第一章 §3 麦克斯韦方程组

静电磁学小结

电荷守恒

$$\oiint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

库仑定律

$$\boldsymbol{f}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{F}_e = Q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dV'$$

毕奥-萨伐尔定律

$$d\boldsymbol{F}_m = Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \iiint_{V'} \frac{\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}dV'$$

高斯定理

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

静电场无旋 （静）

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

无磁荷

$$\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

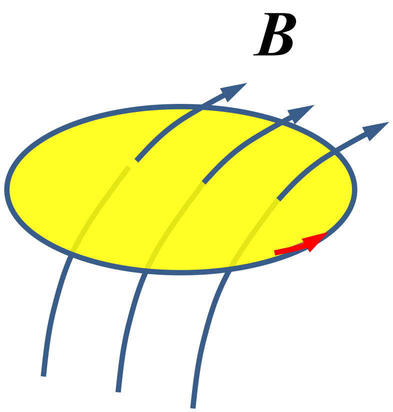
安培定律 （静）

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I = \mu_0\iint_M \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

3.1 电磁感应定律

感应电动势　（法拉第，1831）



回路上的感应电动势

$$\boxed{\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}}$$

而

$$\mathscr{E} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$$

对固定回路，

$$-\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = -\iint_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}$$

故

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}}$$

3.2 位移电流

安培定律 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$ （稳恒电流）

数学恒等式 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0$

$\Rightarrow$ $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$

而电流连续性方程

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

可见安培定律仅适用于稳恒电荷分布情形.

非稳恒情形 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+?$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\nabla\cdot(?)$$

$$\nabla\cdot(?) = -\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}$$

考虑高斯定理

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

应用 $\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

$$\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{J}$$

得到提示：

$$? = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

麦克斯韦引入“**位移电流**”

$$J_D = \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

把安培定律改造为

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_D)$$

与电流连续性方程相容

3.3 麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$$

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho d^3 x$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

（1）定域规律；（2）线性（与电磁力的线性叠加性一致）；

（3）与电荷定域守恒一致；（4）无磁荷

基本假设：在空间反演下，电荷、质量、和所有电磁规律均不变.

空间反演： $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$

时间反演： $t \to t' = -t$

表. 空间和时间反演下电磁量的变换方式

	数学属性	三维空间转动	空间反演	时间反演	SI量纲
ρ	三维空间标量	如距离	不变	不变	C/M³=库仑/米³
$\boldsymbol{J}$	三维空间矢量	如位移矢量	反向	反向	A=安培
$\boldsymbol{E}$	三维空间矢量	如位移矢量	反向	不变	N/C=伏/米
$\boldsymbol{B}$	三维空间赝矢量	如位移矢量	不变	反向	N/A/M=特斯拉

若外电场给定，则系统的空间反演对称性被破坏.

若外磁场给定，则系统的时间反演对称性被破坏.

用“势”表示电磁场

“力”表示（$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$）	稳恒情形		“势”表示（φ，$\boldsymbol{A}$）	
$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$	⇨	$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$	
$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$	$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$		$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}$	
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$		$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	泊松方程
$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	⇨	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$	

非稳恒情形

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \quad\Rightarrow\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

（$\boldsymbol{E}$为非保守力场）

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)=0$$

故存在标量场 φ

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

电磁强度（$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\mu_0c^2\rho$$

电磁势（φ，$\boldsymbol{A}$）

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\mu_0c^2\rho$$

$$c^2\equiv\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

c: 具有速度量纲——光速

3.4* 规范对称性

电磁势满足的场方程

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}+\nabla\left(\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)=\mu_0\boldsymbol{J} \qquad \text{(A)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2\right)\frac{\varphi}{c}-\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)=\mu_0 c\rho \qquad \text{(B)}$$

性质一

$$\nabla(A)+\frac{\partial}{c\partial t}(B)=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

性质二

规范变换： $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\phi$ **和** $\varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\phi$

方程（A） 和（B）不变. 易见，*E*和*B* 也不变——规范对称性.

规范变换：

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\phi$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial}{\partial t}\phi$$

$\phi(\boldsymbol{x},t)$ 为$\boldsymbol{x}$和t的任意函数.

势满足的场方程组不变，“力”$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$不变。由此推断，$(\varphi,\boldsymbol{A})$ 和 $(\varphi',\boldsymbol{A}')$ 描写的电磁场在物理上等价.

规范对称性原理：电磁相互作用理论在规范变换下不变，由规范变换联系起来的电磁势具有完全一样的物理可观察行为.

推论：只有规范不变量才是可以测量的物理量.

从规范对称性原理出发可以确定电磁相互作用的形式.

规范条件

因为电磁理论在规范变换下不变，描写电磁场的电磁势有一定的任意性. 可以对电磁势加以适当约束以减少它的自由度. 这种约束称为规范条件.

通过规范变换，总可以实现下面常用的规范条件。

（1）库仑规范： $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$

在此规范下的场方程

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}-\nabla\left(\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}\right),\qquad \nabla^2\varphi=-\mu_0c^2\rho$$

（2）洛伦兹(Lorenz) 规范： $\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$

在此规范下的场方程

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J},\qquad \left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\nabla^2\right)\frac{\varphi}{c}=\mu_0c\rho$$

洛伦兹规范存在性证明

设 $$\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi'}{c}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=f(\boldsymbol{x},t)\neq 0$$

规范变换得 $(\varphi,\boldsymbol{A})$ 满足

$$\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\left(-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}+\nabla^2\right)\phi=f(\boldsymbol{x},t)$$

取规范变换函数 ϕ 满足

$$\left(-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}+\nabla^2\right)\phi=f(\boldsymbol{x},t)$$

对正常的f，方程的解存在，从而

$$\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\varphi}{c}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

故洛伦兹规范存在。存在库仑规范的证明类似。

3.5* 洛伦兹对称性

定义闵可夫斯基四维矢量（矢量算符）：

$$x^a=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\ict\end{pmatrix},\qquad \partial^a=\begin{pmatrix}\partial^1\\\partial^2\\\partial^3\\\partial^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\\\partial/ic\partial t\end{pmatrix},\qquad j^a=\begin{pmatrix}J^1\\J^2\\J^3\\ic\rho\end{pmatrix},\qquad A^a=\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\\i\dfrac{\varphi}{c}\end{pmatrix}$$

$$x_a=(x,y,z,ict),\qquad \partial_a=(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{ic\partial t}\right)$$

用度规张量升降指标

$$g_{ab}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=g^{ab}$$

场方程：

$$\partial^a \partial_a A^b - \partial^b \left(\partial_a A^a \right) = -\mu_0 j^b$$

连续性方程：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_a j^a = 0$$

定义规范不变电磁场四维张量（电磁场曲率张量）

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a$$

场方程：

$$\partial_a F^{ab} = -\mu_0 j^b$$

在惯性系变换中，牛顿力学在伽利略变换下保持不变. 伽利略变换可以从空间距离和时间分别不变的要求得到.

$$r' = r \quad \Rightarrow \quad \Delta x'^{j} = \sum_{k=1}^{3} a^{j}_{\cdot k} \Delta x^{k}, \qquad \sum_{k=1}^{3} a^{j}_{\cdot k} \tilde{a}^{k}_{\cdot l} = \sum_{k=1}^{3} \tilde{a}^{j}_{\cdot k} a^{k}_{\cdot l} = \delta^{j}_{\cdot l}$$

$\{a^{j}_{\cdot k}\}$ 是三维基空间的正交变换矩阵，$\{\tilde{a}^{j}_{\cdot k}\}$ 是相应的转置矩阵.

伽利略变换：

$$x'^{j} = a^{j}_{\cdot k} x^{k} - v^{j}_{0} t, \qquad t' = t$$

但是电磁场方程在伽利略变换下并不是不变的.

所得电磁场方程仅在特定惯性系成立？

或者伽利略变换不对 ？

庞加莱变换

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu} + d^{\mu}$$

其中 $a^{a}_{\cdot b} = \{a^{\mu}_{\cdot\nu}\}$ 是四维闵可夫斯基空间的正交变换矩阵.

$d^{a} = \{d^{\mu}\}$ 对应时空原点的平移

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1}_{\cdot1} & a^{1}_{\cdot2} & a^{1}_{\cdot3} & a^{1}_{\cdot4} \\ a^{2}_{\cdot1} & a^{2}_{\cdot2} & a^{2}_{\cdot3} & a^{2}_{\cdot4} \\ a^{3}_{\cdot1} & a^{3}_{\cdot2} & a^{3}_{\cdot3} & a^{3}_{\cdot4} \\ a^{4}_{\cdot1} & a^{4}_{\cdot2} & a^{4}_{\cdot3} & a^{4}_{\cdot4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^{1} \\ d^{2} \\ d^{3} \\ icd^{0} \end{pmatrix}$$

矩阵元满足正交条件

$$\sum_{\nu=1}^{4} a^{\mu}_{\cdot\nu} \tilde{a}^{\nu}_{\cdot\lambda} = \sum_{\nu=1}^{4} \tilde{a}^{\mu}_{\cdot\nu} a^{\nu}_{\cdot\lambda} = \delta^{\mu}_{\cdot\lambda}$$

“转动”： $\det\left(a^{a}_{\cdot b}\right) = 1$

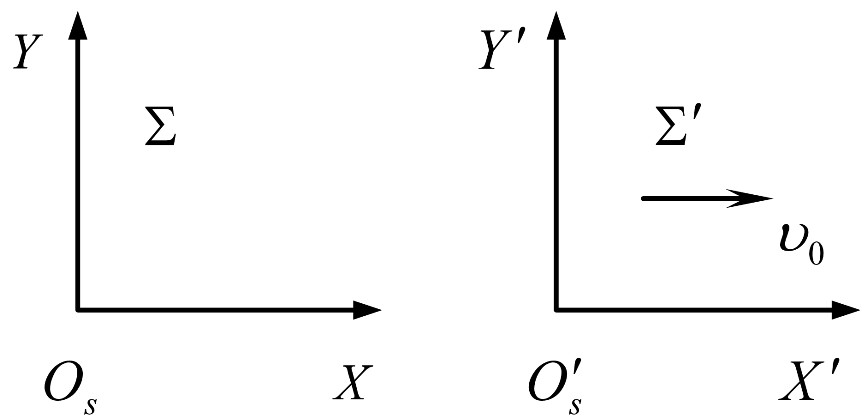
洛伦兹变换

——四维闵可夫斯基空间的正交（转动）变换

$$\Delta x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a^{\mu}_{\cdot\nu} \Delta x^{\nu}, \qquad \det\left(a^{a}_{\cdot b}\right) = 1$$

它包括惯性系变换和三维空间转动。

设在 $t = t' = 0$ 时刻惯性系 Σ 和 Σ' 的坐标架重合，相对以速度v_0 沿 X 轴运动



记 $\beta = \dfrac{\upsilon_0}{c}$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon_0/c)^2}}$

$$a^{a}_{\cdot b} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

洛仑兹变换的分量形式：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon_0 \Delta t}{\sqrt{1-(\upsilon_0/c)^2}}$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{\upsilon_0}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\upsilon_0/c)^2}}$$

狭义相对论

惯性系中所有物理规律在庞加莱变换下保持不变（洛伦兹协变）.

洛伦兹张量（矢量）：在洛伦兹变换下每个分量都和时空间隔 Δx^a 一样变换.

$$A'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a^{\mu}_{\cdot\nu} A^{\nu}, \qquad j'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} a^{\mu}_{\cdot\nu} j^{\nu}, \qquad F'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} a^{\mu}_{\cdot\alpha} a^{\nu}_{\cdot\beta} F^{\alpha\beta}$$

电磁场理论表示成四维闵可夫斯基空间的协变张量方程

$$\partial_a F^{ab} = -\mu_0 j^b, \qquad \partial_a j^a = 0$$

他们在洛伦兹变换下保持不变，满足狭义相对论.

3.6* 洛伦兹力

设在某惯性系粒子受力

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \boldsymbol{v})}{dt}$$

它可改写成协变式

$$\boldsymbol{K} = \gamma_v \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}, \qquad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

固有时

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c}\sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \frac{1}{\gamma_v} dt$$

（洛伦兹不变）

四维协变速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_v \frac{dx^\mu}{dt}$$

即

$$u^a = (\gamma_v v_1, \gamma_v v_2, \gamma_v v_3, ic\gamma_v)$$

利用电磁场张量$F_{\mu\nu}$和四维速度u^μ可以得到一个协变力

$$K_\mu = qF_{\mu\lambda}u^\lambda = \gamma_v q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_\mu$$

这正是与洛伦兹力对应的四维力. 在电荷q受到的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

在任意惯性系都有

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}),$$

即

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{K} = \gamma_v q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$ (洛仑兹协变)

体元dV内电荷受到的电场力

$$d\boldsymbol{F}_e = (\rho dV)\boldsymbol{E}$$

体元dV内电荷受到的磁场力

$$d\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{J}dV \times \boldsymbol{B}$$

作用于单位体积的洛仑兹力为

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + J \times \boldsymbol{B}$$

3.7* 场强张量

把 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 代入电磁场四维张量得到

法拉第张量

$$F^{ab}=\begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & -\frac{i}{c}E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & -\frac{i}{c}E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & -\frac{i}{c}E^3 \\ \frac{i}{c}E^1 & \frac{i}{c}E^2 & \frac{i}{c}E^3 & 0 \end{pmatrix}$$

由此导出对偶张量

$$\widetilde{F}_{ab}=\frac{1}{2i}\varepsilon_{abcd}F^{cd}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^3 & \frac{1}{c}E^2 & -iB^1 \\ \frac{1}{c}E^3 & 0 & -\frac{1}{c}E^1 & -iB^2 \\ -\frac{1}{c}E^2 & \frac{1}{c}E^1 & 0 & -iB^3 \\ iB^1 & iB^2 & iB^3 & 0 \end{pmatrix}$$

对偶场方程

$$\partial^a \widetilde{F}_{ab} = 0$$

如有磁单极子，右边正比于磁单极子流密度.

如果用四维电磁势表示对偶场强张量，上式变成恒等式（数学上称为Bianchi恒等式）. 如果用电磁场强($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$) 表示对偶场强张量，则上式成为关于($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$) 的约束方程，即麦克斯韦方程组中的两条方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

约束方程是可以用电磁势表示电磁场强的充分必要条件。 如果有磁单极，只能在没有磁单极的区域引入电磁势。一般而言，需要用在不同区域引入电磁势，在区域重叠处不同电磁势用规范变换联系起来。

小结

场方程和约束

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\mu_0 j^\mu$$

$$\partial^\mu \widetilde{F}_{\mu\nu} = 0$$ （用势表示时自然满足）

等价于麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

作业：

1. 从麦克斯韦方程组推导电荷守恒连续性方程
2. 根据麦克四维方程组导出空间和时间反演下电磁量的变换方式
3. 电磁场张量定义为 $F^{ab}=\partial^a A^b-\partial^b A^a$. 证明 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是规范不变量（重复指标求和）. 用电场强度***E*** 和磁感应强度***B*** 表示这个量
4. 在洛伦兹变换下，体积微元dV如何变换？ 单位体积的洛仑兹力是洛伦兹协变 量吗？