigcirc \end{pmatrix}$

它就等于$\begin{pmatrix} a_1 & & & \bigcirc \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ \bigcirc & & & \bigcirc \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bigcirc & & & \bigcirc \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ \bigcirc & & & \bigcirc \end{pmatrix}+\cdots\begin{pmatrix} \bigcirc & & & \bigcirc \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ & & & \ddots \\ \bigcirc & & & \bigcirc \end{pmatrix}$,即证.

3、证明：令$y_1=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$，$y_2=\sum_{i=1}^{n}b_jx_j$，

（1）若$\dfrac{b_j}{a_i}=k, i=1,2,\cdots n.$

则$y_2=ky_1$, $\therefore f=y_1\cdot y_2=ky_1^2$, $\therefore f$的秩为1.

（2）若a_i与b_j不全对应成比例，即不是所有的k，使$b_j=ka_i$，$f=y_1\cdot y_2$

$y_1\cdot y_2$中所包含的项数都为n，只是对应项的系数可能不同.

$\therefore$一定可以找到，$z_1=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$, $z_2=\sum_{i=1}^{n}d_ix_i$

使得$\begin{cases} y_1=z_1+z_2 \\ y_2=z_1-z_2 \end{cases}$成立.

$\therefore f=y_1\cdot y_2=(z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_1^2-z_2^2$，即f的秩为2，符号差为0.

反之，（1）若f的秩为1，$f=x'Ax=ky_1^2=y_1\cdot ky_1$

令$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n$

令$b_i=ka_i$

$\therefore f=(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(k\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)$，即能分解成两个一次多项式的积.

（2）若r=2，符号差为0，

即$f=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$

y_1, y_2都为项数为n，系数不定.

可令$\begin{cases} y_1+y_2=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n \\ y_1-y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots b_nx_n \end{cases}$

$\therefore f=(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(\sum_{j=1}^{n}b_jx_j)$，即证.

4.(1)必要性。证明：假设 A 为三阶矩阵，又因为 A 为反称矩阵，$A=-A^T$

设A= $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & a \\ -c & -a & 0 \end{pmatrix}$

$$X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & a \\ -c & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} bx_2 + cx_3 \\ -bx_1 + ax_3 \\ -cx_1 + -ax_2 \end{pmatrix} = 0$$

充分性。证明：设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

因为 x_1, x_2, x_3 为任意值

所以 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, a_{12} + a_{21} = 0, a_{13} + a_{31} = 0, a_{23} + a_{32} = 0$

满足 $A = -A^T$ $\therefore A$ 为反称矩阵

（2） 证明：因为 A 为对称矩阵

设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ b & a_2 & d \\ c & d & a_3 \end{pmatrix}$

则 $X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ b & a_2 & d \\ c & d & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 + 2dx_2x_3 = 0$

因为 x_1, x_2, x_3 为任意值

所以 $a_1 = a_2 = a_3 = b = c = d = 0$

所以 $A = 0$

5.证明：由定理 1 和定理 2，得

此二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

必可化成标准形

$$f = d_1z_1^2 + d_2z_2^2 + d_3z_3^2 + \quad + d_rz_r^2$$

其中 r 指此二次型的秩而由题意可知 r=k+L，即标准型中有 k 个正平方项，L 个负平方项。所以这个二次型通过坐标变换刻化成

$$f = a_1y_1^2 + ... + a_ky_k^2 + b_1y_{k+1}^2 + \quad + b_Ly_{k+L}^2$$

6.解（1）

$$A=\begin{pmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{pmatrix}$$

其中 a_{11}=-5

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&2\\2&-6\end{vmatrix}=30-4=26$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&0&-4\\2&-6&0\\-5&2&2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&0&-4\\0&-6&4\\0&2&-8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&0&-4\\0&0&-20\\0&2&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&4\\0&2&-8\\0&0&-20\end{vmatrix}$$

$$=2\times2\times(-20)=-80$$

所以此二次型是负定二次型

（2）由 f 的表达式得

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0&2\\3&1&-2&1\\0&-2&14&2\\2&1&2&7\end{pmatrix}\qquad a_{11}=1$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}=1-9=-8$$

显然即不符合正定的条件 也不符合负定的条件，所以此二次型既不是正定二次型，也不是负定二次型。

（3）由 f 的表达式，得

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}\quad a_{11}=1\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&2\end{vmatrix}=2-4=-2$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&-2&-2\\0&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&0&-5\\0&-2&3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&-2&3\\0&0&-5\end{vmatrix}=-1\times(-2)\times(-5)=-10$$

所以此二定型既不是正定二次型，也不是负定二次型。

（4）由 f 的表达式得

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad a_{11}=1 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

任意的 n 次行列式均等于 1　所以此二次型是正定二次型。

7．解：由题，得

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

要是此二次型为正定二次型，

则λ　　$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)+(1+\lambda)(1-\lambda) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)(2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$=(1+\lambda)^2(\lambda-2)$

所以 $f(x,y,z,w)$ 是正定；

当 2 时，①：1

所以既不是正定，也不是负定；

②：0　$(1+\lambda)^2(\lambda-2)$

既不是正定 ，也不是负定

③：-1

既不是正定，也不是负定

④：$\lambda\le-1$时，

既不是正定，也不是负定。

综上所述，

第 8 题

（1） 证明：①充分条件

若 A 为正定矩形，则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^T AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i$$

$$设\ \theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \\ & & \ldots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

$$\theta^T \Lambda \theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \\ & & \ldots. & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \\ & & \ldots. & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

=E=$\theta^T \left(P^T AP\right)\theta = \theta^T P^T AP\theta = \left(P\theta\right)^T A\left(P\theta\right)$

令 $P\theta = C$ $\quad \therefore C^T AC = E$ $\quad \therefore$ A 正定，可推出合同于单位矩阵 E

②必要条件，即证明 A 合同于 E，则 A 正定

因为 A 合同于 E

即 $A = C^T EC = C^T C$，则对于非零向量

$$X^T AX = X^T C^T CX = \left(CX\right)^T \left(CX\right)$$

设 $CX = \theta$ 因为 C 可逆 所以 θ 所以 $\theta^T\theta$

（2）证明：

）

因为 A 正定

所以 A 合同于单位阵 E，即 $A = P^T EP = P^T P.$

此处 P 为可逆矩阵

所以得 $P^T P$

证明：

设 $A^T = A$　令 $Y = PX$

$$f = X^T AX = X^T P^T PX = \left(PX\right)^T PX = Y^T Y$$

$\therefore f$ 是正定二次型，A 是正定矩阵

（3） 证明：因为 A 正定，且存在可逆矩阵 P

使得 $P^T AP = A$

因为 A 是实对称矩阵 $P^T AP = A$

所以 A^{-1} 也是转置矩阵

因为 A 正定，其特征值 A^{-1}

所以 A 正定. 其特征值 $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$

所以 A^{-1} 也是正定的

（4）证明：

$$\left|\mathrm{B}_k\right| = \begin{vmatrix} b_1{}^2 a_{11} & b_1 b_2 a_{12} & \dots & b_1 b_k a_{1n} \\ b_2 b_1 a_{21} & b_2{}^2 a_{22} & \dots & b_2 b_k a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_k b_1 a_{n1} & b_k b_2 a_{n2} & \dots & b_k b_k a_{nn} \end{vmatrix} = b_1{}^2 b_2{}^2 \dots b_k{}^2 \left|A_k\right|$$

根据，正定矩阵 A 的 k 阶顺序主子式

所以 $\left|B_k\right|$

所以 B_k 是正定的

（5）证明：A，B 是同阶正定矩阵

$X^T\left(A+B\right)X = X^T AX + X^T BX$　　　因为 $X^T AX$

所以 $X^T (A+B)X$

所以 A+B 是正定的

9 非常抱歉，实在不会做，没做出来

10 以第（1）题为例，其详细步骤后面相同

① 先求特征根 $\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

解得 $(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$

特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$

当 $\lambda_1=-1$ 时 $E-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 解得

要是此二次型为正定二次型，

则 λ $\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1$

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\\\lambda&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\0&-1-\lambda&\lambda+1\\0&1-\lambda&1+\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\0&-1-\lambda&\lambda+1\\0&0&(1+\lambda)+(1+\lambda)(1-\lambda)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\0&-1-\lambda&\lambda+1\\0&0&(1+\lambda)(2-\lambda)\end{vmatrix}$$

$=(1+\lambda)^2(\lambda-2)$

所以 $f(x,y,z,w)$ 是正定；

当 2 时，①：1
所以既不是正定，也不是负定；

②：0 $(1+\lambda)^2(\lambda-2)$

既不是正定 ，也不是负定
③：-1
既不是正定，也不是负定
④：$\lambda\le-1$ 时，
既不是正定，也不是负定。
综上所述，
。

② 先求特征根 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=0$

解得 $(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$

特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$

当$\lambda_1=-1$时　$E-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$　解得

得基础解系$x_3=(-1,-1,1,1)$

将其单位化$\varepsilon_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

对于$\lambda_4=-3$　解齐次线性方程组

$$(-3E-A)=\begin{pmatrix}-4&1&-3&2\\1&-4&2&-3\\-3&2&-4&1\\2&-3&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

得基础解系$x_4=(1,-1,-1,1)$

将其单位化$\varepsilon_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

④写出ε_1，ε_2，ε_3，ε_4为列的正交矩阵对应的正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

则此变换下二次型的标准型为

$$f={y_1}^2+7{y_2}^2-{y_3}^2-3{y_4}^2$$

12 证明

必要性：因为 A 正交相似于 B

所以∃正交矩阵 M，使得$M^{-1}AM=B$

$$\phi_B=|\lambda E-B|=|\lambda E-M^{-1}AM|$$

$$=|\lambda M^{-1}EM-M^{-1}AM|=|M^{-1}||\lambda E-A||M|$$

$$=|\lambda E-A|=\phi_A$$

即 A，B 的特征多项式相同

所以 A，B 的特征多项式的根全部相同且每个根的重数也相同。

充分性：因为 A,B 的特征多项式的根全部相同，且每一个根的重数也相同，且 A，B 为对称矩阵.所以必存在正交矩阵 P，Q 使

$$P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=Q^TBQ$$

所以$B=\left(Q^T\right)^{-1}P^TAPQ^{-1}=\left(PQ^{-1}\right)^TA\left(PQ^{-1}\right)$

因为P,Q为正交矩阵

$\left(Q^{-1}\right)^TQ^{-1}=\left(Q^T\right)^{-1}Q^{-1}=\left(QQ^T\right)^{-1}=E$

所以Q^{-1}为正交矩阵

令$M=PQ^{-1}$

所以$\left(PQ^{-1}\right)\left(PQ^{-1}\right)=\left(Q^{-1}\right)^TP^TP^TQ^{-1}=E$

所以PQ^{-1}为正交矩阵

令M=PQ^{-1}

所以B=$M^TAM=M^{-1}AM$

所以A正交相似于B

13.证明：因为A为正交矩阵

所以存在可逆矩阵P_1，使得$P_1^TAP_1=E$

因为$B_1=P_1^TBP_1$仍为对称矩阵

所以一定存在正交矩阵Q，使得

$$Q^TB_1Q=Q^TP_1^TBP_1Q=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=D$$

即$\left(P_1Q\right)^TB\left(P_1Q\right)$对角化

所以$\left(P_1Q\right)^TA\left(P_1Q\right)=Q^TP_1AP_1Q=Q^TQ=E$

故取$P=P_1Q$为可逆矩阵，使P^TAT和P^TBP为可逆矩阵，使P^TAP和P^TBP同时成为对角形矩阵。