序

本书吸取了目前市面上绝大部分优秀考研数学辅导资料的精华，近年来，得到了全国广大学子的高度认可，其使用效果受到 2009 考生的推崇。这是一本含金量较高、适应国家命题数学 1、3 类的考研全面基础延展与综合强化提高的概率论与数理统计复习全书。

考研数学体系的关系分为三类：确定关系（函数）、逻辑关系（文氏）和不确定关系（概率）。由于读者以前学到的数学体系大多都是具有确定关系的函数研究，所以对概率论的备考方法上存在许多迷茫，本书的构架正是为解决这一困难而设计。对抽象概念使用了生活化实例辅佐理解和掌握；对考纲的全部知识点阐述了系统的理论及其交叉融合；开辟了原创性技巧，列举了先进的系统题型，提供了独家解法秘诀。

作者系统地总结了原创性秘技，采用了形象记忆法等先进教育心理学理念，有意识训练读者的数学思维惯性和条件反射；对三基的延拓系统完整；同时，奉献了读者渴望的评注，蛰伏 6 年成书；2010 版在 2009 版基础上，根据全国广大读者的建议和教育部新的趋向，对相关内容作了大篇幅修改和完善。主要包含下列方面：

1. 根据使用 2009 版考生的建议和提出的不足，精心审阅笔误和校对各知识点的叙述方式。
2. 把原有的例题，按照题型全部重新整编分类，并总结系统的解答方法。
3. 删除原有的难度较大、而考研命题相关性不紧密的例题，增加 2010 的新的变式和预测题型。
4. 进一步吸收了我国新出台的优秀辅导资料的精髓，增加了新的技巧和方法。
5. 增删了章节后的模拟精化练习题，并给出了完全解析。
6. 对部分题例的解析更为详细，知识理论叙述通俗易懂，使读者轻松备考。
7. 特别撰写了其他辅导书忽视的或不够详细的焦点概念及其例题解析。

《智轩考研数学红宝书 2010》严格按照教育部硕士研究生入学考试大纲 2009 和历年真题及其数十名著名考研辅导专家的资料以及多年来的考生经验，经过深入细致反复研究和提炼，精心打造、别出心裁编纂而成，旨在帮助莘莘考研学子冲刺数学高分。

全书分三分册，第一分册为高等数学（共八大知识点），以同济六版为起点，并添加了差分方程和边际与弹性函数在经济学中的应用（针对数学 3）。第二分册为线性代数（共六大知识点），以居余马主编的二版为起点。第三分册为概率论与数理统计（共八大知识点），以浙江大学盛骤主编的第四版主编的《概率论与数理统计》为起点。所以，建议读者必须在认真复习完上述 3 套教材后，方可研读红宝书。

使用本书的方法：由于本书含有数学一的全部内容，所以，你必须首先根据你所考的数学类型按照 2009 年大纲在目录中圈定你需要的内容，其余的内容不要管它。

本书难免存在错误和不足之处，敬请读者和同行批评，作者将不遗余力继续更正完善。

智 轩

2009 年 5 月于湘江杨柳邦

第一篇　概率论

第一章　随机事件和概率

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1. 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算。
2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯（Bayes）公式。

理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

智轩第 1 技　　3 等 3 公 1 划分；8 类事件 8 结论。4 定概率 5 类型；独立互斥文氏图

【秘技解读本章考点】3 个等可能概型（离散有限等可能古典概型，连续无限等可能几何概型，有限重复等可能伯努利概型。**3 大公式**（乘法公式，全概率，贝叶斯）。其中，离散古典概型的计算是**使用排列与组合**列出事件样本数与空间样本总数的比率关系（要求简单试验模型）；连续几何概型的计算是**使用定积分**列出样本事件数与空间样本总数的度量比值关系；伯努利概型的特征是**“独重回对等”（事件相互独立，重复试验，放回抽样，事件发生的结果是对立的，且为等可能）**；条件概率的计算是使用**乘法公式和事件之间的关系运算**；全概率，贝叶斯使用的本质是**一个划分（又称一个完备事件组）**，全概率是知道全部原因求最后结果，而贝叶斯是知道总的结果求其中部分原因，是历年必考知识点。**事件**之间的关系及其运算各有 8 种情形；概率的定义有 4 种，**概率关系的运算关系有** 5 类；事件发生之间的**独立与互斥是相互否定的关系**，它们都需要借助文氏图（分为集合文氏图和概率文氏图，其中集合文氏图可以推出事件或概率关系，而概率文氏图只能推出概率关系，不能推出事件的任何集合关系）来理解。

一、随机现象与试验

在数学领域中，有三类性质的量关系，一是确定性关系，采用函数关系描述；二是逻辑关系，采用布尔代数或文氏图描述；三是不确定关系，采用概率与统计描述。概率统计的任务就是后二者。

在个别试验中其结果没有规律性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象称为**随机现象**。比如：每个人的着装爱好，当你只看到他或她穿 1-2 次衣服，不能找到其着装特点，但如果你多次观察，比如 45 次以上，就可以判断其喜欢穿何种颜色和款式的服装了。对随机现象加以研究所进行的观察或试验，称为**随机试验**，它具三个特点：（1）可以在相同条件下地重复地进行；（2）事先可以知道试验所有可能出现的结果；（3）不可预测每次试验出现的是哪一个具体结果。比如，掷一颗骰子，它可能出现的所有可能的全部点数为 1，2，3，4，5，6，我们只知道必有一个数字出现，但不能预测每次一定出现哪个数字。

二、事 件（即随机事件）

2.1 事件的界定

随机试验E的所有可能的结果组成的**集合**称为E的**样本空间**，记为S。 E中的每一结果，称为集合中的一个元素，也称为一个**样本点**。样本空间S的任意**子集**称为E的**随机事件**，简称**事件**。每一样本点称为**基本事件**。如掷一颗骰子，样本空间$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$；1，2，3，4，5，6 都是样本点；$S=\{1,\ 2,\ 3\}$是事件，$A=\{3\}$等为基本事件，所有可能的事件为$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=63$种，称为$E$中所有可能的随机事件定义域$F$。在每次试验中，当且仅当某一子集中的一个样本点出现，称对应该子集的**事件发生**；S是自身的子集，称为**必然事件**；$\Phi=\{\ \}$不包含任何样本点，称为**空集**，又称为 **0 概率事件或不可能事件**。$B=\{7\}$也是**不可能事件**。

2.2 事件的 8 个基本运算关系

事件既然是集合，因此，完全遵循集合的逻辑运算法则。

①**包含**：$A\subset B$，即A事件发生必导致B事件发生。

②**相等**：$A=B$，即$A\subset B$且$B\subset A$。

③**和（并）**：$A\cup B$或$A+B$（注意此处的$+$号只是$\cup$的简化表示，不一定满足数字运算的$+$号的功能），即A和B至少有一事件发生。

④**互补**：$A\cup B=\Omega,\ A\cap B=\Phi\Leftrightarrow\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega,\ \overline{A}\cap\overline{B}=\Phi\Leftrightarrow AB=\overline{A}\,\overline{B}$，称$A,\ B\left(或\ \overline{A},\ \overline{B}\right)$为互逆或对立事件。

⑤**互斥**：$A\cap B=\Phi\Leftrightarrow A\overline{B}=A$，称为互斥或不相容事件，注意与对立事件的区别和联系。

⑥**积（交）**： $A\cap B=AB$，即A和B同时发生。

⑦**差**：$A-B=A\overline{B}$，称为差事件，即A发生时，B不发生。注意集合B可能比A大，只减去B与A相同的子集元素。

⑧**独立**：$P(AB)=P(A)P(B)$，称为事件$A,\ B$独立，**特别注意它是用概率来定义的。**

2.3 历年真题中事件的 8 大运算结论(画文氏图理解)

① $\boxed{A=A\Omega=A\cap\Omega=A\left(B\cup\overline{B}\right)=AB+A\overline{B};\ AB与A\overline{B}互不相容。}$

② $\boxed{A\cup B=A\cup(B-A)}$

③ $\boxed{A-B=A-AB=A(\Omega-B)=A\overline{B}}$ 称为差积转换公式，如$A与B互不相容\xrightarrow{AB=\Phi}A-B=A$。

④ $\boxed{A+B=AB+A\overline{B}+\overline{A}B}$

⑤ $\boxed{A\cap(B-A)=\Phi}$

⑥ $\boxed{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C}$

⑦ $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

⑧ $\boxed{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$

对于第 8 个公式，我们先在一个长方形内画出两个相交圆，分别标注 1，2，3 部分，再验证即可。

评 注 注意符号$\cup\neq$数字$+$，例如：$A\cup B=A\cup(B-A)\neq A+(B-A)=B$；

符号$\cap\neq$数字$\times$，例如：$A\cap(B-A)=\Phi\neq A\times(B-A)=AB-A$。

■事件关系运算的题型题法

【例 1】设 $A,\ B$ 是对立（互逆、互余）事件，证明：$\overline{A},\ \overline{B}$ 也是对立事件。

证明：$A,\ B$ 是对立事件 $\Rightarrow AB=\Phi,\ A+B=\Omega$

$\begin{cases} AB=\Phi\Rightarrow\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}=\overline{\Phi}=\Omega \\ A+B=\Omega\Rightarrow\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}=\overline{\Omega}=\Phi\Rightarrow\overline{A}\ \overline{B}=\Phi \end{cases}$，故 $\overline{A},\ \overline{B}$ 也是对立事件。

【例 2】 设 $A,\ B,\ C$ 是两两互斥事件（即不相容事件），$A+B+C=\Omega$，则 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 与 Ω 的关系如何？$\overline{A}\ \overline{B}$ 与 Ω 的关系如何？

解：(1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{\Phi}=\Omega$，故为相等关系；

(2) $\overline{A}\ \overline{B}=\overline{A+B}$

又，$A+B+C=\Omega\Rightarrow A+B\subset\Omega$，$\overline{A}\ \overline{B}=\overline{A+B}=\Omega-(A+B)\supset\Phi$

说明 $\overline{A}\ \overline{B}$ 与 Ω 为包含关系，$\overline{A}\cdot\overline{B}\neq\Phi$，故 $\overline{A},\ \overline{B}$ 不一定互斥。因此，【例 2】的结论不能推广。

【例 3】(1) 设 $A,\ B$ 是互斥事件，且 $A=B$，求 $P(A)$。

(2) $AB=\overline{A}\cdot\overline{B}$，证明：$A$ 与 B 为对立事件。

解：(1) $A=B\Rightarrow AA=AB\Rightarrow A=AB$

$A,\ B$ 互斥 $\Rightarrow AB=\Phi\Rightarrow A=B=\Phi\Rightarrow P(A)=0$。

(2) $A+B$ 与 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ 互斥，但 $A+B\supset AB$，故 $\overline{A}\cdot\overline{B}$ 与 AB 互斥；

又，$AB=\overline{A}\cdot\overline{B}$，则由 (1) 的结论知：$AB=\overline{A}\cdot\overline{B}=\Phi\Rightarrow A+B=\overline{\Phi}=\Omega$；

综上所述，A 与 B 为对立事件。

【例 4】已知 $P(AB)=P(\overline{A}\cdot\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$。

解：$P(AB)=P(\overline{A}\cdot\overline{B})\Rightarrow P(AB)=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$

$\Rightarrow P(AB)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\Rightarrow P(B)=1-P(A)=1-p$.

【例 5】证明：对任意事件 $A,\ B$ 有：$P(A+B)P(AB)\le P(A)P(B)$。

证明：$P(A+B)P(AB)=[P(A-B)+P(B-A)+P(AB)]\cdot P(AB)$

$$=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)$$
$$\le P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)$$
$$=\left[P(A-B)+P(AB)\right]\cdot\left[P(B-A)+P(AB)\right]$$
$$=\left[P(A)-P(AB)+P(AB)\right]\cdot\left[P(B)-P(BA)+P(AB)\right]$$
$$=P(A)P(B)$$

2.4 文氏图的两种类型和应用方法

概率论中的文氏图分为**集合文氏图**和**概率文氏图**两种。

● **集合文氏图的画法**：在一个矩形区域（表示全部样本空间Ω）内，根据所给事件的集合关系画一系列圆，圆围成的平面区域表示一个集合，即事件，并且在需要时把集合元素写在区域内，从而将集合的交、并、余等集合关系用几何图形予以表示，并在此基础上利用面积的加减或位置关系分析事件关系或概率问题。**集合文氏图既可分析事件的集合关系，又可以分析事件的概率关系。比如：** $AB=\Phi\Rightarrow P(AB)=0$。

● **概率文氏图的画法**：在一个矩形区域（表示全部样本空间Ω）内，根据所给事件的概率关系画一系列圆，并且把概率值写在圆域内，利用面积的加减分析概率问题。**概率文氏图不能分析事件的集合关系，只能分析事件的概率关系。比如：** $P(AB)=0\not\Rightarrow AB=\Phi$；$P(B|A)=0\Rightarrow P(A\overline{B})=0\not\Rightarrow A\subset B\ or\ A\supset B$。

概率文氏图一般需要掌握两种情形：

(a)事件独立性情形。即两个圆的交集表示$P(AB)=P(A)P(B)$。

(b)条件概率情形。如设$P(A)=a,\ P(B)=b,\ P(AB)=c$，则条件概率$P(B|A)=\dfrac{c}{a}$正好对应事件$B$在事件$A$中的概率$c$与事件$A$的概率$a$之比；同理，则条件概率$P(A|B)=\dfrac{c}{b}$则对应事件$A$在事件中$B$的部分概率$c$与事件$B$的概率$b$之比。

例如：设A、B为互斥事件，且$P(A)>0,\ P(B)>0$，则从事件文氏图立即可知：

$$P(B|A)=P(A|B)=P(AB)=0$$

又如：如果当事件A、B同时发生时，事件C必发生，从事件文氏图立即可知$P(C)\ge P(A)+P(B)-1$，因为“1”代表整个长方形区域，C 为 A，B 的公共区域，从面积的角度，显然 A+B-C 的面积最大值整个是长方形。

再如：设$P(A)=a,\ P(B)=b,\ P(A+B)=c$，则画出概率文氏图后，利用面积加减立即可知：

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)=c-b$。

再如：已知概率不为 0，且$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则画出概率文氏图，设$P(A)=a,\ \ P(B)=b,\ \ P(C)=c,\ \ P(\text{圆域外})=M$,相交元从左到右三部分分别为$d_1,d_2,d_3$，则

$P(M)=1-a-b+c;\ P(\overline{A})=M+d_3=1-a,\ \ P(\overline{B})=M+d_1=1-b$

$$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1\Rightarrow\frac{c}{b}+\frac{1-a-b+c}{1-b}=1\Rightarrow c=ab\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)。$$

一个集合或概率文氏图必对应某种集合或概率关系，一个集合或概率关系必定可以画出对应的文氏图。如果某种概率关系不能画出文氏图，则说明这种概率关系不存在。

例如：已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，求 $P(\overline{ABC})$。

一般计算是：$P(\overline{ABC})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)$

$$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}-0=\frac{7}{12}$$

按照概率文氏图可以推知：$P(C)\geq P(AC)+P(BC)=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{4}$，与题设条件矛盾，可见本题命题错误。

三、概率的 4 种定义及其性质

3.1 过渡知识

● **频 率**：在相同条件下，进行了 n 次试验，若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则称 $f_n(A)=\frac{k}{n}$ 为事件 A 发生的频率。

● **加法原理**：完成一件事，只需 1 个步骤，但有 n 种方法，每一种方法有 $m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 种选择，则完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法。

● **乘法原理**：完成一件事，需要 n 个步骤，完成每个步骤有 $m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 种方法，则完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种方法。

● **排 列**：从 n 个不同元素按次序任取 m 个元素，不放回的取法共有 $P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$；从 n 个不同元素任取 m 个元素，放回的取法共有 $P_n^m=n^m$；如果存在部分相同元素的排列，如 n 个元素，其中有 m 种不同类的元素，每一类元素有 k_m 个相同的元素，则排列总数为 $N=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$。

● **组 合**：从 n 个不同元素无次序任取 m 个元素，不放回的取法共有 $C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$；且

$$C_n^m=C_n^{n-m}，\quad C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}。$$

评 注 在计算样本基本事件总数和某一事件 A 的基本事件个数时，二者必须在同一确定的样本空间，而且，要么都使用组合，要么都使用排列。

3.2 概率的 4 种定义

● 概率的统计定义

当$n\to\infty$时，$f_n(A)\to$常数$P(A)$，则$P(A)$称为事件A发生的概率。频率必须有多次试验才可计算，而概率只要有一次试验即可计算。比如我在掷一次硬币之前就知道出现正面的概率为$\frac{1}{2}$。我们投篮命中次数就是一个频率概念。

● 概率的古典定义（古典概型或离散等可能概型）

试验结果一共有n个基本事件且每次试验各基本事件出现的可能性完全相同（**等可能性**）。以n表示样本空间基本事件（即集合中的元素总数）的总数，m表示事件A包含基本事件数，则$P(A)=\frac{m}{n}$，**即此时概率等于频率，伯努利概型**也属于这类概型。此类现象在客观情况中很普遍，研究的工具是利用排列与组合及加法与乘法原理。但对于主观因素有关的现象（**非等可能性**）就不适应，比如学生的考试成绩等等。

■古典概型计算的题型题法

【例 6】掷两枚骰子，求事件A为出现的点数和为 3 的概率。

错误解法：掷两枚骰子的点数之和的可能值为$\{2,3,4,5,\cdots,12\}$，事件A的结果只有 3，故$P(A)=\frac{1}{11}$。但这一解法是错误的，因为古典概型只适合等可能，而取数值 2 和 3 在本题中不是等可能，因为取 2 的情况只有$(1,1)$一种可能，而取 3 的情况有$(1,2)$和$(2,1)$两种可能。

正确解法：掷两枚骰子可能出现的情况为

$(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)$共计 36 种。事件$A$只有$(1,2)$和$(2,1)$两种结果，故由概率的古典定义得 $P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$。

【例 7】袋中有 1 个红球，2 个黑球，3 个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以X,Y,Z分别表示两次取球的红、黑、白球的个数，求$P\{X=1|Z=0\}$。

解：$P\{X=1|Z=0\}$的意思是：在没有取到白球的情形下，取到一个红球的概率，利用样本空间的缩减法，相当于只有 1 个红球、2 个黑球共 3 个球放回地摸两次，其中摸到一个红球的概率，所以

$P\{X=1|Z=0\}=\frac{C_1^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_3^1C_3^1}=\frac{4}{9}$，其中$C_1^1C_2^1$表示第一次摸到了红球，则第二次只能在两个黑球中任摸一个，$C_2^1C_1^1$表示第一次摸到了一个黑球，则第二次只能摸到红球。

$\boxed{\text{评 注}}$ **总样本空间可形象理解为瞎摸，把相同的事物看成互异，形成一个大类，摸出的包括有用的和无用的；事件样本空间是按要求摸，为有用的，在含有样本点的子类中摸。**

【例 8】袋中装有$2n-1$个白球和$2n$个黑球，一次取n个球，发现都是同一种颜色，求这种颜色是黑球的概率。

解：设 A 表示 n 个球是同一种颜色的事件，B 表示 n 个球是黑球的事件，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{C_{2n}^{n}}{C_{4n-1}^{n}}}{\frac{C_{2n-1}^{n}+C_{2n}^{n}}{C_{4n-1}^{n}}}=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n-1}^{n}+C_{2n}^{n}}=\frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}+\frac{(2n)!}{n!n!}}=\frac{2}{3}。$$

【例 9】某产品 100 件，其中 3 件次品，现从中抽取 3 件（不放回），求下列事件的概率：

（1）三件中恰有两件次品；　（2）第三件才抽到次品。

错误解法：设 A—{取正品}；B—{取次品}；C—{三件中恰有两件次品}；D—{第三件才抽到次品}，

（1）三件中恰有两件次品；$P(C)=\frac{C_3^2C_{97}^1}{P_{100}^3}$

（2）第三件才抽到次品。$P(D)=\frac{C_{97}^2C_3^1}{P_{100}^3}$

因为，基本事件的样本总数是在排列（次序有关）样本空间，而事件 A 是在在组合（次序无关）样本空间中取得子集，故错误。

正确解法：

（1）三件中恰有两件次品；$P(C)=\frac{C_3^2C_{97}^1}{C_{100}^3}$

（2）第三件才抽到次品。$P(C)=\frac{C_{97}^1C_{96}^1C_3^1}{C_{100}^1C_{99}^1C_{98}^1}$ 或 $P(D)=\frac{P_{97}^2P_3^1}{P_{100}^3}$

抽签原理　若 n 个签中有 m 个“有签”，$n-m$ 个“无签”，n 个人排队依次抽签（或一个人抽 n 次，每次抽一个），则第 k 个人（或某人第 k 次，$k=1,2,\cdots,n$）抽到“有签”的概率都等于 $\frac{m}{n}$。由抽签原理知，其概率与各人抽签的先后次序无关，也与抽签放回还是不放回的方式无关，仅与“有签”所占比例有关。

【例 10】袋中有 a 只白球，b 只红球，k 个人依次在袋中取一只球。

（1）作放回抽样；（2）作不放回抽样；求第 i 个人取到白球（事件 B）的概率。

解：（1）作放回抽样　$P(B)=\frac{a}{a+b}$

（2）作不放回抽样

各人取一球，每种取法是一个基本事件，显然，每一事件发生是等可能的，k 个人依次在袋中取一只白球，共有取法为：

$(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)=P_{a+b}^{k}$，为总样本空间的基本事件数。

一旦事件 B 第一次发生，则第 i 个人取到了 a 只白球中的任意一个，有 a 种取法，其余被取得 $k-1$ 只球可以是剩余的 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只，于是，B 包含基本事件的个数为 $a\cdot P_{a+b-1}^{k-1}$ 共有取法为：

$(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-(k-1)+1)=P_{a+b-1}^{k-1}$，故 $P(B)=\dfrac{a\cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\dfrac{a}{a+b}$。

可见，尽管取球的先后次序不同，也不管是否放回，个人取到白球的机会完全相同。这就是抽签原理，它广泛应用于福利彩票的运营中。请读者记住这个模型。

抽签原理的前提就是信息不公开，抽签结果只有两个，前面抽签后可以不放回，也可以放回（但放回的情形不是抽签原理的体现，而是根据古典概型直接得出）。也就是前面抽的是白球还是红球（或正品还是次品等等）都不知道。所以任意一次抽的概率都相等。用全概率公式就可以证明。要是知道了前面的结果再抽就是条件概率了，后面和前面不同。

又如：一批产品，10 个正品，2 个次品，任抽两次，一次一个，抽完不放回，问第二次抽的是次品的概率?

答案：由抽签原理得出第二次抽得的次品的概率与第一次抽得次品的概率相同都是 2/12=1/6 。

再如：十运会的时候决定男女足球队 8 强的时候有三支队伍要淘汰一支，这是足协采取了抽签的方式。

人们当时纳闷，很不公平啊，第一个抽签的出线概率为 $\dfrac{1}{3}$=66.7%啊。其实，原来三支队伍无论谁先抽，根据抽签原理，只要先抽的结果未公布，都有相同的概率被淘汰。

【例 11】口袋中有 10 张卡片，其中 2 张是中奖卡，三个人依次从口袋中摸出一张（模出的结果是未知的，且不放回），问中奖概率是否与摸卡的次序有关?

解：设三个人摸卡事件分别为 A_1, A_2, A_3。这是一个离散古典概型。

$$P(A_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}+\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)P(A_3|\overline{A}_1A_2)\\&\quad+P(A_1\overline{A}_2)P(A_3|A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=\frac{P_2^2}{P_{10}^2}\times 0+\frac{P_8^1P_2^1}{P_{10}^2}\times\frac{1}{8}+\frac{P_2^1P_8^1}{P_{10}^2}\times\frac{1}{8}+\frac{P_8^1P_7^1}{P_{10}^2}\times\frac{2}{8}=\frac{8\times 2}{10\times 9}\times\frac{1}{8}+\frac{2\times 8}{10\times 9}\times\frac{1}{8}+\frac{8\times 7}{10\times 9}\times\frac{2}{8}=\frac{1+1+7}{45}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

可见，中奖概率是否与摸卡的次序无关，这正是抽签原理的具体体现，以后再碰到类似题直接使用抽签原理计算就可以了。

评 注　在第二个人抽签时，要利用第一个人抽签情况的一个划分，即

$\{$第一个人抽到奖(A_1), 第一个人未抽到奖$(\overline{A}_1)$.$\}$

在第三个人抽签时，要利用第一个人和第二个人抽签情况组合的一个划分，即

第一个人抽到奖第二个人也抽到奖(A_1A_2)；第一个人未抽到奖第二个人抽到奖$(\overline{A}_1A_2)$；

第一个人抽到奖第二个人未抽到奖$(A_1\overline{A}_2)$；第一个人未抽到奖第二个人也未抽到奖$(\overline{A}_1\overline{A}_2)$。

【例 12】设有M件产品包含有m件次品，从中任取 2 件，求

(1) 有一件是次品时，另一件也是次品的概率；

(2) 一件不是次品时，另一件是次品的概率；

(3) 至少一件是次品的概率。

解：这类题型关键是掌握事件符号的设定。设：

$A_1=\{2\text{件中有次品}\}$；$A_2=\{2\text{件中有正品}\}$；$B=\{\text{另一件是次品}\}$，则 $A_1B=\{\text{有}2\text{件次品}\}$。

(1) $P(B|A_1)=\dfrac{P(A_1B)}{P(A_1)}=\dfrac{\frac{C_m^2}{C_M^2}}{\frac{C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1}{C_M^2}}=\dfrac{m-1}{2M-m-1}$

(2) $P(B|A_2)=\dfrac{P(A_2B)}{P(A_2)}=\dfrac{\frac{C_m^1C_{M-m}^1}{C_M^2}}{\frac{C_m^1C_{M-m}^1+C_{M-m}^2}{C_M^2}}=\dfrac{2m}{M-m-1}$

(3) $P(A_1)=\dfrac{C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1}{C_M^2}=\dfrac{m(2M-m-1)}{M(M-1)}$

● **概率的几何定义（几何概型或连续等可能概型）**

古典概型只适合有限离散等可能情形，对于无限连续等可能情形 ，则需要延伸它的定义，即采用所谓的**几何概型**来描述：$P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$，$L$为相应几何测度，可以为长度、面积或体积，由此也可以看出概率是连续的，它可以用天上掉馅饼来比喻，我们用不同容积的器皿所接到的可能性是与器皿面积成正比的。**几何概型是研考数学的一类常考题型**，研究的工具是利用微积分。注意，**等可能概型包括：几何概型、古典概型和伯努利概型三种**。

■几何概型计算的题型题法

【例 13】在区间$(0,1)$中随机取两个数，求两数差的绝对值小于$\dfrac{1}{2}$的概率$P(A)$。

解：这是连续几何概型。画出两数差的绝对值小于$\dfrac{1}{2}$的二维图形，使用面积比。

$$P(A)=P\left(|X-Y|<\frac{1}{2}\right)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{评 注}}$ 本题型也可使用均匀分布求：$P\left(|X-Y|<\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\iint_D\frac{1}{S_0}d\sigma=\iint_D 1\cdot\, d\sigma=\frac{3}{4}$。

【例 14】在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求两数之积少于 $\frac{1}{2}$ 的概率 $P(B)$。

解：画出两数积的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的二维图形（双曲线 $xy=\frac{1}{2}$），使用面积比。

$$A=\left\{(x,y)|(x,y)\in(0,\ 1),\ xy<\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{0}^{\frac{1}{2x}}dy=\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}(1+\ln 2)。$$

【例 15】设平面区域 D_1 是由 $x=1,\ y=0,\ y=x$ 所围成，今向 D_1 内随机地投入 10 个点，求这 10 个点中至少有 2 个点落在曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围的区域 D 的概率。

解：，这是几何概型和伯努利概型的组合。设事件 $A=\{$任投一点落在区域 D 内$\}$

$$p=P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{\int_0^1\left(x-x^2\right)dx}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

于是，由伯努利概型知这 10 个点至少有两个点落在区域 D 的概率为

$$P(\mu\geq 2)=1-P(\mu=0)-P(\mu=1)=1-C_{10}^{0}p^{0}(1-p)^{10}-C_{10}^{1}p^{1}(1-p)^{10-1}=1-4\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}\approx 0.896。$$

● **概率的公理化定义（数学定义）**

设 E 是随机试验，Ω 为其样本空间，以 E 中所有可能的随机事件组成的集合 F 为定义域，对任意事件 A，规定一个实值函数 $P(A),\ A\in F$，如果 $P(A)$ 满足下列三个条件，就称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。

① 非负性： $P(A)\geq 0$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 可列可加性：即：设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 为两两互斥事件，则

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)}。$$

上述前三种定义都具有局域性，是针对特定场合而言的，只有**公理化定义才具有一般性**。公理化定义完全包含了前述三种定义的全部思想。公理化定义用实数描述事件，则概率就是一种实变函数，正是这种定义，才使我们可以利用高等数学工具来研究概率问题。

3.3 **条件概率**：在事件 A 发生条件下，事件 B 发生的概率，用 $P(B|A)$ 表示。

以古典概型为例，设样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，若事件 A 包含 m 个样本点，B 包含 s 个样本点，而 s 个样本点中又有 k 个是属于 A 中的，即事件 AB 包含 k 个样本点，则

$$P(B|A)=\frac{AB\text{包含样本点的个数}}{A\text{包含样本点的个数}}=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B)=\frac{AB\text{包含样本点的个数}}{B\text{包含样本点的个数}}=\frac{k}{s}=\frac{k/n}{s/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

评 注 $P(B|A)$是在增加了条件A发生后，在缩减的样本空间Ω_A中，B的基本事件数与Ω_A之比。另外，要特别注意条件概率中，必须要求$P(A)\neq 0$或$P(B)\neq 0$，即$P(A)>0$或$P(B)>0$。而在乘法公式$P(AB)=P(A)P(B|A)$中就无此要求。

3.4 概率的 5 类关系运算公式(利用概率文氏图理解)

● 加法公式

① $P(\Phi)=0$; $P(\Omega)=1$; $P(A)=1-P(\overline{A})$; $P(AB)\leq P(A)$; $P(A+B)\geq P(A)$

② $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A-B)+P(B-A)+P(AB)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(B)+P(A\overline{B})$

$P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

评 注 上述公式的多样性主要来源于差积转换公式$A-B=A\overline{B}=A-AB$。

③ 若$A_1,A_2,\cdots A_n$为两两互斥事件，则$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

注意事件$A_1,A_2,\cdots A_n$不一定独立。

● 减法公式

$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)\neq P(A)-P(B)$

当$A\supset B\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

$AB=\Phi\Rightarrow P(A-B)=P(A)$

当A,B独立$\Rightarrow P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(A)]$

● 乘法公式

$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$

$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

●条件概率公式

当条件“$|B$”不变且$P(B)\neq 0$时，条件概率运算中$P(A|B)$与$P(A)$的全部公式完全相同。如：

① $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$

② $P[(A-C)|B]=P(A|B)-P(AC|B)$

③ $\boxed{P(\Omega|A)=1 \quad P(A|A)=1}$

④ $\boxed{P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1}$

⑤ $\boxed{P((B+C)|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)}$

⑥ $\boxed{P(AB|C)=P(A|C)P[(B|A)|C]=P(A|C)P(B|AC)}$

如为互斥事件（即：$P(AB=\Phi)=0$），则$P[(B+C)|A]=P(B|A)+P(C|A)$

● 概率的其它重要性质

① 单调性 $A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$。

② 概率是连续的，且$0\le P(A)\le 1$。

■概率关系计算的题型题法

【例 16】设两个独立事件A和B不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A发生B不发生的概率等于B发生A不发生的概率，求$P(A)$。

解：依题意，有$P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{9}\Rightarrow P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=\frac{1}{9}$$

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(A)=P(B)$$

$$\Rightarrow(1-P(A))^2=\frac{1}{9}\Rightarrow(1-P(A))=\frac{1}{3}\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$

【例 17】甲乙对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被击中，求它是甲射中的概率？

解：目标被击中的概率为$P(A\cup B)$，根据条件概率公式

$$P(A|A\cup B)=\frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P[(A\cap A)\cup(A\cap B)]}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P[A\cup\Phi]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=\frac{3}{4}$$

【例 18】设$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，$P(B|A)=0.8$，求$P(B|\overline{A}\cup B)$。

解：$$P(B|\overline{A}\cup B)=\frac{P[B\cap(\overline{A}\cup B)]}{P(\overline{A}\cup B)}=\frac{P[(B\cap\overline{A})\cup(B\cap B)]}{P(\overline{A}\cup B)}$$

$$=\frac{P[(B)\cap(B)]}{P(\overline{A}\cup B)}=\frac{P(B)}{P(\overline{A}+B)}=\frac{P(B)}{P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)}$$

$$=\frac{P(B)}{P(\overline{A})+P(B)-\left[P(B)-P(AB)\right]}=\frac{P(B)}{\left[1-P(A)\right]+P(B)-\left[P(B)-P(A)P(B|A)\right]}$$

$$=\frac{0.6}{(1-0.4)+0.6-\left[0.6-0.4\times 0.8\right]}=\frac{3}{46}$$

【例 19】已知$0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,\ \ P(B|A)=1$，求$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)$。

解：$P(B|A)=1=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\Rightarrow P(A)=P(AB)\Rightarrow P\left(A\overline{B}\right)=P(A)-P(AB)=0$

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A)P\left(A|\overline{B}\right)=0\Rightarrow P\left(A|\overline{B}\right)=0\Rightarrow P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=1-P\left(A|\overline{B}\right)=1。$$

【例 20】5 人以模彩方式决定谁得一张球票，设$A_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$表示第$i$个人摸到球票，则下列结果不成立的是( )。

$(A)P\left(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2}\right)=\dfrac{1}{3}$　　$(B)P\left(\overline{A_1}A_2\right)=\dfrac{1}{5}$　　$(C)P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\right)=\dfrac{3}{5}$　　$(D)P\left(\overline{A_1}A_2\right)=\dfrac{1}{4}$

解：(A)因为已知前面两人没摸到球票，则余下的第一人摸到球票的概率应为$\dfrac{1}{3}$，成立。

(B) $P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2|\overline{A_1}\right)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$，成立。

(C) $P\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\right)=1-P\left(\overline{\overline{A_1}\ \overline{A_2}}\right)=1-P\left(A_1+A_2\right)=1-P\left(A_1\right)-P\left(A_2\right)=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$，成立。

(D)因为$\overline{A_1}\supset A_2\Rightarrow P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P\left(A_2\right)=\dfrac{1}{5}$，原选项不成立。

【例 21】为防止意外，在矿内同时设置甲乙两种报警系统，每种系统单独使用时，甲有效的概率为 0.92，乙为 0.93，在甲失灵时乙仍有效的概率为 0.85，求

(1)发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

(2)在乙失灵时，甲仍有效的概率。

解：(1) 设 $P(A)=0.92,\ \ P(B)=0.93,$ 则 $P\left(B|\overline{A}\right)=0.85$

至少有一个有效的概率为$P(A+B)$

$$P(A+B)=P(A)+P\left(\overline{A}B\right)=P(A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B|\overline{A}\right)=0.92+(1-0.92)\times 0.85=0.988。$$

$$(2)\ P\left(A|\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{P(A+B)-P(A)}{1-P(B)}=\frac{0.988-0.92}{1-0.93}\approx 0.83。$$

四、全概率公式和逆概率公式（贝叶斯公式）

4.1 一个划分

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 满足 $(1)\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,\quad(2)A_i\cap A_j=\Phi\quad(i\neq j)$，称 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 为样本空间 Ω 的**一个划分**，又称为 Ω 的**一个完备事件组**。正确理解**一个划分**是能否使用好全概率公式和贝叶斯公式的关键。注意，$A_1,A_2,\cdots A_n\,(n>2)$ 为一个完备事件组，则 $\overline{A_1},\overline{A_2},\cdots\overline{A_n}$ 就一定不是一个完备事件组。

4.2 全概率公式（已知原因求结果）

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个划分，并且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件 B 发生的全部可能原因，则

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)}$$

评 注 比如，请某同学介绍考研数学成功经验，他谈到了所有可能的四点重要因素（相当于一个划分）：第一，正确的备考复习方法 $P(A_1)$ 以及 $P(A_1)$ 对考研成功的影响程度 $P(A_1)P(B|A_1)$；第二，顽强的毅力 $P(A_2)$ 以及 $P(A_2)$ 对考研成功的影响程度 $P(A_2)P(B|A_2)$；第三，收集各方面的信息 $P(A_3)$ 以及 $P(A_3)$ 对考研成功的影响程度 $P(A_3)P(B|A_3)$；第四：良好的心态训练 $P(A_4)$ 以及 $P(A_4)$ 对考研成功的影响程度 $P(A_4)P(B|A_4)$。那么成功的可能性 $P(B)$ 为：

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)+P(A_4)P(B\mid A_4)$$

4.3 逆概率公式（贝叶斯公式）（已知结果求原因）

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为个划分，并且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件 B 发生的全部原因，则

$$\boxed{P(A_k\mid B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}}$$

评 注 容易看出，**贝叶斯公式本质上是条件概率**。比如，某人竞聘学生会主席成功了 $P(B)$，他之所以成功当然有几方面的主要原因（相当于一个划分），那么，其中良好的沟通能力在他竞聘成功中起到了多大的作用呢，这就相当于计算 $P(A_k\mid B)$。

■全概率与逆概率计算的题型题法

【例 22】从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,\ 2,\ \cdots,\ X$ 中任取一个数，记为 Y，求 $P\{Y=2\}$。

解：全概率模型。

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}\\&\quad+P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\}\\&=\frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{48}\end{aligned}$$

【例 23】设有来自三个地区的各 10 名，15 名，25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中抽出两份。

（1）求先抽到的一份是女生的概率 p；

（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

解：设 $H_i=$｛报名表是第 i 个地区考生的｝ $i=1,2,3$

$A_j=$｛第次 j 抽到的一份是男生表｝ $j=1,2$

（1）由全概率公式得

$$p=P\left(\overline{A_1}\right)=P(H_1)P\left(\overline{A_1}\mid H_1\right)+P(H_2)P\left(\overline{A_1}\mid H_2\right)+P(H_3)P\left(\overline{A_1}\mid H_3\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}$$

（2）由全概率公式得

$$P(A_2)=P(H_1)P(A_2\mid H_1)+P(H_2)P(A_2\mid H_2)+P(H_3)P(A_2\mid H_3)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{25}=\frac{61}{90}$$

求 $P(A_2)$，也可利用抽签原理：

$$P(A_2)=P(A_1)=P(A_3)\Rightarrow P(A_2)=P(A_1)=1-P\left(\overline{A_1}\right)=1-\frac{29}{90}=\frac{61}{90}$$

由贝叶斯公式知（实际上就是条件概率）

$$q=P\left(\overline{A_1}\mid A_2\right)=\frac{P\left(\overline{A_1}A_2\right)}{P(A_2)}$$

$$P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P(H_1)P\left(\overline{A_1}A_2\mid H_1\right)+P(H_2)P\left(\overline{A_1}A_2\mid H_2\right)+P(H_3)P\left(\overline{A_1}A_2\mid H_3\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}\right)=\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow q=P\left(\overline{A_1}\mid A_2\right)=\frac{P\left(\overline{A_1}A_2\right)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}$$

五、 事件的独立性

5.1 两个事件独立

① 定义：$\boxed{P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(A)P(B)}$

● A, B 独立，则 $P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P\left(\overline{A+B}\right)=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)-P(A)P(B)$

$$=\left[1-P(A)\right]\cdot\left[1-P(B)\right]=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)\Rightarrow\overline{A},\overline{B}\text{ 也独立。}$$

● 任意事件 A 都与概率为 0（不可能事件）或 1（必然事件）的事件 B 相互独立。即

$P(A\Phi)=P(A)P(\Phi)=0;\quad P(A\Omega)=P(A)P(\Omega)=P(A);\ P(\Phi\Omega)=P(\Phi)P(\Omega)=0$。

●任意两个事件如有包含关系且它们的概率 $P(A)\neq 0,\ 1$，则一定不相互独立。

② **两个事件独立的等价结论**

设 $P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$，则两个事件 A、B 独立的等价结论有

(1) $\boxed{P(B|A)=P(B|\overline{A}) \text{ 或 } P(A|B)=P(A|\overline{B})}$

(2) $\boxed{P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1}$

证明： (1) A 和 $\overline{A}$ 显然是一个划分，已知 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，根据全概率公式有：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|A)\\&=\left[P(A)+P(\overline{A})\right]P(B|A)=P(B|A)\\&\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)\end{aligned}$$

同理可得：$P(A|B)=P(A|\overline{B})$。

(2) 利用 (1) 的结论立即可得：

$$P(B|A)=P(B|\overline{A})\Rightarrow P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1。$$

(3) $\boxed{P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)}$

(4) $\boxed{AB=\overline{A}\,\overline{B}\Rightarrow P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|B)=2}$

证明：$AB=\overline{A}\,\overline{B}\Rightarrow \Phi=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=AB=\overline{A}\,\overline{B};\ A\cup B=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\Phi}=\Omega$

因此，$A,\ B$ 为对立事件 $\Rightarrow \overline{A}=B,\quad \overline{B}=A$

$$\Rightarrow P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|B)=P(\overline{B}|\overline{B})+P(B|B)=\frac{P(\overline{B}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}+\frac{P(BB)}{P(B)}=2$$

(5) A 与 B 独立 $\Leftrightarrow$ A 与 $\overline{B}$ 独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立。

评 注 $A,\ B$ 独立，要求 $A,\ B$ 都要发生（$P(A)>0,\ P(B)>0;\ P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$），且可以同时发生，并且 A 发生与 B 发生无关；如，甲乙打篮球，甲乙互不干扰，则“甲投中（A 事件发生）”与“乙投中（B 事件发生）”是相互独立的。$A,\ B$ 互斥要求 $A,\ B$ 不能同时发生，即 $AB=\Phi\Rightarrow P(AB)=0$，如，“甲投中（$A$ 事件发生）”与“甲未投中（$\overline{A}$ 事件发生）”就是互斥的。$AB=\Phi\Rightarrow P(AB)=0\neq P(A)P(B)$

不一定成立，但是当 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$，则 $P(AB)=P(A)P(B)=0$，则 $A,\ B$ 事件独立。

(6) 若 n 个事件相互独立，则不含相同事件的事件组经并、差、交、逆运算后，还是相互独立。

5.2 **事件的互斥与独立是相互否定的关系**

如果 $A,\ B$ 相互独立，那么

$$P(A+B)\equiv P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)<P(A)+P(B)\Rightarrow P(AB)\neq 0,$$

说明 $A,\ B$ **一定不互斥**；

如果 $A,\ B$ **互斥**，那么

$$P(AB)=0,\ \text{而}\ P(A)>0,\ \ P(B)>0\Rightarrow P(A)\ P(B)\neq 0\Rightarrow P(AB)\neq P(A)\ P(B),$$

说明 $A,\ B$ **一定不独立**。

所以，事件的互斥与独立是**相互否定**的关系。

6.3 多个事件（事件组）的独立

① 两两独立：$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad (i\neq j)$

② 相互独立：$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\qquad 1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_k$

如对三个事件 $A,\ B,\ C$

两两独立：　$P(AB)=P(A)P(B);\ \ P(BC)=P(B)P(C);\ \ P(AC)=P(A)P(C)$

相互独立：

$$P(AB)=P(A)P(B);\ P(BC)=P(B)P(C);\ P(AC)=P(A)P(C);\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

可见，相互独立，则两两必独立，反之不然。

$\boxed{\text{评 注}}$ $A,\ B,\ C$ 相互独立，则 $\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C}$ 也相互独立，但他们的组合却不一定，如 $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 就不独立，因为 $P(\overline{AC}\cdot\overline{C})=P(\overline{AC}\cap\overline{C})=P(\overline{AC\cup C})=P(\overline{\Phi\cup C})=P(\overline{C})\neq P(\overline{AC})P(\overline{C})$。

另外，事件的独立性关系是指一般性关系，而后面要讲述的相关关系仅仅指线性关系，它只是一般关系中的一个特殊。另外，特别注意：［$A,\ B$ 独立］$\neq[AB=\Phi]$，这是因为独立是使用事件的概率来定义的，而不是事件的相交关系。

■**事件的独立性题型题法**

【例 24】下列哪个是 A,B,C 三个事件相互独立的充分条件（　）。

$(A)\,A,B,C$ 两两独立　　　　$(B)\,P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$(C)\,P(A-B)=1$　　　　　　$(D)\,P(A-B)=0$

解：选 (C)。因为

$P(A-B)=P(A\overline{B})=1;\ \begin{cases} P(A)\ \geq P(A\overline{B})=1 \Rightarrow P(A)=1 \\ P(\overline{B})\ \geq P(A\overline{B})=1 \Rightarrow P(\overline{B})=1 \Rightarrow P(B)=0 \end{cases}$

由于概率为0或1的事件与任何事件均独立，故A，B，C两两独立；

又，$P(ABC)\leq P(B)=0 \Rightarrow P(ABC)=0 \Rightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0$

所以，A，B，C相互独立。

【例 25】设 A,B,C 三个事件相互独立，则 $\overline{A\cup B}$ 与 C；$A-B$ 与 $\overline{C}$；AC 与 C 的独立性如何？

解：A,B,C 三个事件相互独立，则 $\overline{A},\ \overline{B},\ C$ 和 $A,\ \overline{B},\ \overline{C}$ 也相互独立，所以

$P(\overline{A\cup B}\cap C)=P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)=P(\overline{A}\overline{B})P(C)=P(\overline{A\cup B})P(C)$，故 $\overline{A\cup B}$ 与 C 相互独立。

$P\{(A-B)\overline{C}\}=P(A\overline{B}\overline{C})=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})=P(A\overline{B})P(\overline{C})=P(A-B)P(\overline{C})$，故 $A-B$ 与 $\overline{C}$ 相互独立。

AC 与 C 不能肯定不相互独立，因为当 $A=\Phi$，有 $P(AC\cap C)=0=P(AC)P(C)$。

【例 26】3 人依次轮流投一枚硬币，若先投出正面为胜，求甲乙丙分别获胜的概率。

解：由于概率为0或1的事件与任何事件均独立，故即甲乙丙依次轮流投一枚硬币是否成功各事件是相互独立的，而后一人胜出的前提是前一人投出反面而没胜，故后一人胜出的概率是前一人胜出的概率的$\frac{1}{2}$（一半），又设甲乙丙分别获胜的概率为 $P_1,\ P_2,\ P_3$，则

$$\begin{cases} P_1+P_2+P_3=1 \\ P_2=\frac{1}{2}P_1 \\ P_3=\frac{1}{2}P_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1=\frac{4}{7} \\ P_2=\frac{2}{7} \\ P_3=\frac{2}{7} \end{cases}。$$

六、 伯努利概型

6.1 单个伯努利试验

若一次试验 E 只有两个结果 A 或 $\overline{A}$（如成功和失败），E 称为单个伯努利试验。

如 $P(A)=p$，则 $P(\overline{A})=1-p$。

6.2 n 重伯努利试验

当把 E 独立地重复进行 n 次，称为 n 重伯努利试验。

n 重伯努利试验的具体条件有 5 个：

（1） 独立，指 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$ $\quad 1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k$；

（2） 重复，指 $P(A_i)\equiv p$ 不变；

（3） 要求等可能抽样；

（4） 要求放回抽样，与 $P(A)=p$ 是相容的；

（5） 试验结果只有两种可能，即对立结果。

形象记忆掌握法： n 重伯努利试验的特征是“独重回对等”。

7.3 伯努利概型公式（二项分布 $X\sim B(n,p)$）

n 重伯努利试验中有许多事件发生，其中事件 A 发生（用 μ 表示）k 次的概率为

$B(n,p)=P(\mu=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$。注意：当 $p=1$ 时，$P(\mu=k)\equiv 1$。

■伯努利概型计算的题型题法

【例 27】 对某一目标进行了三次独立射击，第 1，2，3 次射击的命中率分别为：0.4，0.5，0.7，试求 (1) 三次中恰有一次命中的概率 p_1；(2) 三次中至少有一次命中的概率 p_2

解：注意本题不是伯努利概型，因为结果不是对立事件。设 $A_i=\{$第 i 次命中的事件$\}$

(1) 三次中恰有一次命中的事件 $B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$$\Rightarrow p_1=P(B)=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)$$
$$=P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

(1) 三次中至少有一次命中的事件 $C=A_1+A_2+A_3$

$$\Rightarrow p_2=P(C)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P\left(\overline{A_1+A_2+A_3}\right)$$
$$=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)$$
$$=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91$$

评 注 注意 A_1，A_2，A_3 既不互斥又不对立，下列计算是错误的

$$p_2=P(C)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.4+0.5+0.7=1.6>1。$$

【例 28】 某人向同一目标独立的重复射击，每次射击命中目标的概率为 p（$(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中的概率为

$(A)\ 3p(1-p)^2$ $\qquad$ $(B)\ 6p(1-p)^2$

$(C)\ 3p^2(1-p)^2$. $\qquad$ $(D)\ 6p^2(1-p)^2$

解：这是伯努利概型。 设事件 $A=$ “第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”，则 A 表示共射击 4 次，其中前 3 次只有 1 次击中目标，且 4 次才击中目标，因此 $P(A)=C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$，应选（C）。

【例 29】 如果每次试验的成功率都是 p，并且已知三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 $\frac{19}{27}$，求 p。

解：这是伯努利概型。

“至少成功一次”的对立事件就是“一次也不成功，即三次全失败”。

三次全失败的概率 $P(B)=(1-p)^3=1-\frac{19}{27}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$。

【例 30】甲乙丙各掷 3 次均匀硬币，求甲乙掷出正面向上次数相等的概率。

解：设事件 $A=$甲乙掷出正面向上次数相等，$B_i=$甲掷出 i 次正面，$C_i=$乙掷出 i 次正面，$i=0,1,2,3$。

显然 $A=\bigcup_{i=0}^{3}B_iC_i$，且 B_i，C_i 相互独立。

$$P(B_i)=P(C_i)=C_3^i\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{3-i}=\left(\frac{1}{2}\right)^3C_3^i$$

$$\Rightarrow P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_iC_i)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(C_i)=\left(\frac{1}{2}\right)^6\sum_{i=0}^{3}\left(C_3^i\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1^2+3^2+3^2+1^2\right)=\frac{5}{16}$$

【例 31】投一枚硬币，求直到第 k 次才得到正面向上和反面向上各出现至少两次的概率。

解：如果第 k 次投得正面，则前面的 $k-1$ 次必有一次正面和 $k-2$ 次反面；如果第 k 次投得反面，则前面的 $k-1$ 次必有一次反面和 $k-2$ 次正面，所求概率为 $2C_{k-1}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{k-1}{2^{k-1}}$。

【例 32】在 n 重伯努利试验中，若每次试验成功的概率为 p，求成功次数为奇数的概率？

解法一：设 A_k 表示第 k 次试验时事件 A 发生，则 $\overline{A_k}$ 表示第 k 次试验时事件不 A 发生；B_k 表示 k 次试验中事件 A 发生了奇数次，并设 $P(B_k)=P_k$。

A 发生奇数次有两种情形。如果第 k 试验 A_k 发生了 (A_k)，则依题意，要求 $k-1$ 次试验中 A_k 必发生了偶数次，也就是 B_{k-1} 不可能发生 $\left(\overline{B}_{k-1}\right)$；如果第 k 试验 A_k 不发生 $\left(\overline{A_k}\right)$，则依题意，要求 $k-1$ 次试验中 A_k 必发生了奇数次，也就是 B_{k-1} 发生 (B_{k-1})，故有：

$$\begin{aligned}
&B_k=A_k\overline{B}_{k-1}+\overline{A_k}B_{k-1}\\
&\Rightarrow P(B_k)=P_k=P\left(A_k\overline{B}_{k-1}+\overline{A_k}B_{k-1}\right)=P(A_k)P\left(\overline{B}_{k-1}\right)+P\left(\overline{A_k}\right)P(B_{k-1})\\
&\qquad\qquad=p(1-P_{k-1})+(1-p)P_{k-1}=p+(1-2p)P_{k-1}\\
&\Rightarrow P_k-\frac{1}{2}=\left(p-\frac{1}{2}\right)+(1-2p)P_{k-1}=-\frac{1}{2}(1-2p)+(1-2p)P_{k-1}=(1-2p)\left(P_{k-1}-\frac{1}{2}\right)\\
&\Rightarrow P_k-\frac{1}{2}=(1-2p)^2\left(P_{k-2}-\frac{1}{2}\right)=\cdots=(1-2p)^{n-1}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)=(1-2p)^{n-1}\left(p-\frac{1}{2}\right)\\
&\Rightarrow P_k=\frac{1}{2}+(1-2p)^{n-1}\left(p-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[1-(1-2p)^n\right]
\end{aligned}$$

解法二：$\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=1 \qquad (1)$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{且k为偶数}}}^{n} C_n^k (-p)^k (1-p)^{n-k} = \left[-p+(1-p)\right]^n = (1-2p)^n \qquad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2\sum_{\substack{k=0 \\ \text{且k为偶数}}}^{n} C_n^k (-p)^k (1-p)^{n-k} = 1+(1-2p)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ \text{且k为偶数}}}^{n} C_n^k (-p)^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^n\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{k为奇数}}^{n} C_n^k (-p)^k (1-p)^{n-k} = 1-\frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^n\right] = \frac{1}{2}\left[1-(1-2p)^n\right]$$

第一章　随机事件与概率模拟题

一．填空题

1．设 A，B 为两个事件，且 $P(A)$ =0.7，$P(A-B)$ =0.3，则 $P(\overline{AB})$ =______。

2．从区间（0，1）中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________。

3．设 A，B，C 为三个事件，$A\supset C, B\supset C$，且 $P(A)=0.7, P(A-C)=0.4, P(AB)=0.5$，则 $P(AB\overline{C})$ =__________。

4．设 A，B 满足 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$，且 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则 $P(A\cup B)$ =_________。

5．10 件产品中有 4 件次品，每次从中任取一件进行测试，直到 4 件次品均经测试取出为止，则第八次测试取到最后一件次品的概率为_______。

6．在 n 阶行列式 $\det(a_{ij})_{n\times n}$ 的展开式中任取一项，若此项不含元素 a_{11} 的概率为 $\frac{2008}{2009}$，则此行列式的阶数 n=__________。

7．假设一批产品中一、二、三等品各占 $60\%, 30\%, 10\%$，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为________。

8．袋中有 5 个乒乓球，其中 2 个新球，3 个旧球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，结果第二个人取到一个旧球，则第一个人取到一个新球的概率为_______。

9．随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{3}$ 的概率为_________。

10. 在 n 重伯努利试验中，若每次试验成功的概率为 p，则成功次数是奇数次的概率为________。

二．选择题

1．某工厂每天分 3 个班生产，事件 A_i 表示第 i 班超额完成生产任务(i=1,2,3)，则至少有两个班超额完成任务的事件可以表示为

（A）$A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$　　（B）$\overline{\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_3}}$

（C）$\overline{A_1+A_2+A_3}$　　（D）$\overline{\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}}$　　[ ]

2．设 A 和 B 为任意两个互不相容的事件，且 P(A)P(B)>0，则必有

（A）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　（B）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

（C）P(A$\overline{B}$)=P($\overline{B}$)　　（D）P(A+$\overline{B}$)=P($\overline{B}$)　　[ ]

3．设 A，B，C，D 为相互独立的四个事件，则下列四对事件有可能不独立的是

（A）$\overline{A-B}$ 与 C+D　　（B）AB 与 C－D

（C）$\overline{AD}$ 与 $\overline{B-D}$　　（D）$\overline{A+C}$ 与 BD　　[ ]

4．设 A，B，C 为任意三个事件，则下列事件中一定独立的是

（A）$(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$ 与 AB　　（B）$A-B$ 与 C

（C）$\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$　　（D）$\overline{AB}$ 与 B+C　　[ ]

5．设事件 A，B，C 满足 P(AB)=P(A) P(B)，0< P(B)，P(C)<1，则有

（A）P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)　　(B) $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=P(\overline{C}|\overline{C})$

（C）$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=P(\overline{C}|C)$　　（D）$P(A|B)=P(\overline{A}|\overline{B})$　　[ ]

6．下列命题一定正确的是

（A）若 P(A)=0，则 A 为不可能事件

（B）若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 互不相容

（C）若 A 与 B 互不相容，则 P(A)=1-P(B)

（D）若 $P(AB)\neq 0$, 则 $P(BC|A)=P(B|A)P(C|BA)$　　[ ]

7．设 A，B，C 为任意三个事件，则与 A 一定互不相容的事件为

（A）$\overline{A\cup B\cup C}$　　（B）$\overline{A}B\cup A\overline{C}$

（C）$\overline{ABC}$　　（D）$\overline{A(B\cup C)}$　　[ ]

8．设事件 A，B，C 满足 P(ABC)=P(A)P(B)P(C)，则有

（A）A，B 相互独立　　（B）AB 与 C 相互独立

（C）A，B，C 相互独立　　（D）以上结论均不正确　　[ ]

9．甲、乙、丙 3 人依次从装有 7 个白球，3 个红球的袋中随机地摸 1 个球，已知丙摸到了红球，则甲、乙摸到不同颜色球的概率为

（A）$\frac{7}{16}$　　（B）$\frac{7}{18}$　　（C）$\frac{7}{19}$　　（D）$\frac{7}{20}$　　[ ]

10．设一射手每次命中目标的概率为 p，现对同一目标进行若干次独立射击，直到命中目标 5 次为止，则射手共射击了 10 次的概率为

（A）$C_{10}^5 p^5(1-p)^5$　　（B）$C_9^4 p^5(1-p)^5$

（C）$C_{10}^4 p^4(1-p)^5$　　（D）$C_9^4 p^4(1-p)^5$　　[ ]

三．解答题

1．有 7 位乘客来到某 11 层大楼的一层乘楼梯上楼，每个乘客在任何一层（从 2 层到 11 层）离开是等可能的，试求下列事件的概率：

（1）某指定的一层有 2 位乘客离开；

（2）没有 2 位以及 2 位以上乘客在同一层离开；

（3）至少有 2 位乘客在同一层离开。

2．从 10 个整数 0，1，2，…，9 中任取 4 个不同的数字组成一个 4 位数，试求：

（1）4 位数为偶数的概率；

（2）4 位数为奇数的概率。

3．若 M 件产品中包含 m 件废品，今在其中任取两件，试求：

（1）已知取出的两件中有一件是废品的条件下，另一件也是废品的概率；

（2）已知取出的两件中有一件不是废品的条件下，另一件是废品的概率。

4．从 n 阶行列式的一般展开式中任取一项，试求该项包含主对角线元素的概率。

5．在三角形 ABC 中任取一点 P，证明：ΔABP 与 ΔABC 的面积之比大于 $\frac{n-1}{n}$ 的概率为 $\frac{1}{n^2}$。

6．在正方形 $D=\{(x,y)\,||x|\le 1,|y|\le 1\}$ 中任取一点，试求使得关于 u 的方程 $u^2+xu+y=0$ 有（1）两个实根；（2）两个正根的概率。

7．设有来自三个地区的各 10 名，15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后任取 2 份。

（1）求先取到的 1 份为女生表的概率 p；

（2）已知后取到的 1 份为男生表，求先取到的 1 份是女生表的概率 q。

8．同时掷 6 枚骰子，求：

（1）出现 3 个偶数点的概率；

（2）出现偶数点个数多于奇数点个数的概率。

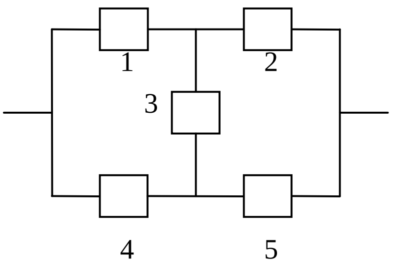

图 3-1-9

9．设有 5 个独立工作的相同元件 1，2，3，4，5，它们正常工作的概率均为 p，将其按图 3-1-9 方式连接成一个系统，试求系统正常工作的概率。

10．甲、乙两人轮流射击，先击中目标者为胜。设甲、乙击中目标的概率分别为 α,β。甲先射，求甲、乙分别为胜者的概率。

11．玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为：0.8，0.1 和 0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，由售货员随意取一箱，而顾客开箱随机地察看 4 只：若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求：

（1）顾客买此箱玻璃杯的概率 α；

（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率 β。

第一章 随机事件与概率模拟题答案

一．填空题

1. 0.6　　2. $\frac{3}{4}$　　3. 由 $P(AB\overline{C})=P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)$, 又 $A\supset C$,

$B\supset C$, 有 $C\subset AB$, 于是 $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(C)=0.5-P(C)$,

而 $P(C)=P(A)-P(A-C)=0.7-0.4=0.3$, 故 $P(AB\overline{C})=0.5-0.3=0.2$。

4. 由已知条件有 A 与 B 独立,于是 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}$， 于是

$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

5. $C_7^3/C_{10}^4=\frac{1}{6}$.

6. 由 $\frac{(n-1)!}{n!}=1-\frac{2008}{2009}$ 得 $n=2009$.

7. $\frac{2}{3}$．利用条件概率公式.

8. $\frac{1}{2}$．利用贝叶斯公式.

9. $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$．利用几何概型.

10. $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$．利用公式 $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}$.

二．选择题

1.（B） 因为“至少有两个班超额完成任务”的对立事件是“至多有一个班超额完成任务”，也就是“至少有两个班没有超额完成任务”。当然，事件也可等价地表示为 $A_1A_2+A_1A_3$

$+A_2A_3$。

2. （D） 3. （C） 4. （A） 5. （B） 6. （D） 7. （A） 8. （D） 9. （B）
10. （B）

三．解答题

1.（1） $C_7^2 9^5/10^7$　　（2） $P_{10}^7/10^7$　　（3） $1-P_{10}^7/10^7$

2.（1） $(P_9^3+C_4^1P_8^1P_8^2)/P_{10}^4=\frac{41}{90}$　　（2） $C_5^1P_8^1P_8^2/P_{10}^4=\frac{40}{90}$

3. 利用古典概型与条件概率公式可得：

（1） $\frac{C_m^2/C_M^2}{(C_m^1C_{M-m}^1+C_m^2)/C_M^2}=\frac{m-1}{2M-m-1}$　　（2） $\frac{C_m^1C_{M-m}^1/C_M^2}{(C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1)/C_M^2}=\frac{2m}{M+m-1}$

4. 因为 n 阶行列式的一般项可以表示为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，故当至少有一个 $k_i=i$ 时，该项即包含

了主对角线上的元素，令 A_i 表示事件“$k_i = i$”，则所求概率可用广义加法公式求得为：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}^{n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^n P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{n!}-\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\frac{(n-2)!}{n!}+\sum_{1\le i<j<k\le n}^{n}\frac{(n-3)!}{n!}+\cdots+(-1)^n\frac{(n-n)!}{n!}$$
$$=n\times\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-\cdots+(-1)^n\frac{(n-n)!}{n!}$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

5. 注意 ΔABP 与 ΔABC 的面积之比等于其 AB 边上的高之比，从而不难找出所求概率的事件所在的区域，最后由几何概型即得。

6.（1）$\frac{13}{24}$ （2）$\frac{1}{48}$

7.（1）$\frac{29}{90}$。利用全概率公式。

（2）$\frac{20}{61}$。利用条件概率公式与全概率公式。

8. （1）出现偶数点的个数服从伯努利概型，且 $n=6, p=\frac{1}{2}$，所求概率为 $C_6^3(\frac{1}{2})^3\times(1-\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$。

（2）$\sum_{i=4}^{6} C_6^i(\frac{1}{2})^i\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-i}=\frac{11}{32}$。

9. 令 A_3 表示“第 3 号元件正常工作”，然后将 A_3，$\overline{A_3}$ 作为一个划分而利用全概率公式易得所求概率为

$2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$。

10. 将第一轮的 3 个可能结果：$C_1=\{甲射中\}, C_2=\{甲未射中而乙射中\}$,

$C_3=\{甲乙均未射中\}$ 取作一个划分，A＝{甲胜}，B＝{乙胜}，则

$P(C_1)=\alpha$, $P(C_2)=(1-\alpha)\beta$, $P(C_3)=(1-\alpha)(1-\beta)$,
$P(A|C_1)=1$, $P(B|C_1)=0$, $P(A|C_2)=0$, $P(B|C_2)=1$,
$P(A|C_3)=P(A)$, $P(B|C_3)=P(B)$.

由全概率公式得 $P(A)=\alpha+(1-\alpha)(1-\beta)P(A)$, $P(B)=(1-\alpha)\beta+(1-\alpha)(1-\beta)P(B)$

故 $P(A)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta(1-\alpha)}$, $P(B)=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta(1-\alpha)}$.

11. $\alpha=\frac{448}{475}, \beta=\frac{95}{112}$.