电动力学习题课（三）

November 7,2012

1 作业答疑

3.5 有两个导体组成的一个系统，导体1装在空心导体2中，使用系统的电容系数来表示系统组成的电容器中的电容和孤立导体（即导体2 的外表面）的电容。

解法一： 设导体1的电荷量为q，导体2外表面的电荷量为q'，其电势分别为ϕ_1,ϕ_2。由导体1和空心导体壳2的内表面组成电容器，导体壳2内表面的电荷量为$-q$，电势差为$\phi_1-\phi_2$，则电容器的电容系数为：

$$C=\frac{q}{\phi_1-\phi_2}$$

此外考虑孤立导体（导体2外表面）的电容，有

$$C'=\frac{q'}{\phi_2}$$

考虑系统的电容系数，有：

$$\begin{cases} q=C_{11}\phi_1+C_{12}\phi_2 \\ q'-q=C_{21}\phi_1+C_{22}\phi_2 \end{cases}$$

解得

$$\phi_1-\phi_2=\frac{(C_{22}+C_{21})q-(C_{12}+C_{11})(q'-q)}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}=\frac{(C_{11}+C_{22}+C_{12}+C_{21})q-(C_{12}+C_{11})q'}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}$$

由于内部电容的电势差并不受导体2的外表面电荷q'的影响，因而$C_{12}=-C_{11}$，带入上面的方程，得到：

$$\phi_1-\phi_2=\frac{(C_{22}+C_{21})q}{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}=\frac{q}{C_{11}}$$

此外，考虑q与电势的关系，易于发现此处有$(C_{11}+C_{12})\phi_2=0$，因此$C_{11}=-C_{12}=-C_{21}$，同时有：

$$q'=C_{21}\phi_1+C_{22}\phi_2+q=(C_{11}+C_{21})\phi_1+(C_{22}-C_{11})\phi_2=(C_{22}-C_{11})\phi_2$$

故而发现孤立导体的电容为$C_{22}-C_{11}$。也可写作$C_{22}+C_{12}$。

解法二： 由于电容系数只和具体的导体性质结构尺度有关，而与导体上具体带了多少电荷无关，因此电荷是可以任意选取的。不妨令两导体都不带电，这时两导体等势$\phi_1=\phi_2$，直接可得

$$q=C_{11}\phi_1(q=0)+C_{12}\phi_2(q=0)=C_{11}\phi_1(q=0)+C_{12}\phi_1(q=0)=0 \tag{1.1}$$

因此$C_{11}=-C_{12}$，这时令$q\neq 0$,易得$C=\frac{q}{\phi_1-\phi_2}=C_{11}$

2 Example 1

如Fig2所示(导体均接地)，利用格林互易定理求解:
a) 半径为a和b的两个同心导体球壳，在其之间放一点电荷q，求两个球壳上的感应电荷；
b) 半径为a的导体球外ℓ处放一点电荷q，求该球的感应电荷。

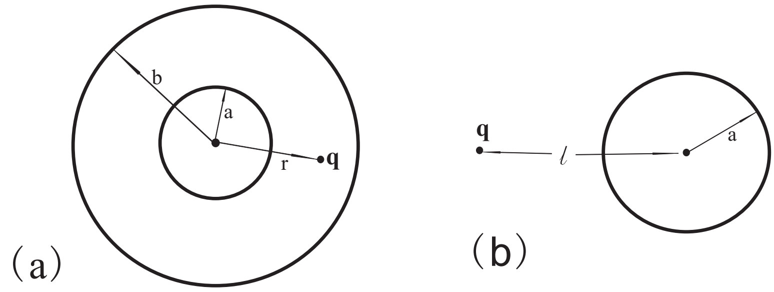

Figure 1: *例一示意图*

解：(a) **第一种情况：**电荷分布为q, Q_1, Q_2，其中Q_1, Q_2分别为内球壳和外球壳的感应电荷，电势分布为$\varphi, 0, 0$；
第二种情况：电荷密度分布为$0, +\sigma, -\frac{a^2}{b^2}\sigma$，电势分布为$\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}), \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}), 0$。
那么由格林互易定理

$$q\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}) + Q_1\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}) = 0 \tag{2.1}$$

可得

$$Q_1 = -q\frac{a}{r}\frac{b-r}{b-a} \tag{2.2}$$

类似可得

$$Q_2 = -q\frac{b}{r}\frac{r-a}{b-a} \tag{2.3}$$

容易验证

$$Q_1 + Q_2 = -q \tag{2.4}$$

(b) **第一种情况：**电荷分布为q, Q，其中Q为球壳的感应电荷，电势分布为$\varphi, 0$；
第二种情况：电荷密度分布为$0, +\sigma$，电势分布为$\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell}, \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$。
那么由格林互易定理

$$q\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 \ell} + Q\frac{\sigma a}{\epsilon_0} = 0 \tag{2.5}$$

可得

$$Q = -\frac{a}{\ell}q \tag{2.6}$$

Eq.(2.6)正是电像法中象电荷的电量，但是这并不意味着电像法中像电荷的电荷就是感应电荷。

讨论：
1）接地的物理意义；
2）格林互易定理的物理内涵。

3 Example 2

如Fig3所示，两个半径均为R的导体球相互接触形成一个孤立导体，求此体系的电容。

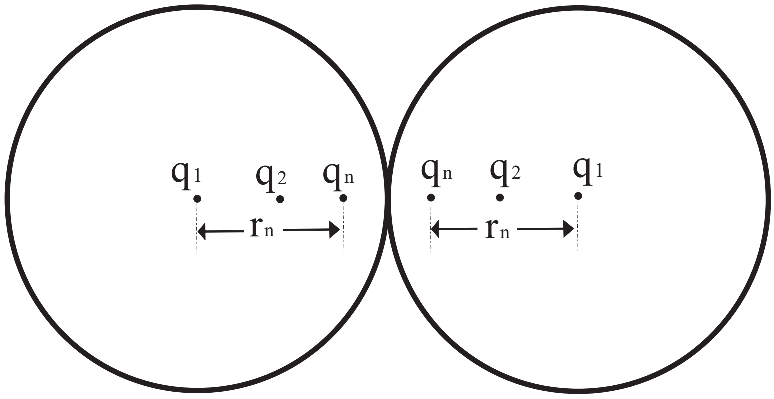

Figure 2: *例二示意图*

解： 假定系统的电势为U_0，那么计算出达到此电势所需充电的电量Q便可以求得电容C。

利用电像法，首先在两球的球心处置一对象电荷$q_1 = 4\pi\epsilon_0 RU_0$，它们使得各自球壳的电势为$U_0$，但是它们却会在相邻的球壳上产生附加电势，因此我们需要置第二对象电荷以消除q_1产生的附加电势

$$q_2 = -\frac{R}{2R}q_1 = -\frac{1}{2}q_1 \qquad r_2 = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \tag{3.1}$$

其中q_2表示象电荷的电量，r_2表示象电荷离各自球心的距离。

这对象电荷q_2可以抵消q_1产生的附加电势，但是它们本身也会带来附加电势，因此我们还需引入第三对象电荷$\{q_3, r_3\}$，依次类推，我们需要无穷多对象电荷才能使得体系为等势体，而这些电荷总和即为导体上的总电量。根据上述原理，显然有

$$q_n = -\frac{R}{2R - r_{n-1}}q_{n-1} \tag{3.2}$$

$$r_n = \frac{R^2}{2R - r_{n-1}} \tag{3.3}$$

进一步，Eq.(3.3)可化为

$$\frac{1}{b_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \tag{3.4}$$

其中

$$b_n = 1 - \frac{r_n}{R} \tag{3.5}$$

那么

$$r_n = (1 - \frac{1}{n})R \tag{3.6}$$

将Eq.(3.6)代入Eq.(3.2)可得

$$nq_n = -(n-1)q_{n-1} \tag{3.7}$$

那么

$$q_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}q_1 \tag{3.8}$$

因此总电量 [1]

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2q_n \qquad (3.9)\\
&= 2q_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\\
&= 2q_1 \ln 2 \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

故体系的电容为

$$
C = \frac{Q}{U_0} = 8\pi\epsilon_0 R \ln 2 \tag{3.11}
$$

讨论：
1) 若体系是由两个圆柱形导体接触组成的孤立系统，其电容应该如何求出？为什么看上去相似的两个问题求解的差别非常大？
2) 若两球不接触而是稍微分离，它们之间的作用力：J.A.Soules, *Am. J. Phys.* **58**, 1195 (1990).

4 Example 3

如Fig4所示，两个无穷大接地的导体平面相互平行，距离为a，中间有一条无穷长且线密度为λ的均匀带电导线，它与导体平面平行，且距下导体为b，试求两导体平面之间的电势分布。

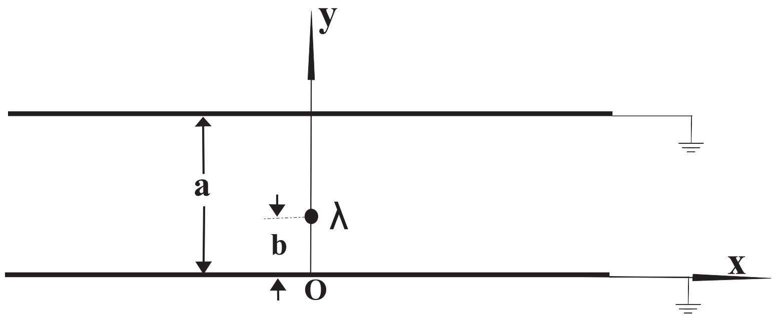

Figure 3: *例三示意图*

解： 首先建立如图所示的坐标系，那么电势φ满足

$$
\nabla^2\varphi = -\frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y-b) \tag{4.1}
$$

和边界条件

$$
\begin{aligned}
\varphi &= 0 \qquad y = 0, a \qquad (4.2)\\
\varphi &\to 0 \qquad x \to \pm\infty \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

考虑到电势φ与z无关，所以问题可简化为一个两维问题，先来考虑无源区

$$
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{4.4}
$$

[1]Eq.(3.10)利用到了

$$
\ln x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n
$$

用分离变量法

$$\varphi(x,y)=X(x)Y(y) \tag{4.5}$$

Eq.(4.5)代入Eq.(4.4)，可得

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=0 \tag{4.6}$$

考虑到边界条件，显然

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=k^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=-k^2 \tag{4.7}$$

进而

$$\varphi=\sum_{n=1}^{+\infty}C_ne^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{4.8}$$

为了确定C_n，必须考虑源。由Eq.(4.8)得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{a}C_ne^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y)[h(x)-h(-x)] \tag{4.9}$$

其中$h(x)$是阶跃函数。进一步计算可知

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{a}C_ne^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y)[\frac{n\pi}{a}-2\delta(x)] \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n\pi}{a})^2C_ne^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{4.11}$$

Eq.(4.10)和Eq.(4.11)代入Eq.(4.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n\pi}{a}C_ne^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y)\delta(x)=\frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y-b) \tag{4.12}$$

Eq.(4.12)两边同乘$\sin(\frac{m\pi}{a}y)$然后对x,y积分便可得 [2]

$$C_n=\frac{\lambda}{n\pi\epsilon_0}\sin(\frac{n\pi}{a}b) \tag{4.13}$$

故板间的电势分布为

$$\varphi=\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi b}{a})e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}\sin(\frac{n\pi}{a}y) \tag{4.14}$$

讨论：除了分离变量之外，能否用其他方法（保角变换法、电像法等）求解该问题？

[2]Eq.(4.13)利用到了

$$\int_0^a\sin(\frac{m\pi}{a}y)\sin(\frac{n\pi}{a}y)\mathrm{d}y=\frac{a}{2}\delta_{mn}$$

5 Example 4

一个半径为R的球壳上有固定的面电荷密度$\sigma_0(\theta)$，求球壳里和球壳外的电势分布。特别的，当$\sigma_0(\theta) = k\cos\theta$时，电势分布如何。

解： 分离变量后，内部区域$(r \le R)$可展开为

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{5.1}$$

没有B_l的分量，因为在球心处这些项发散。在外部区域$r \ge R$可展开为

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{5.2}$$

在无穷远处A_l的各项不趋于0，因此只有B_l各项。在$r = R$处连接边界条件

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) \tag{5.3}$$

可以通过两边同乘以$P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$对0到$\pi$积分得到。

$$B_l = A_l R^{2l+1} \tag{5.4}$$

由于电荷的存在，$r = R$处存在势的一阶导数不连续

$$\left(\frac{\partial V_{out}}{\partial r} - \frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{5.5}$$

因此有

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{5.6}$$

由5.4得

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{5.7}$$

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^{\pi} \sigma(\theta) P_l(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{5.8}$$

特别的，当电荷分布为

$$\sigma_0(\theta) = k\cos(\theta) = k P_1(\cos\theta) \tag{5.9}$$

其中k为一非0常数。A_l仅当$l = 1$时非0

$$A_1 = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} [P_1(\cos\theta)]^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{k}{3\epsilon_0} \tag{5.10}$$

因此球内部的势场为

$$V(r,\theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} r\cos\theta \tag{5.11}$$

球外部为

$$V(r,\theta) = \frac{kR^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta \tag{5.12}$$

注意到均强场$E_0\hat{z}$下金属球的感应电荷分布正对应$k = 3\epsilon_0 E_0$时的情形，这时内部势能$E_0 r\cos\theta = E_0 z$，因此内电场为$-E_0\hat{z}$。

讨论： 回顾作业题4.6，在半径为R_1和R_2的导体球壳上分别带Q和$-Q$的电荷，两球壳间填充$\epsilon_0 + \epsilon'\cos^2\theta$的介质，这时该如何求解电势分布？书后答案说电场$\boldsymbol{E}$与$\theta$无关，这是为什么？在非均匀的介质中为什么仍然可以用拉普拉斯方程的本征解展开?

需要注意以下几点，首先只允许垂直表面的电场存在，切向场在边界上为0

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0 \tag{5.13}$$

以及

$$E_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \tag{5.14}$$

其次，在非均匀介质中，由

$$\nabla\cdot(\epsilon\nabla\psi) = \rho \tag{5.15}$$

在无源区内有

$$\nabla\cdot(\epsilon(\theta)\nabla\psi) = 0 \tag{5.16}$$

展开可得，

$$\epsilon(\theta)\nabla^2\psi = -\nabla\epsilon(\theta)\cdot\nabla\psi = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\epsilon(\theta)\hat{\theta}\right)\cdot(E_\rho\hat{\rho}) = 0 \tag{5.17}$$

其中我们预设了条件，在球壳之间的区域内也只有径向的电场。 我们发现，这时电势即使在有角度依赖的非均匀的球对称区域内依然满足拉普拉斯方程，可以用拉普拉斯方程的本征函数展开，且不依赖于角度。因此电场强度$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi$ 也不依赖于角度。而$\boldsymbol{D} = \epsilon(\theta)\boldsymbol{E}$依赖于角度的原因仅仅来自于退极场$\epsilon'\cos^2\theta\boldsymbol{E}$。

思考： 我们只知道在球壳的边界上切向的电场是0，如何确定在球壳之间的切向电场也是0？

可以考虑这样一个问题，即球壳中间的的介质被等分成了ϵ不同的N块，而在每一块中，ϵ的值都是均匀不变的。在这种情况下，我们可以再每一块均匀的分块当中写出无源区的均匀体系拉普拉斯方程

$$\varepsilon_i\nabla^2\psi = 0 \tag{5.18}$$

这时，在每一个分块当中都可以用本征函数展开，这个问题就可以严格解出。将解带入导体等势的边界条件中，即可直接得出ψ与θ无关。最后，回到ϵ连续变化的问题，就相当于分块问题中$N\to\infty$后的结果。