高等数学一（II）期中考试答案与评分标准

一、 计算累次积分$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{e}^{-3y^2}\,\mathrm{d}y$。 (8 分)

解：$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{e}^{-3y^2}\,\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{-3y^2}\,\mathrm{d}x$（4 分，本题不强制要求画图，但如果画图正确但方法或交换错误可得 2 分）

$= \int_0^1 y\mathrm{e}^{-3y^2}\mathrm{d}y$（2 分）

$= -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3y^2}\Big|_0^1$(1 分)

$= \frac{1}{6}(1-\mathrm{e}^{-3})$ （1 分）

二、 计算三重积分$\iiint_\Omega (x^2+y^2+\mathrm{z}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$围成的区域(8 分)

解：方法一：本题鼓励球坐标方法：

设$x=\rho\sin\varphi\cos\theta\,, y=\rho\sin\varphi\sin\theta\,, z=\cos\varphi$, 则积分区域为 $0\le\rho\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\theta\le 2\pi$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+\mathrm{z}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2(\rho^2\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho$(4 分，既没有画图又没有写出代换理由可酌情扣 1 分)

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho$$

$= 2\pi\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{5}$(2 分)

$= \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{5}$(2 分)

方法二：本题亦可以使用直接极（柱）坐标计算法，但过程较复杂如下：

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+\mathrm{z}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$= \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)+z^2\,\mathrm{d}z$(3 分)

$= \iint_{D_{xy}}(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})(x^2+y^2)+\frac{1}{3}\left[(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (1 分)

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(r^2\sqrt{1-r^2}-r^3+\frac{1}{3}\left[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^3\right]\right)r\mathrm{d}r$$

$= 2\pi\times\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{4}{3}r^4+r\big((r^2-1)+1\big)\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{3}r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r$(2 分, 漏掉$r$或$r$范围错误得 1 分)

$$= 2\pi \times \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -\frac{4}{3}r^4 + r\sqrt{1-r^2} - \frac{2}{3}r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \times (-\frac{4}{15}r^5 - \frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}(1-r^2)^{\frac{5}{2}})\Big|_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= 2\pi \times \left[-\frac{\sqrt{2}}{30} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{60} - \frac{2}{15}\right)\right]$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{5}$$ (2 分, 原函数有部分计算错误或无法获得可得 1 分)

三、 求由曲面$z = 12(x^2 + y^2)$ 及平面$x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$所围成的立体的体积 （8 分）

解：易得本题投影区域为$D_{xy}: \{(x,y)|x \geq 0, 0 \leq y \leq 1 - x\}$,则体积表达式为

$$\iiint_\Omega dV$$

$$= \iint_{D_{xy}} 12(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (3 分，不强制画图，但积分区域表示错误画图正确可得 2 分)

$$= 12\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2 + y^2 \mathrm{d}y$$ (1 分)

$$= 12\int_0^1 (x^2 - x^3) + \frac{1}{3}(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\mathrm{d}x$$ (1 分)

$$= 12\int_0^1 \frac{1}{3} - x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3\mathrm{d}x$$ （1 分）

$$= 12 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$= 2$(2 分)

注：本题亦可以使用轮换对称性$\iint_{D_{xy}} 12(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 24\iint_{D_{xy}} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，按对应步骤给分即可。

四、 计算曲线积分$\int_L \ xy\,\mathrm{d}s$,其中L为以$O(0,0), A(1,0), B(1,1)$为顶点的的三角形的边界 （8 分）

解：L的三段曲线$OA: y \equiv 0, 0 \leq x \leq 1, y'(x) \equiv 0, \sqrt{1 + y'^2(x)} = 1$

$AB: x \equiv 1, 0 \leq y \leq 1, x'(y) \equiv 0, \sqrt{1 + x'^2(y)} = 1$

$OB: x = y, 0 \leq y \leq 1, x'(y) \equiv 1, \sqrt{1 + x'^2(y)} = \sqrt{2}$（此分析过程 2 分，未分析且漏乘弧长微元比不得此分）

故曲线积分可化为定积分：

$$\int_0^1 x \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1 \cdot y + \sqrt{2}y \cdot y\,\mathrm{d}y$$ (3 分，画图仍不强制，但仅画图者可得 2 分步骤分)

$$= \int_0^1 y + \sqrt{2}y^2\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{y^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}y^3\Big|_0^1$$ (1 分)

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$ (2 分)

五、 计算$\int_L (2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y$其中$L$为沿$y=\sin\frac{\pi x}{2}$从点$(0,0)$到点$(1,1)$的曲线段(8 分)

解：通过计算$\frac{\partial(2x\cos y - y^2\sin x)}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x = \frac{\partial(2y\cos x - x^2\sin y)}{\partial x}$，知此第二型曲线积分与路径无关，或被积函数存在原函数（3 分）.

方法一： 原函数可以通过简单凑微分获得：

$$
\begin{aligned}
&(2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y\\
&= (2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y) + (-y^2\sin x\,\mathrm{d}x + 2y\cos x\,\mathrm{d}y)\\
&= \mathrm{d}(x^2\cos y + y^2\cos x)
\end{aligned}
$$

故其中一个原函数为$u(x,y) = x^2\cos y + y^2\cos x$

（3 分,使用先积分再导再积分，或构造路径求原函数同样按 3 分分配）.

因此，原第二型曲线积分等于$u(1,1) - u(0,0) = (\cos 1 + \cos 1) - (0+0) = 2\cos 1$（2 分）

方法二：

本题在确定积分与路径无关后，亦可以构造点$(0,0)$经点$(1,0)$到点$(1,1)$的折线段来计算，剩余 5 分分配如下：

$$
\begin{aligned}
&\int_L (2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y\\
&= \int_{(0,0)\to(1,0)} (2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y\\
&\qquad + \int_{(1,0)\to(1,1)} (2x\cos y - y^2\sin x)\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y \text{（1 分）}\\
&= \int_0^1 (2x\cos 0 - 0^2\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y\cos 1 - 1^2\sin y)\mathrm{d}y \text{（2 分）}\\
&= x^2|_0^1 + y^2\cos 1 + \cos y|_0^1 \text{（1 分）}\\
&= 1 + \cos 1 + (\cos 1 - 1) = 2\cos 1 \text{（1 分）}
\end{aligned}
$$

六、 计算曲线积分$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，其中$C$为曲线$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从$z$轴正向往$z$轴负向看$C$的方向是顺时针方向. (8 分)

解：**方法一：** 曲线$C:=\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$在$xOy$平面上的投影曲线为$l: x^2+y^2=1$，方向为顺时针，设$l$围成的闭区域为$D: x^2+y^2\le 1$，由$x-y+z=2$知$z=2-x+y$，（2 分）

采用降维法，有：

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z\\
&= \oint_l \big((2-x+y)-y\big)\mathrm{d}x + \big(x-(2-x+y)\big)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}(2-x+y) \text{（1 分）}\\
&= \oint_l (2-x)\mathrm{d}x + (2x-y-2)\mathrm{d}y + (x-y)(-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)\\
&= \oint_l (2-2x+y)\mathrm{d}x + (3x-2y-2)\mathrm{d}y \text{（2 分）}\\
&= -\iint_D \frac{\partial(3x-2y-2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x-2x+y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{(格林公式，符号负)（2 分,符号错误得 1 分）}\\
&= -\iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\times\pi\times 1^2 = -2\pi \text{（1 分）}.
\end{aligned}
$$

方法二： 本题亦可以使用斯托克斯公式求解，步骤和评分标准如下：

设有向曲面S为$x-y+z=2$，$x^2+y^2\le 1$，方向为下侧，利用斯托克斯公式，有：

$$
I = \oint_C (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z
$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}$$ （3 分, 曲面S 定义不合理或方向错误需酌情扣分）

$$= \iint_S 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (2 分)

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (2 分, 注意方向为曲面下侧，方向错误本步得 1 分)

$$= -2\pi$$ （1 分）

方法三：本题还可以使用参数化的方法进行计算，注意到投影到Oxy平面顺时针方向单位圆的曲线可以用参数方程定义为：

$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = 2 - \sin t + \cos t, t: 2\pi \to 0,$ (2 分，方向错误扣 1 分)

此时$x'(t) = -\sin t, y'(t) = \cos t, z'(t) = -\cos t - \sin t.$ (1 分)，原曲线积分可化为

$$I = \oint_C (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (2 - \sin t + \cos t - \sin t)\cdot(-\sin t) + (\cos t - 2 + \sin t - \cos t)\cdot \cos t$$

$$+(\cos t - \sin t)\cdot(-\cos t - \sin t)\mathrm{d}t$$ (2 分)

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin t + 2\cos t - 3\sin^2 t + \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\sin^2 t + \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$ (对称性，1 分)

$$= 4\left[-3\times\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right]$$ (1 分) $= -2\pi$ (1 分)

七、 求第一型曲面积分$\iint_S x + y^2 + z^3\mathrm{d}S$, 其中$S$为球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (R > 0)$ （8 分）

解：方法一：本题如果可以使用对称性、轮换对称性和先代后算，将成为一道非常简单的题目，过程如下：

$$\iint_S x + y^2 + z^3\mathrm{d}S$$

$$= \iint_S y^2\mathrm{d}S$$ (2 分, 注明由对称性得到)

$$= \frac{1}{3}\iint_S x^2 + y^2 + z^2\mathrm{d}S$$ (2 分, 轮换对称性)

$$= \frac{1}{3}\iint_S R^2\mathrm{d}S$$ (2 分, 先代后算) $= \frac{R^2}{3}\times 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^4$ (2 分)

方法二：本题除x, z^3用对称性外（如果不用对称性，强行计算可以酌情给分），也可以用传统方法计算剩余积分。过程如下：

$$\iint_S x + y^2 + z^3\mathrm{d}S$$

$$= \iint_S y^2\mathrm{d}S$$ (2 分, 注明由对称性得到)

而后将球面分为上半与下半球面，方程分别为$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$与$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,对于两个半球面，都有$\sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，故

$$\iint_S x + y^2 + z^3 \mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\le R^2} \frac{y^2 R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}S$$ (2 分，化为二重积分是计算的阶段性步骤)

$$= 2R\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{r^2\sin^2\theta}{\sqrt{R^2-r^2}} r\mathrm{d}r$$ (1 分)

$$= 2R\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}r$$ (1 分)

$$= 2R\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3 t \,\mathrm{d}r \,(令 r = R\sin t)$$

$$= 2R \times \pi \times \frac{2}{3}R^3$$ (1 分)

$$= \frac{4}{3}\pi R^4$$ (1 分)

八、 求第二型曲面积分$\iint_S (y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为平面$\frac{x}{2}+y+\frac{z}{3}=1$在第一卦限的部分下侧。 （8 分）

解：方法一：注意到曲面$\frac{x}{2}+y+\frac{z}{3}=1$在第一卦限的$Oxy$投影区域对应为$D_{xy}: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1-\frac{x}{2}$,

再利用$z=3-\frac{3}{2}x-3y$,知$z'_x=-\frac{3}{2}, z'_y=-3$，因此，原曲面积分可化为

$$\iint_S (y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(y+3-\frac{3}{2}x-3y\right)(-z'_y) + \left(3-\frac{3}{2}x-3y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (4 分, 符号错误得 3 分)

$$= \iint_{D_{xy}} -12+6x+9y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{1-x/2} -12+6x+9y \,\mathrm{d}y$$ (1 分)

$$= \int_0^2 (-12+6x)+(6x-3x^2)+(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}x+\frac{9}{8}x^2)\mathrm{d}x$$ (1 分)

$$= \int_0^2 -\frac{15}{2}+\frac{15}{2}x-\frac{15}{8}x^2\mathrm{d}x$$ (1 分)

$$= -15+15-5=-5$$ (1 分)

注：二重积分也可用质心法算出如$\iint_{D_{xy}} -12+6x+9y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = S_{D_{xy}}\cdot\left(-12+6\cdot\frac{2}{3}+9\cdot\frac{1}{3}\right)=-5$

方法二：本题亦可以使用高斯公式来间接求解。若构造S的三个坐标平面上的投影面：

$S_1: x=0, y\ge 0, z\ge 0, y+\frac{z}{3}\le 1$, $S_2: y=0, x\ge 0, z\ge 0, \frac{x}{2}+\frac{z}{3}\le 1$, $S_3: z=0, x\ge 0, y\ge 0, \frac{x}{2}+y\le 1$,方向分别指定为前侧，右侧，上侧，注意到三个坐标面都分别只在一个方向上有投影面积，

则易得$\iint_{S_1}(y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_3}(y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$(1 分)

而$\iint_{S_2}(y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_2}z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xz}}z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$=\int_0^3 z\mathrm{d}z\int_0^{2-\frac{2}{3}z}\mathrm{d}x=\int_0^3 2z-\frac{2}{3}z^2\mathrm{d}z=9-6=3$(1 分)

因S,S_1,S_2,S_3共同构成闭合区域$\Omega=\left\{x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0,\frac{x}{2}+y+\frac{z}{3}=1\right\}$的边界曲面内侧，因此由高斯公式

$$\iint_S (y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S+S_1+S_2+S_3}(y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1+S_2+S_3}(y+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{(1 分)}$$

$$=-\iiint_\Omega 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-3$$(2 分，内侧曲面使得三重积分有负号，符号错误本步得 1 分)

$$=-\int_0^3 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3-z}{3}\cdot\frac{2(3-z)}{3}\right]\mathrm{d}z-3$$(2 分, 可用平面截割法，代入截割面积)

$$=-\int_0^3 2-\frac{4}{3}z+\frac{2}{9}z^2\mathrm{d}z-3$$

$$=-(6-6+2)-3$$

$$=-5$$(1 分)

九、 计算

$$\iint_S (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,,$$

其中S是曲面$z=2-(x^2+y^2),1\leq z\leq 2$的上侧。 （8 分）

解：方法一：本题主要鼓励高斯公式的方法，首先构造辅助曲面$S_1: x^2+y^2\leq 1, z=1$，方向取下侧。

S_1在Oxy方向投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$,且$z_x'\equiv z_y'\equiv 0$,

则$S+S_1$构成了封闭空间$\Omega: x^2+y^2\leq 2-z, 1\leq z\leq 2$的边界曲面外侧(3 分)

利用高斯公式，有：

$$\iint_S (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S+S_1}(y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1}(y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega -1+2-1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left[-\iint_{D_{xy}}(x^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

(高斯公式使用 1 分，S_1第二型曲面积分表示正确 2 分，共 3 分，若方向错误则扣掉 1 分)

$$=\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-S_{D_{xy}}\text{(1 分)}$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r-\pi=\pi\times\frac{1}{4}-\pi=-\frac{3}{4}\pi\text{(1 分)}$$

方法二：本题如果使用直接计算的方法，过程如下：

S方程$z=2-(x^2+y^2),1\leq z\leq 2$，此时投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$，且$z_x'=-2x, z_y'=-2y$(2 分)，则：

$$\iint_S (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(y^2-x)(2x)+\left(\left(2-(x^2+y^2)\right)^2+2y\right)(2y)+\left(x^2-(2-x^2-y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (2 分)

$$=\iint_{D_{xy}}2y^2x+2\left(2-(x^2+y^2)\right)^2y-2x^2+4y^2+x^2-2+x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}5y^2-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (由对称性，前两项可知积分为 0，2 分)

$$=5\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2S_{D_{xy}}$$ (1 分)

$$=5\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r-2\pi=5\times\pi\times\frac{1}{4}-2\pi=-\frac{3}{4}\pi$$ (1 分)

十、 求解微分方程初值问题$\begin{cases}xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2\\ y(\mathrm{e})=2\mathrm{e}\end{cases}$ （7 分）

解：方法一：本题注意到$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1}{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$为齐次函数(1 分)，

因此令$u=\frac{y}{x}, y'=u'x+u=\frac{1}{u}+u$ (2 分)

可得$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x=\frac{1}{u}$,即$u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$(1 分),

可得$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+C$(1 分),

此时$y=x\sqrt{2\ln|x|+C}$

代入初值条件$y(\mathrm{e})=2\mathrm{e}$，知$2\mathrm{e}=\mathrm{e}\sqrt{2+C}$，故$C=2$,原方程解为$y=x\sqrt{2\ln|x|+2}$(2 分)

方法二：本题亦可以使用积分因子化为全微分方程计算，过程如下：

$xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$等价于$(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(-xy)\mathrm{d}y=0$(1 分),

可以利用

$$\frac{\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}-\frac{\partial(-xy)}{\partial x}}{-xy}=-\frac{3}{x}$$

得到积分因子$\mu(x,y)=\frac{1}{x^3}$(2 分)

原方程化为$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}\right)\mathrm{d}x+\left(-\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y=0$，解得$\ln|x|-\frac{y^2}{2x^2}=C$(2 分)

代入初值条件$y(\mathrm{e})=2\mathrm{e}$，可得此处$C=-1$，故原方程解为$\frac{y^2}{2x^2}-\ln|x|=1$,即$y=x\sqrt{2\ln|x|+2}$(2 分)

(隐函数形式的解原则上也是可以给满分的，当然也可以化为显函数,因为初值条件取根号后正负是确定的)

十一、 求微分方程$y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$的通解。（7 分）

解：本方程为一阶线性方程，对应齐次方程$y'+y\cos x=0$通解$y=C\mathrm{e}^{-\sin x}$(2 分)
采用常数变易法，设$y=C(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$(1 分)
则$y'+y\cos x=C'(x)\mathrm{e}^{-\sin x}=\mathrm{e}^{-\sin x}$(1 分)
由$C'(x)=1$知$C(x)=x+C$(2 分)
因此原方程通解为$y=(x+C)\mathrm{e}^{-\sin x}$(1 分)

十二、 求微分方程$y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{x}$的通解。（7 分）

解：本方程为常系数二阶线性方程，对应齐次方程$y''+2y'-3y=0$特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=-3$(1 分)
通解为$y_0=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$. (2 分)
因为非齐次项中，e^{x}对应的 1 为原方程一重特征根，需假设特解形式为$y_1=Ax\mathrm{e}^{x}$(1 分)
代入原方程得$y_1''+2y_1'-3y_1=(2A\mathrm{e}^{x}+Ax\mathrm{e}^{x})+2(A\mathrm{e}^{x}+Ax\mathrm{e}^{x})-3Ax\mathrm{e}^{x}=4A\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}$(1 分)

可得$A=\frac{1}{4}$(1 分),故原方程的通解为$y_0+y_1=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{x}$(1 分)

十三、 求微分方程$y''=y'^2\mathrm{e}^{x}$的所有解。（7 分）
解：本微分方程不显含y，故可令$z=y'(x)$,得
$z'=z^2\mathrm{e}^{x}$(2 分)

经过变量分离，可得$\frac{\mathrm{d}z}{z^2}=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，(1 分)

因此$z\neq 0$时，得到通解$\frac{1}{z}=\mathrm{e}^{x}+C_1$,即$z=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+C_1}$(1 分)

因此$y'=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+C_1}$

$$y=\int\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+C_1}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{1}{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+C_1)}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})$$
$$=\frac{1}{C_1}\int\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+C_1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})$$(当$C_1\neq 0$ 时，化为有理拆分即得 1 分)
$$=\frac{1}{C_1}[\ln\mathrm{e}^{x}-\ln|\mathrm{e}^{x}+C_1|]+C_2$$
$$=\frac{1}{C_1}[x-\ln|\mathrm{e}^{x}+C_1|]+C_2$$

因此方程通解为$C_1y=x-\ln|\mathrm{e}^{x}+C_1|+C_2$(1 分,$y=\frac{1}{C_1}[x-\ln|\mathrm{e}^{x}+C_1|]+C_2$也对,两种$C_2$含义不同)

注意到$z=0$蕴含着奇解$y'\equiv 0$即$y\equiv C$,
而$C_1=0$蕴含着奇解$y'=\mathrm{e}^{-x}$即$y=-\mathrm{e}^{-x}+C$(找全两个奇解可得最后 1 分)