

中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学》(二) (A 卷) (珠海校区)

学年学期：2016 学年第一学期

学院/系：数学学院

考试方式：闭卷

考试时长：120 分钟

姓 名：_____

学 号：_____

学 院：_____

年级专业：_____

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共六道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答-----

一、填空题（共8小题10个空格，每空格2分，共20分）

(1) 若 $x \rightarrow 0$ 时， $x \sin(kx)$ 与 $\ln(\cos x)$ 是等价无穷小量，则 $k =$ _____.

(2) 点 $x = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 2}$ 的 _____ 间断点.

(3) 曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的水平渐近线为 _____; 竖直渐近线为 _____.

(4) 函数 $y = \tan x$ 的带有皮亚诺余项的3阶麦克劳林展开式为 _____.

(5) 如果函数 $f(x) = a \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ ，在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $a =$ _____.

(6) 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^3 dx =$ _____.

(7) $f(x) = \int_0^x (1-t)t dt$ 的极大值点为 _____，且极大值为 _____.

(8) 满足二阶线性微分方程定解问题: $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10$ 的特解为

_____.

二、计算题 (共6小题, 每小题5分, 共30分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{3x+1}$

(3) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0)$

(4) $\int \sin(\ln x) dx$

(5) $\int_0^e |\ln x| dx$

(6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 连续.

三、(10分) 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$.

四、(15分) 回答下列问题并描绘函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 的图形

(1) 函数的定义域, 极值点, 单调区间;

(2) 函数的拐点, 凹凸区间;

(3) 函数的渐近线, 函数图像.

五、(10分) 证明: 设 $x > 0$, 则 $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

六、(15分) 设光滑曲线 $y = \varphi(x)$ 过原点, 且当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) > 0$. 对应于 $[0, x]$ 一段曲线的弧长为

$2x$, (1) 求函数 $y = \varphi(x)$; (2) 求由曲线弧 $y = \varphi(x)$ 与 x 轴, 直线 $x = 0, x = 1$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.