

## 第十八讲

上次课:

- 平面电磁波 
$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

复场表示只是为了计算方便（只要运算是线性的）；

物理的场是复场的实部；非线性运算是应先取实部再计算！

- 色散关系

$$k = n \frac{\omega}{c}, \quad n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \text{ 为折射率 (Refraction Index)}$$

- 阻抗

$$|E_0| = Z |H_0| \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ -- 阻抗, } c\vec{B}_0 = \hat{k} \times \vec{E}_0 \text{ -- 电磁场同相位!}$$

- 偏振

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0: \text{ 横波, 但可有不同偏振 (线、圆、椭圆)}$$

---

### § 8.3 金属的等效介电常数 - Drude 模型

前面两节我们研究了电磁波在最简单的电磁介质（线性、均匀、局域、各向同性、无色散，本构关系为  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ）中的传播行为。下面我们将开始研究导电介质中的电磁波特性。对任何一种新的电磁介质，在研究其电磁波传播特性之前，都要首先知道这种电磁介质的“本构关系”，不然，Maxwell 方程无法求解。事实上，这个世界之所以如此“色彩缤纷”，正是因为我们有各种具有不同的“本构关系”的电磁介质！本节中，我们将仔细探讨导电介质的本构关系 – 你们会发现导电介质与一般电介质非常的不同。

#### 1. 色散介质的本构关系

上次课我们学习了电磁波在真空以及均匀各向同性非色散的电磁介质中的行为，这两类介质的特点是  $\epsilon_r, \mu_r$  均大于 0，且不依赖于频率。从物理上讲，这种介质对电磁场的响应是“局域”以及“瞬时”的

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \mu^{-1} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (8.3.1)$$

亦即，此处、此时的电磁扰动（由  $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$  决定）只会引发此处、此时的电

磁相响应  $\vec{P}(\vec{r}, t), \vec{M}(\vec{r}, t)$  (进一步,  $\vec{D}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t)$ )。然而一般来讲, 材料中的电荷运动行为非常复杂, 因此最后本构关系也非常复杂, “**局域+瞬时**” 仅仅是一种理想情形, 通常只是材料的真实响应在**长波和低频下**的近似。在第 1 章中我们已经指出, 一般情况下材料的响应为 (最一般的线性响应的形式):

$$\begin{aligned} D(\vec{r}, t) &= \int \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \int \mu^{-1}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{B}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

这意味着在任何时刻  $t'$  任何地点  $\vec{r}'$  给体系一个扰动  $\mathbf{E}$ , 体系都有可能在时刻  $t$  (根据因果关系,  $t > t'$ ) 地点  $\vec{r}$  产生一个响应  $\mathbf{D}$ 。这当然使得我们求解 Maxwell 方程变得非常复杂。**注意, 响应函数  $\varepsilon$  只依赖于距离差  $\vec{r} - \vec{r}'$  和时间差  $t - t'$  是体系的空间和时间平移不变性的要求。**通常我们忽略 “空间非局域效应”, 即假设体系的响应在空间上为**局域**的。进一步, 如果我们只考虑频率确定为  $\omega$  的一支电磁波在此介质中运动, 设复场  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , 代入 (8.3.1) 式可得

$$D(\vec{r}, t) = \int \varepsilon(t - t') \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t'} dt' = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (8.3.3)$$

其中,

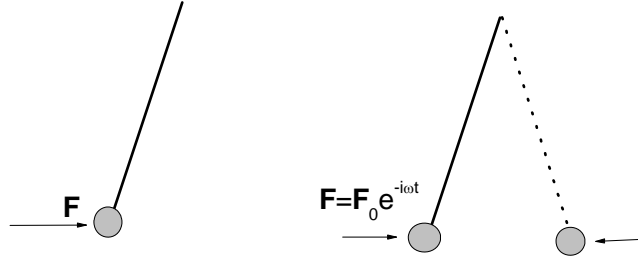
$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \int \varepsilon(t - t') e^{-i\omega(t - t')} dt' = \int \varepsilon(\tilde{t}) e^{i\omega\tilde{t}} d\tilde{t}} \quad (8.3.4)$$

是时域响应函数的 Fourier 变换后的频域形式。因此本构关系此时变成 (假设所有物理量均携带  $e^{-i\omega t}$  的时间变化因子)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) &= \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}) \end{aligned}} \quad (8.3.5)$$

因此, 无论再复杂的电磁介质, 当其中的电磁波为单频时, 其本构关系变成与常规电介质一样的 (当然是在线性响应的前提下)。只不过, 此种情形下  $\varepsilon$ ,  $\mu$  的数值依赖于频率值, 这种行为我们称为 “色散”,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  依赖于频率的电磁介质我们称为 “色散” 介质。

我们可以把这个情况类比于一个秋千。当我们对一个秋千在  $t$  时刻给它一个推动力, 它未必立即产生反应。但是, 当我们对秋千施加一个随时间谐变的力, 最终, 这个秋千一定会以这个频率跟随外力振动, 无论最初多么不情愿。



金属（更广义讲是导电介质）是一类电磁介质。静态时金属的本构关系就是欧姆定律  $\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$ 。当外电场随时间谐变时，即  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ，类似受迫振动，电流和电位移矢量  $\vec{j}, \vec{D}$  也带有时间因子  $e^{-i\omega t}$ ，即  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ， $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ 。此时，可定义频域的电导率  $\sigma(\omega)$  和介电函数  $\varepsilon(\omega)$

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})} \quad (8.3.6)$$

原则上讲， $\sigma(\omega), \varepsilon(\omega)$  的严格求解应当借助于量子力学。对良导体，通常可以把体系看作电子自由地在晶格正离子组成的背景中运动 – 此既是自由电子气模型，也就是高能物理中所言的等离子体模型。在常温下，我们可以用经典理论借助等离子体模型来求解金属的  $\sigma(\omega), \varepsilon(\omega)$ 。

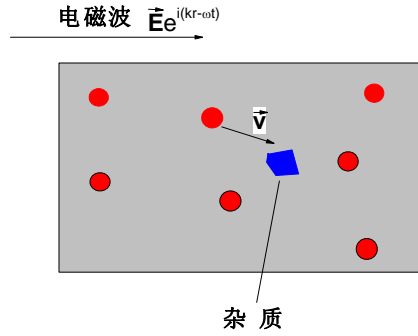
## 2. 金属的有效电导率

当有一束单频的电磁波施加在等离子体中时，空间将有电场  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$  存在，则电子将受到电场力  $e\vec{E}$ 。同时，电子运动时将受到其他粒子（晶格亦即声子，杂质等）的散射而丢失能量及动量。描述这种**散射力**的最简单的模型是“迟逾时间近似”，即**散射力**可写成

$$\vec{F}_{sca} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (8.3.7)$$

这个式子的物理意义是：电子平均  $\tau$  时间受到一次“异种粒子”的散射而丢失其所有动量。因此，电子的运动方程为

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (8.3.8)$$



在长波近似下，在电子来回运动的区间内可以近似认为电场不发生显著变化： $\vec{E}(\vec{r}) \sim \vec{E}_0$ 。显然电子将在单频外场力的作用下做“受迫振动”。将电子运动的试解  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$  代入 (8.3.8) 可得

$$\vec{v}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{im(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.9)$$

因此，电子的运动速度为

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{im(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.10)$$

与之前一样，这里速度的复数形式只是为计算方便（基础是方程是线性方程！），真正有物理意义的是场量的实部。根据电流密度的定义，我们发现

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n_e e \vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + i/\tau)} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (8.3.11)$$

式中  $n_e$  为单位体积内的电子数目。将 (8.3.11) 与 (8.3.6) 对比，可得电导率为

$$\sigma(\omega) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.12)$$

对此做如下讨论：

(1) 当  $\omega \rightarrow 0$  时，上式应当回到直流情况下金属的电导率  $\sigma_c$ 。将 (8.3.12) 取

$\omega \rightarrow 0$  的极限，有  $\sigma_c = \frac{n_e e^2}{m} \tau$ 。这就是迟逾时间近似下金属直流电导率的结果，故，人们常用金属的直流电导率的实验值来反过来确定参数  $\tau$ 。

(2) **复数形式电导率不能只取实部！其实部、虚部都有明确的物理意义！** 对场量（如  $\vec{E}, \vec{j}, \vec{v}$ ）我们才取其实部讨论，对电导率这个中间产物我们不可以这样做。事实上，Fourier 分析表明只有在复场表示下（即以  $e^{-i\omega t}$  为基）

才可以定义响应函数（如  $\varepsilon(\omega), \mu(\omega), \sigma(\omega)$  等，参考（8.3.3） - （8.3.5）的推导），对实场形式（ $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ ）无法得到线性正比关系，因此无法定义响应函数！将复电导率写成  $\sigma(\omega) = \text{Re}(\sigma(\omega)) + i \text{Im}(\sigma(\omega))$ ，可以证明实部对应着实际的能量耗散，但虚部并不对应能量耗散 - 这与直流电导率有着本质的不同！

（3）对一般良导体我们发现  $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ ，因此

（A）在 **GHz 以下的频段（微波）**， $1/\tau \gg \omega$ ，此时  $\sigma(\omega) \approx \sigma_c$ ，即有效电导率就是静态时的电导率。这里的原因是电子碰到一次散射的平均时间  $\tau$  远小于电场发生变化的时间间隔  $T \sim 1/\omega$ ，电场还没有发生显著变化电子已经与杂质碰撞了成千上万次。因此这种条件下电导率与直流时相比并没有什么明显不同。

（B）在**可见光频段**， $1/\tau \ll \omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ，此时  $\sigma(\omega) \approx i \frac{n_e e^2}{m\omega}$ ，亦即，复数电导率的实部（对应耗散部分）远小于虚部（非能量耗散部分）。这里的物理图像是，电子在高频电场的作用下来回运动，还没有碰到散射（需要费时  $\sim \tau$ ）就已经折返。因此，此时电子的行为与静态时极不相同，其主要行为是与电场相互交换能量（表现为电导率呈现虚部，电场不对电流做功），而不是与杂质碰撞耗散能量。

### 3. 金属有效介电函数

有了金属的有效电导率，我们可以进一步导出其**有效介电函数**。根据 Maxwell 方程组的第 4 条方程，在单频条件下，

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = [\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0] \vec{E} \quad (8.3.13)$$

一般在静电、静磁条件下，我们把金属中的电流作为独立于金属的“自由电流”来处理，也就是说，在 Maxwell 方程中明显地写出  $\vec{j}$  这一项，而把去除了“传导电流”的金属的介电响应认为和真空无异（ $\varepsilon = \varepsilon_0$ ），当然有时也会把金属中的“价带”电子（束缚电荷）的影响考虑进去，此时，可取  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 。

**然而在交变条件下，电流和电场一样随着时间协变。而且所谓自由电子也不再自由，必须在交变场的作用下做“折返跑”。某这个意义上讲，传导电流也**

变成了束缚在金属中响应电流。因此，通常此时将金属也看成一种电介质，把传导电流作为金属的束缚电流来考虑。对一个电介质，(8.3.13) 应当写成

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon(\omega)\vec{E} \quad (8.3.14)$$

两式比较可得金属的有效介电常数为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \Rightarrow \epsilon_r(\omega) = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega} \quad (8.3.15)$$

将 (8.3.11) 代入上式，即得金属的有效介电常数

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.16)$$

其中，

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}} \quad (8.3.17)$$

是个只与金属性质有关的常量，叫做等离子共振频率。(8.3.16) 即是著名的 **Drude** 模型，它非常好地描述了良导体从直流 ( $\omega=0$ ) 到紫外 ( $\omega > 10^{16} \text{ Hz}$ ) 的整个频谱的介电行为。 $\omega_p$  描述的是自由电子气在外场下的一个集体震荡共振行为 – 显然密度越大，质量越小，这个集体振动的频率就越大。良导体的  $\omega_p$  大都在紫外频区。

我们讨论两种典型情况下的金属的介电行为：

(A) GHz 及以下 -

$$\epsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\epsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\epsilon_0\omega}, \quad (8.3.18)$$

此时金属的  $\epsilon_r$  具有一个极大的正的虚部，以及一个负的实部（不随频率变化）。

(B) 光波段：

$$\epsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{对金、银等良导体}), \quad (8.3.19)$$

(C) 从光波段到 GHz,  $\epsilon_r(\omega)$  有一个由负实部主导到正的虚部主导的一个转变。

## § 8.4 电磁波在导电介质中的传播

上节中我们系统介绍了金属的有效介电函数  $\varepsilon_r(\omega)$ ，下面我们研究电磁波在导电介质中的传播。原则上，我们需要在金属中求解如下 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{cases} \quad (8.1.1)$$

针对一个特定频率  $\omega$ ，所有的场量均以  $e^{-i\omega t}$  形式随时间谐变，

$$(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)) = (\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}), \rho(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r})) e^{-i\omega t} \quad (8.4.1)$$

将金属中的“传导电流”吸收到电位移矢量中（参考（8.3.14）式），并利用连续性方程  $\nabla \cdot \vec{j}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0$ ，可以证明 Maxwell 方程针对时谐场的形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon(\omega) \vec{E}) = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon(\omega) \vec{E} \end{cases} \quad (8.4.2)$$

对（8.4.2）中第 2 式同时作用  $\nabla \times$ ，并利用  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ，可得

$$-\nabla^2 \vec{H} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu_0 \vec{H} \quad (8.4.3)$$

我们立刻发现这个针对单频的“时谐”Maxwell 方程和无色散介质中磁场满足的方程（8.1.5）完全一样！只不过这时“介电常数”依赖于频率，只针对目前的所设的频率正确。（8.4.3）的解是平面波， $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ （此时只需考虑空间变化部分，时间部分总是  $e^{-i\omega t}$ ），代入可解得电磁波传播的色散关系

$$k^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_r(\omega) \quad (8.4.4)$$

这与一般介质中的色散关系全一样，除了此处  $\varepsilon_r$  是频率的函数，因此只要知道了  $\varepsilon_r(\omega)$  就可以求解（8.4.4）得到电磁波传播的行为。注意，上面的讨论是一般成立的，对任何线形各向同性介质，只要体系在频域的本构关系  $\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$  已

知，我们就可以利用 (8.4.4) 式电磁波传播的色散关系。下面考虑几个特殊情形。

## 1. 良导体在 GHz 及以下频段

### A. 复波矢

良导体，如金银铜等，在 GHz 及以下频段的有效介电常数为

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \quad (8.4.5)$$

将 (8.4.5) 式代入 (8.4.4) 可得

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}} \frac{\omega}{c} = (1+i)\alpha \quad (8.4.6)$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0 \omega}{2}} \quad (8.4.7)$$

则

$$\vec{k} = (1+i)\alpha \cdot \vec{e} \quad (8.4.8)$$

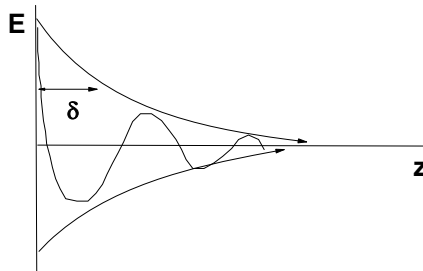
其中  $\vec{e}$  任意单位矢量（传播方向）。

注意很多教材上假设  $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}$ ，这其实并不完全正确。但事实上，这并不影响解的形式 – 当  $\text{Im}(\varepsilon_r) \gg \text{Re}(\varepsilon_r)$  时，解就是 (8.4.6) 式的形式，根本与  $\varepsilon_r$  的实部无关！（参看右上图）。

将 (8.4.8) 带入 (8.4.1)，则电磁波在金属中的电场（假设传播方向为  $z$  方向）为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \quad (8.4.9)$$

当然横波条件要求  $\vec{E}_0$  在  $xy$  平面。可见，此时平面波的振幅沿传播方向指数衰减。





振幅衰减到  $r=0$  处的  $\frac{1}{e}$  倍的距离  $\frac{1}{\alpha}$  称为透入深度（也叫趋肤深度），定义为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_c \mu \omega}} \quad (8.4.10)$$

因此电磁波不能渗入在导电介质的内部，而是很快在表面的一个厚度为  $\delta$  的薄层内衰减掉。与此相对应：金属上产生的交流电流一定也只是局域在表层的这个薄层内 – 这个结论我们曾在讨论准静态近似下的电流的趋肤效应时得到过。

*Tips: 这种衰减表示电磁波的能量有消耗。但对良导体， $\sigma_c \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ ，入射的电磁波几乎被100%反射回去。因此，良导体几乎不能吸收电磁波（在GHz），可以看作理想导体。*

习题

补充题：

- 1) Ag 的电子密度为  $n_e = 5.88 \times 10^{28} m^{-3}$ ，静态电导率为  $\sigma_c = 6.17 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ ，计算迟逾时间  $\tau$  和等离子共振频率  $\omega_p$ ；分别在  $f = 1GHz$ ， $\lambda = 1.5\mu m$ ， $\lambda = 550\mu m$  三个条件下计算其相对介电常数。
- 2) 在交变条件下，计算电场对金属中的电流的做功的瞬时值及时间平均值，证明复电导率  $\sigma(\omega)$  的虚部不对应体系的能量耗散，而只有  $\sigma(\omega)$  的实部才对应能量耗散。
- 3) 之前我们推导出准静近似成立的频率条件是  $\omega \ll \omega_c = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0}$  (Lect-16, (6.1.1))，并指出这个条件是个过于松的条件。在 Drude 模型的框架下探讨  $\omega_c$  的物理意义，并讨论为什么 (6.1.1) 式不严格，严格的条件又是什么？
- 4) 利用连续性方程  $\nabla \cdot \vec{j}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0$ ，证明时谐条件下电磁场满足 (8.4.2)。

### 思考、阅读文献，并整理成 Note

- 1) 课件上推导的是金属的“局域”的介电函数的行为。然而实际情况下，一束电磁波照过来，电磁场应当是  $\vec{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$ ，电场并非均匀场。为什么我们可以设电场为均匀场来计算  $\epsilon$ ？这样做有什么后果？另外，我们并没有考虑磁场带来的 Lorentz 力？你预期考虑了 Lorentz 力之后结论会有何不同？

- 2) 仔细讨论复电导率的实部和虚部的物理涵义。若  $\sigma(\omega)$  的虚部不对应能量的耗散, 那么它的作用到底是什么?
- 3) 查阅参考书, 计算在可见光照射下, 金属中电子的典型“活动范围”。由此理解为什么高频下“自由电子”其实不在自由, 而我们通常把自由电子作为金属的束缚电子来处理。
- 4) 利用网络查看一些原始文献及书籍, 弄清楚实验上如何测量各种金属的电导率(介电函数)以及确定 Drude 模型中的各个参数的。