中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学一》（A 卷）（珠海校区）

学年学期：2015 学年第 2 学期　　姓　名：__________ 学　号：______

学 院/系：数学与计算科学学院　　学　院：__________ 年级专业：______

考试方式：闭卷

考试时长：120 分钟　　成绩评定：__________ 阅卷教师：______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

一、求下列极限（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

2 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x\ln x}$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}=0,$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x\ln x}=e^0=1$

二、求下列积分（共 4 小题，每小题 7 分，共 28 分）

1 $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-2)^2}dx$

$$\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{2(x-2)}+c$$

2 $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$

$$\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x^3}{1-x^4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}dx^4 = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}d(1-x^4) = -\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C.$$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x dx$

原式$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$

4 $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

令 $\sqrt{5-4x}=u$，则 $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}u^2$， $dx=-\frac{1}{2}udu$

当 $x=-1$，1 时， $u=3,1$

原式$=\int_3^1 \frac{1}{8}\left(5-u^2\right)du = \frac{1}{6}$

三、向量代数和空间几何（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1 求单位向量$\vec{n}$，使$\vec{n}\perp\vec{a}$且$\vec{n}\perp x$轴，其中$\vec{a}=\{3,6,8\}$.

2 求过点(2, 0, −3)且与直线$\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$垂直的平面方程.

解: 1 取$b=i$，则$n\perp a, n\perp b$。 答案: $n=\pm\frac{1}{10}(8j-6k)$

2 $16x-14y-11z-65=0$

四、求最值（共 1 小题，每小题 6 分，共 6 分）

求函数$y=x+\sqrt{1-x}$在$[-5,1]$上的最大值和最小值

解: $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$。令$y'=0$，得到唯一驻点$x=\frac{3}{4}$，且$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$。

又y'不存在的点$x=1$，而区间端点上的函数值为$y(1)=1$， $y(-5)=-5+\sqrt{6}$，

比较这些值可知，函数在$[-5,1]$上的最大值，最小值分别为

$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$， $y(-5)=-5+\sqrt{6}$ 。

五、（共 1 小题，每小题 11 分，共 11 分）

设函数 $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$，（1） 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点；（2） 求函数 $f(x)$ 的凸凹区间与拐点；（3） 求函数 $f(x)$ 的渐近线。

解：（1） $f'(x)=\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}$ ，所以单点区间分别是$(-\infty,0)$，$(0,1),(3,+\infty)$都是单调递增区间，而$(1,3)$是单调递减区间。

（2） $f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^8}$ ，所以 $f''(x)=0$得到$x=0$。而当$x<0,\ f''(x)<0$凸函数，但$x>0,\ f''(x)>0$凹函数。

（3） $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$，所$x=1$是其垂直渐近线

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}=1，而\lim_{x\to 1} f(x)-x=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=2$$

因此$y=x-2$是其斜渐近线。

六、多元函数微分学（共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1 求由方程 $f(x+2y+3z,x^2+y^2+z^2)=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数和全微分

解：对方程两边对 x 求偏导，得到

$$(1+3z_x)f_1+(2x+2zz_x)f_2=0$$

由此解出$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+2xf_2}{3f_1+2zf_2}$

同理可求出$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2f_1+2yf_2}{3f_1+2zf_2}$

于是

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$=-\frac{\left(f_1+2xf_2\right)}{3f_1+2zf_2}dx-\frac{\left(2f_1+2yf_2\right)}{3f_1+2zf_2}dy$$

2 若$z=\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}=\dfrac{-2y}{(x-y)^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{-2y}{(x-y)^2}\right)}{\partial x}=\frac{4y}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{-2y}{(x-y)^2}\right)}{\partial y}=\frac{-2x^2}{(x-y)^4}$$

3 求函数$u(x,y,z)=xyz$ 点$M_0\left(1,-1,1\right)$处沿着从M_0到$M_1(2,3,1)$的方向导数

解：方向l是从M_0到M_1，其方向是$l=\left(\dfrac{1}{\sqrt{17}},\dfrac{4}{\sqrt{17}},0\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,-1,1)}=yz\Big|_{(1,-1,1)}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,-1,1)}=xz\Big|_{(1,-1,1)}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,-1,1)}=xy\Big|_{(1,-1,1)}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{17}}$$

七、证明题（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1 证明：当$x>0$时，$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$

证明：考虑辅助函数

$$F\left(x\right)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2},$$

求导得到$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(1+x^2)x^2}<0,$

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$内严格单调下降，又

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{2}=0,$$

由此知道当当$x>0$时，$F(x)>0$，移项即得证。

2 设函数 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，其中$f(x)$在区间$[1,2]$上二阶可导且有$f(2)=0$，证明存在$\xi(1<\xi<2)$使得$F''(\xi)=0$。

证明：由$f(x)$在$[1,2]$上二阶可导，故$F(x)$在$[1,2]$上二阶可导，因为$f(2)=0$，故$F(1)=F(2)=0$。

在$[1,2]$上应用罗尔定理，至少存在一点x_0，$(1<x_0<2)$，使得$F'(x_0)=0$。

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$，得到$F'(1)=0$。

在$[1,x_0]$上对$F'(x)$应用罗尔定理，至少有点$\xi(1<\xi<x_0<2)$ $F''(\xi)=0$。