



# 《通信原理》

(06 随机过程通过系统)

蔡志岗

光学与光学工程系

中山大学物理学院

[lasers@netease.com](mailto:lasers@netease.com)

13316105077

光信息实验室：84110909

84110909

# 第三章：随机过程

3.0 随机变量的统计特征

3.1 随机过程的一般表述

3.2 平稳随机过程

3.3 高斯随机过程

**3.4 随机过程通过系统的分析**

**3.5 窄带高斯噪声**

**3.6 周期平稳随机过程**

## 2.7 随机过程通过系统的分析

我们知道，随机过程是以某一概率出现的样本函数的集合。因此，我们可以将随机过程加到线性系统的输入端理解为是随机过程的某一可能的样本函数出现在线性系统的输入端。所以，我们可以认为**确知信号通过线性系统的分析方法仍然适用于平稳随机过程通过线性系统的情况。**

线性系统的输出响应 $v_o(t)$ 等于输入信号 $v_i(t)$ 与冲激响应  $h(t)$ 的卷积，即

$$v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_i(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

(2.113)

若  $v_o(t) \Leftrightarrow V_o(\omega)$ ,  $v_i(t) \Leftrightarrow V_i(\omega)$ ,  $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$

则有 
$$V_o(\omega) = H(\omega)V_i(\omega) \quad (2.114)$$

若线性系统是物理可实现的, 则

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^t v_i(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

或

$$v_o(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)v_i(t-\tau)d\tau \quad (2.115)$$

如果把  $v_i(t)$  看作是输入随机过程的一个实现，则  $v_o(t)$  可看作是输出随机过程的一个实现。因此，只要输入有界且系统是物理可实现的，则当输入是随机过程  $\xi_i(t)$  时，便有一个输出随机过程  $\xi_o(t)$ ，且有

$$\begin{aligned}\xi_o(t) &= \int_0^\infty h(\tau) \xi_i(t - \tau) d\tau \\ &= \xi_i(t) \otimes h(t)\end{aligned}\tag{2.116}$$

图2-9所示为平稳随机过程通过线性系统的框图，假定输入 $\xi_i(t)$ 是平稳随机过程，现在来分析系统的输出过程

$\xi_0(t)$  的统计特性。

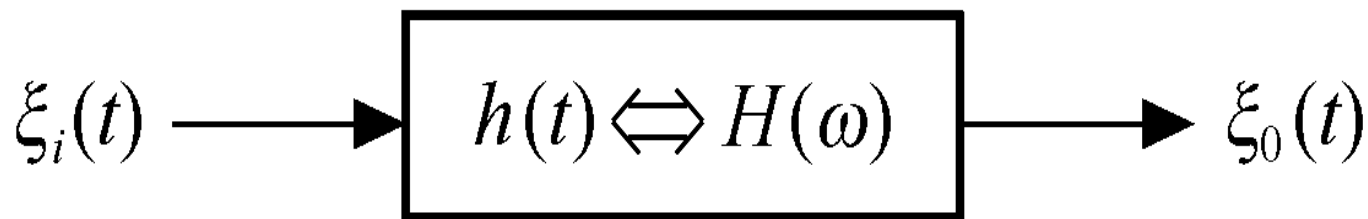


图2-9 平稳随机过程通过线性系统



# 1、输出随机过程 $\xi_o(t)$ 的数学期望 $E[\xi_o(t)]$

$$\begin{aligned} E[\xi_o(t)] &= E\left[\int_0^\infty h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty h(\tau)E[\xi_i(t-\tau)]d\tau \\ &= E[\xi_i(t)]\int_0^\infty h(\tau)d\tau \\ &= a\int_0^\infty h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

(2.117)

上式中利用了平稳性（常数）

$$E[\xi_i(t - \tau)] = E[\xi_i(t)] = a$$

又因为

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

求得

$$H(0) = \int_0^{\infty} h(t) dt$$

所以

$$E[\xi_o(t)] = a \cdot H(0) \quad (2.118)$$

由此可见，输出过程的数学期望等于输入过程的数学期望与 $H(0)$ 的乘积。并且  $E[\xi_o(t)]$  与 $t$ 无关。

$$E[\xi_o(t)] = a \cdot H(0)$$

## 2、输出随机过程 $\xi_0(t)$ 的自相关函数 $R_0(t_1, t_1 + \tau)$

$$\begin{aligned} R_0(t_1, t_1 + \tau) &= E[\xi_0(t_1)\xi_0(t_1 + \tau)] \\ &= E\left[\int_0^\infty h(\alpha)\xi_i(t_1 - \alpha)d\alpha \int_0^\infty h(\beta)\xi_i(t_1 - \beta + \tau)d\beta\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)E[\xi_i(t_1 - \alpha)\xi_i(t_1 - \beta + \tau)]d\alpha d\beta \end{aligned}$$

根据平稳性

$$E[\xi_i(t - \alpha)\xi_i(t - \beta + \tau)] = R_i(\tau + \alpha - \beta)$$

有

$$R_0(t_1, t_1 + \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta = R_0(\tau)$$

(2.119)

可见，自相关函数只依赖时间间隔  $\tau$  而与时间起点  $t_1$  无关。从数学期望与自相关函数的性质可见，这时的输出过程是一个宽平稳随机过程。

- 随机过程通过一个线性系统依然是一个随机过程。

### 3、 $\xi_0(t)$ 的功率谱密度 $P_{\xi_0}(\omega)$ 利用公

式  $P_{\xi}(\omega) \Leftrightarrow R_o(\tau)$  , 有

$$P_{\xi_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_o(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} [h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau + \alpha - \beta)e^{-j\omega\tau}] d\beta$$

令  $\tau' = \tau + \alpha - \beta$ , 则有

$$P_{\xi_0}(\omega) = \int_0^{\infty} h(\alpha)e^{j\omega\alpha} d\alpha \int_0^{\infty} h(\beta)e^{-j\omega\beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} R_i(\tau')e^{-j\omega\tau'} d\tau'$$

$$= H^*(\omega)H(\omega)P_{\xi_i}(\omega)$$

$$= |H(\omega)|^2 P_{\xi_i}(\omega)$$

(2.120)

可见，系统输出功率谱密度是输入功率谱密度  $P_{\xi_i}(\omega)$  与  $|H(\omega)|^2$  的乘积。

$$P_{\xi_o}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_{\xi_i}(\omega)$$

#### 4、输出过程 $\xi_o(t)$ 的概率分布

在已知输入随机过程  $\xi_i(t)$  的概率分布情况下，通过 (2.116) 式，即：

$$\xi_o(t) = \int_0^\infty h(\tau) \xi_i(t - \tau) d\tau$$

可以求出输出随机过程  $\xi_0(t)$  的概率分布。如果线性系统的输入过程是**高斯过程**，则系统输出随机过程也是高斯过程。因为按积分的定义，式 (2.116) 可以表示为一个和式的极限，即

$$\xi_0(t) = \lim_{\Delta\tau_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_i(t - \tau_k) h(\tau_k) \Delta\tau_k \quad (2.121)$$



由于已假定输入过程是高斯的，因此在任一个时刻上的每一项  $\xi_i(t - \tau_k)h(\tau_k)\Delta\tau_k$  都是一个服从正态分布的随机变量。所以在任一时刻上得到的输出随机变量，将是无限多个正态随机变量之和，且这“和”也是正态随机变量。

这就证明，高斯随机过程经过线性系统后其输出过程仍为高斯过程。

但要注意的是，由于线性系统的介入，与输入高斯过程相比，输出过程的数字特征已经改变了。

$$E[\xi_o(t)] = a \cdot H(0)$$

$$R_o(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta$$

$$P_{\xi_o}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_{\xi_i}(\omega)$$

**[例2.7] 均值为0，自相关函数为 $e^{-|\tau|}$ 的高斯噪声 $X(t)$ ，通过传输特性为 $Y(t) = A + BX(t)$  ( $A$ 、 $B$ 为常数) 的线性网络，试求：**

- (1) 输入噪声的一维概率密度函数；**
- (2) 输出噪声的一维概率密度函数；**
- (3) 输出噪声功率；**

解：

(1) 输入过程 $X(t)$ 均值为0,  $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$

所以是宽平稳随机过程, 它的总平均功率, 即方差  $\sigma_x^2 = D[X(t)] = R(0) = E[X^2(t)] = 1$ , 所以可以直接写出输入噪声的一维概率密度函数为:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (2.122)$$

(2) 经过  $Y(t) = A + BX(t)$  的线性网络，由于高斯过程通过线性系统后的过程仍然是高斯过程。则

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y-a_y)^2 / 2\sigma_y^2} \quad (2.123)$$

其中，均值

$$a_y = E[Y(t)] = E[BX(t) + A] = A$$

方差

$$\sigma_y^2 = D[Y(t)] = D[A + BX(t)] = B^2 D[X(t)] = B^2$$

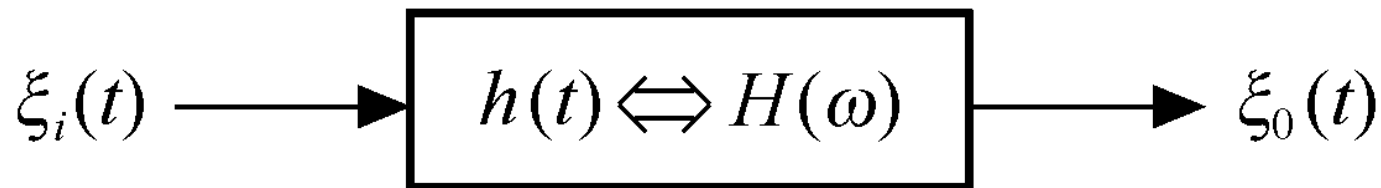
这样

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}B} e^{-(y-A)^2/2B^2} \quad (2.124)$$

(3) 输出功率为

$$S_Y = E[Y^2(t)] = D[Y(t)] + \sigma_y^2 = A^2 + B^2 \quad (2.125)$$

✓ 高斯平稳随机过程通过一个线性系统依然是一个高斯平稳随机过程。



$$\xi_o(t) = \xi_i(t) \otimes h(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \xi_i(t - \tau) d\tau$$

$$E[\xi_o(t)] = a \cdot H(0)$$

$$R_o(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_i(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta$$

$$P_{\xi_o}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_{\xi_i}(\omega)$$

$$\xi_o(t) = \lim_{\Delta\tau_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_i(t - \tau_k) h(\tau_k) \Delta\tau_k$$

## 2.7.2 随机过程通过乘法器

在通信系统中，经常进行乘法运算，所以乘法器在通信系统中应用非常广泛，下面我们计算平稳随机过程通过乘法器后，输出过程的功率谱密度。



平稳随机过程通过乘法器的数学模型如图2-10所示。

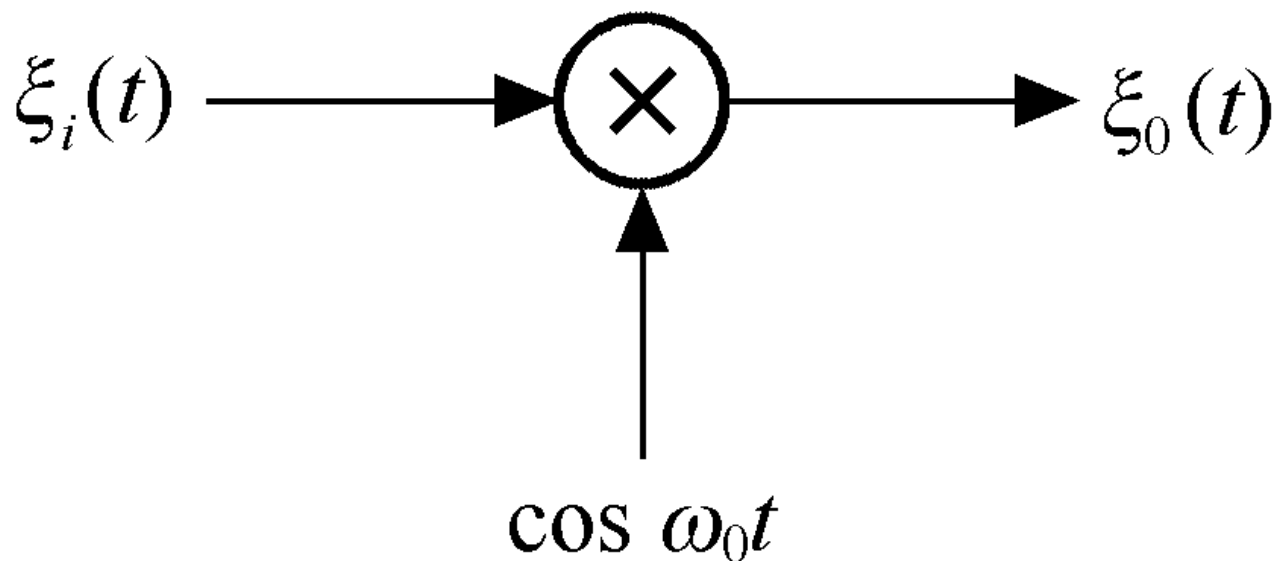


图2-10平稳随机过程通过乘法器

设一平稳随机过程  $\xi_i(t)$  和正弦波信号  $\cos \omega_0 t$  同时通过乘法器，则其输出响应为

$$\xi_0(t) = \xi_i(t) \cos \omega_0 t \quad (2.126)$$

首先计算输出过程的自相关函数。由自相关函数的定义得

$$\begin{aligned}
 R_0(t, t + \tau) &= E[\xi_0(t)\xi_0(t + \tau)] \\
 &= E[\xi_i(t)\xi_i(t + \tau)\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t + \tau)] \\
 &= \frac{E[\xi_i(t)\xi_i(t + \tau)]}{2} [\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)] \\
 &= \frac{R_i(\tau)}{2} [\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)] \\
 &= \frac{R_i(\tau)}{2} \cos(\omega_0\tau) + \frac{R_i(\tau)}{2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)
 \end{aligned}$$

(2.127)

上式中,  $R_i(\tau) = E[\xi_i(t)\xi_i(t+\tau)]$  是输入平稳随机过程的自相关函数, 它与时间间隔  $\tau$  有关。

但由式 (2.127) 可知  $R_0(t, t+\tau)$  是时间  $t$  的函数, 故乘法器的输出过程不是平稳随机过程。

为了求输出过程的功率谱，式（2.127）中第一项可按常规的傅里叶变换得到功率谱密度，但第二项却包含有 $\tau$ 和 $t$ 两种时间变量，它的功率谱与 $t$ 有关，这种与 $t$ 有关的动态谱分析比较复杂，

这里介绍一种求非平稳随机过程功率谱的近似方法。

对于**非平稳随机过程**，其功率谱密度可表示为

$$P_{\xi_o}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_0(t, t + \tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.128)$$

式中， $\overline{R_0(t, t + \tau)}$ 是输出过程自相关函数的**时间平均值**，由式（2.127）可得

$$\begin{aligned} \overline{R_0(t, t + \tau)} &= \frac{R_i(\tau)}{2} \cos(\omega_0\tau) + \frac{R_i(\tau)}{2} \cos(2\omega_0t + \omega_0\tau) \\ &= \frac{R_i(\tau)}{2} \cos(\omega_0\tau) \end{aligned}$$

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

又由于

$$f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

$$\frac{R_i(\tau)}{2} \cos(\omega_0 \tau) \Leftrightarrow \frac{1}{4}[P_{\xi i}(\omega + \omega_0) + P_{\xi i}(\omega - \omega_0)]$$

而  $\overline{R_0(t, t + \tau)}$  的傅里叶变换就是**乘法器**输出响应的功率谱。即

$$P_{\xi 0}(\omega) = \frac{1}{4}[P_{\xi i}(\omega + \omega_0) + P_{\xi i}(\omega - \omega_0)] \quad (2.129)$$

**[例2.8]** 随机过程  $X(t) = \xi \cos \pi t$ ，这里  $\xi$  是均值为  $a$ 、方差为  $\sigma_{\xi}^2$  的高斯随机变量，试求：

- (1)  $X(t)|_{t=0}$  及  $X(t)|_{t=1}$  的两个一维概率密度；
- (2)  $X(t)$  是否宽平稳；
- (3)  $X(t)$  的功率谱；
- (4)  $X(t)$  的平均功率。



解：

(1)  $X(t)|_{t=0} = X(0) = \xi$ ，由题意知， $\xi$  是均值为  $a$ 、方差为  $\sigma_\xi^2$  的高斯随机变量，则

$$f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

同理,  $X(t)|_{t=1} = X(1) = -\xi$  则

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

(2) 由 (1) 的结果表明,  $X(t)$  在  $t=0$  和  $t=1$  时均值不同, 所以, 其均值与  $t$  有关, 不是常数。

下面再求的  $X(t)$  自相关函数, 即

$$\begin{aligned}
 R_X(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[\xi^2 \cos \pi t \cos \pi(t + \tau)] \\
 &= \frac{1}{2} \cos \pi \tau E(\xi^2) + \frac{1}{2} E[\xi^2 \cos(2\pi t + \pi \tau)] \\
 &= \frac{1}{2} (a^2 + \sigma_\xi^2) \cos \pi \tau + \frac{1}{2} (a^2 + \sigma_\xi^2) \cos(2\pi t + \pi \tau)
 \end{aligned}$$

可见， $\mathbf{X}(t)$ 的自相关函数是 $t$ 和 $t$ 的函数。综合（1）和（2）的结果知， $\mathbf{X}(t)$ 不是宽平稳随机过程。

(3) 为求 $X(t)$ 的功率谱, 先对由(2)求出的自相关函数进行时间平均, 即

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} = \frac{1}{2} (a^2 + \sigma_\xi^2) \cos \pi\tau + \frac{1}{2} \overline{(a^2 + \sigma_\xi^2) \cos(2\pi t + \pi\tau)}$$

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} = \frac{1}{2} (a^2 + \sigma_\xi^2) \cos \pi \tau$$

然后对上结果进行傅里叶变换，求出X(t)  
的功率谱为

$$P_X(\omega) = \frac{\pi(a^2 + \sigma_\xi^2)}{2} [\delta(\omega + \pi) + \delta(\omega - \pi)]$$

(4)  $X(t)$  的平均功率为

$$S_X = \overline{R_X(t, t + \tau)} \big|_{\tau=0} = \frac{1}{2} (a^2 + \sigma_\xi^2)$$

# 小复习

高斯，过线性系统，仍为高斯

- 均值、相关函数、功率谱密度

乘法器的输出为非平稳随机过程

- 相关函数的平均值 $\rightarrow$ 功率谱密度

## 2. 8窄带高斯噪声

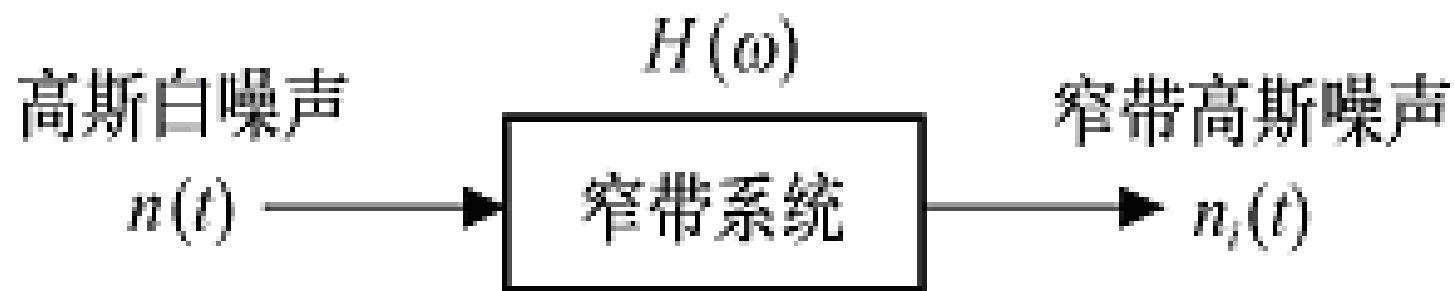
### 2. 8. 1 窄带高斯噪声的统计特征

#### 一、窄带高斯噪声的概念

设系统的带宽为 $W$ ，中心频率为 $\omega_0$ ，当时称该系统为窄带系统。当高斯白噪声通过窄带系统时，其输出噪声只能集中在中心频率附近的带宽之内，称这种噪声为窄带高斯噪声。

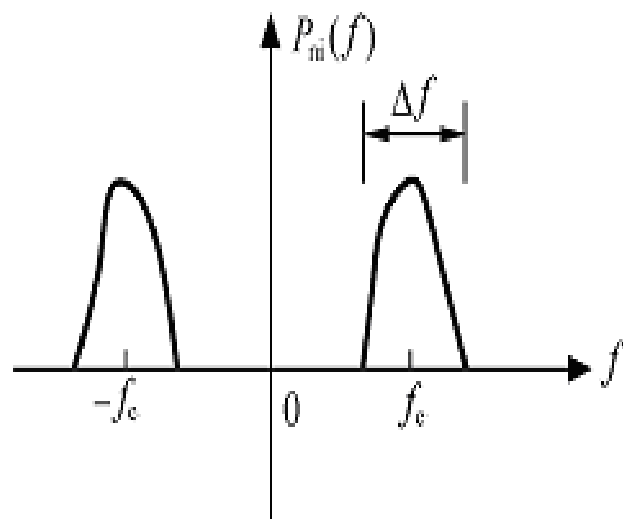


窄带高斯噪声的原理框图及相关波形如下：

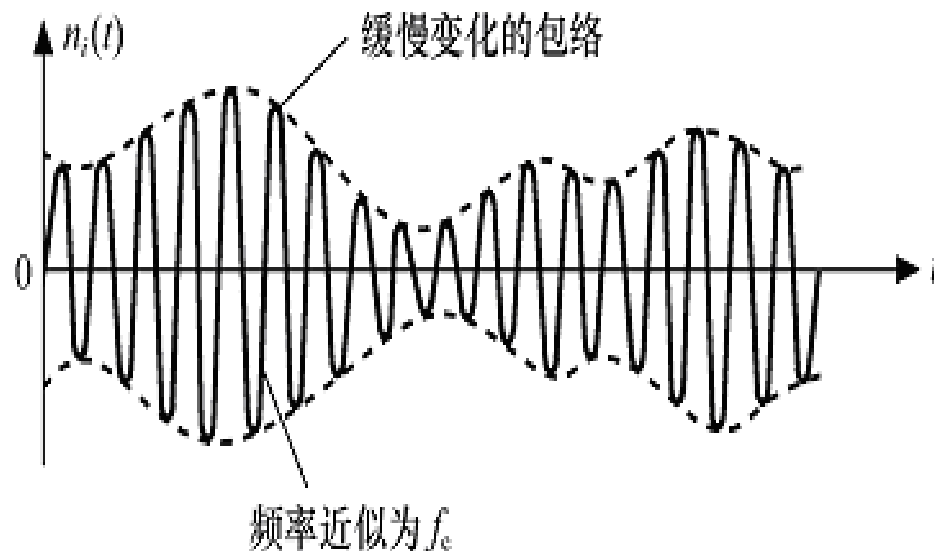


(a) 原理框图

(a) 原理框图



(b) 窄带噪声的功率谱



(c) 窄带噪声的波形

**(b) 窄带噪声的功率谱 (c) 窄带噪声的波形**

## 图2-11 窄带噪声的原理框图及波形

如果用示波器观察窄带噪声的波形，可以发现它是一个包络和相位都在缓慢变化、频率近似为 $f_c$ 的正弦波。因此，窄带高斯噪声可以用下式表示，即

$$n_i(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] \quad a(t) \geq 0$$

(2.130)

式中， $a(t)$  和  $\varphi(t)$  分别表示窄带高斯噪声的包络和相位，它们都是随机过程，且变化与  $\cos \omega_c t$  相比要缓慢得多。将上式展开可得

$$\begin{aligned} n_i(t) &= a(t) \cos[\varphi(t)] \cos \omega_c t - a(t) \sin[\varphi(t)] \sin \omega_c t \\ &= n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

(2.131)

式中,

$$n_c(t) = a(t) \cos[\varphi(t)] \quad (2.132)$$

$$n_s(t) = a(t) \sin[\varphi(t)] \quad (2.133)$$

式 (2.132) 和式 (2.133) 中的  $n_c(t)$  和  $n_s(t)$  分别称为  $n_i(t)$  的同相分量和正交分量。

由式 (2.132) 和式 (2.133) 可以看到,  $n_i(t)$  的统计特性可以由  $a(t)$  和  $\varphi(t)$ , 或者  $n_c(t)$  和  $n_s(t)$  的统计特性确定。

反之, 若  $n_i(t)$  的统计特性已知, 则  $a(t)$  和  $\varphi(t)$ , 或者  $n_c(t)$  和  $n_s(t)$  的统计特性也随之确定。

## 二、窄带高斯噪声的统计特性

### 1、 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 的统计特性

设窄带高斯噪声  $n_i(t)$  的均值为0，方差为  $\sigma_n^2$ ，则其同相分量  $n_c(t)$  和正交分量  $n_s(t)$  有如下性质：

(1) 同相分量和正交分量的均值都为0，  
即

$$E[n_c(t)] = E[n_s(t)] = 0$$

(2)  $n_c(t)$  和  $n_s(t)$  的自相关函数相同，  
它们的平均功率（方差）均等于窄带噪声  
 $n_i(t)$  的平均功率（方差）。即

即

$$R_c(\tau) = R_s(\tau) \quad (2.134)$$

$$R_c(0) = R_s(0) = R_n(0) \quad (2.135)$$

$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2 \quad (2.136)$$



(3) 由于高斯白噪声是平稳的，则高斯窄带噪声  $n_i(t)$  和其同相分量  $n_c(t)$  和正交分量  $n_s(t)$  也是平稳的。

(4) 同相分量和正交分量的互相关函数均为  $\tau$  的奇函数。即

$$\begin{cases} R_{cs}(\tau) = -R_{cs}(-\tau) \\ R_{sc}(\tau) = -R_{sc}(-\tau) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{cs}(\tau) = -R_{cs}(-\tau) \\ R_{sc}(\tau) = -R_{sc}(-\tau) \end{cases} \begin{cases} R_{cs}(0) = 0 \\ R_{sc}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.137)$$

这说明  $n_c(t)$  和  $n_s(t)$  在同一时刻  $t$  ( $\tau = 0$ ) 不相关，又由于它们是高斯过程，则  $n_c(t)$  和  $n_s(t)$  也是统计独立的。

综上所述，我们得到一个重要结论：

一个均值为零的窄带平稳高斯过程，它的同相分量 $n_c(t)$ 和正交分量 $n_s(t)$ 同样是平稳高斯过程，而且均值都为零，方差也相同。

另外，同一时刻上得到的 $n_c$ 及 $n_s$ 是不相关的或统计独立的。

# $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的概率密度

- 联合概率密度函数  $f(x_c, x_s)$

$$\begin{aligned} p_{X_c X_s}(x_c, x_s) &= f(x_c, x_s) = f(x_c) \cdot f(x_s) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x_c^2}{2\sigma_X^2}\right) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x_s^2}{2\sigma_X^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_X^2}\right) \end{aligned}$$

# $a(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的统计特性

## ■ 联合概率密度函数 $f(a, \varphi)$

根据概率论知识有

$$f(a, \varphi) = f(X_c, X_s) \left| \frac{\partial(X_c, X_s)}{\partial(a, \varphi)} \right|$$

由  $\begin{cases} X_c = a \cos \varphi \\ X_s = a \sin \varphi \end{cases}$   
可以求得

$$f(X_c, X_s) = f(X_c) \cdot f(X_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{X_c^2 + X_s^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

$$\left| \frac{\partial(X_c, X_s)}{\partial(a, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_c}{\partial a} & \frac{\partial X_s}{\partial a} \\ \frac{\partial X_c}{\partial \varphi} & \frac{\partial X_s}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -a \sin \varphi & a \cos \varphi \end{vmatrix} = a$$

# $a(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的联合概率密度

于是有

$$\begin{aligned} p_{a\varphi}(a, \varphi) &= f(a, \varphi) = af(X_c, X_s) \\ &= \frac{a}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{(a\cos\varphi)^2 + (a\sin\varphi)^2}{2\sigma_X^2}\right] \end{aligned}$$

式中

$$p_{a\varphi}(a, \varphi) = \frac{a}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

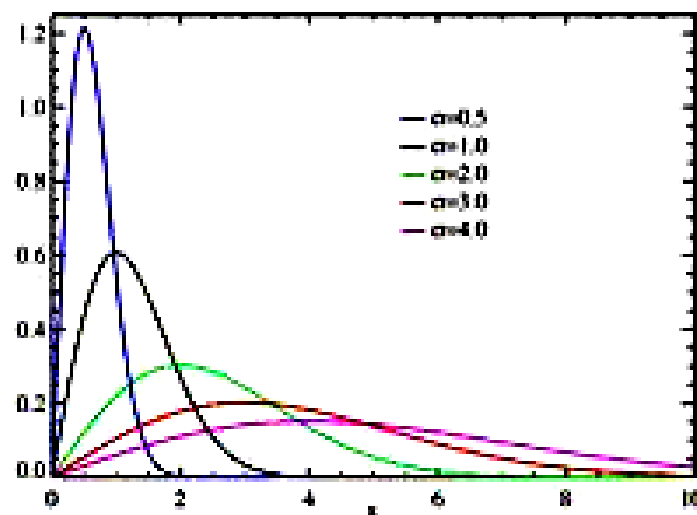
$$a \geq 0, \quad \varphi = (0 \sim 2\pi)$$

# 瑞利(Rayleigh)分布

- $a$ 的一维概率密度函数

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right] d\varphi$$
$$= \frac{a}{\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right] \quad a \geq 0$$

可见， $a$ 服从瑞利分布  
(*Rayleigh Distribution*)。



# $\varphi$ 服从均匀分布

- $\varphi$  的一维概率密度函数

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \int_0^{\infty} f(a, \varphi) da = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right) da \\ &= \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

可见， $\varphi$  服从均匀分布。



- 结论

一个均值为零，方差为 $\sigma_x^2$ 的窄带平稳高斯过程 $X(t)$ ，其包络 $a(t)$ 的一维分布是瑞利分布，相位 $\varphi(t)$ 的一维分布是均匀分布，并且就一维分布而言， $a(t)$ 与 $\varphi(t)$ 是统计独立的，即有

$$f(a, \varphi) = f(a) \cdot f(\varphi)$$

$$\text{或} \quad p_{a\varphi}(a, \varphi) = p_a(a) \cdot p_\varphi(\varphi)$$

## 2、 $a(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的统计特性

可以证明，窄带高斯噪声的包络  $a(t)$  和 相位  $\varphi(t)$  的一维概率密度函数分别为

$$f(a) = \frac{a}{\sigma_n^2} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad a \geq 0 \quad (2.138)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (2.139)$$

可见，一个均值为零，方差为  $\sigma_n^2$  的窄带平稳高斯噪声  $n_i(t)$ ，其包络  $a(t)$  的一维概率密度服从瑞利分布；其相位  $\varphi(t)$  的一维概率密度服从均匀分布。

# 白噪声的功率

由于白噪声的带宽无限，其平均功率为无穷大，即

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} d\omega = \infty$$

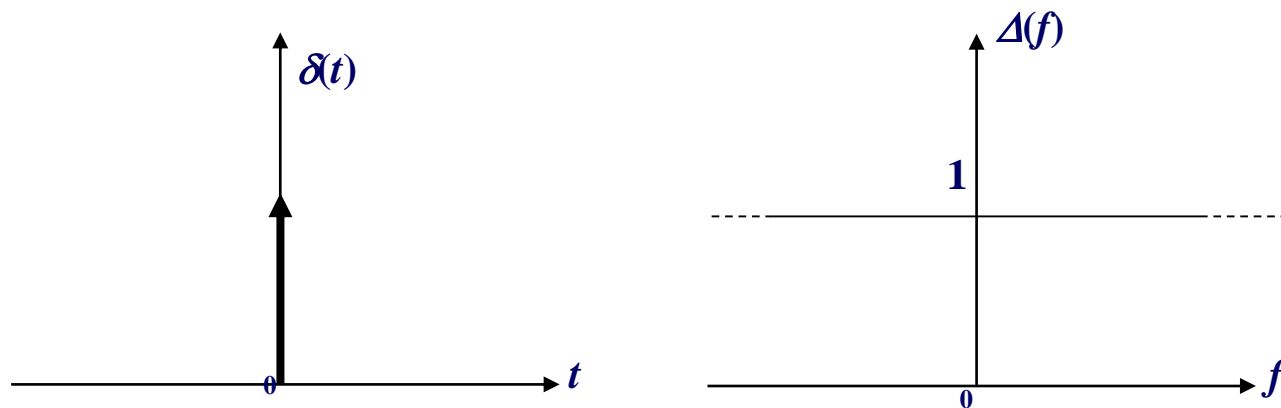
或

$$R(0) = \frac{n_0}{2} \delta(0) = \infty$$

- 因此，真正“白”的噪声是不存在的，它只是构造的一种理想化的噪声形式。
- 实际中，只要噪声的功率谱均匀分布的频率范围远远大于通信系统的工作频带，我们就可以把它视为白噪声。

# $\delta(t)$ 傅利叶变换

$$\delta(t) \Leftrightarrow \Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

# 低通白噪声

- 定义：如果白噪声通过理想矩形的低通滤波器或理想低通信道，则输出的噪声称为低通白噪声。

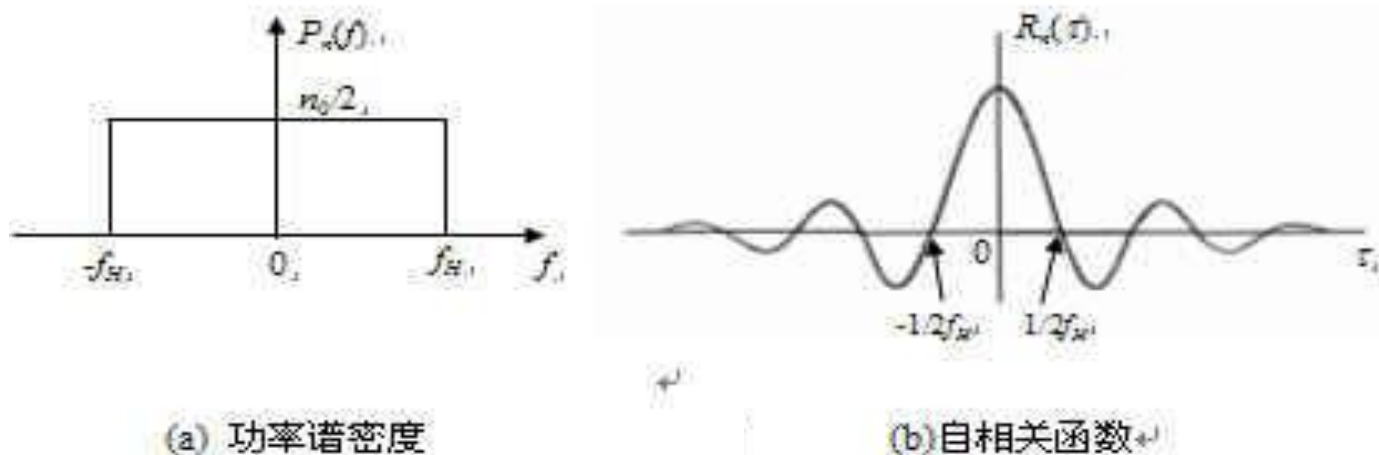
- 功率谱密度

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2} & |f| \leq f_H \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 由上式可见，白噪声的功率谱密度被限制在 $|f| \leq f_H$ 内，通常把这样的噪声也称为带限白噪声。
- 自相关函数

$$R(\tau) = n_0 f_H \frac{\sin 2\pi f_H \tau}{2\pi f_H \tau} = n_0 f_H \text{Sa}(2\pi f_H \tau)$$

- 功率谱密度和自相关函数曲线

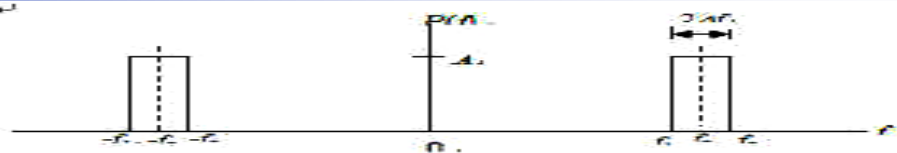


- 由曲线看出，这种带限白噪声只有在

$$\tau = k / 2f_H \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

上得到的随机变量才不相关。

# 带通白噪声



- 定义：如果白噪声通过理想矩形的带通滤波器或理想带通信道，则其输出的噪声称为带通白噪声。

- 功率谱密度

设理想带通滤波器的传输特性为

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{其他} f \end{cases}$$

式中

$f_c$  — 中心频率， $B$  — 通带宽度

则其输出噪声的功率谱密度为

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2} & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{其它} f \end{cases}$$



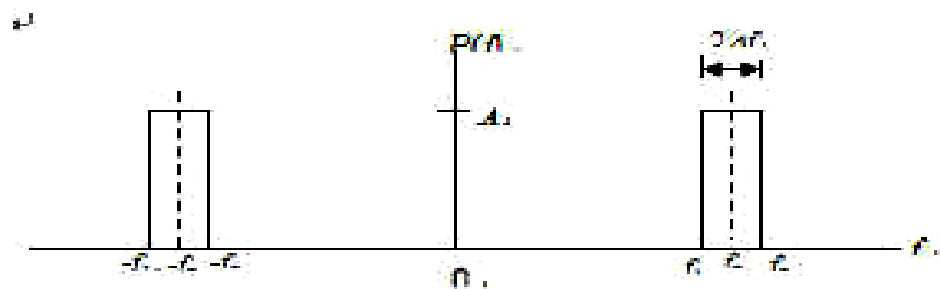
$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c - \frac{B}{2}}^{-\omega_c + \frac{B}{2}} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - \frac{B}{2}}^{\omega_c + \frac{B}{2}} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{n_0}{2} \frac{1}{j\tau} e^{-j\omega_c\tau} \left( e^{j\frac{B}{2}\tau} - e^{-j\frac{B}{2}\tau} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{n_0}{2} \frac{1}{j\tau} e^{j\omega_c\tau} \left( e^{j\frac{B}{2}\tau} - e^{-j\frac{B}{2}\tau} \right) \\
 &= \frac{n_0}{2\pi} \frac{1}{\tau} \left( e^{-j\omega_c\tau} + e^{j\omega_c\tau} \right) \sin\left(\frac{B}{2}\tau\right) \\
 &= \frac{n_0}{\pi} \frac{1}{\tau} \cos(\omega_c\tau) \sin\left(\frac{B}{2}\tau\right) \\
 &= \frac{n_0 B}{2\pi} \frac{\sin(\tau B/2)}{\tau B/2} \cos(\omega_c\tau)
 \end{aligned}$$

可见在

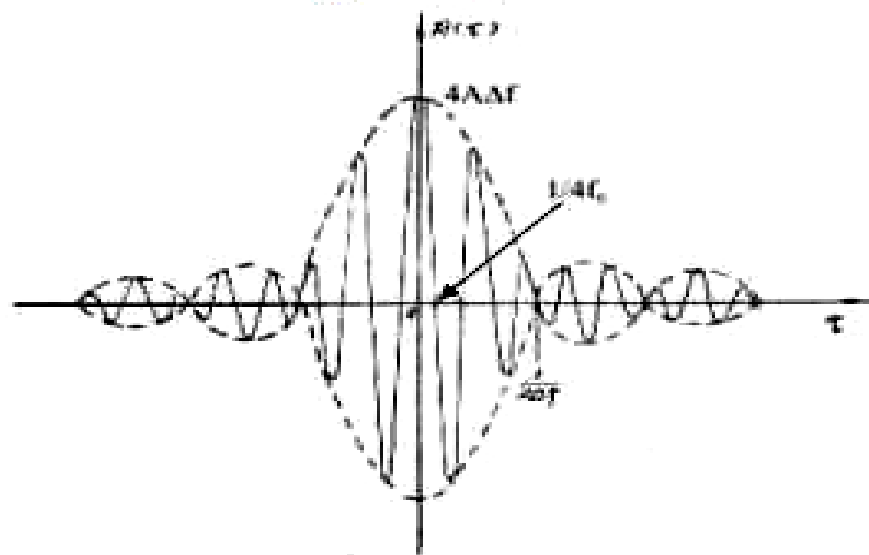
$$\tau = 2k\pi / B \text{ 或 } \tau = k\pi / \omega_c + \pi / (2\omega_c) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

# 带通白噪声的功率谱和自相关函数曲线

## 功率谱密度



(a) 功率谱密度



(b) 自相关函数

# 窄带高斯白噪声

- 通常，带通滤波器的  $B \ll \omega_c$ ，因此称窄带滤波器，相应地把带通白高斯噪声称为窄带高斯白噪声。
- 平均功率  $N = n_0 B$

$$R(\tau) = \frac{n_0 B}{2\pi} \frac{\sin(\tau B/2)}{\tau B/2} \cos(\omega_c \tau) = \frac{n_0 B}{2\pi} \text{SA}(\tau B/2) \cos(\omega_c \tau)$$

$$R(0) = n_0 B$$

## 2.8.2 正弦波加窄带高斯噪声

通信系统中传输的信号通常是一个正弦波作为载波的已调信号，信号经过信道传输时总会受到噪声的干扰，为了减少噪声的影响，通常在接收机前端设置一个带通滤波器，以滤除信号频带以外的噪声。

因此，带通滤波器的输出是**正弦波信号与窄带噪声的合成信号**。这是通信系统中常会遇到的一种情况，所以有必要了解合成信号的包络和相位的统计特性。

## 设正弦波加窄带高斯噪声的合成信号为

$$\begin{aligned} r(t) &= A \cos(\omega_c t + \theta) + n_i(t) \\ &= A \cos(\omega_c t + \theta) + [n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t] \\ &= [A \cos \theta + n_c(t)] \cos \omega_c t - [A \sin \theta + n_s(t)] \sin \omega_c t \\ &= z(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] \end{aligned}$$

(2.140)

式 (2.140) 中:

$$z(t) = \sqrt{[A \cos \theta + n_c(t)]^2 + [A \sin \theta + n_s(t)]^2} \quad z \geq 0 \quad (2.141)$$

$$\varphi(t) = \arctan \frac{A \sin \theta + n_s(t)}{A \cos \theta + n_c(t)} \quad (2.142)$$

分别为合成信号的随机包络和随机相位。  
可以证明, 正弦信号加窄带高斯噪声所形成的  
合成信号具有如下统计特性:

1、正弦信号加窄带高斯噪声的随机包络服从**广义瑞利分布**（也称**莱斯（Rice）分布**），即其包络的概率密度函数为

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (z^2 + A^2)\right] I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right) \quad z \geq 0$$

(2.143)



## 包络的分布函数

式中， $\sigma^2$ 是 $n_i(t)$ 的方差， $I_0(x)$ 为零阶修正贝塞尔函数。 $x \geq 0$ 时， $I_0(x)$ 是单调上升函数，且有 $I_0(0) = 1$ 。

由(2.143)可以得出结论，第一：当信号很小， $A \rightarrow 0$ ，即信号功率与噪声功率之比 $r = \frac{A^2}{2\sigma^2} \rightarrow 0$ 时， $I_0(0) \approx 1$ 。

这时 $r(t)$ 合成波中只存在窄带高斯噪声，式(2.143)近似为式(2.138)，即由广义瑞利分布退化为瑞利分布。

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 + A^2)\right] I_0(0) \quad z \geq 0$$

第二：当信噪比 $r$ 很大时， $f(z)$ 接近于高斯分布；

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}; \quad z \sim A;$$

$$f(z)$$

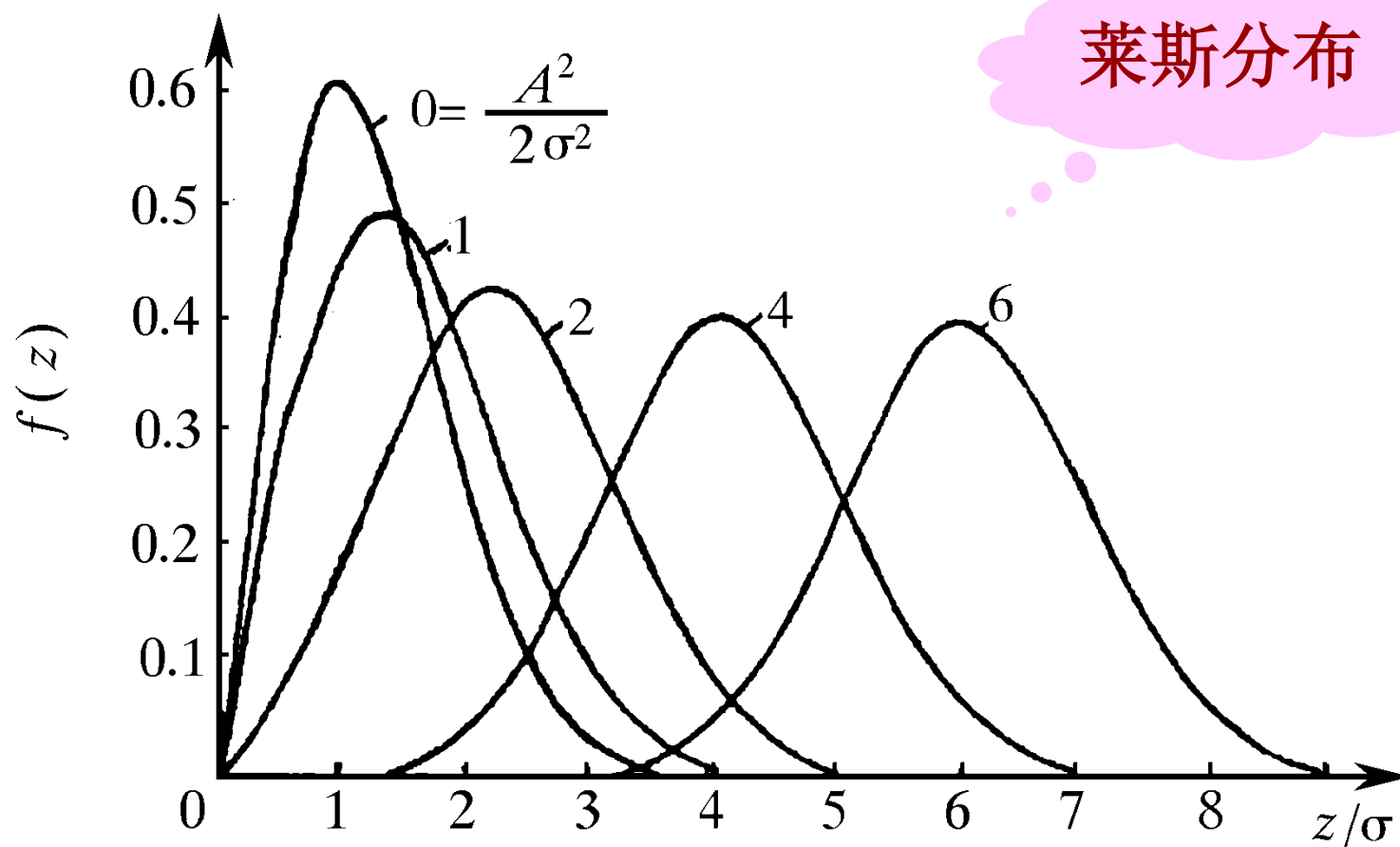
$$= \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 + A^2)\right] \frac{e^{\frac{Az}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi \frac{Az}{\sigma^2}}} \quad z \geq 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z - A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

第三：在一般情况下 $f(z)$ 是莱斯分布。图2-12 (a) 给出了不同的 $r$ 值时的 $f(z)$ 曲线。

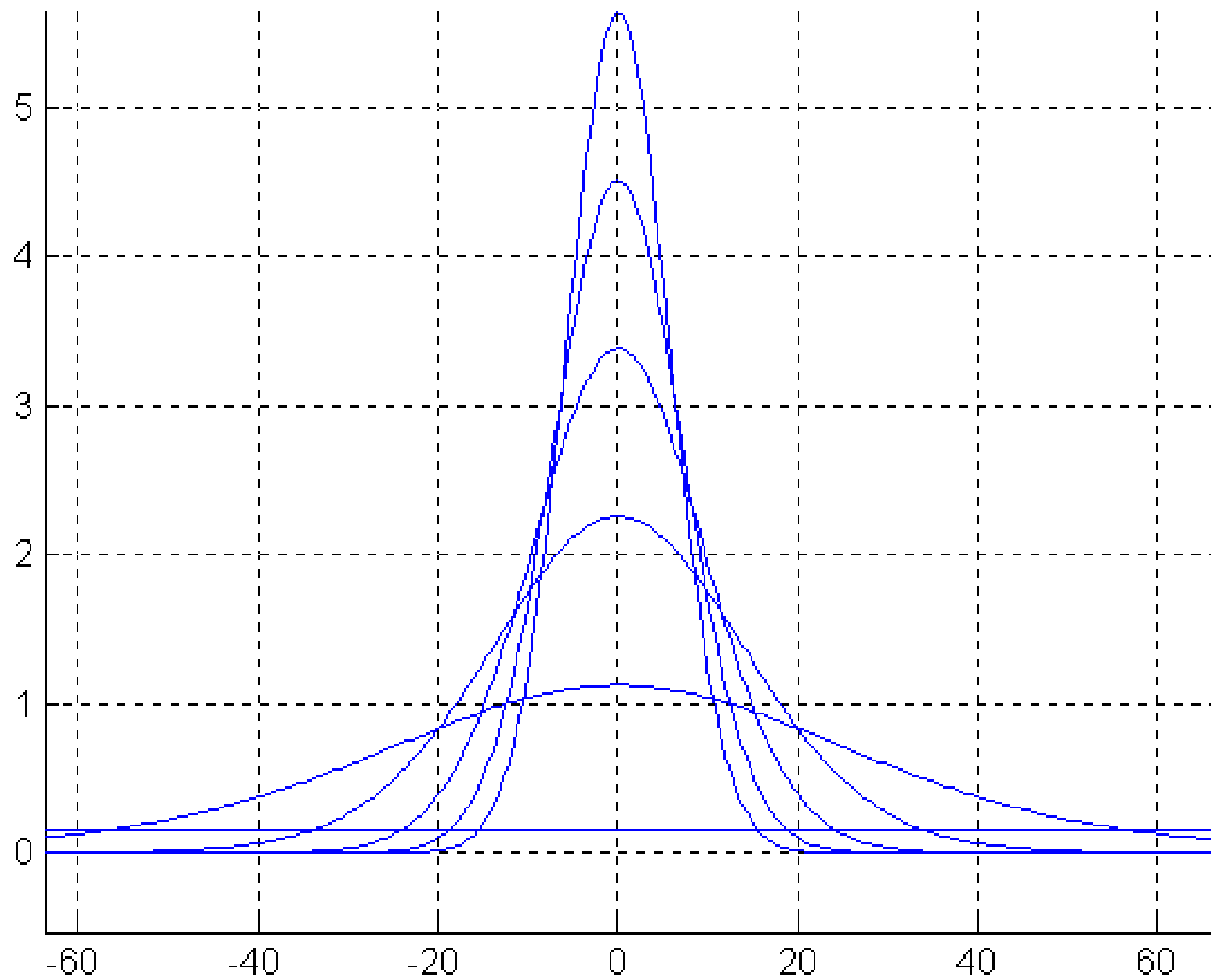
$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (z^2 + A^2)\right] I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right) \quad z \geq 0$$

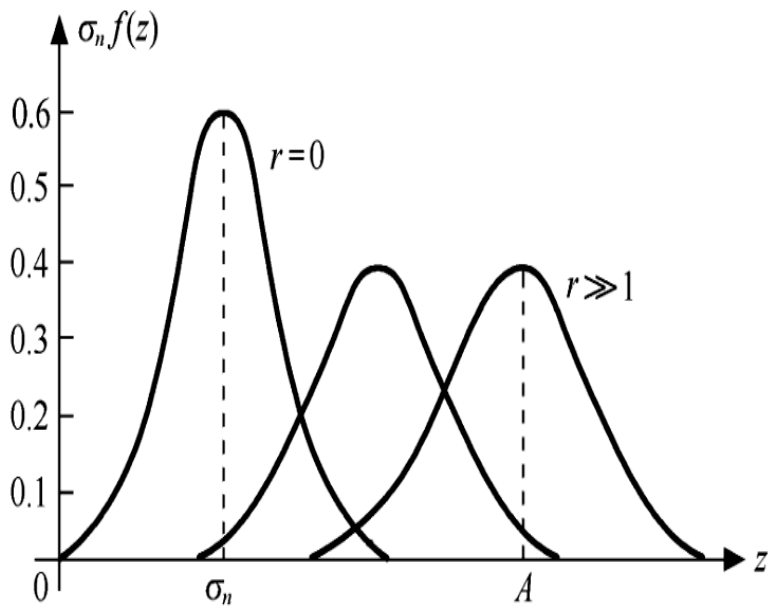
# 包络概率密度函数 $f(z)$ 曲线



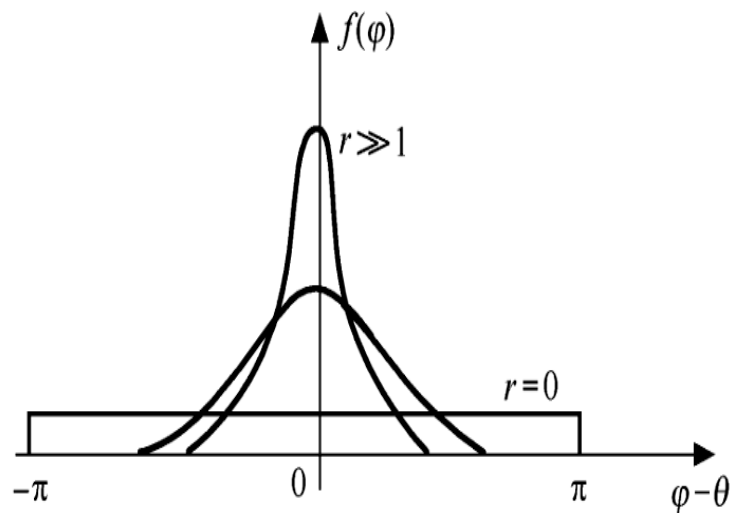
莱斯分布

2、正弦信号加窄带高斯噪声的随机合成波相位分布  $f(\varphi)$ ，由于比较复杂，这里就不再演算了。不难推想， $f(\varphi)$ 也与信噪比 $r$ 有关。小信噪比时，它接近于均匀分布，大信噪比时，相位趋近于一个在原点的冲激函数。图2-12（b）给出了不同的 $r$ 值时  $f(\varphi)$ 的曲线。





(a) 不同信噪比时包络的概率密度函数



(b) 相位分布

(a) 不同信噪比时包络的概率密度函数      (b) 相位分布  
**图2-12 正弦波加窄带高斯噪声的包络与相位分布曲线**



# 小复习

## 窄带高斯

- 统计特性：同向分量、正交分量；包络、相位

## 正弦信号+窄带高斯

- 统计特性：包络、相位

## 2.9 周期平稳随机过程

若随机过程  $\xi(t)$  的统计平均值（数学期望）和自相关函数是**时间的周期函数**，则称  $\xi(t)$  为**周期**平稳随机过程。这是在数字信号的传输处理过程中会遇到的一种情况，所以有必要了解这种随机过程的统计特征。

设随机过程为：

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad (2.144)$$

式中， $\{a_n\}$ 是一个时间离散的实随机序列，它表示要在信道上传送的数字信息序列； $a_n$ 是随机变量，对于所有的 $n$ ，其均值  $E(a_n) = m_a$  是一常数。

序列 $\{a_n\}$ 的自相关函数  $R_a(a_n a_{n+k}) = R_a(k)$

即 $\{a_n\}$ 是宽平稳随机序列。 $g(t)$ 为码元波形，  
是确知信号。 $1/T$ 表示信息符号的传输速  
率， $\xi(t)$ 。可以表示某些数字基带信号（见第  
5章）。

下面讨论的统计特性。

## 1、 $\xi(t)$ 的均值

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n) g(t-nT) \\ &= m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT) \end{aligned} \quad (2.145)$$

可见,  $E[\xi(t)]$  是时间  $t$  的周期函数, 周期为  $T$ 。

## 2、 $\xi(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_{\xi}(t, t + \tau) &= E[\xi(t)\xi(t + \tau)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(a_n a_m) g(t - nT) g(t + \tau - mT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m - n) g(t - nT) g(t + \tau - mT) \quad (2.146) \end{aligned}$$

观察上式，有

$$R_{\xi}(t + kT, t + \tau + kT) = R_{\xi}(t, t + \tau) \quad (2.147)$$

由 (2.145) 和 (2.147) 可见,  $\xi(t)$  是周期平稳随机过程。

### 3、 $\xi(t)$ 的平均功率谱密度

由于用严格的功率谱密度描述上述随机过程比较复杂，所以采用另一种近似的方法：首先在一个周期 $T$ 内对  $R_\xi(t, t + \tau)$  进行时间平均，消除  $R_\xi(t, t + \tau)$  与  $t$  的关系，即

$$\overline{R_\xi(t, t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_\xi(t, t + \tau) dt = \overline{R_\xi}(\tau) \quad (2.148)$$

$\overline{R}_\xi(\tau)$ 表示周期随机过程 $\xi(t)$ 的时间平均自相关函数。

再对 $\overline{R}_\xi(\tau)$ 进行傅里叶变换，得到 $\xi(t)$ 的平均功率谱密度为

$$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_\xi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.149)$$



问题？

？