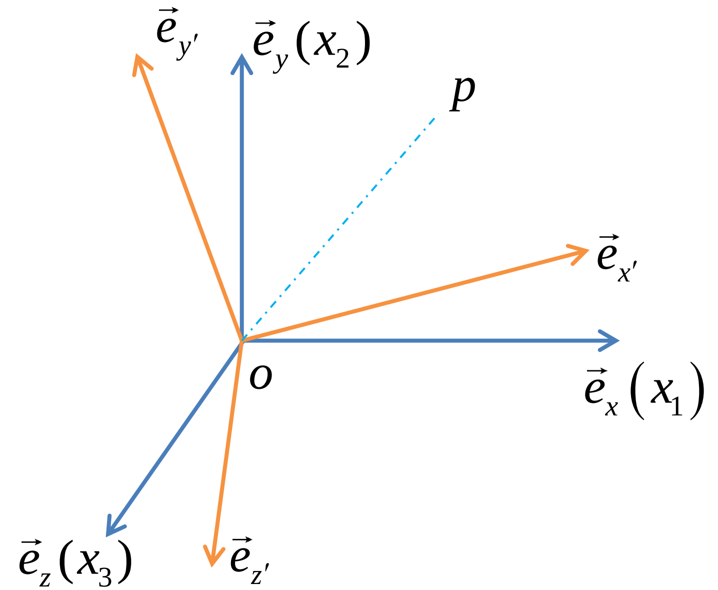
中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

# 电动力学 第六章
# 相对论的四维形式

# （一）三维空间正交变换




设 $\sum$ 和 $\sum'$ 是两个有共同原点的三维正交坐标系

$\sum'$ 相对 $\sum$ 有一转动

由于三维欧氏空间是各向同性线性空间，因此任意一点 $p$ 的坐标变换应是线性变换

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}}$$

写成

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}}$$

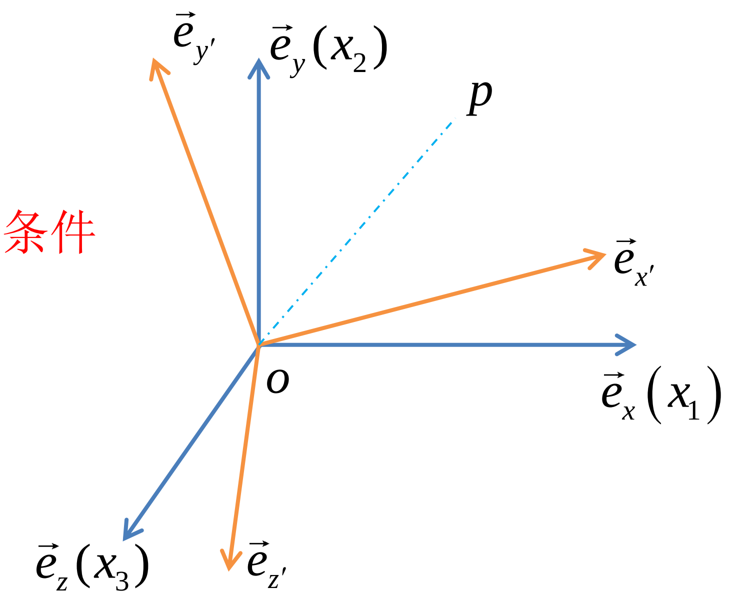
写成矩阵形式 $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

简写成 $X' = AX$

在空间转动（用坐标转动表示）下，
op两点之间的距离保持不变

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = const}$$

正交变换条件




坐标变换可写成：

$$x_i' = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_j$$

Einstein 求和惯例：

今后，若在方程或等式的任何一项中，凡是出现重复下标，都意味着该项对重复下标求和，因而求和号略掉，据此：

$$\boxed{x_i' = a_{ij} x_j}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$\boxed{x_i x_i = x_j' x_j' = const}$$

重复下标代表求和！！

将坐标变换代入距离公式，有：

$$x_i x_i = a_{ji} x_i a_{jk} x_k$$

由此可知，变换矩阵元素必须满足：

$$a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

通常以此作为正交变换条件

为求坐标逆变换：

$$x_i' = a_{ij} x_j \quad \Rightarrow \quad a_{il} x_i' = a_{il} a_{ij} x_j = \delta_{lj} x_j = x_l$$

$$\boxed{x_l = a_{il} x_i'}$$

注意下标的次序！

用矩阵来表示：

$$X' = AX$$

其转置操作（列变行）：

$$X' = (AX) = X A$$

$A$ 是 $A$ 的转置矩阵（行变列，列变行）

要使变换满足正交变换条件，变换矩阵必须满足：

$$AA = AA = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## （二）物理量按空间转动变换性质的分类

### 1.标量(scalar)

这类量无空间取向，用一个数表示即可，且在空间转动下保持不变

$\Sigma$ 系： $\phi$　　$\Sigma'$ 系： $\phi'$　　则： $\boxed{\phi=\phi'}$　　标量不变性

### 2.矢量(vector)

这类量有一定的空间取向，由3个数 $v_1, v_2, v_3$ 组成的有序集合，且在空间转动下，每个分量的变换性质与坐标变换相同，即：

$$\boxed{v_i' = a_{ij} v_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

这三个数组成的集合称为三维空间矢量

例：算符 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$ 属于矢量算符

$\Sigma$ 系： $\frac{\partial}{\partial x_i}$　　$\Sigma'$ 系： $\frac{\partial}{\partial x_i'}$　　由于： $x_l = a_{il} x_i'$

故： $$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(a_{ij} x_i'\right)}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j} = a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

与坐标变换性质相同

例：Laplace算符 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ 则属于标量算符

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_i'} = a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k} = \delta_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

## 3.二阶张量(2-tensor)

这类量的空间取向比矢量更复杂，由 $3^2=9$ 个数 $T_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ 组成有序集合，且在空间转动下，每个分量的变换性质按如下方式变换：

$$\boxed{T_{ij}' = a_{ik}a_{jl}T_{kl}} \qquad (i,j,k,l=1,2,3)$$

则这9个数构成的集合称为三维空间二阶张量

上述定义可推广到任意阶（n阶）张量

当 $n=0$，有 $3^0=1$个分量（即零阶张量——标量）

当 $n=1$，有 $3^1=3$个分量（即一阶张量——矢量）

## 4.张量指标收缩——张量降阶

张量的重复指标——意味着对该指标的求和（即指标收缩）

张量中的自由指标（非重复指标）的数目表示该量的性质

例如： $x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 标量（自由指标数目为零）

矢量 $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i$ $A_i$ 是矢量的分量（自由指标数目为1）

并矢（二阶张量） $\vec{A}\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i \sum_{j=1}^{3} B_j \vec{e}_j = \sum_{i,j} A_i B_j \vec{e}_i \vec{e}_j$

$A_i B_j$ 是二阶张量的分量（自由指标数目为2）

若以 $\delta_{ij}$ 乘一量，使所得的量的指标收缩，则运算结果为将使得张量降阶

例如： $v_i'$ 和 $w_i'$ 均为矢量，但

$$v_i' w_i' = a_{ij} v_j a_{ik} w_k = a_{ij} a_{ik} v_j w_k = \delta_{jk} v_j w_k = v_j w_j \qquad \text{——标量}$$

例： $T_{ij}'$ 为二阶张量， $w_i'$ 为矢量，但

$$\underline{T_{ij}' w_j'} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} a_{jm} w_m = a_{ik} a_{jl} a_{jm} T_{kl} w_m = a_{ik} \delta_{lm} T_{kl} w_m = a_{ik} \underline{T_{km} w_m} \qquad \text{——矢量}$$

# （三）Lorentz变换的四维形式

Lorentz变换：

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma v t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= -\gamma \frac{v}{c^2} x + \gamma t \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1' &= \gamma x_1 - \gamma v t \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ ct' &= -\gamma \beta x_1 + \gamma c t \end{aligned}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

满足间隔不变性： $c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = c^2t'^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$

即： $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2t'^2 = const$

若在三维欧氏空间 $\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$

的基础上，引入第四维虚数坐标 $\boxed{x_4 = ict}$

构成四维正交的复空间————Minkovsiky空间 $\boxed{x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\vec{x}, ict)}$

间隔不变性可写成：

$$-s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = -s'^2 = const$$

即：

$$x_\mu x_\mu = x'_\mu x'_\mu = const \qquad \mu = 1,2,3,4$$

Lorentz变换可表示为：

$$x_1' = \gamma x_1 + 0 + 0 + i\beta\gamma(ict)$$

$$x_2' = 0 + x_2 + 0 + 0$$

$$x_3' = 0 + 0 + x_3 + 0$$

$$ict' = -i\beta\gamma x_1 + \gamma(ict)$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

简写成 $X' = AX$ 或：$\boxed{x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu}$ $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

变换矩阵 $$\boxed{a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

逆变换 $$\boxed{a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

它满足：$$AA = AA = I$$

即：$$a_{\mu\nu} a_{\mu\tau} = \delta_{\nu\tau}$$

Lorentz变换在形式上可看成是复四维正交空间转动下的坐标变换

# （四）四维协变量

将三维空间转动下对物理量的分类加以推广

## 1. Lorentz标量（不变量）

在Lorentz变换下保持不变的量

$$\boxed{\phi = \phi'}$$

## 2. 四维协变矢量

由4个数组成的有序集合，且在Lorentz变换下，
每个分量的变换性质都是：

$$\boxed{v'_\mu = a_{\mu\nu} v_\nu} \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

则这四个数构成四维协变矢量

## 3. 二阶张量

由 $4^2 = 16$ 个数 $T_{\mu\nu}$ 组成的有序集合，且在Lorentz变换
下，每个分量均满足变换关系：

$$\boxed{T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}}$$

则这16个数构成四维（二阶）张量

# 典型物理量的分类

## 1. 间隔——Lorentz标量

$\Sigma$ 系： $s^2$ 或 $ds^2$  $\Sigma'$系： $s'^2$或 $ds'^2$

有： $\boxed{s^2 = s'^2 \quad \text{或} \quad ds^2 = ds'^2}$

## 2. 固有时——Lorentz标量

因为： $ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + (dct)^2 = -dx_\mu dx_\mu = ds'^2 = const$

固有时：同地点发生的两事件的时间差

$$ds^2 = -\cancel{dx_1^2} - \cancel{dx_2^2} - \cancel{dx_3^2} + (dct)^2 = c^2 d\tau^2$$

固有时： $\boxed{d\tau = \dfrac{ds}{c} = const}$

## 3. 四维速度

通常意义下的速度矢量： $\vec{u} = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \left(\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right) = (u_1, u_2, u_3)$

而 $\boxed{\dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma_u}$

定义四维速度 $\boxed{u_\mu = \dfrac{dx_\mu}{d\tau}}$ 形式上与 $\vec{u} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ 相似

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \gamma_u \frac{d}{dt}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \gamma_u\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \frac{dx_4}{dt}\right)$$

$$= \gamma_u(u_1, u_2, u_3, ic) = \left(\frac{u_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{u_3}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, ic\gamma_u\right)$$

$$\boxed{U_\mu = (\gamma_u \vec{u}, ic\gamma_u)}$$

由于 $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$ 而 $d\tau = const$

因此，四维速度 $u_\mu$ 在Lorentz变换下，有

$$u'_\mu = \frac{dx'_\mu}{d\tau} = a_{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{d\tau} = a_{\mu\nu} u_\nu$$ ——四维协变矢量

## 4. 四维波矢

设一列频率为 $\omega$ 的波，波矢为 $\vec{k} = \left(k_1, k_2, k_3\right)$，相位为 $\phi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$

构造四维波矢 $$\boxed{k_\mu = \left(\vec{k}, i\frac{\omega}{c}\right)}$$

$$\phi = k_\mu x_\mu = \left(\vec{k}, i\frac{\omega}{c}\right)(\vec{x}, ict) = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \left(i\frac{\omega}{c}\right)(ict) = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$$ 是波的相位

要满足相位不变性 $$\boxed{k_\mu x_\mu = k'_\mu x'_\mu = const}$$

$k_\mu$ 必须是四维协变矢量 $$\boxed{k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu}$$

$$\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \\ i\omega'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ i\omega/c \end{pmatrix}$$

Doppler效应：
$$\boxed{\begin{aligned} k'_1 &= \gamma k_1 + i\beta\gamma(i\omega/c) = \gamma\left(k_1 - v\omega/c^2\right) \\ k'_2 &= k_2 \\ k'_3 &= k_3 \\ \omega' &= \gamma(\omega - vk_1) \end{aligned}}$$

# （五）物理规律的协变性

Einstein的一个重要假设是，惯性系对任何物理规律都是等价的，或者说，一个表示物理定律的方程式在任何惯性系中都有完全相同的形式————称为物理规律的协变性。

惯性系之间的时空变换是遵从Lorentz 变换，如果某方程在Lorentz 变换下，其形式保持不变，则称它是Lorentz协变的

因此，只要我们知道某方程式中各物理量的变换性质，就可以看出它是否具有协变性

定理：　任何一个方程，如能表示为四维张量（0，1，2阶）的形式，且各项的张量阶数相同，则此方程必具有Lorentz协变性

例如，在某个惯性系 $\sum$ 中，表示某定律的方程为：

$$F_\mu = G_\mu$$

如果 $F_\mu$ 和 $G_\mu$ 都是四维协变矢量，即在惯性系变换下，有：

$$F'_\mu = a_{\mu\nu} F_\nu \qquad\qquad G'_\mu = a_{\mu\tau} G_\tau$$

则在其他任一惯性系 $\sum'$ 中，仍有

$$F'_\mu = G'_\mu$$