第5节 电动力学的相对论不变性

根据相对性原理，我们可以认为Maxwell方程组适用于任意惯性参考系，其形式满足协变性要求，不随参考系的改变而改变。

相对论理论中的四维协变矢量：

四维空间矢量： $x_\mu=(\vec{x},ict)$

四维速度矢量： $U_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\gamma_u(\vec{u},ic)$

四维波矢量： $k_\mu=(\vec{k},i\frac{\omega}{c})$

寻找麦氏方程的四维协变形式，需要先统一电荷密度ρ和电流密度$\vec{J}$、电场强度$\vec{E}$和磁感应强度$\vec{B}$。

5.1 四维电流密度矢量

电荷Q是一个Lorentz标量： **（J. G. King等人的实验）**

$$Q=\int \rho_0 \mathrm{d}V_0=\int \rho \mathrm{dV}$$

其中ρ_0和$\mathrm{d}V_0$ 是电荷静止系中的电荷密度和体元， ρ和dV是当它以速度 $\vec{u}$ 运动时的量。其中**体元的Lorentz收缩**为

$$\mathrm{dV}=\frac{\mathrm{d}V_0}{\gamma_u}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V_0$$

因此**电荷密度**相应地变为

$$\rho=\gamma_u\rho_0=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

当粒子以 $\vec{u}$ 运动时，其电流密度为：

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u\rho_0\vec{u} = \rho_0\gamma_u\vec{u}$$

$\gamma_u\vec{u}$是四维速度矢量的三维分量，因此根据四维速度可引入四维电流的第四分量

$$J_4 = \rho_0 U_4 = \mathrm{i}c\gamma_u\rho_0 = ic\rho$$

我们得到**四维电流密度矢量：**

$$\boldsymbol{J_\mu = \rho_0 U_\mu = (\vec{J}, ic\rho)}$$

因此电荷密度ρ和电流密度$\vec{\mathbf{J}}$是一个统一的物理量的不同分量，在参考系变换下按一定方式互相变换。

电荷守恒定律的四维形式

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\mu J_\mu = 0$$

5.2 四维势矢量

d’Alembert方程：

$$\Box\varphi=\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\mu_0c^2\rho$$

$$\Box\vec{A}=\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

Lorentz规范条件：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

既然电荷密度ρ和电流密度$\vec{J}$统一成了一个四维矢量，那么**标势$\boldsymbol{\varphi}$和矢势$\vec{\boldsymbol{A}}$也可以统一成一个四维矢量**

$$A_\mu=(\vec{A},\frac{i}{c}\varphi)$$

d’Alembert方程的四维形式

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

Lorentz条件的四维形式

$$\partial_\mu A_\mu = 0$$

它们都具有明显的协变性。在Lorentz变换下，A_μ按矢量性质变换

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$$

若Σ'相对Σ沿x方向以速度$\vec{v}$运动，则A_μ各分量的变换关系为

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \\ \frac{i}{c}\varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\varphi\right)} \\ \boldsymbol{A'_y = A_y} \\ \boldsymbol{A'_z = A_z} \\ \boldsymbol{\varphi' = \gamma(\varphi - v A_x)} \end{cases}$$

5.3 电磁场张量

引入反对称四维张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

用势表示电磁场$\vec{B}$和$\vec{E}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} B_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j A_k \\ E_i = -\,\partial_i \varphi - \dfrac{\partial A_i}{\partial t} = ic(\,\partial_i A_4 - \,\partial_4 A_i) \end{cases}$$

即

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = F_{23}, \ldots \\ E_1 &= ic(\,\partial_1 A_4 - \,\partial_4 A_1) = icF_{14}, \ldots \end{aligned}\right\} \Longrightarrow F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_{\mu\nu}$称为电磁场张量

用电磁场张量和四维电流密度矢量，可以把Maxwell方程写成协变形式

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla\times\vec{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu$$

验证：

✓ 第4分量 $\partial_\nu F_{4\nu} = \mu_0 J_4$

$$\partial_\nu F_{4\nu} = \partial_i F_{4i} + \partial_4 F_{44} = \frac{i}{c}\partial_i E_i = \frac{i}{c}\nabla\cdot\vec{E} = \mu_0 J_4 = \mu_0 ic\rho$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

✓ 第i分量 $\partial_\nu F_{i\nu} = \mu_0 J_i$

$$\partial_\nu F_{i\nu} = \partial_\nu(\partial_i A_\nu - \partial_\nu A_i) = \partial_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + \partial_4(\partial_i A_4 - \partial_4 A_i)$$

$$= \partial_i\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2 A_i + \partial_4 F_{i4} = \left[\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]_i - \frac{1}{ic}\frac{i}{c}\frac{\partial E_i}{\partial t} = \mu_0 J_i$$

$$\Longrightarrow \nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$$

另外一对方程：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{E}=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\ \partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}=0$$

作业1：验证此式.

由张量变换关系

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$$

导出电磁场的变换关系

$$\begin{cases}E'_1=E_1, \quad B'_1=B_1\\ E'_2=\gamma(E_2-vB_3),\ B'_2=\gamma(B_2+\dfrac{v}{c^2}E_3)\\ E'_3=\gamma(E_3+vB_2),\ B'_3=\gamma(B_3-\dfrac{v}{c^2}E_2)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\vec{E}'_{//}=\vec{E}_{//},\vec{B}'_{//}=\vec{B}_{//}\\ \vec{E}'_\perp=\gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_\perp\\ \vec{B}'_\perp=\gamma(\vec{B}-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_\perp\end{cases}$$

作业2：验证此变换关系.

电流密度和电荷密度统一为四维电流密度矢量J_μ，矢势和标势统一为四维势矢量A_μ，电场和磁场统一为电磁场张量$F_{\mu\nu}$，这反映出电磁场的统一性和相对性，电场和磁场是同一种物质的两个方面。这些四维矢量和张量，再加上协变形式的波动方程（d’Alembert方程）或者协变形式的Maxwell方程，一起构成了电动力学方程的协变性。

学习P221页例题：匀速运动带电粒子的电磁场。

5.4 电磁场的不变量

用电磁场张量$F_{\mu\nu}$构造Lorentz不变量

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=B^2-\frac{1}{c^2}E^2$$

定义全反对称四阶张量构$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}=\begin{cases}+1，若\mu\nu\lambda\tau为1234的任意偶排列；\\-1，若\mu\nu\lambda\tau为1234的任意奇排列；\\0，若\mu\nu\lambda\tau有任意两个指标相同。\end{cases}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$是一个空间反演下的赝张量，可以用它来定义对偶场强张量

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\lambda\tau}$$

$\mathcal{F}_{\mu\nu}$和$F_{\mu\nu}$的宇称相反，用它们可以构造另外一个Lorentz不变量

$$\frac{i}{4}F_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\vec{E}$$

在任意惯性系中，平面电磁波都有$B=E/c$, 且$\vec{B}$和$\vec{E}$正交。

第6节 相对论力学

力学规律要符合新的相对论时空观，在Lorentz变换下保持协变性。

当速度$v \ll c$时，相对论力学应该合理地过渡到经典力学。

6.1 能量-动量四维矢量

经典力学的基本规律：牛顿定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

其相对论形式需要具有四维协变性，引进四维动量和四维力。

根据四维速度矢量$U_\mu = \gamma(\vec{v}, ic)$，可以定义四维动量矢量

$$p_\mu = m_0 U_\mu = m_0 \gamma(\vec{v}, ic)$$

其中Lorentz标量m_0称为静止质量。在$v \ll c$的非相对论情形下

$$p_4 = i\gamma m_0 c = \frac{i}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i}{c}\left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots\right)$$

括号中第二项是低速运动物体的动能。可见p_4与物体的能量有关。

考察p_4的形式，

$$p_4 = \frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i}{c}W$$

则W带有能量的量纲，它实际上就是物体的相对论能量

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0c^2$$

当$v=0$时物体动能为零，剩下的都是物体的动能

$$T = W - m_0c^2 = (\gamma-1)m_0c^2 \Longrightarrow \ W = T + m_0c^2$$

$\boldsymbol{m_0c^2}$是物体静止时的能量，称为**静止能量**。

$$\boldsymbol{W_0 = m_0c^2}$$

静止能量的形式是唯一的，这是相对论协变性要求的结果。作为能量的一部分，静止能量可以转化为其他形式的能量。

考察$\pi_0 \to 2\gamma$的衰变过程。在π_0粒子的静止参考系Σ'中，它只有静止能量W_0，动量为零 $p'_\mu = (0, \frac{i}{c}W_0)$。在另一参考系$\Sigma$中观察，设$\pi_0$沿$x$轴方向运动，它的能量和动量可以根据Lorentz变换得到

$$p_\mu = \left(\vec{p}, \frac{i}{c}W\right) = a_{\nu\mu}p'_\nu = a^{-1}_{\mu\nu}p'_\nu$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{p} = \gamma W_0 \frac{\vec{v}}{c^2}, \qquad W = \gamma W_0$$

与物体的相对论能量公式对比可知$\boldsymbol{W_0 = m_0 c^2}$。物体的四维动量是

$$p_\mu = \left(\vec{p}, \ \frac{i}{c}W\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{p_\mu p_\mu = p^2 = \vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2}} = \text{不变量} = -m_0^2 c^2$$

静止质量 m_0 表征一个粒子动量-能量的不变性，其能量、动量、质量关系：

$$\boldsymbol{W^2 - \vec{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4}, \qquad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{W = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

此式加上能量-动量守恒方程组，构成处理碰撞和衰变问题的有效工具！

6.2 质能关系

物体静止能量和静止质量的关系，称为**质能关系**

$$W_0 = m_0 c^2$$

质能关系与物体具体结构无关。对一组粒子构成的复合体系，由于粒子间相互作用和相互运动的存在，复合体系的总静止能量W_0不等于所有组分粒子静止能量之和$\sum_i m_{i0} c^2$，它们之间的差别称为**物体的结合能**

$$\Delta W = \sum_i m_{i0} c^2 - W_0$$

其静止质量$M_0 = W_0/c^2$也不等于组分粒子静止质量之和，差别为**质量亏损**

$$\Delta M = \sum_i m_{i0} - M_0$$

可见结合能与质量亏损有关系

$$\Delta W = \Delta M \cdot c^2$$

这在原子核物理和粒子物理中被大量实验证实，是原子能利用的理论基础。

在相对论中，**能量守恒和动量守恒仍然是自然界最基本的定律，在研究粒子转化过程中非常重要。**引入一种“等效质量”，作为粒子运动质量

$$m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

可见m不是一个不变量，它随运动速度变化而变化，不变量是静止质量m_0.

物体的动量和能量现在可以写成

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad W = mc^2 \text{ (质能关系)}$$

由质能关系，粒子的质量、动量和能量常用MeV/c^2、MeV/c和MeV作为单位表示

$$1\ \mathrm{MeV} = 1.602\times10^{-13}\ \mathrm{J},$$

$$1\ \mathrm{MeV}/c^2 = 1.783\times10^{-30}\ \mathrm{kg},$$

$$m_e = 0.51099895000(15)\ \mathrm{MeV}/c^2 \text{ (电子质量)}$$

学习P227例题： $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.

6.3 相对论力学方程

用固有时$d\tau$来衡量四维动量p_μ的变化率，可以构成一个四维矢量，用四维力矢量K_μ来表示，则**牛顿定律的四维协变形式**

$$\boldsymbol{K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}} \quad \xRightarrow{v \ll c} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

K_μ的第四分量为

$$K_4 = \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{i}{c}\frac{dW}{d\tau} = \frac{i}{c}\frac{d}{d\tau}\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m_0^2c^4}$$

$$= \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{i}{c}\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{i}{c}\vec{K} \cdot \vec{v}$$

因此，作用于速度为$\vec{v}$的物体上的四维力矢量为

$$K_\mu = (\vec{K}, \ \frac{i}{c}\vec{K} \cdot \vec{v})$$

其第四分量K_4与空间分量$\vec{K}$有关系。

相对论中协变的力学方程包括两个方程

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{d\tau}$$

可以把固有时$d\tau$用参考系时间$dt = \gamma d\tau$来表示

$$\frac{1}{\gamma}\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \frac{1}{\gamma}\vec{K} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt}$$

若定义三维力 $\vec{F}=\frac{1}{\gamma}\vec{K}$，则相对论力学方程可以写成

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt}$$

形式上与牛顿力学方程一致，但这里$\vec{p}$和W是相对论的动量和能量。

6.4 洛伦兹力

用电磁场张量$F_{\mu\nu}$和四维速度U_μ来构造一个四维矢量

$$K_\mu = qF_{\mu\nu}U_\nu, \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{K} = \gamma q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

根据三维力的定义，可以得到

$$\vec{F} = \frac{1}{\gamma}\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

这就是洛伦兹力公式，它满足相对论协变性要求，适用于任意惯性系。

相对论协变的力密度公式为

$$f_\mu = F_{\mu\nu}J_\nu$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}, \quad f_4 = \frac{i}{c}\vec{J}\cdot\vec{E}$$

其空间分量是洛伦兹力密度公式，第四分量中$\vec{J}\cdot\vec{E}$就是电磁场对电荷系统做功的功率密度。**电动力学的基本规律，包括Maxwell方程组和Lorentz力公式，都是适用于一切惯性参考系的物理学基本规律。**

6.5 关于相对论运动学中单位的说明

在阐述相对论运动学时，选择适当的单位制以消去繁琐的c因子是很方便的。为此，可以约定所有的动量、能量和质量均以能量单位来度量，速度以光速为单位来度量：

$$\left.\begin{matrix} cp \\ E \\ mc^2 \\ \dfrac{v}{c} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} p \\ E \\ m \\ v \end{cases}$$

这样相关的公式就会比较简洁

$$W^2 = \vec{p}^2 + m_0^2,$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E},$$

$$\cdots.$$

第7节
电磁场中带电粒子的拉氏量和哈密顿量

把带电粒子在电磁场中的运动方程，用分析力学中拉氏量和哈密顿量的形式表达出来，具有更普遍的意义，也方便讨论它们的量子力学性质。

参考Jackson书第12章

7.1 拉格朗日形式

最小作用原理： 一个力学系统是这样运动的，当它从时间t_1的状态运动到时间t_2的状态时，作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

是一个极值。考虑广义坐标q_i 和广义速度$\dot{q}_i$偏离实际路线的微小改变，要求$\delta S = 0$，可以得到**欧拉-拉格朗日运动方程**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

在保守力场中，运动粒子的拉矢量等于其动能和势能相减

$$L = T - V$$

对于非保守体系，只要能找出一个函数$L(q_i, \dot{q}_i)$，使得该系统的运动方程可以化为拉格朗日方程的形式，就可以用分析力学的理论来研究该系统的运动。

7.1 拉格朗日形式

带电粒子在电磁场中的运动方程：

$$\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})-\vec{v}\cdot\nabla\vec{A}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=q[-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]$$

$$=q[-\nabla(\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A})-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{v}\cdot\nabla\vec{A}]$$

其中坐标$\vec{x}$和速度$\vec{v}=\dot{\vec{x}}$是两个独立变量， ∇算符不作用在$\vec{v}$的函数上。矢势$\vec{A}=\vec{A}(t,\vec{x}(t))$，因此矢势对时间的变化率需要使用随体导数

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{A}\qquad\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla$$

则运动方程可以写为：

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)=-q\nabla(\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A})$$

同时注意到以下关于动量$\vec{p}$和矢势$\vec{A}$的等式

$$p_i=\frac{\partial}{\partial v_i}\left(-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)$$

$$A_i=\frac{\partial}{\partial v_i}\vec{v}\cdot\vec{A}$$

找到**拉格朗日函数**

$$\boldsymbol{L=-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-\mathbf{q}(\boldsymbol{\varphi}-\vec{v}\cdot\vec{\mathbf{A}})}$$

则运动方程可以写成拉格朗日形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$$

根据以上拉矢量的定义知道 $A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi\right), U_\mu = \gamma(\vec{v}, ic)$

$$\gamma L = -m_0 c^2 + qA_\mu U_\mu$$

很显然**γL是一个Lorentz不变量**。作用量S也是一个Lorentz不变量

$$S = \int L dt = \int \gamma L d\tau$$

从S的不变性这一普遍要求，就可以确定一个相对论性带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数。自由粒子情形下，粒子的运动状态由速度确定，由U_μ只能构成不变量$U_\mu U_\mu = -c^2$，因此γL只能是一个Lorentz不变量a

$$L = a\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

当$v \ll c$时，上式趋于非相对论动能。因此，自由粒子的拉格朗日函数

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

当粒子在电磁场A_μ中时，γL中还可以包含另一个不变量$bA_\mu U_\mu$。根据静电场中$v \ll c$时的情形可以定出常数$b = q$。由不变性的考虑就可以写出带电粒子在电磁场中运动的拉格朗日量。

7.2 哈密顿形式

广义动量P_i定义为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

它也称为与广义坐标q_i共轭的正则动量。系统哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, P_i) = P_i \dot{q}_i - L$$

用哈密顿量可以把运动方程表示为正则形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{P}_i} \\ \dot{\boldsymbol{P}}_i = -\dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{q}_i} \end{cases} \longleftarrow \quad \dot{P}_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

对于带电粒子在电磁场中的运动，其正则动量为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma m_0 v_i + qA_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$$

其中$\vec{p}$是粒子的机械动量，而粒子的正则动量等于机械动量加上$q\vec{A}$项。

带电粒子的哈密顿量为　　　　　　　　$\vec{p}\cdot\vec{v}+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}=\gamma m_0 c^2=W$

$$\mathcal{H}=\vec{P}\cdot\vec{v}-L=\vec{p}\cdot\vec{v}+q\vec{v}\cdot\vec{A}+q\left(\varphi-\vec{v}\cdot\vec{A}\right)+m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Longrightarrow\qquad \mathcal{H}=W+q\varphi=\sqrt{(\vec{P}-q\vec{A})^2c^2+m_0^2c^4}+q\varphi$$

W是自由粒子能量，$\mathcal{H}$是粒子总能量，它比W多了一项势能$q\varphi$。从上式可以看出，$\mathcal{H}$对应于$p_\mu+qA_\mu$的第四分量，引入正则四维动量

$$P_\mu=p_\mu+qA_\mu$$

则

$$P_\mu=(\vec{P},\frac{i}{c}\mathcal{H})$$

验证：把哈密顿方程合并后可推出洛伦茨力公式。

7.3 非相对论情形

当$v \ll c$时，以上给出的L和$\mathcal{H}$变为非相对论情形下相应的量。忽略一个不重要的附加常量，拉格朗日量和哈密顿量分别变为

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}m_0 v^2 - q\left(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) \\ \mathcal{H} = \dfrac{1}{2}m_0 v^2 + q\varphi = \dfrac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m_0} + q\varphi \end{cases}$$

L和$\mathcal{H}$仍然满足关系式

$$\mathcal{H} = \vec{P} \cdot \vec{v} - L$$

作业：(a)根据哈密顿原理（最小作用原理）证明：若有一些拉格朗日函数，它们互相只相差某坐标和时间函数的时间全导数，则在下述意义上它们是等效的，即这些函数都给出相同的欧拉-拉格朗日运动方程。

(b)证明：对带电粒子拉格朗日函数（7.11）式中的势施行规范变换$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$，只不过产生另一等效的拉格朗日函数。