第二讲

上次课：

- q --- 静电的来源及受体
- F --- 库仑定律/实验定律
- $\vec{E}(\vec{r})=\vec{F}/q=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}$ - 电场
- $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ - 电场的散度，高斯定理
- 常用公式：$\boxed{\nabla\cdot\dfrac{\vec{R}}{R^3}=4\pi\delta(\vec{R})}$

5．静电场的旋度 – 安培环路定理

现在我们研究电场的旋度性质$\nabla\times\vec{E}=?$，这等价于研究静电场对任意环路的线积分：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=?$。在《电磁学》中，我们通常的求解方法如下：

** 将电场对任意路径的积分分解为*

1）电场沿径向的积分

2）电场沿切向的积分

** 利用静电场为向心力这一特点可知，2）的贡献为 0，只需考虑 1）的贡献*

** 对任意环路，$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 积分可以简化到一个径向的积分，因此其结果恒为 0。*

这里我们利用更高等的数学方法证明。首先注意一个非常有用的公式

$$\nabla r=\vec{r}/r\quad\rightarrow\quad\nabla R=\vec{R}/R$$

由此可以得到另一个恒等式

$$\boxed{\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\nabla R}{R^2}=-\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}}$$

（此处用到分部微分公式：$\nabla f(r)=\dfrac{\partial f}{\partial r}\nabla r,\nabla f(R)=\dfrac{\partial f}{\partial R}\nabla R$，参考教材中附录。其实$\nabla$算符同时具有矢量性和微分性，在标量做梯度运算时只显示微分性，因此常规的分部计算法可以大胆地使用。）

将上述恒等式带入场的定义：$\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}$，即可得：

$$\vec{E}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\vec{r}')d\tau\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d\tau\right]=-\nabla\varphi(\vec{r})\quad（1.1.11）$$

其中

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{R}d\tau \qquad (1.1.12)$$

为标量势。利用静电场的标量势表达（1.1.11），我们得到静电场的环路定理的积分表达形式：

$$\boxed{\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\oint\nabla\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{l}=-\oint(\partial\varphi/\partial l)\cdot dl\equiv 0} \qquad (1.1.13)$$

其中 $\partial\varphi/\partial l$ 意味着沿着环路的切线方向对 φ 求偏导。上式的物理意义为静电场是保守场。也可以将环路定理写成微分形式，

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\times\nabla\varphi(\vec{r})\equiv 0} \qquad (1.1.14)$$

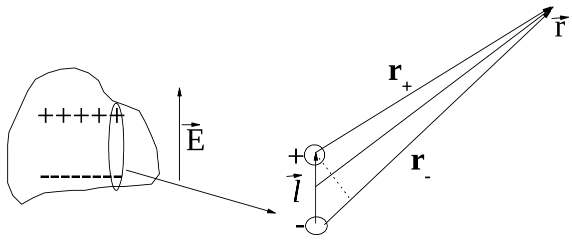
物理意义是静电场是无旋场。**“无旋”、“保守”、可定义标量势**这三者是相互关联，可以相互导出的，其本质都来源于**静电场是向心力**。

思考：还有什么形式的场可以定义标量势？

注： 到现状位置，$\nabla\bullet\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ 和 $\nabla\times\vec{E}=0$ 已经给了我们非常完整的电场的图像：有源（从正电荷出发散出来，到负电荷出汇聚），无旋（有头有尾，有始有终）。

6．电偶极子

当施加电场于一个中性的物体上时，电场将物体中的正/负电荷拉开。因此为了描述物质的这种对外场的响应，人们定义**电偶极子**为两个相聚很近的带等电量的正负电荷组成的体系，并研究其电行为。偶极子的大小由偶极距描述，其定义为 $\vec{p}=q\vec{l}$，方向由负电指向正电（***思考：为什么要这样定义？***）。其实对任意的一个带电体，在远场看，最低价近似下可看成以 q 为带电体总带电量的一个点电荷的贡献，再进一步就能“感受”到偶极子的场的贡献。偶极子场比点电荷的场衰减的快，所以要近一点才能看到。因此研究电偶极子具有重要意义。具体计算偶极子的电势为



$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_--r_+}{r^2}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (1.1.15)$$

我们注意到偶极子的电势果然比点电荷的电势更快地衰减。计算可知

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}+\vec{p}\cdot\vec{r}\nabla\frac{1}{r^3}\right]=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]} \qquad (1.1.16)$$

非常容易可以计算出场的分量形式（设 $\vec{p}\parallel\hat{z}$）：$E_r=\dfrac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3},E_\theta=\dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},E_\phi\equiv 0$。

Tips：与《电磁学》相比较，《电动力学》中更讲究数学形式的紧凑的矢量表述方式，而不是写成分量后的形式或是在某一些特定条件下的（比如 r||z）形式。熟练掌握常用的几个矢量运算是必要的：$\nabla r=\vec{r}/r, \nabla(r^n)=nr^{n-1}\hat{r}, \nabla^2\left(1/r\right)=-4\pi\delta(\vec{r}\,)$，等。

§ 1.2 静磁现象的基本理论描述

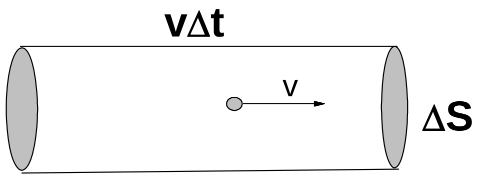
磁现象的描述要比电现象复杂。在 1820 年之前，磁现象是与磁铁（磁石）等相连，表现神秘，不易定量研究。直至 Oersted 发现电流也可以产生与磁铁一样的现象，人们才可以定量研究磁现象。我们下面将与电现象对比，简要总结静磁现象的基本理论描述。

1．电流（磁的来源、与电荷对比）

电流-顾名思义为电荷的流动。为定量描述电荷流动，定义**电流**为：单位时间内垂直穿过某一特定截面的电荷量，用 I 表示：

$$I=\Delta q/\Delta t\,|_S \qquad (1.2.1)$$

I 是个描述电荷流动的积分的总效果。为了更微观地看电荷的流动情况，定义**电流密度** $\vec{j}$ 为单位面积单位时间通过的电荷量 $j=\dfrac{\Delta q}{\Delta t\Delta S}$，可以推知 $j=\dfrac{\rho\Delta\Omega}{\Delta t\Delta S}=\dfrac{\rho\Delta S v\Delta t}{\Delta t\Delta S}=\rho v$ （如下图所示）。



进一步考虑电流密度的矢量性，可以推广以上结果定义矢量形式的电流密度：

$$\vec{j}=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \qquad (1.2.2)$$

式中 $\vec{v}$ 代表在 $\vec{r}$ 处的电荷的运动速度，ρ 为电荷密度．考虑电流密度的矢量性之后，其与电流 I 之间的关系为更一般的形式

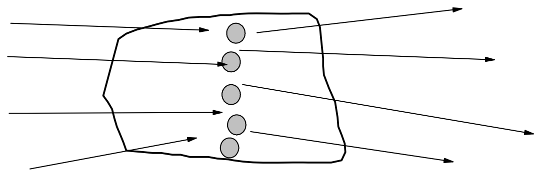
$$\vec{j}=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})\Rightarrow I=\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \qquad (1.2.3)$$

上式显然是合理的，因为只有投影到 $d\vec{S}$ 方向上的电流密度才能通过这块面积，而与其平行的分量对通过此截面积的总电流 I 没有贡献。

电荷守恒　实验表明电荷是守恒的，即电荷不能消灭及产生，而只能转移。在空间内任取一封闭曲面 S，单位时间内穿流出去的电荷量为（根据电流密度的定义

（1.2.1)）$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$，流出去的电荷量应等于封闭曲面 S 内总电荷在单位时间内的减少量，即 $-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau$，$V$ 是 S 所包围的体积，所以

$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau \qquad .$$



根据高斯定理，有 $\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{j}d\tau$。代入上式可得

$$\int_V\left(\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau = 0$$

由于曲面 S 是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0} \qquad (1.2.3)$$

(1.2.4)式是电荷守恒定律的数学表达式，也称**连续性方程**。

注：所有的"*流密度"的微观形式都是"**密度 （乘以）速度"，如粒子流密度，能流密度，物理意义均为单位时间单位面积通过的粒子数（能量、电荷等）。守恒律的普遍表达形式（粒子数守恒、能量守恒、…）为：

流密度的散度+数密度的变化率 = 0

在稳定电流情况下，由于 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，所以有 $\nabla\cdot\vec{j}=0$，电流密度的散度为 0.

这一点从几何上看意味着电流线在空间任何一点均没有源头，这表示稳恒条件下电流线是闭合无源的。非稳恒时电流线的汇聚/发散总是伴随着电荷的积累，亦即 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 项。

2. 安培定律 (与库仑定律对比)

既然电流是磁场的来源，类比库仑定律，我们应考虑两个这样的基本单位（电流元，定义为 $\vec{j}d\tau$，与 $\rho d\tau$ 地位相仿）之间的作用力。安培定律就是这样一个实验定律，其地位与库伦定律相仿。若真空中的两个电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 和 $\vec{j}_2 d\tau_2$，则安培定律告诉我们 2 对 1 的作用力 $d\vec{F}_{12}$ 为

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1 d\tau_1\times(\vec{j}_2 d\tau_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.5)$$

其中 $\vec{R}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ 为 2 指向 1 的位置矢量。与库仑定律比较，我们可以看到：

(1) 电流元之间的相互作用力也服从平方反比律

(2) 电流元之间作用力非向心力 - 磁场的散度及旋度行为与电场将截然不同！

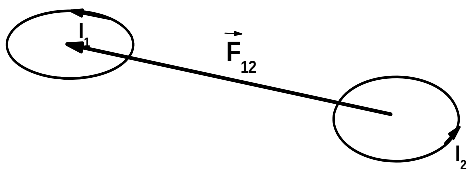
(3) 电流元之间的相互作用力不满足牛顿的作用力与反作用力定律，即 $d\vec{F}_{12}\neq -d\vec{F}_{21}$。（比如考虑右图的情况）

对这个问题的简单回应是因为实际上不可能存在稳定的电流元，实验所能测量的只能是闭合回路的情况.

****** 选读内容 ******

考虑两闭合载流线圈，则 2 对 1 的作用力为

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.6)$$



利用矢量公式 $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$ *（非常有用，请牢记），可得*

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}&=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\left[\frac{d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\vec{R}_{12})}{R_{12}^3}-\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}\right]\\&=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint_{l_1}\left[d\vec{l}_1\cdot\nabla\frac{1}{R_{12}}\right]-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3} \qquad (1.2.7)\\&=0+-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}=-\vec{F}_{21}\end{aligned}$$

即闭合回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

****** 选读内容 ******

然而我们对这个经典回答并不满足，深思以后，至少有这样几个问题值得研究：

1）我们可以让一个电荷做匀速运动（速度<<光速），这样就制造出空间的一个电流元 $\vec{j}=qv\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$，这样两个匀速运动的电荷之间的磁力是什么？

2）它们两个的相互作用满足不满足牛顿第三定律呢？为什么？

3）牛顿第三定律是本质的定律吗？若不是，其本质是什么？

3．磁场

类比电场的定义，可定义磁场。将作用在电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 上的力写为

$$\boxed{d\vec{F}_1=\vec{j}_1 d\tau_1\times\vec{B}(\vec{r})} \qquad (1.2.8)$$

其中 $\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_2 d\tau_2\times\frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$ 为电流元 $\vec{j}_2 d\tau_2$ 在 $\vec{r}$ 处产生的磁场。由叠加原理，对任意的电流分布 $\vec{j}(\vec{r}\,')$，其在在 $\vec{r}$ 处产生的磁场为

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}} \tag{1.2.9}$$

函数 $\vec{B}(\vec{r})$ 称为**磁感应强度**(纯粹是由于历史上的原因才不把它称为磁场强度)。上式常称为 Biot-Sarvart 定律。

以速度 $\vec{v}$ 运动的电荷 q 产生的电流密度为 $\vec{j}=q\vec{v}\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$（仅在 v << 光速时成立)，因此其在 $\vec{B}$ 场中所受的力为

$$\vec{F}=\int_\tau q\delta(\vec{r}-vt\hat{x})d\tau\vec{v}\times\vec{B}=q\vec{v}\times\vec{B} \tag{1.2.10}$$

若空间既有磁场又有电场，则总受力为

$$\boxed{\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)} \tag{1.2.11}$$

这就是描述带电粒子在空间既有电场又有磁场时的受力 - Lorentz 力。

4. $\vec{B}(\vec{r})$ 的散度

要完整理解矢量场的全部特征，须研究其散度和旋度。对比具有平方反比+径向的静电场，磁场为横向场，故可以预期 **B** 场的散度及旋度性质一定与静电场相当不同。考虑散度性质，利用计算标势φ时采用的技巧，可将磁场改写为

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}\,')\times\frac{\vec{R}}{R^3}d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\nabla\frac{1}{R})d\tau'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int(\nabla\frac{1}{R})\times\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\tau'\\&=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\tau'\right]=\nabla\times\vec{A}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

其中 $\boxed{\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\tau'}$ 为矢势，地位与电场的标势相对应。因此，

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv 0} \tag{1.2.13}$$

注：

（1）在（1.2.12）第二行的推导中，我们用到了矢量运算公式 $\boxed{\nabla\times\left(\vec{a}\psi\right)=\left(\nabla\times\vec{a}\right)\psi+\nabla\psi\times\vec{a}}$

以及 $\vec{j}(\vec{r}')$ 不依赖于 $\vec{r}$ 的性质。先利用分步微分将 ∇ 分解：$\nabla \to \vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_j$：然后分别运算到 ***R*** *和* ***J***：$\nabla \times \left(\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) = \nabla_R \left(\dfrac{1}{R}\right) \times \vec{j}(\vec{r}\,') + \left(\nabla_j \times \vec{j}(\vec{r}\,')\right)/R$ 。*注意到* $\nabla_j \times \vec{j}(\vec{r}\,') \equiv 0$ *（因为* $\vec{j}(\vec{r}')$ *不依赖于* **r**），*故* $\nabla \times \left(\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) = \nabla \left(\dfrac{1}{R}\right) \times \vec{j}(\vec{r}\,')$ 。

*（**2**）尽管我们本节研究的是稳恒电流，此处的推导丝毫没有假设电流不依赖于时间。换言之，若随时间变化的电流产生的磁场仍由* ***B-S*** *定律描述，则此时高斯定理仍成立。 这条性质在随后我们推广* ***Maxwell*** *方程式到非稳态时有重要作用。*

习题

1.7，1.8，1.9， 1.14