第一章　信息光学的数学基础

1.1　光学中常用的非初等函数

1.2　光学常用的初等函数

1.3　函数的变换

1.4　δ 函数

1.5　周期函数

1.6　复数和复值函数

1.1 光学中常用的非初等函数

1.1.1 矩形函数

1.1.2 阶跃函数

1.1.3 符号函数

1.1.4 三角形函数

1.1.5 斜坡函数

1.1.6 圆域函数

1.1.7 非初等函数的运算和复合

在现代光学尤其是信息光学中，常会用到一些非初等函数和特殊函，用以描述各种物理量，如光场的分布、透射率函数等。掌握和熟悉它们的定义、数学表达形式、功能和图形，有助于分析和理解许多光学现象。我们知道，在高等数学中，初等函数是指在自变量的定义域内，能用单一分析式子表示的函数，而这一分析式子是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)以及有限次的函数复合步骤所形成的，基本初等函数有：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。非初等函数是指在自变量的定义域中不能用单一分析式子表示的函数。这一节介绍在信息光学中常用的非初等函数的定义、性质以及习惯使用的符号。给出了一些函数在MATLAB中的表示，和画出这些函数图形的程序，运行这些程序并观察函数的图形有助于对这些函数有更为直观的感觉，同时可以掌握在计算机中如何使用和表达这些函数。这些函数在信息处理中有着广泛的应用。

由于光信息处理中常用到二维非初等函数，掌握其定义与图形是极为重要，所以这一节除了给出常用一维非初等函数的定义外，还给出了其相应二维非初等函数的定义。要特别注意的是，二维函数除了可以在直角坐标系中描述外，还可以在极坐标系中描述，对具有圆对称的函数这样做通常会有利于运算的简化。

信息光学中常用到的一些非初等函数，它们的数学表达式虽然都比较简单，但所涉及的问题常常已超出了经典函数的范畴。在这些函数中，有的函数存在间断点，有的函数值有突变，有的函数则是广义函数的傅里叶变换等。所以，运用这些函数时，要特别小心谨慎。

1.1.1 矩形函数

矩形函数(rectangle function)是在光信息处理中很有用的非初等函数之一，习惯上用rect( )或Π( )表示。信号脉冲如光脉冲、电脉冲等的形状为时，就可用矩形函数来描述，所以矩形函数与常称其为矩形脉冲。对一个具有确定形状的脉冲，通常可以用脉冲的宽度、高度和脉冲面积这三个参数来描述，脉冲面积是指一维函数曲线下所包含的面积，即函数在整个定义域上的积分，这个三参数中二个确定了，另一个也就确定了。描述脉冲的参数取单位值1时，会使用问题变的简洁而方便又不会失去其特性，所以在信息处理中，常用所谓的单位脉冲，有时也称为标准脉冲。单位脉冲先要求脉冲面积为1，然后通常取高度为1，这样规定后，不同形状的脉冲，宽度也会不同。

1. 定义

一维单位矩形函数的定义为：

$$\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}1 & |x|<1/2\\ 1/2 & |x|=1/2\\ 0 & |x|>1/2\end{cases}$$

由于在不连续点处函数值的定义不同，在文献中，标准阶跃函数有三个微小差别，但都也常被使用的形式。另二种定义是：

$$\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}+1 & |x|\le 1/2\\ 0 & |x|>1/2\end{cases}$$

不连续点处的函数值为**1**

$$\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}+1 & |x|<1/2\\ 0 & |x|>1/2\end{cases}$$

不连续点处的函数值没有定义

上三式所表示的函数，中心在x=0点，在区间内函数值为1，否则为0。 X=-1/2, 1/2处为不连续点(间断点)。在实际问题处理时，不连续点是作特别处理的，其函数值不并计入所处理的问题中，不连续点处函数值的取值是具体多少并不影响对问题处理，所以在不连续点间断点处函数值的取值可以是任意的。式(1.1.1)形式是不连续点的函数值取其左右数值的平均值，即为 1/2，这是信号处理中常用的取法，这样可以保持与其他函数如阶跃函数(见1.1.2)、符号函数(见1.2.3)有一致的表示，并可建立这些函数之间的代数关系。上述讨论，对有相同断点特性的函数，如下面讨论的符号函数、矩形函数也是适用的。使用定义式(1.1.1)，可使这类函数有统一表示，并可建立这些函数间的代数关系。

式(1.1.1)、式(1.1.2)和式(1.1.3)就是一个高度、宽度都为1，矩形的面积为1的单位矩形脉冲。单位矩形函数的图形如图1.1.1(a)所示。

单位矩形函数通过平移和缩放，可得到一般形式矩形函数的表达式：

中心位置

高度

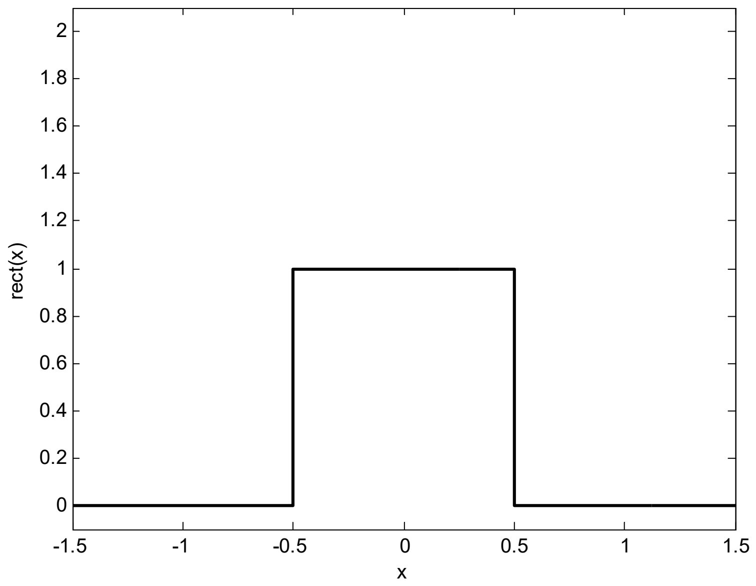
$$h\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases} h & |x-x_0|/a<1/2 \\ h/2 & |x-x_0|/a=1/2 \\ 0 & |x-x_0|/a>1/2 \end{cases}$$

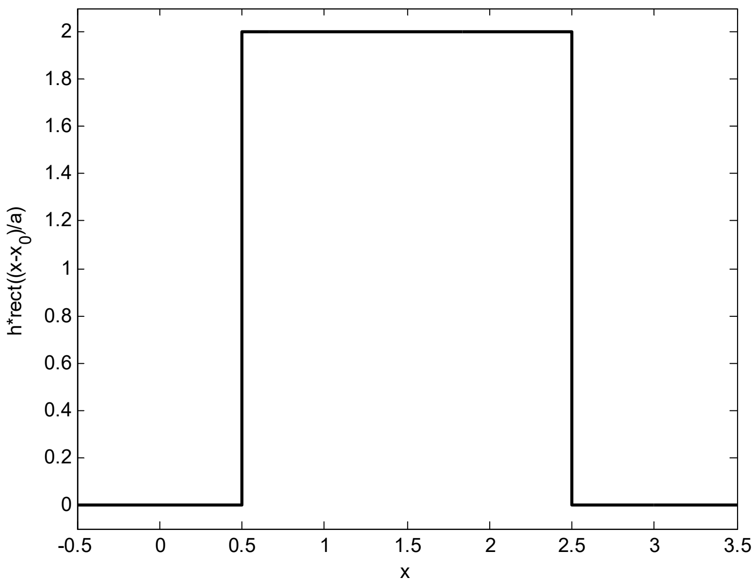
宽度

显然，矩形的面积为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{d}x=|ha|$$

2. 图形





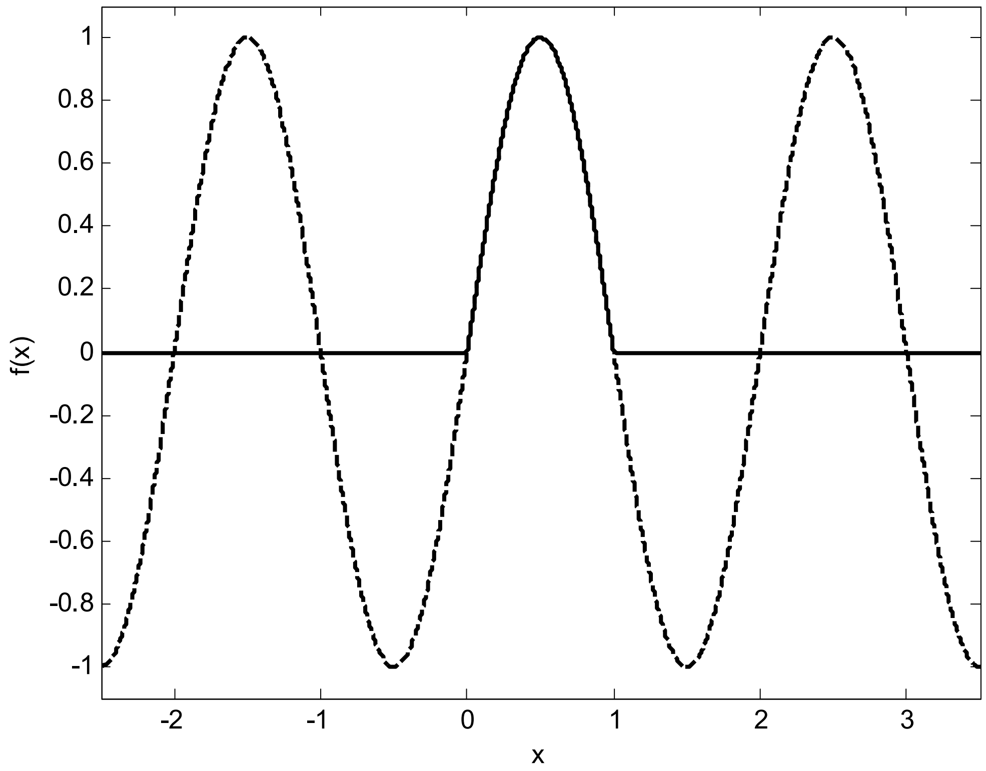
3. 功能

截取函数；门函数；矩形窗口函数

$$f(x)=\sin\pi x\cdot \mathrm{rect}(x-\frac{1}{2})=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin\pi x & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

矩形函数可以描述单缝、矩孔的透过率。用一维矩形函数可以用来描述照相机快门。也是可来表示电路中的门脉冲，激光器输出的光脉冲等。在频率域中，矩形函数可表示理想的低通、带通滤波器等。

单个矩形函数可以表示单个狭缝、单个脉冲等，而单个矩形函数的组合，尤其按一定周期排列的组合，在光信息处理中是常遇到的，如矩形光栅、周期性的脉冲序列等，这些都可以周期性的矩形函数来表示。



4. 二维矩形函数

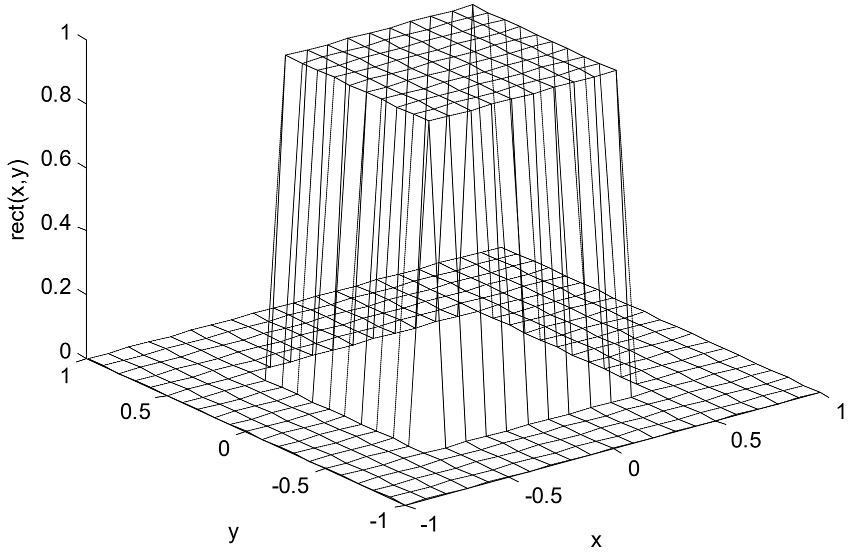
$$h\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right)=h\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$$

$$=\begin{cases} h & |x-x_0|/a<1/2,|y-y_0|/b<1/2 \\ h/2 & |x-x_0|/a=1/2,|y-y_0|/b=1/2 \\ 0 & |x-x_0|/a>1/2,|y-y_0|/b>1/2 \end{cases}$$

函数所形成的长方体的体积为： $a\times b\times h$

由此可见，用二维函数来描述一个具有确定形状的脉冲时，需用用脉冲的宽度、长度、高度和脉冲体积这三个参数来描述，脉冲体积是指二维函数曲面所包含的体积。这时单位脉冲则是脉冲体积为**1**。

可用二维矩形函数来描述无限大不透明屏上矩形孔的透射率



1.1.2 阶跃函数

1. 定义

阶跃函数(step fucction)，用step( )或H( )表示。为记念英国的著名的电气工程师奥利弗·海维赛德(Oliver Heaviside，1850-1925)，又称为海维赛德函数。

一维单位阶跃函数的定义为：

$$\mathrm{step}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 1/2 & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

同矩形函数的表示一样，单位阶跃函数也有常用的三种形式，另二种定义是：

$$\mathrm{step}(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad \mathrm{step}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

单位阶跃函数的图形如图1.1.4(a)所示。如1.1.1中所述，不连续点的确定值是无关紧要的。式(1.1.6)的定义式不连续点处的函数值取1/2的一个原因是为了适应傅里叶变换的要求，在第二章可以看到，虽然阶跃函数的三种定义都有相同的傅里叶变换，但从相应的傅里叶变换复原到连续函数的反过程的总是海维赛德函数形式，即在 $x=0$时它值是。由于上述的三个定义都在 $x=0$时有一个跳跃的不连续点，即 $f(x^+)\neq f(x^-)$根据傅里叶变换的定义(见2.1.2)，在跳跃的不连续点，逆傅里叶变换的值是函数值在该点的平均值。对标准阶跃函数来说，这个平均值就是左边和从右边趋近间断点时函数的平均值，即在 $x=0$时的平均值就 1/2。

单位阶跃函数以通过位移和改变方向得到更为一般形式的阶跃函数，其形式如下：

间断点

$$\mathrm{step}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1 & x/a>x_0/a\\ 1/2 & x/a=x_0/a\\ 0 & x/a<x_0/a\end{cases}$$

a 的大小没有意义，正负号决定阶跃函数的射向

阶跃函数和矩形函数之间存在下列关系式：

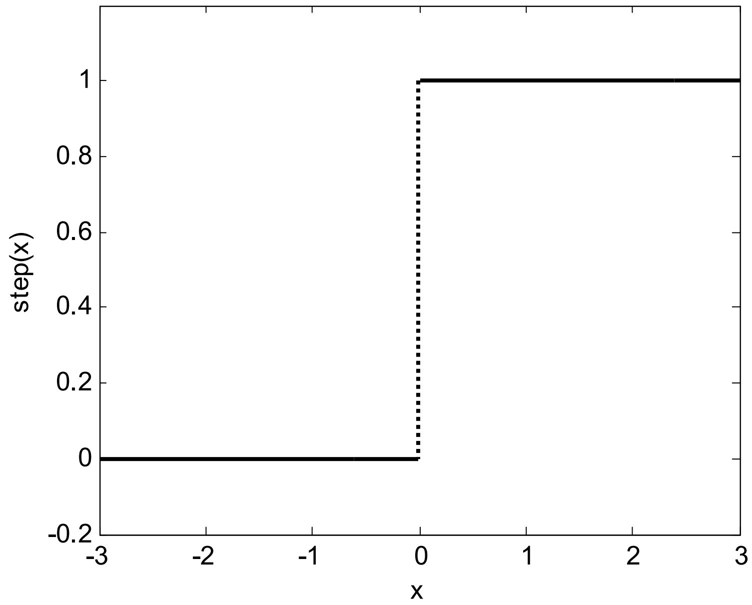
$$\mathrm{rect}(x-x_0)=\mathrm{step}\left(x-x_0+\frac{a}{2}\right)-\mathrm{step}\left(x-x_0-\frac{a}{2}\right)$$

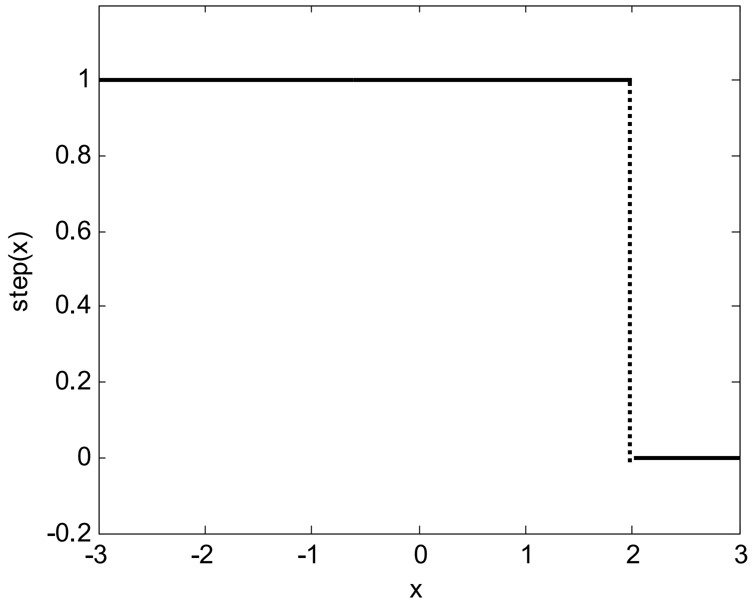
都为单位函数时，有

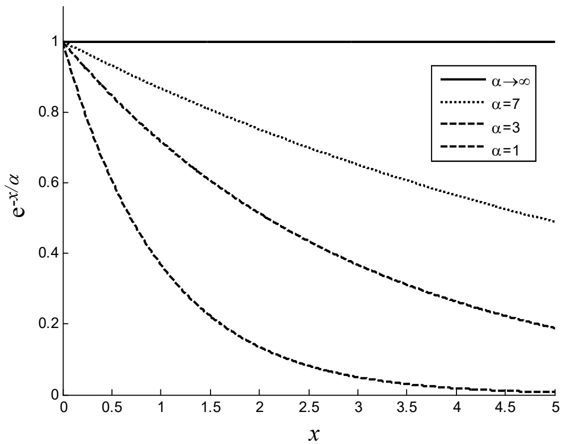
$$\mathrm{rect}(x)=\mathrm{step}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\mathrm{step}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

显然，阶跃函数宽度与面积的概念是没有意义。

2. 图形







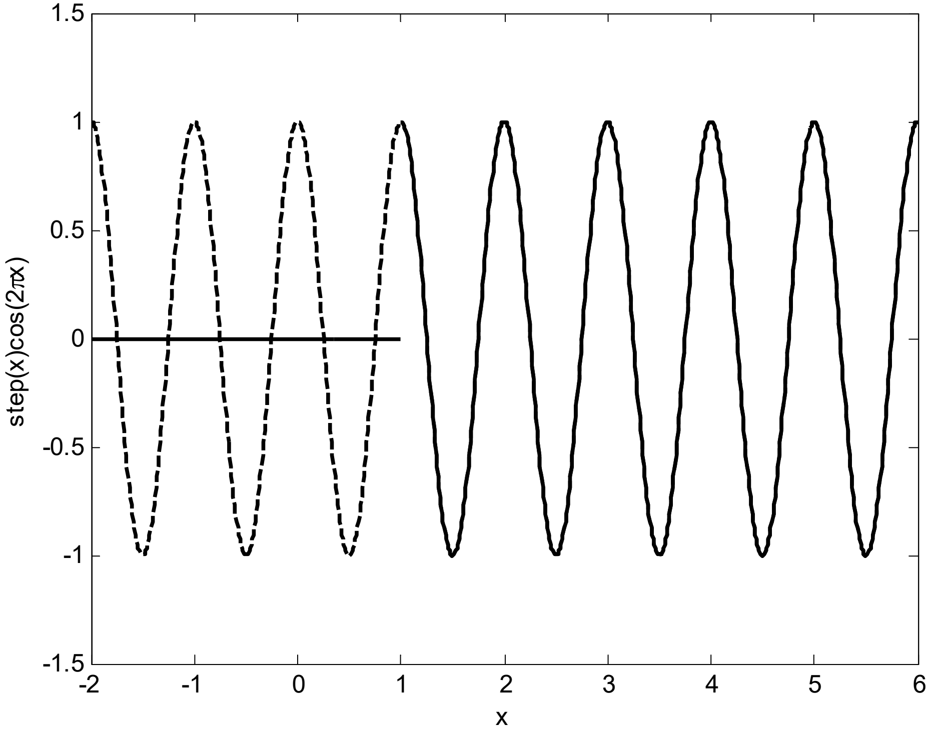
$$\mathrm{step}(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{e}^{-x/\alpha}$$

3. 功能

阶跃函数起着“开关”的作用，可用来在某点“开”或“关”另一个函数。所以，阶跃函数可用来表示一个开关信号，也可以用来表示突然打开的快门。

将一维阶跃函数与某函数相乘时，阶跃函数起着开关的作用，如：

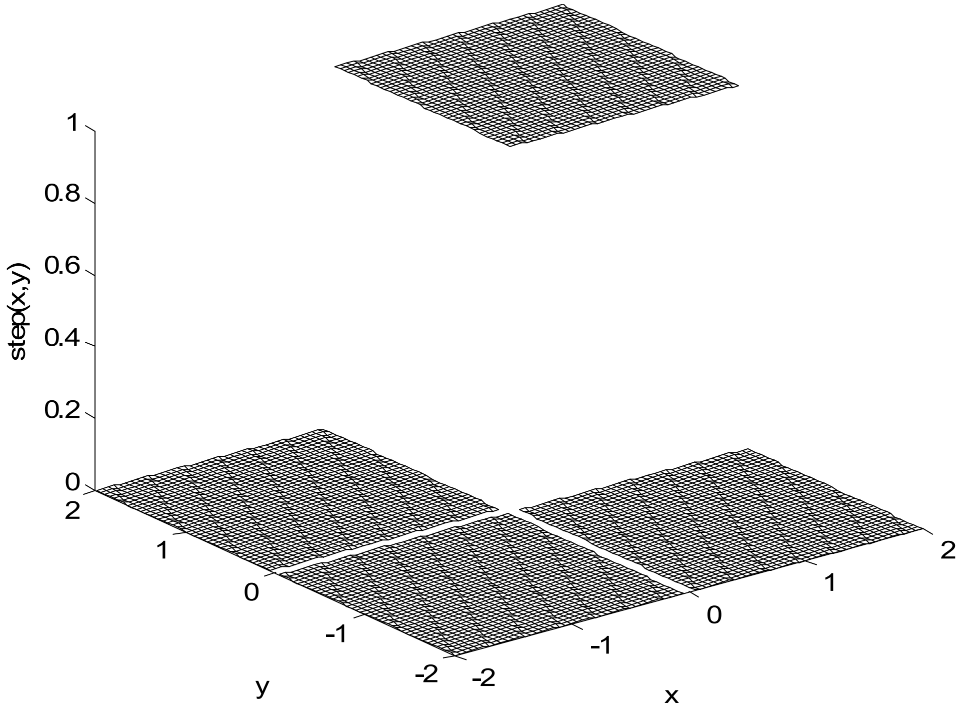
$$\mathrm{step}(x-1)\cos(2\pi x)$$



4. 二维阶跃函数

$$\text{step}\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{x-y_0}{b}\right)=\text{step}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{step}\left(\frac{x-y_0}{b}\right)$$

在光学中，二维阶跃函数可表示无穷大平面的振幅透射系数或刀口滤波器函数。



1.1.3 符号函数

1. 定义

符号函数(**signum functions**)又称为正负号函数，用**sgn( )**表示。一维标准符号函数的定义为：

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

函数值的取值由**x**的正负号决定，原点 **x=0**为不连续点，其跃度为**2**。

同样，符号函数在不连续点的取值是无关紧要的，因为符号函数常被表示成如式**(1.1.2)**和式**(1.1.3)**的形式，即。

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}+1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases} \qquad \mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}+1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

与阶跃函数一样，符号函数的宽度与面积的概念也是没有意义的。显然，符号函数也不是绝对可积的，它不满足狄里赫里收敛条件，因此，只有极限意义下的傅里叶变换。

单位符号函数，也可通过位移和反向，得到更一般的形式，即：

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}+1 & x/a>x_0/a\\ 0 & x/x=x_0/a\\ -1 & x/a<x_0/a\end{cases}$$

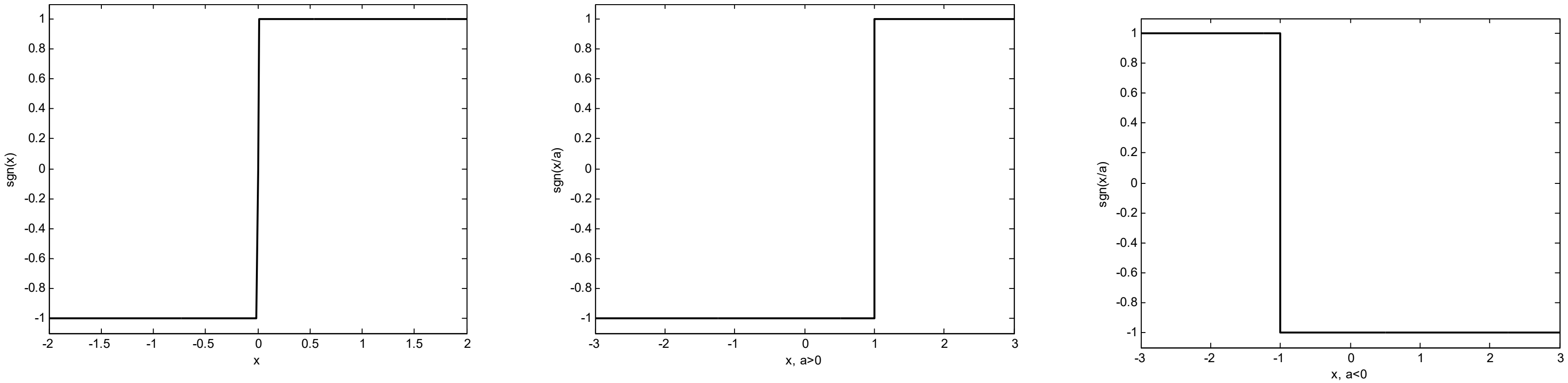
a的正、负号决定符号函数在不连续的取向，即是上跃还是下跃。

符号函数与阶跃函数和矩形函数之间存在下列关系式：

$$\operatorname{sgn}(x-x_0)=2\operatorname{step}(x-x_0)-1$$

$$\operatorname{rect}(x-x_0)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(x-x_0+\frac{1}{2}\right)-\operatorname{sgn}\left(x-x_0-\frac{1}{2}\right)\right]$$

2. 图形



3. 功能

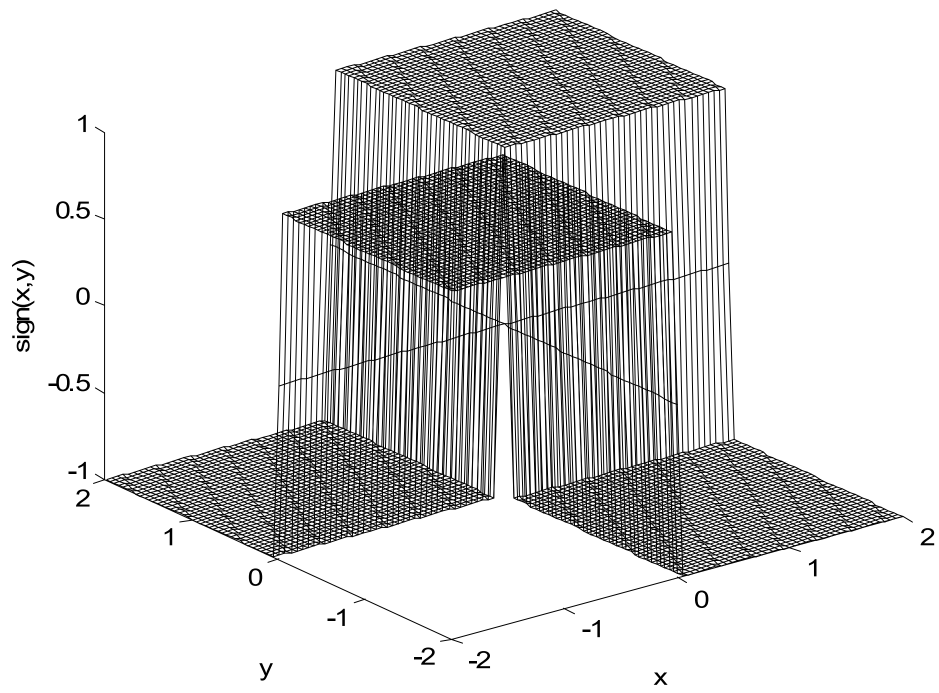
符号函数可以用来改变一个量或一个函数在某些点的正负，某函数与符号函数相乘，结果使该函数在某点的极性(正负号)发生翻转。

在光学中，某孔径的一半嵌有位相板，此孔径的复振幅透过率就可用符号函数来描述。

4. 二维符号函数

二维符号函数定义为两个一维符号函数的乘积，其表达式如下：

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{x-y_0}{b}\right)=\operatorname{sgn}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\operatorname{sgn}\left(\frac{x-y_0}{b}\right)$$



1.1.4 三角函数

1. 定义

三角形函数(**triangle function**)可用**tri( )**或Λ**( )**表示。

一维单位三角形函数的定义为：

$$\mathrm{tri}(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

表示高为**1**、底为**2**、宽度为**1(**半高宽，中心点处最大值一半的宽度**)**、面积为**1**的等腰三角形，其图形如图**1.1.11(a)**所示。函数的中心在原点，不连续点在**x=+1,-1**。

单位三角函数经过位移和扩展后，得到一般形式的三角形函数：

$$\mathrm{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\left|x-x_0\right|/a & \left|x-x_0\right|/a\le 1\\ 0 & \left|x-x_0\right|/a>1\end{cases}$$

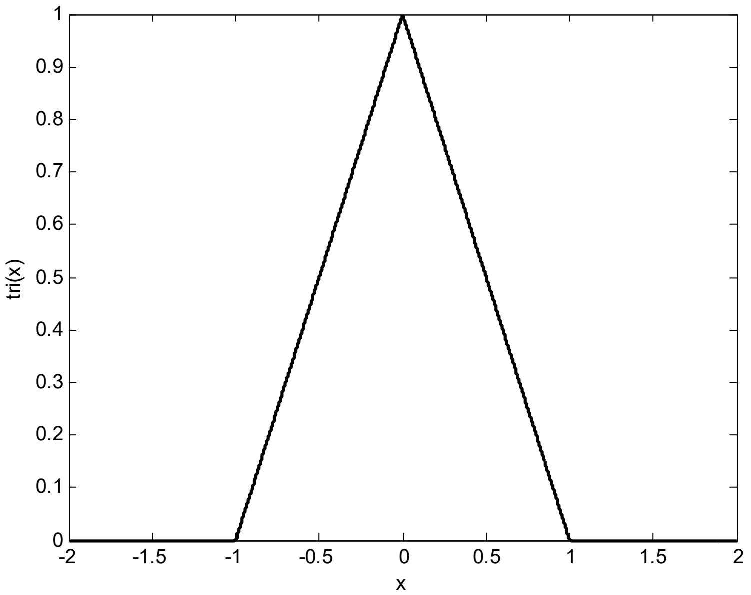
或写成：

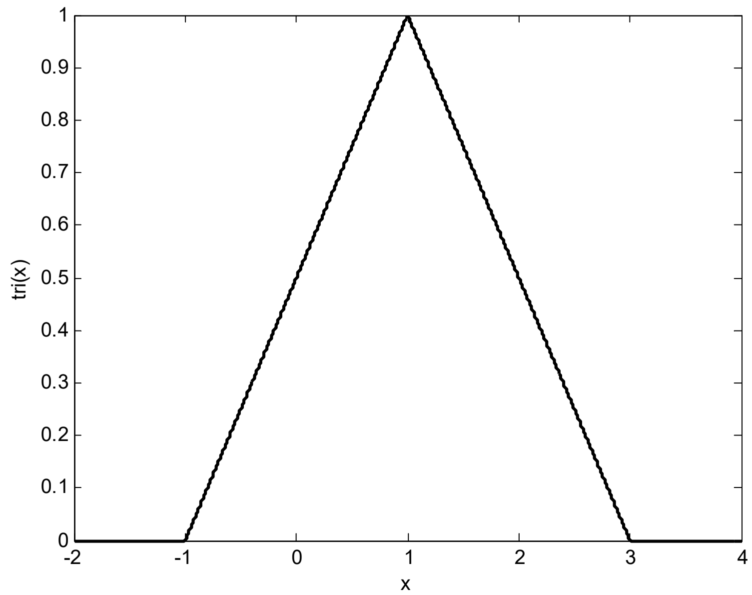
$$\mathrm{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1+(x-x_0)/a & -1\le (x-x_0)/a\le 0\\ 1-(x-x_0)/a & 0<(x-x_0)/a\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

以**x_0**为中心、底边长为**2a**、高度为**1**的等腰三角形，其图形如图**1.1.11(b)**所示。**a**的正负不影响三角形函数的图形。显然，三角形的面积为**a**，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{d}x=a$$

2. 图形





3. 功能

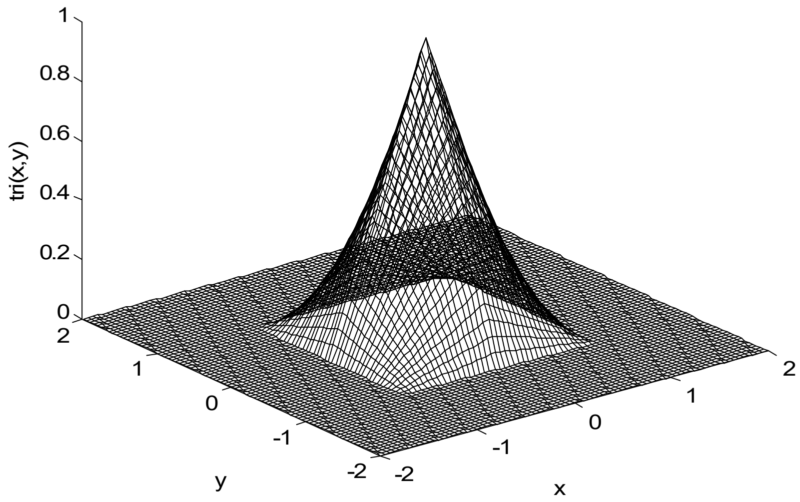
二维三角函数可用来表示一个极限光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数。

4. 二维三角函数

$$\mathrm{tri}\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right)=\mathrm{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\cdot\mathrm{tri}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$$

$$=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|x-x_0|}{a}\right)\left(1-\dfrac{|y-y_0|}{b}\right) & \dfrac{|x-x_0|}{a}\le 1,\dfrac{|y-y_0|}{b}\le 1\\ 0 & \dfrac{|x-x_0|}{a}>1,\dfrac{|y-y_0|}{b}>1\end{cases}$$

二维三角形函数的形状初看起来像一个角锥体，但从图中可以看出，实际上并不是。垂直于任一轴的截面总是三角形，但沿一对角线的截面则由两段抛物线构成。此外，从顶到底其等高线的形状并不保持不变。



1.1.5 斜坡函数

1. 定义

$$R(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

函数的不连续点在**x=0,** 当**x>=0**时，**R(x)**的斜率为**1**。斜坡函数没有宽度、高度和面积的概念，这里称为单位斜坡函数，是由于**R(x)**有“单位斜率”。称为单位其函数图形如图**1.1.13(a)**所示。

单位斜坡函数经过平移与扩展后，其一般形式为：

$$R\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} & \dfrac{x}{a}>\dfrac{x_0}{a} \\ 0 & \dfrac{x}{a}\le\dfrac{x_0}{a} \end{cases}$$

函数的不连续点在**x=x$_0$**，处，在非零部分的斜率为 **1/a**。

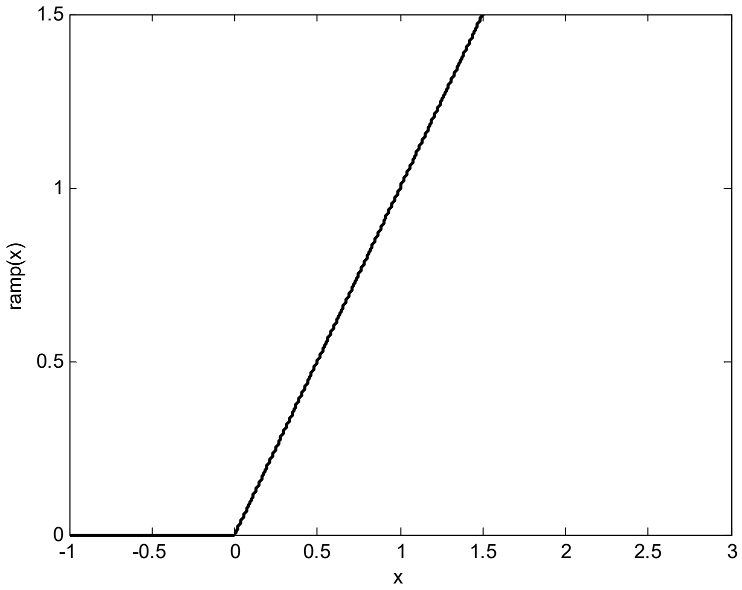
斜坡函数可以由变量**x**和阶跃函数相乘而得到，即：

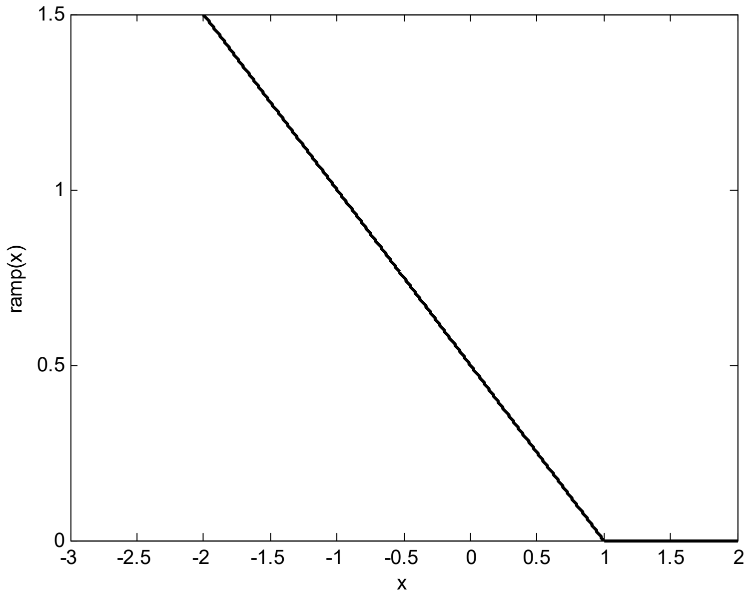
$$\mathrm{R}(x) = x\mathrm{step}(x)$$

一般形式的斜坡函数可由阶跃函数的积分得到：

$$\mathrm{R}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \mathrm{step}\left(\frac{\alpha - x_0}{a}\right)\mathrm{d}\alpha$$

2. 图形





3. 与其他函数的关系

斜坡函数与阶跃函数适当地组合可以得到三角函数，如：

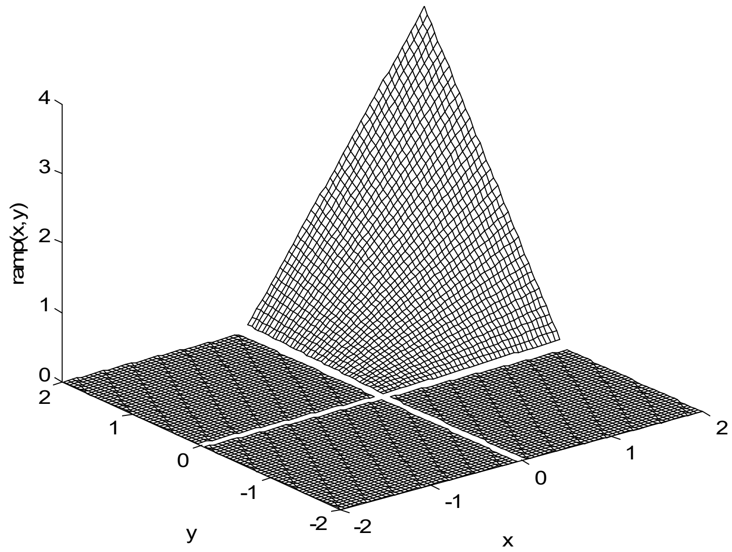
$$\mathrm{tri}(x) = \mathrm{R}(x+1) - 2\mathrm{R}(x) + \mathrm{R}(x-1) \qquad \mathrm{tri}(x) = [\mathrm{R}(x+1) - 2\mathrm{R}(x)][\mathrm{step}(x+1) - \mathrm{step}(x-1)]$$

$$\mathrm{tri}(x) = \mathrm{R}(x+1)[\mathrm{step}(x+1) - \mathrm{step}(x)] + [1 - \mathrm{R}(x)][\mathrm{step}(x) - \mathrm{step}(x-1)]$$

$$\mathrm{tri}\left(\frac{x-1}{2}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{x+1}{2}\right)\mathrm{step}\left(\frac{x-1}{-1}\right) + \mathrm{R}\left(\frac{x-3}{-2}\right)\mathrm{step}\left(\frac{x-1}{1}\right)$$

4. 二维斜坡函数

$$\mathrm{R}\left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{x-y_0}{b}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{R}\left(\frac{x-y_0}{b}\right)$$



1.1.6 圆域函数

1. 定义

圆域函数(**circle function**)也称圆柱函数或柱状函数，记为**circ( )**或**cylc( )**，在直角坐标系中心在原点，圆域的半径为**1**，高度等于**1**的圆柱函数定义为：

$$\mathrm{circ}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\begin{cases}1 & 0<\sqrt{x^2+y^2}<1\\ \dfrac{1}{2} & \sqrt{x^2+y^2}=1\\ 0 & \sqrt{x^2+y^2}>1\end{cases}$$

函数的不连续点在$x^2+y^2=1$.更一般的形式是：

$$\mathrm{circ}\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,/\,a\right)=\begin{cases}1 & 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<a\\ \dfrac{1}{2} & \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=a\\ 0 & \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}>a\end{cases}$$

a为正的实常数。上式表示中心在x_0,y_0，圆域的半径为**a**,，高度等于**1**的圆柱形。

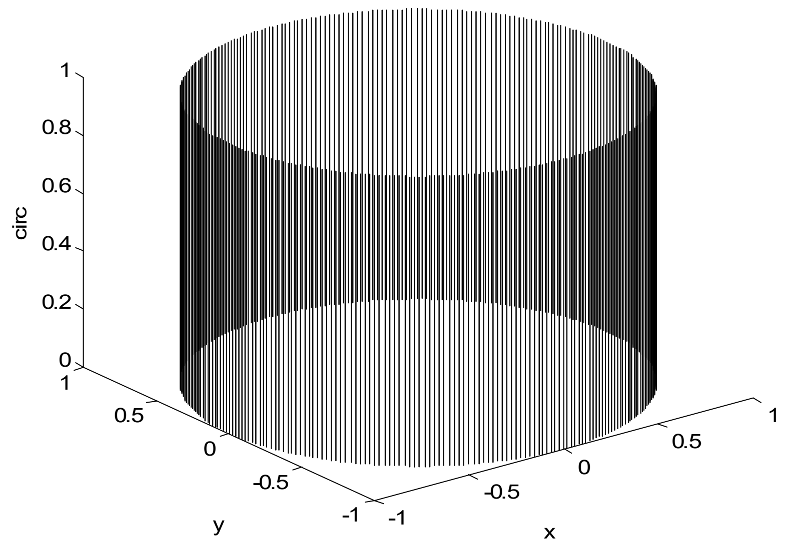
在极坐标系中，有：

$$\mathrm{circ}(r)=\begin{cases}1 & 0\le r<1\\ 1/2 & r=1\\ 0 & r>1\end{cases}\qquad \mathrm{circ}\left(\frac{r-r_0}{a}\right)=\begin{cases}1 & 0\le r<a\\ 1/2 & r=a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

在极坐标中，圆域函数只与半径有关，而与极角无关，是关于原点径向对称的，这类函数看上去像是一维的，虽然从纯数学的角度来说是这样的，但实际上并非完全如此，所以使用时要特别小心。函数的体积可用极坐标平面上的积分求得，即：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{a}r\mathrm{d}r=\pi a^2$$

2. 图形



3. 功能

在光学中，圆柱函数可以用来描述无限大不透明屏上圆孔的透过系数。圆柱函数在**MATLAB**中可以用函数**cylinder( )**来实现。

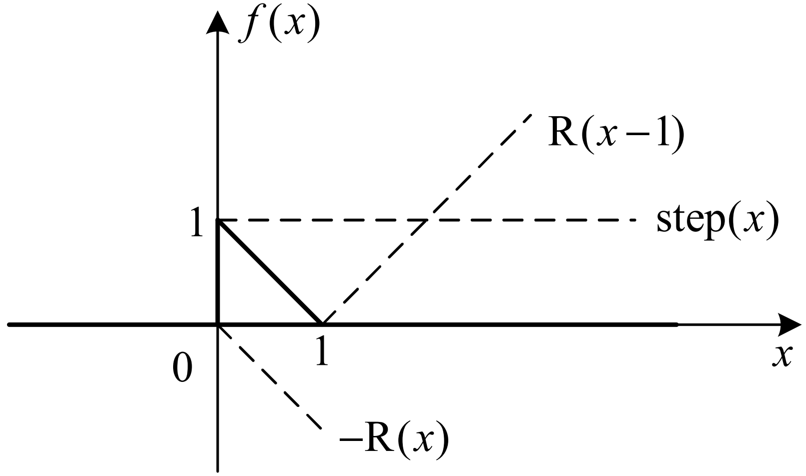
1.1.7 非初等函数的运算和复合

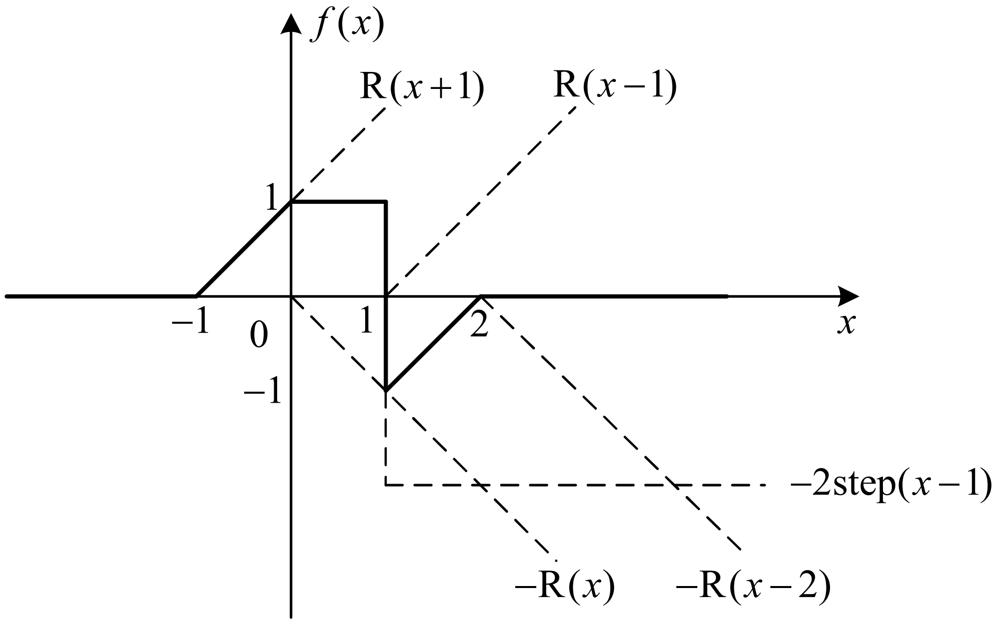
非初等函数之间也可以进行四则运算和复合。如下两图，图中实线表示的函数可用虚线表示的单位阶跃函数和单位斜坡函数表示。左图和右图表示的信号的解析为：

$$f(x)=\mathrm{step}(x)-\mathrm{R}(x)+\mathrm{R}(x+1)$$

$$f(x)=\mathrm{R}(-x+1)-\mathrm{R}(-x)-\mathrm{step}(-x)$$

$$f(x)=\mathrm{R}(x+1)-\mathrm{R}(x)-2\mathrm{step}(x-1)+\mathrm{R}(x-1)-\mathrm{R}(x-2)$$

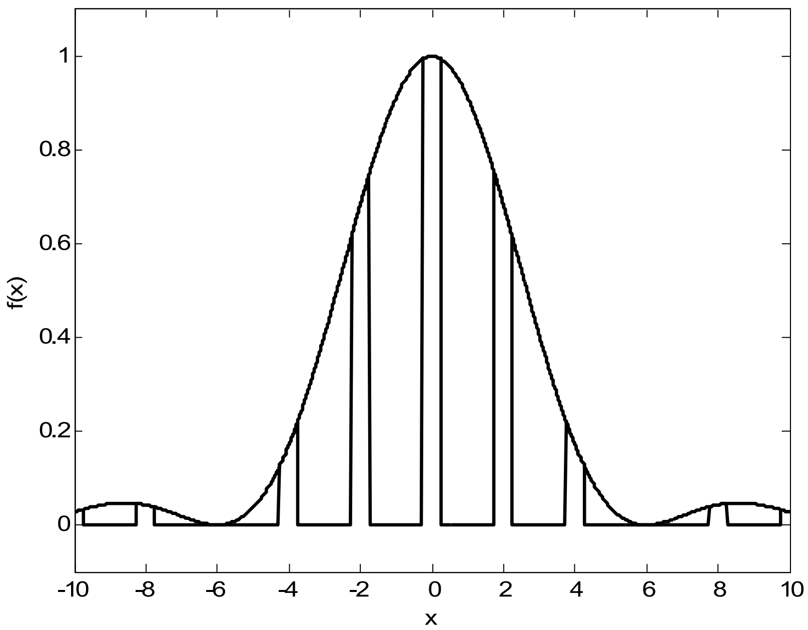




再如函数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x-nx_0}{a}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{A}\right)$$

表示周期为$\mathbf{x_0}$宽度为**a**矩形波被宽度为**sinc²**函数所调制形成的矩形调制波，其图形如下。



1.2 光学中常用的初等函数

1.2.1 sinc函数

1.2.2 高斯函数

1.2.3 贝塞尔函数

1.2.4 宽边帽函数

1.1.2 sinc函数

1. 定义

sinc函数(**sinc function**)是光信息处理中常用的函数之一。**sinc**函数与矩形函数互为傅里叶变换对，两者有着密切的关联。由于**sinc**函数与矩形函数之间的这种紧密联系，所以它在信息光学中经常用到。

一维单位**sinc**函数的定义为：

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

表示中心在原点的单位**sinc**函数。整个曲线的总面积(包括正波瓣和负波瓣)等于**1**。

经过平移和扩展，可以得到如下一般形式的**sinc**函数：

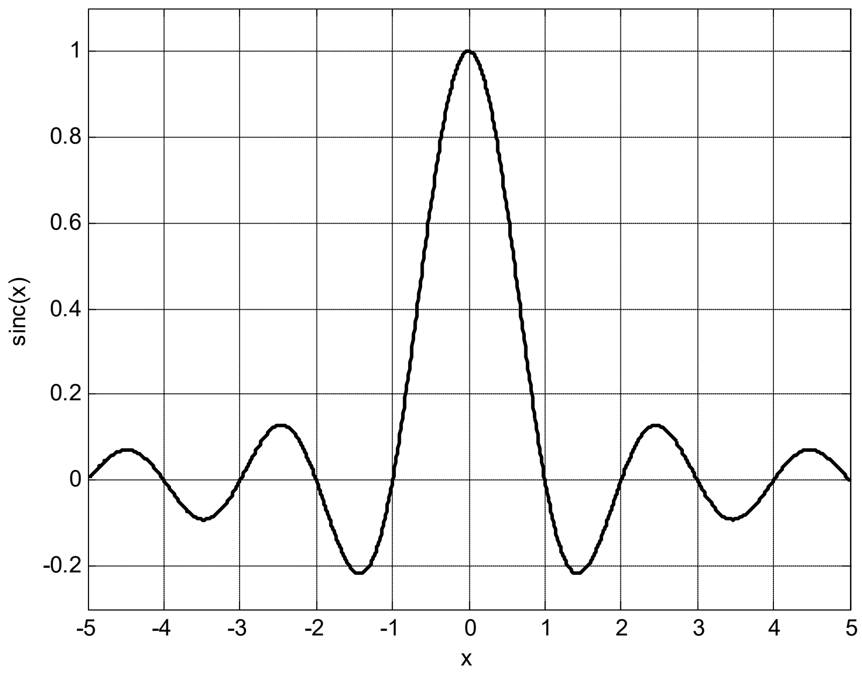
$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\frac{\sin\left[\pi(x-x_0)/a\right]}{\pi(x-x_0)/a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{d}x=a$$

定义式中含有π是布雷斯维尔(**Bracewell**)定义的。这样做可以更方便地确定函数零点的位置。通常当自变量**x**为角度时，**sinc**函数定义式中不含有π，即

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\frac{\sin\left[(x-x_0)/a\right]}{(x-x_0)/a}$$

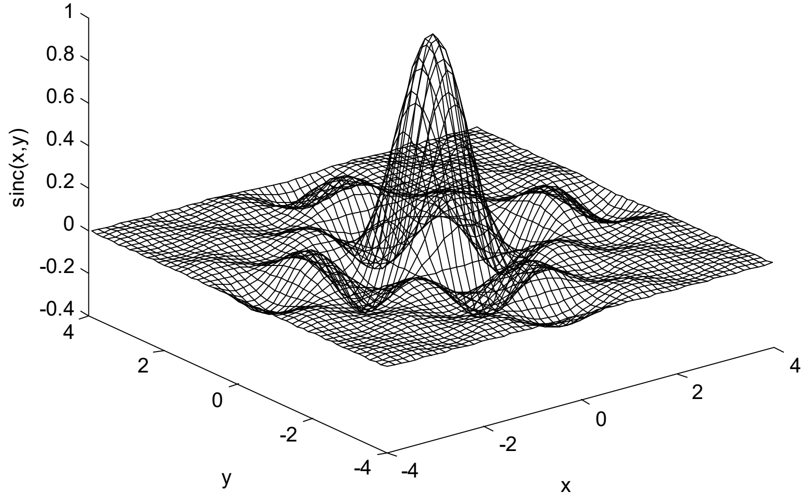
2. 图形



3. 二维sinc函数

二维sinc函数定义为两个一维sinc函数的乘积，即

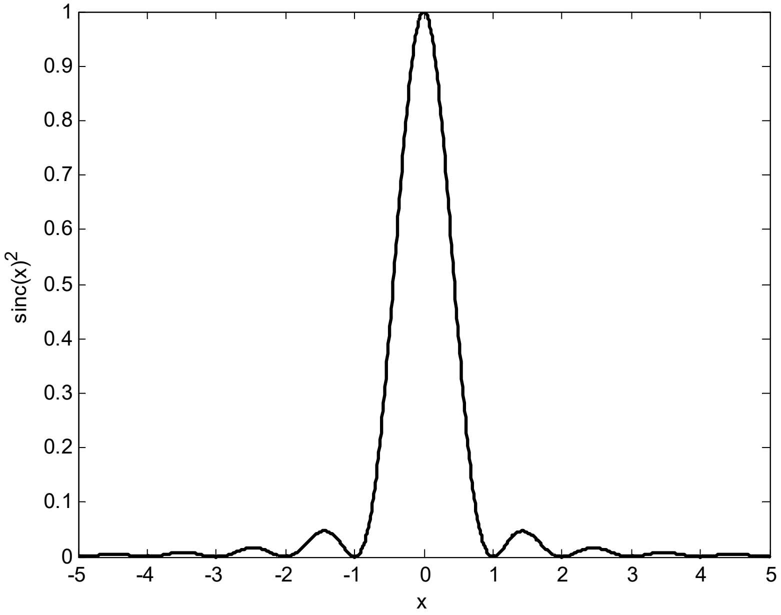
$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right)$$
$$=\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$$



4. sinc函数的平方

$$\mathrm{sinc}^2(x)=\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2$$

sinc²函数的零点与sinc函数的零点在相同的位置。而且面积和体积也相等。



5. 功能

在物理上，一维和二维**sinc**函数分别可用来描述单缝**(**即一维矩形函数**)**和矩孔**(**即二维矩形函数**)**的夫琅禾费衍射的振幅分布。$\mathbf{sinc^2}$函数可用来描述单缝夫琅禾费衍射图样的一维强度剖面图，以及描述非相干照时点扩散函数或具有矩形瞳函数的成像系统的非相干脉冲响应。

1.2.2 高斯函数

1. 定义

在光学中会经常用到高斯函数函数，在**1.1.1**中我们知道用一个函数要描述脉冲时，有三个参数：宽度、高度和脉冲面积。高斯函数**(Gaussian fucction)**也需要用这三参数来描述，由于其宽度有几种不同的定义，所以高斯函数形状的定义也比较复杂，在使用中也容易出现混淆，这里作一下较为细仔的讲述。

一般形状的一维高斯函数可以表示如下：

$$f(x) = h\mathrm{e}^{-bx^2} \qquad S = \int_{-\infty}^{+\infty} h\mathrm{e}^{-bt^2} = h\sqrt{\pi / b}$$

$$h = 1$$
$$S = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-bt^2} = \sqrt{\pi / b}$$

$$\mathrm{Gaus}(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$$

标准高斯脉冲

$$\mathrm{Gaus}(x / a) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\pi x^2 / a^2}$$

自然宽度表示的高斯脉冲

第二种是脉冲宽度定义为最大峰值一半处的宽度，称为半极大全宽度**FWHM (full width at half maxium)**，简称半高宽

$$f(x)=\sqrt{\frac{4\ln 2}{\pi}}\frac{S}{a_1}\mathrm{e}^{-\frac{4\ln 2}{a_1^2}x^2} \qquad h_1=\sqrt{\frac{4\ln 2}{\pi}}\frac{S}{a_1}$$

在光学中，用高斯函数表示光脉冲时，还有一常用的表示方式，就是用脉冲中心峰值强度的**1/e**处的脉半宽度$\boldsymbol{a_2}$, 所以第三种高斯脉冲的定义为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{S}{a_2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_2^2}} \qquad h_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{S}{a_2}$$

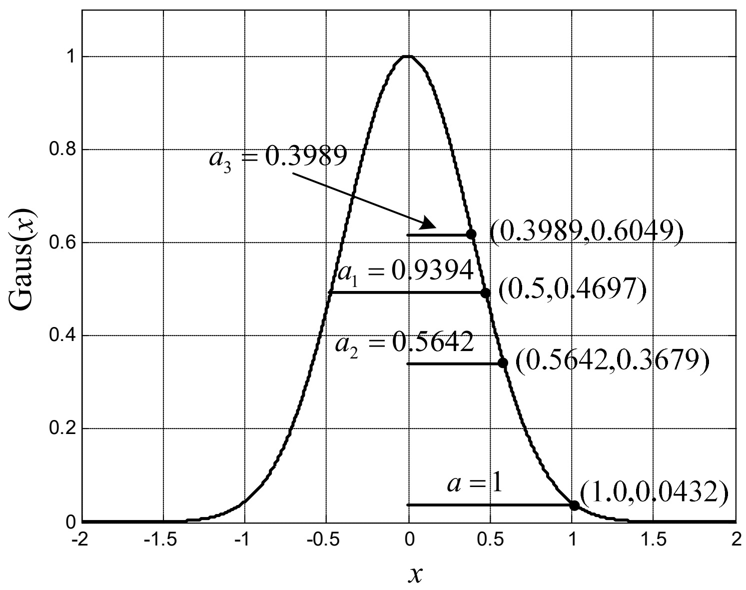
高斯脉冲还有一种常用的表示方式，这种方式在统计学中表示正态分布时常用到，即高斯分布就是**“**零均值正态**(**误差**)**分布**”**，设标准偏差为$\boldsymbol{a_3}$时，这时高斯脉冲形式可表示为：

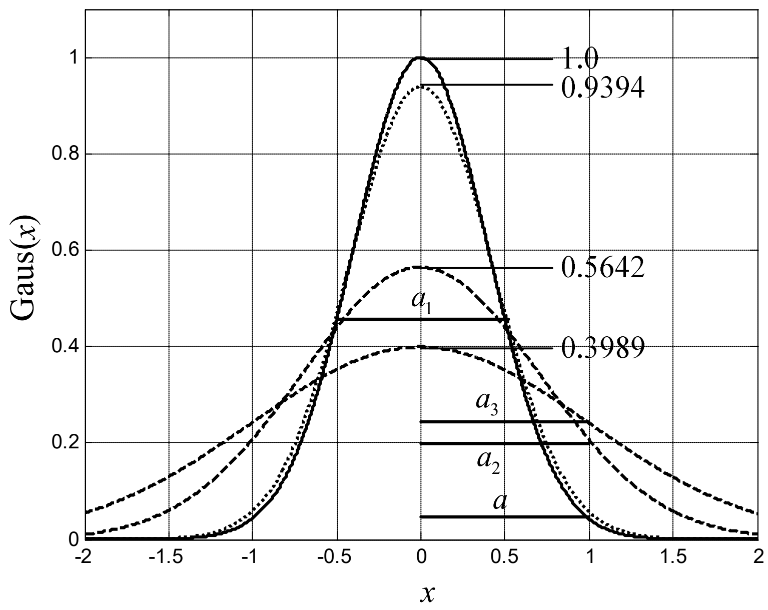
$$f(x)=\frac{S}{\sqrt{2\pi a_3^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_3^2}} \qquad h_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a_3}$$

不同定义的脉冲宽度之间的关系为：

$$a_1 = \sqrt{4\ln 2}\,a_2 = 1.6651 a_2 \qquad a_1 = 2\sqrt{2\ln 2}\,a_3 = 2.3548 a_3$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{4\ln 2}{\pi}}\,a \approx 0.9394a \qquad a_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,a \approx 0.5642a \qquad a_3 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,a \approx 0.3989a$$

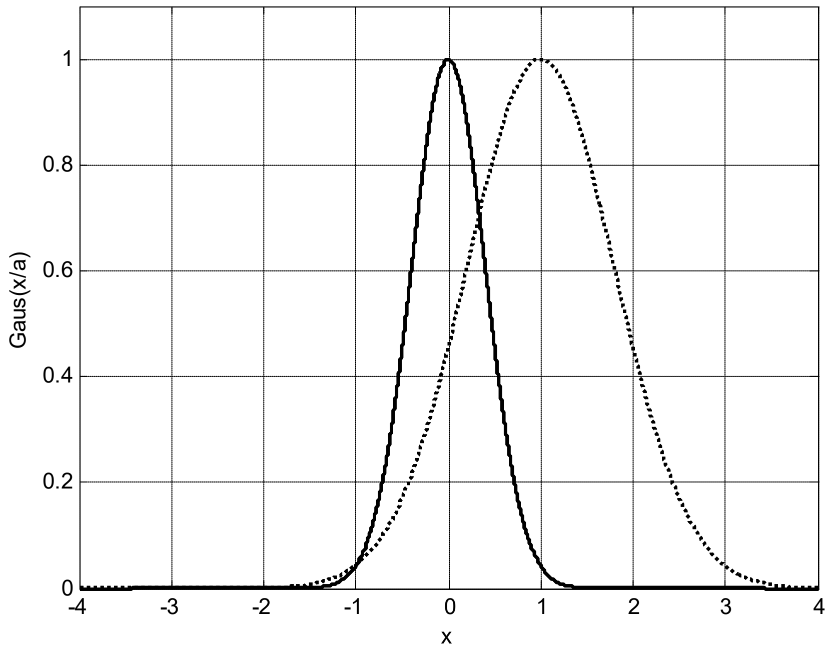




2. 图形

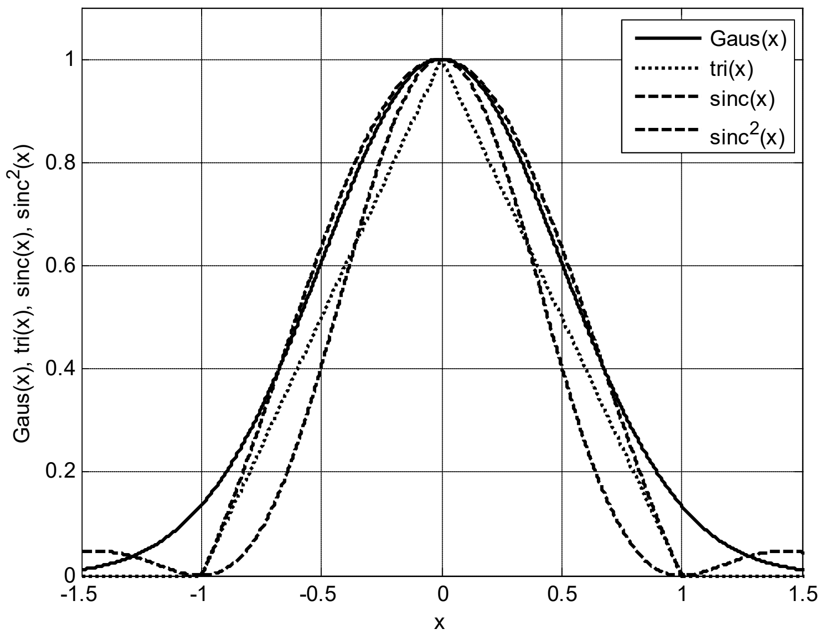
一维高斯函数可用gaussmf( )

$$f(x,x_0,a_3)=\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a_3^2}}$$



3. 几个函数图形的比较

高斯函数与sinc²函数主瓣的形状很相似，而sinc²函数的主瓣与sinc的主瓣也很相似，sinc的主瓣又接近于三角形函数。右下图把这几个函数画在了一起，可以很好地看到这种相似性。



4. 功能

高斯函数在数理统计和概率论中表示正态分布事件的分布函数，在线性系统分析中也具有重要的应用。高斯函数还有一些重要的性质：如它是光滑函数，非常“光滑”，可以无穷次求导，且其各阶导数都是连续的，属“性质特别好”的一类函数；高斯函数的傅里叶变换也是高斯函数。。

激光器发出的高斯光束常可用高斯函数来描述。在光学信息处理中，基于衍射的非相干处理的“切趾术”也会用到高斯函数。

5. 二维高斯函数

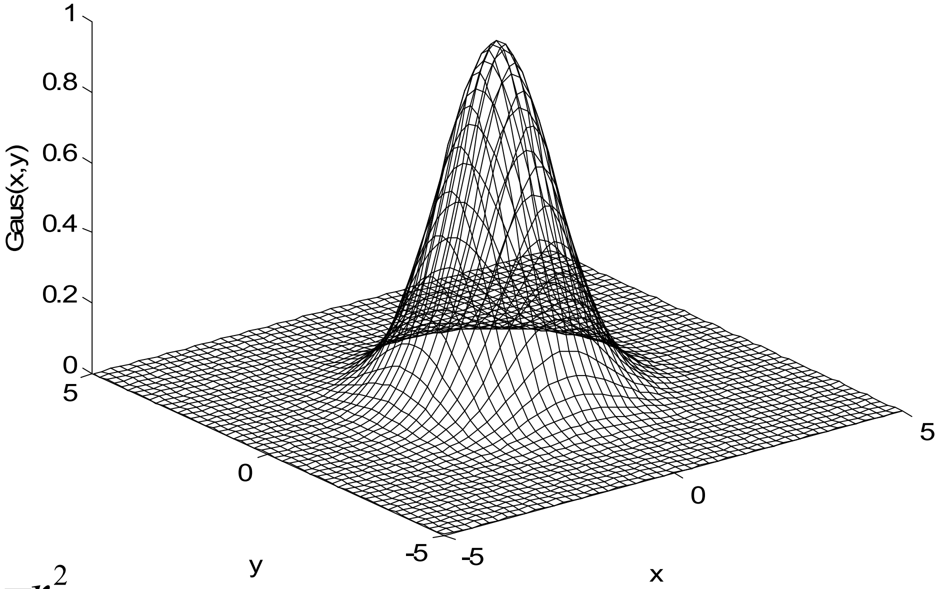
$$\mathrm{Gaus}\left(\frac{x-x_0}{a''},\frac{y-y_0}{b''}\right)=\mathrm{Gaus}\left(\frac{x-x_0}{a''}\right)\mathrm{Gaus}\left(\frac{y-y_0}{b''}\right)=\mathrm{e}^{-\pi\left[\frac{(x-x_0)^2}{a''^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b''^2}\right]}$$

$$\mathrm{Gaus}(x,y)=\mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}$$

$$\mathrm{Gauss}(\rho/r_0)=\mathrm{e}^{-\pi\rho^2/r_0^2}$$ 极坐标中

虽然上式与一维高斯函数具有完全相同的形式，但依然要注意它们之间在表示具体问题时的区别。如一维高斯函数下方的面积为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Gaus}(x/a)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi x^2/a^2}\mathrm{d}x=a$$



那么在极坐标下的体积则是：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Gaus}(r/r_0)r\mathrm{d}r=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi r^2/r_0^2}r\mathrm{d}r=r_0^2$$

1.2.3 贝塞尔函数

贝塞尔函数(**Bessel function**)是常用的一类特殊函数。**1732**年瑞士科学家伯努利(**Bernoulli**，**1700–1782**)研究直悬链的摆动问题，以及**1764**年瑞士科学家欧拉(**Euler**，**1707–1783**)研究拉紧圆膜的振动问题时，都涉及到这类函数。**1824**年，德国数学家贝塞尔(**Bessal, 1784–1846**)在研究天文学问题又遇到了这类函数，并首次系统地研究了这类函数。

贝塞尔函数与圆柱函数有着密切的关于，在光学中，由于大多数光学元件和系统都具有圆对称孔径，因此在计算光学系统，不管是理想光学成像系统还是实际光学成像系统，其点扩散函数和像点附近三维光场分布的计算，圆对称孔径和夫琅和费衍射和菲涅耳衍射的计算都离不开贝塞尔函数。贝塞尔函数有许多类，这里仅讲述与信息光学有关的第一类贝塞尔函数。

1. *n* 阶第一类贝塞尔函数的定义

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\quad(n\geq 0)$$

***n*为整数时**

$$\mathrm{J}_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^l(x/2)^{n+2l}}{l!(n+l+1)!}\quad(l=k-n)$$

零阶和1阶的贝塞尔函数表示式为

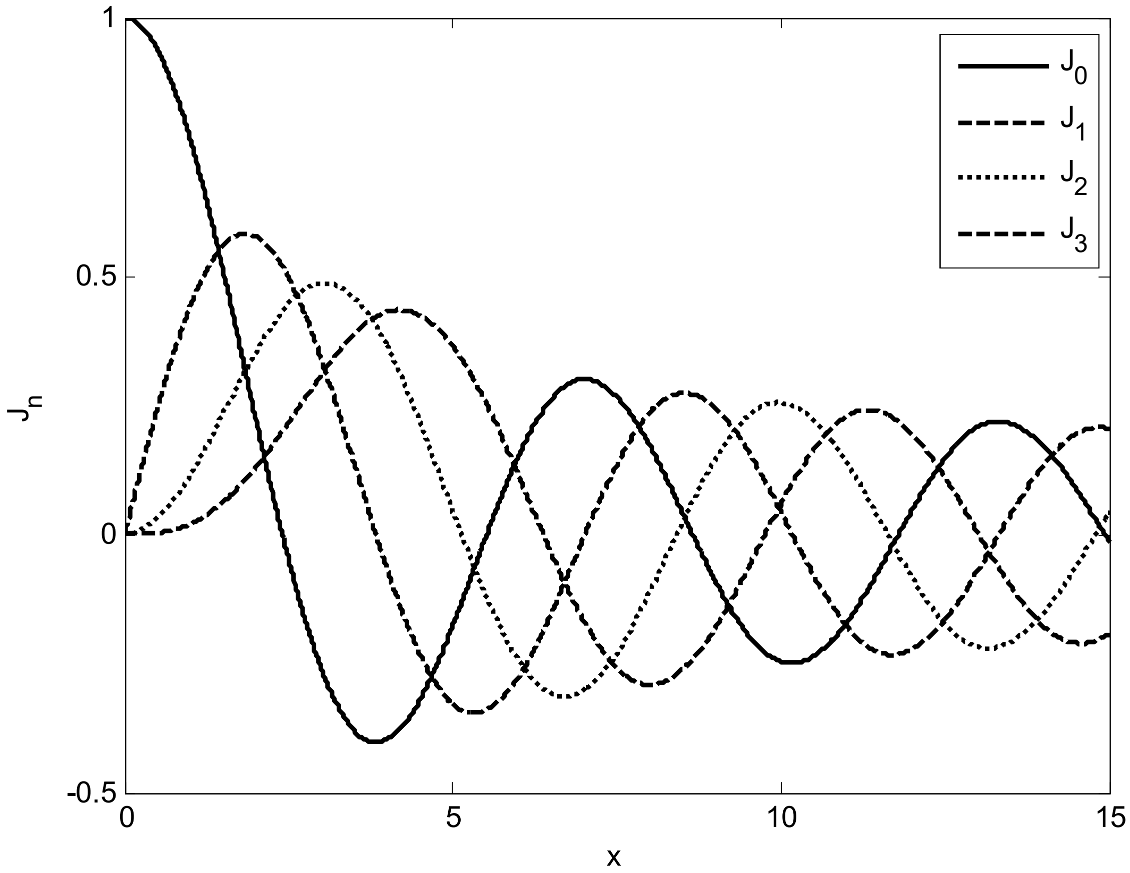
$$\mathrm{J}_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots\qquad \mathrm{J}_0(0)=1$$

$$\mathrm{J}_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\cdot 3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots\qquad \mathrm{J}_n(0)=0\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$\mathrm{J}_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(x^{-3/2}\right)$$

***x*很大时**

第一类贝塞尔函数 $J_0(x)$ $J_1(x)$ $J_2(x)$ $J_3(x)$ 的图形如下：



2. 贝塞尔函数的性质

性质1： $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$ $\quad$ $J_n(x)=(-1)^n J_n(-x)$

性质2： $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{J_n(x)}{x^n}\right]=-\dfrac{J_{n-1}(x)}{x^n}$ $\quad$ $\dfrac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=x^n J_{n-1}(x)$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$$

可以用$J_0(x)$来表示$J_1(x)$的导数。这在计算圆孔衍射爱里斑中心点的光强时得到应用。

性质3： $\int_0^x x'^{m+1}J_m(x')dx'=x^{m+1}J_{m+1}(x)$ $\quad$ $\int_0^x x'J_0(x')dx'=xJ_1(x)$

性质4： $\dfrac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta=J_n(x)$ $\quad$ $\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta=2\pi J_0(x)$

性质3和性质4在研究圆对称物体衍射问题时得到重要的应用。

1.2.4 宽边帽函数

1. 定义

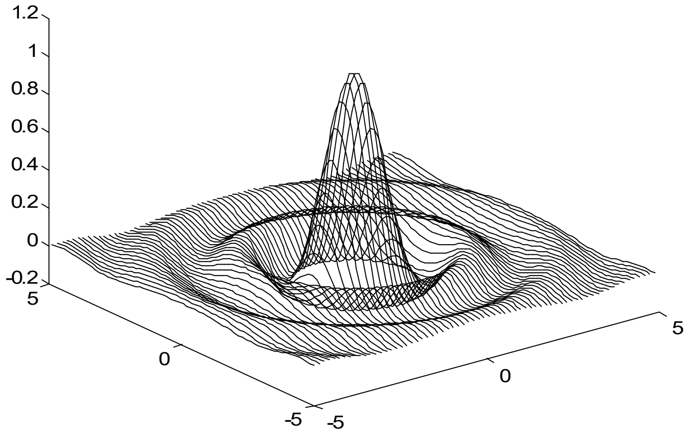
宽边帽函数(**sombrero functions**)的定义为：

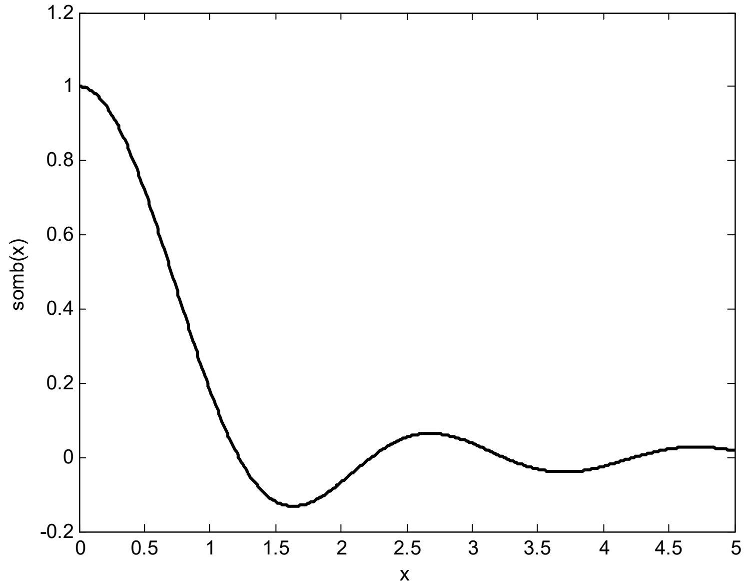
一阶贝塞尔函数

$$\mathrm{somb}(r/a)=\frac{2\mathrm{J}_1(\pi r/a)}{\pi r/a}$$

宽边帽函数是二维**sinc**函数的极坐标形式，因而虽然在极坐标系中看起来象一维函数，但实际上是二维函数，如下图所示，其形状如一个宽边帽，所以形象地称之为宽边帽函数。

2. 图形





3. 功能

它可用于描述一个具有圆形极限光瞳的成象系统的相干脉冲响应。

4. 宽边帽函数的平方

$$\mathrm{somb}^2(r/a)=\left[\frac{2\mathrm{J}_1(\pi r/a)}{\pi r/a}\right]^2$$

可用来描述圆形极限不瞳成象系统的非相干脉响函数。

1.3 函数的变换

1.3.1 一维函数的变换

1.3.2 可分离变量的二维函数

1.3.3 几何变换

在实际应用中，函数图形的位置、宽度和高度会有所变化，这就需要将上述标准形式的非初等函数进行比例缩放、平移、反演或四则运算，构成更复杂的函数形式。由上述所定义的非初等函数的标准形式不难导出其一般形式。

更一般的情况是通常某种变换，把一个函数变换成另一个函数。

1.3.1 一维函数的变换

一维函数通常比例缩放、平移、反演等变换，可以得到一般形式的函数。下面以矩形函数为例讨论一般形式的矩形函数可以表示为：

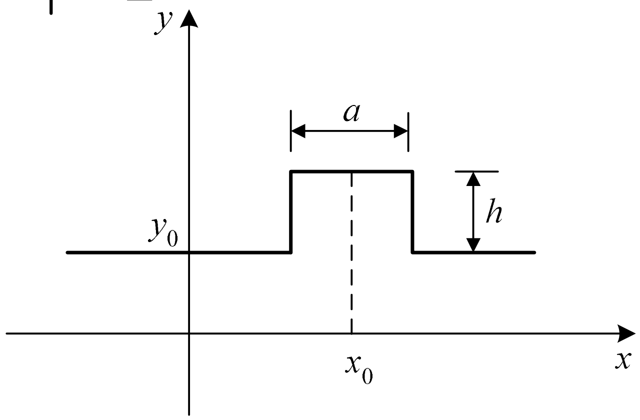
纵向缩放因子(高度)

横向平移量

$$f(x)=h\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)+y_0=\begin{cases} h+y_0 & \left|\dfrac{x-x_0}{a}\right|<\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{h}{2}+y_0 & \left|\dfrac{x-x_0}{a}\right|=\dfrac{1}{2} \\ y_0 & \left|\dfrac{x-x_0}{a}\right|>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

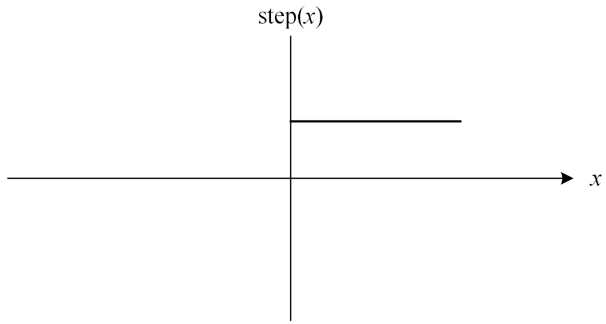
横向缩放因子(宽度)

纵向平移量

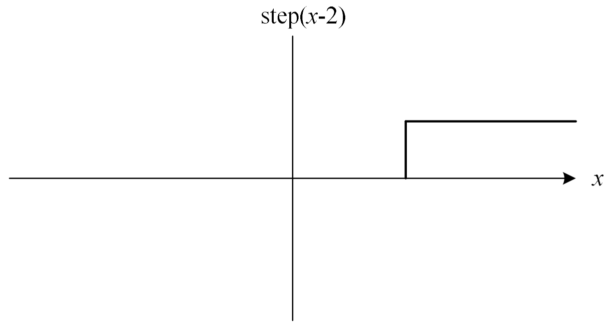


例1.3.1 作出一般阶跃函数 $f(x)=-2\mathrm{step}\left(\frac{x-2}{-3}\right)+1$ 的图形。

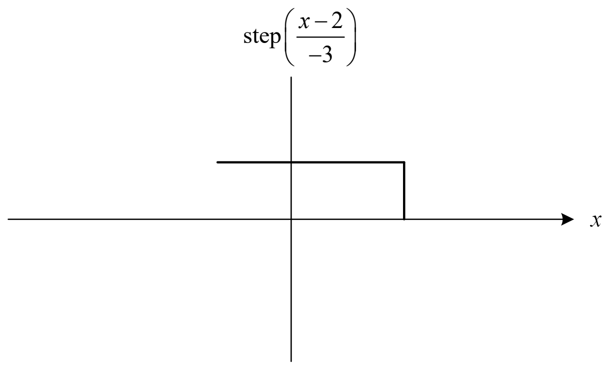
解：如下图所示，先画出标准阶跃函数**step(x)**的图形，然后经过横向位移、反演、纵向缩放和纵向位移后，就可得到函数**f(x)**的图形。



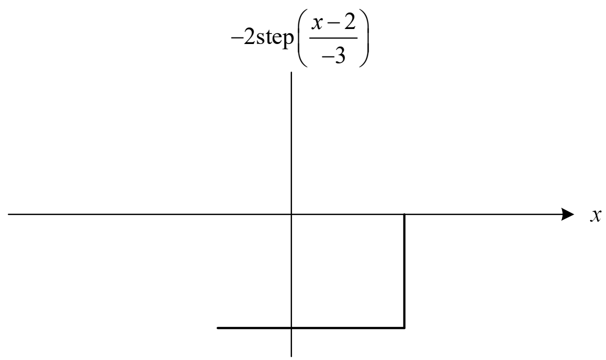
(a)



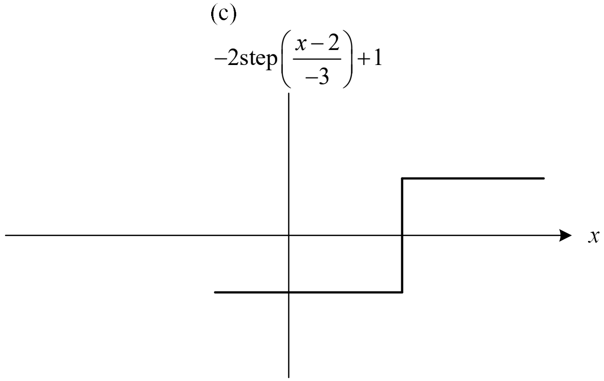
(b)



(c)



(d)



(e)

1.3.2 可分离变量的二维函数

含一个自变量的函数称为一维函数，含两个自变量的函数就称为二维函数。一维函数的图形通常为一曲线，二维函数的图形通常是空间中的曲面。

在信息光学中，通常要处理的都是二维函数，尤其常遇到的是那些能分离变量的二维函数。前面定义的许多非初等函数都是可分离变量的。在后面讨论二维傅里叶变换和二维卷积时，常会用到二维函数的可分离变量性。为此，有必要对二维函数的可分离变量性作详细一些的讨论。

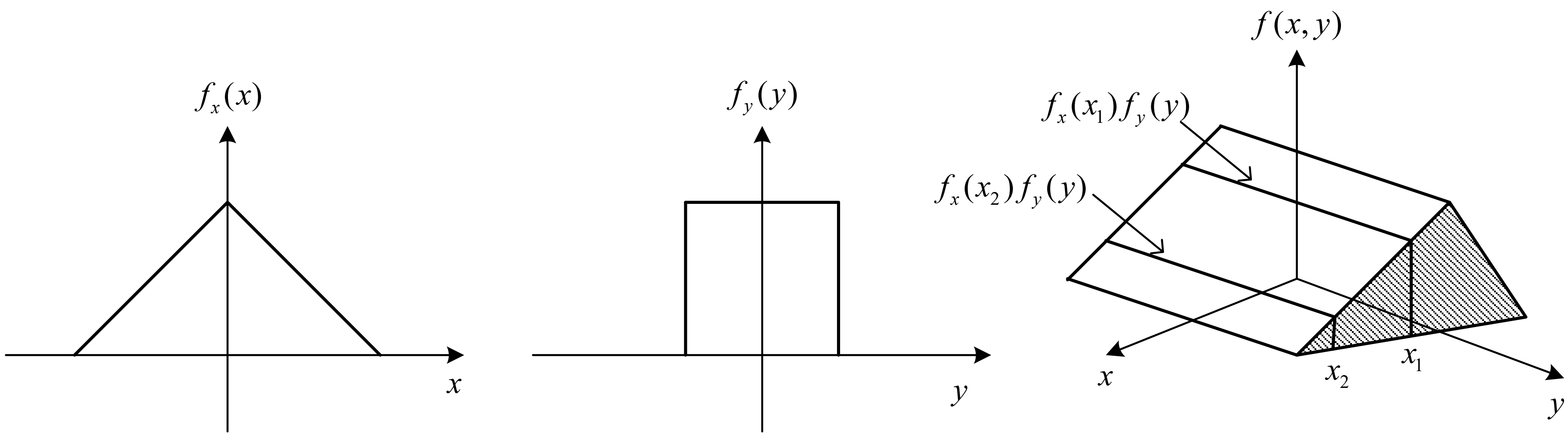
如果二维函数**f(x,y)**能够被分成两个一维函数的乘积，而每个函数只依赖于一个坐标，则称此二维函数在指定坐标下是可分离变量的，可表示为：

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$$

只是 ***x*** 的函数

只是 ***y*** 的函数

具有可分离性质的二维函数可使二维问题转化成一维问题来处理，从而使问题得到简化。我们知道，同一函数可以在不同的坐标系中来处理，坐标系的选择也是为了有利于问题的简化。如具有圆对称性质的量，在极坐标系中描述就更有利于运算的简化。二维函数的可分离变量性也是与坐标系的选择有关的。前面所定义的一些非初等函数如矩形函数、三角函数等在直角坐标系中是可分离变量的，但在极坐标系中就不具有可分离变量性了。有时，既使在同一坐标系中，坐标轴转动后，函数也成为不可分离变量。但二维的高斯函数无论在直角坐标系中，还是在极坐标系中都是可分离变量的，这是一个大多数函数所没有的性质。



二维函数的定积分可以看作求在积分限所定义的区域内位于相应曲面“下方”的体积。这个体积的值是可正可负的，是由函数的性态所决定。如果二维函数是可分离变量的，则体积为：

$$\int_a^b \int_c^d f(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \int_a^b f_\alpha(\alpha)\mathrm{d}\alpha \cdot \int_c^d f_\beta(\beta)\mathrm{d}\beta$$

可分离变量函数的体积就是变量分离后两个一维函数面积的乘积。

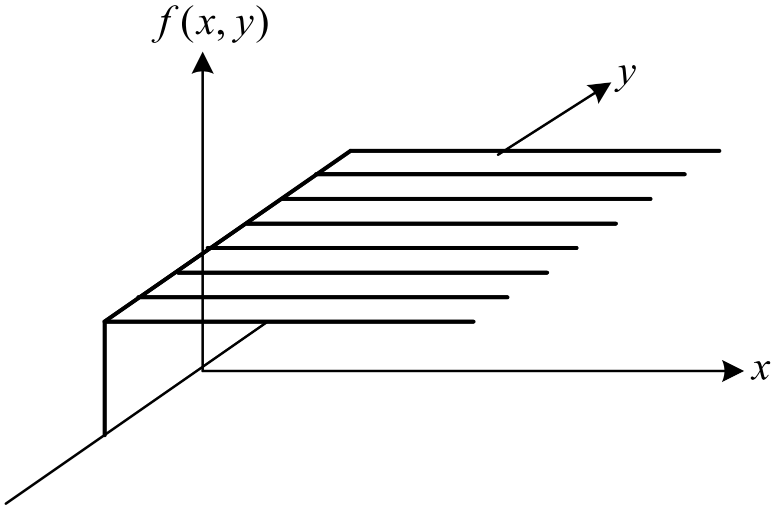
若固定某一个变量的值

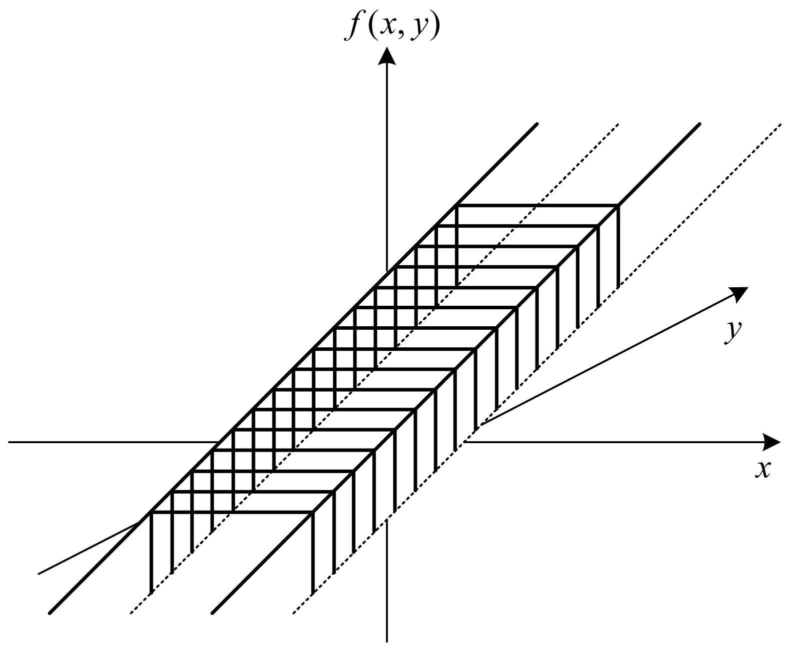
$$f(x,y) = f_x(x_1)f_y(y) = Cf_y(y)$$

如，由式**(1.1.7)**所定的二维阶跃函数，让其中的一维，如**y**方向为常数，即：

$$f(x,y) = \mathrm{step}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$$

其函数图形如下图所示。可用于描述光学最常用的狭缝。





光学中，在研究直边衍射和像质评价时，阶跃函数用来描述衍射屏和成像物体，二维阶跃函数可表示无穷大平面的振幅透射系数或刀口滤波器函数。即可用来描述光学直边(或刀口)的透过率。阶跃函数表示的光强分布，一边暗、一边亮，很像刀口检查仪的刀口，所以阶跃函数也称刀口函数。

1.3.3 几何变换

几何变换，也称为坐标变换。这与我们熟悉解析几何中的坐标变换概念是相同的。

在数学上，坐标变换的目的最初主要用来简化方程或积分等的数学运算形式。例如，在球坐标系中对一个球体进行积分比在直角坐标系中更容易。在物理上，则可用带相位全息片的光学系统来实现几何变换。在光信息处理中得到广泛的应用，如光学几何变换可用于照明光的重新分布、成像系统的像差矫正和畸变补偿、光束整形以及含不变量的模式识别等。

新旧坐标系的坐标变换关系为线性时，称为坐标线性变换。有位移变换、缩放变换和旋转变换。

1. 位移变换

位移变换是最简单的几何变换，对坐标轴进行平移运动，即坐标轴的方向不变，原点移动。

2. 缩放变换

3. 旋转变换

坐标轴的旋转，即原点不动，坐标轴旋转某一角度。

4. 一般形式的坐标线性变换

同一维函数一样，通过对二维函数的平移和比例缩放，可以形成一般形式的二维函数，其规则与一维函数情形基本相同。除此之外，在一特定坐标系中把一个二维函数旋转或倾斜或对二维函数同时施行旋转和倾斜，这些操作可以通过对二维函数进行自变量的坐标线性变换来实现，从而产生更为复杂的二维函数，这在光学变换中有着十分重要的应用。

实际上，“变换”这种操作是广义，除了上面讲到的变换外，如由笛卡尔坐标系变换到极坐标系可称为极坐标变换，第二章还会讲到傅里叶变换。一个系统，无论成像与否，都是以光速将大量信息从输入面变换到输出面。在光信息的处理、通信和存储中涉及到各种各样的变换。可以说，变换贯穿光信息处理的各个方面。

1.4 δ函数和梳状函数

1.4.1 广义函数的含义

1.4.2 δ 函数的含义

1.4.3 δ 函数的性质

1.4.4 δ 函数的导数

1.4.5 复合δ 函数

1.4.6 用δ 函数描述光学过程的一个例子

为了描述像质点、点电荷、点光源、非常窄的脉冲等在质量或能量上高度集中的一种极限状态，英国理论物理学家、量子力学的创始人之一狄拉克(Dirac，1902-1984)在1927年在量子力学中引入了δ函数，故δ函数也可称为狄拉克δ函数。而δ(x)这一记号则是由基尔霍夫(G. Kirchholff)首次使用的，当时还缺乏严格的证明。直到20多年以后，施瓦兹(Schwartz)才建立了δ函数的严格理论。 δ函数不是普通函数，而是广义函数。 δ函数之所以被称为“广义函数”或“奇异函数”，一方面是它没有普通意义下的函数值，而是一种极限状态，并且它的极限值也和普通函数不同，不是收敛到定值，而是收敛到无穷大，所以，它不能用通常意义下“函数值的对应关系”来定义；另一方面， δ函数也不能像普通函数那样进行四则运算和乘幂运算，它对别的函数的作用只能通过积分来确定，即其性质完全由它在积分中的作用表现出来。事实上， δ函数根本不是一个函数，而是一种更一般的实体，数学上称之为“泛函”或“广义泛函”。一个函数将一个数(函数的自变量)映射为一个数(函数的值)，一个泛函则将一个函数映射为一个数。之所以依然称之为“函数”，一方面是它已成为通常的用法，虽然严格说来并不正确；另一方面，还可以把δ函数与普通函数联系起来，用普通函数描述它的性质。由于δ函数的引入，使得许多数学、物理的问题的表述与证明变得简洁明了，并且把离散的和连续的数学问题联系了起来。 δ函数是物理学中一种非常用力的数学工具。在信息光学中， δ函数可以用来对任一个复杂函数进行“脉冲分割”，将其分解成点基元的线性组合。

1.4.1 广义函数的含义

在物理上，一些集中分布的量如质量、点电荷和点光源等，它们的密度分布函数；另外，一些常用函数如**1**，**x, cosx**和**sinx**等，它们的傅里叶变换，在经典函数的概念中都是不存在的；再者，经典函数的运算在处理有些问题时十分不灵活，受限制很大，如连续函数不一定能求导，有的即使一阶导数存在，但高阶导数却不一定存在。因此，有必要引入广义函数的概念。

广义函数与经典函数概念的主要区别在于：经典函数概念的要点是“点与点的对应”，；对于广义函数来说，在某一点的函数值是没有意义的，它是从总的结果来研究函数的性质。所以广义函数是“函数与点**(**数值**)**的对应”。借助于积分的形式可以表示广义函数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\psi(x)\mathrm{d}x = [g(x),\psi(x)]$$

用上式的积分 形式来定义广义函数，该积分式可能积得出来，也可能积不出来，但不管怎样，它都定义着一个广义函数。 而且广义函数运算的基本特点，就是一切运算都是通过积分进行的。

1.4.2 δ函数的定义

δ函数有定义有许多种形式，但常见的形式有三种。

1. 积分表达式

δ函数的积分表达式类似于普通函数形式。

一维δ函数

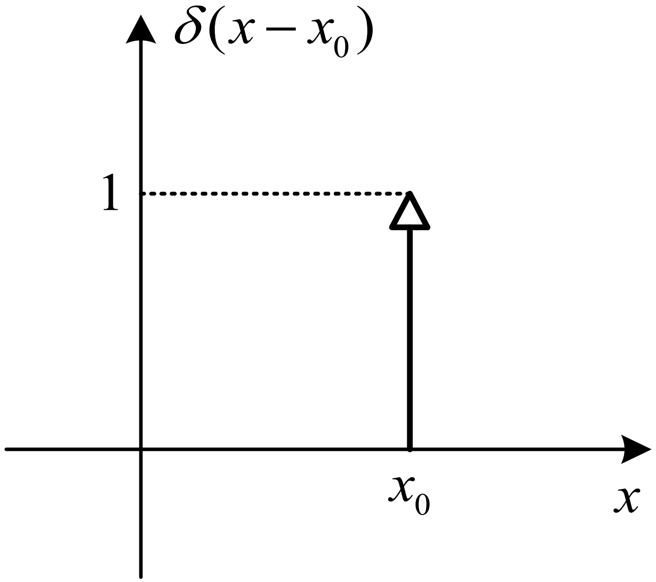
$$\begin{cases} \delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0 \\ 0 & x\neq x_0\end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1 \end{cases}$$

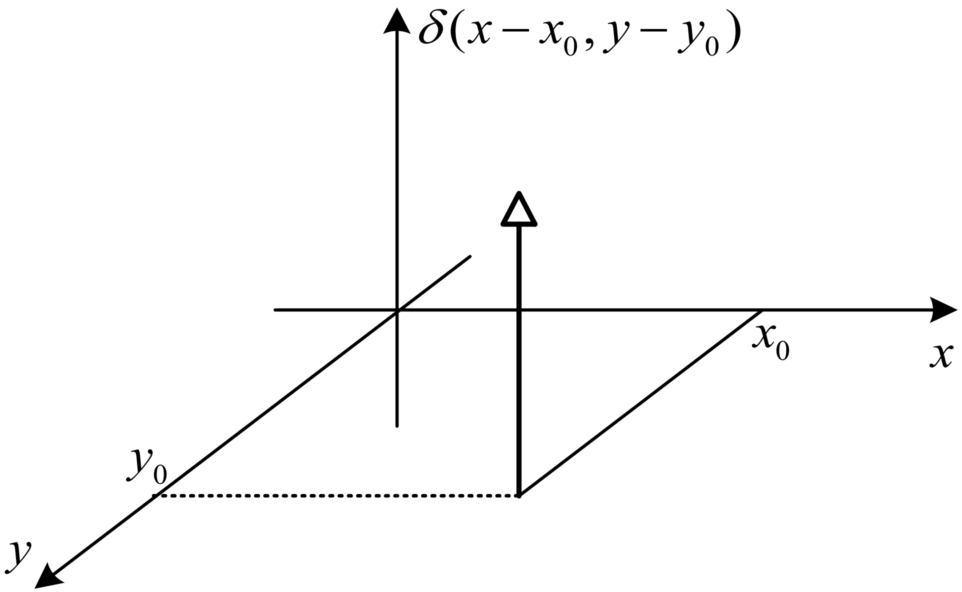
二维δ函数

$$\begin{cases} \delta(x-x_0,y-y_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0,y=y_0 \\ 0 & x\neq x_0,y\neq y_0\end{cases} \\ \iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \end{cases}$$

简写

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$





用积分表达式定义δ函数只是表明，在一个很小很小的范围内它不为零，而它在这个范围内的形状却没有规定，也就是说δ函数的形状如何是无关紧要的，因此允许它有各种形状，甚至可以有轻微的振荡。只要把δ函数不为零的那个关键点包括在某个积分区间内即可；由于δ函数是奇异函数，本身没有确定的值，但是它作为被积函数中的一个乘积因子，其积分结果却有明确的值。

2. 函数序列表达式

δ函数直观形象地定义为一个函数序列的极限：

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_m(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\psi(x)\mathrm{d}x = [g(x),\psi(x)]$$

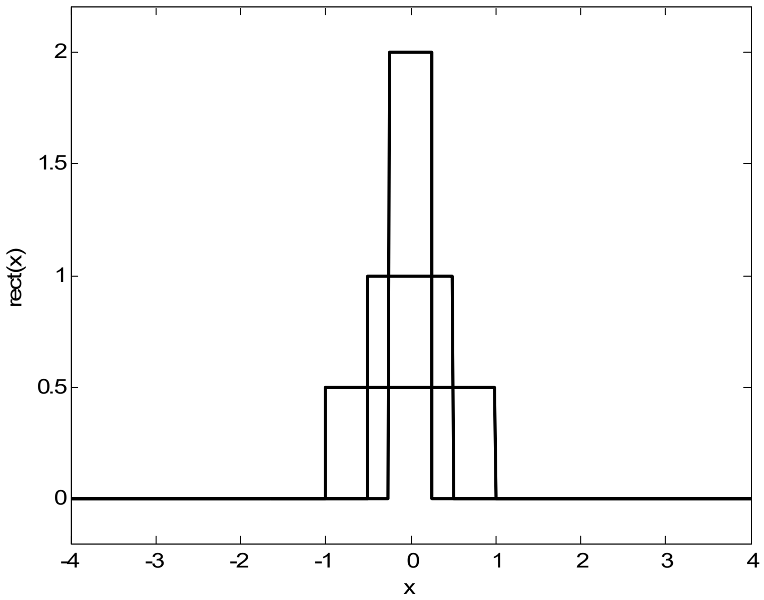
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_m(x)$$

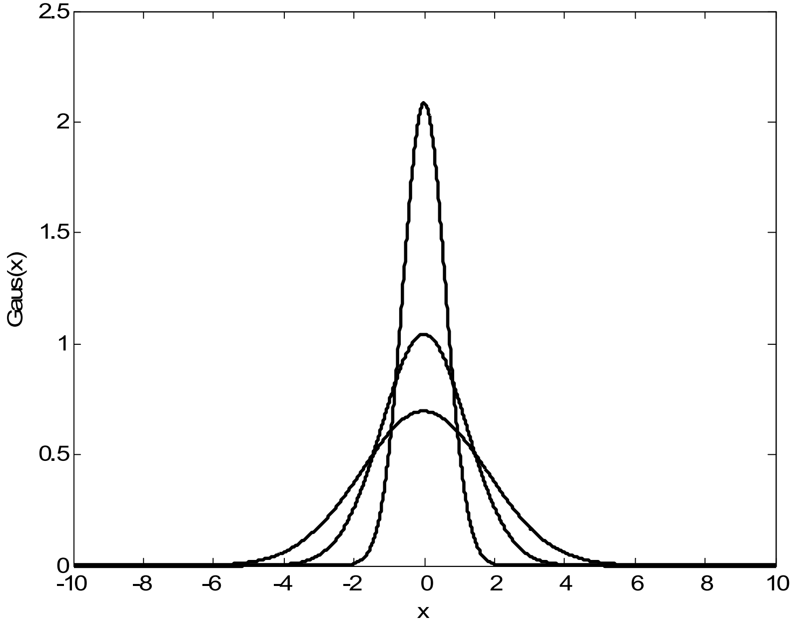
并不是任何一个函数序列的极限都是δ函数，要判断一个函数序列是否为式函数列，可用下面两个条件来判别：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{|x|>\varepsilon} \psi(x) g_m(x)\mathrm{d}x = \psi(0)$$

最常用函数序列是如下图所示的矩形脉冲函数和高斯脉冲函数序列画出的图形。





对于二维函数

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{m\to\infty} g_m(x,y) = \begin{cases} \infty & x=0, y=0 \\ 0 & x\neq 0, y\neq 0 \end{cases} \\
\lim\limits_{m\to\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} g_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1
\end{cases}
$$

$$
\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} g_n(x,y)
$$

一些一维δ函数常用的δ式函数列

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{rect}(nx)$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{a\to\infty}\frac{\sin ax}{x}$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos kx\mathrm{d}k$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-a^2x^2}$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\sqrt{\mathrm{i}\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2x^2}$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos ax}{ax^2}\right)=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin^2(ax/2)}{a(x/2)^2}\right]$$

$$\delta(x)=\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+x^2}\right)$$

一些二维δ函数常用的δ式函数列

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty} n^2\,\mathrm{rect}(nx)\,\mathrm{rect}(ny)$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty} n^2\,\mathrm{e}^{-n^2\pi(x^2+y^2)}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty} n^2\,\mathrm{sinc}(nx)\,\mathrm{sinc}(ny)$$

可分离变量

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\pi}\,\mathrm{circ}(n\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\delta(x,y)=\lim_{n\to\infty} n\frac{\mathrm{J}_1(2\pi n\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

圆对称

3. 广义函数表达式

δ函数就是一个广义函数，它赋予检验函数以一个数值

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \psi(0)$$

当坐标原点为$\mathbf{x_0}$时

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\psi(x)\mathrm{d}x = \psi(x_0)$$

二维函数

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \psi(0,0)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0,y-y_0)\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \psi(x_0,y_0)$$

4. 极坐中的δ函数

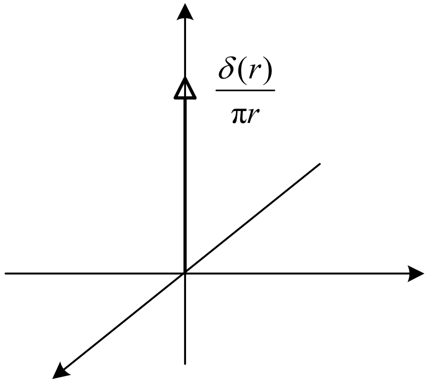
要将直角坐标系δ函数变换为极坐标系δ函数，不仅要保证二者脉冲位置相同，还要保证二者强度(即曲面下的“体积”)相同，这样的坐标变换才是等价。二维δ函数在极坐标系为：

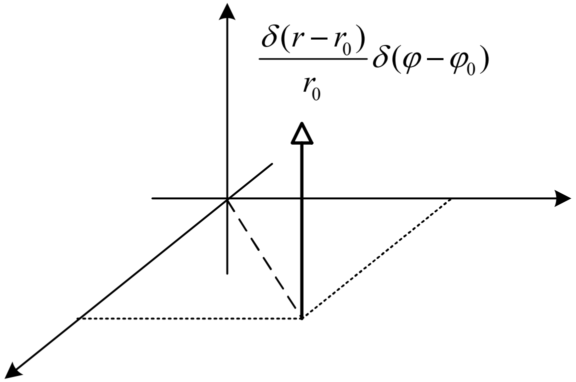
$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r_0}\delta(r-r_0,\varphi-\varphi_0)=\frac{\delta(r-r_0)}{r_0}\delta(\varphi-\varphi_0)$$

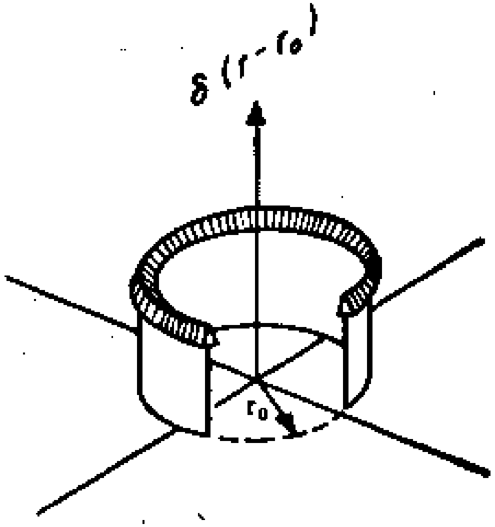
$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2} \qquad \varphi_0=\tan^{-1}\frac{y_0}{x_0}$$

δ函数位于坐标原点的时，则为：

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\pi r}\delta(r)$$







δ函数在直角坐标系和极坐标系中的位置关系

直角坐标系 $x-y$	极坐标系 $r-\varphi$	直角坐标系 $x-y$	极坐标系 $r-\varphi$
$\delta(x,y)$	$\delta(r)$	$\delta(x-x_0,y-y_0)$	$\delta\left(r-\sqrt{x_0^2+y_0^2},\varphi-\varphi_0\right)$
$\delta(x-x_0,y)$	$\delta(r-x_0,\varphi)$	$\delta(x+x_0,y)$	$\delta(r-x_0,\varphi-\pi)$
$\delta(x,y-y_0)$	$\delta\left(r-y_0,\varphi-\pi/2\right)$	$\delta(x,y+y_0)$	$\delta\left(r-y_0,\varphi-3\pi/2\right)$

1.4.3 δ函数的性质

1. 积分性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1 \qquad \iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x\pm x_0)\mathrm{d}x=1 \qquad \iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x\pm x_0,y\pm y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}a\delta(x\pm x_0)\mathrm{d}x=a \qquad \iint_{-\infty}^{\infty}a\delta(x\pm x_0,y\pm y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$$

2. 筛选性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0) \qquad \iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x_0,y_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x\pm x_0)\mathrm{d}x=f(\mp x_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}f(x_0) & a<x_0<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

3. 坐标缩放性质

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \qquad \delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y)$$

$$\delta(ax-x_0)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{x_0}{a}\right) \qquad \delta\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=|a|\,\delta(x-x_0)$$

$$\delta(-x)=\delta(x)$$ ← δ 函数是偶函数

4. 可分离变量性

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0)$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)}{r}\delta(\varphi-\varphi_0) \qquad \begin{cases}\int_0^{\infty}\delta(r-r_0)\mathrm{d}r=1 & r_0>0\\ \int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)\mathrm{d}r=1 & 0<\varphi_0<2\pi\end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{\delta(r)}{\pi r}$$

5. 乘积性质

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

$$f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0)$$

当 $x_0=0$ $\quad f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$

当 $x_0=0, y_0=0$ $\quad f(x,y)\delta(x,y)=f(0,0)\delta(x,y)$

当 $f(x)=x$ $\quad x\delta(x-x_0)=x_0\delta(x-x_0)$

$x\delta(x)=0 \quad x_0=0$ 时

$$\delta(x)\delta(x-x_0)=0 \qquad x_0\neq 0$$

$$\delta(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=0 \qquad x_0\neq 0, y_0\neq 0$$

$\delta(x,y)\delta(x,y)$ 无意义

6. 积分形式

δ函数可以由某些普通函数的积分式来表示，如：

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos kx\mathrm{d}k$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

δ函数可由等振幅的所有频率的正弦波(用余弦函数表示)来合成

7. δ函数是单位阶跃函数的一阶导数

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}t}$$

1.4.4 δ函数的导数

$$\delta^{(m)}(x)=\frac{\mathrm{d}^{(m)}\delta(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^m\delta(x)}{\mathrm{d}x^m}$$

$$\delta^{(m)}(x-x_0)=0$$

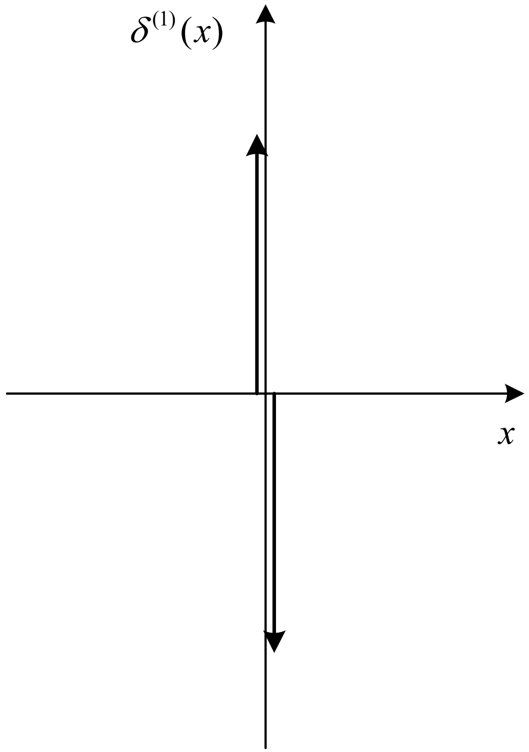
$$\int_{x_1}^{x_2} f(\alpha)\delta^{(m)}(\alpha-x_0)\mathrm{d}\alpha=(-1)^m f^{(m)}(x_0)$$

$$\delta^{(1)}(x)==\lim_{b\to 0}\frac{1}{b}\left[\delta\left(x+\frac{b}{2}\right)-\delta\left(x-\frac{b}{2}\right)\right]$$

$$\delta^{(1)}(x)=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(1)}(x)\mathrm{d}x=0$$

$$x\delta^{(1)}(x)=-\delta(x)$$

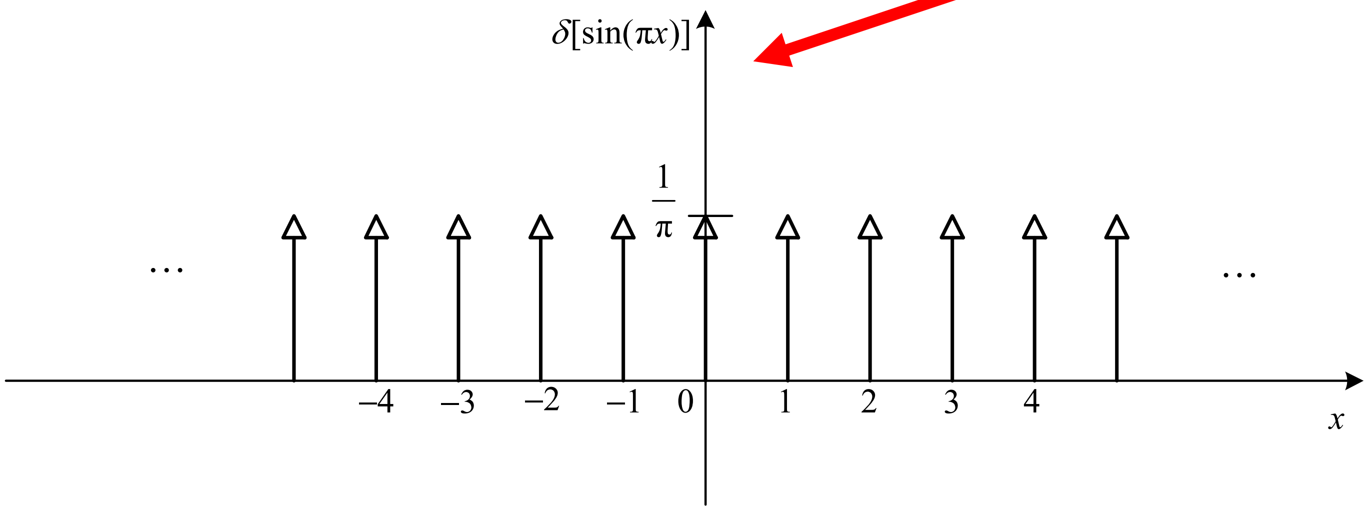


1.4.5 复合δ函数

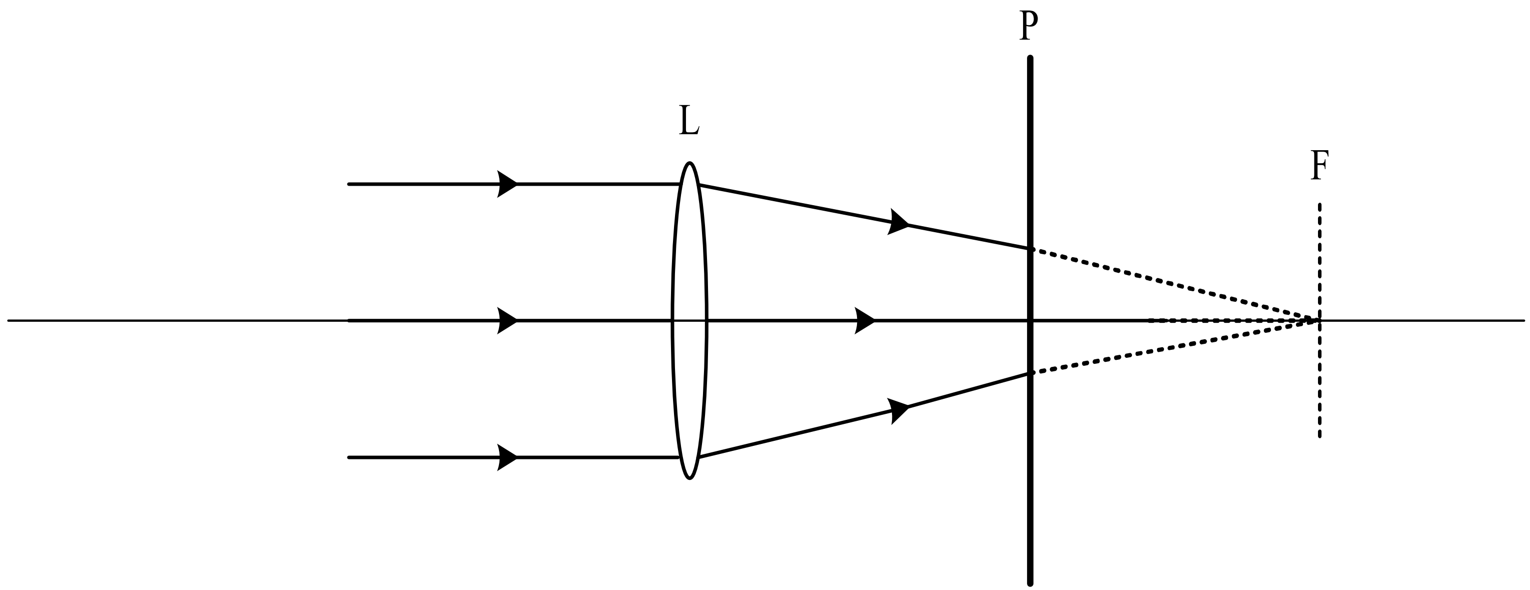
形如δ **[*f*(*x*)]**和$\delta^{(m)}$**[*f*(*x*)]**的广义函数称为复合δ函数。

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \qquad f'(x) \neq 0$$

$$\delta[\sin(\pi x)] = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$



1.4.6 用δ函数描述光学过程的一个例子



$$\begin{cases} A(x,y)=\begin{cases}\infty, & x=0, y=0 \\ 0, & x\neq 0, y\neq 0\end{cases} \\ \int\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \end{cases}$$

1.5 周期函数

1.5.1 周期函数的含义

1.5.2 余弦函数和正弦函数

1.5.3 梳状函数

1.5.4 周期性函数MATLAB实现

1.5.1 周期函数的含义

信息通常是一个序列，周期函数是这种序列表达的有效方式。

1. 周期函数

$$f(x) = f(x + nL)$$

$$f(t) = f(t + nT)$$

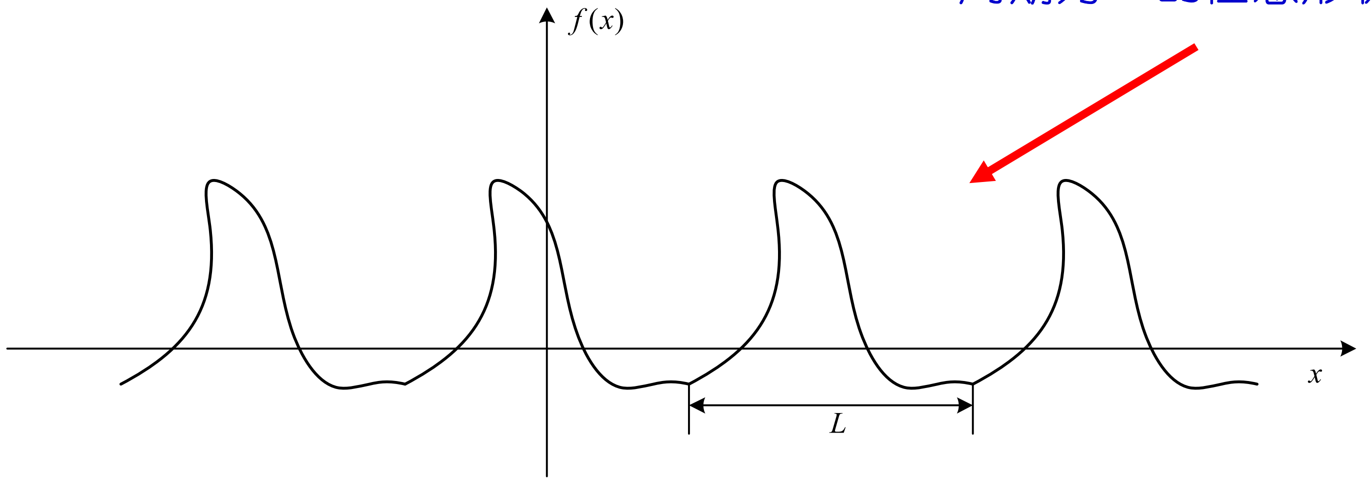
时间频率，圆频率

空间频率，空间圆频率

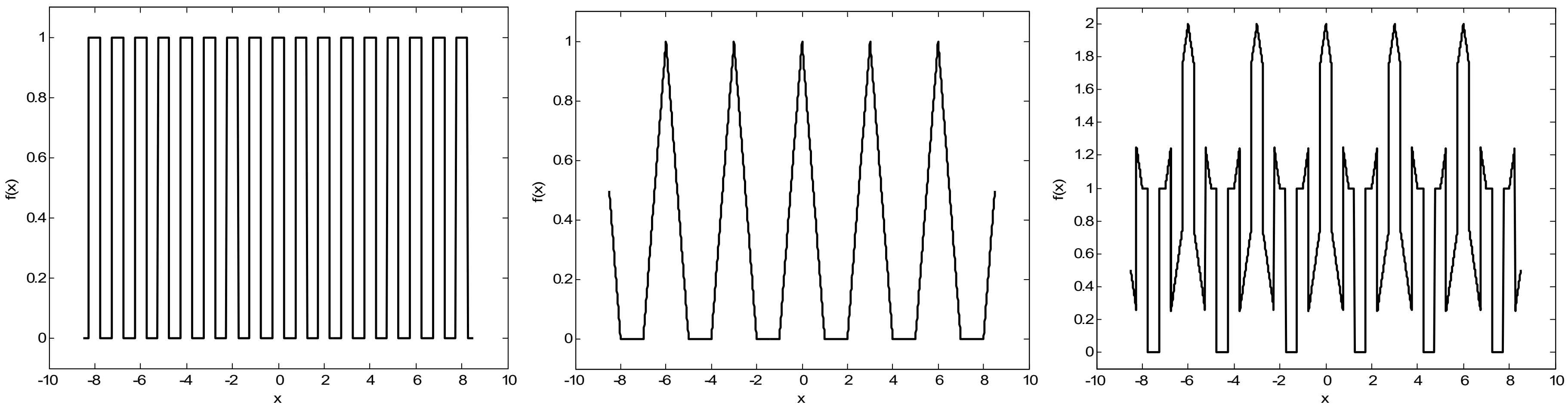
由于在信息光学中主要涉及是空间频率，所以，后面我们描述也主要以空间坐标和空间频率为主。

不满足上式的函数称为非周期函数或无周期函数。但许多非周期函数可以看成周期函数的线性组合。

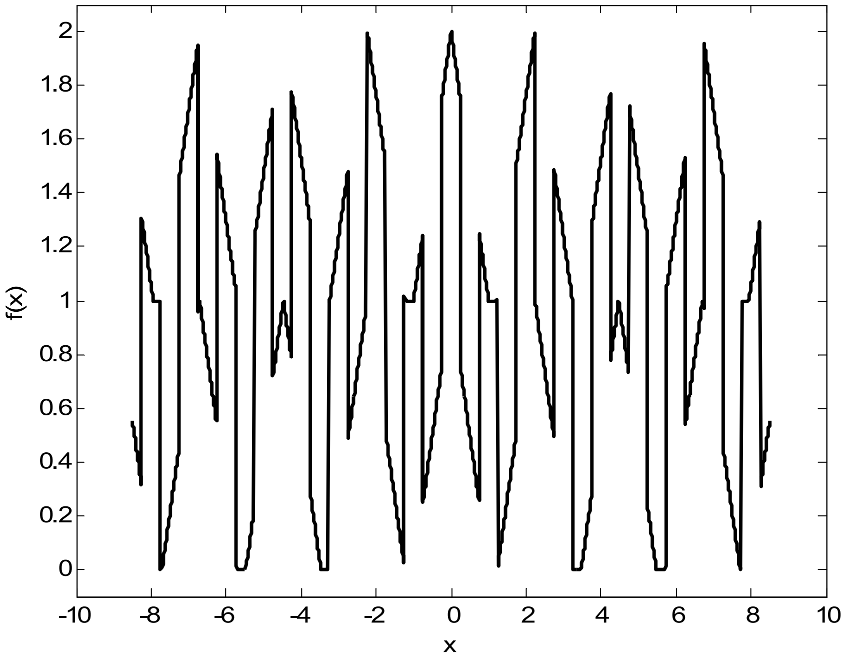
周期为 L 的任意形状的周期函数



由两个或两个以上不可公约的周期函数之和构成的函数称为殆周期性函数。



如果两个周期函数的周期之比 L 不是一个有理数，则它们就不再是周期函数。这时，称之为殆周期函数。当 x 增大时，这个函数将非常接近于重复其自身，但它永远也不会完全重复它自身。



殆周期函数

1.5.2 余弦函数和正弦函数

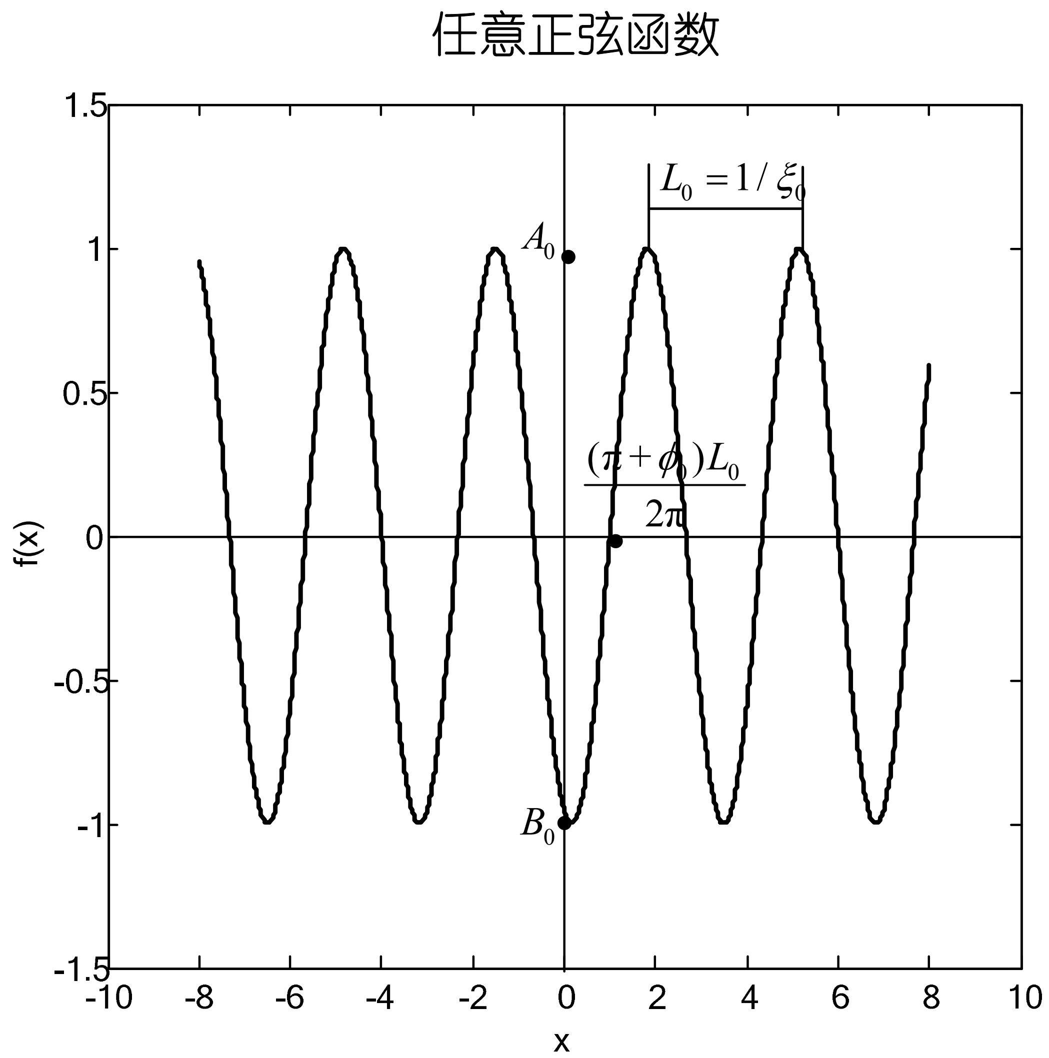
正弦函数**sin( )**和和余弦函数**cos( )**是典型的连续型周期函数，在光学中被广泛应用。

单位正弦函数和余弦函数的表达式为

$$\cos(2\pi x) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{2}) \qquad \sin(2\pi x) = \cos(2\pi x - \frac{\pi}{2})$$

一般形式的正弦函数的表达式为：

$$A_0 \cos(2\pi m \xi_0 x - \phi_0) = A_0 \cos(m k_0 x - \phi_0) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



在光学中，余弦函数或正弦函数可用来描述光场、余弦光栅等

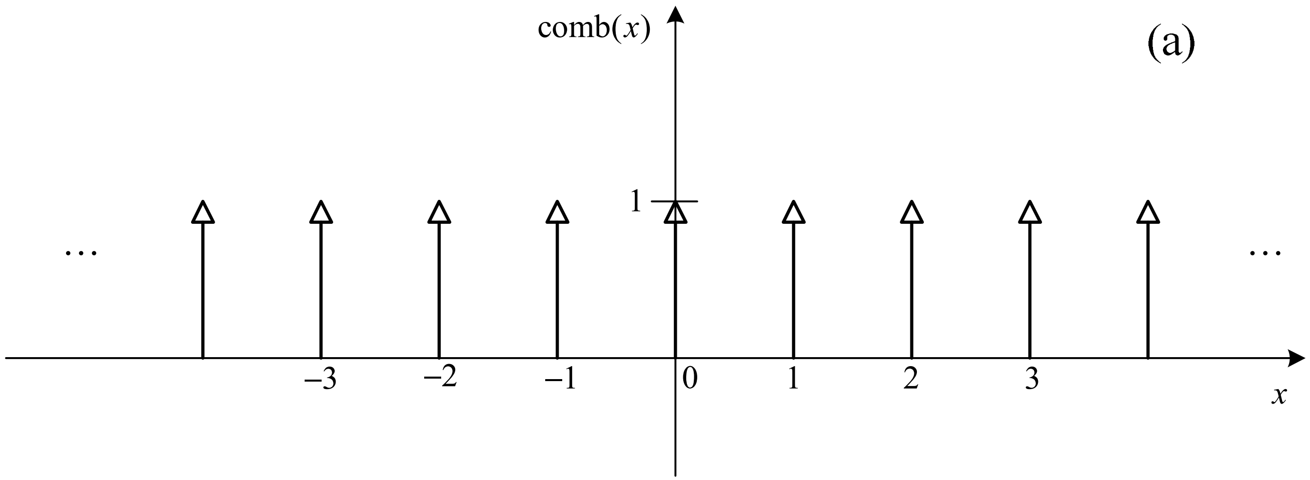
1.5.3 梳状 函数

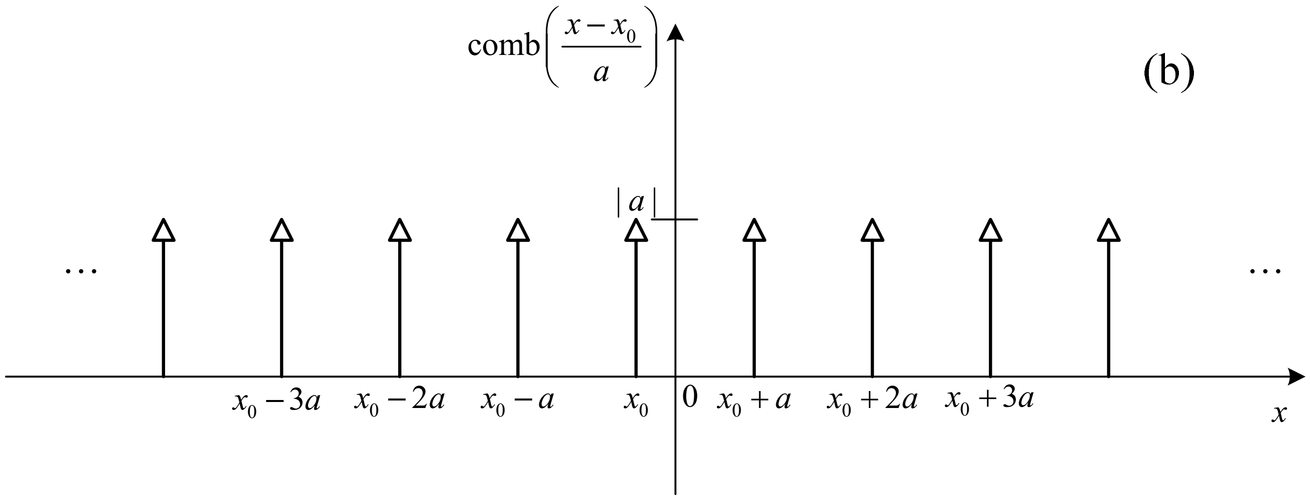
δ函数可用来描述点光源或线光源。如果在同一条直线上排列无穷多个等距离的点光源，便可用无穷多个等间距的一维δ函数之和来表示。为了方便描述这种情况，引入梳状函数，梳状函数用符号**comb**或**III**来表示。一维梳状函数定义为：

$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$$

称为单位脉冲序列或单位脉冲梳。经过平移和扩缩后，可以得一般的形式如下：

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x-x_0}{a}-n\right)=|a|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-x_0-na\right)$$





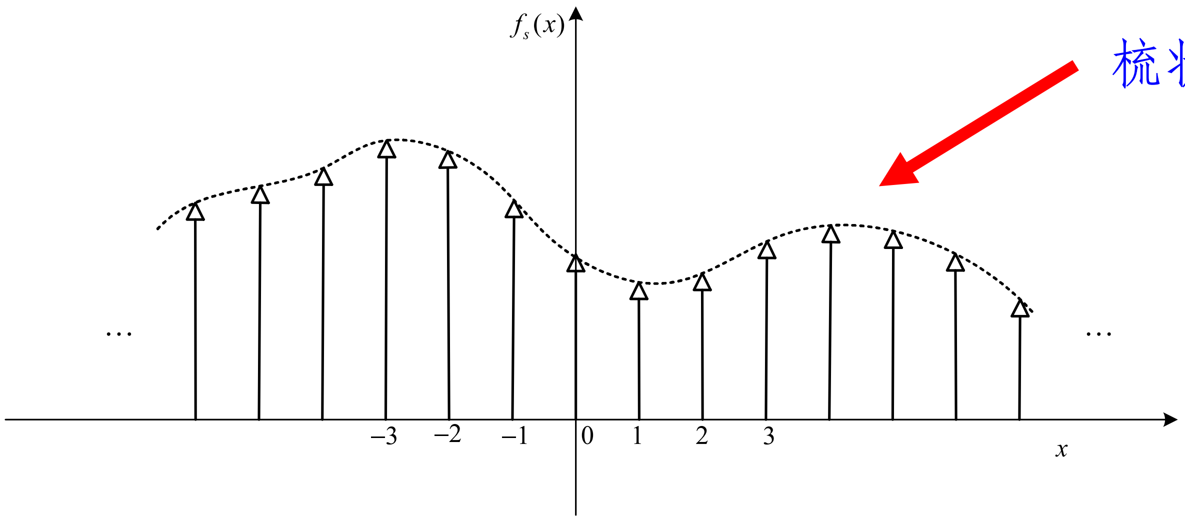
梳状函数也是广义函数，其性质可由δ函数的性质推出。一维梳状函数可用于描述一维细缝光栅的振幅透射系数。

筛选性质：$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{comb}(x) f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$

缩放性质：$\mathrm{comb}(ax) = \frac{1}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{n}{a}\right)$

平移性质：$\mathrm{comb}(ax - x_0) = \frac{1}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{n}{a} - \frac{x_0}{a}\right)$

乘法性质：$f(x)\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(x-n) = f_s(x)$

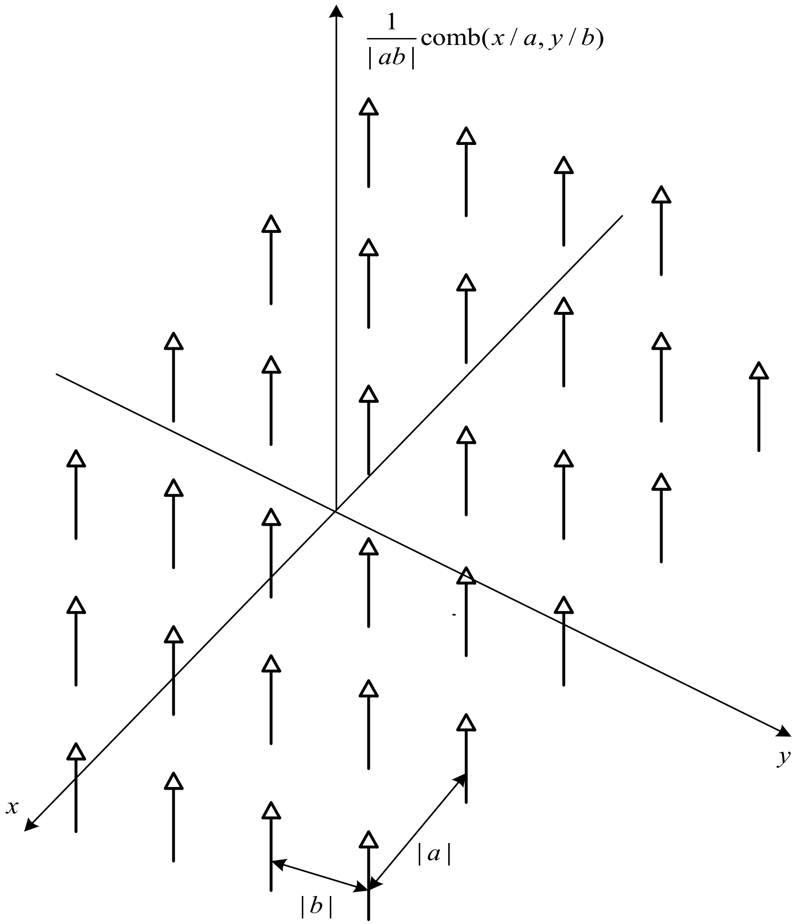


梳状函数的抽样性质

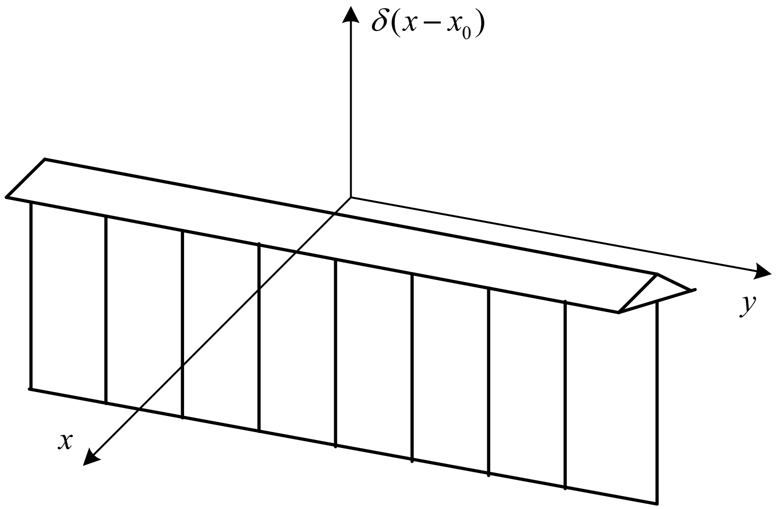
二维梳状函数的定义为

$$\frac{1}{|ab|}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{|a|}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{|b|}\mathrm{comb}\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$=\sum_{n,m}\delta(x-ma,y-nb)$$



二维δ线函数



二维梳状函数作用与普通二维函数一样，也同样实现对普通函数等间距抽样，即

$$f(x,y)\,\text{comb}(x/a, y/b) = ab\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f(ma,nb)\delta(x-ma, y-nb)$$

1.5.3 周期脉冲序列

1.1中讲述的非初等函数也可以构造出其周期函数，其中有一些是光信息处理中常见的，如周期性矩形函数、周期性三角形函数、周期性高斯脉冲等。单个这些的组合，尤其按一定周期排列的组合，就形成了周期性的脉冲序列。

下面介绍**MATLAB**所提供的用于生成内部函数，用于生成常用的周期性脉冲序列。

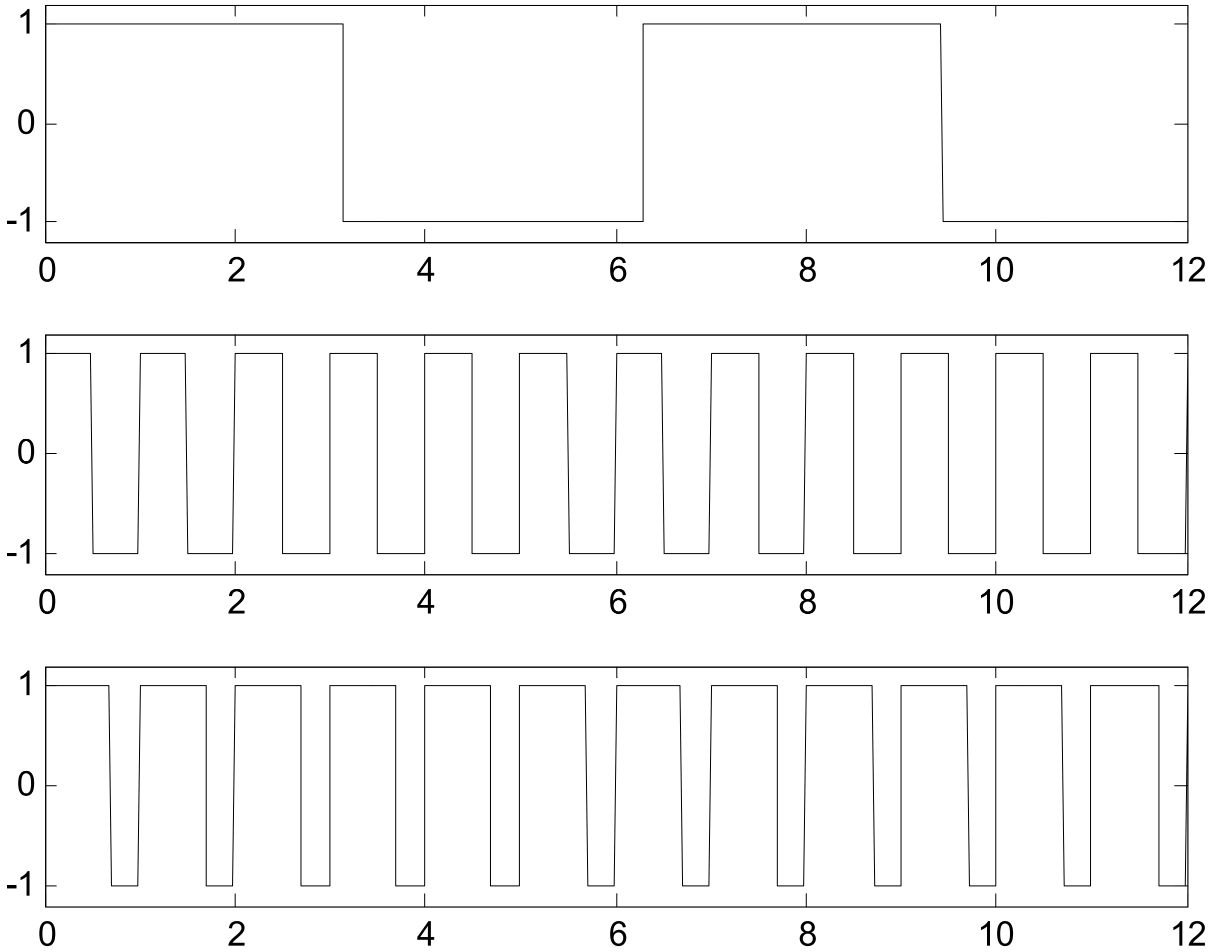
1. 周期性矩形脉冲序列

在**MATLAB**中，用函数**square**来产生周期性脉冲信号。

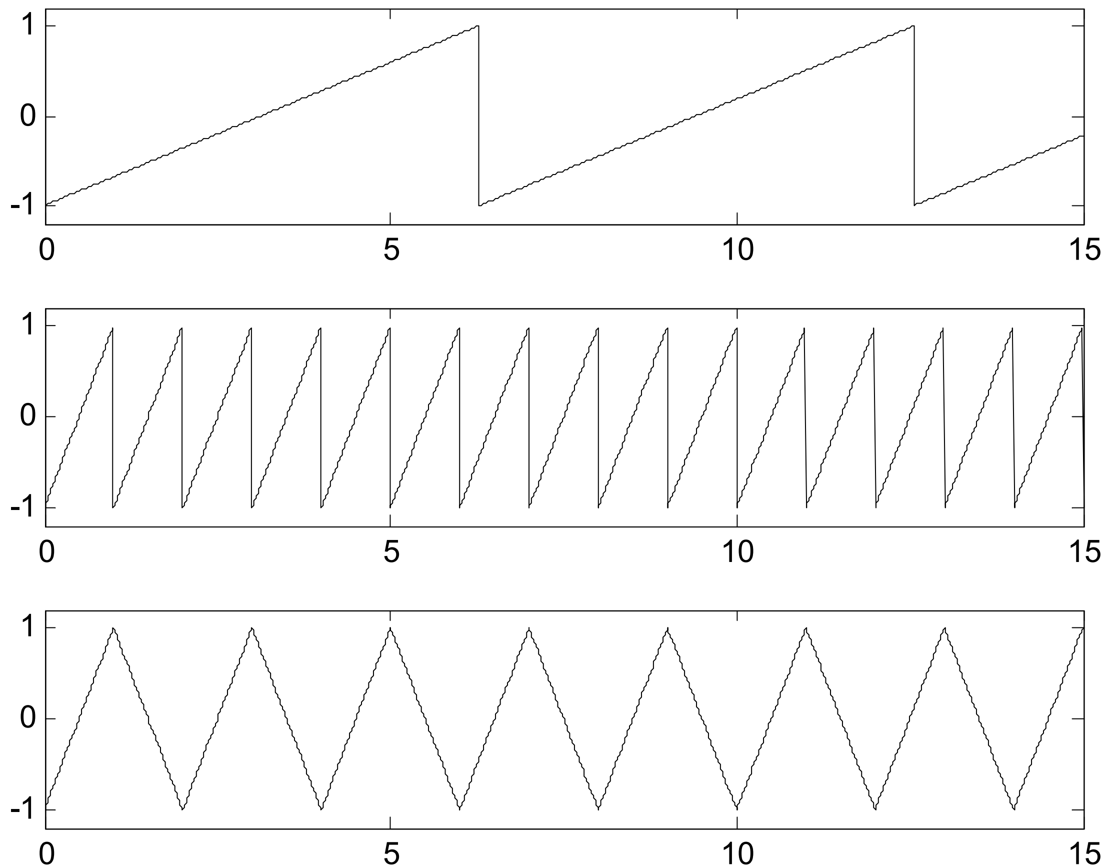
周期性矩形脉冲序列可用来表示矩形光栅、周期性的光脉冲序列等。

2. 周期性三角形脉冲序列

在**MATLAB**中，用函数**sawtooh**来产生周期性锯齿或三角形脉冲信号。

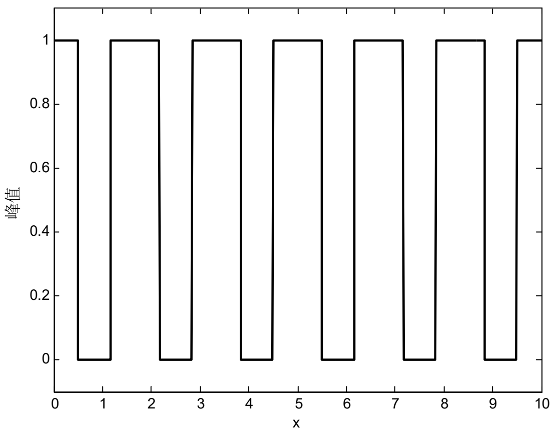


1
0
-1
0
2
4
6
8
10
12
1
0
-1
0
2
4
6
8
10
12
1
0
-1
0
2
4
6
8
10
12

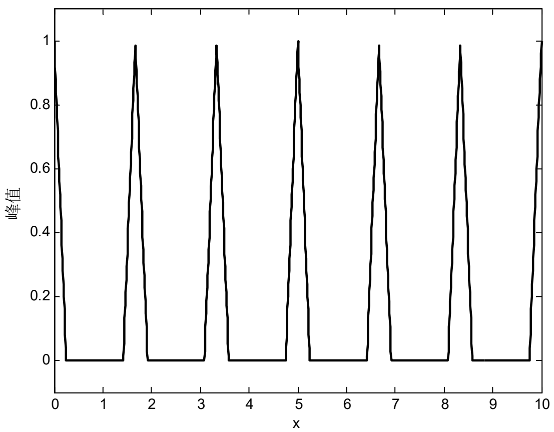

1
0
-1
0
5
10
15
1
0
-1
0
5
10
15
1
0
-1
0
5
10
15

3. 脉冲序列产生函数

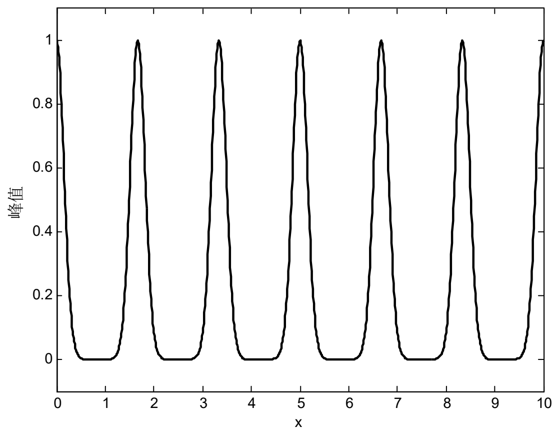
在MATLAB中，可用函数pulstrancf对连续函数或脉冲原型进行采样而得到脉冲序列。



矩阵脉冲序列



三角形脉冲序列



高斯脉冲序列

1.6 复数和复值函数

1.6.1 复数

1.6.2 复值函数

1.6.3 几个常用的关系式和恒等式

复数和复值函数的概念及其一些性质，在光学和信息处理中经常被应用。很好地理解这些方法和概念是十分重要的，在本书的也被广泛地使用。

1.6.1 复数

一对有序常实数***u*, *v***定义为复数***w***时，通常可表示为：

$$w = u + \mathrm{i}v \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

实部　　　　虚部

$$u = \mathrm{Re}\{w\} \qquad v = \mathrm{Im}\{w\}$$

复数是没有大小的，因此，复数的比较大时只能用模来比较。

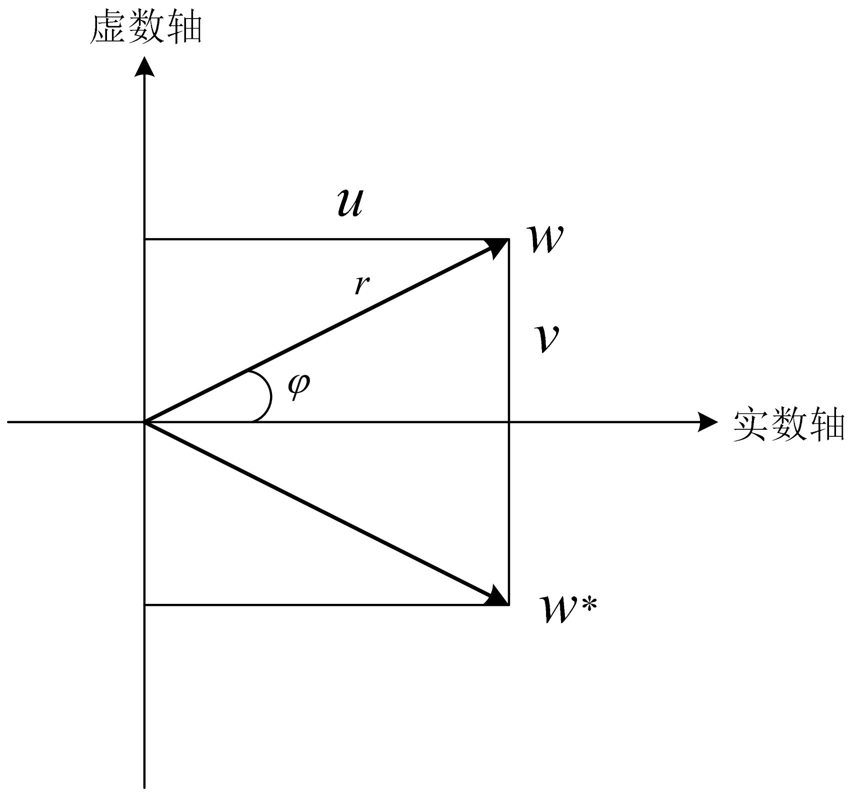
复共轭：　$w^* = u - \mathrm{i}v$

极坐标：

$$w = u + \mathrm{i}v = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$r = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\varphi = \arg(w) = \arctan\frac{v}{u}$$



1.6.2 复值函数

如果复数的实部与虚部都是变量，则

$$w(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$$

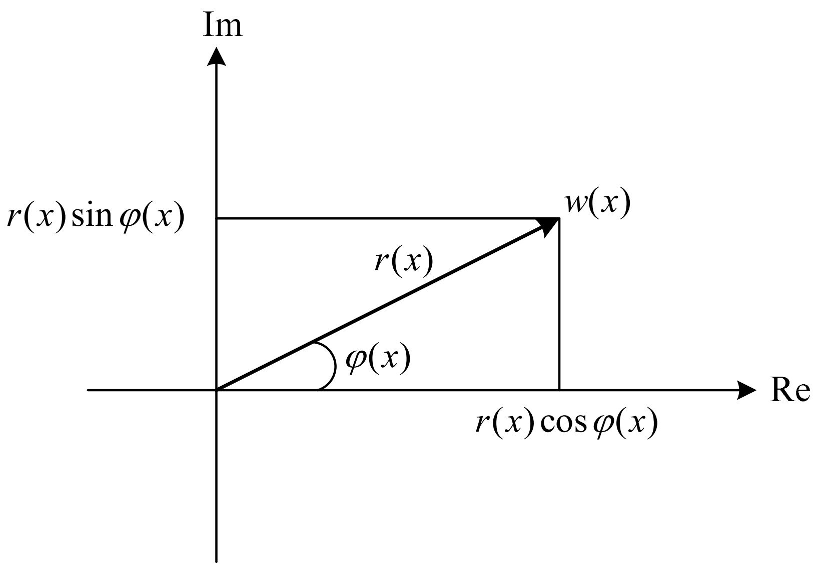
$$w(x) = r(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x)} = r(x)[\cos\varphi(x) + \mathrm{i}\sin\varphi(x)]$$

$$r(x) = |w(x)| = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$$

$$\varphi(x) = \arg w(x) = \arctan\frac{v(x)}{u(x)}$$

$$\mathrm{Re}\{w(x)\} = u(x) = r(x)\cos\varphi(x)$$

$$\mathrm{Im}\{w(x)\} = v(x) = r(x)\sin\varphi(x)$$



复指数函数是光学中最常用的复值函数，其一般形式为：

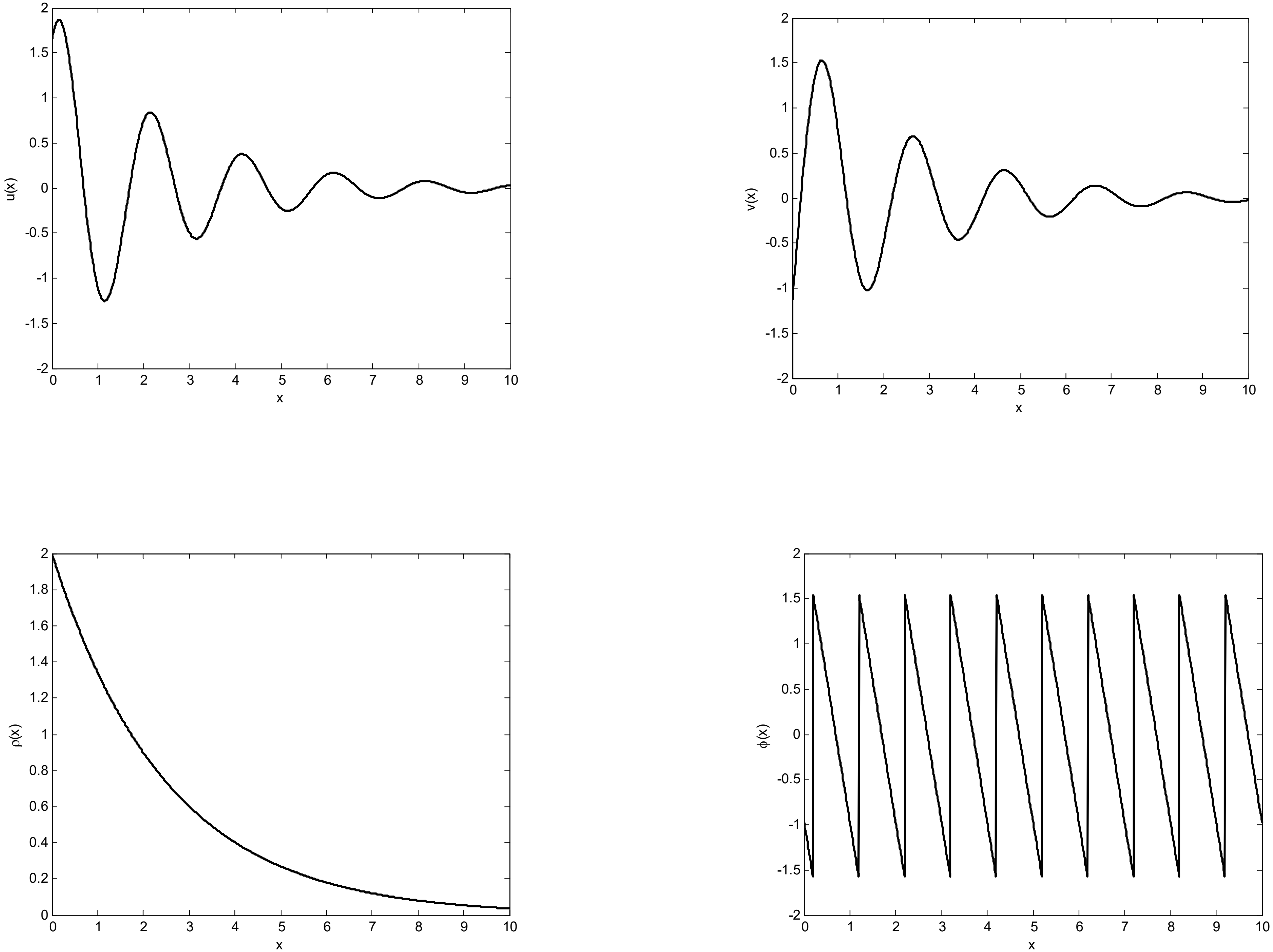
$$w(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x + \mathrm{i}(2\pi\xi_0 x - \varphi_0)}$$

$$w(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(2\pi\xi_0 x - \varphi_0) + \mathrm{i}A\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(2\pi\xi_0 x - \varphi_0)$$

显然其模和相位分别为：

$$r(x) = |w(x)| = A\mathrm{e}^{\alpha x}$$

$$\arg(w) = \varphi(x) = 2\pi\xi_0 x - \varphi_0$$


u(x)
x
v(x)
x
ρ(x)
x
ϕ(x)
x

当实指数系数和初始相角为0时，则有：

$$w(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}$$

这纯虚指数函数。其三角函数形式为：

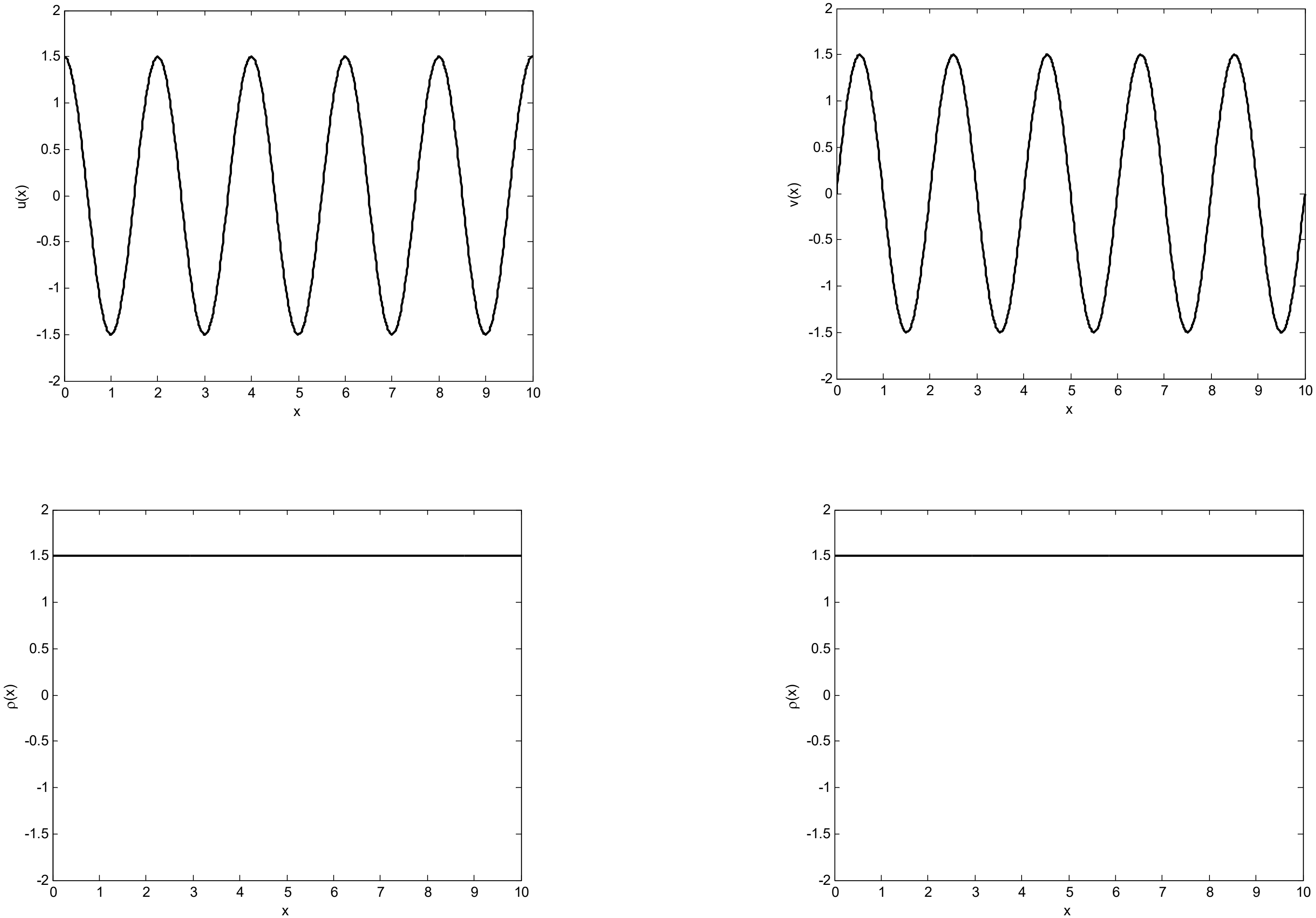
$$w(x) = A\cos(2\pi\xi_0 x) + \mathrm{i}\sin(2\pi\xi_0 x)$$

实部、虚部、模和相角分别为：

$$\mathrm{Re}\{w(x)\} = u(x) = A\cos(2\pi\xi_0 x)$$

$$\mathrm{Im}\{w(x)\} = v(x) = A\sin(2\pi\xi_0 x)$$

$$r(x) = |w(x)| = A$$


u(x)
v(x)
ρ(x)
ρ(x)
x
x
x
x

如果复值函数的实分量和虚分量或者模和相位为二个变量，这时是二维复值函数可表示为：

$$w(x,y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

$$w(x,y)=r(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}$$

$$w(x,y)=r(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}$$

一维复值函数所建立的概念对二维复值函数也是有效的。但其图形则变的复杂，需要三维图形才能表达。

1.6.3 几个常用的关系式和恒等式

复变量值的指数函数与三角函数相关联，即称为欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

由马克劳林(**Maclaurin**)级数

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

由欧拉公式，很容易得到如下一些很有用的恒等式。

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi n} = -1 \qquad \boldsymbol{n}\text{为奇整数}$$

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi n} = 1 \qquad \boldsymbol{n}\text{为整数}$$

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi n/2} = \begin{cases} \pm\mathrm{i} & n = 1,5,9,13,\cdots \\ \mp\mathrm{i} & n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$

当 $\boldsymbol{n}$ **= 1** 时，有：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi} = -1$$

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi} = 1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \pm\mathrm{i}$$