第十七讲

上次课

- 似稳条件 $\omega << \omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}$， $R << \frac{\lambda}{2\pi}$
- 似稳场满足扩散方程： $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H},\vec{E}\right) = \frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\left(\vec{H},\vec{E}\right)$
- 趋肤效应： $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}}$
- **无源均匀各向同性电磁介质中，电磁波满足波动方程：**

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} = 0\text{，}\quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

与大家在力学中学到的绳波运动所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(x) = 0 \qquad (8.1.6)$$

非常类似，但这里不同的有 2 点是：（1）电磁场的场量是矢量，（2）传播方向不仅仅是向 x 方向。这给我们计算带来了一些麻烦，但设定传播方向后，每一个场的分量都满足与绳波一样的标量方程。考虑到（8.1.6）的解为 $U(x) = A\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)$，推广到电磁波的情形，则（8.1.3）和（8.1.5）的试解可以写为

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi\right) \qquad (8.1.7)$$

其中 $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}, \omega, \varphi$ 均为常数。代入(8.1.3)及（8.1.5）后发现试解（8.1.7）满足方程，但 k, ω 之间需满足关系式

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

整理可得

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\cdot\mu}} \qquad (8.1.8)$$

（8.1.8）式是电磁波传播的<u>色散关系</u>，对波的传播性质有重要意义。

注：

[1] 对任何波动方程，我们首先要问的是它的色散关系（注意不要和本构关系混淆！），亦即，频率ω（时域振动性质）与波矢k（空间域的振动性质）之间的关系。这是波的大部分性质的基础，若色散关系相同，即使不同的波（如绳波和电磁波）也具有基本相似的性质。往大了说，色散关系描述的其实是能量（对应于ω）和动量（对应k）之间的关系！

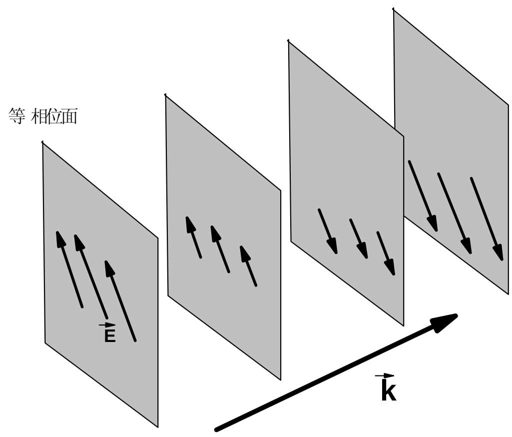
[2] （8.1.7）式只是自由空间波动方程的一种试解，你能想出其它形式的试解吗？

我们对得到的电磁波的解讨论如下：

(1) (8.1.7)式中的$\vec{E}_0,\vec{B}_0$代表波动的振幅，$\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)$称为振动的相位。在给定时刻，方程

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=\text{常数}, \tag{8.1.9}$$

所定义的曲面上相位相等，波场$\vec{E},\vec{B}$也就相同，这个曲面叫作**等相位面**。显然满足（8.1.9）所定义的曲面为一平面，其垂直于$\vec{k}$，故（8.1.7）所描述的波称为**平面波**。还可能将试解（8.1.7）写成其他形式，如球面波或者是柱面波，分别对应的等相位面为球面或者是柱面。



(2) 波长λ的定义为两个相位差为2π的等相位面之间的距离 --- 在第 2 个等相面上，场量经过一个周期的振动回到第 1 个等相面上的值。显然λ由方程

$$k\cdot\lambda=2\pi$$

确定，即

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{8.1.10}$$

$\vec{k}$ 被称为波矢量。

(3) <u>波速</u> 等相位面的传播速度被称为波的**相速度**。设 t 时刻等相位面在 r 处，$t+\Delta t$ 时刻该等相位面垂直于 k 运动到 $r+\Delta r$ 的位置，则有

$$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi=\text{常数}=k\cdot(r+\Delta r)-\omega(t+\Delta t)+\varphi,$$

故相速度为

$$v_P=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\omega/k, \tag{8.1.11}$$

或

$$v_P=1\Big/\left(\sqrt{\varepsilon\cdot\mu}\right), \tag{8.1.12}$$

(8.1.12)式即是平面电磁被传播的速度，它与介质的性质有关，真空中有 $\varepsilon=\varepsilon_0,\mu=\mu_0$，故 $v_P=1\Big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=c$ 为光速，介质中的波速 $v_P=1\Big/\left(\sqrt{\varepsilon\cdot\mu}\right)=c/\left(\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}\right)=c/n$，而 $\boxed{n=\sqrt{\varepsilon_r\cdot\mu_r}}$ 被定义为材料的折射率。

注：折射率的更基本的定义应当为 $n=\sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}$***，因为它对*** ε,μ ***分别大于、小于 0 四种情况均正确。关于*** ε,μ ***均小于 0 的情况我们在后面还会分析。***

(4) <u>频率/周期</u> 相邻两次振动之间的时间为周期 *T*，单位时间内的振动次数为频率 *f*. 在一个确定的位置处，场量随时间振荡，*T* 是两个波峰之间的时间差。容易求得：$\omega T=2\pi\ \Rightarrow\ T=2\pi/\omega$。则振动频率为 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$。经常把 $\omega=2\pi f$ 称为***角（圆）频率***，把 f 称为***线频率***。

(5) 为了运算方便，常常把平面波写成复数形式，即

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)} \tag{8.1.13}$$

(8.1．13)式仍然是波动方程的<u>**数学解**</u>，<u>但因为场量必须为实数</u>，我们应当只取其实部作为**物理解**。然而写成复数形式对许多计算要简便很多，因此在实际运算时经常采用。但应当强调指出的是：<u>只有实场才是有物理意义的场，复场只是为</u>

了计算方便！而之所以可以用复场计算是因为处理的方程（8.1.3，5）是线性方程！有时把常数因子$e^{i\varphi}$并人振幅中，则

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \qquad (8.1.14)$$

注意，这时振幅$\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}$已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁波有相位因子。根据色散关系（8.1.8）可知，k 取正负均可。因此，

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\left(-\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \qquad (8.1.15)$$

也是波动方程的解。非常容易可以证明，（8.1.15）是电磁波沿反方向传播的解。

注：你会发现（8.1.15）式与$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t\right)}$给出一样的实部，因而它们 2 个其实对应完全一样的电磁波。对波的时间变化项，在物理 Community 中，我们规定为$e^{-i\omega t}$，而 IEEE 的 Community 规定为$e^{i\omega t}$。

(6) 因为(8.1.3)和（8.1.5）式是由麦克斯韦方程约化而来的，约化过程中方程从一阶微分变成了二阶微分，因此它对应的解未必全都是原始 Maxwell 方程的解。我们需要将所得的解（8.1.13）重新带回到原始 Maxwell 方程做检查。带回 Maxwell 方程组中的第 1，3 两条方程，我们发现场量必须满足

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0=0 \qquad (8.1.16)$$

这表明，电磁场振动的方向与传播方向$\vec{k}$相互垂直（在等相面内），亦即 – 电磁波是横波。同时带入方程

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

得

$$\vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\vec{B}_0 \qquad (8.1.17)$$

上式说明$\vec{E},\vec{B}$间不独立。带入第四条方程$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$可得到

$$\vec{k}\times\vec{H}=-\varepsilon\omega\vec{E}\Rightarrow\vec{k}\times\vec{B}_0=-\varepsilon\mu\omega\vec{E}_0 \qquad (8.1.18)$$

综合（8.1.17）-（8.1.18）得到结论：$\vec{E},\vec{B}$ *和*$\vec{k}$ *组成右手定则*，且，E，B 之间的模量满足

$$\boxed{|E_0| = \omega |B_0|/k = v|B_0| = c|B_0|} \qquad (8.1.19)$$

后面一个等式在真空中成立。进一步，可以得到另一个很重要的关系式

$$\boxed{|E_0| = v\mu |H_0| = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}|H_0| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|H_0| = Z|H_0|} \qquad (8.1.20)$$

其中$\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$称为阻抗，具有电阻的量纲，是一个描述电磁介质中电磁波传播时场量比例的重要物理量。折射率和阻抗是刻画电磁介质特性的最重要的 2 个量，他们各有各自不同的物理涵义，在确定电磁波的特性方面起着不同的作用。

注： 在静电、静磁条件下电磁波的电、磁特性是分开的（分别由ε, μ独立决定），但电磁波将电场、磁场耦合在一起，因此此时需要用n, Z两个参数确定。

（7） 平面波的**能流**

电磁场的能流定义为

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \qquad (8.1.21)$$

注意真实的场是（8.1.7），不能将复数场带入（8.1.21）式后再取实部，因为此运算是非线性运算。故(8.17)式中的$\vec{E}, \vec{H}$都应取实部之后再代入：

$$\vec{S}_p(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}(\vec{E}) \times \mathrm{Re}(\vec{H}) \qquad (8.1.22)$$

上式表示的是能流的瞬时值。当电磁场随时间变化时，通常瞬时值没有意义，更关心的对能流的时间平均值。对能流在一个周期内做时间平均，

$$\left\langle \vec{S}_p \right\rangle = \left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E} \times \mathrm{Re}\,\vec{H} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}_p dt \qquad (8.1.23)$$

利用公式

$$\left\langle \mathrm{Re}\,\vec{E} \times \mathrm{Re}\,\vec{H} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

(证明见习题 8.1)，得到

$$\left\langle \vec{S}_p \right\rangle = \frac{1}{2} Z \cdot H_0^2 \hat{k} = \frac{1}{2Z} E_0^2 \hat{k} \qquad (8.1.24)$$

同理，能量密度的时间平均值为

$$\bar{u}(\vec{r})=\langle u(\vec{r},t)\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right\rangle=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2+\frac{\mu}{4}H_0^2=\frac{\varepsilon}{2}E_0^2 \qquad (8.1.25)$$

非常容易从（8.1.25）中证明$\bar{u}_E=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2=\frac{\mu}{4}H_0^2=\bar{u}_B$，亦即，***平面电磁波电场携带的能量和磁场携带的能量相等！***把(8.1.25)和(8.1.24)式比较，则得

$$\bar{\vec{S}}_p(\vec{r})=\hat{k}\bar{u}(\vec{r})\frac{1}{\varepsilon Z}=\hat{k}\bar{u}(\vec{r})v=\bar{u}(\vec{r})\vec{v} \qquad (8.1.26)$$

(8.1.26)式有着清晰的物理图像 --- 能流即为单位时间通过单位面积的能量，单位时间内电磁波传输$l=v\times1$的距离，因此单位时间内在体积为$\Omega=l\times1=v\times1\times1=v$内的电磁波能量可以通过单位面积。故，$\boxed{\text{能流 = 能量 × 速度}}$。这与$\boxed{\text{电流密度 = 电荷密度 × 速度}}$的物理来源完全一致。平面电磁波在非导电介质中传播的情况如图 8.1 所示。一个重要的特征是 E 与 B 为同相位变化的，即它们同时达到最大值，又同时达到最小值。

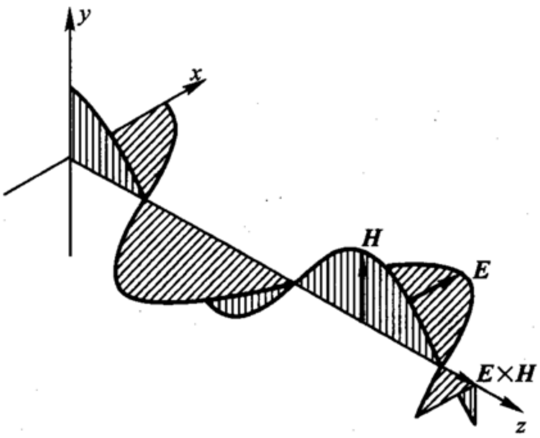


图 8.1

§8.2 波的偏振和偏振矢量

电磁波是矢量波，传播和偏振是其最重要的两个特征。上一节我们主要学习了波在线性无色散均匀媒质中的传播特性，本节中我们将重点学习波的偏振特性。让我们仔细研究横波条件（8.1.16）。对确定的传播方向$\vec{k}$，（8.1.16）式告诉我们电矢量$\vec{E}_0$必须在与其垂直的平面内。为确定起见，假设传播方向$\vec{k}\parallel\hat{z}$，则这个平面为 xy-平面，有 2 个相互垂直的单位矢量$\vec{e}_x,\vec{e}_y$（其它$\vec{k}$方向可以类似处理）。注意，当我们取了复数场的表达式之后，原则上$\vec{E}_0$可以是一个复矢量 – 其

每个分量均可取复数且可以由不同的相位。因此，$\vec{E}_0$ 的最一般形式为

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{x,0} + \vec{e}_y E_{y,0} = \vec{e}_x \left|E_{x,0}\right| e^{i\phi_x} + \vec{e}_y \left|E_{y,0}\right| e^{i\phi_y} \qquad (8.2.1)$$

将其带入复场表达式 $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$，再取实部，我们得到

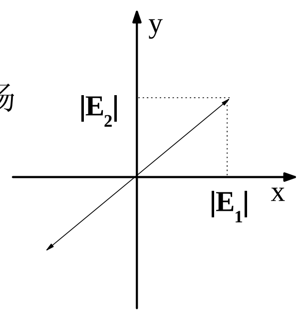
$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \left|E_{x,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi_x\right) \\ E_y(z,t) &= \left|E_{y,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi_y\right) \end{aligned} \qquad (8.2.2)$$

显然，场随时间的振荡行为由四个参量：$E_{x,0}$ $E_{y,0}$ ϕ_x ϕ_y 确定。由（8.2.2）出发，在四个参量满足不同条件时，可以得到几种典型的偏振状态。

（A）线偏振

线偏振是最简单的情形。当 $\phi_x = \phi_y = \phi$ 时，电场随时间演化为

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \left|E_{x,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi\right) \\ E_y(z,t) &= \left|E_{y,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi\right) \end{aligned} \qquad (8.2.3)$$



在任意一个确定的波阵面上（如取 z=0 的 xy 平面），电场只在一个方向上随时间来回振动，因此这种偏振状态称为线偏振。

（B） 椭圆偏振

在最一般情况下，即不对四个参量施加任何限制，则波的偏振状态都是椭圆偏振。考虑一个具体的例子：$\phi_x - \phi_y = \pi/2$, $\left|E_{x,0}\right| > \left|E_{y,0}\right|$，则

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= -\left|E_{x,0}\right| \sin\left(kz - \omega t + \phi_y\right) \\ E_y(z,t) &= \left|E_{y,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi_y\right) \end{aligned} \qquad (8.2.4)$$

在任意一个确定的波阵面上，随着时间的演化，$\vec{E}$ 场的端点描出一个半长轴为 $\left|E_{x,0}\right|$，半短轴为 $\left|E_{y,0}\right|$ 的椭圆，故这种偏振状态称为椭圆偏振。 若 $\phi_x - \phi_y \neq \pi/2$，则椭圆的对称轴（长短轴）产生了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

（c） 圆偏振

进一步，当$\left|E_{x,0}\right|=\left|E_{y,0}\right|=A$, $\phi_x-\phi_y=\pm\pi/2$时，电场分量为

$$\begin{aligned} E_x(z,t)&=\mp A\sin\left(kz-\omega t+\phi_y\right)\\ E_y(z,t)&=A\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right)\end{aligned} \qquad (8.2.5)$$

对这种波，在任一波阵面上，$\vec{E}$的端点随时间的演化描出一个半径为 A 的圆，故称为圆偏振。进一步考虑两种情况，

（C.1）<u>右旋圆偏振</u> $\phi_x-\phi_y=\pi/2$时，（8.2.5）式描述的是电场矢量顺时针旋转，称为右旋圆偏振。此时（8.2.5）可以重写为

$$\vec{E}_0=\sqrt{2}Ae^{i\phi_1}\vec{e}_{right}$$

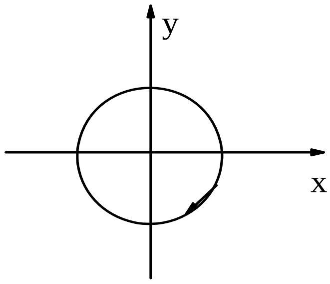
其中

$$\boxed{\vec{e}_{right}=(\vec{e}_x-i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.6)$$

就是右旋偏振的单位矢量.

（C.2）<u>左旋圆偏振</u>　同理，$\phi_x-\phi_y=-\pi/2$时为左旋圆偏振。偏振态的单位矢量为

$$\boxed{\vec{e}_{left}=(\vec{e}_x+i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.7)$$



讨论：

（1）　看上去左右旋光的定义和我们的常识正好相反，似乎以“k 的方向与 E 的旋转方向成左/右手螺旋”来定义左右旋光会更容易使人习惯。这里的原因比较复杂，一个可能的解释是历史上人们根据在某一个给定的时刻看到的电场由远及近在空间（z）传播而来时的旋转来定义的　（参考课堂上演示的偏振光动画）。

（2）　在目前 Metamaterial 的研究中，一个热门的课题就是如何利用 Metamaterial 来调控光波的偏振状态，比如实现由线偏振到圆偏振、椭圆偏振的转化，或者是两个垂直方向的线偏振光的相互转化。有兴趣的同学参考“**J. M. Hao, et. al., Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007), Wujiong Sun, et al, Opt. Lett. 36 927 (2011)**”.

习题

P．204，8.1

补充题:

（1） 证明（8.1.25）式以及平面电磁波的电场能和磁场能的时间平均值相等

（2） 计算真空的阻抗值

（3） 将线偏振的光波 $\vec{E}(\vec{r},t)=E_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$ 分解成左旋光和右旋光的叠加。

思考题

- 尝试在球坐标/柱坐标下解波动方程（8.1.3）
- 课件中的所有推导都是基于 ε_r,μ_r 均大于 0 的情形。在其他三种情形下（即: $\varepsilon_r>0,\mu_r<0;\ \varepsilon_r<0,\mu_r>0;\ \varepsilon_r<0,\mu_r>0$ ），课上建立的那些结论需要改写？