

第四章 标量的衍射理论

4.1 从矢量电场到标量电场

4.2 基尔霍夫衍射理论

4.3 衍射在空间频域的描述

4.4 衍射的菲涅耳近似和夫琅禾费近似

4.5 菲涅耳衍射的计算

4.6 夫琅禾费衍射的计算

历史的进展

格里马弟

胡克



惠更斯



菲涅耳



基尔霍夫



索末菲



衍射定义为“不能用反射或折射来解释的光线对直线光路的任何偏离”

标量衍射理论

- 1) 衍射孔径比光波波长大得多；
- 2) 不要离得太靠近孔径的地方观测衍射场，那么就可将所处理问题中的光波当作标量来看待，即只考虑描述光波的电场或磁场的某一个横向分量标量复振幅的衍射行为。

4.1 从矢量电场到标量电场

4.1.1 波动方程

4.1.2 亥姆霍兹方程

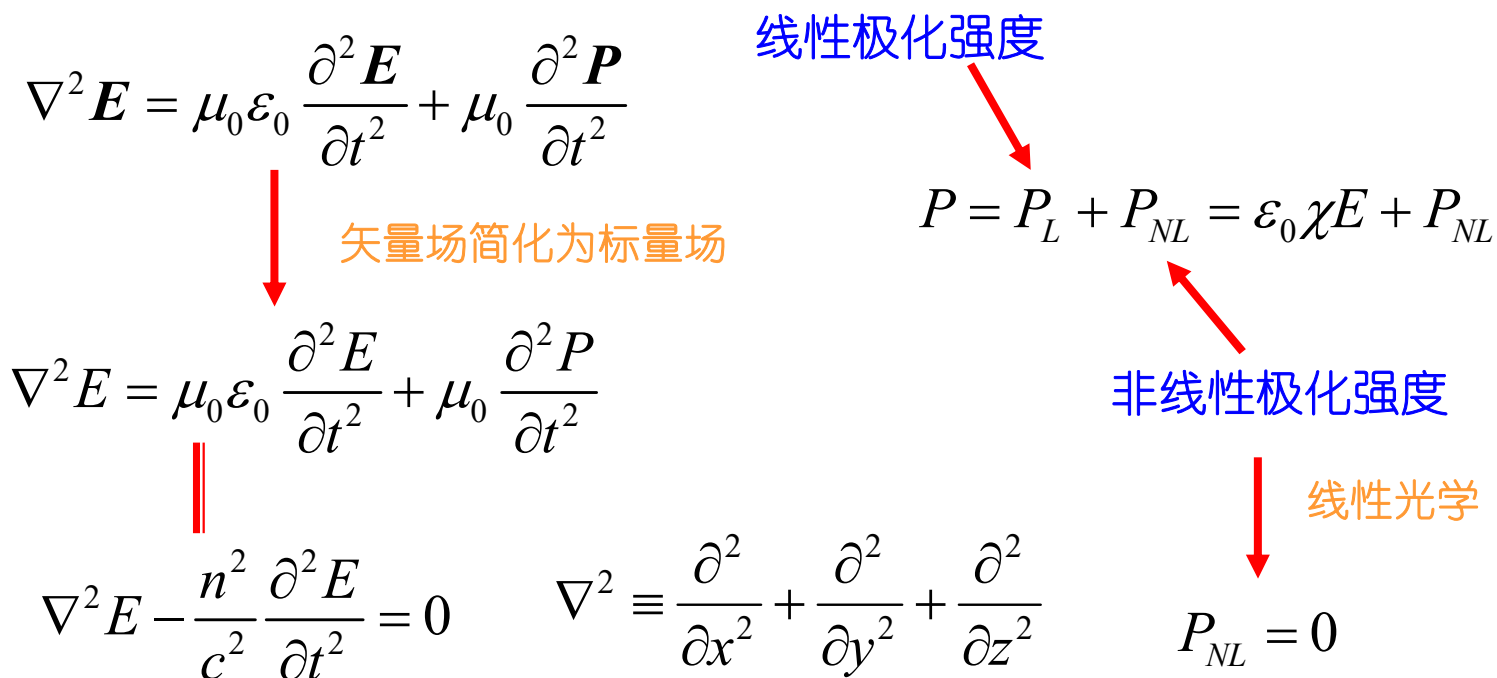
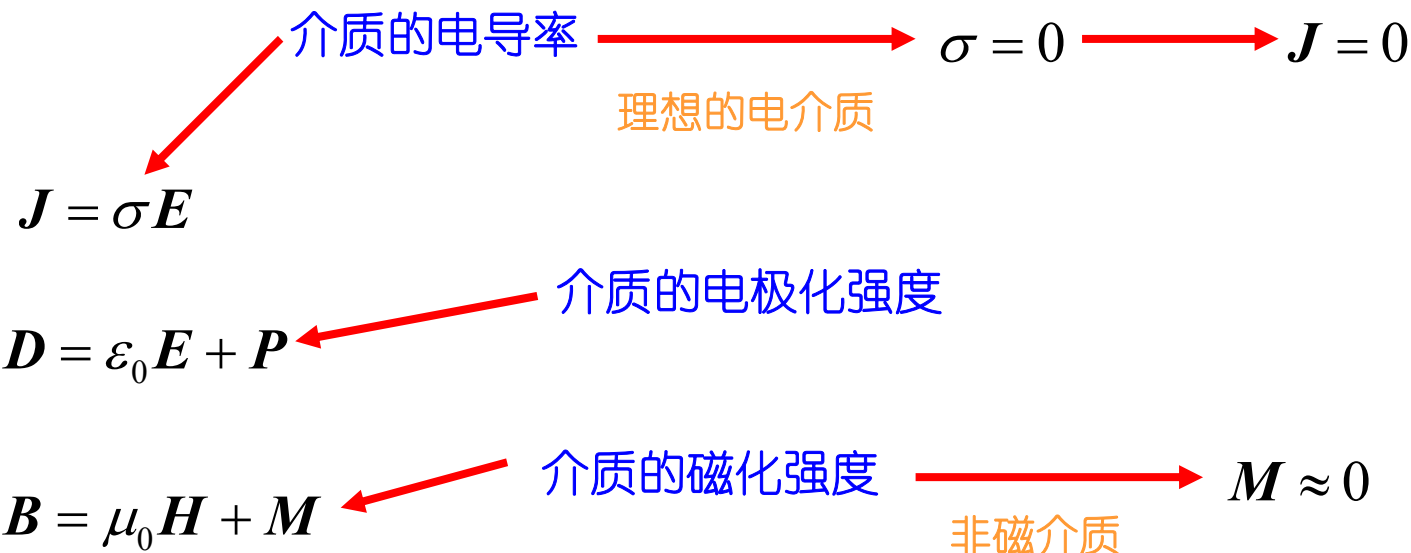
4.1.1 波动方程

麦克斯韦方程，在M.K.S.单位制中的形式为：

Diagram illustrating the Maxwell equations in M.K.S. units, with red arrows indicating the physical quantities represented by the symbols:

- 电场强度 (Electric field strength) points to \mathbf{E} in the first equation.
- 磁感应强度 (Magnetic induction) points to \mathbf{B} in the first equation.
- 磁场强度 (Magnetic field strength) points to \mathbf{H} in the second equation.
- 电位移 (Electric displacement) points to \mathbf{D} in the second equation.
- 电流密度 (Current density) points to \mathbf{J} in the second equation.
- 自由电荷密度 (Free charge density) points to ρ in the third equation.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
$$\rho = 0$$



4.1.2 亥姆霍兹方程

光波的复振幅

光场振动的大小

$$u(P; t) = U(P) e^{-i2\pi\nu t}$$

波动方程

$$\nabla^2 u - \frac{n}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2) U(P) = 0$$

$$k = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = nk_0$$

角波数

真空中的角波数

4.2 基尔霍夫衍射理论

4.2.1 惠更斯-菲涅耳原理

4.2.2 格林定理

4.2.3 基尔霍夫积分定理

4.2.4 基尔霍夫衍射公式

4.2.5 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式

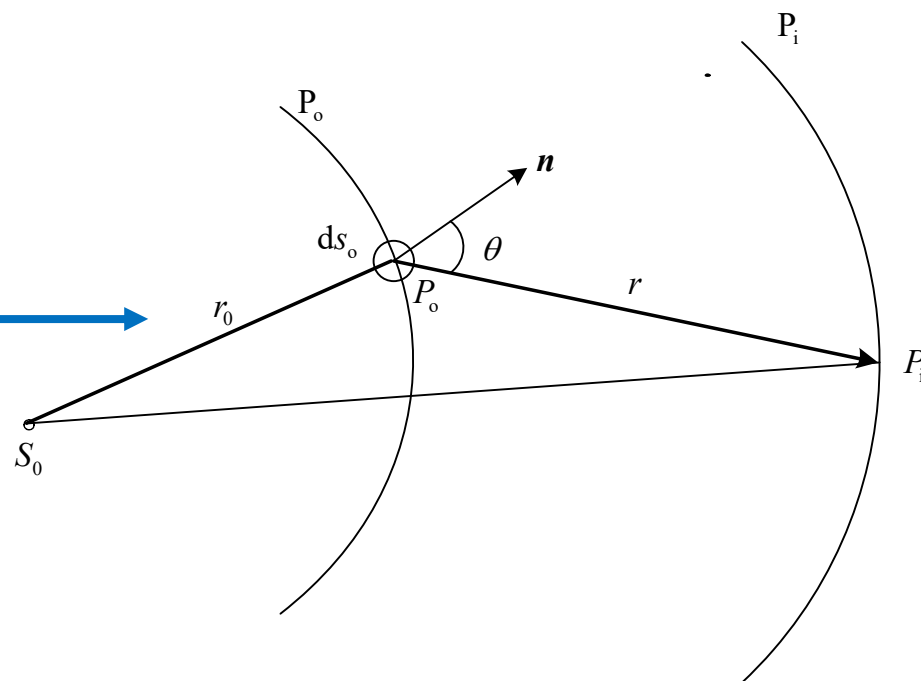
4.2.6 球面波的衍射理论

4.2.1 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯在**1678**年提出了子波的概念，即波动所到达的面上的每点都是次级子波源，每个子波源发出的次级球面波以一定波速向各个方向扩展，所有这些次级波的包络面形成新的波阵面。这个原理可以用来确定光波的波阵面及传播方向，但不能定理给出衍射光波或强度分布的情况。菲涅耳在**1818**年引入了干涉的概念，补充了惠更斯原理，他认为子波源应是相干的，这样空间某一点的光场就是所有子波干涉的结果。这就是惠更斯-菲涅耳原理，也就是经典的标量衍射理论，可进一步表述为：波前上任何一个未受阻档的面元，可看作是一个子波源，发射的频率与入射波的频率相同，在其后任意点的光振动，是所有子波叠加的结果。

P_o 面上任意一点 P_o 点复振幅

$$U_o(P_o) = a_o \frac{e^{ikr_o}}{r_o}$$



根据惠更斯-菲涅耳原理，面元 ds_o 对下一个面 P_i 上任一点 P_i 的复振幅贡献为：

$$dU_i(P_i) = CK(\theta)U_o(P_o)\frac{e^{ikr}}{r}ds_o = CK(\theta)a_o\frac{e^{ikr_o}}{r_o}\frac{e^{ikr}}{r}ds_o$$

比例系数，为常数

倾斜因子

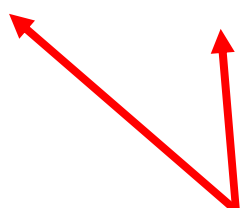
惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式：

$$U_i(P_i) = \iint_{P_o} dU_i(P_i) = C \iint_{P_o} K(\theta) a_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{ikr}}{r} ds_o$$

$$U_i(P_i) = C \iint_{P_o} K(\theta) U_o(P_o) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o$$

$$U_i(P_i) = C a_0 \iint_{P_o} K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o$$

4.2.2 格林公式

$$\iiint_V (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) dv = \oiint_{S_V} (G \nabla U - U \nabla G) ds$$


单值连续函数，其一阶、二阶偏导数也是单值连续的复函数

$$u(P;t) = U(P)e^{-i2\pi\nu t}$$



$$\nabla^2 U(P) + k^2 U(P) = 0$$



$$G\nabla^2 U - U\nabla^2 G = 0$$



$$\oiint_{S_V} \left(G \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = 0$$

$$g(P;t) = G(P)e^{-i2\pi\nu t}$$



$$\nabla^2 G(P) + k^2 G(P) = 0$$



简化的格林定理

4.2.3 基尔霍夫积分定理

$$G(P_o) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad S_V = S + S'$$

$$\oiint_S \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial n} \right) ds$$


$$+ \oiint_{S'} \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial n} \right) ds = 0$$

$$\frac{\partial G(P_o)}{\partial n} = \frac{\partial G(P_o)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r}$$

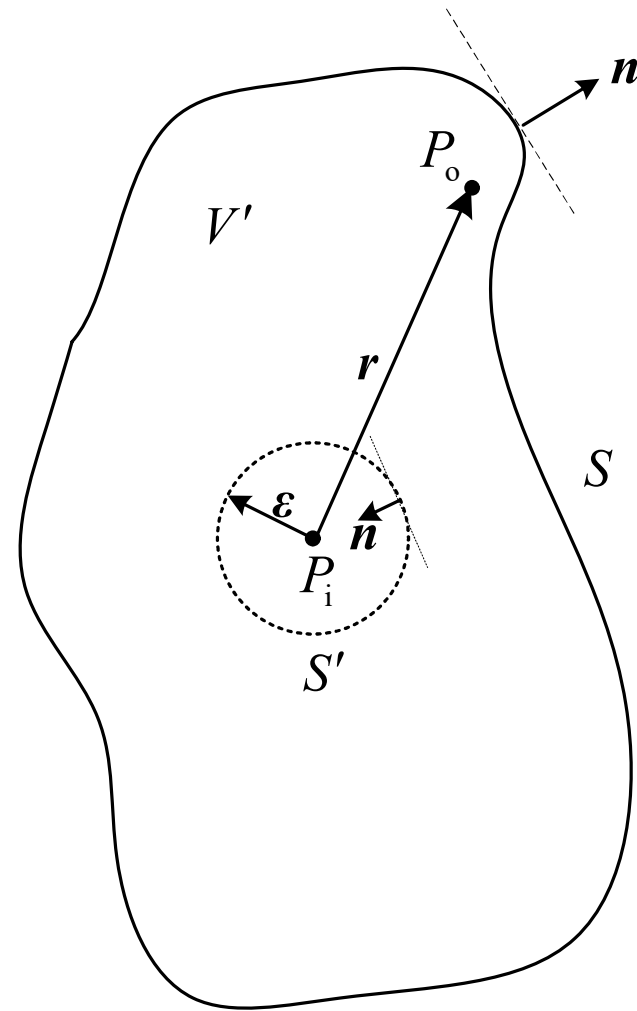

 S面上

$$G(P_o) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}$$

S'面内



$$\frac{\partial G(P_o)}{\partial n} = \frac{\partial G(P_o)}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = -\frac{\partial G(P_o)}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}$$



$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oiint_{S'} \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial n} \right) ds \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oiint_{\Omega} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{e^{ikr}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \right] \varepsilon^2 d\mathcal{G} \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left[\frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \right] 4\pi \varepsilon^2 \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \left[\varepsilon e^{ik\varepsilon} \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i)(1 - ik\varepsilon) \right] = -4\pi U(P_i).
\end{aligned}$$

$$U(P_i) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial n} \right) ds$$

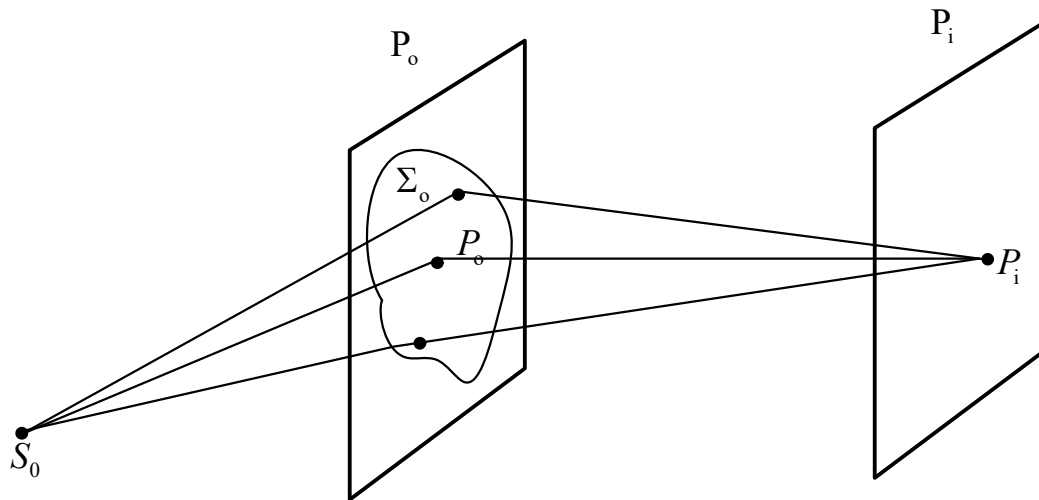
$$\downarrow \quad G(P_o) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$U(P_i) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] ds$$

基尔霍夫积分定理

4.2.4 基尔霍夫衍射公式

基尔霍夫积分定理只是原则上给出了求解任意点 \mathbf{P} 的复振幅的表达式，而实际衍射问题的严格求解是极为复杂的。但是，基尔霍夫证明了在许多情况下，通过某些边界条件的假设，基尔霍夫积分定理可以简化为一近似的形式。下面讨论通过无限大不透明平面屏上光孔的衍射问题，推导出基尔霍夫衍射公式。



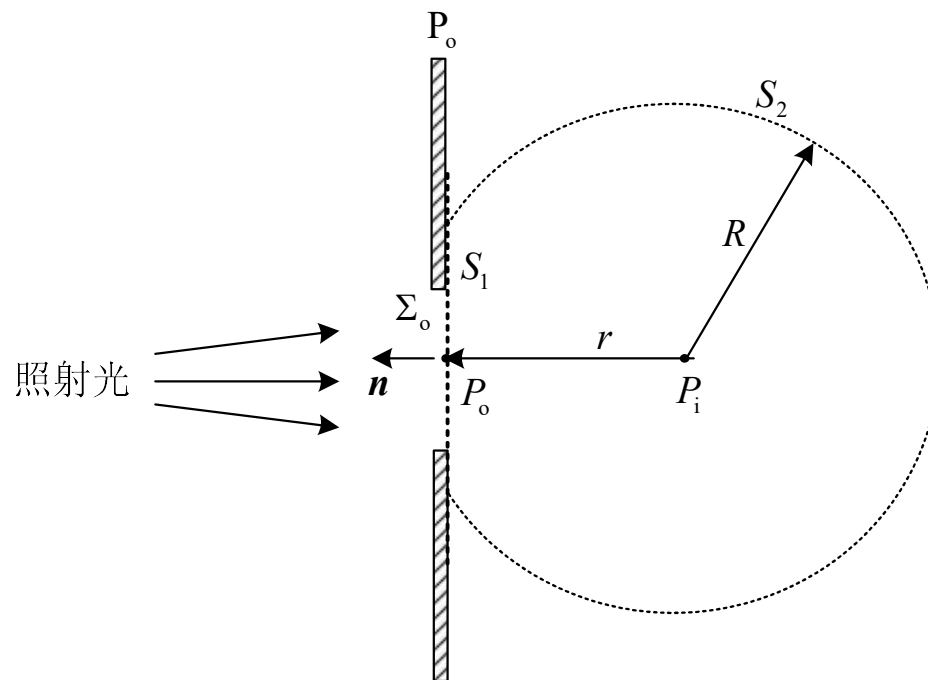
$$S = S_1 + S_2 \quad U(P_i) = \frac{1}{4\pi} \oiint_{S_1+S_2} \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial n} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial n} \right) ds$$

S_2 面上: $G = \frac{e^{ikR}}{R}$ 1

$$\frac{\partial G(P_o)}{\partial n} = \frac{\partial G(P_o)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \approx ik \frac{e^{ikR}}{R} \Big|_{R \text{ 很大时}} = ikG(P_o) \Big|_{R \text{ 很大时}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0$$

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} - ik \frac{e^{ikR}}{R} \right] \\ &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{ikR}}{R} = 0 \end{aligned}$$



$$U(P_i) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial \mathbf{n}} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

基尔霍夫边界条件

$$U(P_i) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_o} \left(G(P_o) \frac{\partial U(P_i)}{\partial \mathbf{n}} - U(P_i) \frac{\partial G(P_o)}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

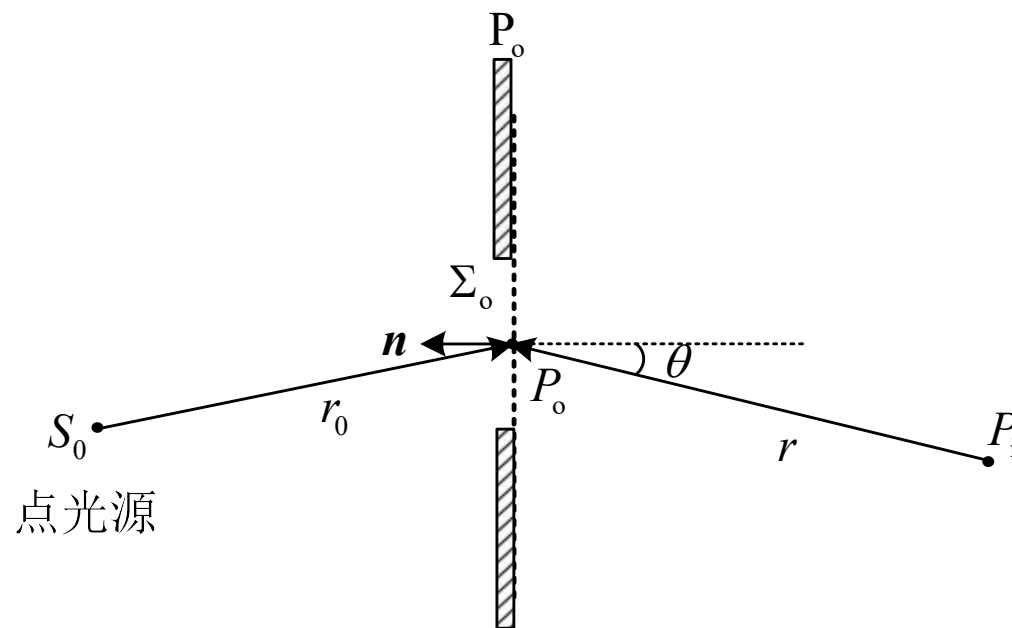
基尔霍夫衍射公式

采用基尔霍夫边界条件可以使光场计算得到简化，但要特别注意的是：这两个边界条件中没有一条是严格成立的。

4.2.5 菲涅尔-基尔霍夫衍射公式

$$G_o(P_o) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$U_o(P_o) = A_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$



$$\frac{\partial G_o(P_o)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial G_o(P_o)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \approx ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

$$\frac{\partial U_o(P_o)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial U_o(P_o)}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \mathbf{n}} = \left(ik - \frac{1}{r_0} \right) \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0) \approx ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0)$$

菲涅耳-基尔霍夫衍射公式：

$$U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} \frac{A_0 e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0)}{2} ds_0 = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U_o(P_o) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0)}{2} ds_0$$

$$U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U_o(P_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_0$$

$$C = \frac{1}{i\lambda}$$

$$K(\theta) = \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0)}{2}$$

$$U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U_o(P_o) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} ds_0$$

$$U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\infty} U_o(P_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_0$$

一般来说，不论以什么方式改变光波面，或是以一定形式限制波面范围或使振幅以一定的分布衰减，或是以一定的空间分布使相位延迟，或者两者兼而有之，都会引起衍射。所以，障碍屏的概念，除去不透明屏上有开孔这种情况外，还可以是包含具有一定复振幅的透明片。实际上，我们可以把能引起衍射的障碍物统称为衍射屏。

4.2.5 球面波的衍射理论

上一节介绍的惠更斯-菲涅耳原理、基尔霍夫衍射理论都是球面波的衍射理论。

$$h(P_i, P_o) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} K(\theta)$$

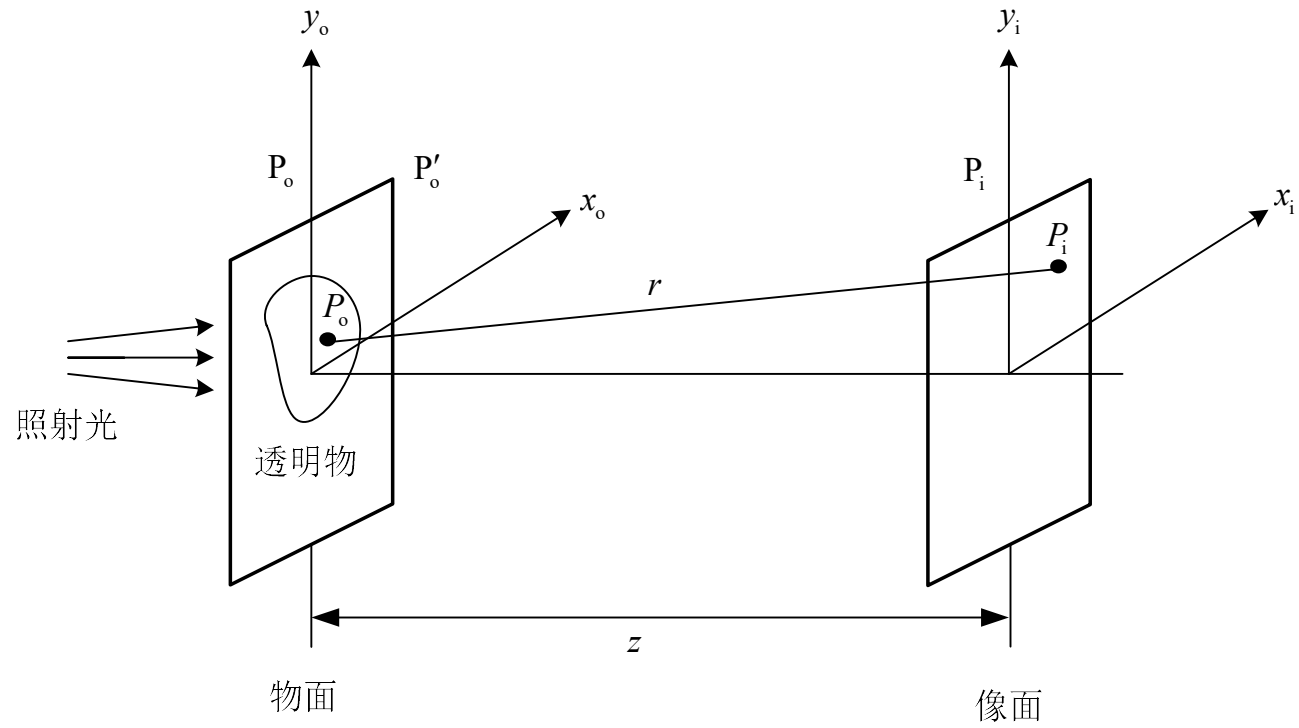
$$K(\theta) \approx 1 \quad U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\infty} U_o(P_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o = \iint_{\infty} U_o(P_o) h(P_i, P_o) ds_o$$

$$h(P_i, P_o) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = h(P_i, P_o)$$

$$= \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{\lambda} \frac{e^{ikr - \frac{\pi}{2}}}{r}$$

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{\infty} U_o(x_o, y_o) h(x_i, y_i; x_o, y_o) dx_o dy_o$$



$$r = \sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 + z^2}$$

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = h(P_i, P_o) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ik\sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 + z^2}}$$

$$h(P_i, P_o) = h(x_i - x_o, y_i - y_o)$$

$$U_i(P_i) = U_i(x_i, y_i) = \iint_{\infty} U_o(x_o, y_o) h(x_i - x_o, y_i - y_o) dx_o dy_o$$

$$U_i(x_i, y_i) = U_o(x_o, y_o) * h(x_i, y_i)$$

$$U_i(x, y) = U_o(x, y) * h(x, y)$$



基尔霍夫衍射公式的卷积形式

4.3 衍射在空间频域的描述

4.3.1 从空间域到空间频域

4.3.2 频谱的传播效应

4.4.3 角谱的传播

4.3.4 孔径对角谱的效应

4.3.5 传播现象作为一种线性空间滤波器

前面讨论的衍射问题的表述，都是在空间域中进行的，这种描述比较直观，对于平面衍射物可以用式(4.2.37)表示。若衍射屏是挖有开孔 Σ_0 的不透明屏，则式中 $U_0(\mathbf{P}_0)$ 既然可以理解为衍射屏前表面的复振幅，也可以理解衍射屏后表面的复振幅，反正积分范围仅仅是 Σ_0 。有时候也把衍射看作光振动由衍射后表面到观测面的自由传播。用式(4.2.37)来描述这一传播规律。此时公式中的 $U_0(\mathbf{P}_0)$ 则代表衍射屏后表面的复振幅，同时积分范围也由 Σ_0 扩展到整个平面。下面，我们以此为基础推导衍射问题的空间频域的描述。

4.3.1 从空间域到空间频域

$$U_o'(x_o, y_o, z_o) = U_o(x_o, y_o, z_o) \cdot t(x_o, y_o, z_o)$$

屏前表面的复振幅 屏前表面的复振幅 孔径函数

$$A_o' = A_o * T$$

$$U_i(x_i, y_i, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\infty} U_o'(x_o, y_o, z_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o$$

$$U_o'(x_o, y_o, z_o) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_o'(\xi, \eta, z_o) e^{i2\pi(\xi x_o + \eta y_o)} d\xi d\eta$$

$$U_o' \rightarrow U_i \quad \longleftrightarrow \quad A_o' \rightarrow A_i$$

空间域 空间频域

4.3.2 频谱的传播效应

$$(\nabla^2 + k^2)U_i(x_i, y_i, z) = (\nabla^2 + k^2) \left(\int \int_{-\infty}^{\infty} A_i(\xi, \eta, z) e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} d\xi d\eta \right) = 0$$

↓ 交换微分与积分的次序

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) \left[A_i(\xi, \eta, z) e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} \right] d\xi d\eta = 0$$

↓

$$(\nabla^2 + k^2) \left[A_i(\xi, \eta, z) e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} \right] = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} A_i(\xi, \eta, z) = \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} A_i(\xi, \eta, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_i(\xi, \eta, z) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} = (i2\pi\xi)^2 e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} = (i2\pi\eta)^2 e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} A_i(\xi, \eta, z) + k^2 [1 - (\lambda\xi)^2 - (\lambda\eta)^2] A_i(\xi, \eta, z) = 0$$

二阶线性非齐次常微分方程，可采用特征方程法求解

$$\pm ik\sqrt{1 - (\lambda\xi)^2 - (\lambda\eta)^2} \quad \leftarrow \text{特征根，+号为前进波，-号为后退波}$$

$$A_i(\xi, \eta, z) = C e^{ikz\sqrt{1 - (\lambda\xi)^2 - (\lambda\eta)^2}} \quad \leftarrow \text{一个基本解}$$

积分常数，由边界条件决定 $z = 0$

$$A_o'(\xi_o, \eta_o, 0) = C$$

$$A_i(\xi, \eta, z) = A_o'(\xi, \eta, 0) e^{ikz\sqrt{1 - (\lambda\xi)^2 - (\lambda\eta)^2}}$$

频谱传播的规律

$$U_i(x_i, y_i, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A_o'(\xi, \eta, 0) e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} d\xi d\eta$$

$$A_o'(\xi, \eta, 0) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_o'(x_o, y_o, 0) e^{-i2\pi(\xi x_o + \eta y_o)} dx_o dy_o$$

$$U_i(x_i, y_i, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_o^t(x_o, y_o, 0) dx_o dy_o \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi_i)^2-(\lambda\eta_i)^2}} e^{i2\pi[\xi(x_i-x_o) + \eta(y_i-y_o)]} d\xi d\eta$$

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = F^{-1} \{ e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}} \} = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}} e^{i2\pi[\xi(x_i-x_o) + \eta(y_i-y_o)]} d\xi d\eta$$

傍轴近似

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{e^{ik\sqrt{z^2 + (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2}}}{i\lambda\sqrt{z^2 + (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2}}$$

$$U_i(x_i, y_i, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_o'(x_o, y_o, 0) h(x_i - x_o, y_i - y_o) dx_o dy_o$$

基尔霍夫衍射理论与空间频域的衍射理论是完全统一的，它们都证明了光传播过程可以看作线性不变换系统。基尔霍夫衍射理论是在空间域讨论光的传播，是把孔径平面光场看作点源的集合，观察平面上的光场分布等于它们所发出的带有不同权重因子的球面子波的相干叠加。球面子波在观察平面上的复振幅分布就是系统的脉冲响应。角谱衍射理论是在频率域讨论光的传播，是把孔径平面的光场分布看成是许多不同方向传播的平面波分量的线性组合。观察面上的光场分布仍然是这些平面波分量的相干叠加，但每个平面波分量都有相移。相移的大小决定于系统传递函数，它是系统脉冲响应的傅里叶变换。两种衍射的一致性，其物理本质在于它们都源于标量的波动方程。

4.3.3 角谱的传播

孔径平面和观察平面上的光场分布都可以分别看成许多不同方向传播的单色平面波分量的线性组合

$$e^{i2\pi(\xi x + \eta y)} \quad \longleftarrow \quad \cos \alpha = \lambda \xi, \cos \beta = \lambda \eta$$

应用平面波的角谱理论

$$A_i \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, z \right) = A_o' \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, 0 \right) e^{ikz \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}}$$

傅里叶逆变换

$$U_i(x_i, y_i, z)$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} A_o' \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda} \right) e^{ikz \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}} e^{i2\pi \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda} x_i + \frac{\cos \beta}{\lambda} y_i \right)} d \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) d \left(\frac{\cos \beta}{\lambda} \right)$$

前进波

后退波

$$\pm ik\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

特征根

$$A'\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}; z\right) = Ce^{ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}$$

$z=0 \rightarrow A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$

$$C = A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

$$A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}, z\right) = A_o'\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}, 0\right) e^{ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}$$

傅里叶逆变换

$$U_i(x_i, y_i, z)$$

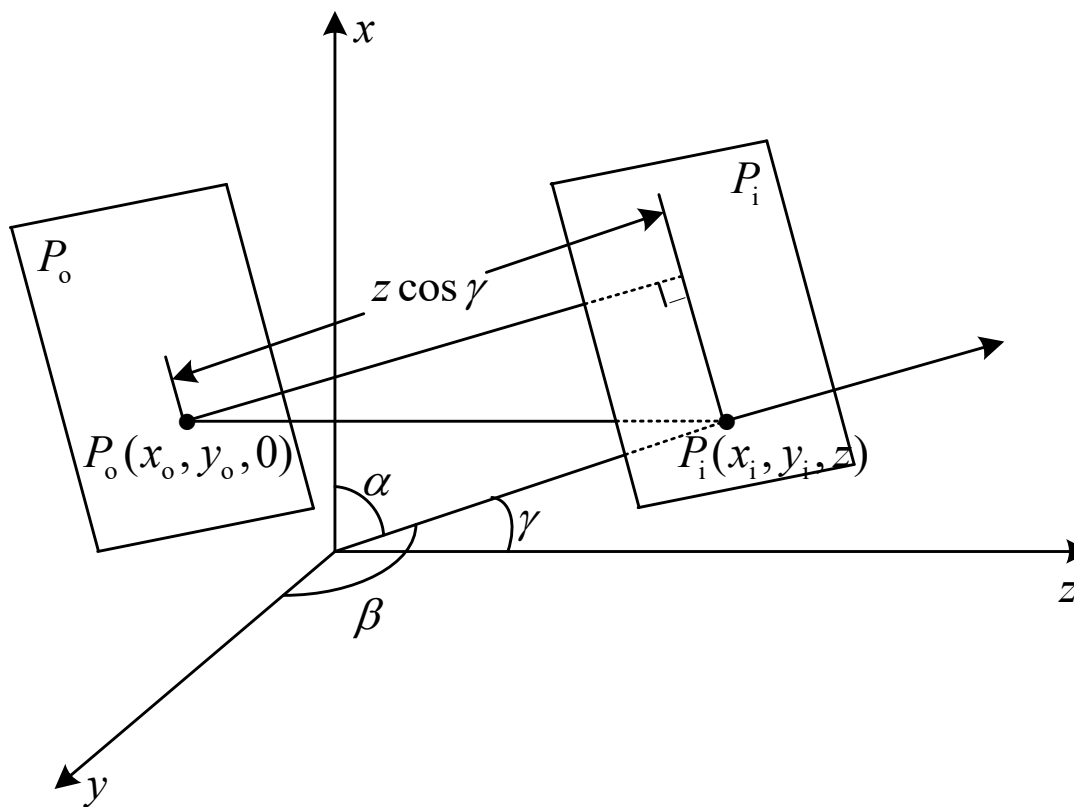
$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} A_o'\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}\right) e^{ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}} e^{i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x_i + \frac{\cos\beta}{\lambda}y_i\right)} d\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta < 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$$

倏逝波(evanescent wave)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$$



4.3.4 孔径角谱的效应

$$t(x_o, y_o) = \begin{cases} 1 & \text{在 } \Sigma_o \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$U'_o(x_o, y_o) = t(x_o, y_o) \cdot U_o(x_o, y_o)$$

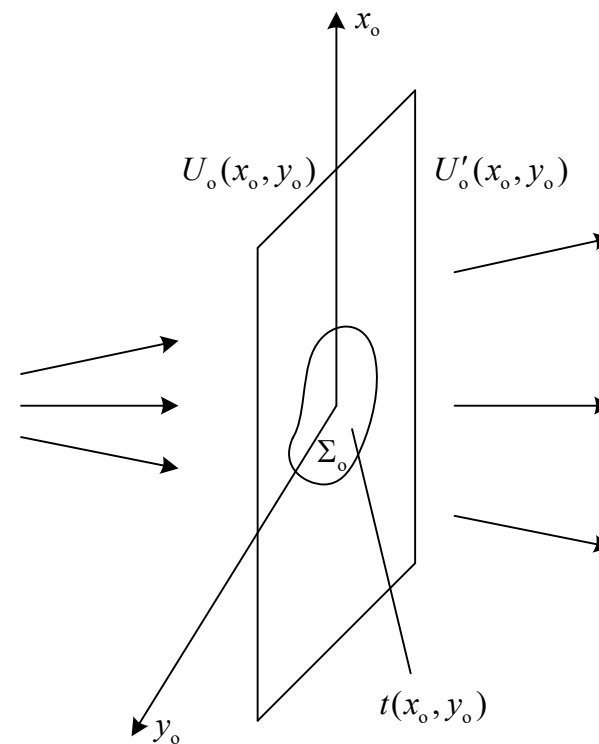


$$A'_o(\xi, \eta) = A_o(\xi, \eta) * T(\xi, \eta)$$

$$A_o(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o) e^{-i2\pi(\xi x_o + \eta y_o)} dx_o dy_o$$

$$T(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{-i2\pi(\xi x_o + \eta y_o)} dx_o dy_o$$

$$A'_o\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = A_o\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) * T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$$



$$U_o(x_o, y_o) = 1$$

$$A_o(\xi, \eta) = F\{U_o(x_o, y_o)\} = F\{1\} = \delta(\xi, \eta)$$


所以照明光波的频谱或角谱只有一个，它代表沿衍射屏法线方向传播的平面波。当此光波通过衍射屏后，

$$A'_o(\xi, \eta) = A_o(\xi, \eta) * T(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta) * T(\xi, \eta) = T(\xi, \eta)$$

$$A'_o\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) * T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$$

例4.3.1 求矩形孔的透射光场的角谱。

解：矩形孔的透过率函数可以表示为

$$t(x_o, y_o) = \text{rect}\left(\frac{x_o}{a}, \frac{y_o}{b}\right)$$

$$T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = F\{t(x_o, y_o)\} = ab \text{sinc}\left(a \frac{\cos \alpha}{\lambda}, b \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$$

$$A_o^t\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = ab \text{sinc}\left(a \frac{\cos \alpha}{\lambda}, b \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$$

当用一定大小的孔径限制入射光场时，其效果是使入射光场的频谱展宽。孔径越小，频谱展宽越显著，包含的高频成分就愈多。因此，从空间域来看，孔径的作用是限制了入射波面的大小范围；从频域看来，则是展宽了入射光场的角谱。

4.3.5 传播现象用为一种线性空间滤波器

由第3章我们知道，传递函数理论只能适用于空间不变系统。反之，如果一个系统的变换作用具有传递函数，那么这个系统必是空间不变系统。

如果我们把衍射的传播过程视为一种系统的变换，看能否求出这个系统的传递函数，如果可以，就是说明这样的过程是空间不变变换的。由式(4.3.13)可得：

$$e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}} = \frac{A_i(\xi,\eta)}{A_o'(\xi,\eta)}$$

与式(3.2.54)相比，就可得到光波传播过程的传递函数为：

$$H(\xi,\eta) = \frac{A_i(\xi,\eta)}{A_o'(\xi,\eta)} = e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}}$$

能求出传递函数就说明了与自由传播等效的系统是一个线性空不变系统。

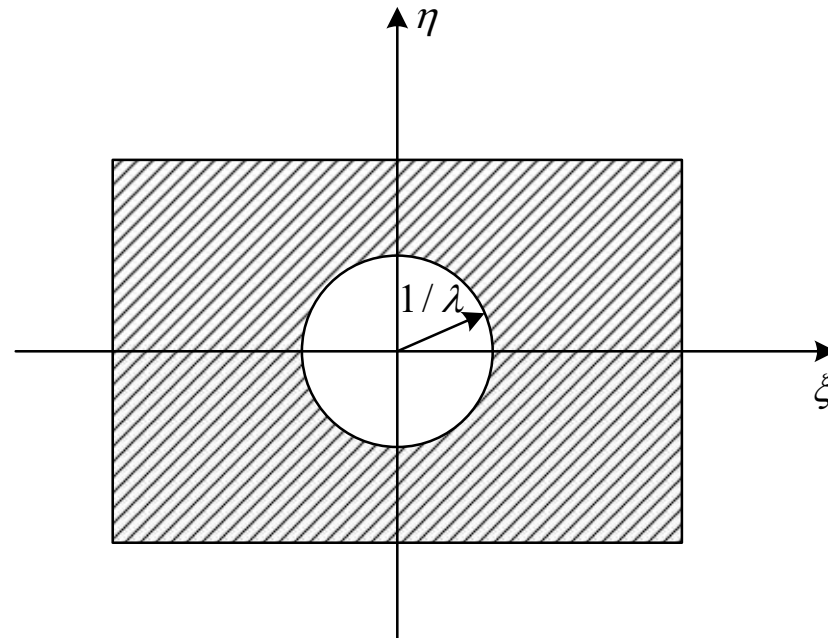
当观察平面与孔径平面之间的距离 z 至少大于几个波长时，倏逝波已衰减到极小，可以忽略。传递函数就可以表示为：

$$H(\xi, \eta) = \frac{A_i(\xi, \eta)}{A_o(\xi, \eta)} = \begin{cases} e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}} & \xi^2 + \eta^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$t(\xi, \eta) = \text{circ}\left(\lambda\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

$$|\rho_c| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\lambda}$$

截止空间频率



4.4 衍射的菲涅耳近似和夫琅禾费近似

4.4.1 菲涅耳近似

4.4.2 夫琅禾费近似

4.4.3 夫琅禾费和菲涅耳衍射的关系

4.4.4 衍射屏被会聚球面波照射

时的菲涅耳衍射

4.4.5 衍射的巴俾涅原理

前面讨论了标量的衍射理论，得到了基尔霍夫衍射公式，但是用它来进行计算衍射问题时，通常在数学处理上是非常困难的，即使对简单的衍射物体也难求出解析的结果。因此，有必要进一步作某些合理的又是实际问题所允许的近似，以便通过比较简单的数学运算就能计算出衍射图样。按照近似条件的不同，可分为菲涅耳近似和夫琅禾费近似，与之相应的衍射现象就分别称为菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射。我们先讨论菲涅耳衍射。

4.4.1 菲涅耳衍射公式

1. 衍射积分的菲涅耳近似

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{\infty} U_o(x_o, y_o) h(x_i - x_o, y_i - y_o) dx_o dy_o$$

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r}$$

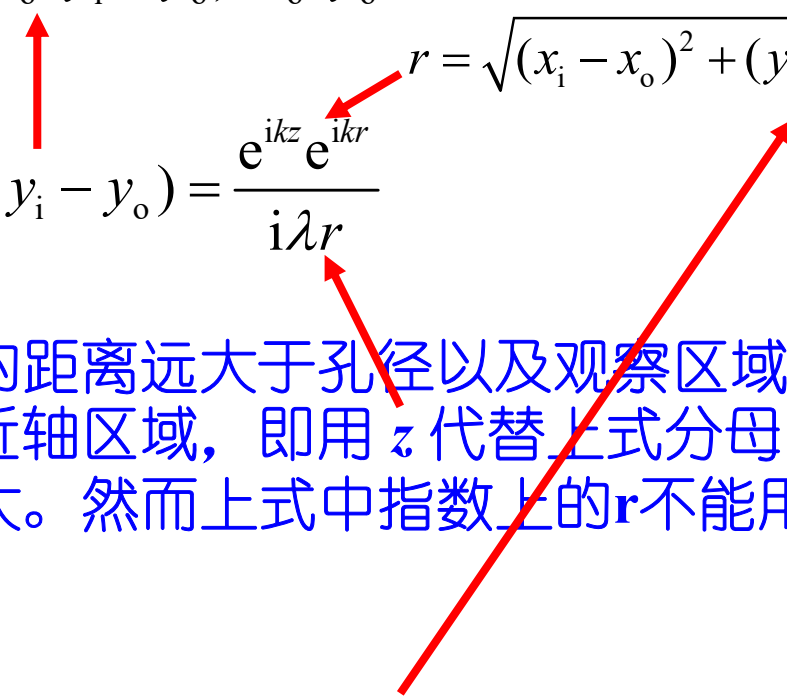
$r = \sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_o - y_i)^2 + z^2}$

当观察平面和孔径平面之间的距离远大于孔径以及观察区域的最大线度。这样，可以只考虑近轴区域，即用 z 代替上式分母中的 r 。这样处理所产生的误差并不大。然而上式中指数上的 r 不能用 z 代替。这是 k 是一个很大的量。

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots \quad (|x| < 1)$$

4.4.1 菲涅耳近似

1. 衍射积分的菲涅耳近似及积分表达式

$$U_i(P_i) = \iint_{\infty} U(x_o, y_o) h(x_i - x_o, y_i - y_o) dx_o dy_o$$
$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{e^{ikz} e^{ikr}}{i\lambda r}$$
$$r = \sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 + z^2}$$


当观察平面和孔径平面之间的距离远大于孔径以及观察区域的最大线度。这样，可以只考虑近轴区域，即用 z 代替上式分母中的 r 。这样处理所产生的误差并不大。然而上式中指数上的 r 不能用 z 代替。这是 k 是一个很大的量。

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$r = z \left[1 + \frac{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2}{2z^2} - \frac{[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]^2}{8z^4} + \dots \right]$$



取前两项

$$r \approx z + \frac{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2}{2z}$$



菲涅耳近似

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} e^{\frac{ik}{2z}[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]}$$

菲涅耳近似的物理实质是用二次曲面来代替球面的惠更斯子波

菲涅耳衍射公式：

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]} dx_o dy_o$$

令脉冲响应为：


$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} e^{\frac{ik}{2z}[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]}$$

$$U_i(x_i, y_i) = U_o(x_o, y_o) * h(x_i, y_i)$$

菲涅耳衍射的卷积积分表达式

被积函数指数中的二项式展开，即：

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x_o x_i + y_o y_i)} dx_o dy_o$$


$$\xi_i = \frac{x_i}{\lambda z} \quad \eta_i = \frac{y_i}{\lambda z}$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} e^{-i2\pi(x_o \xi_i + y_o \eta_i)} dx_o dy_o$$

$$= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} F \left\{ U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} \right\}_{\xi_i = x_i / \lambda z, \eta_i = y_i / \lambda z}$$





菲涅耳衍射公式的傅里叶变换形式

2. 菲涅耳衍射的近似程度

忽略了的高次项，这种近似所要求的精度大小对孔径、观察区域以及距离 z 的线度有所限制。为了使这样的近似不会而导致明显的相位误差，就要求所略去的高阶项对相位变化的贡献远小于**1rad**，即

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]^2}{8z^3} \Big|_{\max} \leq 1 \text{ rad}$$


$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]^2}{8z^3} \Big|_{\max} \leq 1$$



$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]_{\max}^2$$

假定孔径的最大径向范围为 D_o ，即当：

$$\sqrt{x_o^2 + y_o^2} > D_o \quad U_o(x_o, y_o) = 0$$

再限定观测平面内的观测限制在一个最大径向范围 D_i ，则有：

$$[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2] \Big|_{\max} = (D_o + D_i)^2$$


$$z^3 \gg \frac{\pi(D_o + D_i)^4}{4\lambda}$$

设衍射孔径的半径和轴线附近观察区的半径均为**1cm**，入射光场波长为**630nm**，由上式可得： **$z \gg 0.58\text{m}$** 。

如果以取近似值引起的相位变化小于**1/10rad**作为忽略不计的判据，则要求： **$z \gg 1.26\text{m}$**

3. 菲涅耳近似和近轴近似的等价性

菲涅耳衍射可以看作是一个线性空不变系统，因而菲涅耳衍射过程必然存在一个相应的传递函数。式(4.3.32)中指数部分在菲涅耳近似为

$$ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2} \approx i\frac{2\pi}{\lambda}z\left(1-\frac{(\lambda\xi)^2+(\lambda\eta)^2}{2}\right) = ikz - i\pi\lambda z(\xi^2 + \eta^2)$$

这样菲涅耳近似下的传递函数为：

$$H(\xi, \eta) = e^{ikz\sqrt{1-(\lambda\xi)^2-(\lambda\eta)^2}} = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(\xi^2 + \eta^2)}$$

与空间频率平方有关的相位色散

任何空间频率成分在传播距离
 z 产生的总体的相位延迟

当采用近轴近似，即：

$$|\lambda\xi| \ll 1 \quad |\lambda\eta| \ll 1$$

$$\sqrt{1 - (\lambda\xi)^2 - (\lambda\eta)^2} \approx 1 - \frac{(\lambda\xi)^2}{2} - \frac{(\lambda\eta)^2}{2}$$

$$H(\xi, \eta) = e^{ikz\sqrt{1 - (\lambda\xi)^2 - (\lambda\eta)^2}} = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(\xi^2 + \eta^2)}$$

上式与式(4.4.10)完全一样。这就是说，菲涅耳近似和傍轴近似是等价的。

4.4.2 夫琅禾费近似

如果采用比菲涅耳近似更严格的限制条件，即使观察平面离开孔径平面的距离 z 进一步增大，使其不仅满足菲涅耳近似条件，而且满足如下条件：

$$\frac{k}{2z}(x_o^2 + y_o^2)_{\max} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad z \gg \frac{k}{2}(x_o^2 + y_o^2)_{\max} = \frac{\pi D_o^2}{\lambda}$$

上式条件所规定的 z 范围的衍射称为夫琅禾费衍射，此 z 值所限定的区域称为夫琅禾费衍射区

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} F \left\{ U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}(x_o^2 + y_o^2)} \right\}_{\xi=x_i/\lambda z, \eta=y_i/\lambda z}$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} F \{ U_o(x_o, y_o) \}_{\xi=x_i/\lambda z, \eta=y_i/\lambda z}$$

忽略

$$= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\pi\lambda z(\xi^2 + \eta^2)} F \{ U_o(x_o, y_o) \}_{\xi=x_i/\lambda z, \eta=y_i/\lambda z}$$

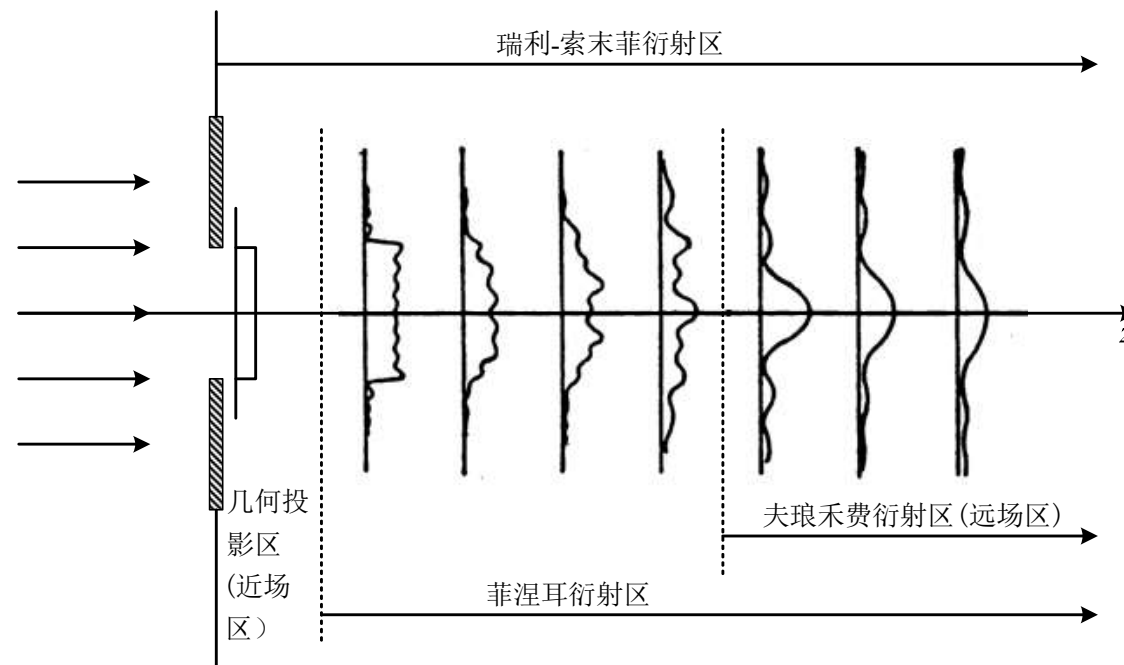
$$I_i = |U_i(x_i, y_i)|^2 \propto \left(F \{ U_o(x_o, y_o) \}_{\xi=x_i/\lambda z, \eta=y_i/\lambda z} \right)^2$$

夫琅禾费近似条件实际上很苛刻

可见，夫琅禾费衍射图样的分布在系统的傅里叶变换平面上。夫琅禾费近似条件实际上很苛刻，如，当照射光的波长为 630nm ，孔径的最大线度为 2mm 时，由该条件算出夫琅禾费近似条件要求： $z \gg 20\text{m}$ 。如果以取近似值引起的相位变化小于 $1/10\text{rad}$ 作为忽略不计的判据，那么夫琅禾费衍射区就在衍射孔后 $z \gg 200\text{m}$ 处，在其条件不变的情况下，当要求的精度不同时，显然值也不同。实验上要满足这一条件是较为困难的。而要在较近的距离上观察到夫琅禾费衍射，关键在于消除式(4.4.7)中变换函数中的位相因子的影响，如可以采用如会聚透镜这样的光学元件来实现近距离的夫琅禾费衍射。

4.4.3 衍射区域的划分

衍射会使得某些光线在通孔径后偏离其原来的传播方向，这就会使得在孔径后所观测到的图样(即衍射图样)在大小和形状都与原孔径不同，这就是衍射效应所导致的现象，当观察面与孔径的距离增加时，这种衍射效应通常来说会更加显著。所观察到的衍射图样在经受连续引入的变化，与孔径的相似性也逐渐消失，然而最终将会达一点，超过这点以后，随着距离的增加，这个图样只有大小变化，但其形状不再变化。虽然对观测衍射的各区的范围和命名在各种文献中会有些不同，但大致的划分如下图所示。



瑞利-索末菲衍射区为衍射孔径右边的全空间，这是因为瑞利-索末菲衍射公式在这个空间处处都是适用。菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区可根据他们的近似表达式来划分。从图4.4.1中可以看到，夫琅禾费衍射范围包含在菲涅耳衍射范围之内，因而能用来计算菲涅耳衍射的公式都能用来计算夫琅禾费衍射。但是，夫琅禾费衍射的近似表达式已不再具有式(4.4.5)的卷积关系，因而夫琅禾费衍射也不再具有线性空不变性。由于仅对线性空不变系统，其在频域的作用才可以用系统的传递函数表示，因而对夫琅禾费衍射而言，不存在专门的传递函数。不过，由于菲涅耳衍射区包含了夫琅禾费衍射区，因此，菲涅耳衍射过程的传递函数也适用于夫琅禾费衍射。菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区都是延伸到无穷远处的，但在夫琅禾费衍射区中，衍射图样的大小随距离的增加而增加，但其形状不变。

由式(4.4.13)有：
$$\left. \frac{k}{2}(x_o^2 + y_o^2) \right|_{\max} = \frac{\pi D_o^2}{4\lambda}$$

有时为了简单起见，把夫琅禾费区的条件规定为：
$$z \gg \frac{D_o^2}{\lambda}$$

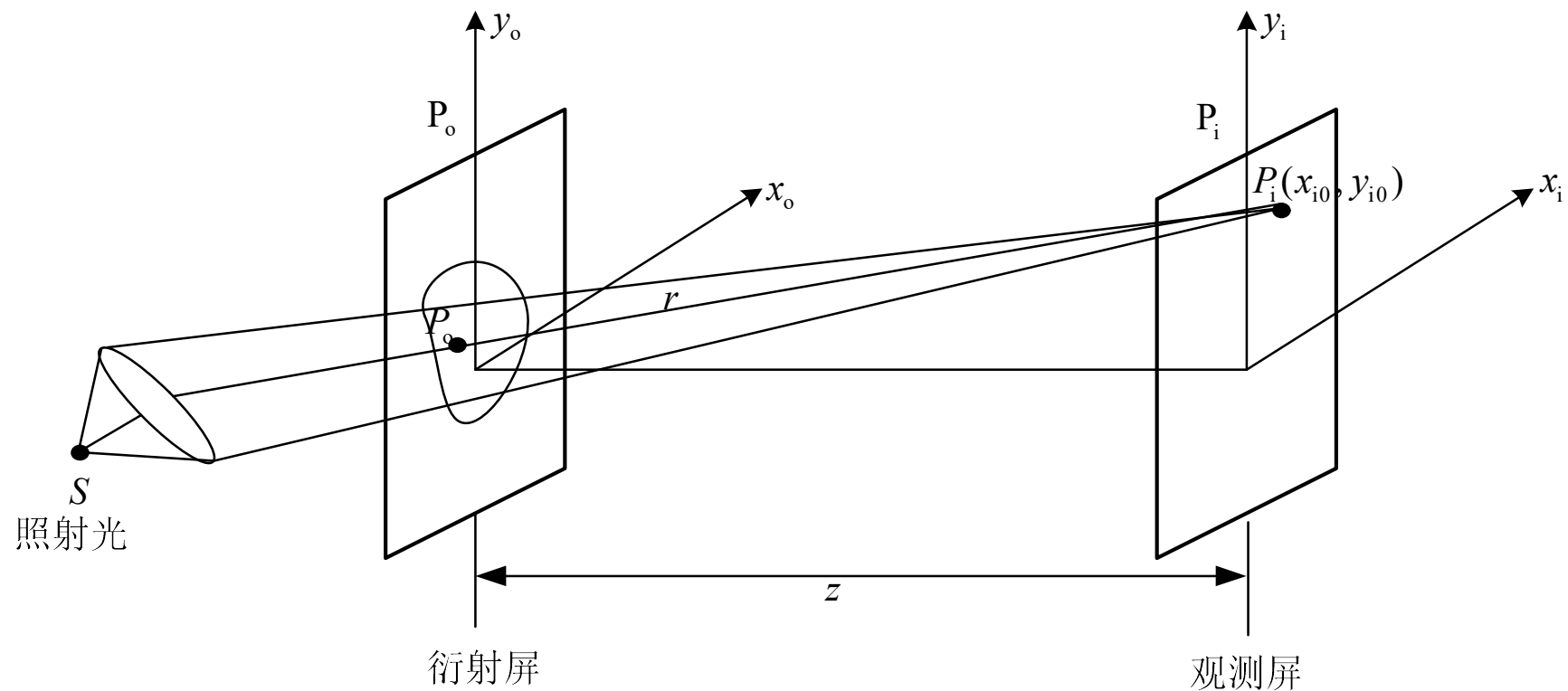
$\frac{D_o^2}{\lambda}$ 称为远场距离，它不但与衍射孔的线度 D_o 还与波长有关。当单色平面波照射衍射孔时，大于远场距离的范围都属于夫琅禾费衍射，或远场衍射(**far field diffraction**)，所以夫琅禾费衍射区常称为远场衍射，因这个区域处于远离孔径的地方。

$z = m\lambda \sim \frac{D_o^2}{\lambda} (m = 1 \sim 10)$ 范围内的衍射，为菲涅耳衍射区

$m\lambda$ 之内的，就称为近场距离，而在近场距离之内的衍射称为近场衍射(**near field diffraction**)，衍射的分布近似入射波的振幅分布，即图样近似为孔径的几何投影，所以，该区不是能用菲涅耳公式计算光场分布的。

4.4.4 衍射屏被会聚球面波照射时的菲涅耳衍射

在某些衍射问题中，例如当照明衍射屏的是会聚球面波时：



利用菲涅耳近似可得：

$$r = \sqrt{z^2 + (x_o - x_{i0})^2 + (y_o - y_{i0})^2} \approx z + \frac{(x_o - x_{i0})^2}{2z} + \frac{(y_o - y_{i0})^2}{2z}$$

衍射屏前表面光场复振幅为：

$$U_o(x_o, y_o) = \frac{A_0}{z} e^{-ikz} e^{-\frac{ik}{2z}[(x_o - x_{i0})^2 + (y_o - y_{i0})^2]}$$

衍射屏后表面的光场复振幅分布为：

$$U'_o(x_o, y_o) = t(x_o, y_o) \cdot U_o(x_o, y_o) = t(x_o, y_o) \cdot \frac{A_0}{z} e^{-ikz} e^{-\frac{ik}{2z}[(x_o - x_{i0})^2 + (y_o - y_{i0})^2]}$$

观测屏上任一点 P_i 处光场的复振幅分布可按菲涅耳衍射公式(4.4.6)来求解：

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \int \int_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]} dx_o dy_o \\ &= \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) \frac{A_0}{z} e^{-ikz} e^{-\frac{ik}{2z}[(x_o - x_{i0})^2 + (y_o - y_{i0})^2]} e^{\frac{ik}{2z}[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]} dx_o dy_o. \end{aligned}$$

整理后得：

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{A_0}{i\lambda z^2} e^{-\frac{ik}{2z}[x_{i0}^2 + y_{i0}^2]} e^{\frac{ik}{2z}[x_i^2 + y_i^2]} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{-i2\pi \left[\frac{x_i - x_{i0}}{\lambda z} x_o + \frac{y_i - y_{i0}}{\lambda z} y_o \right]} dx_o dy_o$$
$$= \frac{A_0}{i\lambda z^2} e^{-\frac{ik}{2z}[x_{i0}^2 + y_{i0}^2]} e^{\frac{ik}{2z}[x_i^2 + y_i^2]} T(\xi, \eta)_o$$

$\xi = \frac{x_i - x_{i0}}{\lambda z} \quad \eta = \frac{y_i - y_{i0}}{\lambda z}$

光场的强度分布为：

$$I_i(x_i, y_i) = |U_i(x_i, y_i)|^2 = \left(\frac{A_0}{\lambda z^2} \right)^2 T^2(\xi, \eta)$$

当用会聚球面波照明衍射屏时，会聚中心所在平面上的菲涅耳衍射图样与以平行光垂直照射该衍射屏时的夫琅禾费图样一样，只是图样的中心不在原点，而是在会聚波的中心。

4.4.5 衍射的巴俾涅原理

若有两个衍射屏其中一个衍射屏的开孔部分正好与另一个衍射屏的不透明部分相对应，反之亦然，则这样一对衍射屏称为互补屏。

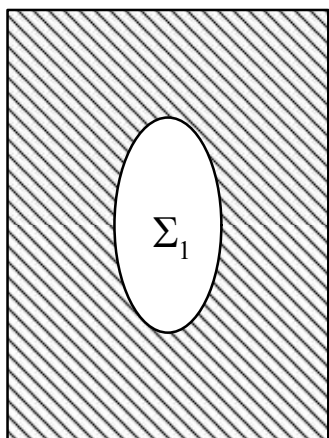
两个互补屏在观察点所产生的衍射光场，其振幅之和等于光波自由传播时在该点的复振幅之和。这一结论称为巴俾涅原理(Babinet principle)，是由巴俾涅于1837年提出的。由于光波自由传播时通常是满足几何光学定律的，光场的复振幅容易计算，所以利用巴俾涅原理可以较方便地由一种衍射屏的衍射场求出其互补屏的衍射场。

$$t_2(x_o, y_o) = 1 - t_1(x_o, y_o)$$

互补衍射屏就是透光区域相反的衍射屏

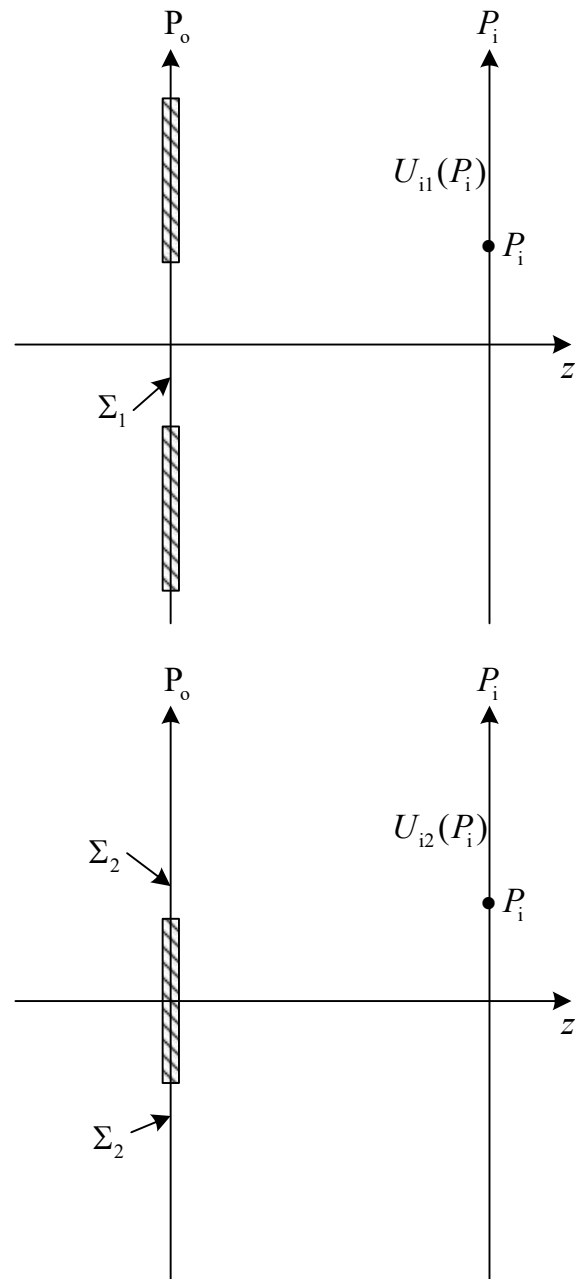
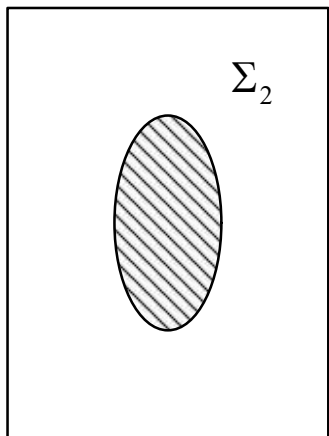
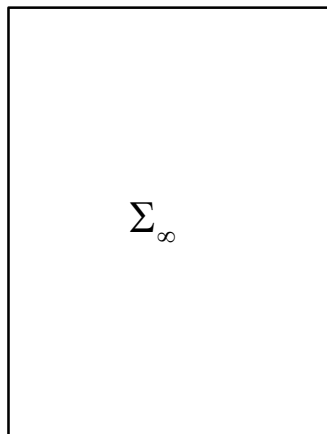
$$\frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_1} U_o(P_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o + \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_2} U_o(P_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_\infty} U_o(P_o) K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds_o$$

$$U_{i1}(P_i) + U_{i2}(P_i) = U_i(P_i)$$



+

=



两个有用的结论：

(1) 如果 $U_{i1}(P) = 0$ 或 $U_{i2}(P) = 0$ 则

$$U_{i2}(P_i) = U_i(P_i) \quad U_{i1}(P_i) = U_i(P_i)$$

因此，若某一个衍射屏存在时，衍射光场的复振幅为零的那些点，在换上它的互补屏时，这些点的复振幅和强度与没有屏时是一样的。

(2) 如果 $U_i(P) = 0$ 则 $U_{i1}(P_i) = -U_{i2}(P_i)$

巴俾涅原理对这样一类光学系统特别有意义，即衍射屏采用点光源照明，其后装有光学成像系统，在光源的几何像平面上接收衍射图样。这时，自由光场的传播是服从几何光学规律的，它在像平面上除像点外处处是零。利用互补屏可以获得反色图像，可以方便地实现线径的测量、检验。巴俾涅原理也为研究某些衍射问题提供了一个辅助方法，将它用于夫琅禾费衍射最为方便。对于菲涅耳衍射，巴俾涅原理虽然也正确，但两个互补屏的衍射图样不相同。

4.5 菲涅耳衍射的计算

4.5.1 周期性物体的菲涅耳衍射

4.5.2 矩形孔的菲涅耳衍射

4.5.3 特殊矩形孔的菲涅耳衍射

4.5.4 圆孔的菲涅耳衍射

从上讨论可知，菲涅耳衍射图样(积分)的计算是十分麻烦烦的，在计算机发展的今天，可以由数值算法很快算出任一孔径的菲涅耳衍射图样。历史上所采用的菲涅耳衍射和考纽曲线求解的方法，虽然现在在实际问题的计算中已很少使用，但对于理解光的衍射现象仍十分有益，这一节我们以方孔为例来介绍这种方法。

在菲涅耳公式(4.4.4)中，被积函数含有指数函数，其指数是积分变量的二次式，这使菲涅耳衍射积分的求解变得较为困难。只有在某些特殊情况下，才可能求出解析解。根据开孔的形状不同，可以在直角坐标中求解，如矩形、狭缝等开孔，也可以柱坐标系中求解，如圆形开孔。也可以在空间域中求解，也可以在空间频域中求解，这由方便具体问题的求解而决定。

4.5.1 周期性物体的菲涅耳衍射

作为菲涅耳衍射公式应用的一个例子，这一节讨论一下1836年由塔尔博特 (Fox Talbot)发现的一个现象，即如果用单色平面波垂直照射一个具有周期性透射率函数的图片时，在该透明片后的某些距离上出现该周期函数的像，称为塔尔博特效应。这种不用透镜，就可以对周期物体成像的方法，有时称为傅里叶成像(Fourier imaging)、菲涅耳成像或称自成像(self-imaging)，是一种衍射现象。塔尔博特效应在当时的出现是令人费解的，但也非常吸引人，特别是用白光照明的情形。而且这种效应也很有用，如可以用于频谱仪中。1888年，瑞利应用衍射理论对这一现象进行了分析，他认为，周期光栅自成像只不过是复杂波分解和叠加的结果。20世纪70年代，塔尔博特效应和莫尔技术相结合，在相位物体的测量等方面得到了应用。下面应用菲涅耳衍射理论，在频域上来对塔尔博特效应的原理进行分析。

1. 正弦光栅的菲涅耳衍射

正弦光栅的振幅透过率函数为： $t(x_o) = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} \cos(2\pi\xi_0 x_o)$

用单位单色平面波垂直照射该光栅时： $U_o'(x_o) = t(x_o)$

代入菲涅耳衍射公式(4.4.4)，可得：

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikd}}{id\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_o) e^{\frac{ik}{2d}[(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2]} dx_o$$

||

$$U_i(x_i) = \frac{e^{ikd}}{id\lambda} t(x_o) * e^{\frac{ik}{2d}x_i^2}$$



作傅里叶变换

$$F\{U_i(x_i)\} = \frac{e^{ikd}}{id\lambda} F\{t(x_o)\} \cdot F\{e^{\frac{ik}{2d}x_i^2}\}$$

$$F\{t(x_o)\} = \frac{1}{2}\delta(\xi_o) + \frac{q}{4}\delta(\xi_o - \xi_0) + \frac{q}{4}\delta(\xi_o + \xi_0)$$

$$F\{e^{\frac{ik}{2d}x_i^2}\} = i\lambda d e^{-i\pi\lambda d \xi^2}$$

$$\begin{aligned} F\{U_i(x_i)\} &= \frac{e^{ikd}}{i d \lambda} \left[\frac{1}{2}\delta(\xi_o) + \frac{q}{4}\delta(\xi_o - \xi_0) + \frac{q}{4}\delta(\xi_o + \xi_0) \right] i\lambda d e^{-i\pi\lambda d \xi^2} \\ &= e^{ikd} \left[\frac{1}{2}\delta(\xi) + \frac{q}{4}e^{-i\pi\lambda d \xi_0^2}\delta(\xi - \xi_0) + \frac{q}{4}e^{-i\pi\lambda d \xi_0^2}\delta(\xi + \xi_0) \right] \end{aligned}$$



作逆傅里叶变换

观测平面的衍射光场的复振幅为：

$$U_i(x_i) = e^{ikd} \left[\frac{1}{2} + \frac{q}{2} e^{-i\pi\lambda d \xi_0^2} \cos(2\pi\xi_0 x_i) \right] \quad \longleftrightarrow \quad t(x_o) = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} \cos(2\pi\xi_0 x_o)$$

比较

观测平面的衍射光强为：

$$I_i = |U_i(x_i)|^2 = \left| \frac{1}{2} + \frac{q}{2} e^{-i\pi\lambda d \xi_0^2} \cos(2\pi\xi_0 x_i) \right|^2$$

(1) 当 $e^{-i\pi\lambda z\xi_0^2} = e^{-i\pi 2m} = 1 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$z = \frac{2mL_0^2}{\lambda} = md_T \quad L_0 = 1/\xi_0 \quad \text{光栅的周期}$$

$$I_i = \left| \frac{1}{2} + \frac{q}{2} \cos(2\pi\xi_0 x_i) \right|^2$$

将这一结果与式(4.5.1)相比较, 发现所观测到的像就是正弦光栅的准确再现

塔尔博特距离

$$z_T = \frac{2L_0^2}{\lambda}$$

在余弦光栅后的塔尔博特距离 z_T 的整数倍距离处都可以看到同样的分布, 这个像叫塔尔博特像。

(2) 当 $e^{-i\pi\lambda d\xi_0^2} = e^{-i\pi(2m+1)} = -1 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$d = \frac{(2m+1)L_0^2}{\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right) d_T$$

这样衍射光强为： $I_i = \left| \frac{1}{2} - \frac{q}{2} \cos(2\pi\xi_0 x_i) \right|^2$

这个像与塔尔博特像相比，可见度反转，故称为负塔尔博特像。

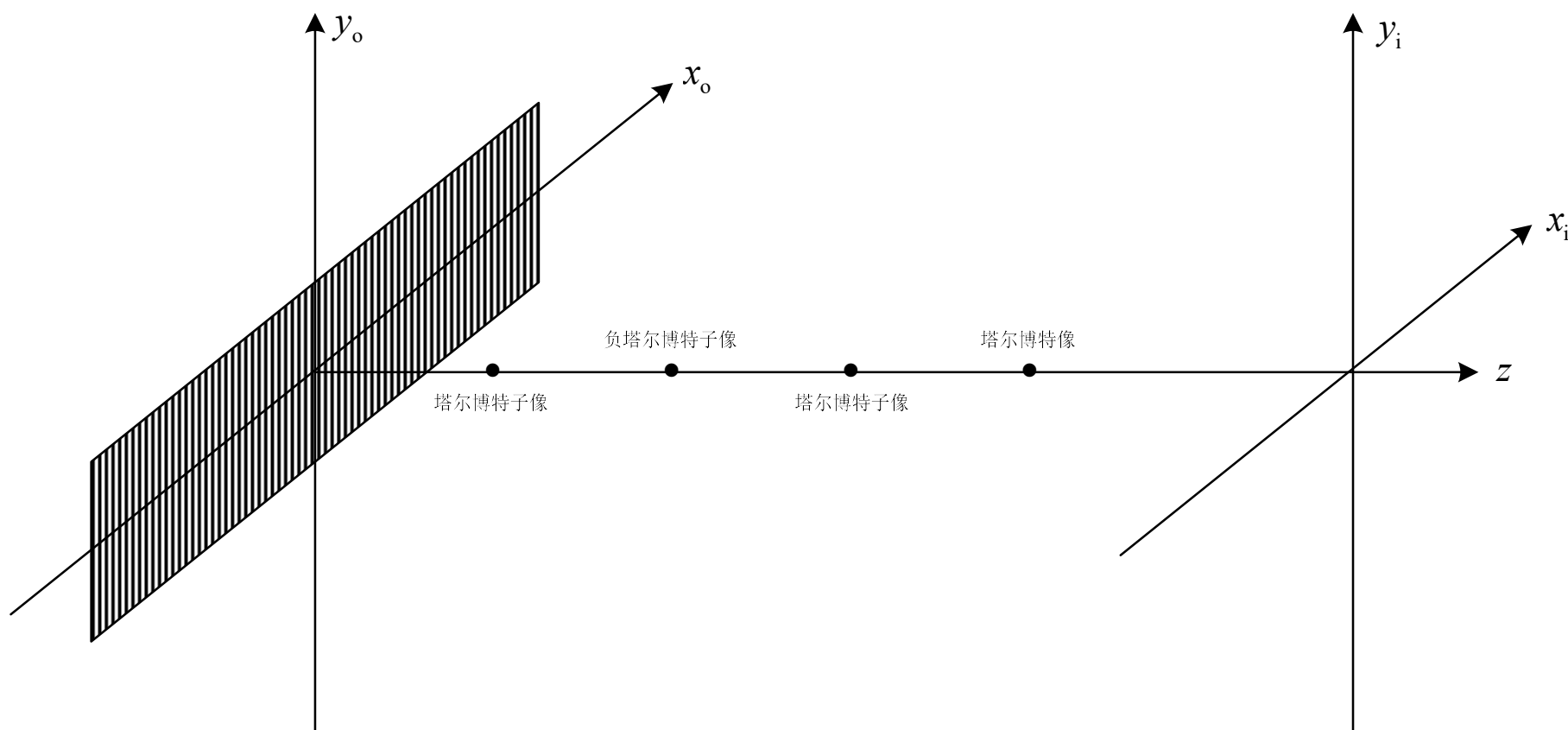
(3) 当 $e^{-i\pi\lambda d\xi_0^2} = e^{-i\pi(2m-1)/2} = -i \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$d = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{L_0^2}{\lambda} = \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right) d_T$$

$$I_i = \left| \frac{1}{2} + i \frac{q}{2} \cos(2\pi\xi_0 x_i) \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{q^2}{4} \cos^2(2\pi\xi_0 x_i) = \frac{1}{4} + \frac{q^2}{8} + \frac{q^2}{8} \cos[2\pi(2\xi_0)x_i]$$

这个像与塔尔博特像相比，该像的频率加倍，可见度减小，称之负塔尔博特子像。

入射光经正弦振幅光栅衍射后，能够得到三种像的 z 坐标如下图所示。塔尔博特效应产生的物理原因在于入射单色平面波经光栅衍射后，在塔尔博特效应产生距离上各衍射分量之间的相互相位关系满足一定的条件，使得这些分量相互干涉形成物体的各种塔尔博特像。



2. 矩形光栅的菲涅耳衍射

对于矩形光栅可以作类似的分析。由矩形函数的定义，可得到矩形光栅的振幅透过率为：

$$t(x_o) = \begin{cases} 1 & |x_o - 2nL_0| \leq L_0 / 2 \\ 0 & |x_o - (2n+1)L_0| \leq L_0 / 2 \end{cases}$$

即其振幅透过率在一半方波周期内为**0**，在其余处为**1**。这种周期方波可用傅里叶级数展开，其展开式的前两项为

$$t(x_o) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n x_o / L_0) \quad A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{2}{\pi}, \dots$$

如用单位平面波垂直入射该光栅，则光栅后的复振幅为：

$$U'_o(x_o, z=0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n x_o / L_0)$$

作傅里叶变换

$$A_o(\xi_o, z=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left[\delta\left(\xi_o - \frac{n}{L_0}\right) + \delta\left(\xi_o + \frac{n}{L_0}\right) \right]$$

在菲涅耳近似下的传递函数，可得其频谱并作逆傅里叶变换，有：

$$U_i(x_i, z=d) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x_i}{L_0}\right) e^{-i\pi\lambda d (n/L_0)^2}$$

$$\pi\lambda d (n/L_0)^2 = 2m\pi \longleftrightarrow d = \frac{2mL_0^2}{n^2\lambda} = \frac{m}{n^2} d_T$$

则有 $U_i(x_i) = t(x_o)$

在满足上式的距离上出现自成像关系


3. 任意形状周期性函数的菲涅耳衍射

设有一个周期为 L_0 的一维周期物体，一般的周期函数可表示为单个非周期性函数与梳状函数的卷积，即

$$t(x_o) = t_0(x_o) * \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x_o - nL_0) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

单色单位振幅面波垂直照明周期性物体

$$U'_o(x_o) = t(x_o)U_o(x_o) = t(x_o) = t_0(x_o) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_o - nL_0)$$

 傅里叶变换

$$A'_o(\xi_o) = T_0(\xi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - n / L_0)$$

由式(4.3.11)可知在距周期性物体 z 处观测面的频域的复振幅为：

$$A_i(\xi) = H(\xi)A'_0(\xi)$$

由式(4.3.11)，可知在菲涅耳近似下平面波传播的传递函数为：

$$H(\xi) = e^{ikd} e^{-i\pi\lambda d \xi^2}$$

$$A_i(\xi) = e^{ikd} e^{-i\pi\lambda d \xi^2} \cdot T_0(\xi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - n / L_0) = T_0(\xi) e^{ikd} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi_0 - n / L_0) e^{-i\pi\lambda d \xi^2}$$



作逆傅里叶变换

$$U_i(x_i) = t_0(x_i) e^{ikd} * F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - n / L_0) e^{-i\pi\lambda d \xi^2} \right\}$$



$$F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - n / L_0) e^{-i\pi\lambda d \xi^2} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi x_i (n/L_0)} e^{-i\pi\lambda d (n/L_0)^2}$$

$$U_i(x_i) = t_0(x_i)e^{ikd} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi x_0(n/L_0)} e^{-i\pi\lambda d(n/L_0)^2}$$

若有

$$d = \frac{2mL_0^2}{n^2\lambda} = \frac{m}{n^2} d_T \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi x_1(n/L_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_i - nL_0)$$

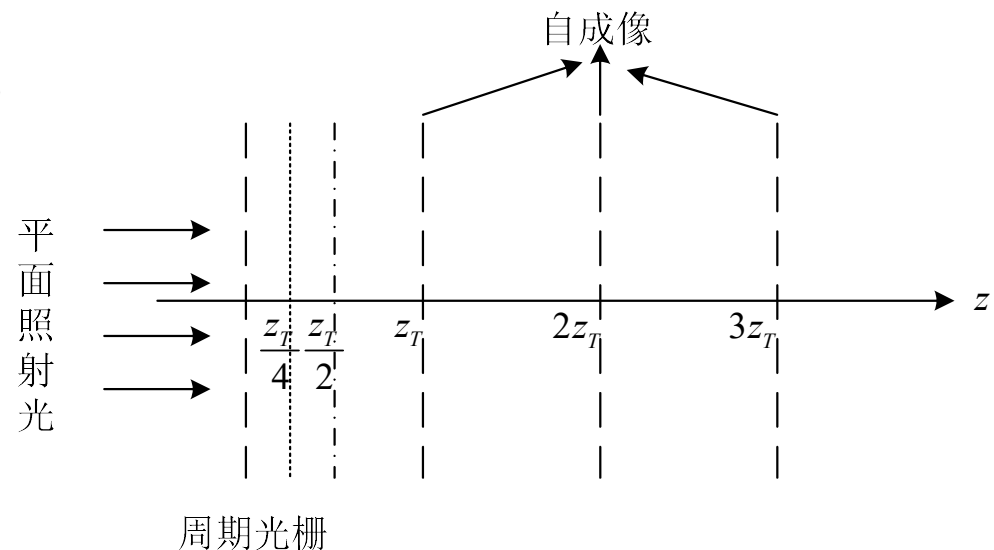
$$U_i(x_i) = t_0(x_i)e^{ikd} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_i - nL_0)$$

$$= t(x_i)e^{ikd}$$

在观察平面上的强度分布为：

$$I_i(x_i) = |U_i(x_i)|^2 = |t(x_i)|^2$$

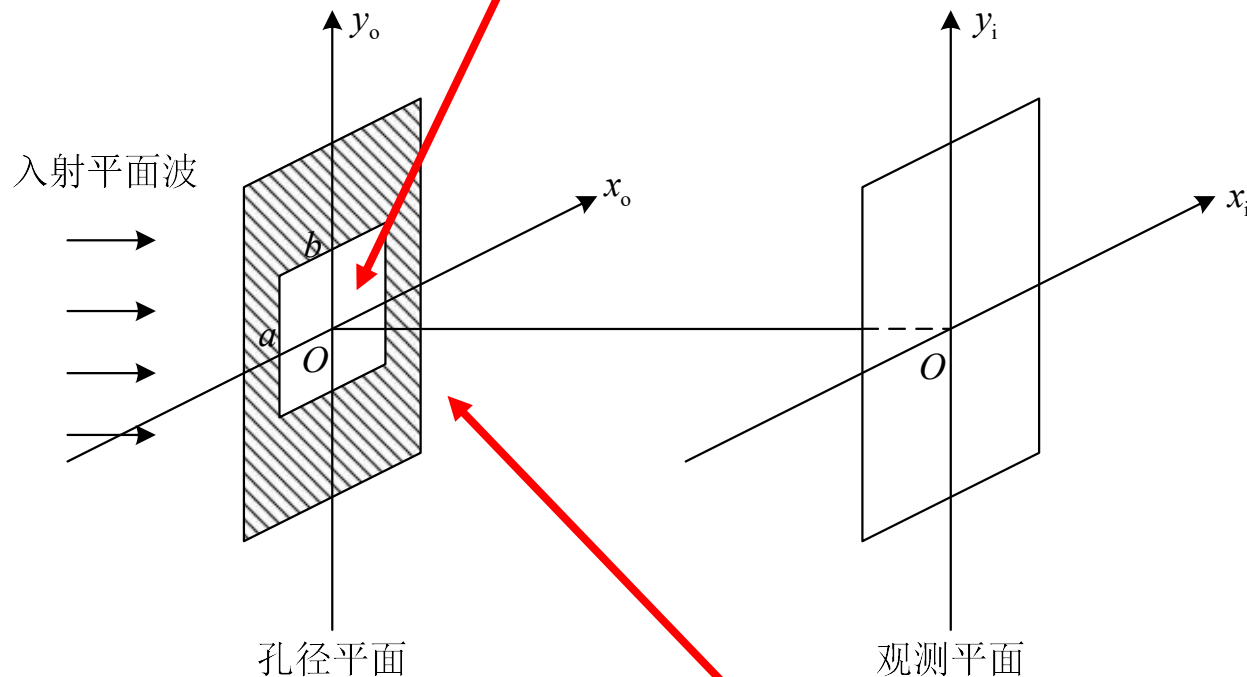
观察平面上的强度分布与物体的强度分布是相同的。由此可见，任何形状的周期性物体都可以产生塔尔博特效应。不过，要注意的是，塔尔博特效应产生的一个重要条件是相干光照明。这是由于塔尔博特效应要求各衍射分量之间有正确的相位关系，这一点只有在相干光照明下才有可能实现。另外，塔尔博特效应不仅出在可见光照明下，也可以在使用微波、红外，以至X射线照明下都可以观察到。



4.5.2 矩形孔的菲涅耳衍射

设平面衍射孔径为矩形，其透射率函数可由二维矩形函数来描述，取坐标原点位于矩形孔的中心，由式(1.1.5)，有矩形孔的透射率函数为：

$$t(x_o, y_o) = \text{rect}(x_o / a, y_o / b)$$



当用单位振幅的单色平面波垂直照射时，紧贴方形孔后的表面的光场复振幅分布为：

$$U_o^t(x_o, y_o) = t(x_o, y_o) \cdot U_o(x_o, y_o) = \text{rect}(x_o / a, y_o / b)$$

根据菲涅耳衍射公式(4.4.4)，观察平面上的衍射场为：

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2z}[(x_i-x_o)^2+(y_i-y_o)^2]} dx_o dy_o = \\ &= \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{ik}{2z}(x_i-x_o)^2} dx_o \cdot \int_{-b/2}^{b/2} e^{\frac{ik}{2z}(y_i-y_o)^2} dy_o = \frac{e^{ikz}}{i} U_{xi}(x_i) U_{yi}(y_i) \end{aligned}$$

$$U_{xi}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{z\lambda}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{\frac{ik}{2z}(x_i-x_o)^2} dx_o \quad U_{yi}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-b/2}^{b/2} e^{\frac{ik}{2z}(y_i-y_o)^2} dy_o$$

积分计算是较为繁杂，需要应用考纽螺线(Gorun's spiral)图解法。

作变数代换

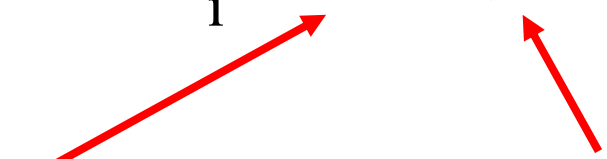
$$x' = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x_i - x_o)$$

$$\begin{cases} x'_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{a}{2} - x_o\right) \\ x'_2 = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{a}{2} + x_o\right) \end{cases}$$

$$y' = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x_i - x_o)$$

$$\begin{cases} y'_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{b}{2} - y_o\right) \\ y'_2 = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{b}{2} + y_o\right) \end{cases}$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \int_{x'_1}^{x'_2} e^{\frac{i\pi}{2}x'^2} dx' \cdot \int_{y'_1}^{y'_2} e^{\frac{i\pi}{2}y'^2} dy' = \frac{e^{ikz}}{i} U_{xi}(x_i) U_{yi}(y_i)$$

$$U_{xi}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x'_1}^{x'_2} e^{\frac{i\pi}{2}x'^2} dx' \quad U_{yi}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{y'_1}^{y'_2} e^{\frac{i\pi}{2}y'^2} dy'$$


上式积分函数可欧拉公式可得：

$$e^{\frac{i\pi}{2}x'^2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}x'^2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}x'^2\right) \quad e^{\frac{i\pi}{2}y'^2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}y'^2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}y'^2\right)$$

$$U_{xi}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x'_1}^{x'_2} e^{\frac{i\pi}{2}x'^2} dx' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{x'_2} e^{\frac{i\pi}{2}x'^2} dx' - \int_0^{x'_1} e^{\frac{i\pi}{2}x'^2} dx' \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [C(x'_2) - C(x'_1)] + i[S(x'_2) - S(x'_1)] \}$$

$$U_{yi}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{y'_1}^{y'_2} e^{\frac{i\pi}{2}y'^2} dy' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{y'_2} e^{\frac{i\pi}{2}y'^2} dy' - \int_0^{y'_1} e^{\frac{i\pi}{2}y'^2} dy' \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [C(y'_2) - C(y'_1)] + i[S(y'_2) - S(y'_1)] \}$$

菲涅耳积分



菲涅耳积分，它们的定义如下：

$$C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos(\pi x^2 / 2) dx \qquad S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin(\pi x^2 / 2) dx$$

菲涅耳积分在许多衍射问题都要用到，为了能给出该积分的数值解，有必要导出它的渐近展开式

$$C(\alpha) = \alpha \left[1 - \frac{1}{2!5} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right)^2 + \frac{1}{4!9} \left(\frac{\pi}{2} \alpha^2 \right)^4 + \dots \right]$$

$$S(\alpha) = \alpha \left[\frac{1}{1!3} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) - \frac{1}{3!7} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right)^3 + \frac{1}{5!11} \left(\frac{\pi}{2} \alpha^2 \right)^5 + \dots \right]$$

$$C(\alpha) = C(\infty) - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{\pi}{2} x^2 \right) \frac{dx}{\pi x}$$

用分部积分法对上式进行积分，得

$$C(\alpha) = C(\infty) + \frac{1}{\pi \alpha} \left(\sin \frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) \frac{dx}{\pi^2 x^3}$$

再对上式进行分部积分，并如此继续下去，最后可得：

$$C(\alpha) = C(\infty) - \frac{1}{\pi \alpha} \left[P(\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) - Q(\alpha) \sin \left(\frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) \right]$$

同理可得：

$$S(\alpha) = S(\infty) - \frac{1}{\pi \alpha} \left[P(\alpha) \sin \left(\frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) + Q(\alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) \right]$$

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \alpha^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(\pi \alpha^2)^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(\pi \alpha^2)^5} - \dots \quad Q(\alpha) = 1 - \frac{1 \cdot 3}{(\pi \alpha^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(\pi \alpha^2)^4} - \dots$$

$$C(\infty) + iS(\infty) = \int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}x^2} dx$$

这个积分的解法是复变函数中所讨论一个典型例子，用变量代换：

$$\zeta = x\sqrt{-\frac{i\pi}{2}} = x\frac{i-1}{2}\sqrt{\pi}$$

由柯西(**Cauchy**)留数定理可知，沿过原点任意斜线取积分时的结果都等于沿实轴的积分，这样就有

$$C(\infty) + iS(\infty) = \frac{i+1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{i+1}{2}$$



$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$C(\infty) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{2}$$

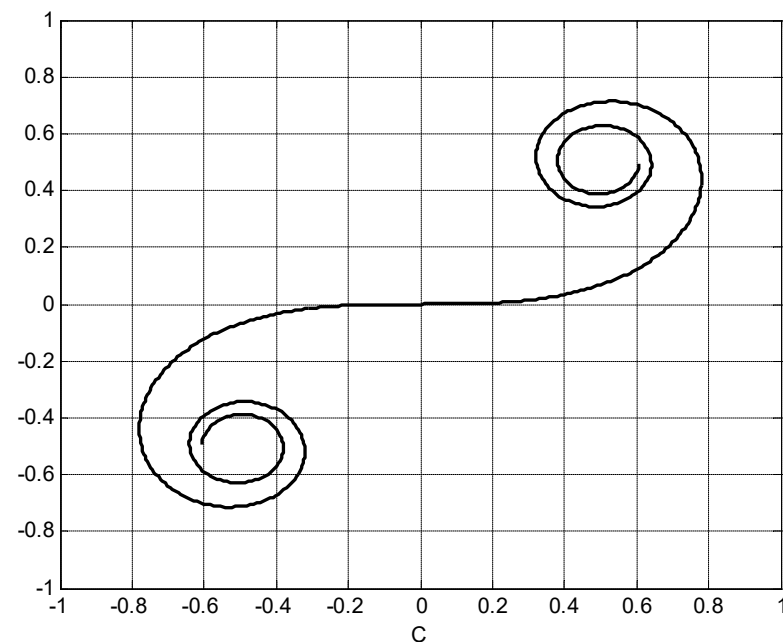
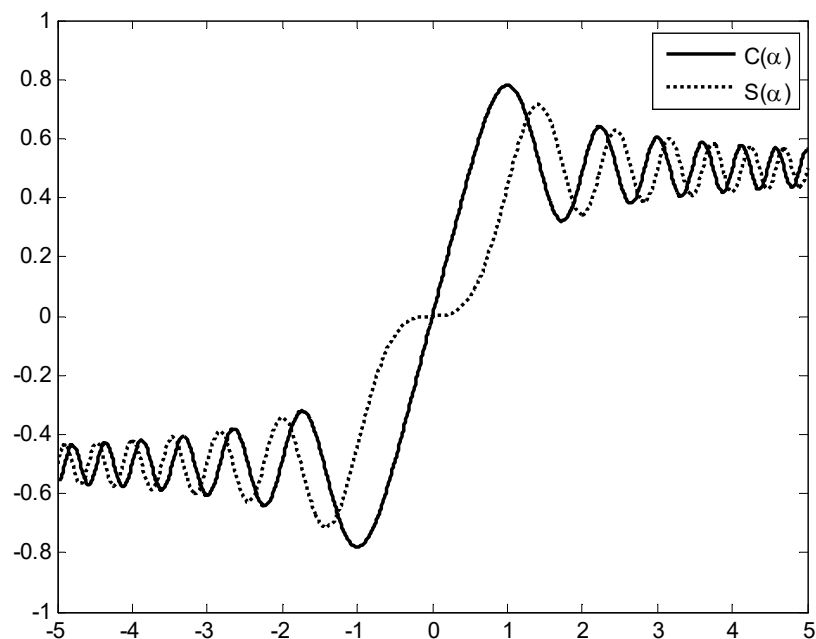
$$S(\infty) = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{2}$$

由上面的表达式容易得到下面菲涅耳积分的性质：

$$C(0) = S(0) = 0$$

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}, C(-\infty) = S(-\infty) = -\frac{1}{2}$$

$$C(\alpha) = -C(-\alpha), S(\alpha) = -S(-\alpha)$$



$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{2i} \{ [C(x'_2) - C(x'_1)] + i[S(x'_2) - S(x'_1)] \} \\ \cdot \{ [C(y'_2) - C(y'_1)] + i[S(y'_2) - S(y'_1)] \}$$

光强分布为：

$$I_i(x_i, y_i) = |U_i(x_i, y_i)|^2 = \frac{1}{4} \{ [C(x'_2) - C(x'_1)] + i[S(x'_2) - S(x'_1)] \}^2 \\ \cdot \{ [C(y'_2) - C(y'_1)] + i[S(y'_2) - S(y'_1)] \}^2$$

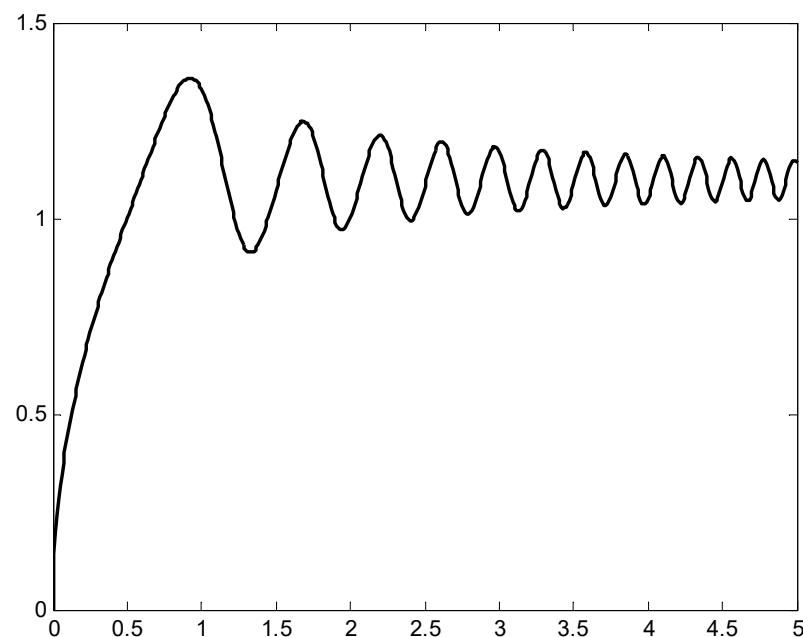
早期通常查菲涅耳积分的数值表，现在可以用计算机方便的求出，最后将这些数值代入式(4.5.65)就可求得矩形孔的衍射光场强度的数值解(之所以是数值解，是因为菲涅耳积分实际上没有解析解的，只能用数值积分的方法求出)。式(4.5.64)和式(4.5.65)也可以有通过图4.5.8所示的考纽螺线通过几何作图的方法求出其数值解。另外，由于菲涅耳积分只能求数值解，人们会用一些不同形式的解析式来作为菲涅耳积分的近似计算公式。

下面我们由菲涅耳积分来讨论一下菲涅耳近似。考虑处在衍射屏原点处的脉冲响应函数，即式(4.4.3)变为

$$h(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{\lambda z} (x_i^2 + y_i^2) \right] + i \sin \left[\frac{\pi}{\lambda z} (x_i^2 + y_i^2) \right] \right\}$$

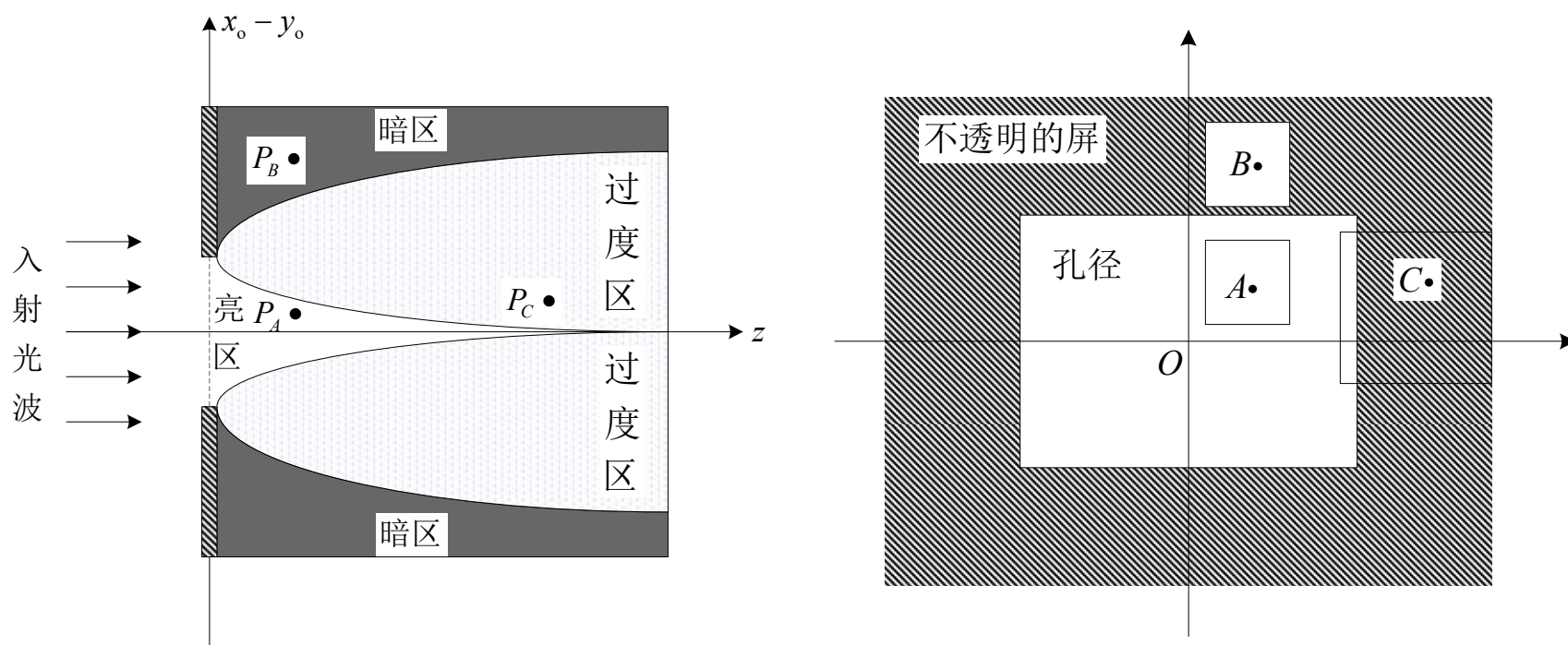
由前面的讨论可知，二次相位指数函数积分的模可写为：

$$\begin{aligned} I_x &= \left| \int_{-X}^X e^{i\pi x^2} dx \right| \\ &= \left| \sqrt{2}C(\sqrt{2}X) + i\sqrt{2}S(\sqrt{2}X) \right| \end{aligned}$$



上述结果很容易推广到二元函数的情形

$$h(x_i, y_i) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\pi \left[\left(\frac{x_i}{\sqrt{\lambda d}} \right)^2 + \left(\frac{y_i}{\sqrt{\lambda d}} \right)^2 \right]}$$



当考虑离孔径很近的距离 z 处，但菲涅耳近似依然成立时，这个距离范围称为菲涅耳区深处。为了求解这个问题，可以把式(4.5.41)写成如下等价的形式

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{iz\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x_o / a) e^{\frac{ik}{2z}(x_i - x_o)^2} dx_o \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(y_o / b) e^{\frac{ik}{2z}(y_i - y_o)^2} dy_o$$

这样的上式中的积分中除了稳相点附近之外，被积函数中的二次相位因子作快速振荡，正负项互相抵消，致使积分的主要贡献来自稳相点附近。可以用所谓的稳相法来求解。稳相法是求积分的一种渐近估计方法。

4.5.3 特殊矩形孔的菲涅耳衍射

一些实际的光学衍射问题，可以看成是矩形孔的变化。

1. 自由空间传播

这相当于孔径为无限大

$$a = b = \infty \longrightarrow x'_1 = y'_1 = -\infty, x'_2 = y'_2 = \infty$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2i} e^{ikz} (1+i)(1+i) = e^{ikz}$$

这就是垂直入射的单位振幅的平面波在自由空间中的传播情况，从这里也说明用菲涅耳积分方法计算矩形孔的衍射问题的自洽性。

2. 直边的衍射

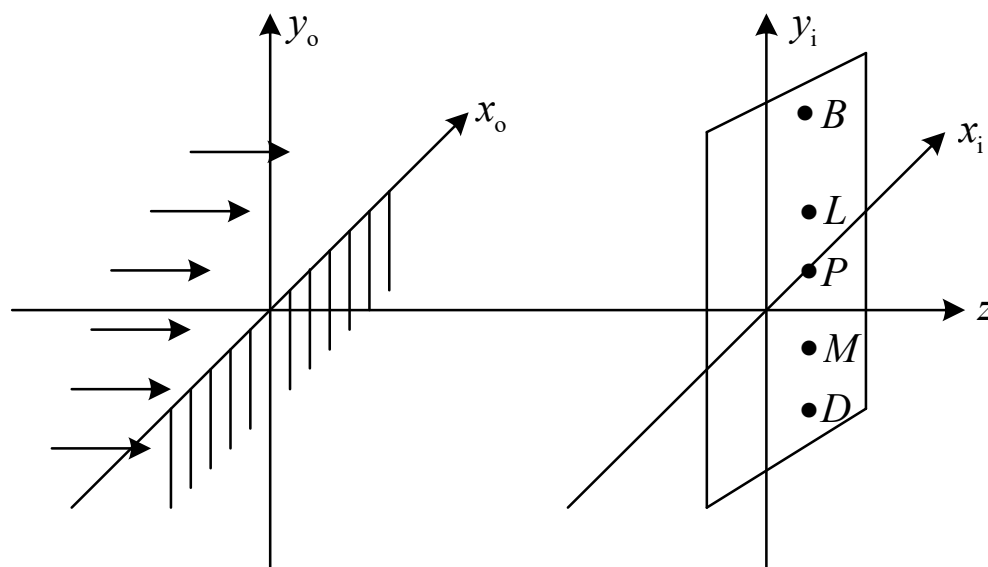
所以直边衍射，是指衍射屏为半无穷大平面

$$x'_1 = -\infty, x'_2 = \infty; y'_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} y_i, y'_2 = \infty$$

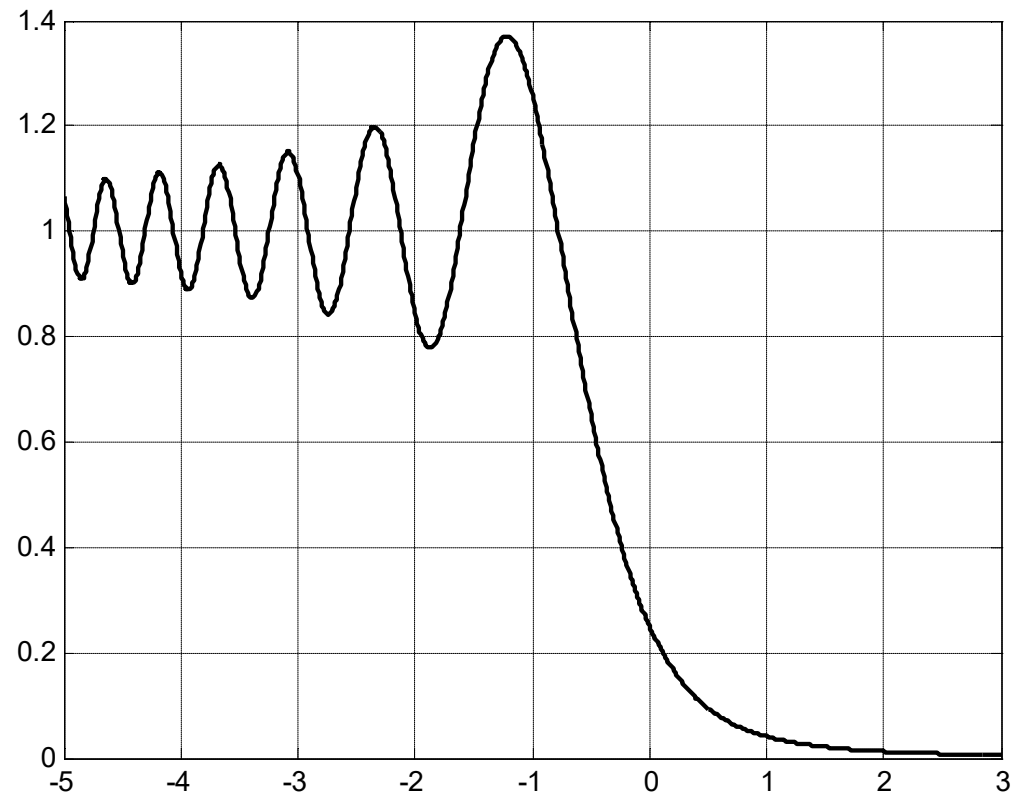
$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{2i} (1+i) \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(y'_1) \right] + i \left[\frac{1}{2} - S(y'_1) \right] \right\}$$

光强分布为

$$\begin{aligned} I_i(x_i, y_i) &= |U_i(x_i, y_i)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(y'_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(y'_1) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$



直边的菲涅耳衍射在照明区内的光强分布不是像几何光学那样均匀分布，而是呈干涉条纹状的分布，在照明区深处则为均匀照明。观察面上的衍射光强分布曲线如图所示。此曲线相当于观察点的位置是固定的，只改变衍射边的位置。



3. 长狭缝的菲涅耳衍射

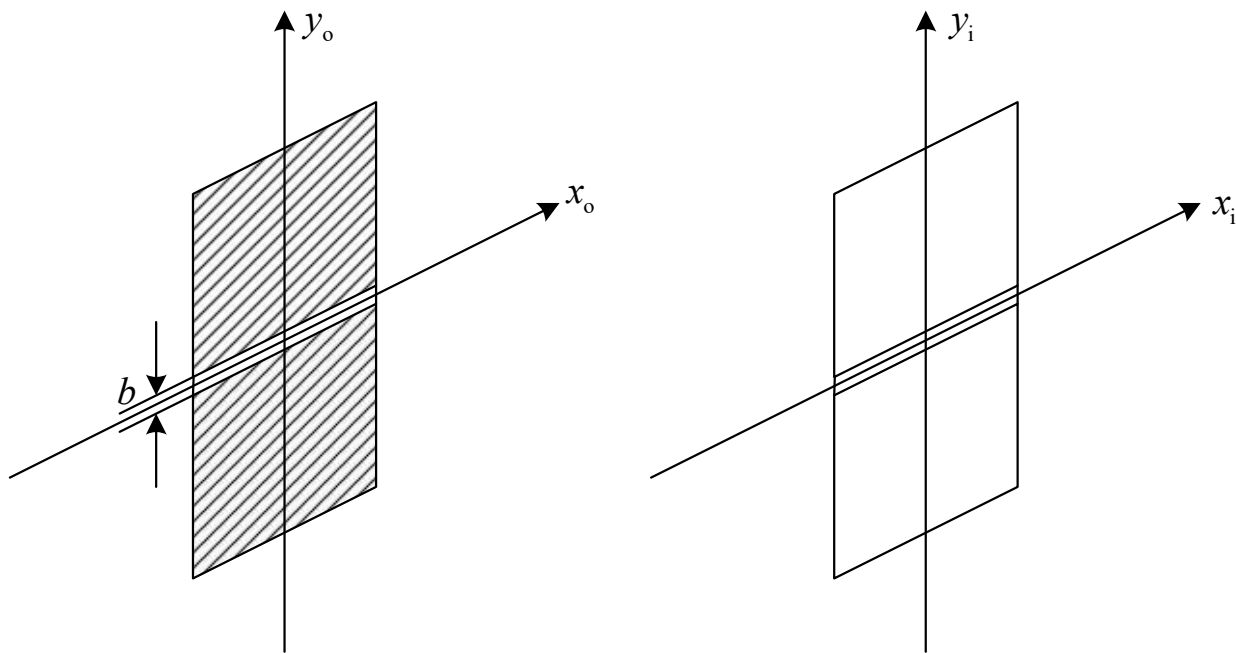
长狭缝的数学描述也可用特殊的矩形孔来描述

$$x'_1 = -\infty, x'_2 = \infty; y'_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda_z}}(b + y_i), y'_2 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda_z}}(b - y_i)$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{2i} (1+i) \{ [C(y'_2) - C(y'_1)] + i[S(y'_2) - S(y'_1)] \}$$

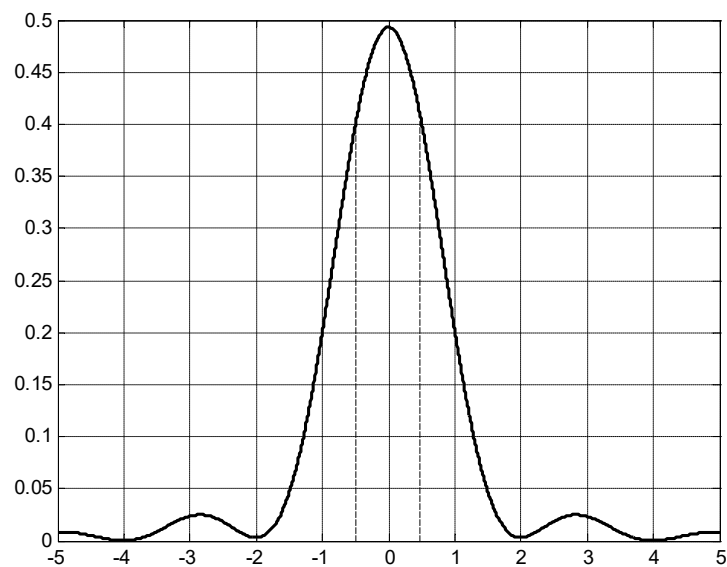
$$y'_0 = y'_2 - y'_1 = b\sqrt{\frac{2}{\lambda_z}}$$

一个无量纲的常数，
其大小反映了孔径尺寸
对于孔径间距离的
相对大小。

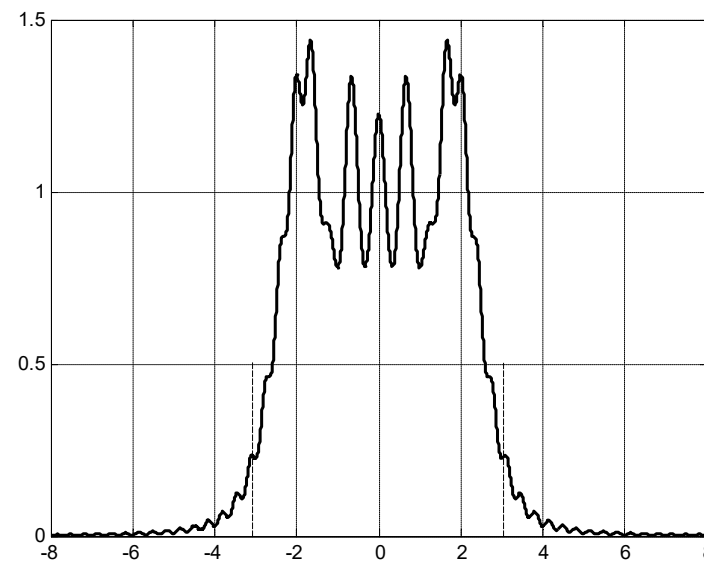


观测平面的光强分布为

$$I_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2} (1 + i) \{ [C(y'_1 + y'_0) - C(y'_1)]^2 + [S(y'_1 + y'_0) - S(y'_1)]^2 \}$$



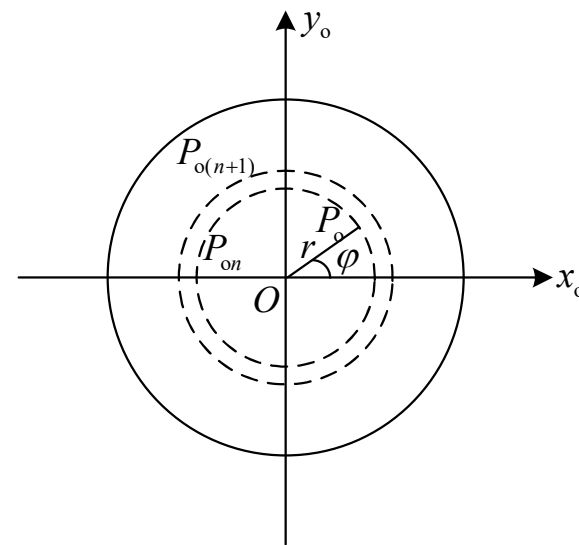
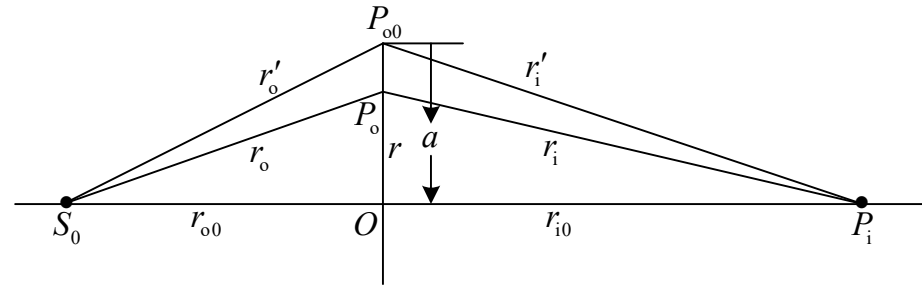
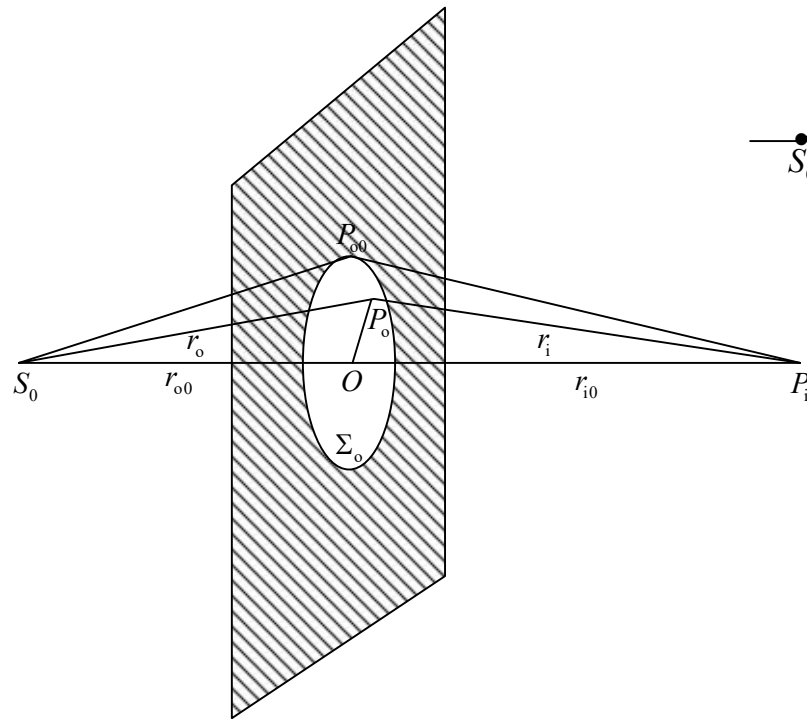
$y'_0 = 1.0$



$y'_0 = 6.0$

4.5.4 圆孔的菲涅耳衍射

圆孔的菲涅耳衍射的计算是比较复杂的，这里我们只讨论在光轴上圆孔的菲涅耳衍射这一较为简单的特例



$$U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_o} U_o(P_o) \frac{e^{ikr}}{r} \cos \theta ds$$



$$U_i(P_i) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_o} A_0 \frac{e^{ikr_o}}{r_o} \frac{e^{ikr_i}}{r_i} ds = \frac{A_0}{i\lambda} \iint_{\Sigma_o} \frac{e^{ik(r_o+r_i)}}{r_o r_i} ds$$



在极坐标系下

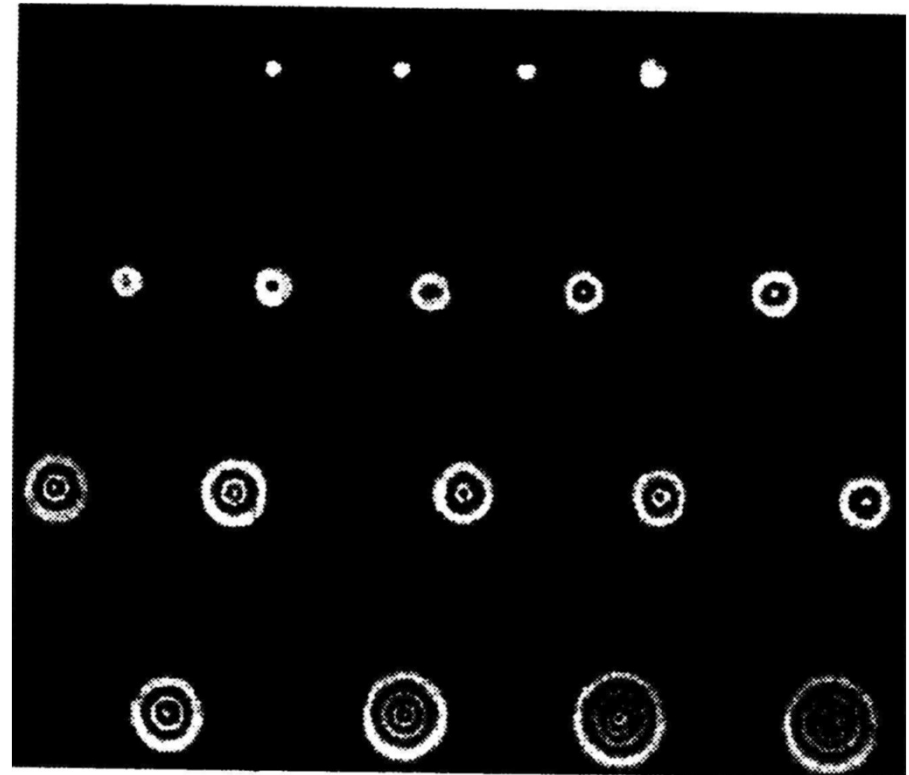
$$U_i(P_i) = \frac{A_0}{i\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \frac{e^{ik(r_o+r_i)}}{r_o r_i} dr$$

$$U_i(P_i) = \frac{2\pi A_0}{i\lambda} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{e^{ik\alpha}}{\alpha} d\alpha$$

$$U_i(P_i) \approx \frac{2\pi A_0}{i\lambda r_{o0}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{ik\alpha} d\alpha = U_{i0}(P_i) [1 - e^{i\pi m}]$$

$$I_i(P_i) = 4I_{i0}(P_i) \sin^2 \frac{m\pi}{2}$$

这就是说，在屏后面的轴上，将出现亮斑。这是由于圆屏外面传播的光波在轴上相遇时，当 m 为奇数时，它们同相位，为相干叠加，故形成亮斑。这个现象是法国科学家泊松在18世纪首先观察到的。也是菲涅耳用半波带方法讨论圆孔的菲涅耳衍射时曾得到的结果



4.6 夫琅禾费衍射的计算

4.6.1 矩形孔和狭缝

4.6.2 衍射光栅

4.6.3 圆形孔径

为了观测夫琅禾费衍射，要求光源与观测场点相对于衍射屏同时满足远场近似条件，也就是夫琅禾费衍射必须在远距离观测。在实际上，由于受到实验室大小的限制，以及在无限远处光能量太弱，因此不可能在太远的距离上观测夫琅禾费衍射。一种简单的解决方法是用一透镜将无穷远处的物体成像到透镜的后焦面，这样便可在近距离上观测夫琅禾费衍射，这种方法在第五章来讨论。另一种最简单的做法是用单色平面光波照射衍射屏，并在无限远的的垂轴平面上观测衍射图样。这一节夫琅禾费衍射的计算基于后一种方法。并且由式(4.4.14)可知，用傅里叶变换来处理夫琅禾费衍射场和衍射屏之间的关系，为计算夫琅禾费衍射的图样的光场分布提供一种简洁的方法。

通常约定采用的单色平面光波垂直照明孔径 $U_o(x_o, y_o) = 1$

其透过孔径的光场分布就等于孔径的透过率函数，即

$$U'_o(x_o, y_o) = t_o(x_o, y_o)$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\pi\lambda d(\xi^2 + \eta^2)} F\{t(x_o, y_o)\}_{\xi=x_i/\lambda z, \eta=y_i/\lambda z}$$

$$= \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\pi\lambda d(\xi^2 + \eta^2)} T(\xi, \eta)$$

物体的频谱，即物体的振幅透过率的傅里叶变换

$$T(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{-i2\pi(\xi x_o + \eta y_o)} dx_o dy_o$$

观察平面上的夫琅禾费衍射图样的复振幅正比于物体的频谱，所以夫琅禾费衍射的强度分布为：

$$I_i(x_i, y_i) = |U_i(x_i, y_i)|^2 = \frac{T^2(\xi, \eta)}{(\lambda d)^2} \propto T^2(\xi, \eta)$$


4.6.1 矩形孔和狭缝

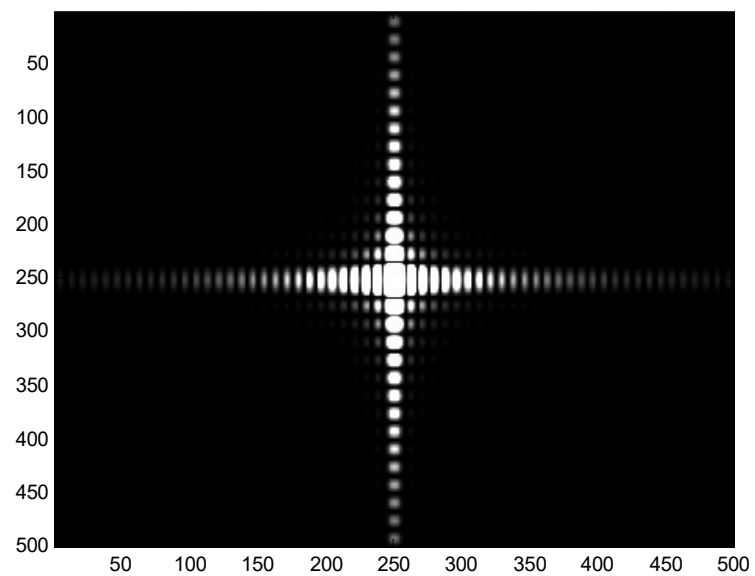
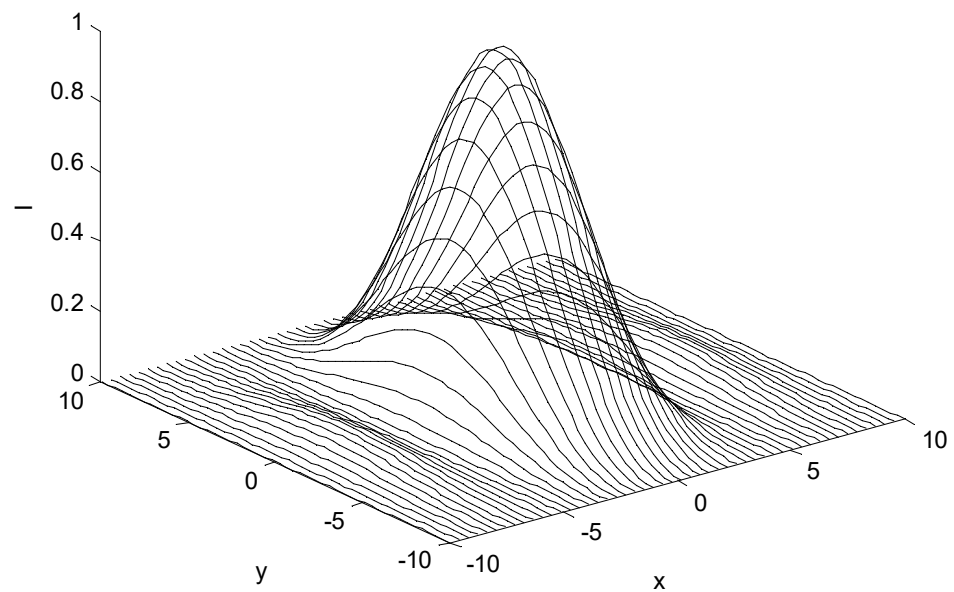
1. 矩形孔

矩形孔的透过率函数由式(4.5.1)，见图4.5.1所示。由式(4.6.2)可得观察平面上的夫琅禾费衍射光场的复振幅为

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} F\{t(x_o, y_o)\} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} \iint_{\Sigma_o} t(x_o, y_o) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x_i x_o + y_i y_o)} dx_o dy_o \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x_i x_o + y_i y_o)} dx_o dy_o = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} ab \operatorname{sinc}\left(\frac{ax_i}{\lambda z}, \frac{by_i}{\lambda z}\right) \end{aligned}$$

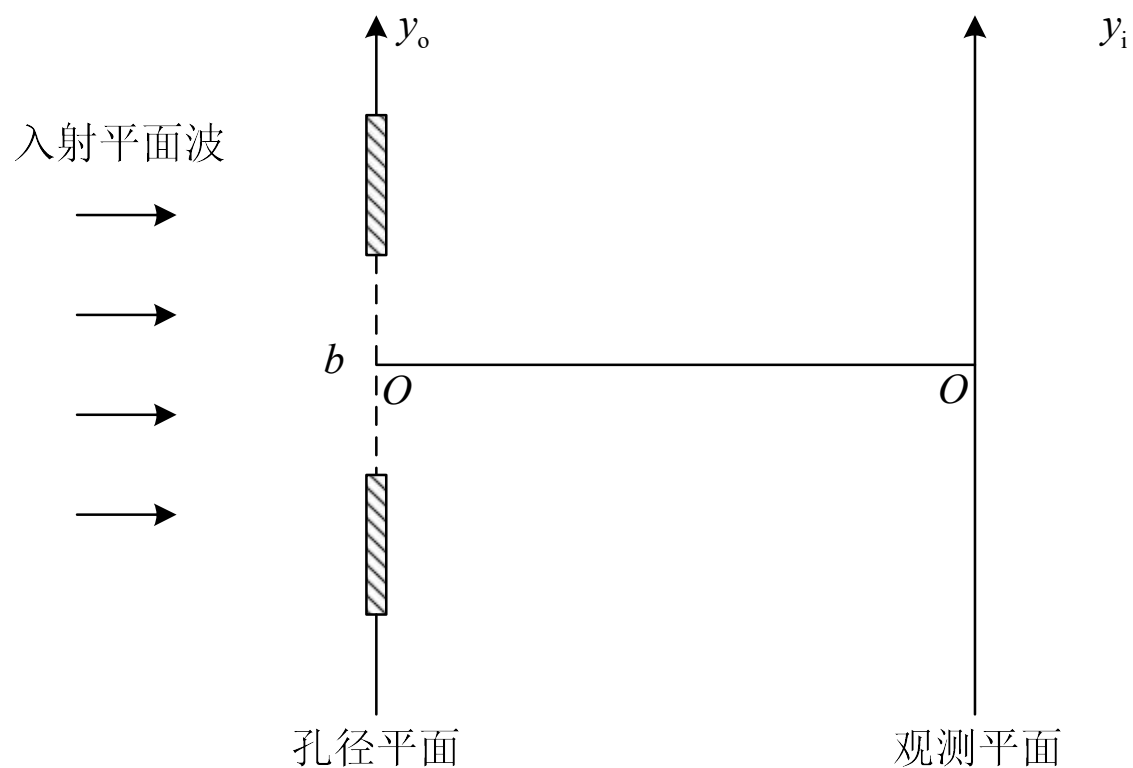
光强分布为：

$$I_i(x_i, y_i) = |U_i(x_i, y_i)|^2 = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ax_i}{\lambda z}, \frac{by_i}{\lambda z}\right) = I_{i0} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ax_i}{\lambda z}, \frac{by_i}{\lambda z}\right)$$

$$I_{i0} = I_{i0}(0, 0) = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2$$



2. 单狭缝


当矩形中的一边很长，另一边很短，矩形孔就变成了狭缝，如下图所示。所以狭缝(或称单缝)可视为矩形孔的特殊情形，其夫琅禾费衍射图样可以直接从矩形孔的夫琅禾费衍射图样中导出。

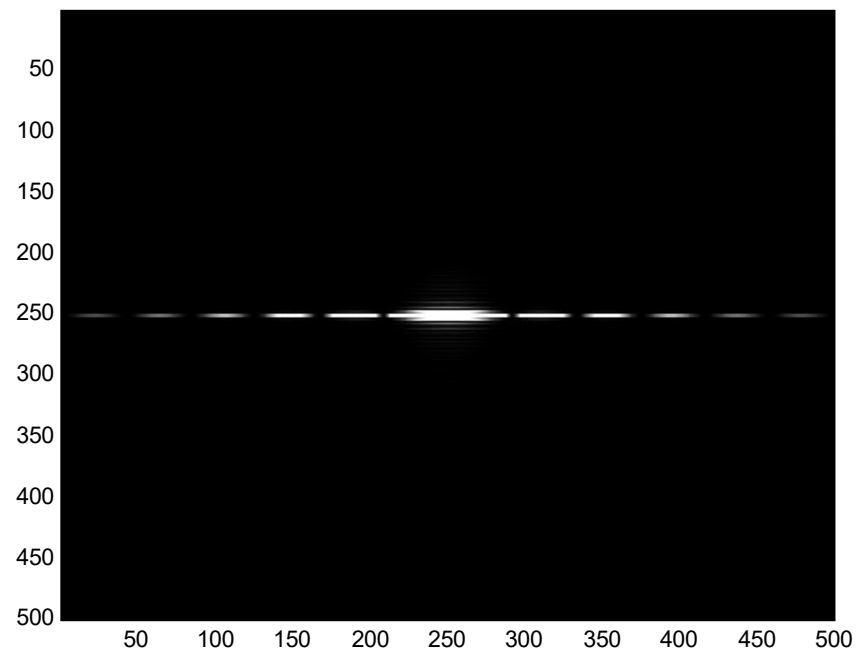
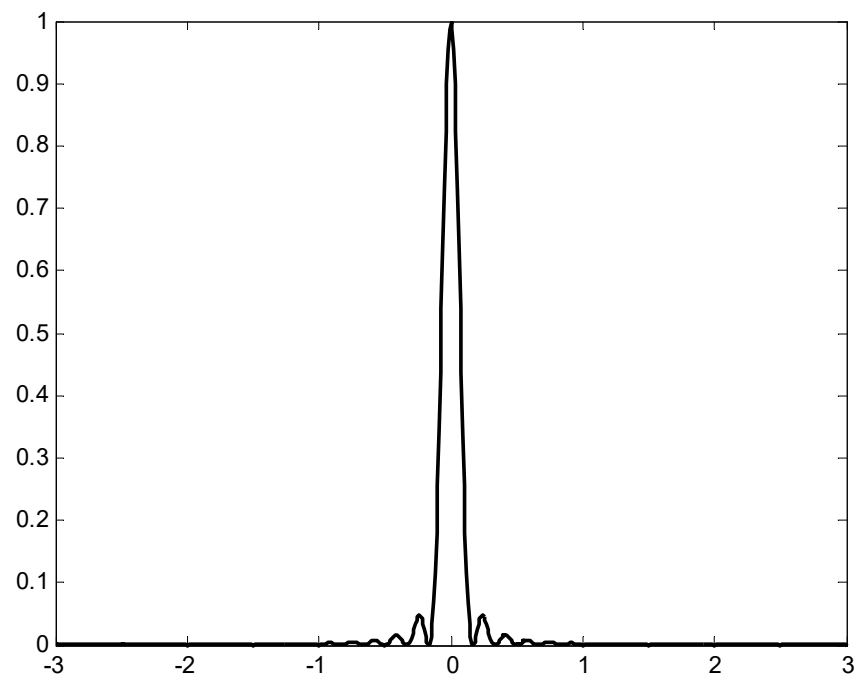


单缝相当于一维的矩形孔

$$\begin{aligned} U_i(y_i) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}y_i^2} F\{t(y_o)\} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}y_i^2} \iint_{\Sigma_o} t(y_o) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}y_i y_o} dy_o \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}y_i^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}y_i y_o} dy_o = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}y_i^2} b \operatorname{sinc}\left(\frac{by_i}{\lambda z}\right) \end{aligned}$$

$$I_i(y_i) = |U_i(y_i)|^2 = \left(\frac{b}{\lambda z}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{b}{\lambda z} y_i\right) = I_{i0} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{b}{\lambda z} y_i\right)$$

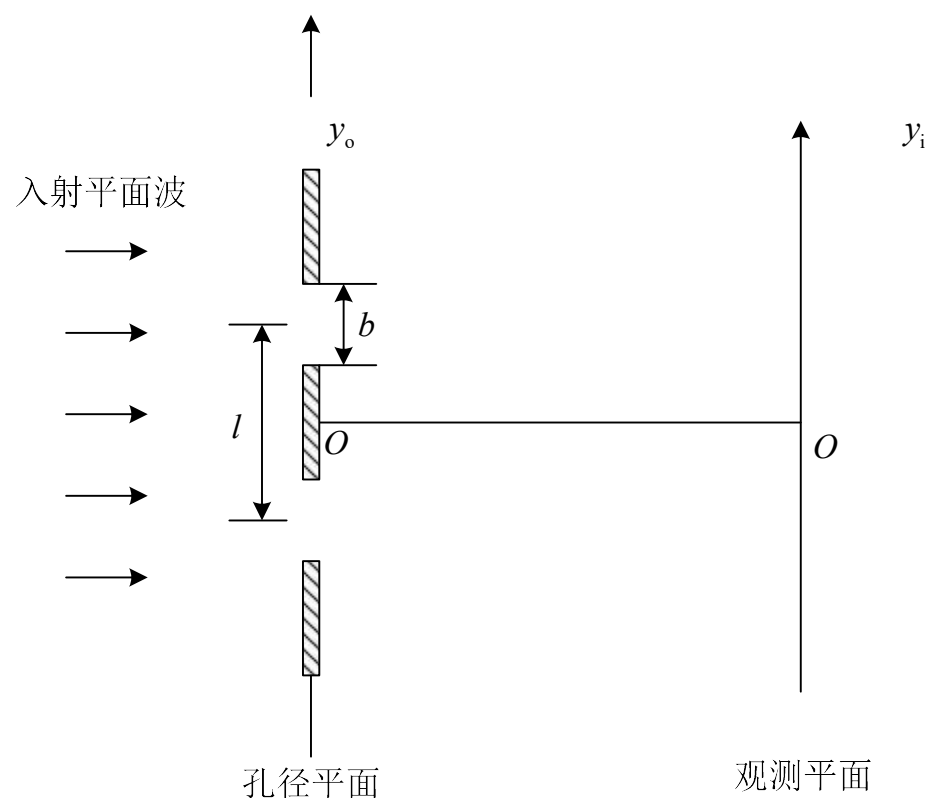
$$I_{i0} = I_{i0}(0) = \left(\frac{b}{\lambda z}\right)^2$$




3. 双狭缝

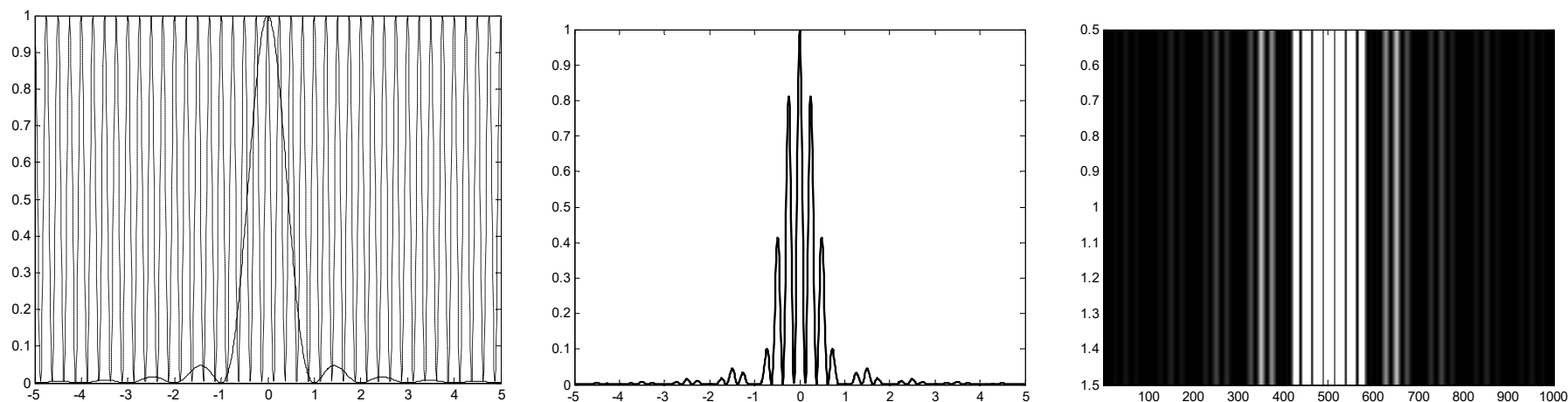
双狭缝可以认为是有二个宽度为 a , 距离为 l 的长缝组成, 这样其复振幅透过率可表示为

$$t(x_o, y_o) = \text{rect}\left(\frac{x_o - l/2}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x_o + l/2}{a}\right)$$



$$\begin{aligned}
U_i(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} F\{t(x_o, y_o)\} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{-i\frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o \\
&= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} \left[\int_{-\frac{l}{2} - \frac{a}{2}}^{-\frac{l}{2} + \frac{a}{2}} e^{-i\frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o + C \int_{\frac{l}{2} - \frac{a}{2}}^{\frac{l}{2} + \frac{a}{2}} e^{-i\frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o \right] \\
&= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} l \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_i\right) \left[e^{-i\frac{\pi l}{\lambda z} x_i} + e^{i\frac{\pi l}{\lambda z} x_i} \right] \\
&= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)} l \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_i\right) \cos\left(\frac{\pi l}{\lambda z} x_i\right)
\end{aligned}$$

$$I_i(x_i, y_i) = |U_i(x_i, y_i)|^2 = \left(\frac{l}{\lambda z}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{a}{\lambda z} x_i\right) \cos^2\left(\frac{\pi l}{\lambda z} x_i\right)$$

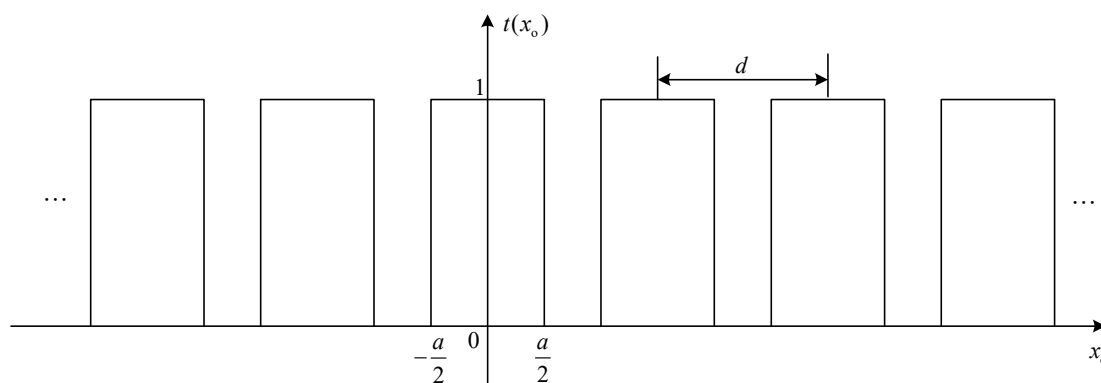
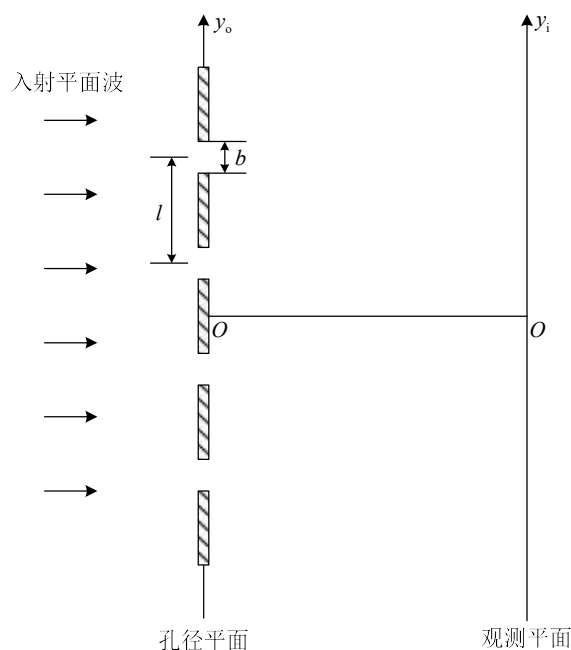


可以看出，双狭缝的衍射图为两个无限窄狭缝的杨氏干涉图与一个有限宽度的狭缝的衍射图的乘积。如图4.6.5所示，图4.6.5(a)和(b)中显示了单缝衍射图调制了两个无限窄狭缝所造成的干涉条纹。因此，这是一种干涉与衍射的综合效应。图4.6.4(c)所示的是双缝衍射图。

4. 多缝

全同狭缝构成的多缝，其透射率函数

$$\begin{aligned} t(x_o) &= \text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x_o - d}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x_o - 2d}{a}\right) + \cdots + \text{rect}\left[\frac{x_o - (N-1)d}{a}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{rect}\left(\frac{x_o - nd}{a}\right) = \sum_{n=1}^{N/2} \left[\text{rect}\left(\frac{x_o - (2n-1)d/2}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x_o + (2n-1)d/2}{a}\right) \right] \end{aligned}$$



衍射光场分布为：

$$U_i(x_i) = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} F\{t(x_o, y_o)\} = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{-i \frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o$$

$$= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} \sum_{n=1}^{N/2} \left[\int_{(2n-1)d/2-a/2}^{(2n-1)d/2+a/2} e^{-i \frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o + \int_{(2n-1)d/2-a/2}^{(2n-1)d/2+a/2} e^{-i \frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o \right]$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{\lambda z}$$

$$= \frac{de^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{ax_i}{\lambda z}\right) \sum_{n=0}^N e^{-i \frac{2\pi n d x_i}{\lambda z}}$$

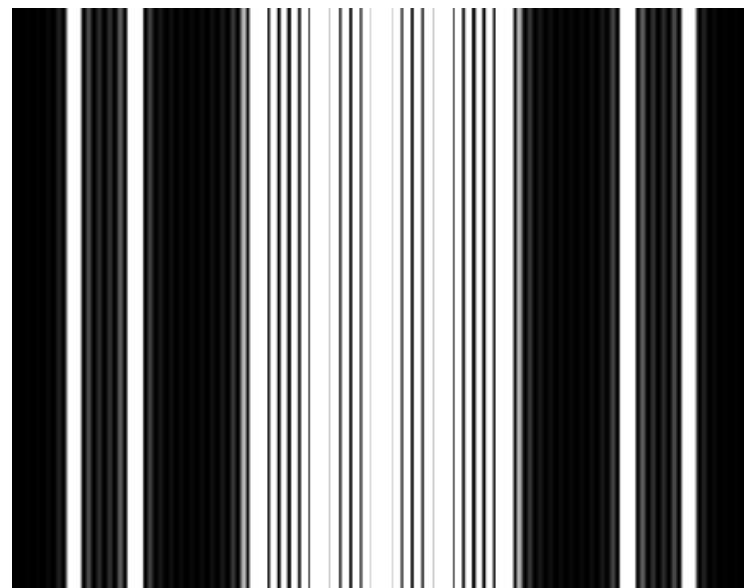
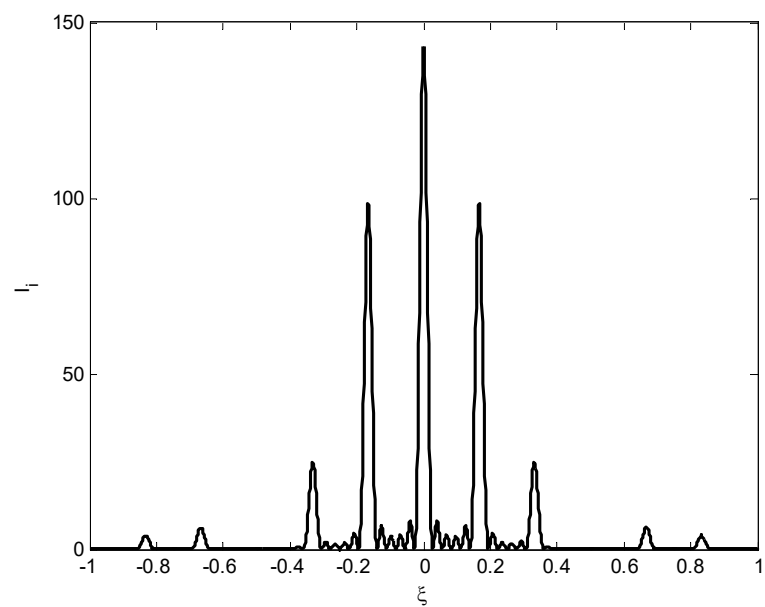
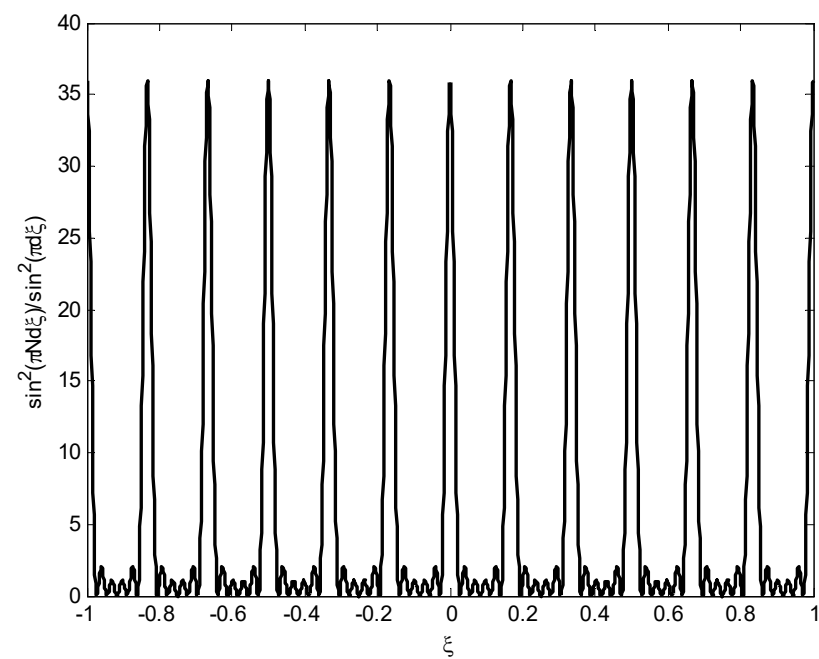
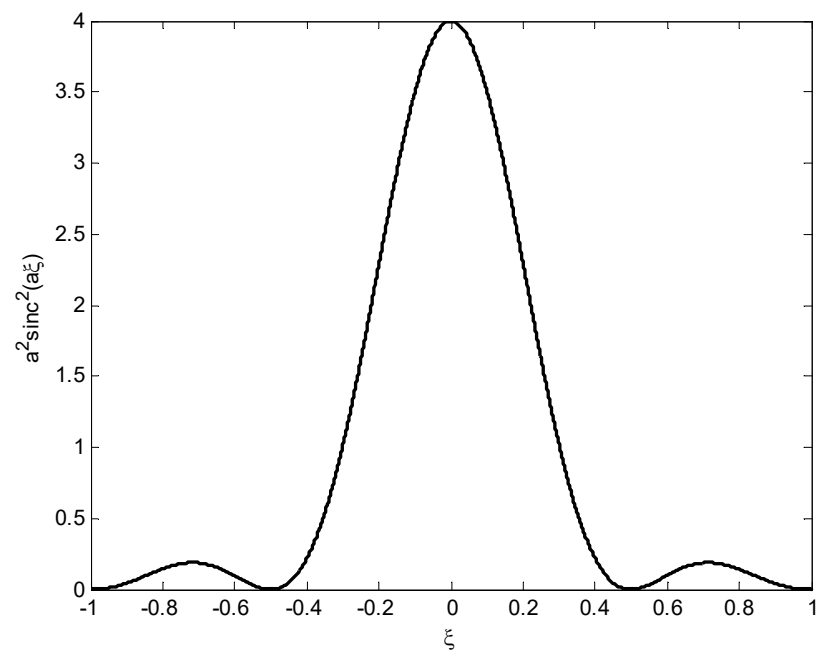
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i 2\pi \xi_i n d} = \frac{1 - e^{-i 2\pi \xi_i N d}}{1 - e^{-i 2\pi \xi_i d}} = e^{-i(N-1)\pi \xi_i d} \frac{\sin(\pi N \xi_i d)}{\sin(\pi \xi_i d)}$$

$$U_i(x_i) = \frac{de^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2} e^{-i(N-1)\pi \xi_i d}}{i\lambda z} \operatorname{sinc}(a\xi_i) \frac{\sin(\pi N \xi_i d)}{\sin(\pi \xi_i d)}$$

$$I_i(x_i) = |U_i(x_i)|^2 = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2 \operatorname{sinc}^2(a\xi) \frac{\sin^2(\pi N \xi d)}{\sin^2(\pi \xi d)}$$

单缝衍射

多光束的干涉



$$\pi \xi d = N\pi$$

空间频率，又称为傅里叶的基频

$$\xi = 0, \pm \frac{1}{d}, \pm \frac{2}{d}, \dots$$

$$\Delta \xi = \frac{2}{Nd}$$

条纹主极大宽度

4.6.2 衍射光栅

通常衍射光栅都是基于夫琅禾费衍射效应进行工作的。衍射光栅的夫琅禾费衍射图样称为光栅光谱，它是焦平面上的一条条亮而细的条纹，这些条纹的位置随着照明波长而变。因此，包含有不同波长的复色光经过光栅后，每一个波长都形成各自一套条纹，且彼此错开一定距离，借此可以区分出照明光波的光谱组成，这就是光栅的分光作用。讨论光栅衍射的问题时，会用到2.7.2中所讲述的列阵定理。

1. 线光栅

光栅通常是指在一块玻璃片上刻上 N 条(通常 N 很大)等宽度、等间隔的平行刻痕或条纹，刻痕部位不透光，刻痕之间的光滑部分透光，这就相当于 N 个许多等宽度的狭缝等间隔地平行排列，这样结构的光栅为线光栅。这种透明和不透明交替的结构会使入射光波的振幅，这种光栅称为透射型振幅光栅。

由前面的讨论可知，这样结构的矩形光栅的振幅透射率函数可以有如下的表达方式

$$t(x_o) = \text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x_o - d}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x_o - 2d}{a}\right) + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x_o - nd}{a}\right)$$

$$t(x_o) = \text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_o - nd) = \text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x_o}{d}\right)$$

线光栅的夫琅禾费衍射的复振幅为：

$$\begin{aligned} U_i(x_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} F\{t(x_o)\} = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} F\left\{\text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x_o}{d}\right)\right\} \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2} F\left\{\text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right)\right\} \cdot F\left\{\frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x_o}{d}\right)\right\} = \frac{ae^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i} \text{sinc}\left(\frac{ax_i}{\lambda z}\right) \text{comb}\left(\frac{dx_i}{\lambda z}\right) \\ &= \frac{ae^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{id} \text{sinc}\left(\frac{ax_i}{\lambda z}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x_i - \frac{n\lambda z}{d}\right) \end{aligned}$$

光强分布为：

$$I_i(x_i) = |U_i(x_i)|^2 = a^2 \text{sinc}^2\left(\frac{ax_i}{\lambda z}\right) \text{comb}^2\left(\frac{dx_i}{\lambda z}\right)$$
$$= \left(\frac{a}{d}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{ax_i}{\lambda z}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x_i - \frac{n\lambda z}{d}\right)$$

从上式右边可以看同，实际上上式梳状函数的平方指数也是可以略去的。从上式可以看出，衍射光强分布是由以**sinc**函数的平方包络的分立谱组成，在观察平面上得到一排谱点，各谱点的相对强度取决于 $\text{sinc}^2(ax_i / \lambda z)$ 。由**2.6**节关于函数抽样定理要，上式相当于对**sinc**函数平方的抽样过程。

前面讨论的夫琅禾费衍射都是由无穷大不透明屏上的孔径产生的，其透射率函数都具有下列形式：

$$t(x_0, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{在孔径内} \\ 0 & \text{在孔径外} \end{cases}$$

但也可以在给定的孔径内引入一个预先给定的透射率函数。实际的光栅尺寸总是有限的，因而一个实际的光栅的狭缝数目也是有限的。若光栅整体孔径是边长 L 的正方形，即相当于用一个二维矩阵函数来截取由式(4.6.21)所表示的无穷多个狭缝的线光栅，这样的有限尺寸的线光栅的振幅透过率函数可表示为：

$$t(x_o, y_o) = \left[\text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x_o}{a}\right) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{x_o}{L}, \frac{y_o}{L}\right)$$

用单位振幅的单色平面波垂直照明时，其夫琅禾费衍射的复振幅分布为：

$$\begin{aligned} U(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} F\{t(x_o, y_o)\} \\ &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} [a \operatorname{sinc}(a\xi) \cdot \operatorname{comb}(d\xi)] * L^2 \operatorname{sinc}(L\xi, L\eta) \\ &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} \frac{a}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}\left(\frac{an}{d}\right) \cdot \delta\left(\xi - \frac{n}{d}\right) * L^2 \operatorname{sinc}(L\xi, L\eta) \\ &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} \frac{aL^2}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}\left(\frac{an}{d}\right) \operatorname{sinc}\left[L\left(\xi - \frac{n}{d}\right)\right] \operatorname{sinc}(L\eta) \\ &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} \frac{aL^2}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}\left(\frac{an}{d}\right) \operatorname{sinc}\left[L\left(\frac{x_i}{\lambda z} - \frac{n}{d}\right)\right] \operatorname{sinc}\left(\frac{Ly_i}{\lambda z}\right) \end{aligned}$$

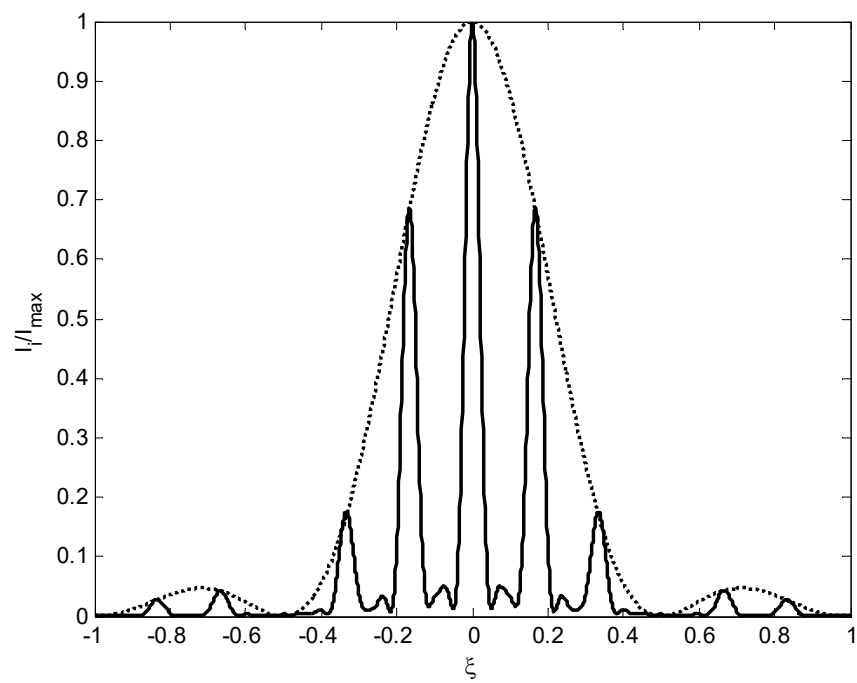
如果观察平面上的谱点之间间隔足够大，以至可以忽略各衍射项衍射之间的交叠，图样上不会出现各个衍射级之间的重叠，这时，光强的分布为：

$$I_i = |U_i(x_i, y_i)|^2 = \left(\frac{aL^2}{\lambda z d} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{an}{d} \right) \operatorname{sinc}^2 \left[L \left(\frac{x_i}{\lambda z} - \frac{n}{d} \right) \right] \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{Ly_i}{\lambda z} \right)$$
$$I_i = |U_i(x_i)|^2 = \left(\frac{aL^2}{\lambda z d} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{an}{d} \right) \operatorname{sinc}^2 \left[L \left(\frac{x_i}{\lambda z} - \frac{n}{d} \right) \right]$$

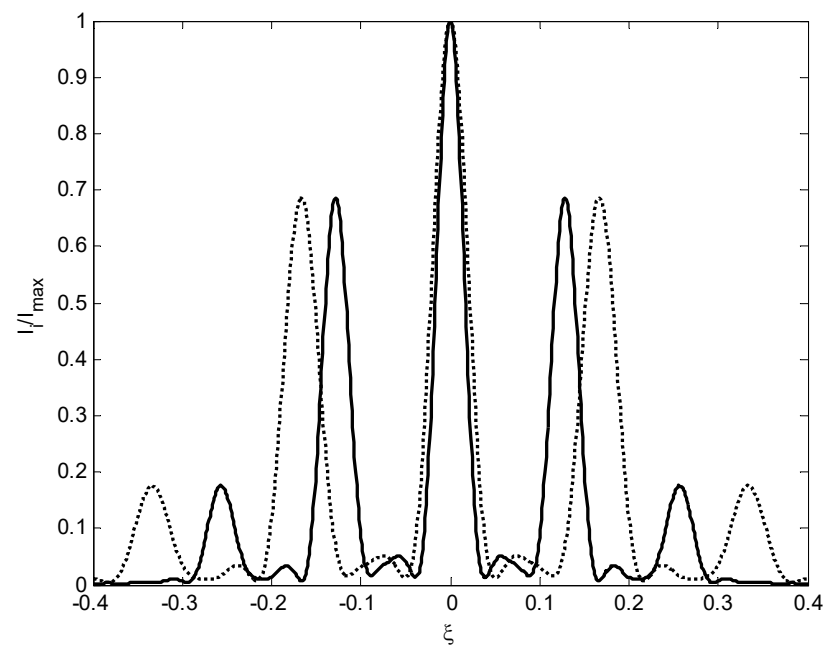
分辨本领是指分辨两个波长很靠近的谱线的能力。根据瑞利判据，一条谱线的第一个极小值重合时，两条谱线刚好能分辨

$$\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} = \frac{mL}{d}$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$



线光栅衍射的强度分布



线光栅的分辨率

从上面结果可以看到，在光栅衍射中通常 ± 1 级衍射是显著。为此，可以定义衍射效率来描述不同光栅的衍射一级项的相对强度，其定义为

$$\zeta = \frac{I_1}{I}$$

对无限多个单狭缝光，如式(4.6.20)所表示的振幅透过率在一半方波周期内为 0 ，在其余处为 1 。这种周期方波可用傅里叶级数展开，其展开式的前两项为

$$t(x_o) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi \xi_0 x_{o0}) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} [e^{i2\pi \xi_0 x_{o0}} + e^{-i2\pi \xi_0 x_{o0}}] + \cdots$$

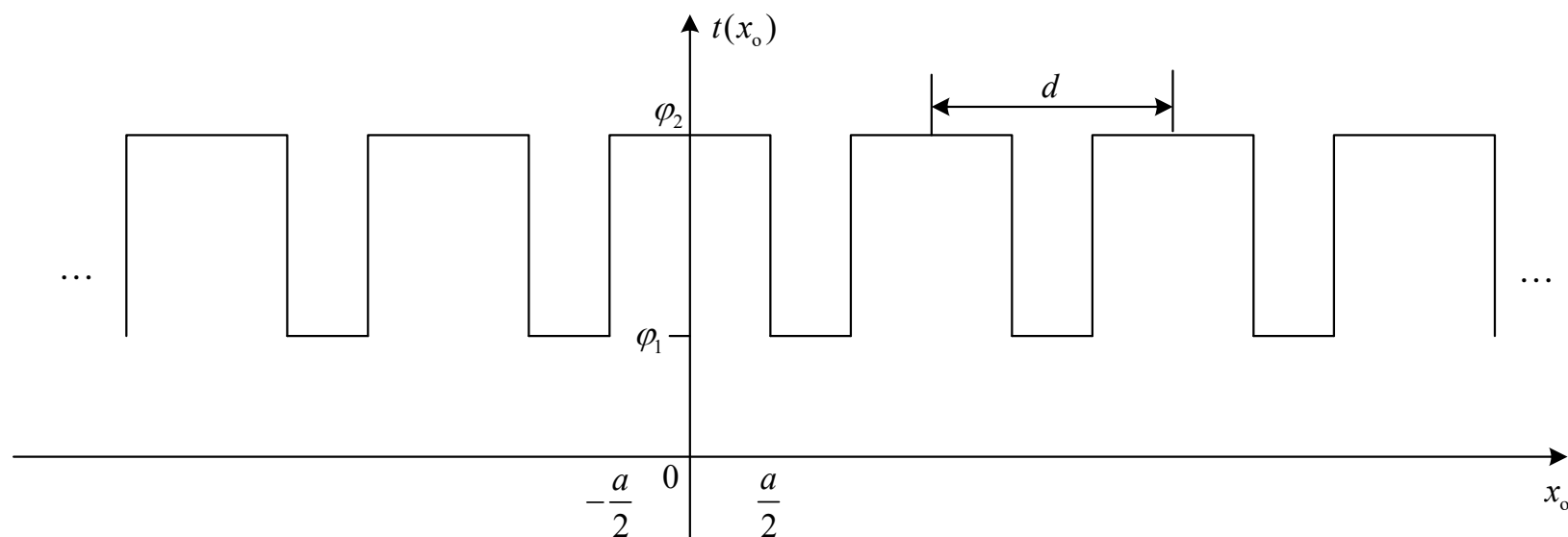
可得其一级衍射效率为：

$$\zeta = \frac{1}{\pi^2} = 10.1\%$$

2. 矩形相位光栅

矩形相位光栅的复振幅透过率可以表示为

$$t(x_o, y_o) = (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}) \text{rect}\left(\frac{x_o}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x_o}{d}\right) + e^{i\varphi_1}$$



对式(4.6.33)作傅里叶变换，利用卷积定理，可以求出光栅的频谱为：

$$T(\xi, \eta) = (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}) a \operatorname{sinc}(a\xi) \operatorname{comb}(d\xi) \delta(\eta) + e^{i\varphi_1} \delta(\xi, \eta)$$

用单位振幅的单色平面波垂直照明光栅，其夫琅禾费衍射的复振幅分布为

$$\begin{aligned} U(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} F\{t(x_o, y_o)\} = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} T(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x_i}{\lambda z}, \eta=\frac{y_i}{\lambda z}} \\ &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} \left[(e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}) \frac{a}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{an}{d}\right) \delta\left(\frac{x_i}{\lambda z} - \frac{n}{d}, \frac{x_i}{\lambda z}\right) + e^{i\varphi_1} \delta\left(\frac{x_i}{\lambda z}, \frac{x_i}{\lambda z}\right) \right] \end{aligned}$$

忽略各衍射项之间的交叠

最大衍射效率

$$\zeta = \frac{4}{\pi^2} = 40.4\%$$

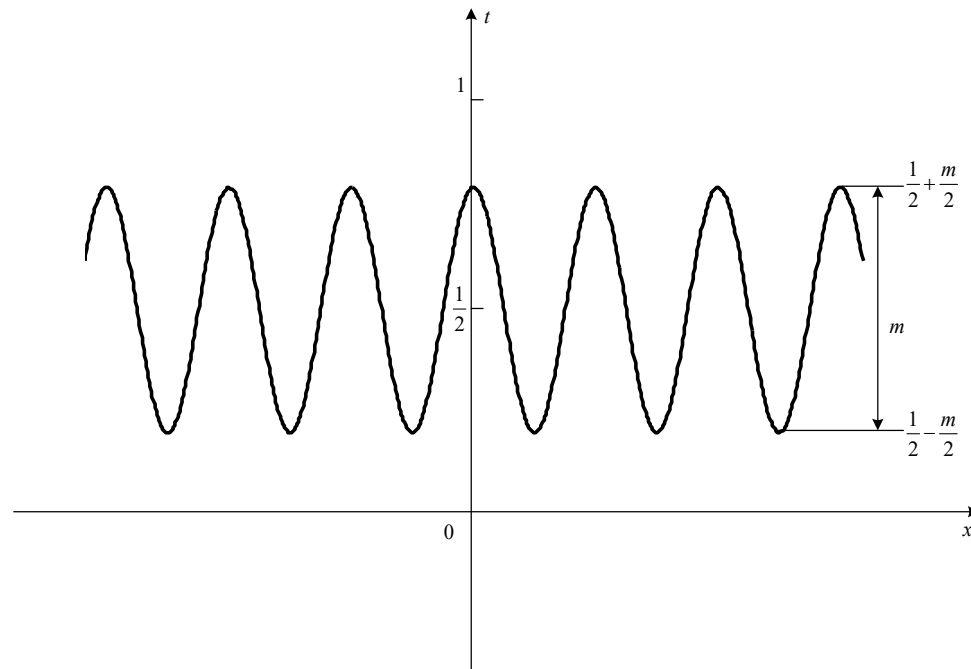
$$I(x_i, y_i) = |U(x_i, y_i)|^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 \left\{ 2[1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{an}{d}\right) \delta\left(\frac{x_i}{\lambda z} - \frac{n}{d}, \frac{x_i}{\lambda z}\right) + \delta\left(\frac{x_i}{\lambda z}, \frac{x_i}{\lambda z}\right) \right\}$$

3. 余弦光栅

在前面所讨论的线光栅中，透过率 t 的取值为**1**或**0**，因而是以矩形波的形式对入射光波产生振幅调制。而余弦型振幅光栅的透过率可以是在**0~1**之间、或者其中的某一区间上的全部实数值，它是以余弦波的形式对入射光波产生振幅调制的。对被宽度为 **L** 的方孔径所限定的余弦型振幅光栅的透射率函数可定义为：

$$t(x_o, y_o) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi \xi x_o) \right]$$



利用卷积定理，可以求出光栅的频谱为：

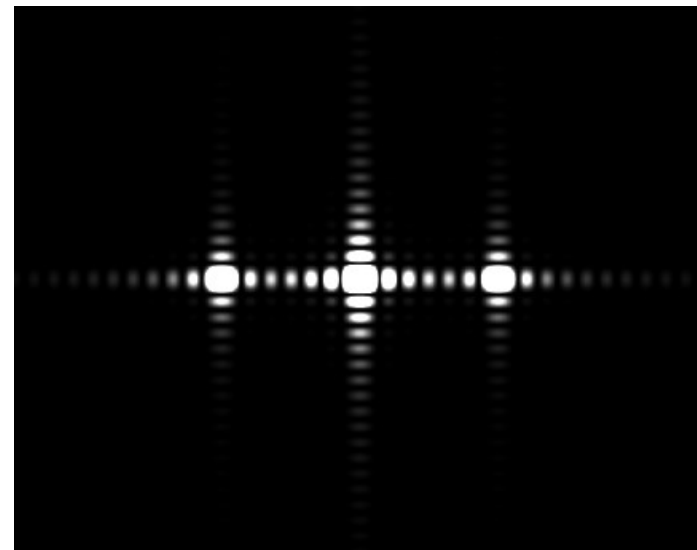
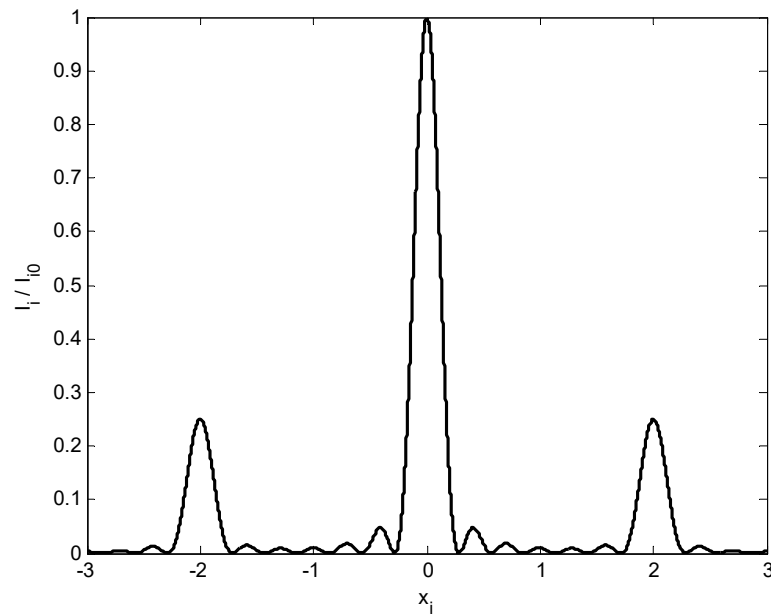
$$\begin{aligned}
 T(\xi_o, \eta_o) &= \left[\frac{1}{2} \delta(\xi_o, \eta_o) + \frac{m}{4} \delta(\xi_o + \xi_0, \eta_o) + \frac{m}{4} \delta(\xi_o - \xi_0, \eta_o) \right] L^2 \text{sinc}(L\xi_o, L\eta_o) \\
 &= \frac{L^2}{2} \text{sinc}(L\eta_o) \left\{ \text{sinc}(L\xi_o) + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(\xi_o + \xi_0)] + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(\xi_o - \xi_0)] \right\}
 \end{aligned}$$

观察平面上的夫琅禾费衍射光场复振幅：

$$\begin{aligned}
 U(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} F\{t(x_o, y_o)\} = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} T(\xi_i, \eta_i) \Big|_{\xi_i = \frac{x_i}{\lambda z}, \eta_i = \frac{y_i}{\lambda z}} \\
 &= \frac{L^2 e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i2\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{Ly_i}{\lambda z}\right) \\
 &\quad \cdot \left\{ \text{sinc}\left(\frac{Lx_i}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\left(\frac{L}{\lambda z}(x_i + \xi_0 \lambda z)\right)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\left(\frac{L}{\lambda z}(x_i - \xi_0 \lambda z)\right)\right] \right\}
 \end{aligned}$$

三个**sinc**函数间的重叠很小，可以忽略，这样强度分布为：

$$I(x_i, y_i) = |U(x_i, y_i)|^2 = \left(\frac{L^2}{2\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{Ly_i}{\lambda z} \right) \cdot \left\{ \text{sinc}^2 \left(\frac{Lx_i}{\lambda z} \right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2 \left[\left(\frac{L}{\lambda z} (x_i + \xi_0 \lambda z) \right) \right] + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2 \left[\left(\frac{L}{\lambda z} (x_i - \xi_0 \lambda z) \right) \right] \right\}$$



光栅分辨本领为 $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \xi_0 L = N$

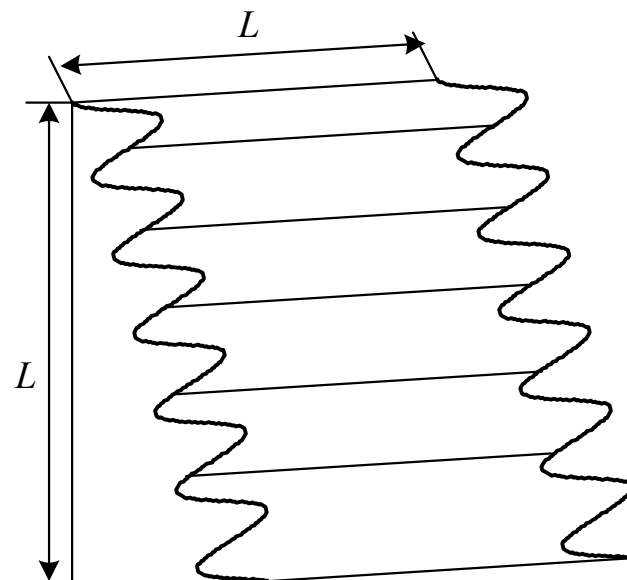
余弦型光栅的最大衍射效率为： $\zeta = \frac{1}{16} = 6.25\%$

4. 正弦型相位光栅

当光栅完全透明时，振幅调制可以忽略不计。但如果光栅的厚度是有规则变化从而产生周期性的相位调制，这主要是透射相位光栅。对于薄的正弦型相位光栅的复振幅透过率函数可表示为：

$$t(x_o, y_o) = e^{\frac{im}{2}\sin(2\pi\xi_0 x_o)} \text{rect}\left(\frac{x_o}{L}, \frac{y_o}{L}\right)$$

$$e^{\frac{im}{2}\sin(2\pi\xi_0 x_o)} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) e^{i2\pi q\xi_0 x_o}$$



$$\begin{aligned}
T(\xi_o, \eta_o) &= F\{t(x_o, y_o)\} = F\left\{e^{\frac{im}{2}\sin(2\pi\xi_o x_o)}\right\} * F\left\{\text{rect}\left(\frac{x_o}{L}, \frac{y_o}{L}\right)\right\} \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) F\{e^{i2\pi q\xi_o x_o}\} * L^2 \text{sinc}(L\xi_o, L\eta_o) \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \delta(\xi_o - q\xi_o, \eta) * L^2 \text{sinc}(L\xi_o, L\eta_o) \\
&= L^2 \text{sinc}(L\eta_o) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \text{sinc}[L(\xi_o - q\xi_o)]
\end{aligned}$$

夫琅禾费衍射光场分布为

$$\begin{aligned}
U(x_i, y_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} F\{t(x_o, y_o)\} = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} T(\xi_i, \eta_i) \Big|_{\xi_i = \frac{x_i}{\lambda z}, \eta_i = \frac{y_i}{\lambda z}} \\
&= \frac{L^2 e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x_i^2 + y_i^2)}}{i\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{Ly_i}{\lambda z}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \text{sinc}\left[L\left(\frac{x_i}{\lambda z} - q\xi_o\right)\right]
\end{aligned}$$

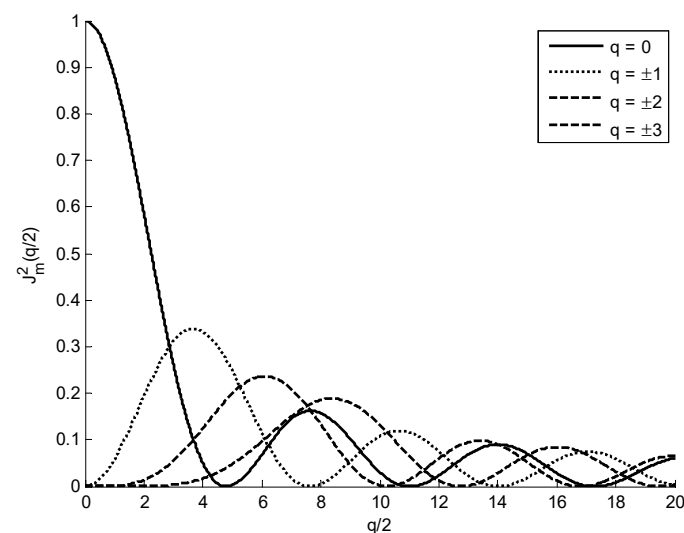
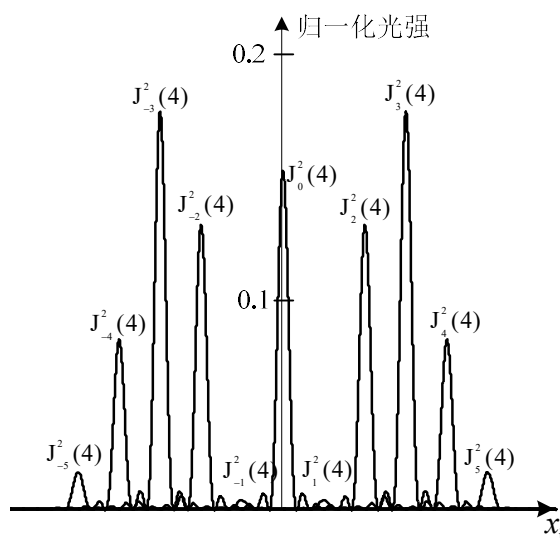
不同衍射级次之间交叉相乘的各项可以忽略。这样，衍射强度分布可写成：

$$I_i(x_i, y_i) = \left(\frac{L^2}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{Ly_i}{\lambda z} \right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2 \left(\frac{m}{2} \right) \text{sinc}^2 \left[\frac{L}{\lambda z} (x_i - \lambda z q \xi_0) \right]$$

正弦型相位光栅的分辨本领为： $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{|\lambda - \lambda_1|} = q\xi_0 L = qN$

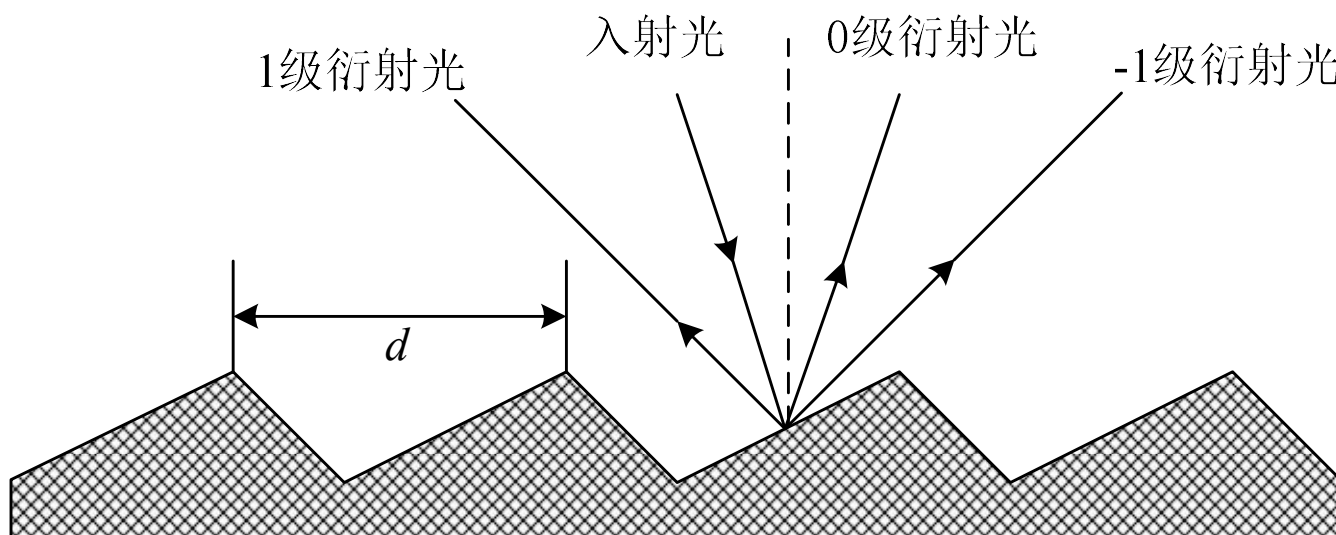
光栅衍射中第 q 阶的衍射效率为 $\eta_q = J_q^2 \left(\frac{m}{2} \right)$

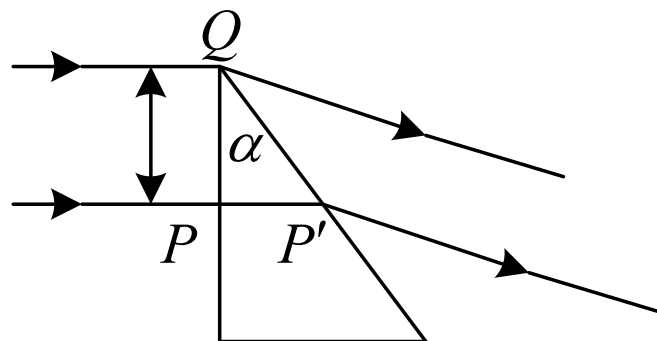
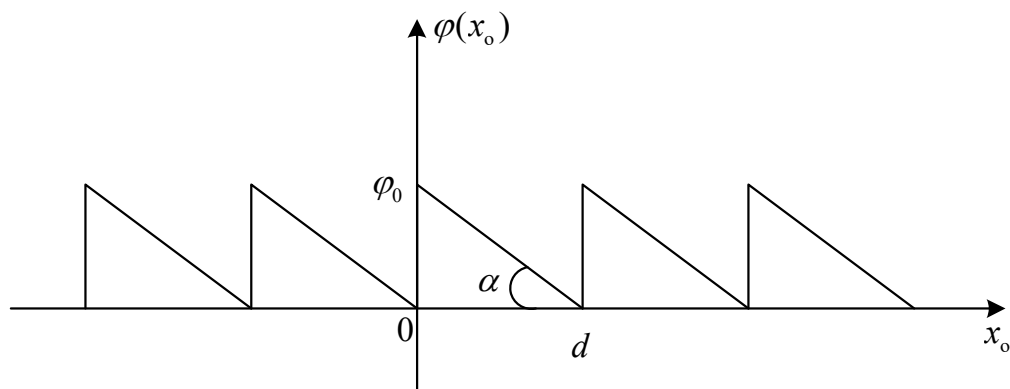
最大衍射效率为**33.9%**



5. 闪耀光栅

从上面讨论可知，在大多数光栅的衍射结构中，光能量主要集中在低衍射级上。而在光谱应用中，更重要的则是将尽可能多的光衍射到某一特定的高衍射序上，以获得更高的信噪比。为此，现代微细加工可以根据需要把光栅线槽刻成特定的形状，如下图所示。采用这种刻线光栅，可使大部分光能量集中在高衍射序上，称为闪耀光栅。





$$t_0(x_o) = e^{ik(n-1)\alpha x_o} \text{rect}\left(\frac{x_o}{d}\right)$$

$$t(x_o) = e^{ik(n-1)\alpha x_o} \text{rect}\left(\frac{x_o}{d}\right) * \sum_{m=1}^N \delta(x_o - md)$$

$$\begin{aligned}
U_i(x_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} F\{t(x_o)\} = \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_o) e^{-i\frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o \\
&= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} \int_{-d/2}^{d/2} e^{ik(n-1)\alpha x_o} \text{rect}\left(\frac{x_o}{d}\right) e^{-i\frac{2\pi x_i x_o}{\lambda z}} dx_o * \sum_{m=1}^N \delta(x_o - md) \\
&= \frac{d e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} x_i^2}}{i\lambda z} \text{sinc}\left[\frac{1}{\lambda}(n-1)\alpha d - \frac{dx_i}{\lambda z}\right] \cdot \sum_{m=1}^N \delta\left(x_o - \frac{m\lambda z}{d}\right)
\end{aligned}$$

将上式与由无限多个平行狭缝构成的线光栅衍射公式(4.6.22)相比，二者唯一差别仅在于衍射图形的位移。

4.6.3 圆形孔径

1. 圆孔

圆形光阑是常用的光学元件，它的无像差成像可以用圆形孔径的夫琅禾费衍射求出。圆孔的透射率函数可用圆柱函数表示，即

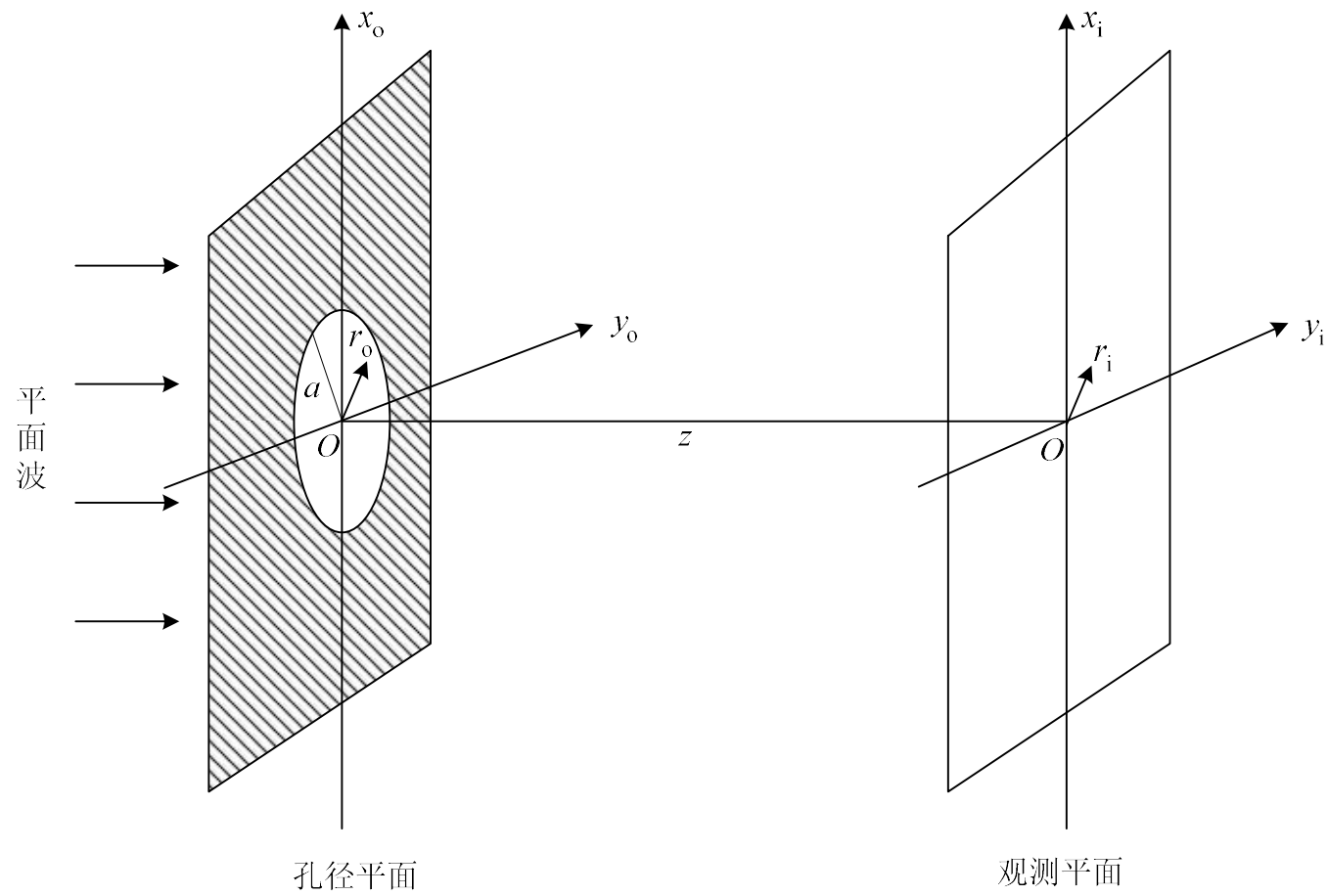
孔径平面上的径向坐标

$$t(r_o) = \text{circ}\left(\frac{r_o}{a}\right)$$

圆孔的半径

显然，圆孔是圆对称的孔径，对其透过率函数可用利用傅里叶-贝塞尔变换

$$B\{t(r_o)\} = \pi a^2 \frac{2J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho}$$



$$\begin{aligned}
 U_i(r_i) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} r_i^2}}{i\lambda z} B\{t(r_o)\}_{\rho=r_i/\lambda z} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z} r_i^2} \pi a^2 \frac{2J_1(2\pi a \rho)}{2\pi a \rho} \Big|_{\rho=r_i/\lambda z} \\
 &= \frac{\pi a^2 e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} r_i^2}}{i\lambda z} \cdot \left[2 \frac{J_1(2\pi a r_i / \lambda z)}{2\pi a r_i / \lambda z} \right] = \frac{k a^2 e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} r_i^2}}{i2z} \cdot \left[\frac{2J_1(k a r_i / z)}{k a r_i / z} \right]
 \end{aligned}$$

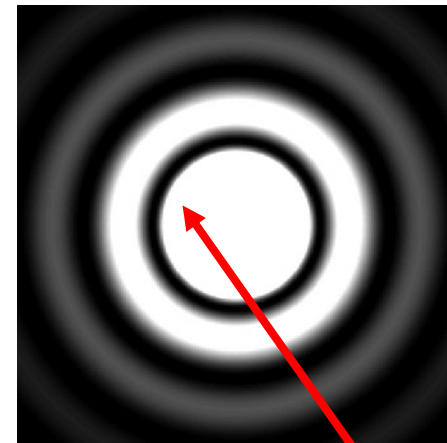
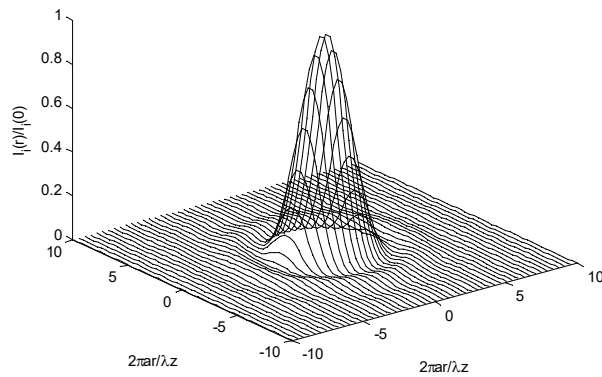
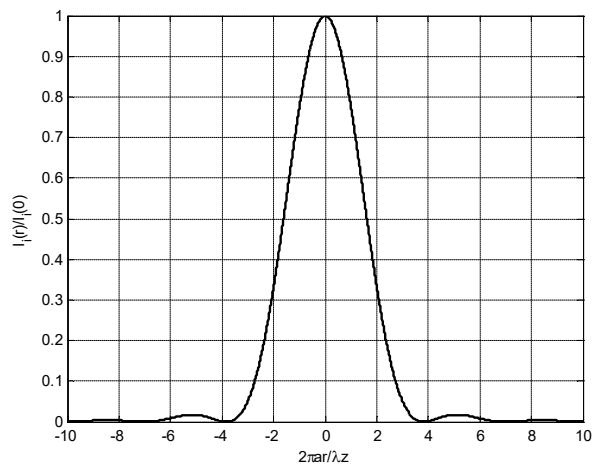
衍射光强分布为：

$$\begin{aligned}
 I_i(r_i) &= |U_i(r_i)|^2 = \left(\frac{\pi a^2}{\lambda z} \right) \left[2 \frac{J_1(2\pi a r_i / \lambda z)}{2\pi a r_i / \lambda z} \right]^2 \\
 I_{i0}(0) &= \left(\frac{\pi a^2}{\lambda z} \right)^2
 \end{aligned}$$

图4.6.19(a)是圆孔夫琅禾费衍射图样的强度分布的截面图，图4.6.19(c)是在观察面上拍摄的夫琅禾费衍射图样。公式(4.6.68)表示的强度，一般以首先导出它的科学家爱里(Airy, 1801–1892)命名，称为爱里函数。相应的衍射图样呈对称分布，是一组明暗相间的同心圆环，中央亮斑为爱里斑(Airy disc)，其半径取决于强度分布第一个零点的位置，为

$$r_i = 0.61 \frac{\lambda z}{a}$$

或写成半角宽度为 $\Delta\theta = \frac{r_i}{z} = 0.61 \frac{\lambda}{a}$



爱里斑

对于圆孔的夫琅禾费衍射，照射光的总能量在各个衍射图样的亮环分配的，这对许多实际问题是有意义的。

表4.6.1列出衍射图样能量分布情况及其极大点和极小点处的数值。从表中可以看出，中央亮斑内的光能量约集中了总入射光能的**84%**，第二暗环以内的光能量已集中总光能量的**90%**以上。但由于在中央亮斑以外，总光能仍具有相当大的数值(约占**16%**)，它会产生某种程度的像寄生光，这对形成有用像是没有贡献的，在实验上可以通过缩减衍射环的方法来减弱像寄生光。

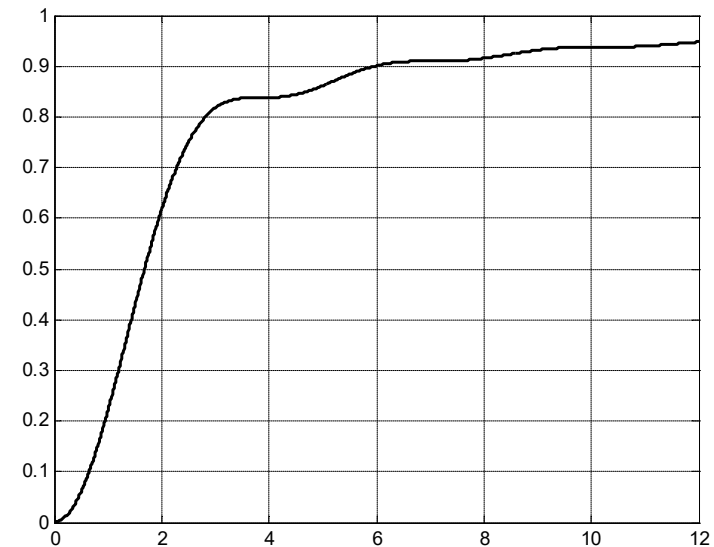


表 4.6.1 圆孔的夫琅禾费衍射图样能量分布

| 序数 | 位置 ρ | 光强 I | 能量分配 |
|------|----------------------|--------|--------|
| 中央亮斑 | 0 | 1 | 83.78% |
| 第一暗环 | $1.220 \pi = 3.833$ | 0 | 0 |
| 第一亮环 | $1.635 \pi = 5.136$ | 0.0175 | 7.22% |
| 第二暗环 | $2.233 \pi = 7.016$ | 0 | 0 |
| 第二亮环 | $\pi = 8.417$ | 0.0042 | 2.77% |
| 第三暗环 | $3.238 \pi = 10.174$ | 0 | 0 |
| 第三亮环 | $3.699 \pi = 11.620$ | 0.0016 | 1.46% |

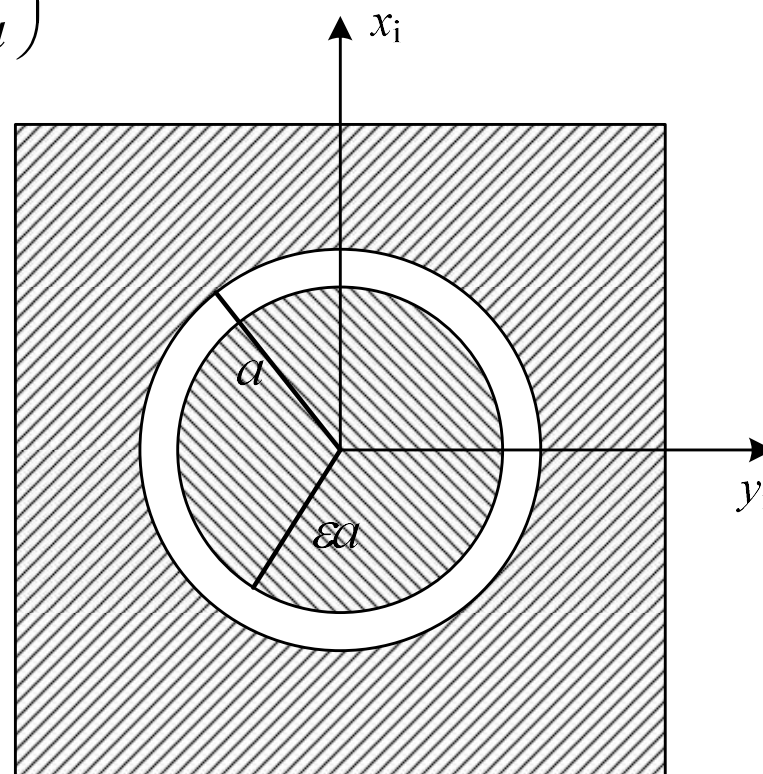
2. 圆环

圆环形光阑也是常用的光学元件，如应用在反射式物镜中。环形光孔可看作两个圆孔之差，如果这两个圆孔的透射率函数分别为

$$t_1(r_0) = \text{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right) \quad t_2(r_0) = \text{circ}\left(\frac{r_0}{\varepsilon a}\right)$$

$$t(r_0) = \text{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right) - \text{circ}\left(\frac{r_0}{\varepsilon a}\right)$$

$$\begin{aligned} B\{t(r_0)\} &= B\left\{\text{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right) - \text{circ}\left(\frac{r_0}{\varepsilon a}\right)\right\} \\ &= a^2 \frac{J_1(2\pi a \rho)}{a \rho} - (\varepsilon a)^2 \frac{J_1(2\pi \varepsilon a \rho)}{\varepsilon a \rho} \end{aligned}$$



光场分布为

$$U_i(r_i) = \frac{\pi a^2 e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} r_i^2}}{i\lambda z} \left[a^2 \frac{J_1(2\pi a \rho)}{a \rho} - (\varepsilon a)^2 \frac{J_1(2\pi \varepsilon a \rho)}{\varepsilon a \rho} \right] \Big|_{\rho=r_i/\lambda z}$$

$$= \frac{k a^2 e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z} r_i^2}}{i2z} \left[\frac{2J_1(k\pi a r_i / z)}{k a r_i / z} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(k\varepsilon a r_i / z)}{k \varepsilon a r_i / z} \right]$$

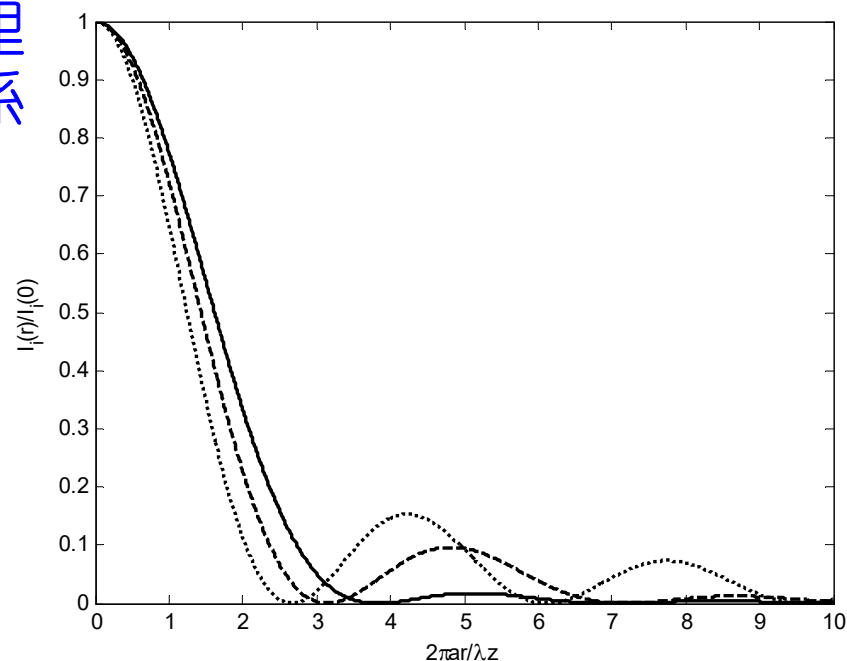
光强度分布为：

$$I_i(r_i) = |U_i(r_i)|^2 = \left(\frac{\pi a^2}{\lambda z} \right)^2 \left[\frac{2J_1(k\pi a r_i / z)}{k a r_i / z} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(k\varepsilon a r_i / z)}{k \varepsilon a r_i / z} \right]^2$$

是圆环形夫琅禾费衍射图样强度分布的截面图。其衍射图样也类似于爱里图样，仍然是中心圆斑外面套着一系列圆环

圆环衍射斑中心的光强：

$$I_{i0} = \left(\frac{\pi a^2}{\lambda z} \right) (1 - \varepsilon^2)^2$$



3. 椭圆孔径

上面讨论衍射孔径都是有确定形状。这在此孔径的基础上，经过适当的变化，而得到其他形状孔径的衍射

$$U_{i1}(x_i, y_i) = C \iint_{\Sigma_{o1}} e^{-\frac{ik}{2z}(x_i x_o + y_i y_o)} dx_o dy_o \quad U_{i2}(x_i, y_i) = C \iint_{\Sigma_{o2}} e^{-\frac{ik}{2z}(x_i x_o + y_i y_o)} dx_o dy_o$$

$$x'_o = \frac{x_o}{\varepsilon} \quad y_o = y'_o$$

$$U_{i2}(x_i, y_i) = \varepsilon C \iint_{\Sigma_{o1}} e^{-\frac{ik}{2z}(\varepsilon x_i x'_o + y_i y'_o)} dx'_o dy'_o = \varepsilon U_{i1}(\varepsilon x_i, y_i)$$