§1.5　近轴理论中的矩阵方法

从几何光学观点看来，成像光线在共轴球面折射系统中的传播，就是在均匀介质中的平移和介质分界面上的折射。近轴理论中，平移和折射的光线状态变换是线性的，适宜于用矩阵运算。光线追迹的矩阵方法源于二十世纪三十年代，由 T.Smith 创立，但是当时并未得到普遍关注和重视，直到二十世纪六十年代才被广泛关注和使用。进一步，成为光学设计和布光模拟的主要方法。深入阅读可以参考 Halbach, K. (1964). "Matrix Representation of Gaussian Optics." American Journal of Physics **32**(2): 90-108.[1]

在共轴球面系统近轴理论中，这些线性变换的因子很简单，用计算机作矩阵运算也十分方便。

（一）光线状态的描述及其变换规律

（1）光线状态的描述

在近轴理论中，通过共轴球面系统的光线始终保持在同一平面内。因此，P 点光线 L 的状态可用两个参量来描述：一为光线的斜角 u 和介质折射率 n 的相乘积 nu；另一为 P 点离光轴的高度 y，即 P 点光线状态参量为（nu， y），见图（1-32）。

【符号规则】

1. 以光轴为一边的角度的符号。以光轴为起始边，光线为终止边，若顺时针旋转锐角可以自始边至终边，则该角度为正值，否则为负值。
2. 以法线为一边的角度的符号。以光线为起始边，法线为终止边，若顺时针旋转锐角可以自始边至终边，则该角度为正值，否则为负值。

图 1-32　光线的状态参量

图（1-33）为共轴球面系统中某折射球面，过球面 M 点的入射线状态为（nu， y），折射状态为（$n'u'$， y'），近轴近似下，折射定律为

$$n'i = ni$$

[1]深入阅读可以参考 Halbach, K. (1964). "Matrix Representation of Gaussian Optics." American Journal of Physics **32**(2): 90-108.

图 1-33　折射过程光线状态的变换

而　$i' = \varphi - u'$,　$i = \varphi - u$　$\varphi = \dfrac{y}{r}$

将此代入折射定律得

$$n'u' = nu + \frac{n' - n}{r} y$$

于是，过 M 点的入射线、折射线状态变换可写成下列形式：

$$\begin{aligned} n'u' &= nu + \Phi y \\ y' &= 0 + y \end{aligned} \qquad (1\text{-}40)$$

式中 $\Phi = \dfrac{n' - n}{r}$ 是折射球面光焦度。上式表示折射过程中光线状态的变换是线性的。因此，可用矩阵符号表示为：

$$\begin{pmatrix} n'u' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nu \\ y \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}41)$$

上式中的二行二列矩阵称为折射矩阵（Refraction matrix），用 R 表示，即

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}42)$$

折射矩阵 R 表征了光焦度为 Φ 的折射球面，对光线状态的变换作用，用（1-41）式中的两个二维列矩阵，分别表征入射线和折射线的状态，令

$$L = \begin{pmatrix} nu \\ y \end{pmatrix}, \qquad L' = \begin{pmatrix} nu \\ y \end{pmatrix},$$

则（1-41）式可简写为

$$L' = RL。$$

上式表示，只要将折射矩阵 R 对入射线状态矩阵 L 作用，便可得折射线状态矩阵 L'。

（3）平移过程中光线状态变换规律

共轴球面系统中相邻两折射球面之间，光线是在同一种均匀介质中沿 $M_1 M_2$ 直线传播的，见图（1-34）。球面 O_1 上 M_1 点的折射线状态矩阵 L_1' 和球面 O_2 上 M_2 点的入射线状态矩阵 L_2 分别为：

图 1-34　平移过程光线状态的变换

$$L_1' = \begin{pmatrix} n_1' u_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} n_2 u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}。$$

现讨论 L_2 和 L_1' 间平移变换的规律性。由于 $n_1' = n_2$，$u_1' = u_2$ 并考虑到近轴近似，应有

$$n_2 u_2 = n_1' u_1'$$
$$y_2 = d_1(-u_1') + y_1'$$

即

$$\begin{aligned} n_2u_2 &= n_1'u_1' + 0 \\ y_2 &= -\frac{d_1}{n_1'} n_1'u_1' + y_1' \end{aligned} \qquad (1\text{-}43)$$

上两式表示，光线在平移过程中，状态参量的变换也是线性交换，同样可用矩阵符号表示为

$$\begin{bmatrix} n_2u_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-d_1}{n_1'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1'u_1' \\ y_1' \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}44)$$

上式中的二行二列矩阵称为平移矩阵（Translation matrix），用 T_{21} 表示，即

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-d_1}{n_1'} & 1 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}45)$$

（1-44）式可简写为

$$L_2 = T_{21} L_1'$$

上式表示，只要将平移矩阵 T_{21} 对平移前光线状态矩阵 L_1' 作用，便可得平移后光线状态矩阵 L_2。

（二）系统矩阵

图 1-35　经共轴球面系统的光线状态变换

由 N 个折射球面组合的共轴系统，如图（1-35）所示。在近轴近似下，球面 O_1 上 M_1 点入射线和球面 O_N 上 M_N 点出（折）射线状态矩阵分别为

$$L_1 = \begin{pmatrix} n_1u_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad L_N' = \begin{pmatrix} n_N'u_N' \\ y_N' \end{pmatrix}$$

入射线进入系统，经过 N 次折射和 $N-1$ 次平移后成为出射线。令 R_1、R_1、…R_N 表第一、第二、…第 N 个折射球面的折射矩阵；T_{21}、T_{32}、…、$T_{N,N\text{-}1}$ 表第一第二球面间、第二第三球面间……、第 $N-1$ 第 N 球面间的平移矩阵。则

$R_1L_1 = L_1'$（过 O_1 球面 M_1 点折射线状态矩阵）

$T_{21} L_1' = L_1' R_1 L_1$

$= L_2$ （O_2 球面上 M_2 点入射线状态矩阵）

$R_2 L_2 = R_2 T_{21} R_1 L_1$

$= L_2'$（O_2 球面上 M_2 点折射线状态矩阵）

依此类推，得系统最后折射球面 O_N 上 M_N 点出射线状态矩阵为

$$L_N' = R_N T_{N,N-1} R_{N-1} \cdots\cdots R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1 L_1 \qquad （1\text{-}46）$$

【值得指出】矩阵乘法不满足对易律，必须按入射光传播自左向右的顺序，依次从右向左排列。从（1-42）（1-45）式看出，在近轴理论中，折射矩阵和平移矩阵的矩阵元只与共轴系统结构参数有关，与光线状态参数无关。定义矩阵

$$S = R_N T_{N,N-1} R_{N-1} \cdots R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1 \qquad （1\text{-}47）$$

为系统矩阵（System matrix），这么一来，（1-46）式可简写成

$$L_N' = S L_1 \qquad （1\text{-}48）$$

只要知道光学系统的系统矩阵 S，便可按上式将入射线状态 L_1 变换为出射状态 L_N'。由于折射矩阵 R 和平移矩阵 T 都是二行二列矩阵，所以系统矩阵必定也是二行二列矩阵，即系统矩阵 S 可写为下列形式：

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \qquad （1\text{-}49）$$

S_{ij} 称为系统矩阵 S 的第 i 行第 j 列矩阵元。下面即将看出，系统矩阵元完全决定了光学系统的成像性质。由于折射矩阵 R 和平移矩阵 T 的行列式（determinant）（分别记为 det$R$、det$T$）均等 1，按矩阵乘积的行列式等于各矩阵行列式的乘积这一性质，可以判定：

$$\det S = (\det R_N)(\det T_{N,N-1})(\det T_{N-1}) \cdots (\det R_2)(\det T_{21})(\det R_1) \equiv 1$$

即

$$S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} \equiv 1 \qquad (1\text{-}50)$$

上式表明四个系统矩阵元中，只有三个是独立的，det$S$ =1 的特性也常用来验算所求系统矩阵元是否正确。

例〔1.5-1〕求单一球面折射系统、厚透镜、薄透镜的系统矩阵 S。

〔解〕

（1）图（1-36）所示为单一球面折射系统，其系统矩阵 S，当然就是折射矩阵 R 本身，即

$$S = R = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

图 1-36　单一球面折射系统

其中 $\Phi = \dfrac{n' - n}{r}$

为单一球面折射系统的光焦度。

（2）设厚透镜物方折射率为 n，像方折射率为 n'，透镜材料折射率为 n_L，厚度为 d，如图（1-37）所示。按（1-47）系统矩阵公式得厚透镜系统矩阵

图 1-37　厚透镜

$$
\begin{aligned}
S &= R_2 T_{21} R_1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d}{n_L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{d}{n_L}\Phi_2 & \Phi_1+\Phi_2-\dfrac{d}{n_L}\Phi_1\Phi_2 \\ -\dfrac{d}{n_L} & 1-\dfrac{d}{n_L}\Phi_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

验证： $\det S = (1-\dfrac{d}{n_L}\Phi_2)(1-\dfrac{d}{n_L}\Phi_1)-(\Phi_1+\Phi_2-\dfrac{d}{n_L}\Phi_1\Phi_2)(-\dfrac{d}{n_L}) = 1$

（3）将 $d = 0$ 代入上式中，便得薄透镜的系统矩阵

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \Phi_1+\Phi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下一节即将证明，系统矩阵元恒等于系统的光焦度。即 $S_{12} = \Phi$。

（三）物像关系式

图（1-38）所示为 N 个折射球面组成的共轴系统，设系统矩

图 1-38　用矩阵方法计算物像关系示意图

阵 S 为已知。有垂轴平面物 AB，物高为 y，在近轴近似下成一理想像 $A'B'$，像高为 y'。约定物距 l、像距 l' 分别以 O_1、O_N 为计算原点，即 $l = AO_1$，$l' = O_N A'$，正负规则同前。

物点 B 的入射线状态矩阵 L_B 和共轭出射线在 B' 点的状态矩阵 L'，分别为

$$L_B = \begin{pmatrix} n_1 u_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad L'_{D'} = \begin{pmatrix} n'_N u'_N \\ y' \end{pmatrix}$$

B 到 M_1 的平移矩阵 T_{1B} 和 M_N 到 B' 的平移矩阵 $T_{L'B}$ 分别为

$$T_{1^B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-l}{n_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{1^N} == \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{n'_N} & 1 \end{bmatrix}$$

按光线状态变换的矩阵方法，应有

$$L_{B'}' = T_{B'}\,ST_{1B}\,L_B \qquad (1\text{-}51)$$

$$= A\,L_B$$

其中 $A = T_{B'N}\,ST_{1B}$ （1-52）

常称为物像矩阵（Object-image matrix），将各量代入（1-51）式得

（1-53）

从上式可得

$$y = (S_{21} - \frac{l}{n_1}S_{22} - \frac{l'}{n'_N}S_{11} + \frac{l'l}{n_1 n'_N}S_{12})n_1u_1 +$$

$$(S_{22} - \frac{l'}{n'_N}S_{12})y.$$

按理想成像性质，y 应该与 u_1 无关，因此要求

$$S_{21} - \frac{l}{n_1}S_{22} - \frac{l'}{n'_N}S_{11} + \frac{l'l}{n_1 n'_N}S_{12} = 0 \qquad (1\text{-}54)a$$

$$y = (S_{22} - \frac{l'}{n'_N}S_{12})y. \qquad (1\text{-}54)b$$

从（1-54）a 式可得物像位置关系的公式

$$\frac{l'}{n'_N} = \frac{S_{21} - (\dfrac{l}{n_1})S_{22}}{S_{11} - (\dfrac{l}{n_1})S_{12}} \qquad (1\text{-}55)$$

上式中物距 l、像距 l' 各以顶点 O_1、O_N 为原点，所以对折射系统而言，$l>0$ 表实物、$l<0$ 表虚物； $l'>0$ 表实像、$l'<0$ 表虚像。

（1-53）式中二行二列矩阵为物像矩阵 A，其行列式应等于 1，考虑（1-54）式的要求，应有

$$\left(S_{11}-\frac{l}{n_1}S_{12}\right)\left(S_{22}-\frac{l'}{n'_N}S_{12}\right)=1$$

从上式和（1-54）b 可得系统的垂轴放大率 β 表示式：

$$\beta=\frac{y'}{y}=S_{22}-\frac{l'}{n'_N}S_{12}=\frac{1}{\left(S_{11}-\dfrac{l}{n_1}S_{12}\right)} \qquad (1\text{-}56)$$

例〔1.5-2〕由折射率 n_L=3/2 材料制成的，半径 R = 4cm 的球透镜，放在空气中，如图（1-39）所示，物放在球心左侧 10cm 处，求像的位置、虚实和放大率。

图 1-39　球透镜

〔解〕　$\Phi_1=\dfrac{n_L-1}{R}=\dfrac{1}{0.08}D$,　$\Phi_2=\dfrac{1-n_L}{-R}=\dfrac{1}{0.08}D$,

d = 2R = 0.08m

$S=R_2T_{21}R_1=$

$$S=R_2T_{21}R_1=\begin{pmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-d}{n_L} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{0.08}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-0.16}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{0.08}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{0.06}\\ \dfrac{-0.16}{3} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

验证：$\det S=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{0.06}\left(-\dfrac{0.16}{3}\right)=1$，计算无误。

将 $\dfrac{l}{n_1}=0.06\,\text{m}$，　　$n_2'=1$ 代入（1-55）（1-56）式得

$$l'=n_2'\frac{S_{21}-\left(\dfrac{l}{n_1}\right)S_{22}}{S_{11}-\left(\dfrac{l}{n_1}\right)S_{12}}$$

$$=\frac{-\frac{0.16}{3}+(-0.06)(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}+(-0.06)(\frac{1}{0.06})}=0.11(\mathrm{m})\text{（实像）}$$

$$\beta=\frac{1}{S_{11}-(\frac{l}{n_1})S_{12}}=\frac{1}{\frac{1}{3}+(-0.06)(\frac{1}{0.06})}$$

$$=-\frac{3}{2}\text{(倒立、放大)}$$

（四）共轴球面系统的主点　焦点和节点

（1）顶主距

设共轴球面系统的系统矩阵 S 为已知，令

$l_H=HO_1$ 表系统第一个球面顶点 O_1 至物方主点 H 的距离（物方顶主距）；

$l'_{H'}=O_NH'$ 表系统最后一个球面顶点 O_N 至像方主点 H' 的距离（像方顶主距），正负号规定同前。

将 $\beta=1$，$l=l_H$，$l'=l'_H$ 代入（1-56）式得

$$S_{22}-\frac{l'}{n'_N}S_{12}=\frac{1}{S_{11}-(\frac{l_H}{n_1})S_{12}}=1$$

解上两式得：

$$l_H=\frac{n_1(S_{11}-1)}{S_{12}}$$

$$l'_H=\frac{n'(S_{22}-1)}{S_{12}} \qquad \text{（1-57）}$$

注意，此时按照符号规定，H 在 O_1 的左方，H'在 O_N 的右方。（1-57）式为用系统矩阵元计算顶主距公式，由它可定出主点的位置。

（2）顶焦距

与光轴上无穷远像点共轭的物点 F 称为物方焦点，第一个球面顶点 F 到 O_1 的距离 l_F 称为物方顶焦距。用 $l'=\infty$，$l=l_F$ 代入（1-55）式得

$$S_{11}-\frac{l_F}{n_1}S_{12}=0$$

$$\therefore \quad l_F=\frac{n_1S_{11}}{S_{12}} \qquad \text{（1-58）}a$$

与光轴上无穷远物点共轭的像点 F 称为像方焦点，最后一个球面顶点 O_N 到 F' 的距离 l_F' 称为像方顶焦距。用 $l=\infty$，$l'=l_F'$ 代入（1-55）式得

$$l'_F=\frac{n'_NS_{22}}{S_{12}} \qquad \text{（1-58）}b$$

上二式为用系统矩阵元计算顶焦距公式。

图 1-40　共轴系统的主要点和焦点位置

（3）焦距

按定义：系统的物方焦距 $f = HF$，像方焦距 $f' = H'F'$。只有 O_1 和 H、O_N 和 H' 重合的条件下，焦距才和顶焦距一致。

从图（1-40）可以看出，焦距和顶焦距之间有下列关系

$$f = l_F - l_H, \qquad f' = l_F' - l_{H'}$$

将（1-57）（1-58）式代入上两式，得

$$f = \frac{n_1}{S_{12}}, \qquad f' = \frac{n_1}{S_{12}} \qquad （1-59）$$

上两式为用系统矩阵元计算焦距公式。显然，系统矩阵元 S_{12} 为系统光焦度 Φ。即

$$\Phi = \frac{n_1}{f} = \frac{n_N'}{f'} = S_{12} \qquad （1-60）$$

从（1-54）（1-56）（1-60）式看出，（1-53）式中物像矩阵 A 可表示为

$$A = \begin{pmatrix} 1/\beta & \Phi \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad （1-61）$$

有了焦距表示式（1-59），可以将系统顶主距，顶焦距表示式（1-57）（1-58）改写成更为对称的形式

$$l_H = \frac{n_1(S_{11}-1)}{S_{12}} = f(S_{11}-1)$$
$$l_H' = \frac{n_N'(S_{22}-1)}{S_{12}} = f(S_{22}-1) \qquad （1-62）$$

$$l_F = \frac{n_1 S_{11}}{S_{12}} = fS_{11}$$
$$l_F' = \frac{n_N' S_{11}}{S_{12}} = f'S_{22} \qquad （1-63）$$

从（1-63）式得出

$$S_{11} = \frac{l_F}{f} \qquad S_{22} = \frac{l_{F'}'}{f'}$$

上两式表示：S_{11} 为物方顶焦距与物方焦距的比值；S_{22} 为像方顶焦距与像方焦距的比值。$S_{11} = S_{22} = 1$ 时，表示顶焦距等于焦距，这只有 H 和 O_1、H' 和 O_N 重合才有可能。从这里也可看出单球面折（反）射系统、薄透镜系统的 $S_{11} = S_{22} = 1$ 的道理。

（4）顶节距和焦节距

从（1-53）式得

$$n'_N u'_N = (S_{11} - \frac{1}{n_1} S_{12}) n_1 u_1 + S_{12} y$$

节点 N、N' 是系统光轴上角放大率等于+1 的一对共轭点，即 $u_N' = u_1$，$y = y' = 0$，l_N 表物方顶节距，将这些代入上式得

$$l_N = \frac{(-\frac{n'_N}{n_1} + S_{11}) n_1}{S_{12}} = (S_{11} - \frac{n'_N}{n_1}) f \qquad (1\text{-}65)$$

将上式代入（1-55）式得像方节点 N' 之顶节距

$$l'_{N'} = \frac{(S_{22} - \frac{n_1}{n'_N}) n'_N}{S_{12}} = (S_{22} - \frac{n_1}{n'_N}) f' \qquad (1\text{-}66)$$

将上两式与（1-62）式对比，可以看出在 $n_1 = n'$ 条件下，H 和 N、H' 和 N' 各自重合，利用顶节距不难得出焦节距表示式为

$$x_N = l_N - l_F = -f\,', \qquad x'_{N'} = l'_{N'} - l'_{F'} = -f \qquad (1\text{-}67)$$

（五）高斯公式和牛顿公式

（1-55）式表示的物像公式是以球面系统前后顶点 O_1、O_N 为计算物距、像距的计算原点。若选择主点 H、H' 或焦点 F、F' 为物距、像距的计算原点，只要将

$$l = s + l_H = s + f\,(S_{11} - 1)$$

$$l' = s' + l'_{H'} = s' + f'\,(S_{22} - 1)$$

代入（1-55）式，注意 $S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = 1$ 关系，不难得出熟悉的高斯公式，只要将

$$l = x + l_F = x + f S_{11}$$

$$l' = x' + l'_{F'} = x' + f' S_{22}$$

代入（1-55）式，不难得出熟悉的牛顿公式。

值得指出，高斯公式、牛顿公式和（1-55）式三者是等价的。前两者有形式简单、对称等优点。但对复杂的共轴系统，不能简单由 s、x；s'、x' 之正负定物像之虚实者，后在形式上复杂一些，但 l、l' 之正负直接和物像的虚实有联系。

例〔1.5-3〕摄远物镜是一种焦距长，暗箱却较短的照相机镜头。例如可由 $\Phi_1 = 5\text{D}$，$\Phi_2 = -\frac{50}{3}\text{D}$ 的两薄透镜。间距 $d_1 = 0.16\text{m}$，共轴组合而成。整个系统放在空气中，试计算该物镜的主平面位置和焦距。

〔解〕摄远物镜参数绘于图（1-41）中，其系统矩阵为：

$$S = R_2 T_{21} R_1$$

$$S=\begin{pmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{d'}{n_1'} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-50}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -0.16 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{3} & \dfrac{5}{3}\\ -0.16 & 0.2\end{pmatrix}$$

图 1-41　摄远物镜

验证：　$\det S=\dfrac{11}{3}\times 0.2-\dfrac{3}{5}(-0.16)=1$，计算无误。

按（1-59）式得

$$f'=f=\frac{1}{S_{12}}=\frac{3}{5}=0.60\,(\mathrm{m})$$

按（1-62）式得

$$l_H=f(S_{11}-1)=\frac{3}{5}\left(\frac{11}{3}-1\right)=1.60\,(\mathrm{m})$$

$$l'_{H'}=f'(S_{22}-1)=\frac{3}{5}(0.2-1)=-0.48\,(\mathrm{m})$$

从本例可以看出，若在焦距 f_1' 的凸透镜后面，适当位置放上一个凹透镜，可以得到焦距比 f_1' 为大，但像方顶焦距 l_F'，却比像方焦距 f' 小的组合系统，这就是摄远镜，读者不难想出，将摄远镜倒过来用，有何特点。

例〔1.5-4〕有三个薄透镜，焦距分别为 $f_1'=0.20$m，　$f_2'=0.10$m，$f_3'=-0.20$m，共轴地放在空气中使用，$d_1=d_2=0.10$m。求组合系统主点位置和焦距。

图 1-42　求组合系统基点的例子

〔解〕 $\varPhi_1=\dfrac{n_1'}{f_1}=\dfrac{1}{0.20}=5.0(\mathrm{D})$

$$\varPhi_2=-\frac{n_2'}{f_2}=\frac{1}{0.10}=10(\mathrm{D})$$

$$\varPhi_3=-\frac{n_3'}{f_3}=\frac{-1}{0.20}=-5.0(\mathrm{D})$$

组合系统的系统矩阵为：

$S=R_3\,T_{32}\,R_2\,T_{21}\,R_1$

$$S=\begin{pmatrix}1 & \Phi_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{d_2}{n_2'} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{d_1}{n_1'} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -5.0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -0.10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -0.10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5.0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.50 & 12.5\\ -0.10 & -0.50\end{pmatrix}$$

验证：$\det S=(0.50)(-0.50)-(12.5)(-0.10)$

$=1$　计算无误。

按（1-62）（1-59）式得：

$$l_H=\frac{n_1(S_{11}-1)}{S_{12}}$$

$$=\frac{1\times(0.50-1)}{12.5}=-0.04(\mathrm{m})$$

$$l'_{H'}=\frac{n'_3(S_{22}-1)}{S_{12}}$$

$$=\frac{1\times(-0.50-1)}{12.5}=-0.12(\mathrm{m})$$

$$f'=f=\frac{1}{S_{12}}$$

$$=\frac{1}{12.5}=0.08(\mathrm{m})$$

从本例可看出：即使组合系统是由 3 个以上的子系统共轴组成，求其主点也只要根据各子系统结构参数，依然可直接定出系统矩阵，从而定出系统主点 H、H' 和焦点 F、F' 的位置。若用两两子系统逐次组合法定系统主点和焦点，则每次均需要更换原点。组合系统的子系统越多，计算就越繁。假如知道了一个复杂的共轴球面系统的主点 H、H' 和焦点 F、F'，既可用高斯公式或牛顿公式求像，也可用作图法求像。