几何与代数简介（II）
Introduction to Geometry and Algebra (II)

中山大学数学系
Department of Mathematics, Sun Yat-sen University
姜正禄
Zhenglu Jiang

October 23, 2017

1. 二次曲面
   - 柱面、锥面、旋转面
   - 椭球面、双曲面、抛物面

2. 空间曲线
   - 空间曲线的定义及其一般方程和参数方程
   - 空间曲线在坐标面上的投影

二次曲面的定义

- 三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.

二次曲面的定义

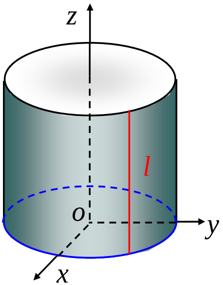
- 三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.
- 平面被称为一次曲面.

二次曲面的定义

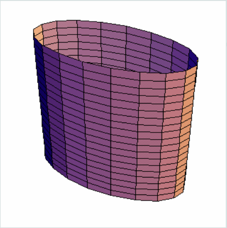
- 三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.
- 平面被称为一次曲面.
- 讨论二次曲面性状的截痕法.
  用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌.
  以下用截痕法讨论几种特殊的二次曲面.

柱面、锥面和旋转面是常见的三种空间曲面．它们有其严格的定义和特征．

圆柱面 $x^2+y^2=r^2$

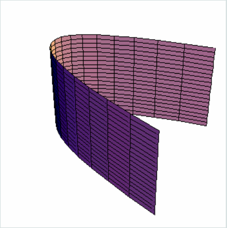


三种以二次曲线为准线的柱面：



椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面 $x^2=2py\,(p>0)$



双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

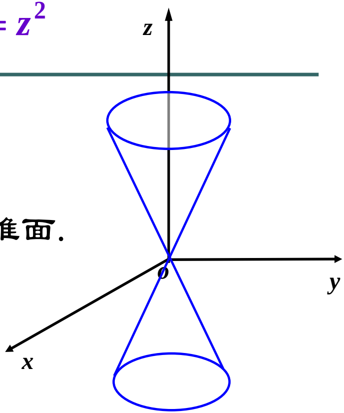
柱面

在空间中由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所产生的曲面称为**柱面**． 这个定方向称为柱面的**方向**，这条定曲线称为柱面的**准线**，这些平行直线称为柱面的**母线**．

椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

特殊情况： $a=b$,

$x^2+y^2=a^2z^2$ ——圆锥面.



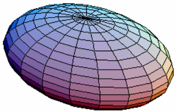
锥面

在空间中，过一个定点且与一条定曲线相交的一族直线所产生的曲面称为**锥面**. 这个定点称为锥面的**顶点**，这条定曲线称为锥面的**准线**，这些直线称为锥面的**母线**.

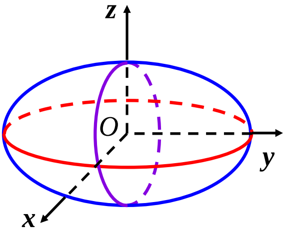
旋转面

在空间中，一条定曲线绕着一条定直线旋转一周所产生的曲面称为**旋转曲面**或**回转曲面**， 或简称为**旋转面**． 这条定直线称为旋转面的**轴**，这条定曲线称为旋转面的**母线**． 母线上的点绕着轴旋转一周所产生的圆周称为旋转面的**纬园**或**纬线**． 若母线是以轴为界的半平面与旋转面交成的一条曲线，则母线就是一条**经线**．

椭球面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



用坐标面$z=0$，$x=0$和$y=0$

去截割，分别得椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ y=0\end{cases}$$

椭球面

- 标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.

椭球面

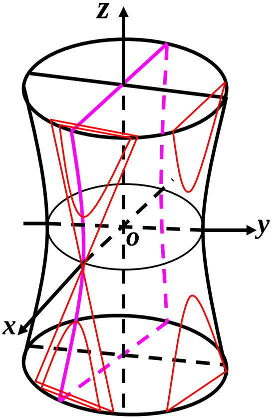
- 标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 用平行于三个坐标面的三束平行平面束去切割椭球面，截得的曲线均为椭圆.

椭球面

- 标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 用平行于三个坐标面的三束平行平面束去切割椭球面，截得的曲线均为椭圆.
- 椭球面有很好的对称性，它有一个对称中心、六个顶点、三条对称轴和三个对称面.

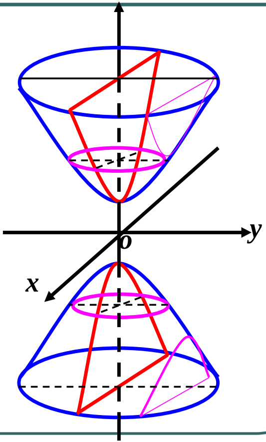
单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



双曲面

双曲面有两类：单叶双曲面和双叶双曲面.

- 单叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.

双曲面

双曲面有两类：单叶双曲面和双叶双曲面.

- 单叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 这个单叶双曲面与平行于xOy坐标面的平面的截割线是椭圆线， 而与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线，形如冷却塔或通风塔.

双曲面

双曲面有两类：单叶双曲面和双叶双曲面.

- 单叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 这个单叶双曲面与平行于xOy坐标面的平面的截割线是椭圆线， 而与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线，形如冷却塔或通风塔.
- 单叶双曲面有一个对称中心、 三条对称轴和三个对称面.

双曲面

双曲面有两类：单叶双曲面和双叶双曲面.

- 单叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 这个单叶双曲面与平行于xOy坐标面的平面的截割线是椭圆线， 而与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线，形如冷却塔或通风塔.
- 单叶双曲面有一个对称中心、 三条对称轴和三个对称面.
- 双叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.

双曲面

双曲面有两类：单叶双曲面和双叶双曲面.

- 单叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 这个单叶双曲面与平行于xOy坐标面的平面的截割线是椭圆线， 而与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线，形如冷却塔或通风塔.
- 单叶双曲面有一个对称中心、 三条对称轴和三个对称面.
- 双叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 双叶双曲面与平面$z=c$和$z=-c$分别相切于点$(0,0,c)$和点$(0,0,-c)$，这两个点称为双叶双曲面的顶点； 它与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>c$和$h<-c$； 它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线.

双曲面

双曲面有两类：单叶双曲面和双叶双曲面.

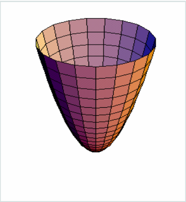
- 单叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 这个单叶双曲面与平行于xOy坐标面的平面的截割线是椭圆线， 而与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线，形如冷却塔或通风塔.
- 单叶双曲面有一个对称中心、 三条对称轴和三个对称面.
- 双叶双曲面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，其中$a$、$b$和$c$均为正数.
- 双叶双曲面与平面$z=c$和$z=-c$分别相切于点$(0,0,c)$和点$(0,0,-c)$，这两个点称为双叶双曲面的顶点； 它与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>c$和$h<-c$； 它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是双曲线.
- 双叶双曲面也有一个对称中心、 三条对称轴和三个对称面，还有两个顶点.

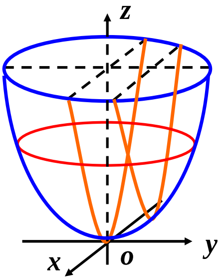
椭圆抛物面 $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ （p与q同号）

特殊情况： $p=q$，

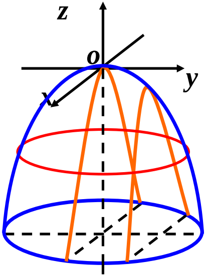
$x^2+y^2=2pz$

——旋转抛物面.



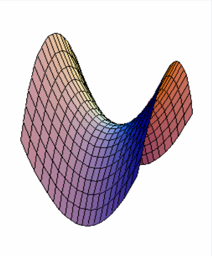


$p>0,q>0$

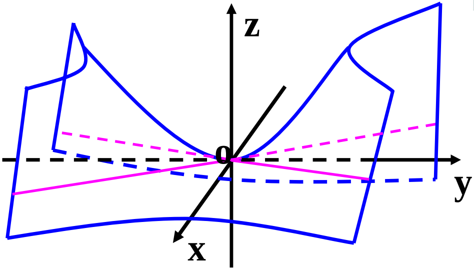


$p<0,q<0$

双曲抛物面(马鞍面)



$$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p\text{与}q\text{同号})$$



抛物面

抛物面也有两类：椭圆抛物面和双曲抛物面.

- 椭圆抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$为正数.

抛物面

抛物面也有两类：椭圆抛物面和双曲抛物面.

- 椭圆抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$为正数.
- 椭圆抛物面与xOy坐标面相切于坐标原点，与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>0$，而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线.

抛物面

抛物面也有两类：椭圆抛物面和双曲抛物面.

- 椭圆抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$为正数.
- 椭圆抛物面与xOy坐标面相切于坐标原点，与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>0$，而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线.
- 椭圆抛物面没有对称中心，但有一个顶点、一条对称轴和两个对称面.

抛物面

抛物面也有两类：椭圆抛物面和双曲抛物面.

- 椭圆抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$为正数.
- 椭圆抛物面与xOy坐标面相切于坐标原点，与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>0$，而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线.
- 椭圆抛物面没有对称中心，但有一个顶点、一条对称轴和两个对称面.
- 双曲抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$均为正数.

抛物面

抛物面也有两类：椭圆抛物面和双曲抛物面.

- 椭圆抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$为正数.
- 椭圆抛物面与xOy坐标面相切于坐标原点，与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>0$，而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线.
- 椭圆抛物面没有对称中心，但有一个顶点、一条对称轴和两个对称面.
- 双曲抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$均为正数.
- 双曲抛物面与xOy坐标面相交于两条过坐标原点的直线，与平面$z=h$的交线是双曲线，其中$h\neq 0$， 而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线. 形如马鞍，故也称马鞍曲面，简称马鞍面.

抛物面

抛物面也有两类：椭圆抛物面和双曲抛物面.

- 椭圆抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$为正数.
- 椭圆抛物面与xOy坐标面相切于坐标原点，与平面$z=h$的交线是一个椭圆，其中$h>0$，而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线.
- 椭圆抛物面没有对称中心，但有一个顶点、一条对称轴和两个对称面.
- 双曲抛物面的标准方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$，$a$和$b$均为正数.
- 双曲抛物面与xOy坐标面相交于两条过坐标原点的直线，与平面$z=h$的交线是双曲线，其中$h\neq 0$， 而它与平行于其它两个坐标面的平面的截割线都是抛物线. 形如马鞍，故也称马鞍曲面，简称马鞍面.
- 双曲抛物面既没有对称中心，也没有顶点，但有一条对称轴和两个对称面.

空间曲线的定义及其一般方程

- 空间两曲面的交线称为空间曲线.

空间曲线的定义及其一般方程

- 空间两曲面的交线称为空间曲线.
- 直线是特殊的空间曲线.

空间曲线的定义及其一般方程

- 空间两曲面的交线称为空间曲线.
- 直线是特殊的空间曲线.
- 一般方程：$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$的联立.
  曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

参数方程

- 参数方程：$x = x(t)$、$y = y(t)$和$z = z(t)$的联立.

参数方程

- 参数方程：$x = x(t)$、$y = y(t)$和$z = z(t)$的联立.
- 当给定$t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

参数方程

- 参数方程：$x = x(t)$、$y = y(t)$和$z = z(t)$的联立.
- 当给定$t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.
- 螺旋线的参数方程：$x = a\cos\theta$、$y = a\sin\theta$和$z = b\theta$.

空间曲线在坐标面上的投影

- 设空间曲线的一般方程为$F(x, y, z) = 0$和$G(x, y, z) = 0$的联立，消去变量z后得方程$H(x, y) = 0$.

空间曲线在坐标面上的投影

- 设空间曲线的一般方程为$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$的联立，消去变量z后得方程$H(x,y)=0$.
- $H(x,y)=0$即为曲线关于xOy坐标面的投影柱面方程． 曲线在xOy坐标面的投影曲线方程为$H(x,y)=0$和$z=0$的联立.

空间曲线在坐标面上的投影

- 设空间曲线的一般方程为$F(x, y, z) = 0$和$G(x, y, z) = 0$的联立，消去变量z后得方程$H(x, y) = 0$.
- $H(x, y) = 0$即为曲线关于xOy坐标面的投影柱面方程. 曲线在xOy坐标面的投影曲线方程为$H(x, y) = 0$和$z = 0$的联立.
- 投影柱面的特征：以此空间曲线为准线，垂直于所投影的坐标面.

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!