Lecture 3
第三讲

Derivative and Differential
导数与微分

Zhenglu Jiang
姜正禄

Department of Mathematics, Sun Yat-sen University
Guangzhou 510275, China
中山大学数学系，广州 510275

目录

一、函数的导数

背景　定义　几何意义　计算步骤

1. 背景

速度

描述物体运动的快慢 — 平均速度, 瞬时速度

电流强度

电量的变化率

市场需求率

市场需求随着价格的调整而变化的程度

刻划曲线变化的程度—弯曲程度

牛顿 — 流数

自由落体运动$s = \frac{1}{2}gt^2$

2. 定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的一个邻域有定义，如$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称该极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数(或称$y=f(x)$在点$x_0$处可导)，记为$y'|_{x=x_0}$，或$f'(x_0)$，或$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$，或$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$.

$$y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$\boxed{\text{可导}\Rightarrow\text{连续}}$ $\boxed{\text{连续}\not\Rightarrow\text{可导}}$

高阶导数 规定$f^{(0)}(x)=f(x), f^{(1)}(x)=f'(x)$

$$f^{(2)}(x)=f''(x), f^{(3)}(x)=f'''(x),\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))' \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\frac{dy}{dx} \quad 或 \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{(Leibniz)}$$

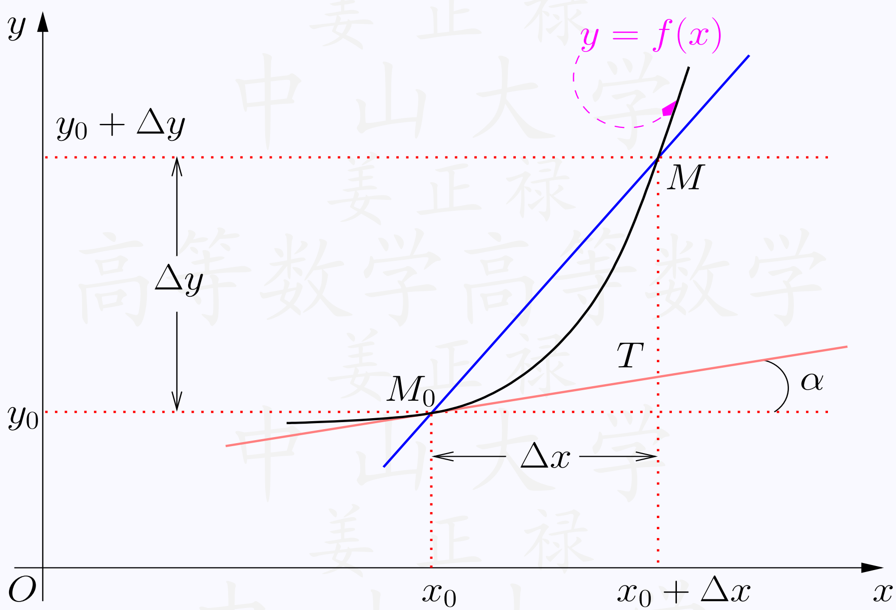
$$y' \quad 或 \quad f'(x_0) \quad \text{(Lagrange)}$$

$$Dy \quad 或 \quad Df(x_0) \quad \text{(Cauchy)}$$

$$y^{\&} \quad 或 \quad f^{\&}(x_0) \quad \text{(Newton)}$$

3. 几何意义

切线的斜率 $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$



4. 计算步骤

$$
\boxed{\begin{aligned}
&(1)\ \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0);\\
&(2)\ \frac{\Delta f}{\Delta x};\\
&(3)\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.
\end{aligned}}
$$

例如

$$y = x^n \qquad y = \frac{1}{x}$$

$$y = \sin(x) \qquad y = \log_a(x)$$

左导数、右导数

二、导数的运算法则

设$u=u(x)$和$v=v(x)$可导, 则

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

和

$$(uv)'=u'v+uv';$$

进一步, 如$v\neq 0$, 则

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

三、复合函数求导法则

设$y=f(u)$和$u=g(x)$都可导, 则复合函数$y=f(g(x))$可导, 且

$$\frac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x).$$

简单地,　　链式求导法则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

四、反函数求导法则

设$y=f(x)$在区间I_x内单调且可导，$f'(x)\neq 0$，并记$I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$，则其反函数$x=\varphi(y)$在区间$I_y$内单调且可导，并有

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

简单地说，

设$\frac{dy}{dx}\neq 0$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

五、参数函数求导法则

设$y=\varphi(t)$和$x=\psi(t)$都可导, 且$\psi'(t)\neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

简单地,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

六、隐函数求导法则

设$y=f(x)$是一个由方程$F(x,y)=0$所确定的函数, 称该函数为隐函数.

直接求导法则

对方程$F(x,y)=0$的两边关于x求导, 把含有y的项(或因子)作为复合函数来求导数, 然后解出隐函数的导数y'.

例如

$$xe^y - 3 = x$$

对方程的两边关于x求导，便得

$$e^y + xe^y\frac{dy}{dx} = 1$$

求解隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$，即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-e^y}{xe^y}$$

简化所得的导数，就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{x+3}{x}}{x+3} = -\frac{3}{x(x+3)}$$

求$\frac{dy}{dx}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}}$$

求下列函数的导数：

(1) $y = x^{x} \quad (x>0)$；

(2) $y = x^{\operatorname{tg} x} \quad (x>0)$；

(3) $y = x^{\ln x} \quad (x>0)$；

(4) $y = e^{\sqrt{x}} \quad (x>0)$；

(5) $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$；

(6) $y = a^{\sin x} \quad (a>0)$；

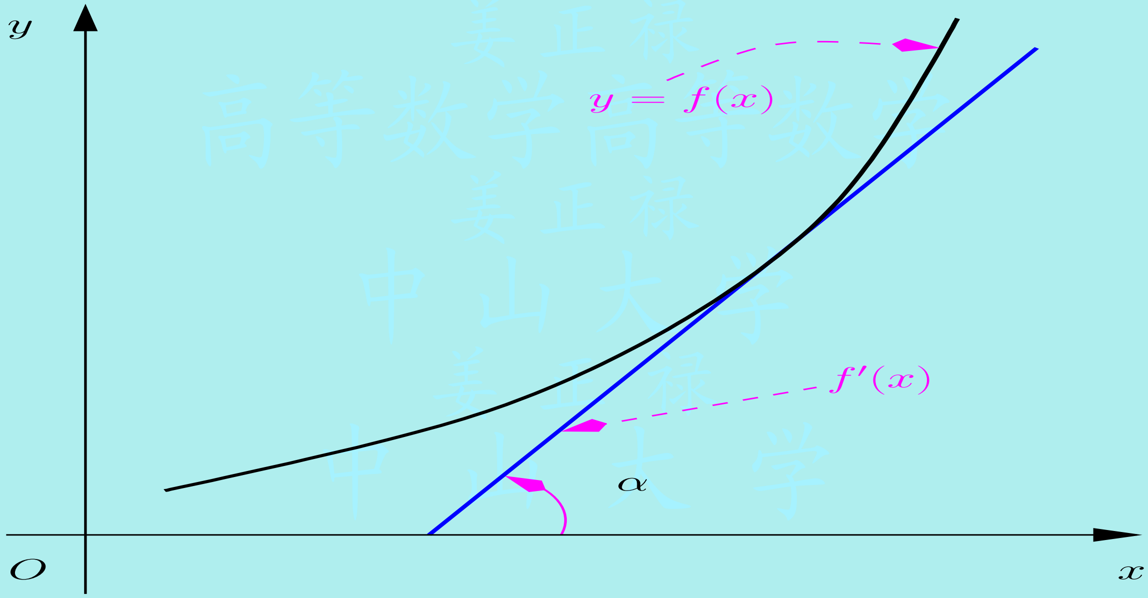
(7) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x>0)$；

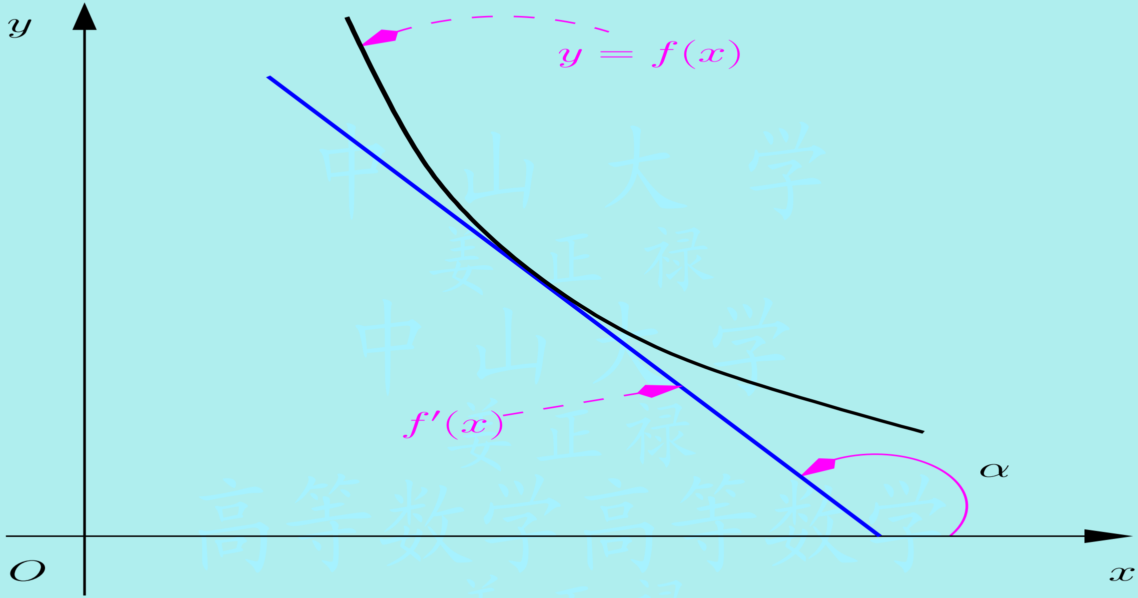
(8) $y = x^{x^{x}} \quad (x>0)$.

七、函数的局部性质

增减性、凹凸性、极值、渐近性、曲率

1. 增减性





设$y=f(x)$是一个可导函数.

如$f'(x)>0$, 则函数$y=f(x)$严格单调增加;

如$f'(x)<0$, 则函数$y=f(x)$严格单调减少.

2. 凹凸性

凸函数(convex function)

In mathematics, a real-valued function $f(x)$ defined on an interval (or on any convex subset of some vector space) is called convex, concave upwards, concave up or convex cup, if for any two points x_1 and x_2 in its domain X and any $t \in [0, 1]$,

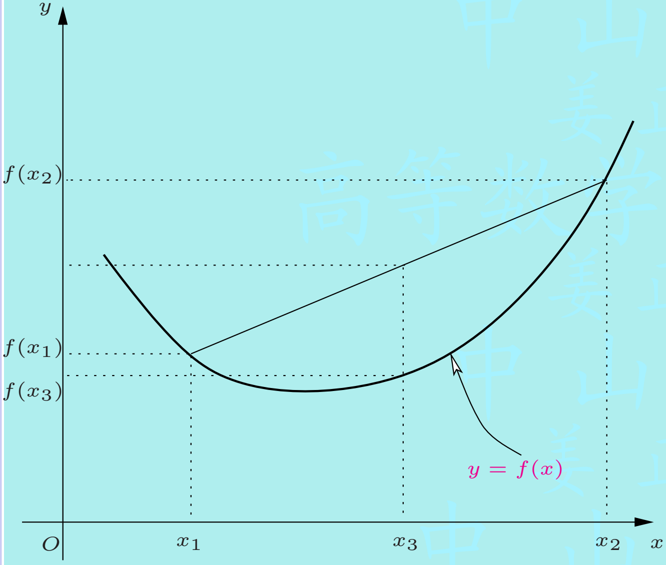
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

A function is called strictly convex if

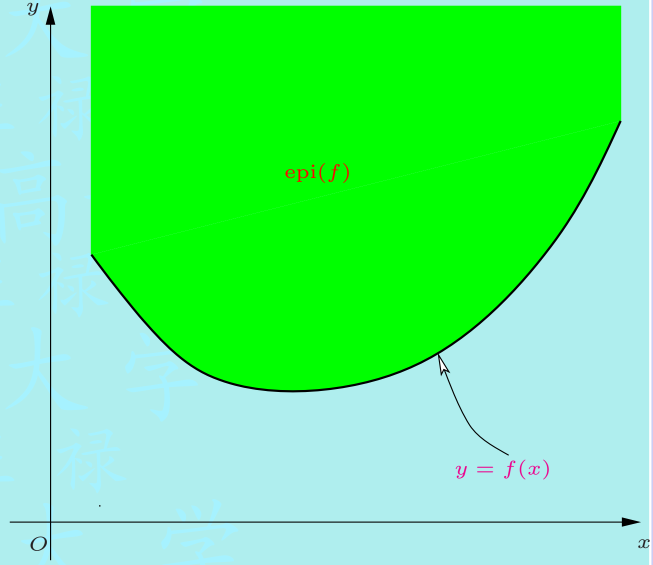
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

for any t in $(0, 1)$ and $x_1 \ne x_2$.

Sometimes an alternative definition is used:
A function is convex if its epigraph (the set of points lying on or above the graph) is a convex set. These two definitions are equivalent, i.e., one holds if and only if the other one is true.



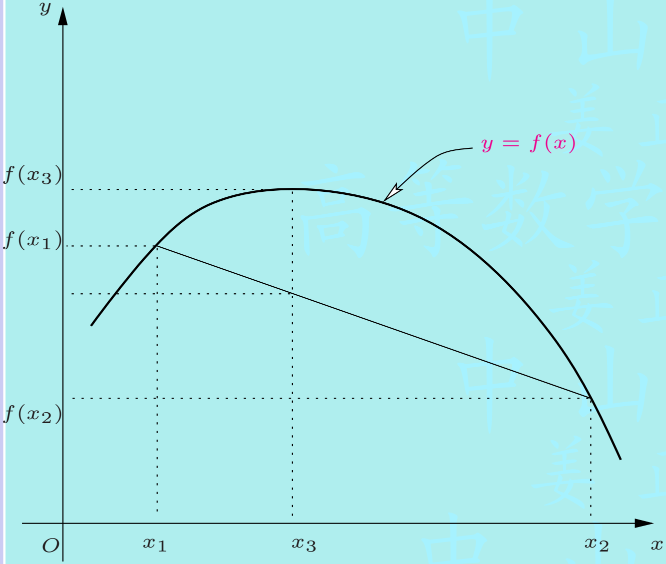
$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$



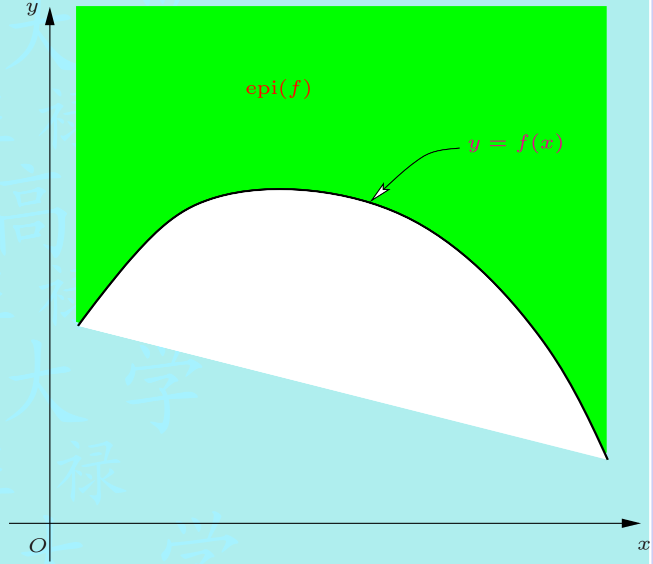
$\text{epi}(f) = \{(x, \mu) : \mu \ge f(x), x \in X\}$

凹函数(concave function)

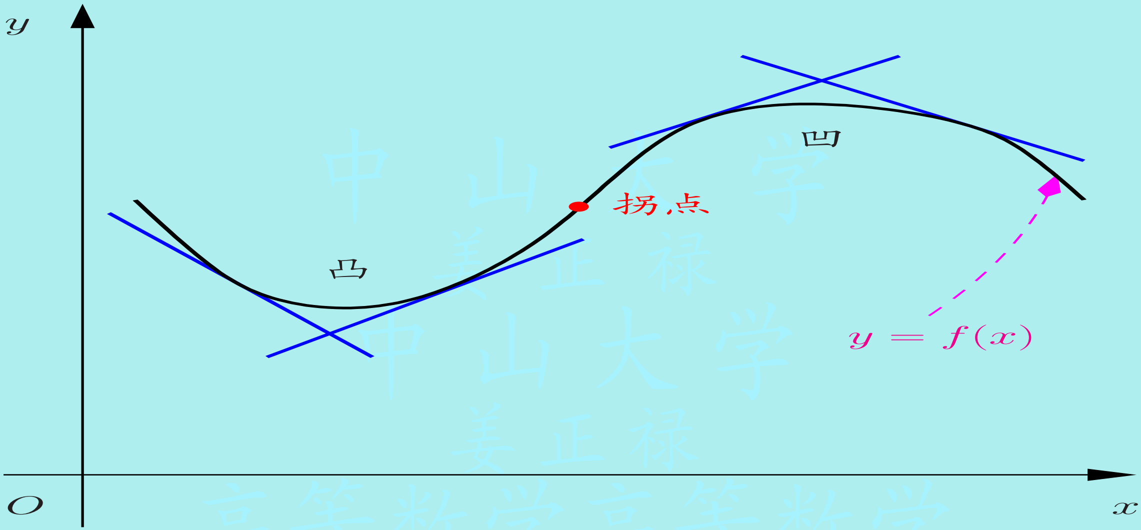
In mathematics, a concave function is the negative of a convex function. A concave function is also synonymously called concave downwards, concave down, convex cap or upper convex. A strictly concave function is the negative of a strictly convex function.



$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$



$$\text{epi}(f) = \{(x, \mu) : \mu \geq f(x), x \in X\}$$ 凹



凹弧与凸弧的分界点 — 拐点

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{设}y=f(x)\text{是一个二阶可导函数.}\\ \qquad\text{如}f''(x)>0,\ \text{则}y=f(x)\text{是凸函数;}\\ \qquad\text{如}f''(x)<0,\ \text{则}y=f(x)\text{是凹函数.}\end{array}}$$

3. 极值

$\boxed{\text{驻点} \Leftrightarrow f'(x)=0}$

设$U(x_0)$是x_0的某邻域, x_0是$f(x)$的极值点.

极值点

$\Downarrow$

$$\overbrace{\text{极大值点} \qquad\qquad \text{极小值点}}$$

$$\left(\begin{array}{c}\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0),\\ f(x) \le f(x_0)\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0),\\ f(x) \ge f(x_0)\end{array}\right)$$

$\Uparrow$ $\qquad$ $\Uparrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(x)(x-x_0)<0 \\ \text{或} \\ f''(x_0)<0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} f'(x)(x-x_0)>0 \\ \text{或} \\ f''(x_0)>0 \end{array}}$$

4. 渐近性

水平渐近线　垂直渐近线　斜渐近线

水平渐近线 $y = A$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A$$

垂直渐近线 $x = x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

斜渐近线

$y = ax + b$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

或

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$$

或

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$$

5. 曲率

$$K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

曲率半径

$$R = \frac{1}{K}$$

八、函数的微分

定义、充要条件、表示、性质、应用

1. 定义

记$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. 设$A$是某个只与$x_0$有关的数, $o(|\Delta x|)$是一个关于$|\Delta x|$的高阶无穷小量. 如$\Delta f = A\Delta x + o(|\Delta x|)$, 则称$f$在点$x_0$处可微, 称$A\Delta x$为在点$x_0$处的微分. 记为$df = Adx$, 这里$dx = \Delta x$.

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\text{高阶无穷小量}}$$

2. 充要条件

$$\boxed{f\text{在点}x_0\text{处可微}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{f\text{在点}x_0\text{处可导}}$$

3. 表示

$$df = f'(x_0)dx$$

或

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$dx = \Delta x$$

4. 性质

一阶微分形式不变性

$$df = f'_u du = f'_x dx$$

四则运算公式

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

5. 应用

求近似值

例如, 求$\sqrt[3]{1.02}$的近似值.

九、高阶导数与高阶微分

高阶导数

$$f''(x_0) \qquad f^{(2)}(x_0) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{x_0}$$

$$f''(x) \qquad f^{(2)}(x) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f'''(x_0) \qquad f^{(3)}(x_0) \qquad \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{x_0}$$

$$f'''(x) \qquad f^{(3)}(x) \qquad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) \qquad \frac{d^n f}{dx^n}\Big|_{x_0}$$

$$f^{(n)}(x) \qquad \frac{d^n f}{dx^n}$$

$$(e^x)^{(n)} \qquad (\sin x)^{(n)} \qquad (\cos x)^{(n)}$$

$$(1/x)^{(n)} \qquad (\ln x)^{(n)}$$

莱布尼茨公式

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$(x^2 \sin x)^{(5)} = ?$$

高阶微分

$$d^2 f(x) = f^{(2)}(x)dx^2$$

$$d^3 f(x) = f^{(3)}(x)dx^3$$

$$\vdots$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$$

高阶微分的形式

$$z = g(u) \qquad u = u(x) \qquad z = g(u(x))$$

$$dz = g'(u)du$$

$$\Downarrow$$

$$d^2z(x) = g''(u)du^2 + g'(u)d^2u$$

小结

- 导数的定义和几何意义及物理意义
- 导数的四则运算法则
- 复合函数、反函数、参数函数和隐函数的求导法则
- 可导与连续的关系、函数的局部性质
- 函数的微分、可微与可导的关系

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!