

## 第二十一讲

上次课:

- **Snell' Law:**  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1}$ ,  $n = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_r}$ , 折射率;

能量守恒、动量守恒、因果关系

- **Fresnel's Law: S 波:** 
$$\begin{cases} E'_0 = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \\ E''_0 = \frac{2Z_2 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \end{cases}, \quad Z = \sqrt{\mu} / \sqrt{\epsilon}, \text{ 阻抗}$$

**P 波:** H 场表示 ( $Z_2, Z_1$  互换)

- **Brewster 角**  $\theta + \theta'' = \pi/2$  P 波透明

## § 8.7 全 反 射

在实际应用中,人们希望能有效控制电磁波的传播方向,因此,一个好的反射镜就变得必不可少。电磁波在金属表面被近乎全反射,因而金属镜子在光学上被广泛应用。然而这种反射仍有少量的能量耗散(特别是在光波段)。另外,当频率到达紫外时(频率高于等离子共振频率  $\omega_p$ ),金属都变成透明材料,无法有效反射电磁波。因此急需寻找无耗散的全反射方式。人们发现当电磁波以特定角度从光密介质入射到光疏介质中时( $n_1 > n_2$ ),在界面上会发生无损耗的全反射。这种现象有许多实际应用,新兴的纤维光学就是由此发展出来的。当然,基于全介质的光子晶体是另外一个解决方案 --- 这里就不再展开了,而只介绍基于介质的全反射现象。

### 1. 全反射临界角

考虑电磁波从光密介质(折射率为  $n_1$ )入射到光疏介质中(折射率为  $n_2 < n_1$ ),

由折射定律  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1}$  可得

$$\sin \theta'' = \sin \theta \frac{n_1}{n_2} > \sin \theta \quad (8.7.1)$$

当入射角从  $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \theta$  从 0 变到 1。因为  $\frac{n_1}{n_2} > 1$ ,  $\sin \theta''$  从 0 变到一个比 1 大的数。因此当

$$\theta = \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (8.7.2)$$

时,  $\sin \theta'' = 1$ 。而当入射角  $\theta > \theta_c$  时, 显然会出现  $\sin \theta'' > 1$  的情况, 这时折射角将为一虚数, 它已失去几何上作为角度的直观解释, 不能直接将其带入 Fresnel 公式求解。然而, 我们可以将其写回原始的波矢之间的关系。利用 (8.6.12) 得

$$\cos \theta'' \rightarrow \frac{k_z''}{k''} = \frac{\sqrt{k''^2 - k_x^2}}{k''} = \frac{\sqrt{(k_0 n_2)^2 - (k_0 n_1 \sin \theta)^2}}{k_0 n_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c}\right)^2} \quad (8.7.3)$$

当  $\theta > \theta_c$  时, 上式为纯虚数, 记为  $i\alpha$ , 其中

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c}\right)^2 - 1} \quad (8.7.4)$$

将其代入公式(8.6.13)和 (8.3.16), 便有

$$\begin{aligned} E'_{0S} &= \frac{Z_2 \cos \theta - i\alpha Z_1}{Z_2 \cos \theta + i\alpha Z_1} E_{0S} \\ H'_{0P} &= \frac{Z_1 \cos \theta - i\alpha Z_2}{Z_1 \cos \theta + i\alpha Z_2} H_{0P} \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

可见,  $R_s = R_p = 1$  (参考 (8.6.17)), 亦即电磁波发生全反射, 因此我们将  $\theta_c$  称为**全反射临界角**。显然, S, P 两种偏振的反射波的相位未必相同。因此当一支沿任意方向线偏振的电磁波以大于临界角的入射角被介质全反射时, 其偏振图案原则上是椭圆偏振。

## 2. 折射波

在发生全反射时, 介质 2 中的电磁波并不为零, 这是因为, 如果介质 2 中的电磁波完全为零, 就不可能满足边值关系。考虑 S 波, 因  $k_z'' = in_2 k_0 \alpha = i\beta$ ,  $k_x'' = k_x$ , 故折射波电场为

$$\vec{E}_t = \hat{y} E_0'' \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (8.7.6)$$

上式表示折射波将沿  $z$  方向衰减, 沿  $x$  方向传播。因此, 离界面几个波长处, 场强振幅已变得很小, 可以忽略不计; 换句话说, 电场不仅沿着界面方向传播, 而

且被限制在表面附近的一个区域内，所以称这种全反射的折射波为**表面波**。

### 3. 折射波能流

既然存在折射波，那么在第二种介质中就有能流。考虑 S 波，则我们可以根据 (8.7.6) 式求出介质中的磁场

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}''}{\mu\omega} \times \vec{E}'' = \frac{E_0''}{\mu\omega} (k_x \hat{z} - i\beta \hat{x}) \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (8.7.7)$$

假设  $E_0''$  为实数，可分别求得能流  $\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H}$  的法向分量  $S_{pz}$  和切向分量  $S_{px}$ ：

$$S_x = \frac{(E_0'')^2 k_x}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos^2(k_x x - \omega t)$$

$$S_z = -\frac{(E_0'')^2 \beta}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \sin(k_x x - \omega t) \cos(k_x x - \omega t)$$

由此可见：

- (1) 在界面的法线方向上能流以频率  $2\omega$  作振动，在第二种介质中， $S_{pz}$  对时间的平均值为零，即平均来说没有能量流入介质 2 中。
- (2) 界面切线方向的能流  $S_{px}$  对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在 x 方向仍有能流。
- (3) 根据  $S_{px}$  和  $S_{pz}$  的表达式知道能流的大致走向如图 8.8。可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量。



图 8.8

## 第九章 波导和谐振腔

上一章中我们研究了电磁波在体材料内以及在不同材料界面上的反射/折射行为，其中电磁波全都是以**平面波**的形式存在的。然而要将电磁波的信号传递到远方，用平面波的方法并不经济 – 因为平面波有着无限大的波前。实际生活中我们利用波导管来有效传递电磁波，将波导管的两端密封，便进一步得到谐振腔。

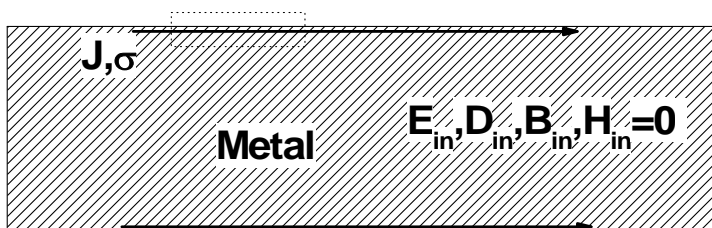
本章我们将研究波导管中的电磁波的传播行为，以及谐振腔内的电磁振荡。

## § 9.1 波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的中空金属管，其截面可以是任意形状，但通常波导管在传播方向是均匀的。电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播，这就使它与自由空间内传播的电磁波在性质上有很大的差别。

### 1. 边界条件

因为电磁波完全封闭在波导管内，我们首先应当解决的问题是电磁波在波导管壁（亦即导体）上满足的边界条件。金属波导管通常在微波通信波段使用。上两章中我们已经学到在通讯波段，金属对电磁波有很好的屏蔽作用 ---- 电磁波、感应电流、感应电荷都局域在金属表面的一个厚度为“趋肤深度  $\delta = \sqrt{2/\mu\omega\sigma_c}$ ”的一个薄层内，**金属体内没有波、电流、电荷**。因为良导体的  $\sigma_c$  非常大，趋肤深度非常小。我们可因此将真实导体（在微波段）简化为一个“理想导体” – **即金属体内没有电磁波，但在表面上有面电荷  $\sigma$ 、面电流分布  $\vec{J}$ ，换言之，将趋肤深度层内的电荷、电流简化成面电荷、面电流**。将 Maxwell 方程的积分形式应用到理想金属的表面，我们得到理想金属的边界条件



$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (9.1.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \sigma, \quad \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (9.1.2)$$

其中  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  等场量是在金属表面上（介质一侧）测到的。这里已经用了金属内部所有场量为 0 的条件。事实上  $\sigma$  和  $\vec{J}$  均是未知量，要根据求得的场利用 (9.1.2) 式来决定。故“理想导体”表面的场的边界条件就是 (9.1.1)。

### 2. 场方程

我们现在来研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都是一样的直波导管的情形。若波导管中无源，且是真空，则波导中的电磁场满足波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.3)$$

选择波导管的长度方向为  $z$  轴，我们感兴趣的是沿着  $z$  方向传播的解。但此时沿  $z$  方向传播的平面波一定不是波导管中的解，因为常矢量  $\vec{E}_0$  不可能满足理想导体边界条件(9.1.1)。注意到波导管沿  $z$  轴均匀，故场量对  $z$  的依赖关系一定为  $e^{ik_z z}$ ，同时，时间轴的均匀性保证时间依赖关系总是  $e^{-i\omega t}$ 。故设解为：

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0(x, y) \\ \vec{B}_0(x, y) \end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (9.1.4)$$

代入方程(9.1.3)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.5)$$

式中

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (9.1.6)$$

$$k_c^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (9.1.7)$$

(9.1.5)式显示电磁场的 6 个分量全部满足 Helmholtz 方程，不过分别计算电场、磁场的 6 个分量将非常复杂。其实 (9.1.5) 是从 Maxwell 方程推出的 2 次方程，不是原始的 Maxwell 方程。当我们重新检查原始 Maxwell 方程组时，我们发现不同的场分量之间并不独立（就像平面波中电场与磁场的值并不独立，比值是阻抗一样）。由  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  的  $x, y$  两个方向上分量公式可得

$$\begin{aligned} \partial_y E_{0z} - ik_z E_{0y} &= ik_0 c B_{0x} \\ ik_z E_{0x} - \partial_x E_{0z} &= ik_0 c B_{0y} \end{aligned}$$

由方程  $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  在  $x, y$  两个方向上的投影可得

$$\begin{aligned} \partial_y B_{0z} - ik_z B_{0y} &= -i \frac{k_0}{c} E_{0x} \\ ik_z B_{0x} - \partial_x B_{0z} &= -i \frac{k_0}{c} E_{0y} \end{aligned}$$

利用上面四个方程可以将场的横向分量用纵向分量来表示的表达式为

$$\begin{cases} E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_y (cB_{0z}) + k_z \partial_x E_{0z}) \\ E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_x (cB_{0z}) - k_z \partial_y E_{0z}) \\ cB_{0x} = -\frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_y E_{0z} - k_z \partial_x (cB_{0z})) \\ cB_{0y} = \frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_x E_{0z} + k_z \partial_y (cB_{0z})) \end{cases} \quad (9.1.8)$$

(9.1.8)式告诉我们：6个场分量只有2个是独立变量，一旦场的纵向分量  $B_{0z}$ 、 $E_{0z}$  知道了，则其他分量可以通过 (9.1.8) 式得到。另外，值得注意的是  $E_{0y}$  和  $B_{0x}$  有很好的对称性，而  $E_{0x}$  和  $B_{0y}$  也有很好的对称性。这样我们只需要在边界条件 (9.1.1) 下计算  $B_{0z}$ 、 $E_{0z}$  所满足的方程，

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \begin{pmatrix} E_{0z}(x, y) \\ B_{0z}(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.9)$$

然后利用 (9.1.8) 式推出所有的场量形式。

**波的模式（偏振）** 从(9.1.9)式我们可以看出，当  $B_{0z}=0$ 、 $E_{0z}=0$  时，我们有  $E_{0x}=E_{0y}=B_{0x}=B_{0y}=0$ ，因此非平庸解不存在。这意味着波导管内不可能传播横电磁波(TEM 波)，或者类似真空中的平面波。可见，波导中波的解  $B_{0z}$  和  $E_{0z}$  不能同时为 0。接下来我们考虑两个独立的情形，

(1)  $B_{0z} \neq 0$  而  $E_{0z}=0$ ；横电波（TE 波）

(2)  $B_{0z}=0$  但  $E_{0z} \neq 0$ ；横磁波（TM 波）

事实上，这与真空中电磁波的两种偏振状态非常类似。**这是波导中电磁波的最显著特点之一。**下面我们将以矩形波导为例说明波导中电磁波的行为。

**注意：**我们常说电磁波是横波，但那时对真空中的平面波解才正确，在波导管内，电磁波横向受到波导壁的限制，完全的横波不可能存在。但后面我们介绍一种新的看法，大家可以明白其实波导管内没有横波和电磁波是横波这2者不矛盾。

## § 9.2 矩形波导

矩形波导是指横截面为矩形的波导，结构如图 9.1 所示。设波导管壁为理想导体，分别考虑 TE 和 TM 两种偏振方式的波的传输行为。

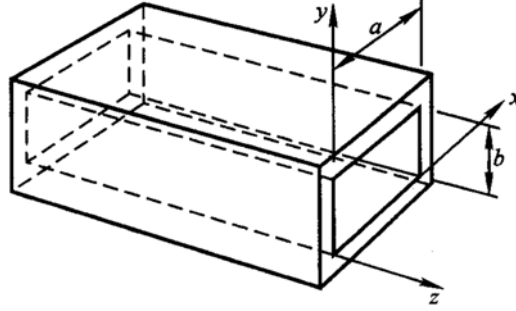


图 9.1

### (1) TE 波

由上节的讨论可知，首先要求出轴向分量  $B_{0z}$ 。在现在的情况下方程为：

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) B_{0z} = 0 \quad (9.2.1)$$

考虑理想导体边界条件 (9.1.1)，可得

$$B_{0x}|_{x=0,a} = B_{0y}|_{y=0,b} = E_{0x}|_{y=0,b} = E_{0y}|_{x=0,a} = 0 \quad (9.2.2)$$

但这些条件都不是对  $B_{0z}$  的！根据 (9.1.8)，在 TE 波的条件 ( $E_{0z} = 0$ ) 有

$$E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_y B_{0z}, \quad E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_x B_{0z}, \quad B_{0x} = \frac{i}{k_c^2} k_z \partial_x B_{0z}, \quad B_{0y} = \frac{i}{k_c^2} k_z \partial_y B_{0z} \quad (9.1.8')$$

因此 (9.2.2) 式可转化成对  $B_{0z}$  的如下边界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{0z} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} \Big|_{y=0} = 0 \quad (9.2.3)$$

根据分离变量法，(9.2.1) 的通解为  $B_{0z} = B_0 (\sin k_x x, \cos k_x x) \cdot (\sin k_y y, \cos k_y y)$ ，

其中  $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ 。再根据边条 (9.2.3)，不难证明，满足上述方程和边界条件的解为：

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$
(9.2.4)

式中  $m$ 、 $n$  为正整数或零。把(9.2.4) 代入(9.1.8')式得到  $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$  的全分量为

$$TE波 \left\{ \begin{array}{l} E_x = -i \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = i \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = 0 \\ B_x = -i \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_y = -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{array} \right. \quad (9.2.5)$$

## 习题

P. 205, 8.9

补充题:

- 1) 对 P 波入射, 在发生全发射情况下推导出折射波的能量表达式。
- 2) 当电磁波从空气中入射到一个磁性介质(相对磁导率为  $\mu_r = 4$ , 相对介电常数为 1) 表面上时, 对 S、P 两种偏振情况下计算入射角为  $\theta$  条件下的反射率的表达式。试问, S、P 哪一种偏振波有 Brewster 角效应? 对应的 Brewster 角是多少? 发生 Brewster 效应时对应的物理解释是什么?

## 课外小课题

- 1) 仔细讨论发生全反射时对应的偏振问题, 用数值计算+图形的方法讨论一个线偏振的光经全反射后偏振图案如何变化。
- 2) 考虑微波波段电磁波正入射到金属良导体的表面, 计算在金属对电磁波的吸收, 由此理解为什么良导体对电磁波几乎不吸收?