第一篇　力　学

**力学的分类：

1、经典力学：研究弱引力场中宏观物体的低速运动。

2、狭义相对论力学：研究宏观高速物体的运动。

3、广义相对论力学：研究强引力场中物体的运动。

4、量子力学：研究微观物体的运动。

主要讨论经典力学，适当了解狭义相对论力学。

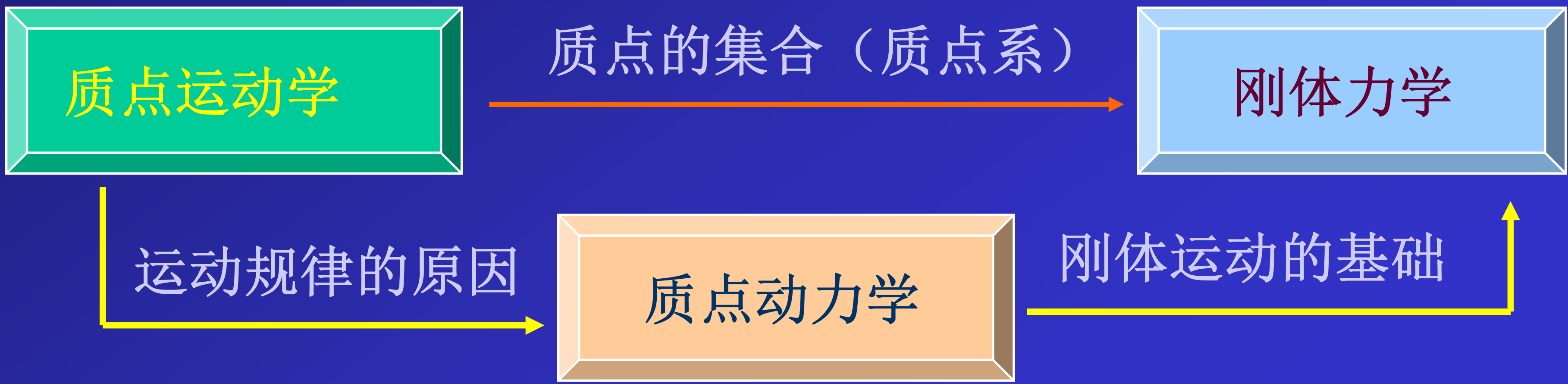
经典力学 —— 主要研究物体机械运动的现象与动力学规律

- 机械运动 —— 物体相对于其他物体的位置随时间发生变化，或物体内部的各个部分的相对位置随时间发生变化

  物质运动最基本、最简单的运动形式

如：车辆的行驶，河水的流动，天体的运行等。

- 力学是物理学和许多工程技术学科的基础



•学习要求：

掌握物理学中的基本概念、基本原理及基本方法，提高分析问题、解决问题的能力。

重点：牛顿三大运动定律，动量定理、功能原理、角动量定理。

牛顿三大运动定律的适用范围：研究低速宏观物体的运动。

动量定理、能量守恒、角动量定理无论是在经典力学、相对论力学、量子力学都是普适的。

第一章 质点的运动

重点：

1. 模型： 质点、质点系

2. 概念： 位矢、位移、速度、加速度；

角位置、角位移、角速度、角加速度；

惯性系、非惯性系；

3. 计算： 运动学的两类基本问题：微分，积分

难点： 相对运动

1-1 质点 参考系 运动方程

- 对复杂的运动进行抽象→提出物理模型→物体运动的基本规律。

1、 质点与质点系

理想模型

- 质点：
  - 无大小与形状的空间几何点 P
  - 具有一定的质量 m
- 质点系 —— 若干质点的集合

→ 对实际物体的有条件的和合理的抽象

质点：具有质量而没有大小和形状的理想物体，称做质点。

＊ 质点是理想模型，任何物体都有一定的形状和大小，如电子是有结构的。物体是否可看作质点，不能单纯看它的大小，而应根据具体情况而定。

如：地球绕太阳公转：地球半径： $6.4\times10^{6}m$

日地距离：$1.50\times10^{11}m \Rightarrow$ 地球可看作质点。

地球自转：不能将地球看作质点。

2、参考系和坐标系

运动是绝对的，运动的描述是相对的。

参考系 —— 为了（定性）描述一个物体的运动而选定的另一个作为参考的物体，叫参考系

* 运动学中，参考系的选择是任意的。任何实物物体均可被选作参考系；但场一般不用做参考系，场虽然是物质存在的一种形式， 但它不是具体的实物物体。

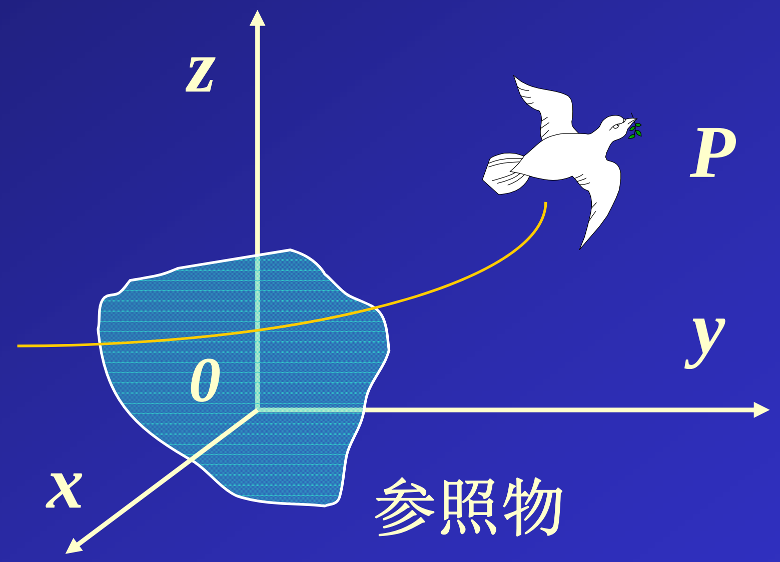
* 运动描述的相对性——参考系不同，对同一物体的运动的描述不同。

* 惯性系和非惯性系

我们把牛顿第一定律在其中成立的参考系叫做惯性系，

牛顿第一定律在其中不成立的参考系叫做非惯性系。

坐标系 —— 为了把物体在各个时刻相对于参考系的位置定量地描述出来，需要在选定的参考系上建立的带有标尺的数学坐标，简称坐标系。坐标系是固结于参考系上的一个数学抽象。



力学中常见的坐标系：直角坐标系；自然坐标系；极坐标系；球坐标系；柱坐标系。

3. 空间和时间

经典力学认为：

空间和时间是绝对的，不依赖于物质的独立的客观存在。

- 宇宙尺度：10^{26}m；微观粒子尺度：10^{-15}m
- 宇宙年龄：10^{18}s；微观粒子寿命：10^{-24}s
- 空间长度$<10^{-35}$m（普朗克长度），时间间隔$<10^{-43}$s（普朗克时间）→现有时空概念可能要改写。

4. 运动方程

- 运动方程：

  位置矢量与时间的关系，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$。具体形式与参照系有关。

  直角坐标系：$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$，

轨迹方程 $x = f(y, z)$

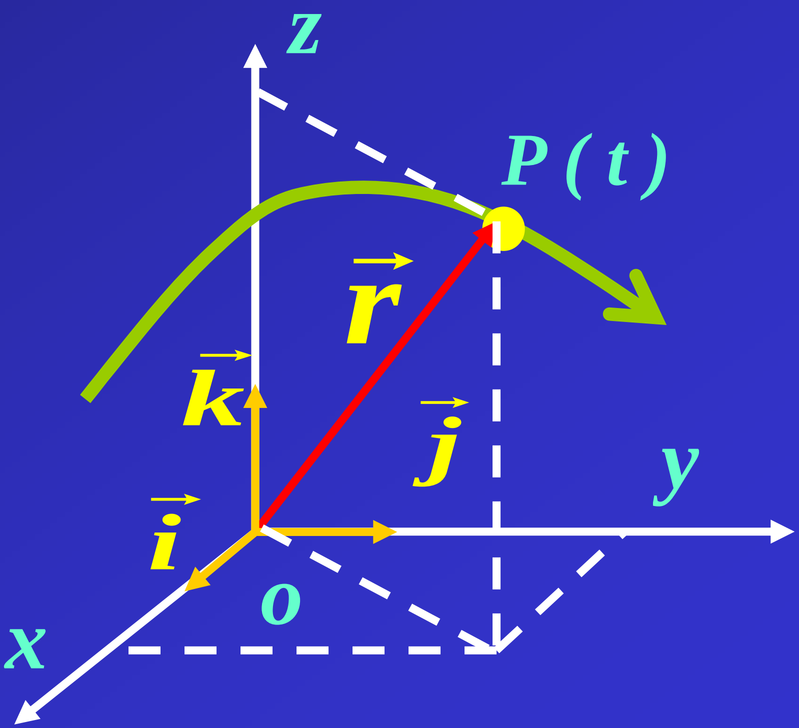
1-2 位移 速度 加速度

1. 位矢

位矢：从原点O指向质点位置P 的有向线段 $\vec{r}$, 具体形式与参照系有关。

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

$$\begin{cases} |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{r}|} \quad \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{r}|} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

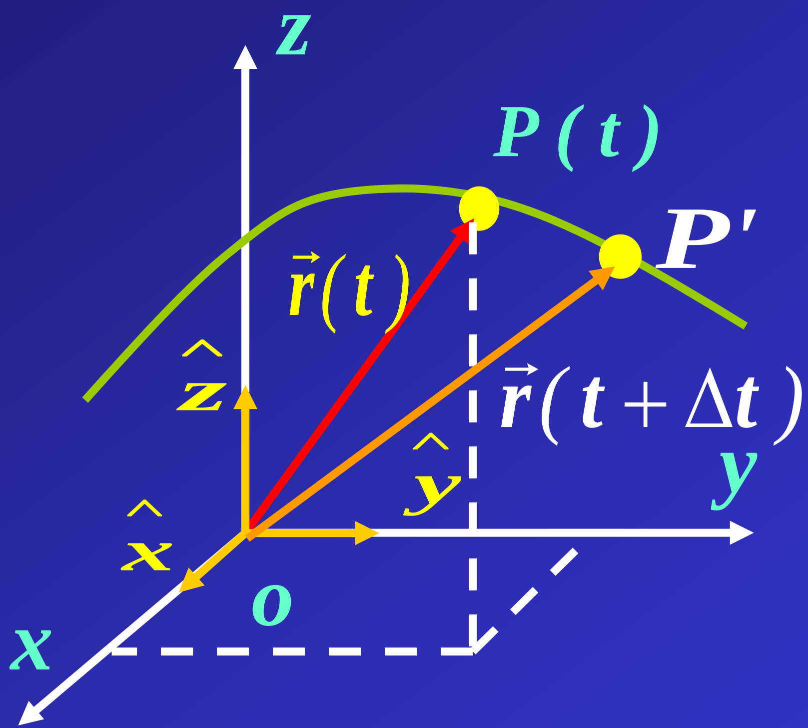


直角坐标系

运动学方程

时刻 1：$\vec{r} = \vec{r}(t)$

时刻 2：$\vec{r}\,' = \vec{r}(t+\Delta t)$



直角坐标系中：

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

物理意义

- 准确描述物体运动状态
- 运动叠加（或合成）原理
- 确定物体的运动轨迹 —— 轨迹方程

例：已知，$x = R\cos\omega t, y = R\sin\omega t$，求轨迹方程

解：$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

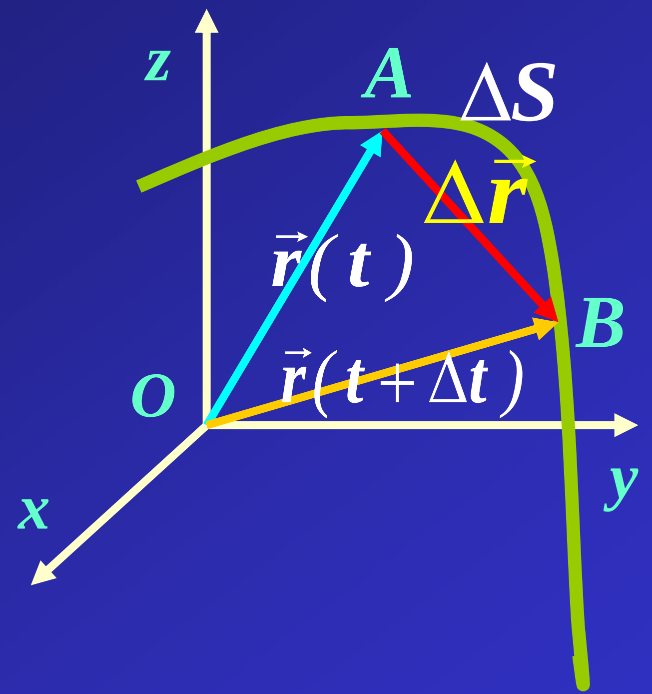
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = R$$

物体做平面圆周运动

2　位移矢量　$\Delta\vec{r}$

质点由起点A到终点B的有向线段

$$\boxed{AB = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}}$$



- 位移反映了物体运动中位置（距离与方位）的变化

- 几点讨论：

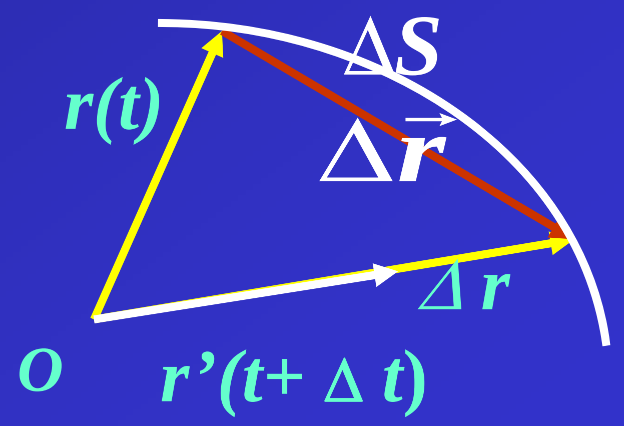
1 位移是矢量（有大小，有方向）　$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$

2 直角坐标系中

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

3 位移与参照系位置的变化无关

4 $|\Delta\vec{r}|$ 与 Δr 的区别



二维平面运动情形

1.运算: $\boxed{\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A}$

$$\boldsymbol{r}_A = x_A \boldsymbol{i} + y_A \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{r}_B = x_B \boldsymbol{i} + y_B \boldsymbol{j}$$

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$

$$= (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j}$$

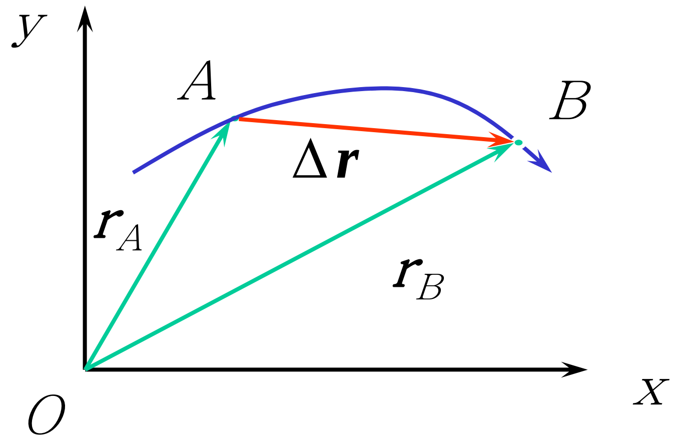
$$= \Delta x \boldsymbol{i} + \Delta y \boldsymbol{j}$$

2.单位：米，m

3.大小： $\boxed{\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

4.方向：从起点指向终点。

注意



1.位矢与位移的区别：

方向
- 位矢为从坐标原点指向质点所在位置的有向线段；
- 位移为从起点指向终点的有向线段。

时间
- 位矢与某一时刻对应；
- 位移与某一段时间对应。

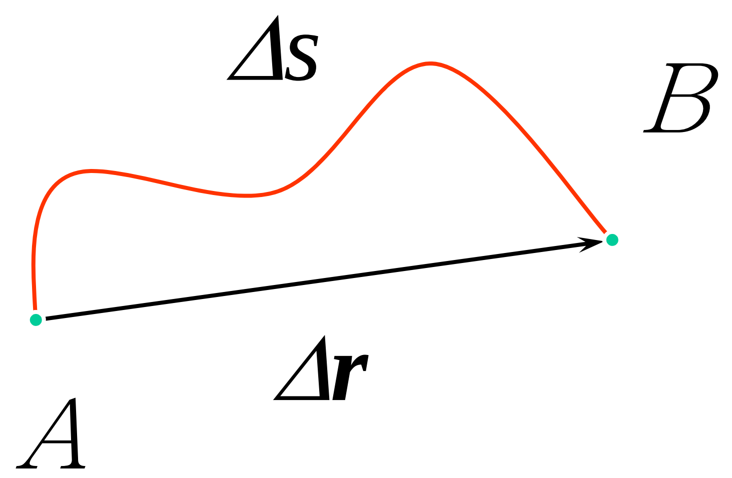
2.位移与路程的区别：

路程： Δs

为物体经过路径总的长度，为标量；

位移： $\Delta \boldsymbol{r}$

从起点指向终点的有向线段，为矢量。



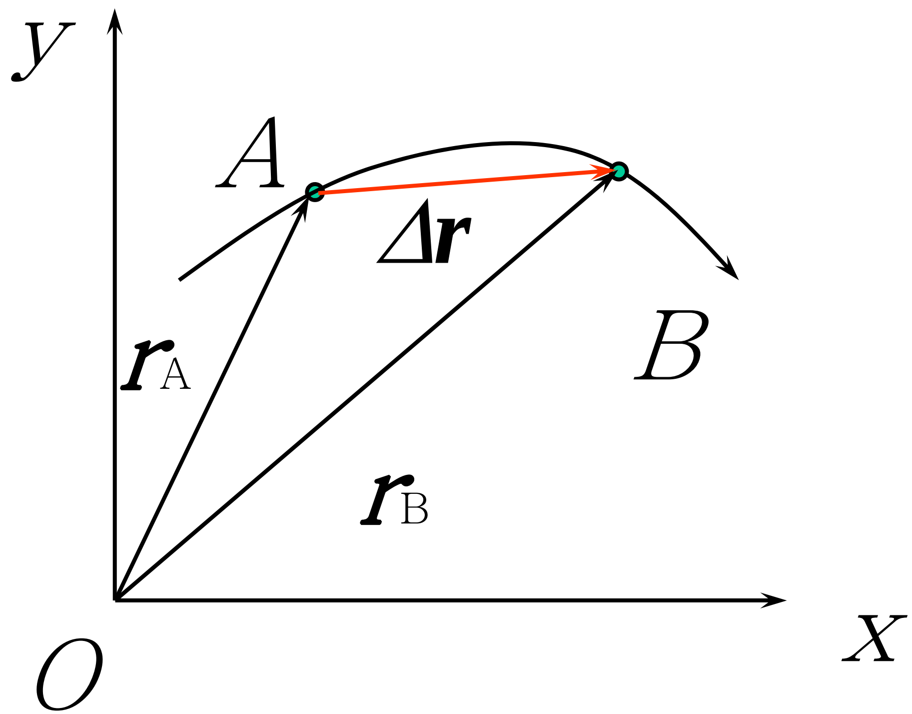
三、速度 v

1. 描写物体运动快慢和方向的物理量。

2.平均速度

定义：$\boxed{\bar{\mathbf{v}} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}}$

物体的位移与发生这段位移所用的时间之比。



3.速度 $\boldsymbol{v}$

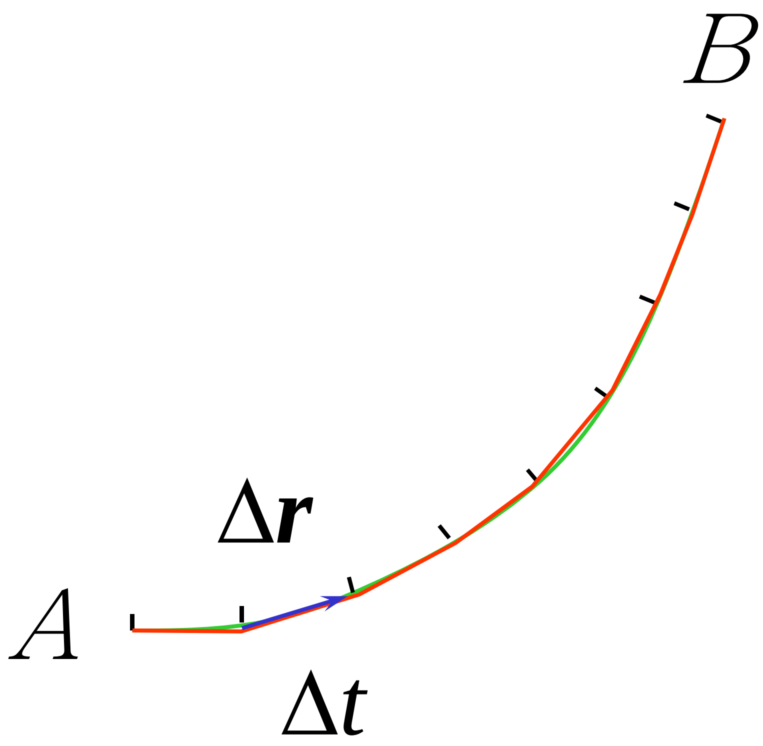
对于变速曲线运动的物体，速度大小与方向都在随时间改变，

①.无限分割路径；

②.以直代曲；

③以不变代变；用平均速度代替变速度；

④令 $\Delta t \to 0$ 取极限。



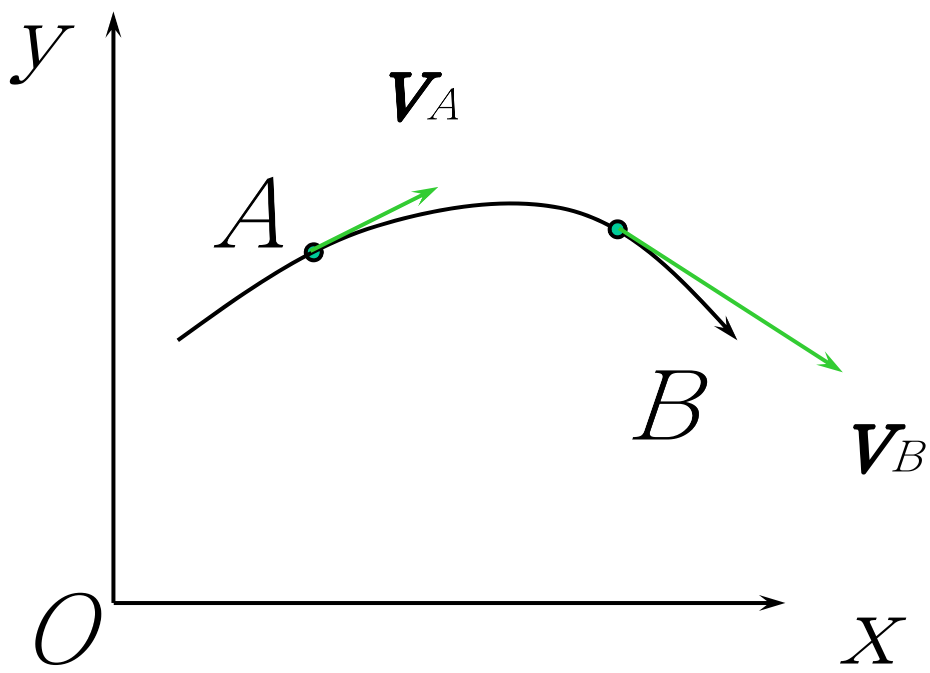
$$\boxed{\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}}$$

速度

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}$$

单位：米/秒，m/s

方向：沿运动轨迹的切线方向。



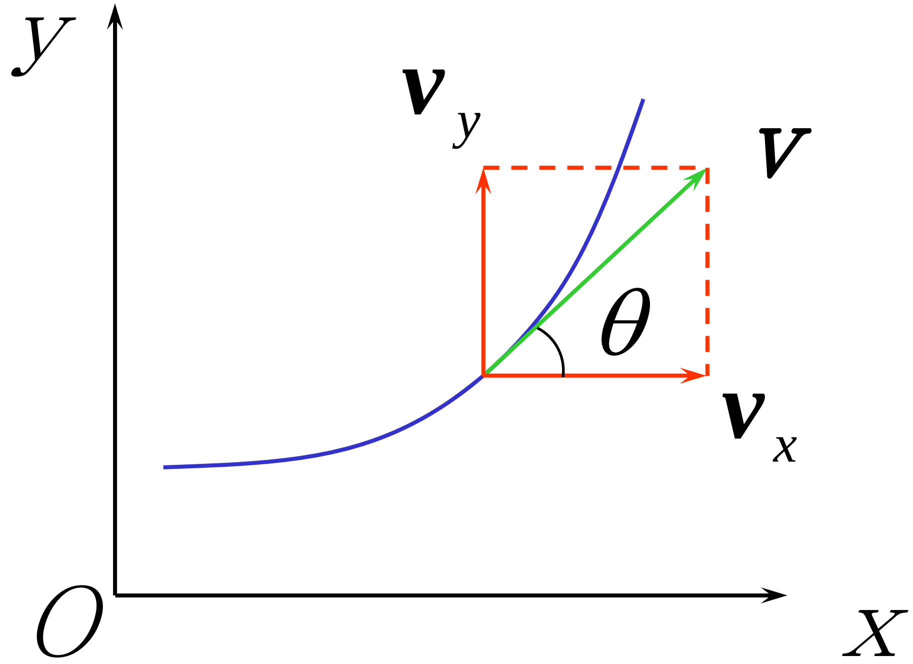
由于 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

则$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \dfrac{dy}{dt}\boldsymbol{j}$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

v_x、v_y 为速度在 x、y方向的分量。



大小：$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{v_y}{v_x}}$$

注意

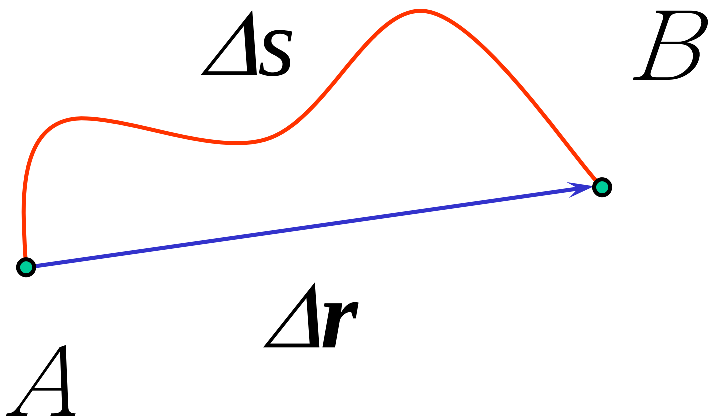
1.平均速度与平均速率的区别

•平均速度为物体发生的位移与时间之比；为矢量。

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

•平均速率为物体经过的路程与时间之比；为标量。

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



2. 速度与速率的区别

•速度为位矢r对时间的一次导数，为矢量：

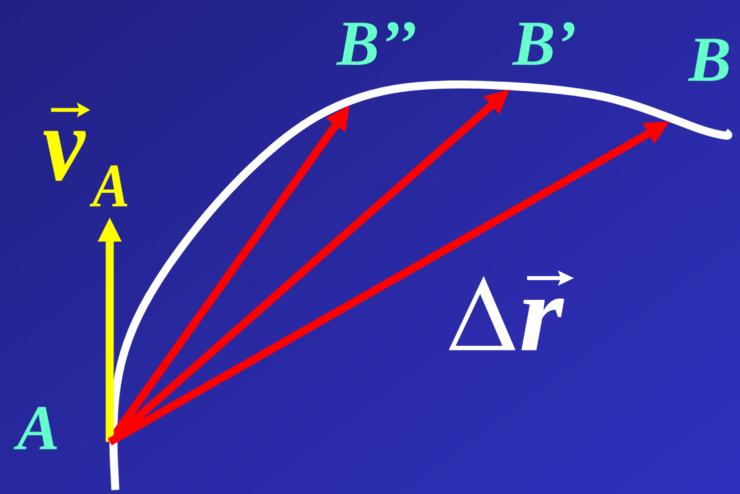
$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}$$

•速率为速度的大小，为标量：

$$v=|V|=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

瞬时速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

直角坐标系中：$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

讨论

- 速度的性质：矢量性，瞬时性，相对性
- 速度与速率的区别

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longleftrightarrow v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} \neq \frac{dr}{dt}$$

〔例1－2〕.讨论以下表达式的对错：

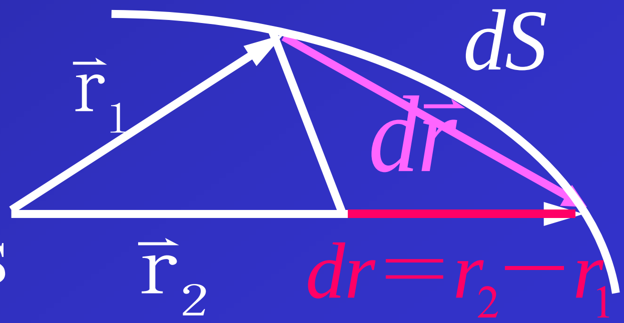
(1) $v=\frac{dr}{dt}$　(2) $|\Delta\vec{r}|=\Delta s$　(3) $|d\vec{r}|=ds$

(4) $\frac{|d\vec{r}|}{dt}=\frac{dr}{dt}$　(5) $|\vec{v}|=v=\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

分析： $|d\vec{r}|\neq dr$　$v=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\neq\frac{dr}{dt}$　（1）（4）错

$\Delta t\neq 0,\ |\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$（2）错

$\Delta t=dt\to 0$时，位移的大小与路程可视为相等，即：$|d\vec{r}|=ds$



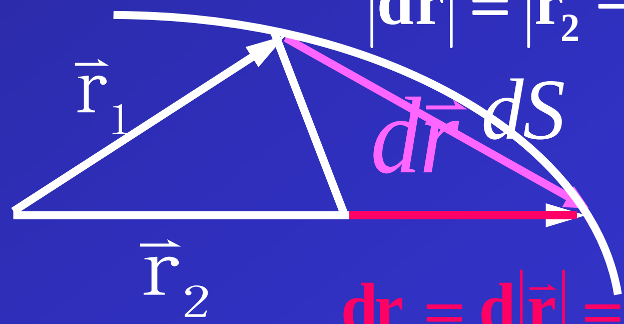
因而（3）正确，（5）正确

〔例1－3〕一运动质点在某瞬时处于 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度的大小为

$$(A)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\quad (B)\frac{d\vec{r}}{dt}\quad (C)\frac{dr}{dt}\quad (D)\frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

解： $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\neq v$ 故(B)错

$|d\vec{r}|=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|=ds$



$dr=d|\vec{r}|=|\vec{r}_2|-|\vec{r}_1|$

由图知

$$v=\frac{|d\vec{r}|}{dt}=\frac{ds}{dt}\neq\frac{dr}{dt}$$

故(C)、(D)错 (A)对。

〔例〕一质点在平面上作一般曲线运动，其瞬时速度为 $\vec{v}$，瞬时速率为 v，平均速度为 $\overline{\vec{v}}$，平均速率为 $\overline{v}$，它们之间必定有如下关系：

(A) $|\vec{v}| \neq v,\ |\overline{\vec{v}}| \neq \overline{v}$. (B) $|\vec{v}| = v,\ |\overline{\vec{v}}| \neq \overline{v}$.

(C) $|\vec{v}| = v,\ |\overline{\vec{v}}| = \overline{v}$. (D) $|\vec{v}| \neq v,\ |\overline{\vec{v}}| = \overline{v}$.

解：$\because \quad |\vec{V}| = V$

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\because \quad |\Delta \vec{r}| \neq \Delta s \qquad \therefore \quad |\overline{\vec{v}}| \neq \overline{v}$ 　　(B)对。

四、加速度a

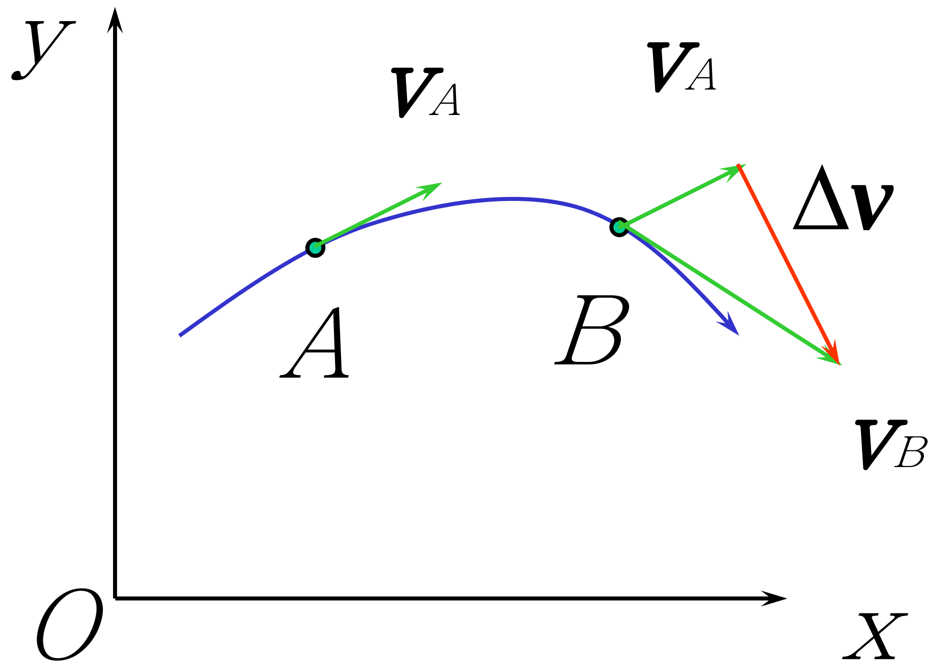
1.定义：描写质点速度变化快慢和方向的物理量。

在图中物体速度矢量满足关系为：

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \Delta\boldsymbol{v}$$

速度变化为

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$



2. 平均加速度：

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}}$$

用平均加速度描写物体的运动是不精确的，要想精确地描写物体的加速度，令 $\Delta t \rightarrow 0$ 取极限。

3.加速度

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}$$

加速度为速度对时间的一次导数。

由 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 可得 $\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}}$

单位：米/秒^2，m/s^2

4.二维分量式：由 $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j}}$$

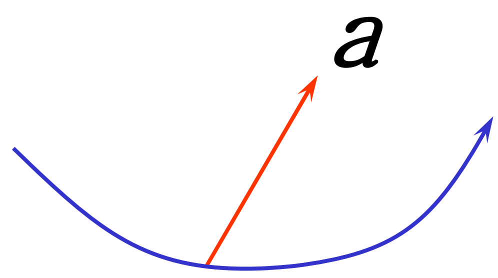
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

a_x、a_y为加速度在 x、y 方向的分量。

5.大小： $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

6.方向：　加速度方向为速度变化的方向，指向运动轨迹的凹的一侧。

注意



- 加速度是描写速度变化的物理量；
- 质点的速度大，加速度不一定大；
- 质点的加速度大，速度不一定大。

几点讨论:

- 加速度反映速度变化（大小和方向变化）的情况

*（1）瞬时加速度等于Δ t →0时，平均加速度的极限值，等于速度矢量对时间的一阶导数，位置矢量对时间的二阶导数;

（2）其方向为Δ t →0时速度增量的极限方向。

* 因为速度增量及其极限方向一般不同于速度的方向，因而加速度的方向一般与该时刻速度的方向不一致。

在曲线运动中，加速度方向总是指向轨道曲线凹的一边。

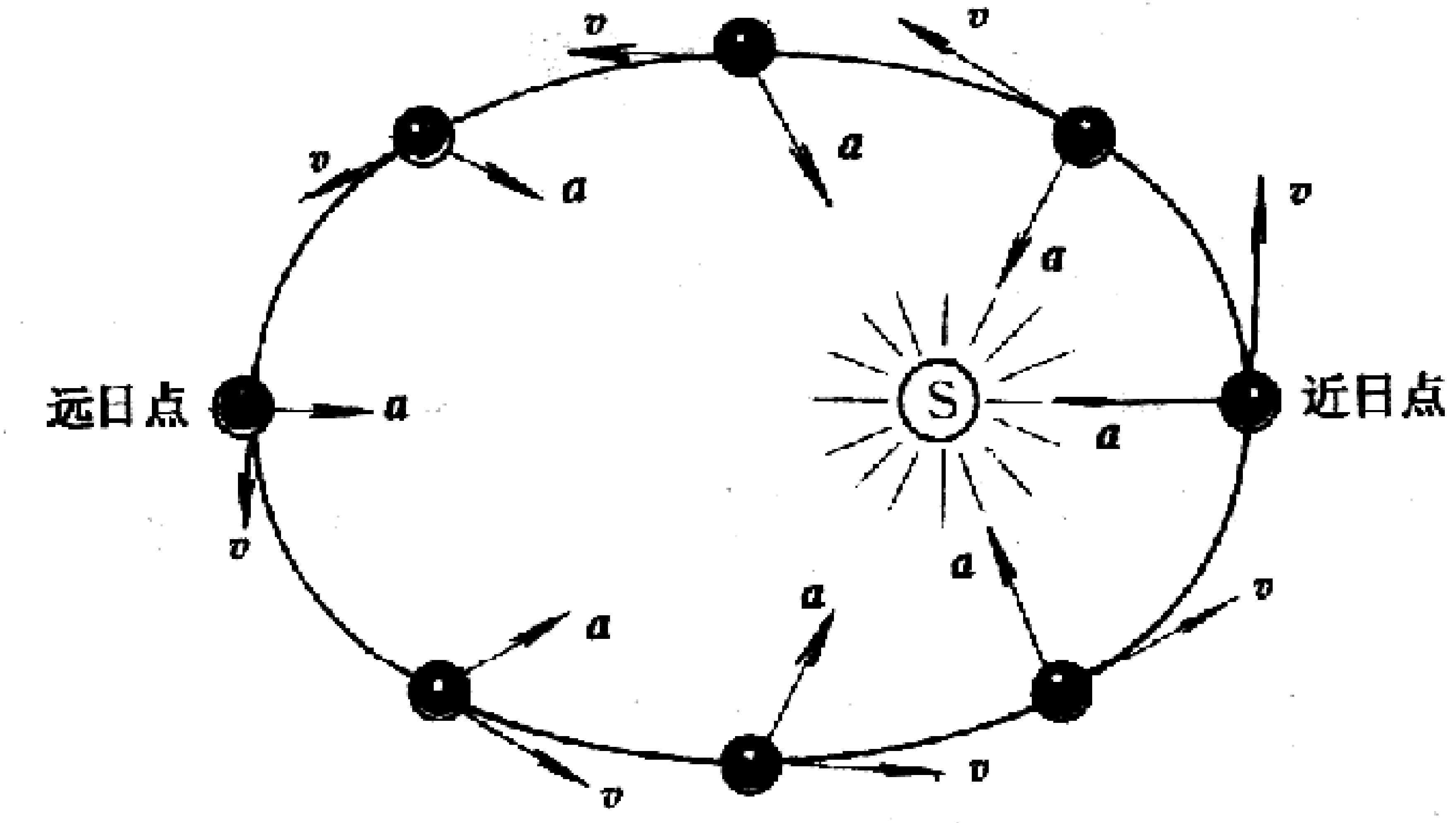


图 1-10　行星绕太阳运动时的加速度与速度的方向

5 质点运动规律的分析和研究方法

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(t), \vec{v} = \vec{v}(t) & \text{—— 描述运动状态的物理量} \\ \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}(t), \vec{a} = \vec{a}(t) & \text{—— 描述运动状态变化的物理量} \end{cases}$$

（一）质点运动学的两类问题

问题的提出：

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}(t)$$ （微分问题）

$$\vec{a} = \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{r}(t)$$ （积分问题）

例如：

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow \int dx = \int v_x dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x dt \Leftarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x dt$$

初始条件

（1）第一类（微分）问题：已知运动方程，求速度与加速度

例1　已知一质点的运动学方程为

$$x=\frac{v_{x_0}}{k}(1-e^{-kt})$$ 其中 v_{x_0}, k 为常数，求 v, a

解:

$$v_x=v=\frac{dx}{dt}=v_{x_0}e^{-kt}$$

$$a_x=a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=v_{x_0}(-ke^{-kt})=-kv$$

讨论: • 加速度为负值表征加速度与速度反方向

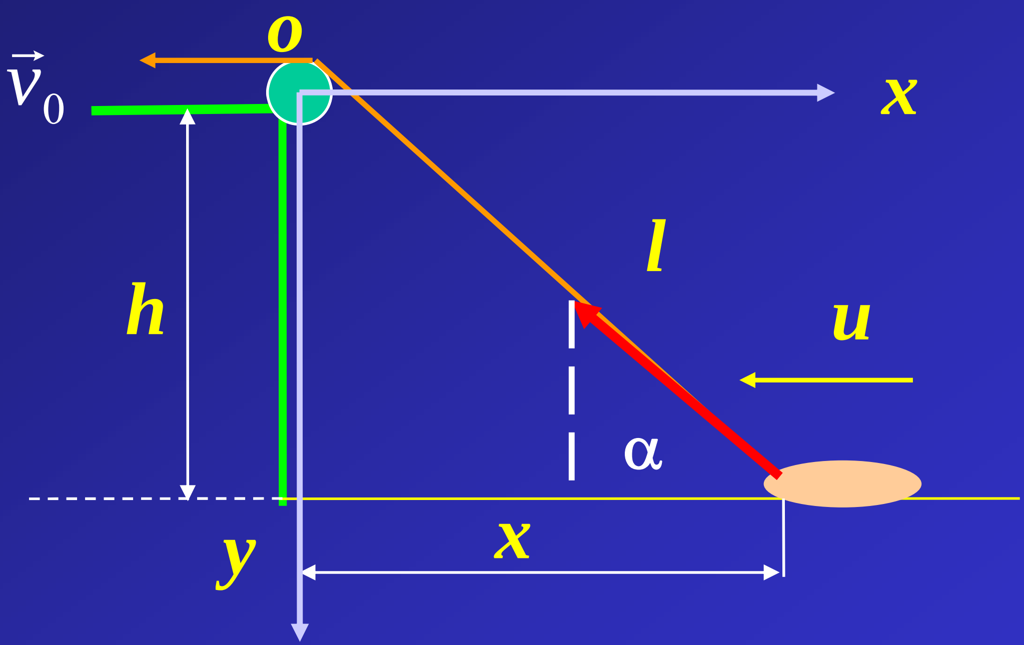
• 当 $t\Longrightarrow\infty, v_x\Longrightarrow 0, x\Longrightarrow\frac{v_{x_0}}{k}$

运动趋势是减速运动，直至静止

例2　题意如图所示　求：小船靠岸的速度和加速度

解：答案一

$$u = v_0 \cos\alpha \ ?$$



方法一　直角分量分析

建立一直角坐标系

$$t: x = \sqrt{l^2 - h^2}$$

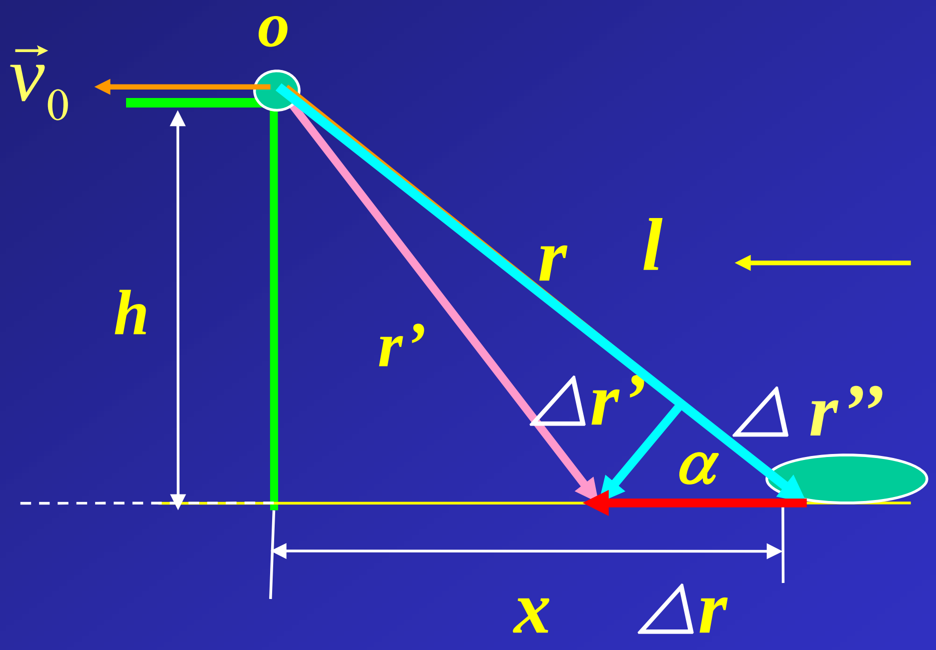
$$l = l(t), y = h = c$$ —— 运动学方程

$$u = v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \frac{dl}{dt} = \frac{l}{x} v_0 = \frac{v_0}{\cos\alpha}, v_y = \frac{dy}{dt} = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} = a_x = \frac{dv_x}{dt} = ?$$

方法二　矢量分析

解：取如图的坐标圆点，作小船(质点）的位置矢量图，确定位移矢量，再根据速度的定义求解



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' - \Delta\vec{r}\,''$$

$$u = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}\,''|}{\cos\alpha}\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_0}{\cos\alpha}$$

△r和△r”分别为直角三角形的斜边和邻边，满足余弦关系

（2）第二类（积分）问题 ：由a 和v 求解运动方程（初始条件）

以质点的匀加速直线运动为引子：

- **$v \sim t$ 关系**　$\because a = C, t = 0 \Rightarrow x = x_0, v = v_0$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt \Rightarrow v = v_0 + at$$

- **$x \sim t$ 关系**

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt = (v_0 + at)dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

- **$v \sim x$ 关系**　$\because a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

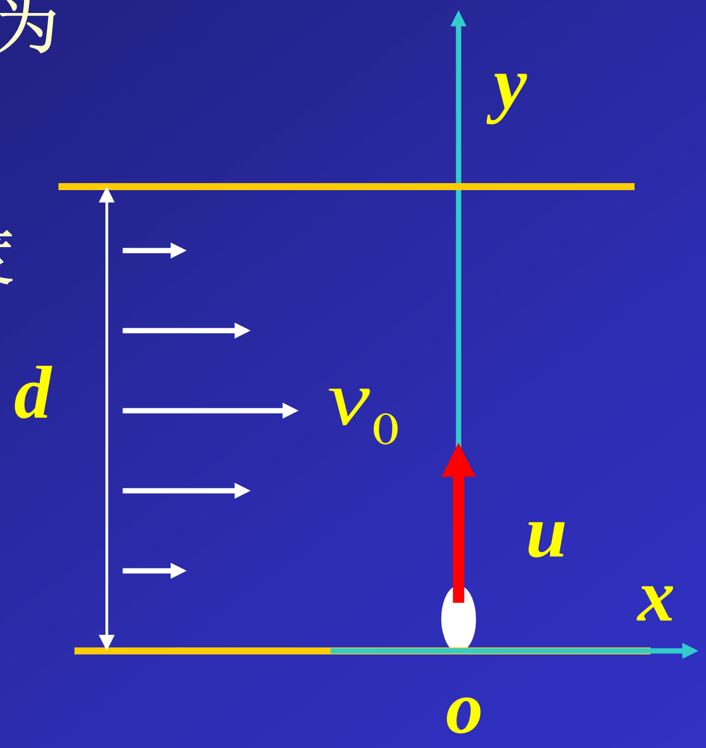
$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

例3 已知河宽为 d ,河水流速变化规律为

$$v = ky$$

中流速度最快为 v_0，小船以恒定速度 u垂直于流 水方向向对岸划去。

求：小船的运动 轨迹。



解：建立直角坐标系 根据题意

$$t = 0, x = y = 0, u_x = 0, u_y = u$$

$$\because v = ky \Rightarrow y = \frac{1}{2}d \Rightarrow v = v_0 \Rightarrow k = \frac{2v_0}{d} \Rightarrow v_x = ky = \frac{2v_0}{d}y$$

由速度定义可求

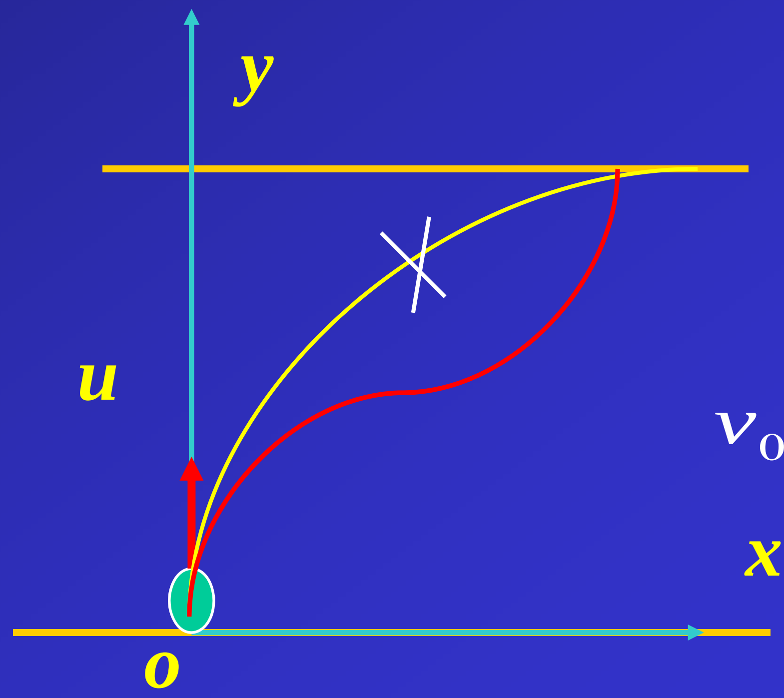
$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2v_0}{d}y} \Rightarrow x(t) \qquad \boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = u} \Rightarrow y(t)$$

$$dy = udt \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t udt \Rightarrow y = ut \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{2v_0}{d} y = \frac{2v_0}{d} ut$$

$$x = \frac{v_0 u}{d} t^2 \quad \Leftarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{2v_0}{d} utdt$$

小船的运动轨迹

$$\boxed{x = \frac{v_0 u^2 t^2}{ud} = \frac{v_0 y^2}{ud}}$$



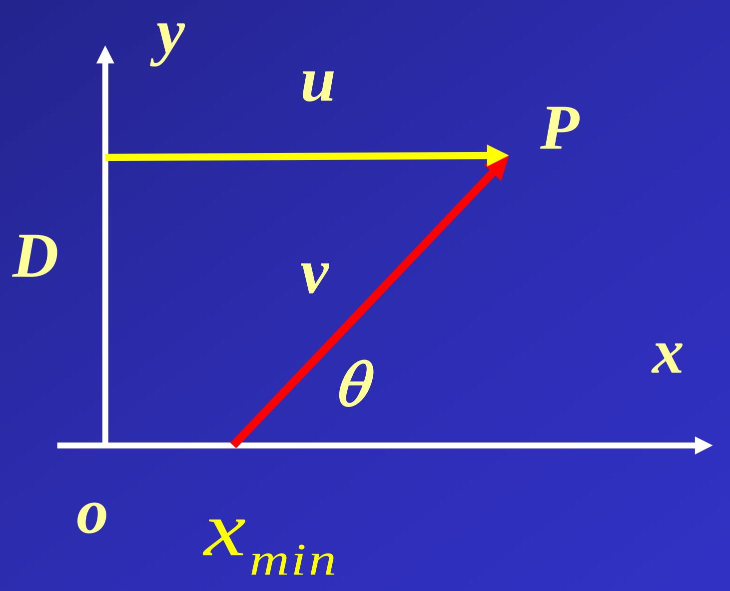
比较典型的运动学第二类问题

注意：

1、对实际问题建立数学模型

2、根据题意，建立初始条件

例4　一条船平行于平直的海岸线航行，离岸的距离为 D 速率为 u，一艘快艇从一港口出发去追击这条船，快艇应从哪一点出发恰好赶上？已知 $(u > v)$



解：即求 $x_{min} = ?$

u,v都是相对于地面，设θ:

有：$ut = x + vt\cos\theta$

$$D = vt\sin\theta \Rightarrow t = \frac{D}{v\sin\theta}$$

$$\frac{uD}{v\sin\theta} = x + v\frac{D}{v\sin\theta}\cos\theta \Rightarrow x = \frac{D(u - v\cos\theta)}{v\sin\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{D}{v}\frac{v\sin^2\theta - (u - v\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0$$　由此得到

$$v = u\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{v}{u}$$

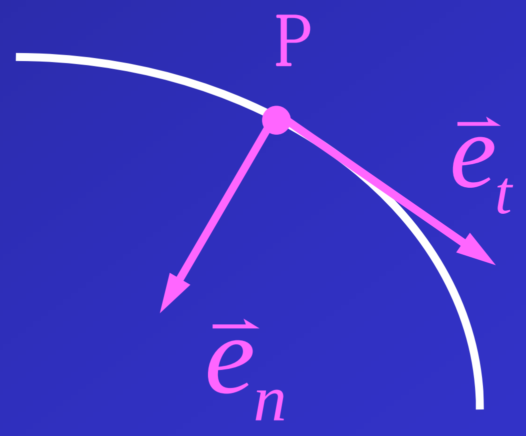
$$\boxed{x_{min} = \frac{D(u - v\frac{v}{u})}{v\sqrt{1-(\frac{v}{u})^2}} = \frac{D\sqrt{u^2 - v^2}}{v}}$$

1-3 圆周运动及其描述

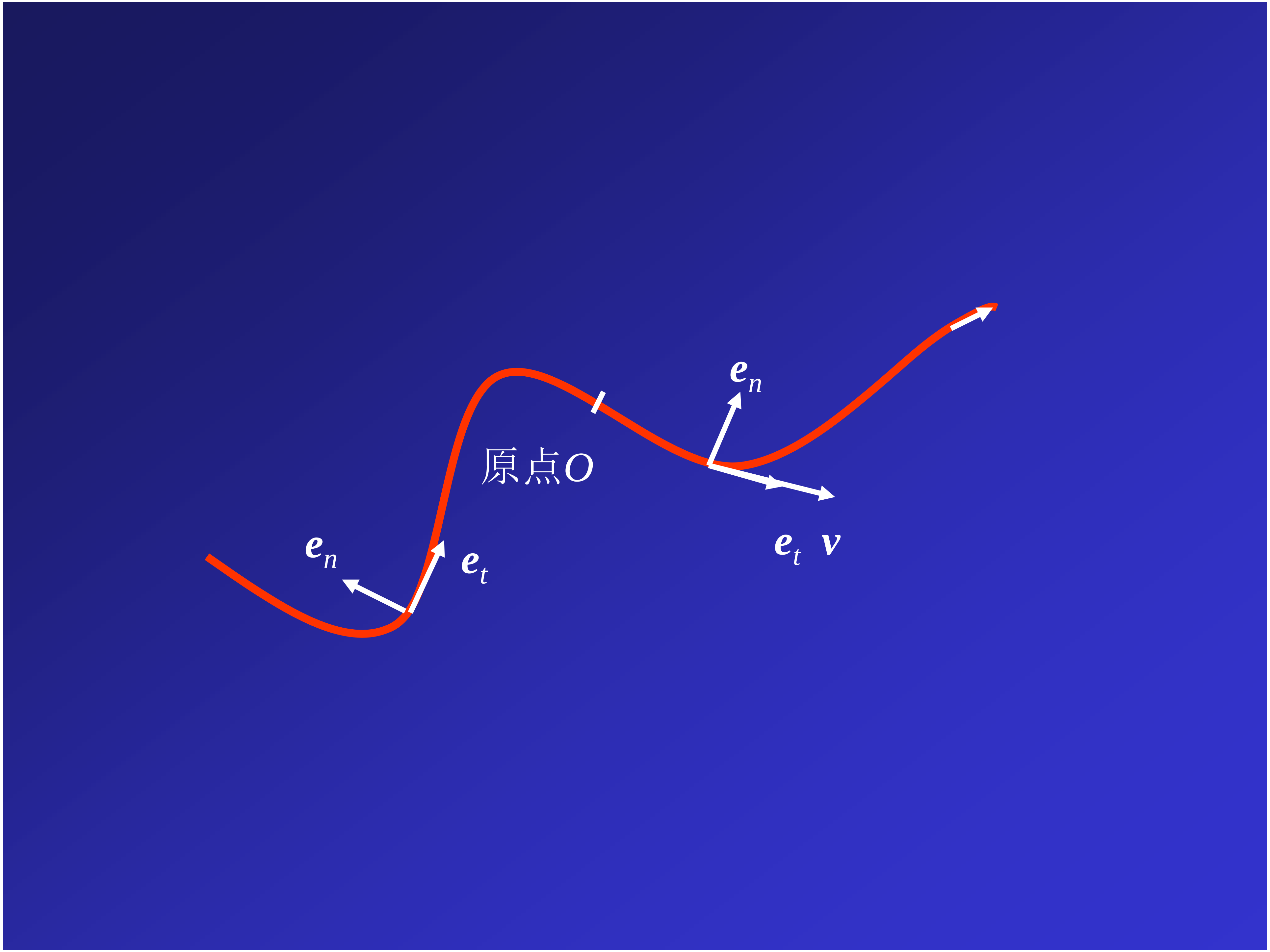
• 复杂曲线运动（如：圆周运动）→ 常选自然坐标

1. 自然坐标系：

在质点运动轨迹上的任意点，均可建立如下坐标系，其中一根坐标轴沿该点的切线方向，单位矢量为 $\vec{e}_t$；另一条坐标轴沿该点轨迹的法线并指向曲线的凹侧，单位矢量为 $\vec{e}_n$



特点：自然坐标轴的方位不断变化、不固定，是运动坐标系。



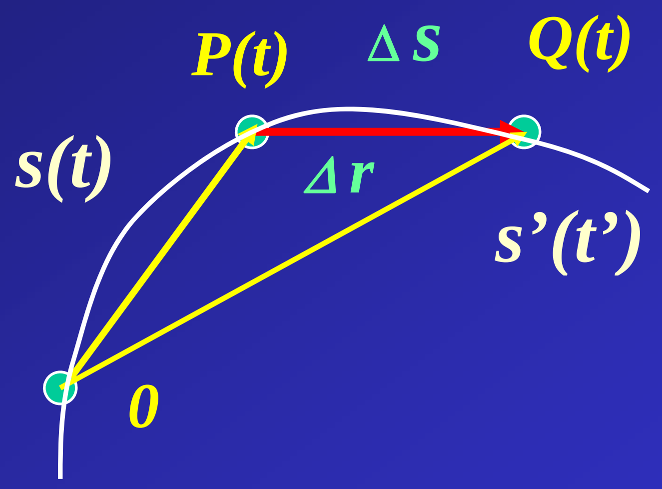
e_n
原点O
e_n
e_t
e_t v

$$\boxed{s = s(t)}$$

1 速度矢量

$$P: s = s(t), Q: s' = s'(t')$$

$$\Delta s = s'(t') - s(t) \Leftrightarrow \Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P$$



根据速度定义

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{ds}{dt} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$$

当 $\Delta t \Rightarrow 0, \Delta s \Rightarrow |\Delta\vec{r}|$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{r}|\vec{e}_t}{\Delta s} = \vec{e}_t$

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t}$$

只要已知自然坐标法表示的运动学方程，就可求出质点在任意时刻的速度

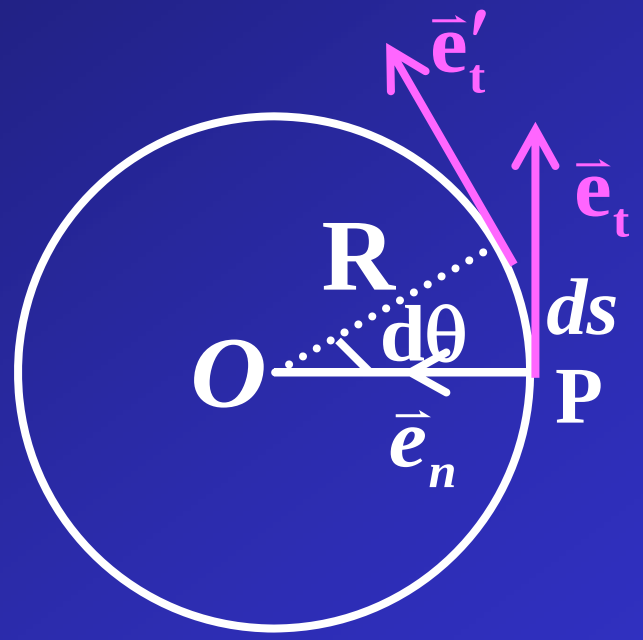
注意：ds/dt 是标量，但可有正负。$\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{e}_t$ 是矢量

质点的速度沿轨迹的切向方向 $\vec{e}_t$

由加速度定义有

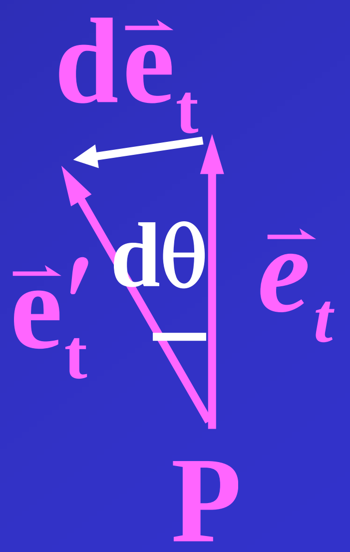
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(v\vec{e}_t)}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

注意单位矢量$\vec{e}_t$方向随时间变化



$\dfrac{d\vec{e}_t}{dt}$ 的大小：

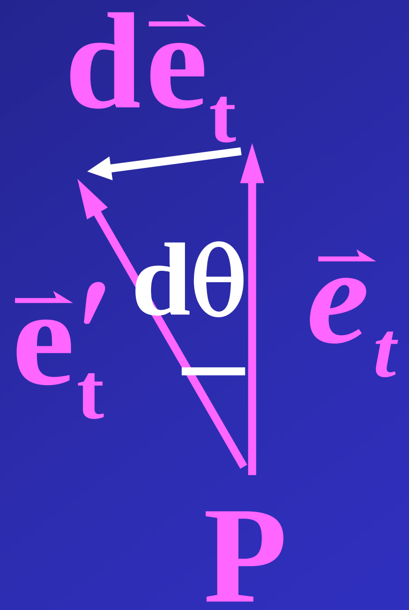
$$\frac{|\vec{e}_t|d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{d(R\theta)}{Rdt}=\frac{ds}{Rdt}=\frac{v}{R}$$



$\because d\theta \to 0$ 故有 $d\vec{e}_t \perp \vec{e}_t$

$\dfrac{d\vec{e}_t}{dt}$ 的方向： $\vec{e}_n$

所以 $$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$



$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n}$$

切向加速度： $\boxed{a_t = \dfrac{dv}{dt}}$ 表示速度大小变化的快慢。

法向加速度： $\boxed{a_n = \dfrac{v^2}{R}}$ 表示速度方向变化的快慢。

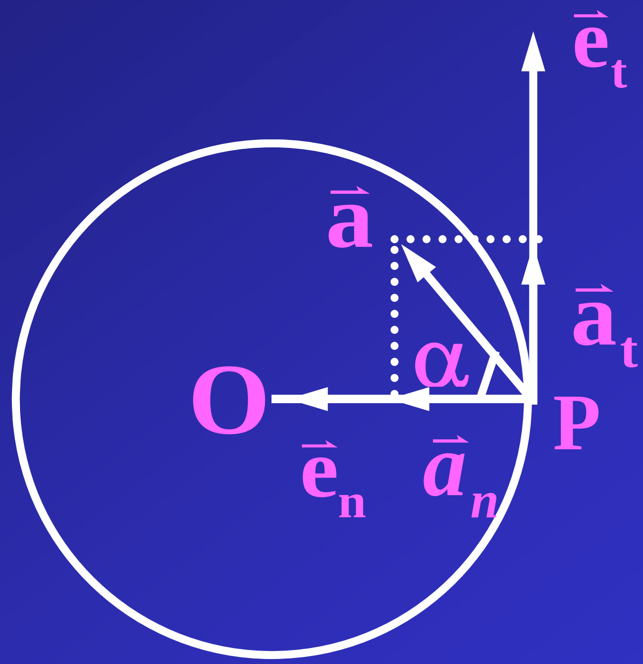
总加速度 $\vec{a}$ 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\frac{dv}{dt})^2 + (\frac{v^2}{R})^2}$$

方向为（与 $\vec{e}_n$ 间的夹角）：

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{a_t}{a_n}$$

$\vec{a}$ 通常不指向圆心。



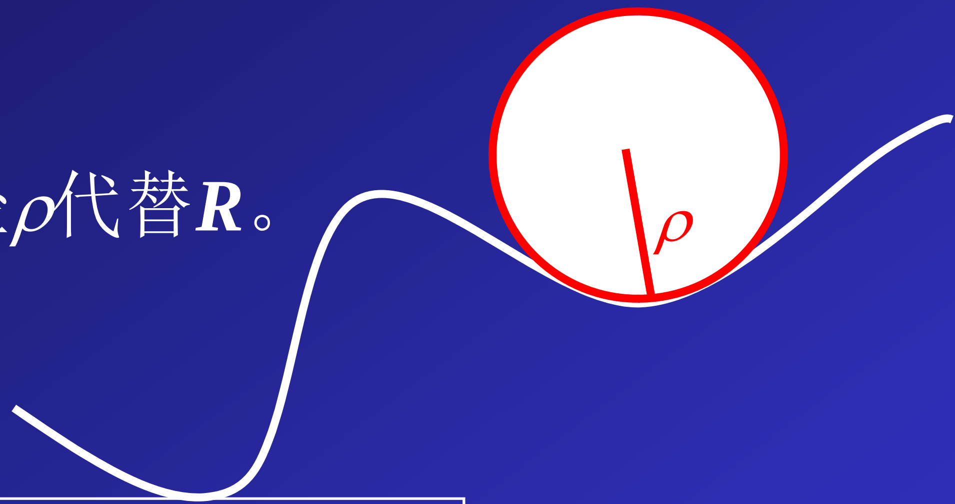
讨论：

$a_n = 0$，$a_t \neq 0$时，质点作变速直线运动。

$a_n \neq 0$，$a_t = 0$时，质点作匀速圆周运动。

对任意平面曲线运动，

以曲线在该点的曲率半径ρ代替$\boldsymbol{R}$。



加速度：

$$\boxed{\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

切向加速度：　$a_t=\dfrac{dv}{dt}$　表示速度大小变化的快慢。

法向加速度：　$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$　表示速度方向变化的快慢。

曲率半径：

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

在拐点处 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ $\quad\rho\to\infty\quad$ $a_n=\frac{v^2}{\rho}=0$

在其它点， $a_n\neq 0,\ \vec{a}$指向曲线凹的一边。

讨论：

$a_n=0$ 时 速度方向不改变，该点为拐点或质点作直线运动；

$a_t=0$ 时 速度大小不改变，质点作匀速率曲线运动。

〔例1〕对于作曲线运动的质点，以下说法中正确的是：

(A)若速率不变，则加速度 $\vec{a}$ 必为零；

(B)若 $\vec{a}$ 为恒量，它一定作匀变速率运动；

(C)切向加速度必不为零；

(D)除拐点外，法向加速度必不为零。

分析： $v=\text{const}$ 则 $a_t=\dfrac{dv}{dt}=0$

但 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 不一定为零。

故（A）错

(B)错。

反例：斜抛运动，$\vec{g}$为恒量，所以

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|\text{是恒量, 但}\frac{dv}{dt}\text{不是恒量}$$

(C)错。

反例：匀速圆周运动，$\mathbf{a_t = 0}$。

(D)对。

拐点处：$\rho = \infty, \mathbf{a_n = 0.}$

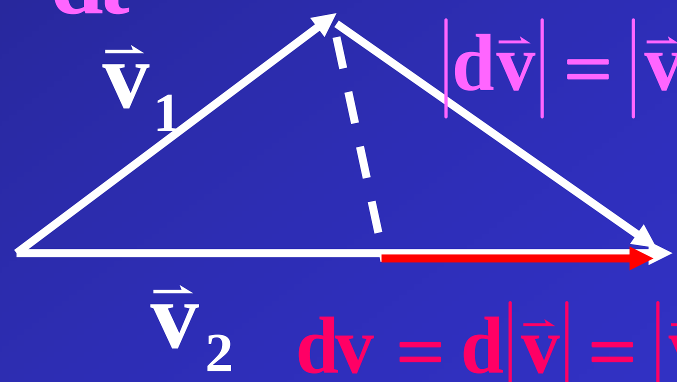
其它点：若 $\mathbf{a_n = 0}$ 则为直线运动。

〔例1－12〕质点作曲线运动，下列表达式中正确的是

$$(A)\,a=\frac{dv}{dt}.\ (B)\,v=\frac{dr}{dt}.\ (C)\,v=\frac{ds}{dt}.\ (D)\,a_t=\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

解：（1） $a=|\vec{a}|=\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|\neq\frac{dv}{dt}$

故（A)错



$$|d\vec{v}|=|\vec{v}_2-\vec{v}_1|$$

$$dv=d|\vec{v}|=|\vec{v}_2|-|\vec{v}_1|$$

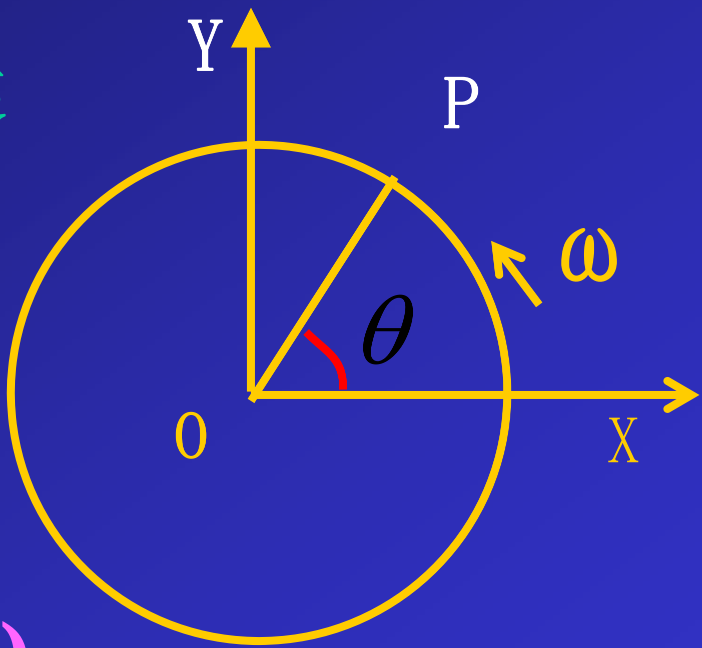
（2） $\because dr\neq ds$

故（B)错(C)对

（3） $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|=|\vec{a}|\neq a_t$ 故(D)错。

3. 圆周运动的角量描述

1、圆周运动的极坐标（角量）描述



(R, θ)　　其中 R 为常量

(1) 角位置：θ　　单位：rad

(2) 角位移：$\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(t_1)$

单位：rad

(3) 平均角速度：$\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$　　单位：rad/s

瞬时角速度　$\boxed{\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}}$

（4）平均角加速度 $\overline{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ 单位：rad/s^2

瞬时角加速度：$\boxed{\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}}$

2. 匀速圆周运动的角量描述:

$\omega = const, \quad \alpha = 0$

运动方程为：$\theta = \theta_0 + \omega t$

3.匀变速圆周运动的角量描述:

ω 为变量， $\alpha = \text{const}$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

运动方程: $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

类比法

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta \sim s \\ \omega \sim v \\ \alpha \sim a \end{array}}$$

4. 圆周运动中线量和角量的关系

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}$$

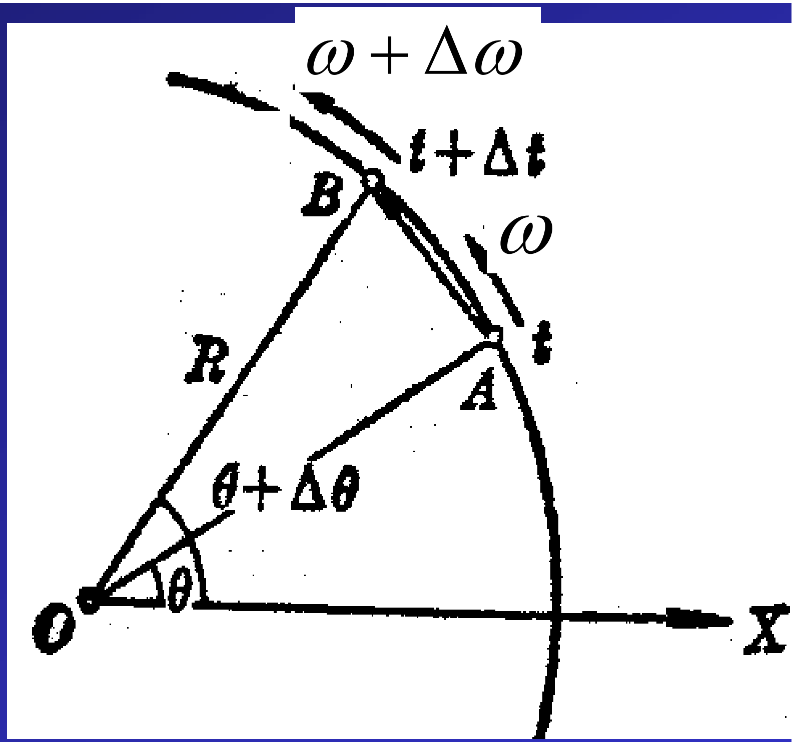
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v=R\omega$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

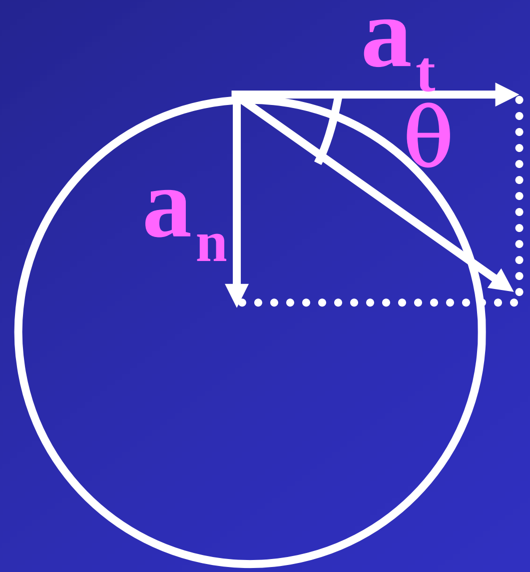
$$a_t=\frac{dv}{dt}=\mathbf{R}\frac{d\omega}{dt}=R\alpha$$

$$\Delta S=R\Delta\theta$$



请熟练掌握

〔例1－15〕质点沿半径为R的圆周运动，且 $\vec{a}$ 、 $\vec{v}$ 间夹角不变，试求质点速率 v 随时间的变化规律。设 $t=0$时, $v=v_0$



解：

$$令\frac{a_n}{a_t}=tg\theta=\frac{1}{k}$$

$$\frac{\frac{v^2}{R}}{\frac{dv}{dt}}=\frac{1}{k} \qquad \frac{dv}{dt}=k\frac{v^2}{R}$$

分离变量得$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\int_0^t\frac{k}{R}dt$ $\qquad v=\frac{v_0}{1-\frac{kv_0t}{R}}$

- 角速度ω＝常量，质点作匀速圆周运动。

  这时用角量表示的运动方程与匀速直线运动的运动方程相似：$\theta=\theta_0+\omega t$， θ_0是初角位置。

- 角加速度α＝常量，质点作匀变速圆周运动。

  这时用角量表示的运动方程与匀变速直线运动的运动方程相似：$\omega=\omega_0+\alpha t$， ω_0是初角速度。

3. 线量和角量之间的关系

- 线量：速度、加速度
- 角量：角速度、角加速度

- **P. 23 例1-2　　试计算地球自转时地面上各点的*v*、*a*。**

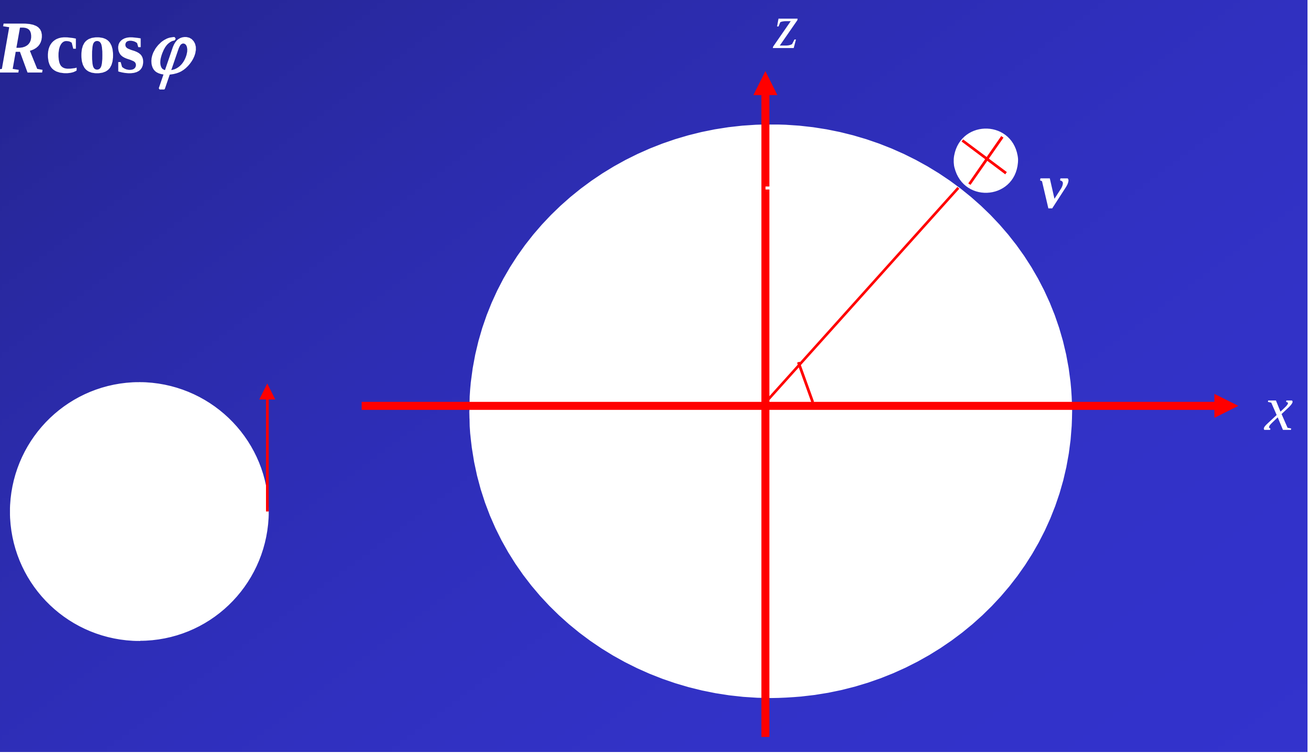
$\omega = 2\pi/T$（其中T为24小时）为常量，故

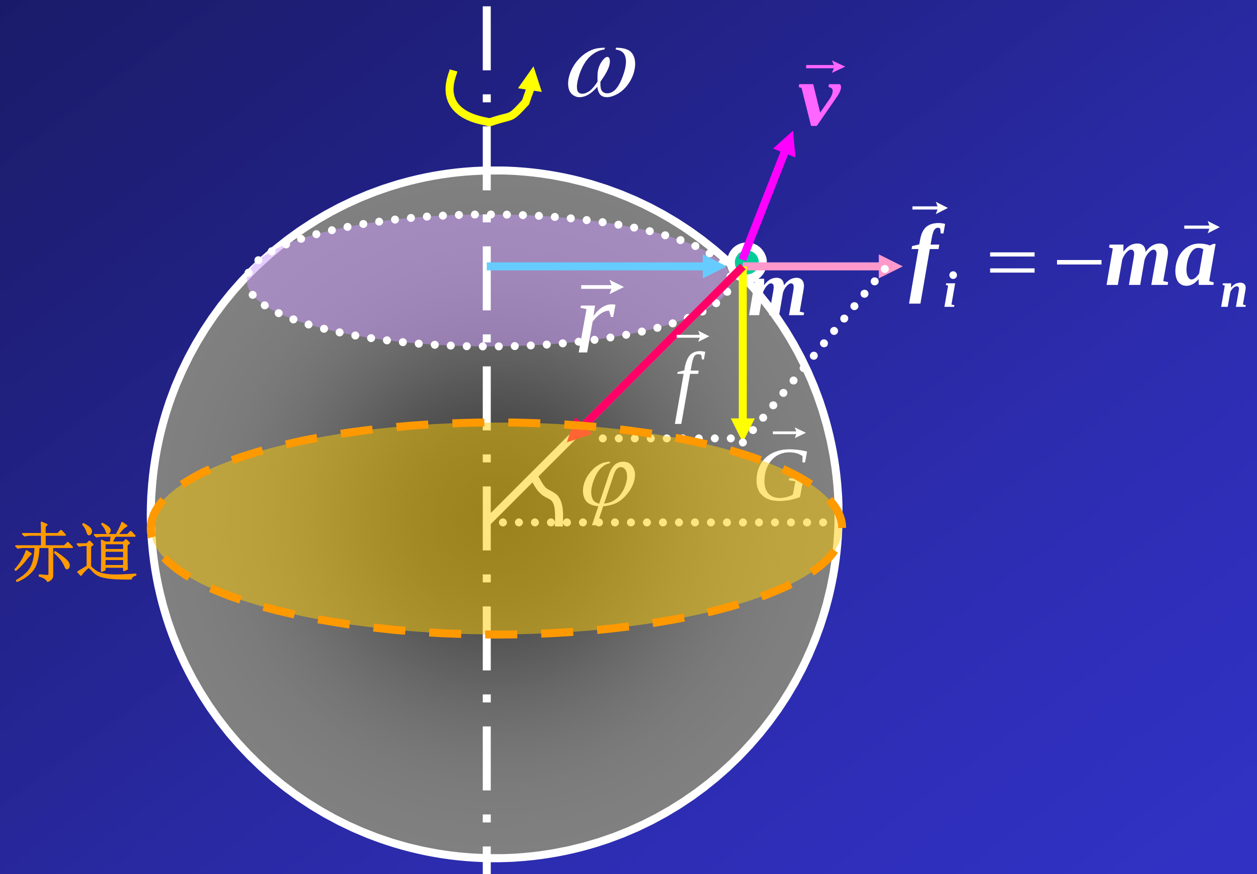
$\alpha = 0$。

$v = \omega R' = \omega R\cos\varphi$（其中$\varphi$为纬度）

$a_n = \omega^2 R' = \omega^2 R\cos\varphi$

$a_t = 0$





$$\omega = 7.3\times10^{-5}\,rad/s$$

$$g_0 = 9.8\,m/s^2$$

$$R = 6.4\times10^{6}\,m$$

P.24例$1-3$

一飞轮半径为R，边缘一点路程与时间关系$s=v_0t-bt^2/2$，求$a(t)$及何时$a_t=a_n$。

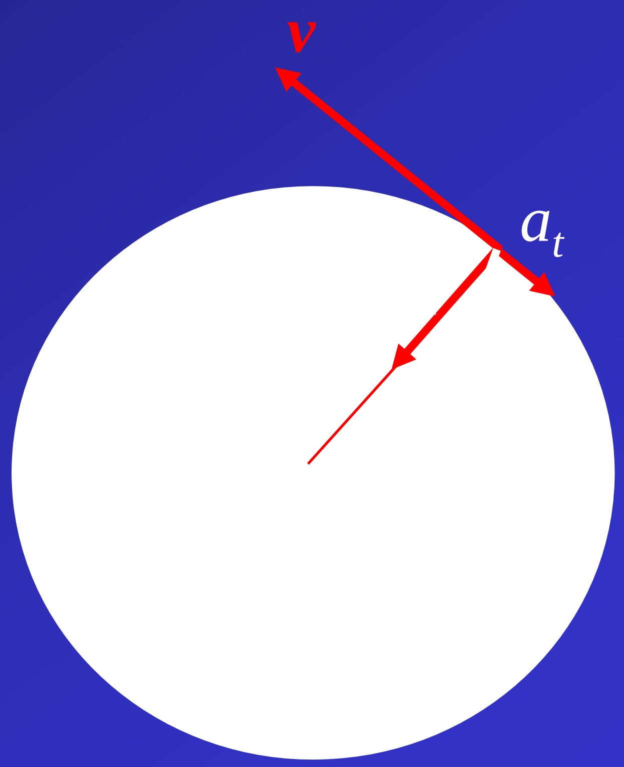
1.由定义有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v_0t-bt^2/2)}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v_0 - bt)}{\mathrm{d}t} = -b$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

得到$\vec{a}$的大小及方向。



2.由$b = \dfrac{(v_0 - bt)^2}{R}$求出$t$。

1—4 曲线运动的矢量形式

一. 运动的叠加原理：（运动的独立性原理）

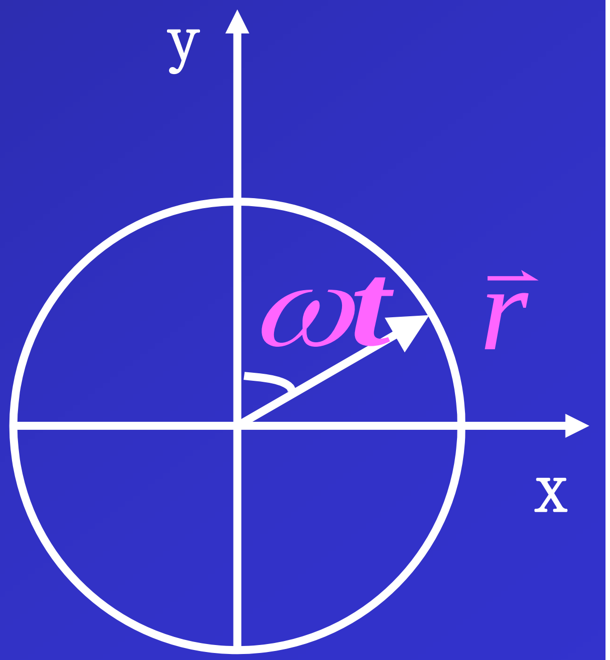
一种运动可以看成几种各自独立进行的运动叠加而成，即任何一个方向的运动，都不会因其它方向的运动是否存在而受到影响。

二. 匀速圆周运动方程的矢量形式

1. 位矢：

$$\vec{r} = R\sin\omega t\,\vec{i} + R\cos\omega t\,\vec{j}$$

轨迹方程： $x^2 + y^2 = R^2$



2. 速度：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=R\omega\cos\omega t\,\vec{i}-R\omega\sin\omega t\,\vec{j}$$

大小： $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=R\omega$

3. 加速度：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(-R\omega^2\sin\omega t)\vec{i}+(-R\omega^2\cos\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$$

匀速圆周运动的加速度是向心加速度。

大小： $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=R\omega^2$

圆周运动质点在平面内作半径为R的圆周运动，可以用直角坐标系描述其矢量形式；

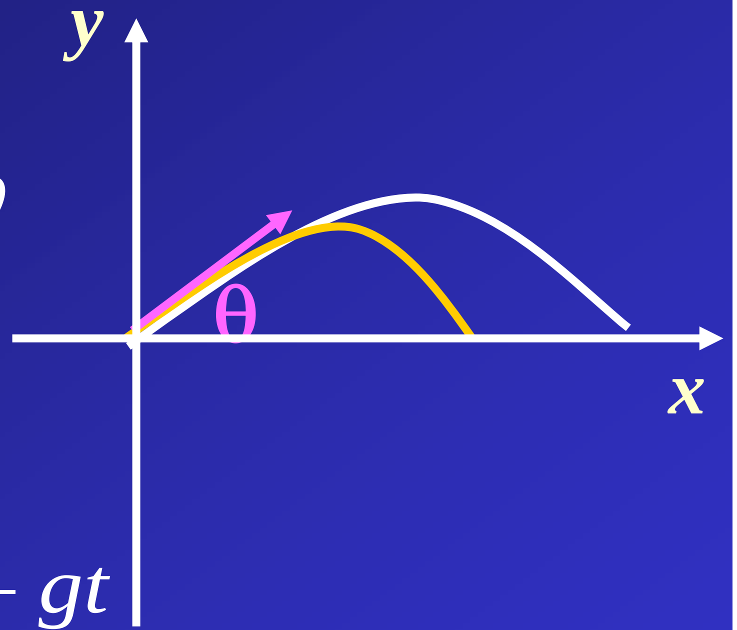
运动平面→xy平面；

圆心→原点。

曲线运动的矢量形式：可以说是以直角坐标系描述曲线运动。

优点：坐标系保持不变。

2. 抛体运动方程



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

得

$$v_x = v_0 \cos\theta, \quad v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$x = v_0 t \cos\theta, \quad y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

消去t得轨迹方程

$$y = x \mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

令$y=0$得射程$X=\dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$

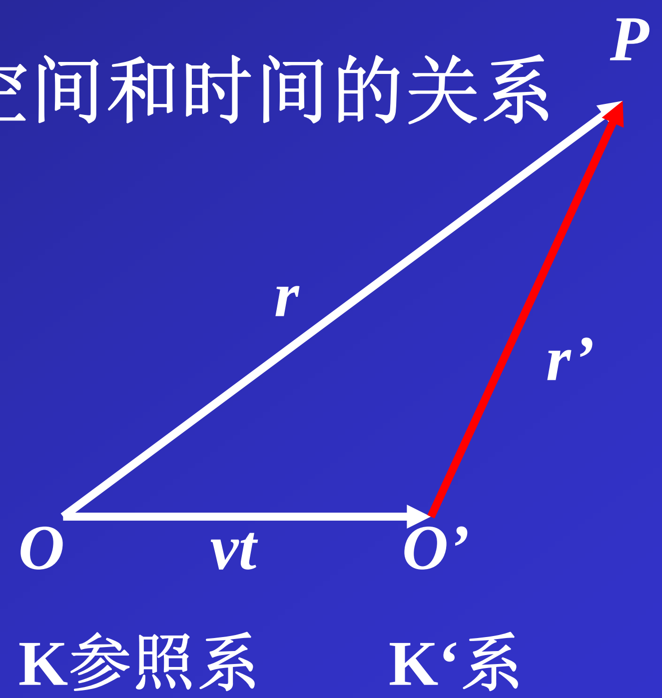
令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$得飞行最大高度$Y=\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

实际要考虑空气阻力、风向等进行修正。

1-5 运动描述的相对性 伽利略坐标变换

运动本身是绝对的，但对运动的描述是相对的，对于不同的参照系，对同一运动的描述是不同的，这就是运动描述的相对性。

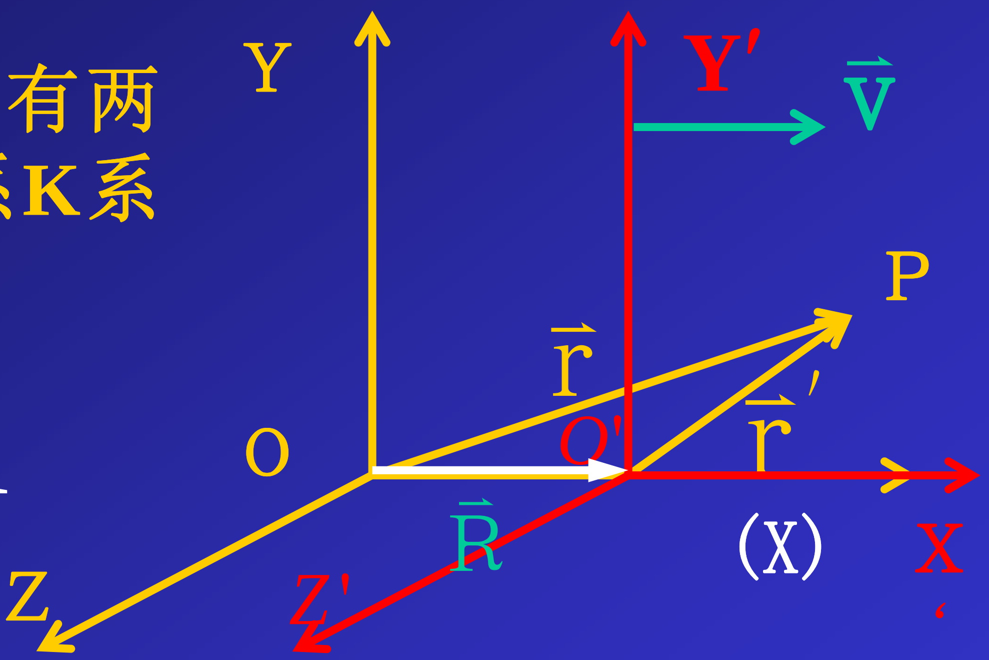
讨论两个不同参照系之间空间和时间的关系



设 $t=0$ 时 O、O' 重合

1.经典力学的时空观：设有两个参照系内相应的坐标系K系与K' 系

$$\vec{r} = \overrightarrow{O'P} + \vec{R} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$



上式成立的条件之一为

$$\overrightarrow{O'P} = \vec{r}\,'$$

即：空间两点间距离的测量与坐标系的选择无关。

---经典力学的空间观（空间的绝对性）。

上式成立的条件之二为

$$t = t'$$

此时有： $\vec{R} = vt = vt'$

即：时间的测量与参照系的选择无关。

--经典力学的时间观（时间的绝对性）。

绝对时间和绝对空间的概念构成了经典力学的绝对时空观。

（适用于宏观低速的情形，以牛顿为代表）

2.伽利略坐标变换：

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}\,t \\ t' &= t \end{aligned}}$$

（包括时空坐标）

分量式为：

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

- 绝对：物体对相对静止的参照系
- 相对：物体对相对运动的参照系
- 牵连：相对运动的参照系对相对静止的参照系

$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$

$t' = t$

在直角坐标系，若$\boldsymbol{v}$沿x轴正方向，有

$x' = x - vt$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = t$

伽利略坐标变换式

2.速度变换

$r_{绝对}=r_{相对}+r_{牵连}$

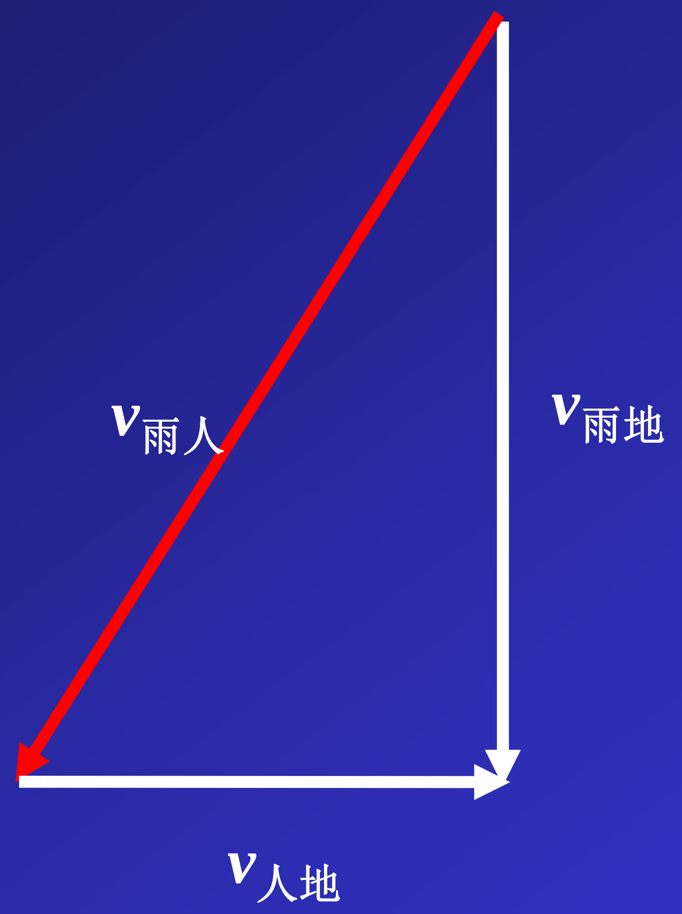
$$\frac{d\vec{r}_{绝对}}{dt}=\frac{d\vec{r}_{相对}}{dt}+\frac{d\vec{r}_{牵连}}{dt}$$

两边对时间求导，由于$t'=t$，

$$\frac{d\vec{r}_{相对}}{dt}=\frac{d\vec{r}_{相对}}{dt'}$$

得$v_{绝对}=v_{相对}+v_{牵连}$

对物体的低速运动成立。



$$\vec{v}_{人地} = -\vec{v}_{地人}$$

3.加速度变换

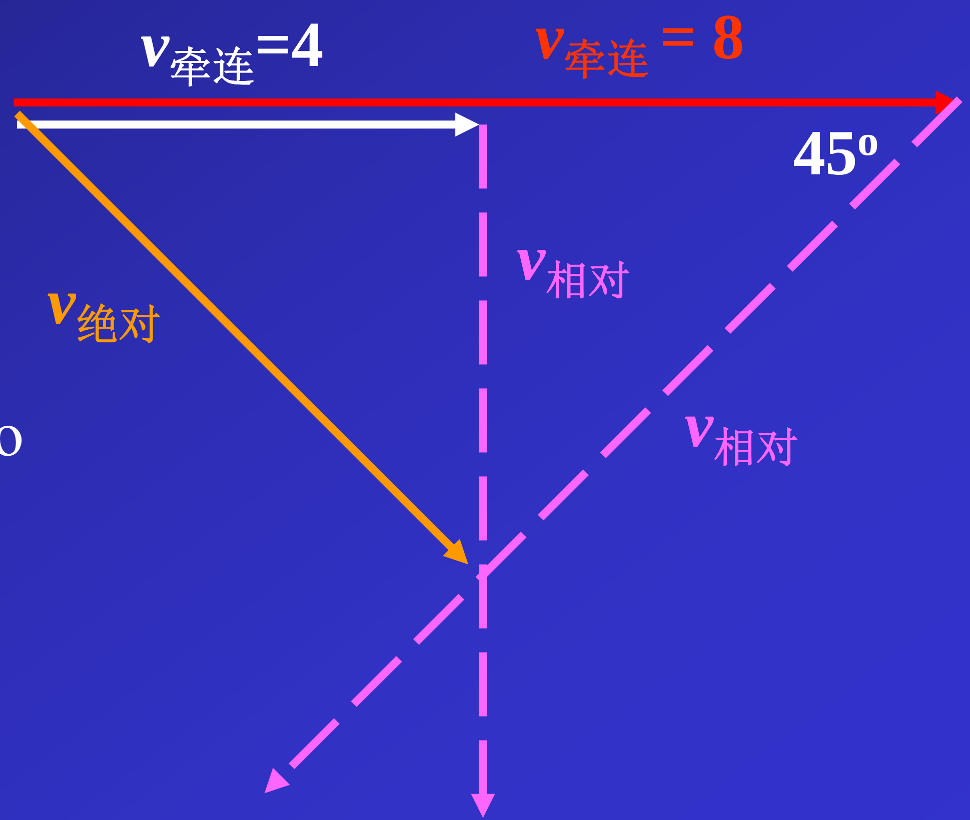
$v_{绝对}=v_{相对}+v_{牵连}$

两边对时间求导，得

$a_{绝对}=a_{相对}+a_{牵连}$

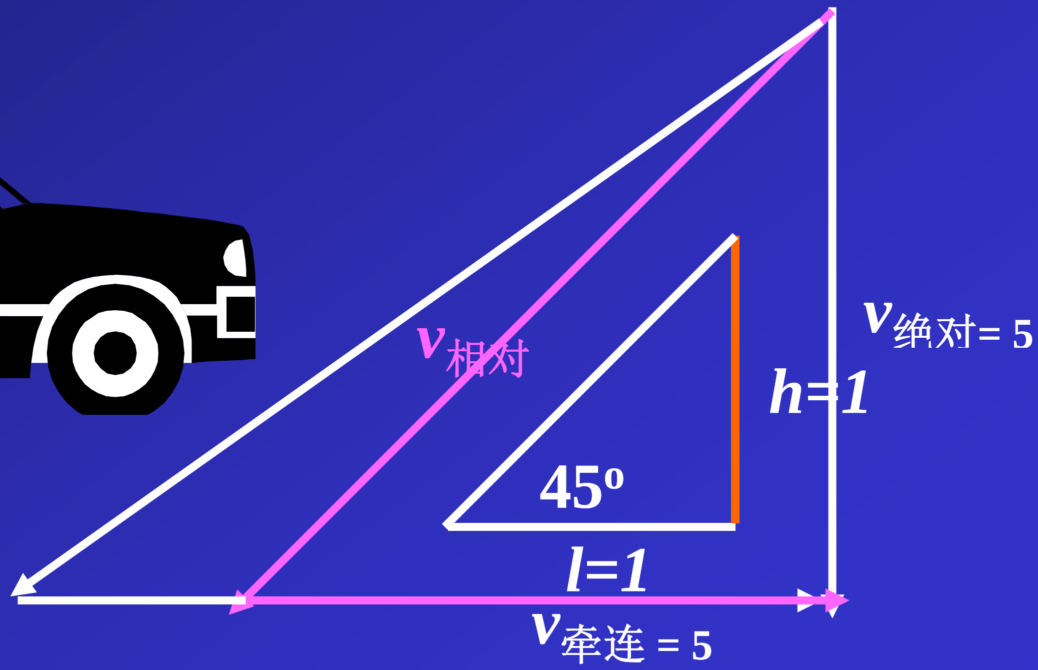
- P. 36 例1-5 某人以4km/h的速度向东行进时，感觉风从正北吹来，如果速度增加一倍，则感觉风从东北吹来，求风对地的速度。

- 图解法



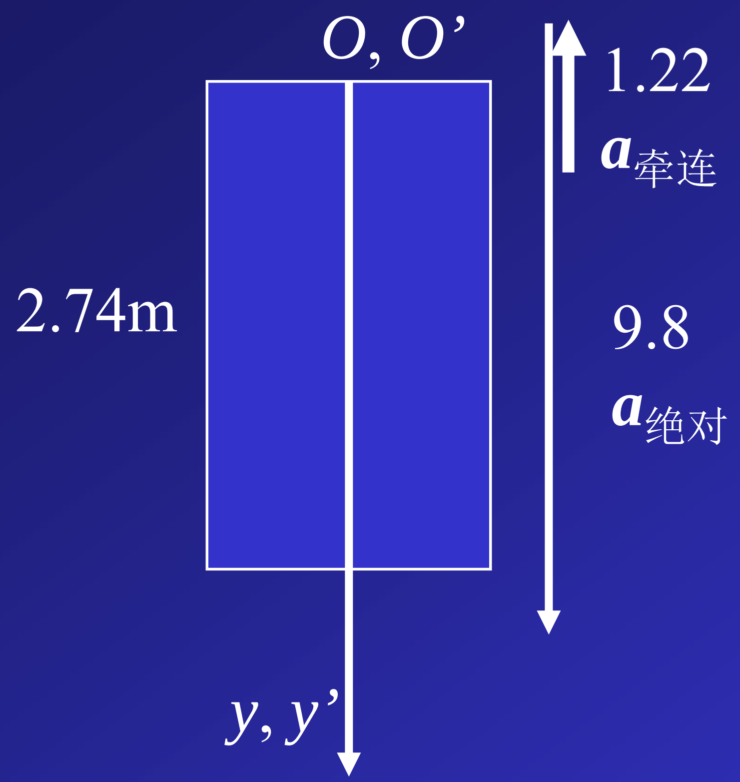
$$v = 4\sqrt{2}, \quad \theta = 45^{\circ}$$

• P. 37 例1-6 货车遇到5m/s垂直下落的大雨，木板及挡板都是1m，问货车以多大的速度行驶才使木板不被雨淋。



$$v_{牵连} >= 5$$

- P38. 例题1－7 一升降机以加速度1.22m/s^2 上升，当上升速度为2.44m/s时，有一螺帽自升降机的天花板上松落，天花板与升降机的底面相距2.74m，计算螺帽从天花板落到底面所需要的时间和螺帽相对于升降机外固定柱的下降距离。



- 建立坐标系：以垂直向下为坐标轴正向，以螺帽离开升降机的位置作为升降机和地面坐标系的原点。

- 螺帽对于升降机的运动是初速为0的匀加速直线运动。

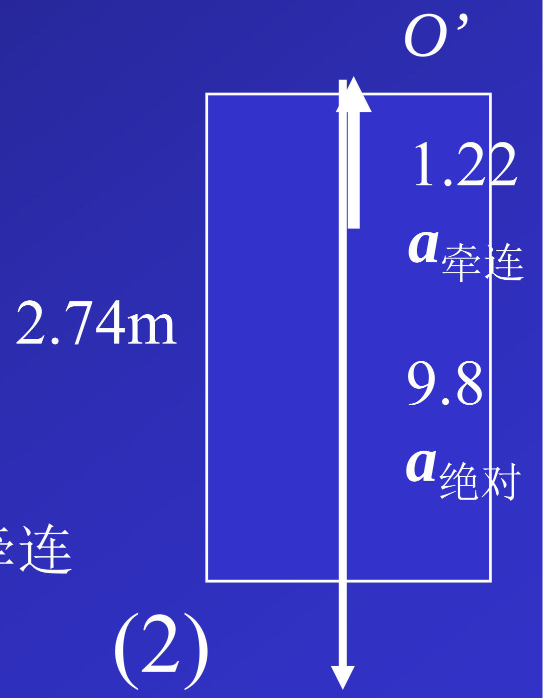
$$y_{相对} = \frac{1}{2}a_{相对}t^2$$

$=2.74\text{m}$ (1)

由$\boldsymbol{a}_{绝对}=\boldsymbol{a}_{相对}+\boldsymbol{a}_{牵连}$得$\boldsymbol{a}_{相对}=\boldsymbol{a}_{绝对}-\boldsymbol{a}_{牵连}$

即$a_{相对}=9.8-(-1.22)=11.02\text{m/s}^2$ (2)

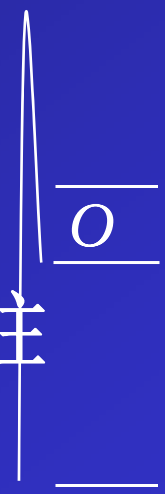
代入(1)得$t=0.71\text{s}$



- 对于地面来说，螺帽以初速为v_0=-2.44 m/s 运动的匀加速运动，加速度$a_{绝对}$=9.8 m/s^2

故，

$$y_{绝对} = v_0 t + \frac{1}{2} a_{绝对} t^2$$



把t=0.71s代入得螺帽相对于升降机外固定柱下降的距离

$y_{绝对}$=-0.74m，即上升0.74m。

第一章　质点的运动小结

一、基本要求

1.掌握位矢、位移、速度、加速度、角位置、角位移、角速度、角加速度等物理量。根据用直角坐标表示的运动方程，能熟练地计算质点的位移、速度和加速度；反过来，根据加速度和初始条件，能利用积分求出质点的速度和运动方程等。根据用极坐标表示的圆周运动的运动方程，能熟练地计算质点的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度等。

2.了解一般曲线运动的切向、法向加速度的概念。

3.理解伽利略坐标、速度变换。

二、重点

位矢、位移、速度、加速度、角速度和角加速度的概念和相互关联。

三、难点

矢量微分与标量微分的差别；各物理量的微积分运算。

四、小结

（一）描述质点运动的四个物理量的定义

1. 位矢：由原点指向质点所在位置的矢量。

记作： $\vec{r}$ $\quad \vec{r} = \vec{r}(t)$ 称为质点的运动方程。

2.位移：由初位置指向末位置的矢量。

记作： $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

3.速度

（1）平均速度 $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

（2）瞬时速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

（3）平均速率 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

（4）瞬时速率

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}=\left|\frac{\mathbf{d\vec{r}}}{\mathbf{dt}}\right|\neq\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}}$$

$$*\left|\Delta\vec{\mathbf{r}}\right|\neq\Delta\mathbf{S}$$

$$\left|\mathbf{d\vec{r}}\right|=\mathbf{dS}$$

4. 加速度

（1）平均加速度 $\bar{\vec{\mathbf{a}}}=\dfrac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta\mathbf{t}}$

（2）瞬时加速度 $\vec{\mathbf{a}}=\dfrac{\mathbf{d\vec{v}}}{\mathbf{dt}}$

（二）描述质点运动的四个物理量的直角坐标表示

1. 位矢 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

运动方程 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

2. 位移

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

位移和路程是两个不同的物理概念。

3. 速度 $$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

大小 $$v=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\neq\frac{dr}{dt}$$

4. 加速度 $$\vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

大小 $$a=\sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2+(\frac{d^2y}{dt^2})^2+(\frac{d^2z}{dt^2})^2}\neq\frac{dv}{dt}$$

（三）描述质点运动的四个物理量的自然坐标表示

1. 位置 $\mathbf{s(t)}$

2. 速度 $$\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\vec{\mathbf{e}}_t = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e}}_t$$

3. 加速度 $$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_t\vec{\mathbf{e}}_t + \mathbf{a}_n\vec{\mathbf{e}}_n = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e}}_t + \frac{\mathbf{v}^2}{\rho}\vec{\mathbf{e}}_n$$

（四）描述质点运动的物理量的极坐标（角量）表示

1. 角位置 θ

2. 角位移 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

3. 角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

4. 角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

（五）角量与线量的关系

$$\Delta s = R\Delta\theta \qquad a_t = R\alpha$$

$$v = R\omega \qquad a_n = R\omega^2$$

（六）相对运动

1. 伽利略坐标变换

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}\,t$$
$$t' = t$$

2. 伽利略速度变换

$$\boxed{\vec{v}_{pk} = \vec{v}_{pk'} + \vec{v}_{k'k}}$$

6. 伽利略加速度变换

$$\vec{a}_{pk} = \vec{a}_{pk'} + \vec{a}_{k'k}$$

（七）研究质点运动学的两类问题

1. 质点运动学的第一类问题

由$\vec{\mathbf{r}} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}$ 用微分法

2. 质点运动学的第二类问题

由$\vec{\mathbf{a}}$(及初始条件）$\Rightarrow \vec{\mathbf{v}} \Rightarrow \vec{\mathbf{r}}$（用积分法）

由$\vec{\mathbf{v}}$(及初始条件）$\Rightarrow \vec{\mathbf{r}}$（用积分法）