电动力学 第11课

静电场边值问题

静电场边值问题的唯一性定理

问题的提出：

当全空间为真空或仅存在同一种线性介质时，给定电荷分布$\rho(\vec{x}')$后，可通过积分

$$\varphi = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r} dV'$$

求出 φ ，进而求出 $\vec{E} = -\nabla\varphi$

但当空间同时存在不同种介质分布时，介质分界面及内部会有极化电荷分布存在，这些电荷不能先于电场而求出，因此需要研究在一定边界条件下寻求场（或势）微分方程的解———即静电边值问题的解。

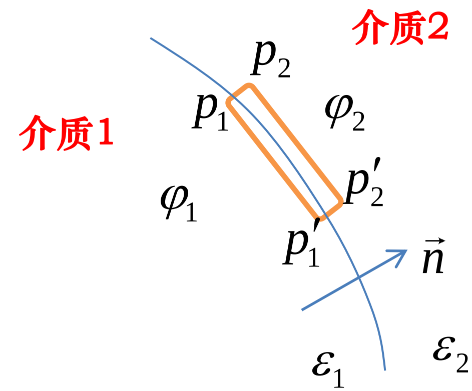
场方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

边值关系

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_f \\ n\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0 \end{cases}$$

分界面上的自由电荷面密度



由 $\vec{E}=-\nabla\varphi$ $\left(\nabla\times\vec{E}=0\right)$ 且在各向同性线性理想介质中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}=\varepsilon\nabla\cdot\left(-\nabla\varphi\right)=-\varepsilon\nabla^2\varphi=\rho_f$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}}$$

各向同性线性理想介质中静电势的Poission方程

在 $\rho_f=0$ 区域，有： $\boxed{\nabla^2\varphi=0}$ Laplace方程

由边界条件 $\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\vec{n}\cdot\left(\varepsilon_2\vec{E}_2-\varepsilon_1\vec{E}_1\right)=\vec{n}\cdot\left(-\varepsilon_2\nabla\varphi_2+\varepsilon_1\nabla\varphi_1\right)=\sigma_f$

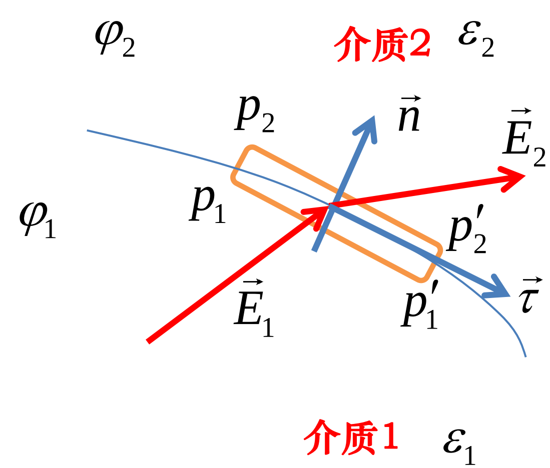
$$\boxed{-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}+\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_f}$$

等价于 $\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_f$

在边界两侧取无限薄环路 $\overline{p_1p_2}=\overline{p_1'p_2'}\to 0$ $\overline{p_1p_1'}=\overline{p_2p_2'}=\Delta l$

$$d\varphi=-\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\varphi_2\left(p_2\right)-\varphi_1\left(p_1\right)=\vec{E}\cdot\overline{p_1p_2}\to 0$$



因而 $\begin{cases}\varphi_2\left(p_2\right)=\varphi_1\left(p_1\right)\\ \varphi_2'\left(p_2'\right)=\varphi_1'\left(p_1'\right)\end{cases}$ 电势的连续性

于是 $\varphi_2-\varphi_1=\varphi_2'-\varphi_1'$

$$E_{2\tau}\cdot\Delta l=E_{1\tau}\cdot\Delta l$$

$$\vec{E}_2\cdot\Delta\vec{l}=\vec{E}_1\cdot\Delta\vec{l}$$

$$E_{2\tau}=E_{1\tau}$$

$\boxed{\text{亦即边值关系}\quad \varphi_2=\varphi_1\qquad \text{等价于}\quad n\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0}$

总结：

电场方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

等价

电势方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

边界条件

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f \\ n \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \end{cases}$$

等价

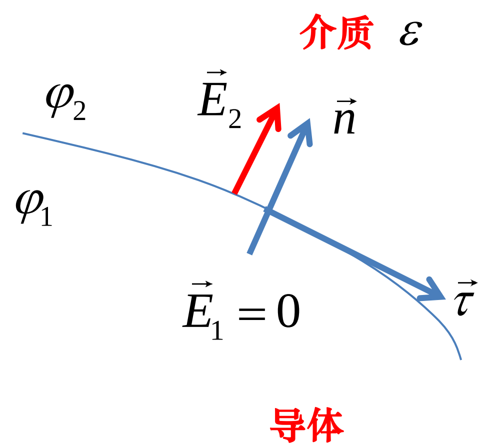
$$\begin{cases} -\varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_f \\ \varphi_2 = \varphi_1 \end{cases}$$

有导体存在时的情形

导体静电平衡条件：

（i）导体内部电场 $\vec{E}$ 处处为零，外侧只有 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 的法向分量

（ii）导体内部自由电荷密度 ρ_f 处处为零，电荷只能以面密度 σ_f 分布于其表面



$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = 0$　　　$\varphi_1 = Const$　（导体是个等势体）

由电势的连续性，导体表面电势==内部电势

$$\varphi_{inside} = \varphi_{surface} = Const$$

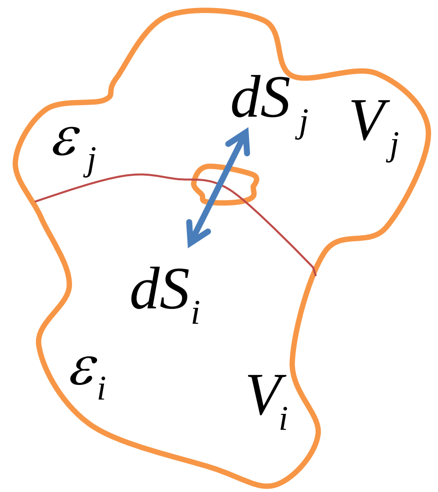
电场不见得总连续，但电势通常是连续的

另一边界条件　$-\varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f$

总结，导体表面的边值关系：

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_1 = Const \\ &-\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f \end{aligned}}$$

静电边值问题解的唯一性定理



设介质分区均匀，区域 V_i 内电荷分布确定，有：

$$\nabla^2\varphi_i = -\frac{\rho_f}{\varepsilon_i} \qquad (1)$$

在两个均匀区域 V_i 与 V_j 的分界面上，有边值问题

$$\varphi_1 = Const$$

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f \qquad (2)$$

我们要证明，当：

（i）区域 V_i 内满足方程（1），又满足边值关系（2）

（ii）在**整体**边界面 S 上又满足

（a）电势 $\varphi|_S$ （第一类边界条件）

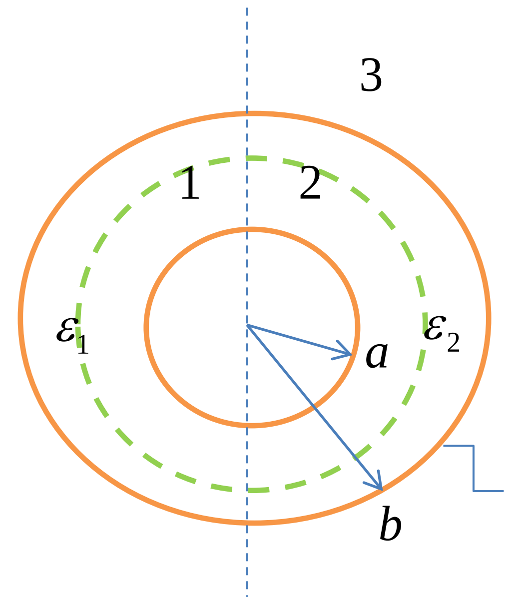
（b）电势的法向导数 $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S$ （第二类边界条件）

则： V 内**电场**唯一确定

唯一性定理保证了，只要同时满足方程和边界条件，则解一定是对的

例： 同心导体球，内球壳带电Q，外球壳接地，求电场和球壳上的电荷分布。

解： 区域3： $\vec{E}_3=0$ $\vec{D}_3=0$ $\varphi_3=0$



介质1： $\nabla\times\vec{E}_1=0$ $\nabla\cdot\vec{D}_1=0$ （1）

介质2： $\nabla\times\vec{E}_2=0$ $\nabla\cdot\vec{D}_2=0$ （2）

介质1与介质2的分界面上：

$$E_{1r}=E_{2r} \quad （3）$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_f=0 \quad （4）$$

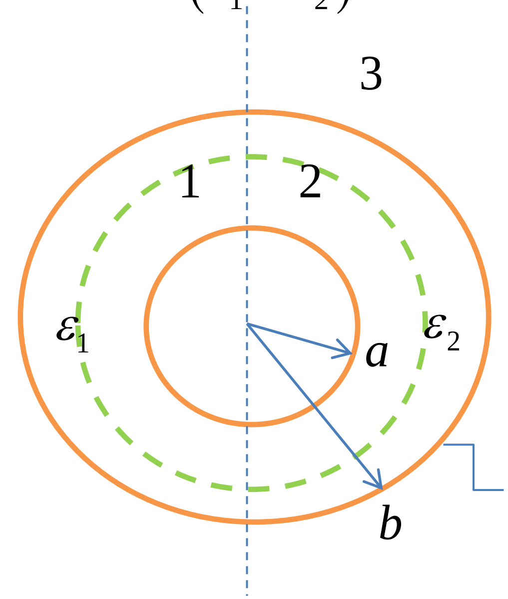
不解方程，用唯一性定理去**猜**出这个解

猜： $\vec{E}_1=\dfrac{A}{r^2}\vec{e}_r=\vec{E}_2$

$$\oiint\limits_{inside}\vec{D}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{1}\varepsilon_1\vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1+\iint\limits_{2}\varepsilon_2\vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2=Q$$

$$\varepsilon_1E_1\cdot 2\pi r^2+\varepsilon_2E_2\cdot 2\pi r^2=Q \qquad A=\frac{Q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}$$

解出：$\vec{E}_1=\vec{E}_2=\dfrac{Q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)r^2}\vec{e}_r$ $\quad\vec{D}_1=\dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)r^2}\vec{e}_r$ $\quad\vec{D}_2=\dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)r^2}\vec{e}_r$



$\vec{E}$ 有球对称性，但 $\vec{D}$ 没有

猜出来的解，满足（1）、（2）（3）（4），

故一定是唯一正确的！（唯一性定理保证它）

$$D_{out,n}-D_{in,n}=\sigma_f$$

导体内部 $\vec{E}=0\quad\vec{D}=0$

内壳表面的自由电荷面密度：

1区：$$\sigma_{f1}=\vec{D}_1\cdot\vec{e}_r=D_{1r}\Big|_{r=a}=\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)a^2}$$

2区：$$\sigma_{f2}=\vec{D}_2\cdot\vec{e}_r=D_{2r}\Big|_{r=a}=\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)a^2}$$

$$\sigma_{f1}\neq\sigma_{f2}$$

介质的极化强度：

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\vec{e}_r \qquad \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\vec{e}_r$$

内表面的极化电荷面密度为：

$$\sigma_p = -\vec{n}\cdot\left(\vec{P}_{out} - \vec{P}_{in}\right) = -\vec{n}\cdot\vec{P}_{out} = -(\varepsilon_{out} - \varepsilon_0)E_r$$

1区： $$\sigma_{p1} = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

2区： $$\sigma_{p2} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

内表面的总电荷面密度：

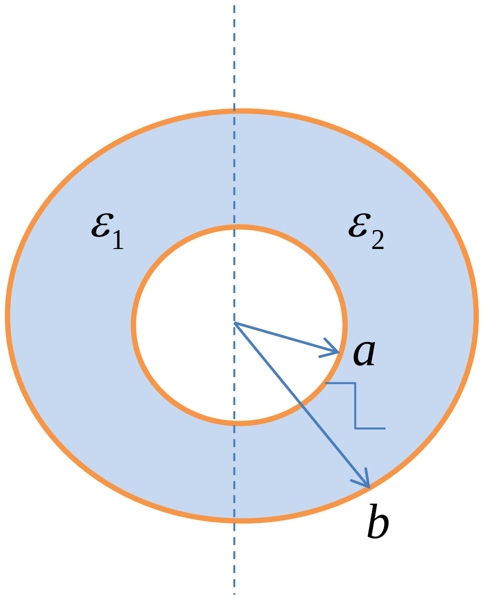
$$\sigma_1 = \sigma_{f1} + \sigma_{p1} = \frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{f2} + \sigma_{p2} = \frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

虽然左右两区的自由电荷、极化电荷不同，但总电荷面密度是一样的，保证了左右两区电场是一样的

总电荷面密度均匀分布，保证了电场的球对称性

开放问题：　如图，内外半径分别为a、b的金属球壳之间充填着两种介质ε_1和ε_2，两种介质对称地分布在两个半球，并且都均匀分布自由电荷，密度为ρ，内球壳带电量为Q，并且接地，求电场分布。



边值问题的解法之一——分离变量法

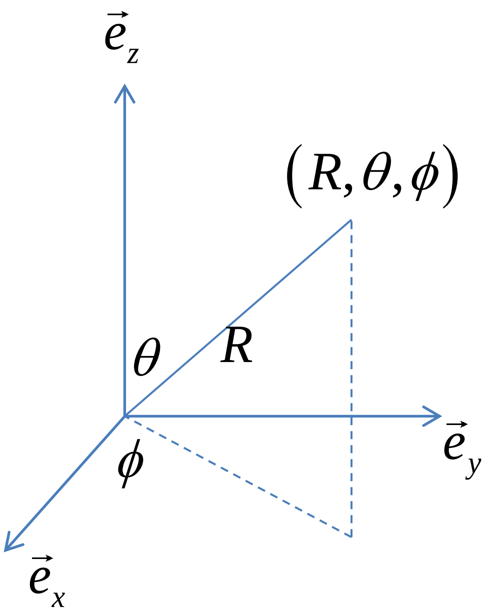
若求解区域 V 内电荷体密度 $\rho = 0$ ，则该区域电势满足Laplace方程

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

寻找静电边值问题的解　　　　　　归结为

寻找Laplace方程（或Poission方程）在一定边界条件下的解。当系统具有某种对称性（球、柱对称性）时，分离变量法是一种行之有效 的求解方法

有轴对称的静电边值问题的解



Laplace方程 $\nabla^2\varphi=0$

电势 φ（电场 $\vec{E}$ ）的分布与坐标ϕ 无关

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0$$

方程通解： $$\varphi(R,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

其中 a_n 和 b_n 是待定常数，由边界条件确定

$P_n(\cos\theta)$是Legendre函数 $$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}\left[\left(\cos^2\theta-1\right)^n\right]$$

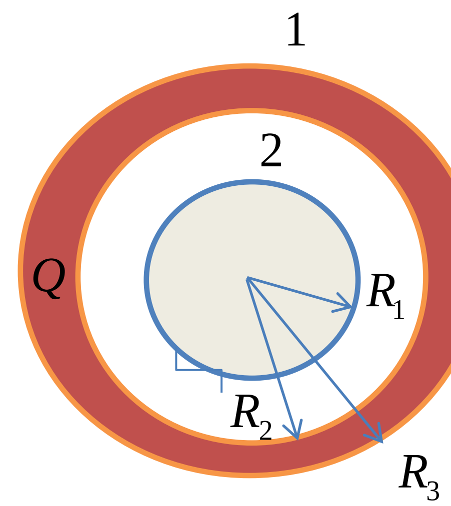
$$P_0(\cos\theta)=1$$

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$$

$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)$$

例一： 半径为 R_1 导体球接地，外包围同心的导体球壳，球壳带电荷 Q ，求各点的电势和导体上的感应电荷。



解： 区域1和2，均满足 $\nabla^2\varphi_{1,2}=0$ （1）

球对称性，应取 $n=0$ ，通解： （2）

$$\varphi_1=a+\frac{b}{R}\qquad (R\ge R_3) \tag{3}$$

$$\varphi_2=c+\frac{d}{R}\qquad (R_1<R<R_2) \tag{4}$$

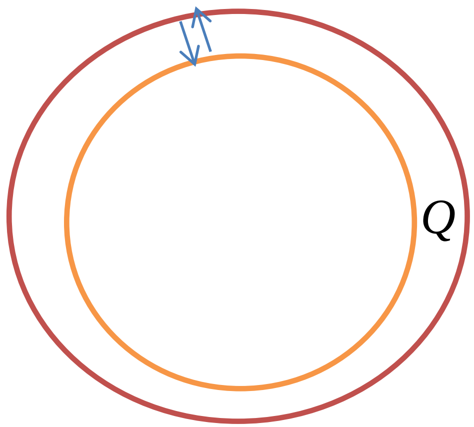
边界条件：

1） $\varphi_1\big|_{R\to\infty}\to 0$ （自然边界条件） $\Rightarrow$ $a=0$

2） $\varphi_2\big|_{R_1}=0$ （内导体接地） $\Rightarrow$ $c+\dfrac{d}{R_1}=0$

3） $\varphi_2\big|_{R_2}=\varphi_1\big|_{R_3}$ （导体是等势体接地） $\Rightarrow$ $c+\dfrac{d}{R_2}=\dfrac{b}{R_3}$

4） $Q=\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iint_{R_3}\varepsilon_0\vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1+\iint_{R_2}\varepsilon_0\vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2$ （导体壳带净电荷）



$$\frac{Q}{\varepsilon_0}=\iint_{R_3}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}dS_1+\iint_{R_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}dS_2$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0}=-\frac{-b}{R_3^2}\cdot 4\pi R_3^2+\frac{-d}{R_2^2}\cdot 4\pi R_2^2$$

解出：

$$d=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\cdot\frac{1}{\left(R_1^{-1}-R_2^{-1}+R_3^{-1}\right)}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$c=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_3}\cdot\frac{1}{\left(R_1^{-1}-R_2^{-1}+R_3^{-1}\right)}=-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$b=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}-d=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$$

于是：

$$\varphi_1=\frac{Q+Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}\qquad \varphi_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$$

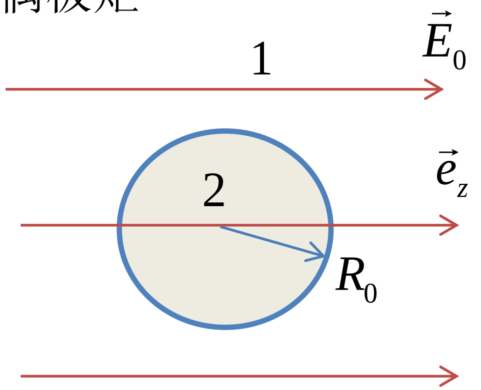
内导体球表面电荷（接地只是电势为零而已，还是有感应电荷）

$$Q_i = \oiint_{inside} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oiint_{R_1} \varepsilon_0 \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = -\varepsilon_0 \oiint_{R_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} dS = -\varepsilon_0 \oiint_{R_1} -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} dS$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \cdot 4\pi R_1^2 = Q_1$$

例二：　介电常数 ε 的均匀介质球处于均匀外电场$\vec{E}_0$ 中，求：

（i）电势分布　　（ii）极化电荷分布，以及构成的电偶极矩



解：设 $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$　轴对称性

区域1和2，均满足 $\nabla^2\varphi_{1,2} = 0$

通解：$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \qquad (R \geq R_0)$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n R^n + \frac{d_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \qquad (0 < R \leq R_0)$$

边界条件：

1）$\varphi_1\big|_{R\to\infty} \to -\vec{E}_0\cdot\vec{x} = -E_0 R\cos\theta = -E_0 R P_1(\cos\theta)$　(原均匀外电场）

因此：　$a_1 = -E_0$　　$a_n = 0 \quad (n \neq 1)$

$$\varphi_1 = -E_0 R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

2） 当 $R \to 0$ ，φ_2 应当有限，故：$d_n = 0$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

3） 在 $R = R_0$ 处，

$\varphi_1 = \varphi_2$ $\Rightarrow$

$$-E_0 R_0 \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n\left(\cos\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R_0^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \sigma_f = 0$$ $\Rightarrow$

$$\varepsilon_0\left[-E_0\cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n\left(\cos\theta\right)\right] = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} n c_n R_0^{n-1} P_n\left(\cos\theta\right)$$

对比两式，

当 $n=1$ 时，

$$-E_0 R_0 P_1 + \frac{b_1}{R_0^2} P_1 = c_1 R_0 P_1$$

$$\varepsilon_0\left(-E_0 P_1 - \frac{2b_n}{R_0^3} P_1\right) = \varepsilon c_1 P_1$$

当 $n \neq 1$ 时， $b_n = c_n = 0$

解出：

$$b_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R_0^3 \qquad c_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$$

$$\varphi_1 = \underline{-E_0 R\cos\theta} + \underline{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \cdot \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos\theta}$$

原均匀外场

球面极化电荷的贡献

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R\cos\theta$$

（球内仍为均匀场）

$$= \underline{-E_0 R\cos\theta} + \underline{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R\cos\theta}$$

原均匀外场

球面极化电荷对球内的贡献

球内电场：

$$\vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \nabla\left(\vec{E}_0 \cdot \vec{R}\right) = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \vec{E}_0 < \vec{E}_0$$

$\vec{E}_2$ 比原来外场 $\vec{E}_0$ 弱，这是由于球面上的极化电荷产生的场与外场方向相反

球面上的极化电荷产生的场抵消一部分外场

介质球的极化强度：

$$\vec{P}_2=\vec{D}_2-\varepsilon_0\vec{E}_2=\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)\vec{E}_2=\frac{3\varepsilon_0\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0$$

常矢量

球内极化电荷体密度：

$$\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}_2=0$$

介质球面电荷分布构成的电偶极矩：

$$\vec{P}=\iiint\vec{P}_2dV=\frac{4\pi R_0^3}{3}\vec{P}_2=\frac{4\pi R_0^3\varepsilon_0\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0$$

事实上，球外电势的第二项正是这面电荷产生的：

$$\varphi'=\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\cdot\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta$$

球面极化电荷面密度：

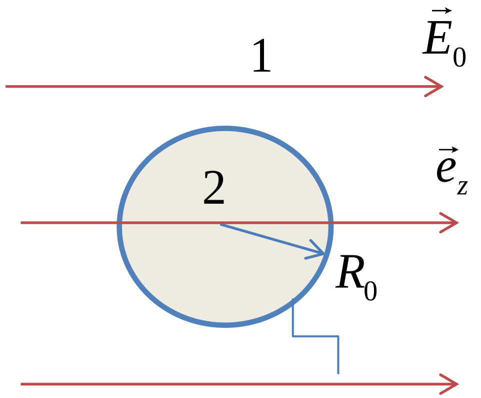
$$\sigma_p=\vec{n}\cdot\vec{P}_2\Big|_{R_0}=\frac{3\varepsilon_0\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{n}\cdot\vec{E}_0=\frac{3\varepsilon_0\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$

其构成的电偶极矩：

$$\vec{P}=\oiint_{R_0}\sigma_p\vec{R}_0dS=\oiint_{R_0}\sigma_p\left(R_0\cos\theta\vec{e}_z+R_0\sin\theta\vec{e}_r\right)R_0^2\sin\theta d\theta d\phi=\frac{4\pi R_0^3\varepsilon_0\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0$$

例三：　接地的导体球处于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，求：

（i）电势　　　（ii）导体表面的感应电荷面分布



解：设 $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$　　轴对称性

区域1，满足 $\nabla^2\varphi = 0$　　区域2电势恒为零

通解：$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \qquad (R \ge R_0)$$

边界条件：

1） $$\varphi\big|_{R\to\infty} \to -\vec{E}_0\cdot\vec{x} = -E_0 R\cos\theta = -E_0 R P_1(\cos\theta)$$ （原均匀外电场）

因此：　$a_1 = -E_0$　　　　$a_n = 0 \quad (n \ne 1)$

$$\varphi = -E_0 R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

2） $\varphi|_{R_0}=0$ （导体接地）

$$-E_0R_0\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n\left(\cos\theta\right)=0$$

得： $b_1=E_0R_0^3$ $\qquad b_n=0 \qquad (n\neq 1)$

$$\varphi_1=\underline{-E_0R\cos\theta}+\underline{\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta}$$

原均匀外场 电偶极场

球面感应电荷面密度：

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in}\right)=\sigma_f$$

$$\sigma_f=D_{out,n}=\varepsilon_0E_{out,n}=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R_0}=3\varepsilon_0E_0\cos\theta$$

其构成的电偶极矩：

$$\vec{P}=\oint\!\!\oint_{R_0}\sigma_f\vec{R}_0dS=3\varepsilon_0E_0\oint\!\!\oint_{R_0}\cos\theta\left(R_0\cos\theta\vec{e}_z+R_0\sin\theta\vec{e}_r\right)R_0^2\sin\theta d\theta d\phi=4\pi\varepsilon_0R_0\vec{E}_0$$

作业

1。（郭书2.2题）

在均匀外电场中置入半径为R_0 的导体球，试用分离变量法求下列两种情况的电势，

（i）导体球上接有电池，使球与地保持电势差Φ_0；

（ii）导体球上带总电荷Q。

2。（郭书2.3题）

均匀介质球的中心置一点电荷Q_f，球的电容率为 ε，球外为真空，试用分离变量法求空间电势，把结果与使用高斯定理所得结果比较。

边值问题的解法之二——电像法

电像法是用一个或若干个假想的点电荷——像电荷来代替（等效）导体表面的感应电荷或介质的极化电荷对电场的贡献

只要这些假想的电荷与原来已知电荷共同激发的电场或电势满足求解区域内的全部（定解）边界条件，那么所得到的解是唯一正确的

注意： 为使问题的解满足求解区域内已知的Poisson方程或Laplace方程，**像电荷必须放置在求解区域之外**。

边值问题的解法之三——格林函数法

如果非齐次偏微分方程的非齐次项是 δ 函数，
则满足边界条件的方程的定解称为Green函数解

例如： 在 $\vec{x}'$ 处的点电荷的电势满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\delta(\vec{x}-\vec{x}')}{\varepsilon}$$

且满足边界条件： $\varphi\big|_S = 0$ 或 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0$

则 φ 是格林函数，$\varphi = G(\vec{x},\vec{x}')$

即：
$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x}-\vec{x}') = -\delta(\vec{x}-\vec{x}')/\varepsilon \\ G\big|_S = 0 \quad 或 \quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0 \end{cases}$$