电动力学

第二章：电多极矩

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

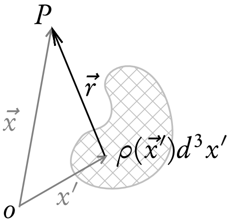
April 11, 2019

电多极矩

1. 电势的多极展开：

真空中给定电荷密度 $\rho(\vec{x}')$ 激发的静电势为，

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{4\pi\epsilon_0 r}$$



式中的体积分遍及电荷分布区域 V，r 是场点与源点之间的距离，

$$r = |\vec{x} - \vec{x}'|.$$

在许多物理问题中，电荷只分布在一个线度为 l 的小区域中，而场点又比较远，即若设 $R = |\vec{x}|$，则 $R \gg l$. 这种情况下可以将 $1/r$ 按照 $(1/R)$ 作泰勒展开：

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - x'_i\partial_i\frac{1}{R} + \frac{1}{2!}x'_ix'_j\partial_i\partial_j\frac{1}{R} + \cdots$$

电势的多极展开（二）:

从而求远场区电势的近似值：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[\frac{1}{R} - x_i'\partial_i\frac{1}{R} + \frac{1}{2!}x_i'x_j'\partial_i\partial_j\frac{1}{R} + \cdots\right]d^3x'$$

注意到在远场区 $R \neq 0$，所以，

$$0 = \nabla^2\frac{1}{R} = \delta_{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{R}$$

电势的近似表达式可进一步改写为：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[\frac{1}{R} - x_i'\partial_i\frac{1}{R} + \frac{1}{6}(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\partial_i\partial_j\frac{1}{R} + \cdots\right]d^3x'$$

即，

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{R} - p_i\partial_i\frac{1}{R} + \frac{1}{6}\mathscr{D}_{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{R} + \cdots\right]$$

电势的多极展开 (三):

式中,

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}')d^3x'$$

$$p_i = \int_V x_i'\rho(\vec{x}')d^3x'$$

$$\mathscr{D}_{ij} = \int_V (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}')d^3x'$$

分别是电荷体系的总电荷量、电偶极矩矢量和电四极矩张量.这几个多极矩各自在远场区激发的静电势分别为:

$$\varphi^{(0)}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad \varphi^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

$$\varphi^{(2)}(\vec{x}) = \frac{1}{24\pi\epsilon_0}\sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}.$$

电偶极矩:

电荷体系的电偶极矩矢量定义为:

$$\vec{p}=\int_V \vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x'$$

显然，若体系的电荷分布关于坐标原点对称[1]，$\rho(\vec{x}')=\rho(-\vec{x}')$, 则其电偶极矩为零:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int_V \vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x' \\ &= \frac{1}{2}\int_V \vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x' - \frac{1}{2}\int_V \vec{x}'\rho(-\vec{x}')d^3x' = 0\end{aligned}$$

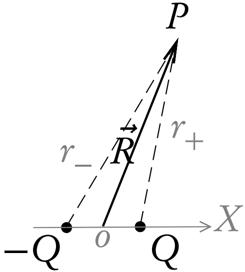
结论:

只有相对于原点不对称的电荷分布, $\rho(\vec{x}')\neq\rho(-\vec{x}')$, 才有非零的电偶极矩矢量.

[1] 例如球对称的电荷分布.

电偶极矩 (二):

总电荷为零但电偶极矩非零的最简单电荷体系是一对等电量的正负点电荷，称为电偶极子.



取偶极子二电荷的连线为 X 轴. 设二电荷到坐标原点的距离均为 $l/2$，则此系统的电荷密度分布是:

$$\rho(\vec{x}) = Q\delta(x - l/2)\delta(y)\delta(z) - Q\delta(x + l/2)\delta(y)\delta(z)$$

所以，

$$\vec{p} = Ql\hat{i} = Q\vec{l}$$

其在场点 P 处激发的静电势是:

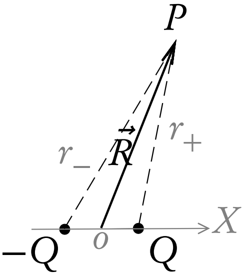
$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

注意到:

$$\vec{r}_{\pm} = \vec{R} \mp (l/2)\,\hat{i}$$

设 $\vec{R}$ 与 X 轴之间的夹角为 θ. 当 $R \gg l$, 我们有:

$$r_{\pm} = \sqrt{R^2 + (l/2)^2 \mp Rl\cos\theta} \approx R \mp \frac{l}{2}\cos\theta$$



所以,

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{R-(l/2)\cos\theta} - \frac{1}{R+(l/2)\cos\theta} \approx \frac{l\cos\theta}{R^2}$$

电偶极子在场点 P 处激发的静电势是:

$$\varphi(P) \approx \frac{Ql\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

电四极矩:

电荷体系的电四极矩张量定义为:

$$\mathscr{D}_{ij} = \int_V (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}')d^3x'$$

显然,

1. 电四极矩是对称张量:

$$D_{ij} = D_{ji}\,, \quad (i,j = 1,2,3)$$

2. 电四极矩张量无迹:

$$D_{ii} = \int_V (3x_i'x_i' - r'^2\delta_{ii})\rho(\vec{x}')d^3x' = 0\,.$$

所以，电四极矩张量只有五个独立分量:

$$\# = \frac{3\cdot 4}{2} - 1 = 5\,.$$

电四极矩 (二):

物理小贴士:

若体系的电荷分布具有球对称性，$\rho(\vec{x}') = \rho(r')$, 则其电四极矩为零.

验证如下:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{ij} &= \int_V (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij})\rho(r') d^3x' \\
&= \int dr' r'^4 \rho(r') \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(3\frac{x_i' x_j'}{r'^2} - \delta_{ij}\right) \\
&= \mathscr{A}_{ij} \int dr' r'^4 \rho(r')
\end{aligned}
$$

这里,

$$
\mathscr{A}_{ij} := \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(3\frac{x_i' x_j'}{r'^2} - \delta_{ij}\right)
$$

电四极矩 (三):

注意到:

$$x'_1 = r' \sin\theta\cos\phi,\;\; x'_2 = r'\sin\theta\sin\phi,\;\; x'_3 = r'\cos\theta,$$

我们有:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{11} &= \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi(3\sin^2\theta\cos^2\phi - 1)\\ &= 3\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)d\xi\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi - 4\pi\\ &= 3\big(2-2/3\big)\pi - 4\pi = 0\end{aligned}$$

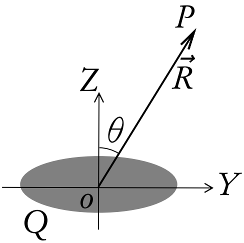
事实上，对于所有可能的 i 和 j，均有 $\mathscr{A}_{ij} = 0$.

结论:

只有偏离球对称的电荷分布, $\rho(\vec{x}') \neq \rho(r')$, 才有非零的电四极矩.

例题：

例：均匀带电的长形旋转椭球体长半轴为 a，短半轴为 b，带电总量为 Q. 求它的电四极矩和远处的电势.



解：建立直角坐标系，取 Z 轴为旋转轴. 椭球方程为：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leq 1$$

取参数化，$x=a\xi\sin\alpha\cos\beta, y=a\xi\sin\alpha\sin\beta, z=b\xi\cos\alpha$，显见：

$$0\leq\xi\leq 1,\quad 0\leq\alpha\leq\pi,\quad 0\leq\beta\leq 2\pi.$$

椭球的体积为 $V=\frac{4\pi}{3}a^2b$, 所以电荷分布体密度是：

$$\rho=\frac{3Q}{4\pi a^2 b}$$

例 (二):

带电椭球体的电荷分布关于坐标原点 o 对称，故其电偶极矩矢量为零. 现求其电四极矩张量的诸直角分量:

$$\mathscr{D}_{ij} = \frac{3Q}{4\pi a^2 b}\int_V (3x_i x_j - r^2\delta_{ij}) d^3x$$

按照前述参数化，我们有:

$$d^3x = a^2 b\xi^2 \sin\alpha d\xi d\alpha d\beta, \quad r^2 = x^2+y^2+z^2 = \xi^2(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha).$$

所以,

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{11} &= \frac{3Q}{4\pi}\int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \Big[a^2\sin^2\alpha(3\cos^2\beta - 1) \\ &\qquad - b^2\cos^2\alpha\Big] \\ &= \frac{Q}{5}(a^2 - b^2),\end{aligned}$$

例 (三):

$$\mathscr{D}_{12} = \frac{3Q}{4\pi}\int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta\left(3a^2\sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta\right)$$
$$= 0,$$

$$\mathscr{D}_{13} = \frac{3Q}{4\pi}\int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta\left(3ab\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\right)$$
$$= 0,$$

$$\mathscr{D}_{22} = \frac{3Q}{4\pi}\int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta\Big[a^2\sin^2\alpha(3\sin^2\beta - 1)$$
$$-b^2\cos^2\alpha\Big]$$
$$= \frac{Q}{5}(a^2 - b^2),$$

例（四）:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{23} &= \frac{3Q}{4\pi}\int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \big(3ab\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\big) \\ &= 0, \\ \mathscr{D}_{33} &= \frac{3Q}{4\pi}\int_0^1 \xi^4 d\xi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \left[2b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha\right] \\ &= -\frac{2Q}{5}(a^2-b^2).\end{aligned}$$

此电四极矩激发的电势是:

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0}\big(\mathscr{D}_{11}\partial_x^2 + \mathscr{D}_{22}\partial_y^2 + \mathscr{D}_{33}\partial_z^2\big)\frac{1}{R} \\ &= -\frac{Q}{40\pi\epsilon_0}(a^2-b^2)\partial_z^2\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= -\frac{Q}{40\pi\epsilon_0}(a^2-b^2)\frac{3\cos^2\theta-1}{R^3}\end{aligned}$$

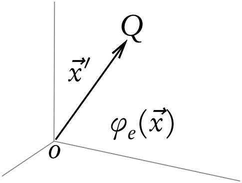
电荷体系在外电场中的能量:

设外电场的电势分布为 $\varphi_e(\vec{x})$. 位于位置矢量为 $\vec{x}'$ 的点电荷 Q 与此外电场的相互作用能量为:

$$W = Q\varphi_e(\vec{x}')$$

同理，体密度为 $\rho(\vec{x})$ 电荷体系与此外电场的相互作用能是:

$$W = \int_V \rho(\vec{x}')\varphi_e(\vec{x}')d^3x'$$



设电荷分布于空间小区域内.取区域内适当地点为坐标原点，把 $\varphi_e(\vec{x})$ 在原点处展开，

$$\varphi_e(\vec{x}) = \varphi_e(0) + x_i\partial_i\varphi_e(0) + \frac{1}{2!}x_ix_j\partial_i\partial_j\varphi_e(0) + \cdots$$

利用此式，可把 W 展开为:

电荷体系在外电场中的能量 (二):

$$
\begin{aligned}
W &= \int_V d^3x'\rho(\vec{x}')\left[\varphi_e(0) + x'_i\partial_i\varphi_e(0) + \frac{1}{2}x'_ix'_j\partial_i\partial_j\varphi_e(0) + \cdots\right] \\
&= \left[\int_V d^3x'\rho(\vec{x}')\right]\varphi_e(0) \\
&\quad + \left[\int_V d^3x' x'_i\rho(\vec{x}')\right]\partial_i\varphi_e(0) \\
&\quad\quad + \frac{1}{6}\left[\int_V d^3x'(3x'_ix'_j - r'^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}')\right]\partial_i\partial_j\varphi_e(0) + \cdots \\
&= Q\varphi_e(0) + p_i\partial_i\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\mathscr{D}_{ij}\partial_i\partial_j\varphi_e(0) + \cdots
\end{aligned}
$$

展开式的第一项

$$W^{(0)} = Q\varphi_e(0)$$

是设想体系的电荷全部集中在坐标原点时与外电场之间的相互作用能量.

电荷体系在外电场中的能量(三):

展开式的第二项

$$W^{(1)}=p_i\partial_i\varphi_e(0)=\vec{p}\cdot\nabla\varphi_e(0)=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$$

是电荷体系的电偶极矩与外电场之间的相互作用能量.式中使用了外场的场强与其电势之间的关系 $\vec{E}_e=-\nabla\varphi_e$.

- 电偶极子在外电场中所受的静电力是:

  $$\vec{F}=-\nabla W^{(1)}=\nabla(\vec{p}\cdot\vec{E}_e)=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_e$$

  所以,只有在非均匀电场中电偶极子才受到非零的静电力作用.

- 设 $\vec{p}$ 与 $\vec{E}_e$ 之间的夹角为 θ,则电偶极子在外电场中受到的力矩为:

  $$L=-\partial_\theta W^{(1)}=\partial_\theta(pE_e\cos\theta)=-pE_e\sin\theta$$

  计及方向,则有:

  $$\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}_e$$

电荷体系在外电场中的能量 (四):

展开式的第三项

$$W^{(2)} = \frac{1}{6}\mathscr{D}_{ij}\partial_i\partial_j\varphi_e(0) = -\frac{1}{6}\mathscr{D}_{ij}\partial_i E_j^{(e)}(0)$$

是电荷体系的电四极矩与外电场之间的相互作用能量. 显然, 只有在非均匀电场中电四极子的能量才不为零.

1. 设某一电偶极矩矢量为 $\vec{p}$ 的电偶极子位于坐标系的原点，求其电荷体密度.

2. 一块极化介质的极化强度为 $\vec{P}(\vec{x})$，其激发的静电势分布是:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V dV' \frac{\vec{P}(\vec{x}) \cdot \vec{r}}{r^3}$$

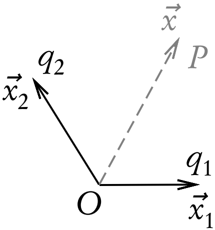
请证明此式又可以等价地表达为:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V dV' \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{x})}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}(\vec{x}) \cdot d\vec{s}\,'}{r}$$

3. 一个半轴分别为 a, b, c 的均匀带电椭球，总电荷为 Q，试求其各阶多级矩以及相应的静电势.

原题：

如图示，二静止点电荷 q_1 与 q_2 之间的相互作用静电势能可以表达为如下积分：



$$W_{int} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int d^3x \frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}$$

试证明它可以化为如下简单形式：

$$W_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}$$

分析：

- 观点一：

位矢为 $\vec{x}_2$ 的点电荷 q_2 在场点 P 处的电荷体密度是，

$$\rho_2(\vec{x}) = q_2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_2)$$

而另一点电荷 q_1 在 P 点处激发的静电场电势是：

$$\varphi_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}|}$$

因此，两个点电荷的相互作用能量计算如下：

$$\begin{aligned} W_{int} &= \int_V \rho_2(\vec{x})\varphi_1(\vec{x})d^3x \\ &= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x\frac{\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1-\vec{x}|} \\ &= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \end{aligned}$$

- 观点二：

q_1 和 q_2 两个点电荷在场点 P 处激发的静电场强度是：

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}\right]$$

因此，P 点处静电场的能量密度是：

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0}\left[\frac{q_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^4} + \frac{2q_1q_2(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}\right] \end{aligned}$$

此式右端前两项分别表示两个点电荷单独存在时在 P 点激发的静电场的能量密度，第三项显然是二者相互作用能量的体密度.所以，两个点电荷的相互作用能量是：

$$W_{int} = \frac{q_1q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int d^3x\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}$$

解答:

注意到

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} = -\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_i|}, \qquad (i=1,2)$$

以及矢量微积分恒等式 $\nabla\cdot(f\vec{g}) = \nabla f\cdot\vec{g}+f\nabla\cdot\vec{g}$, 我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3} &= \nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|} \\
&= \nabla\cdot\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|} \\
&= -\nabla\cdot\left[\frac{(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1||\vec{x}-\vec{x}_2|^3}\right] + \frac{4\pi}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_2)
\end{aligned}$$

对全空间积分时, 上式第一项的贡献为零:

$$\int_V d^3x\nabla\cdot\left[\frac{(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1||\vec{x}-\vec{x}_2|^3}\right] = \oint_{S_\infty}\frac{ds}{|\vec{x}-\vec{x}_1||\vec{x}-\vec{x}_2|^2} = 0$$

所以，原题所给的两个点电荷之间相互作用能量的两种表达式是相互等价的：

$$
\begin{aligned}
W_{int} &= \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int d^3x \frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3} \\
&= \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0}\int d^3x \left[\frac{4\pi}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_2)\right] \\
&= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}
\end{aligned}
$$

证毕.