§3　随机变量的分布函数

1.　概　念

定义　设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

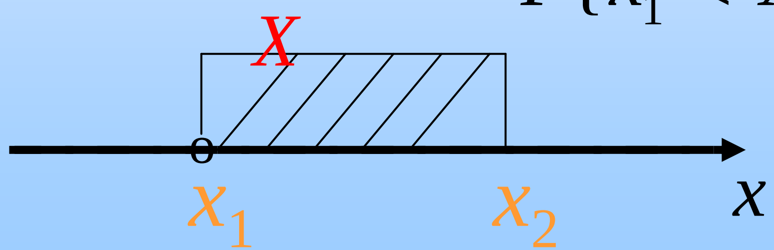
$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为 X 的分布函数.

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

对于任意的实数 $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$，有：

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$
$$= F(x_2) - F(x_1).$$



返回主目录

§3　随机变量的分布函数

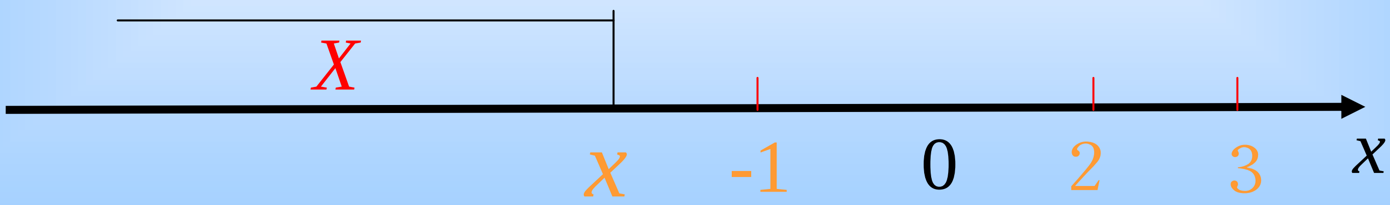
2. 例 子

例 1　设随机变量 X 的分布律为：求 X 的分布函数.

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

解：当 $x < -1$ 时，满足　$X \le x$ 的 X 的集合为 $\varnothing$，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\varnothing\} = 0.$$

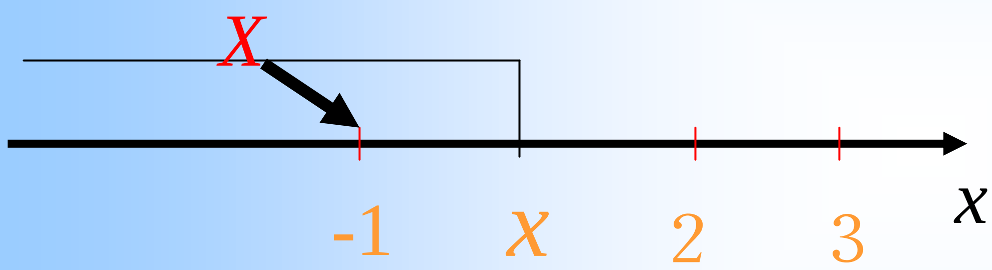


返回主目录

§3 随机变量的分布函数

当 $-1 \le x < 2$ 时，满足 $X \le x$ 的 X 取值为 $X = -1$,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}.$$



X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

当 $2 \le x < 3$ 时，满足 $X \le x$ 的 X 取值为 $X = -1$, 或 2

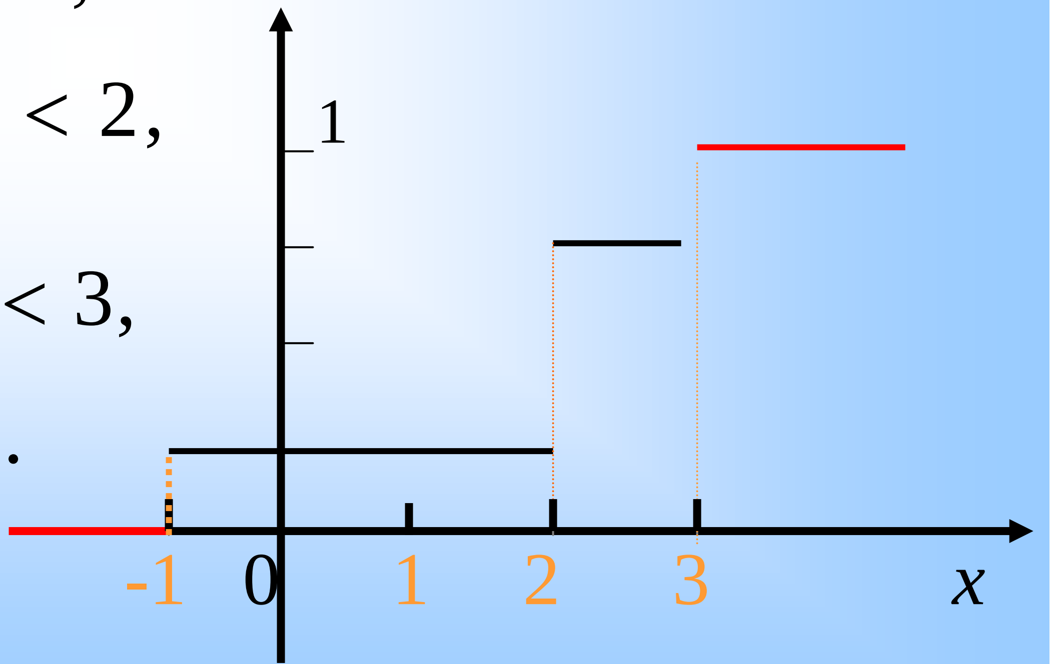
$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1 \text{或} X = 2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

§3　随机变量的分布函数

同理当$3 \le x$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\text{或}X = 2\text{或}X = 3\} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{4}, & -1 \le x < 2, \\ \dfrac{3}{4}, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$



返回主目录

§ 3　随机变量的分布函数

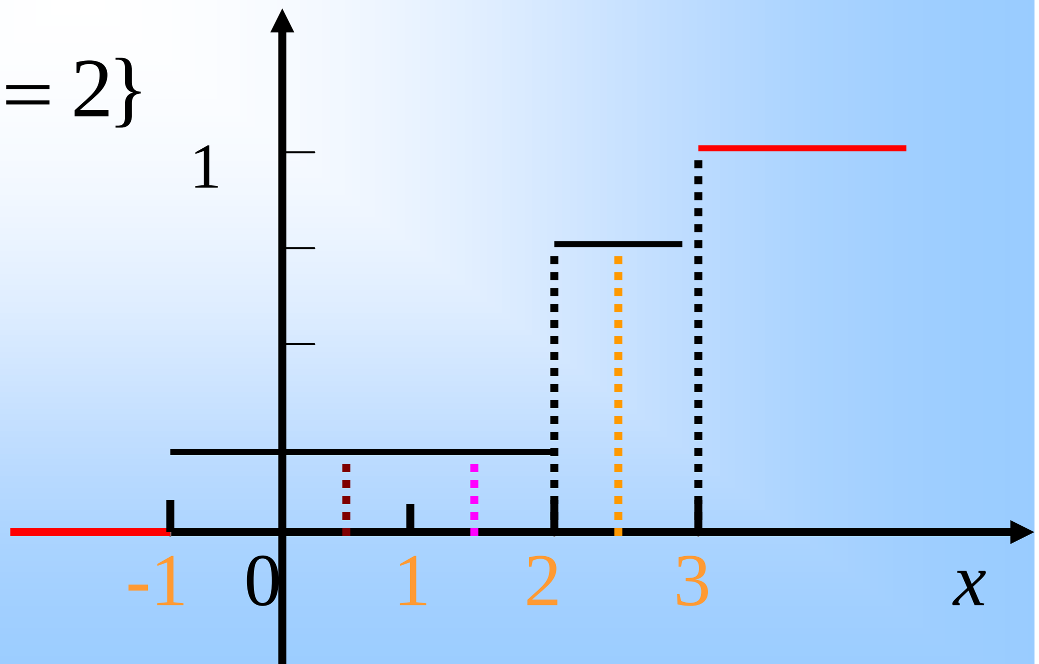
$$P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\}$$

$$= F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

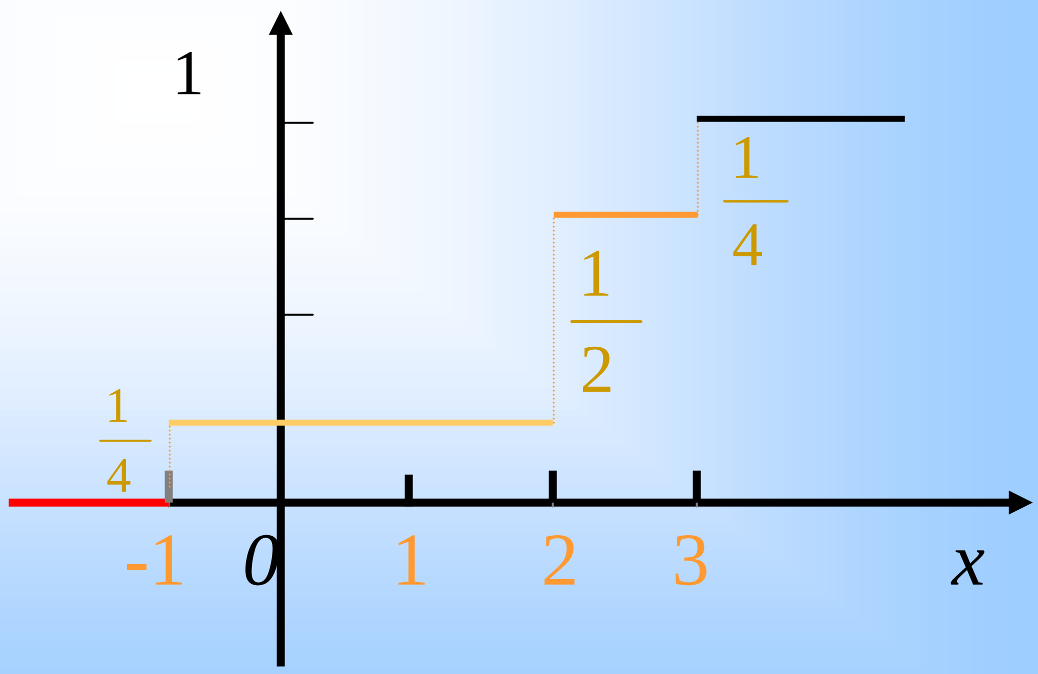
$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$



§3　随机变量的分布函数

分布函数 $F(x)$ 在 $x = x_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ 处有跳跃，其跳跃值为 $p_k=P\{X=x_k\}$.

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



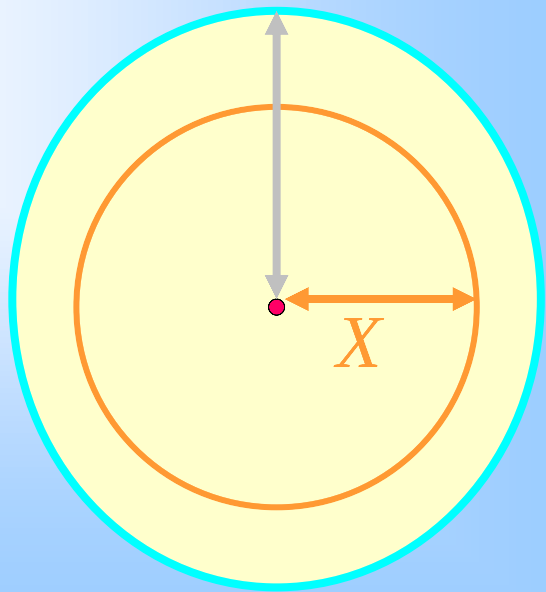
返回主目录

§3　随机变量的分布函数

例 2 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量X的分布函数.

解:（1） 若 $x<0$, 则 $\{X \le x\}$ 是不可能事件，于是

$$F(x)=P\{X \le x\}=P(\varnothing)=0.$$



（2） 若$0 \le x \le 2$,由题意,

$$P\{0 \le X \le x\}=k\,x^2,$$

取$x=2$,由已知得$P\{0\le x\le 2\}=1$,与上式对比

得$k=1/4$, 即 $P\{0\le x\le 2\}=\dfrac{x^2}{4}$.

于是，$0\le x\le 2$时

$$F(X)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}$$

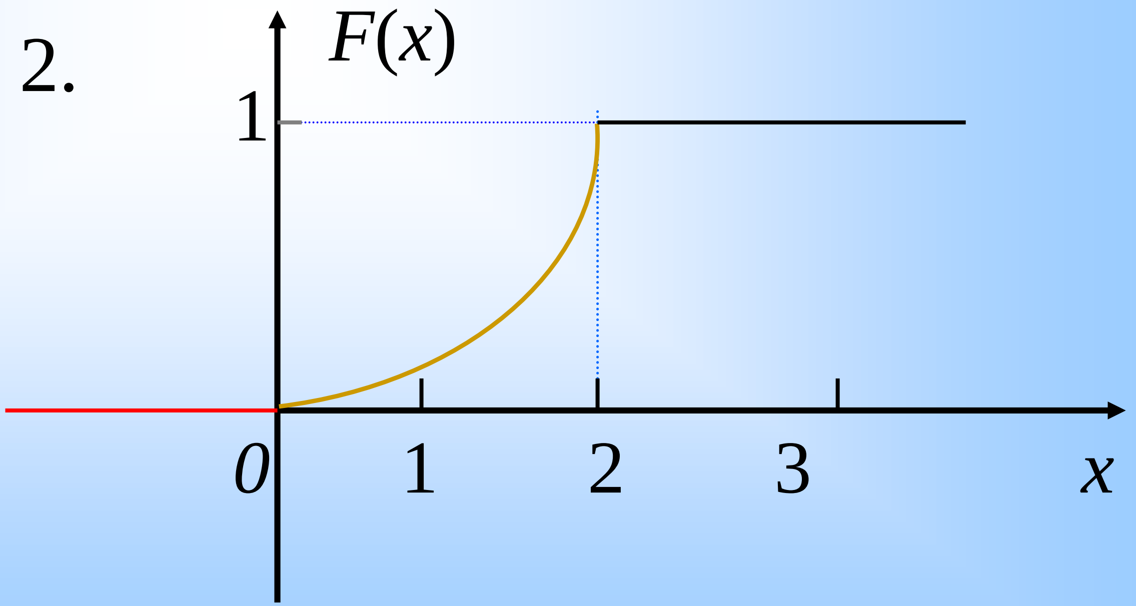
$$=\frac{x^2}{4}.$$

（3） 若 $x\ge 2$，则$\{X\le x\}$是必然事件，于是

$$F(x)=P\{X\le x\}=1.$$

§3　随机变量的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$



返回主目录

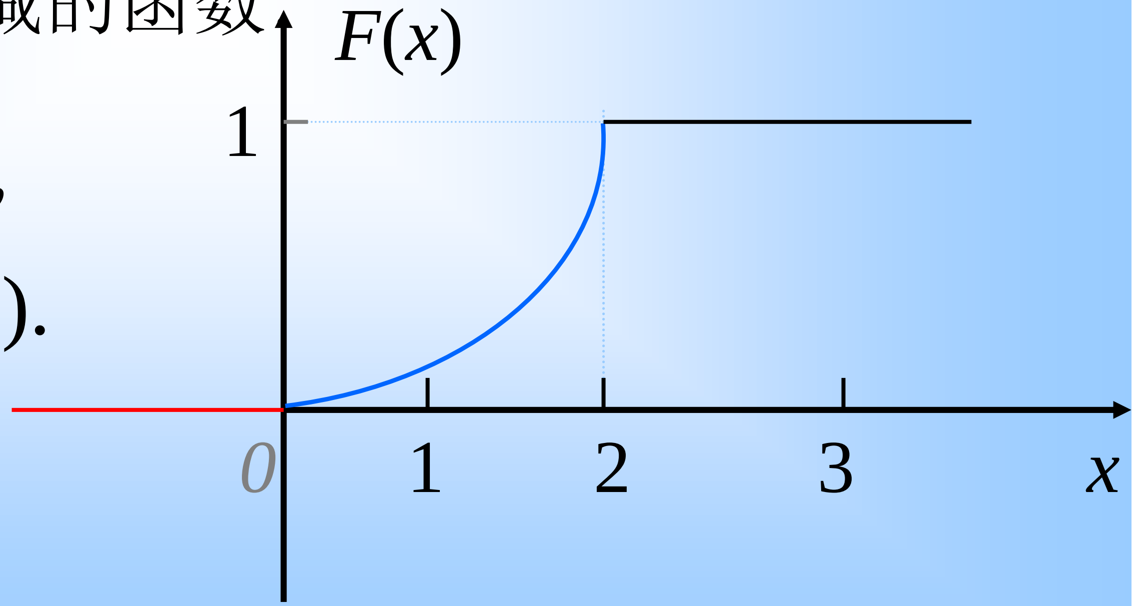
3. 分 布 函 数 的 性 质

分别观察离散型、连续型分布函数的图象， 可以看出，分布函数 $F(x)$ 具有以下基本性质：

1^0 $F(x)$ 是一个不减的函数

即当$x_2 > x_1$时，

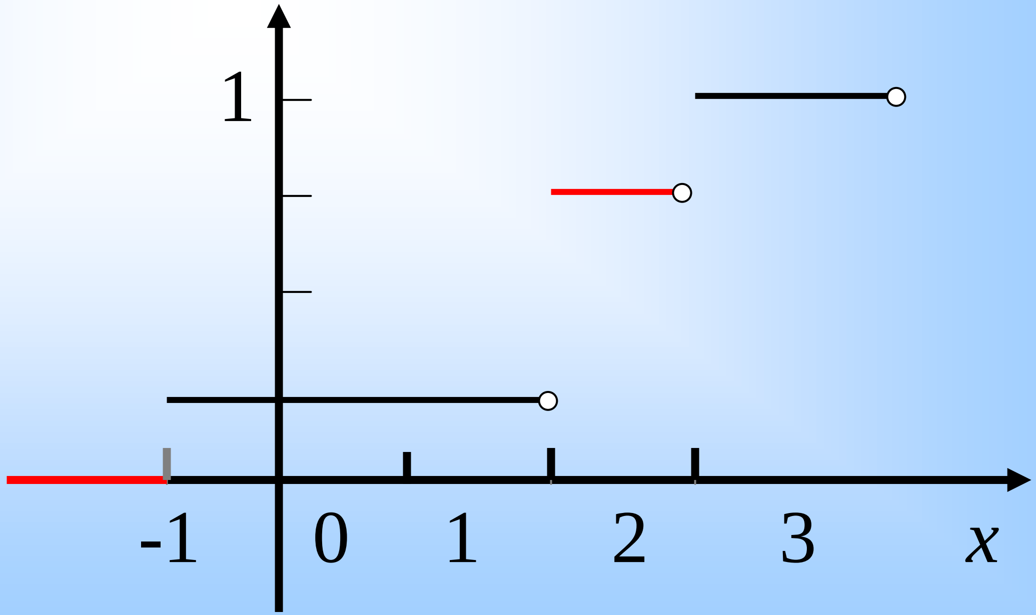
$$F(x_2) \geq F(x_1).$$



2^0　$0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ \ F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

3^0　$F(x+0)=F(x)$, 即$F(x)$是右连续的



§3　随机变量的分布函数

用分布函数计算某些事件的概率

设 $F(x)=P\{X\le x\}$ 是随机变量 X 的分布函数，则

$$P\{X<a\}=F(a-0)$$

$$P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}$$
$$=F(a)-F(a-0)$$

$$P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}$$
$$=F(b)-F(a)$$

§3 随机变量的分布函数

用分布函数计算某些事件的概率

$$P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\}$$

$$= F(b) - F(a-0)$$

$$P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \le a\}$$

$$= F(b-0) - F(a)$$

$$P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$$

$$= F(b-0) - F(a-0)$$

用分布函数计算某些事件的概率

$$P\{X>b\}=1-P\{X\le b\}$$
$$=1-F(b)$$

$$P\{X\ge b\}=1-P\{X<b\}$$
$$=1-F(b-0)$$

例 3

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \dfrac{2}{3} & 1\le x<2 \\ \dfrac{11}{12} & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$

试求：(1). $P\{X\le 3\}$

(2). $P\{X<3\}$

(3). $P\{X=1\}$

(4). $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$

(5). $P\{2<X<4\}$

(6). $P\{1\le X<3\}$

返回主目录

例 3（续）

解：

(1). $P\{X \le 3\} = F(3) = 1$

(2). $P\{X < 3\} = F(3-0) = \dfrac{11}{12}$

(3). $P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

(4). $P\left\{X > \dfrac{1}{2}\right\} = 1 - F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

(5). $P\{2 < X < 4\} = F(4-0) - F(2) = 1 - \dfrac{11}{12} = \dfrac{1}{12}$

(6). $P\{1 \le X < 3\} = F(3-0) - F(1-0)$

$$= \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

返回主目录

例 4

设随机变量 X 的分布

函数为　$F(x) = A + B\,arctgx \qquad (-\infty < x < +\infty)$

试求常数A、B.

解：

由分布函数的性质，我们有

$$0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(A + Barctgx) = A - \frac{\pi}{2}B$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(A + Barctgx) = A + \frac{\pi}{2}B$$

例 4（续）

解方程组

$$\begin{cases} A-\dfrac{\pi}{2}B=0 \\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$$

得解

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{\pi}.$$