L789A 理想透镜组及成像质量讨论

L7 理想透镜组

1841年高斯提出共轴系统的一般理论：在理想共轴系统中，物方的任一点都和象方的一点共轭。同样，相应于物方的每一条直线或每一个平面，在象方都应有一条共轭直线或一个共轭平面。

共轴系统就成了点与点、直线与直线以及平面与平面之间的共轭关系的纯几何理论。

利用基点与基面，可描述共轴系统的基本光学特性。

基点与基面：主焦点与焦平面；主点与主平面

（1）主焦点与焦平面

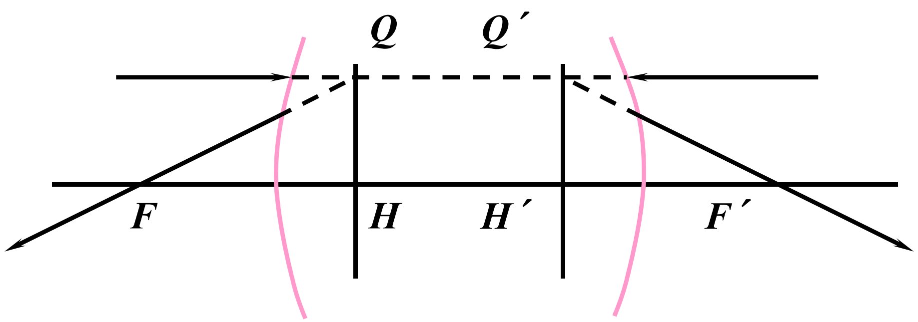
与无穷远处的象平面共轭的物平面为物方焦平面。物方焦平面与主光轴的交点为物方主焦点，记为 ***F***。

与无穷远处的物平面共轭的象平面为象方焦平面。象方焦平面与主光轴的交点为象方主焦点，记为 ***F´***。

（2）主点（*principal point*）与主平面

共轴系统中存在一对共轭面，面上任一对共轭点到主光轴的距离相等。（**β=1**）

这对共轭面为系统的主平面（*principal plane*）。物方主平面记为 H；象方主平面记为 H'



这对共轭点为主点。物方主平面与主光轴的交点为物方主点，记为 H；象方主平面与主光轴的交点为象方主点，记为 H'；

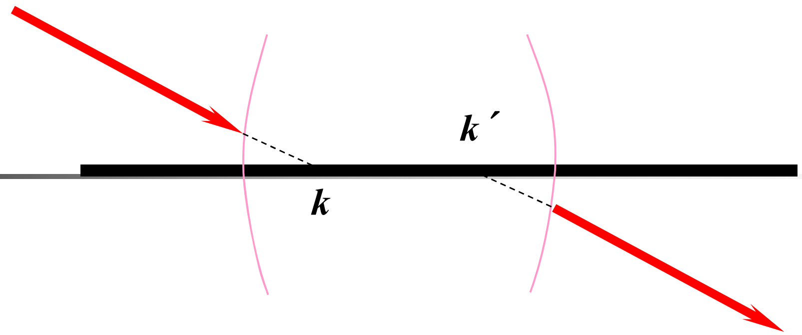
（3）物方焦距与象方焦距

物方主焦点到物方主点的距离为物方焦距，记为 f。象方主焦点到象方主点的距离为象方焦距，记为 f' 。

单球面的主点与其顶点重合，而薄透镜的主点与其光心重合。

（4）节点（*nodal points*）

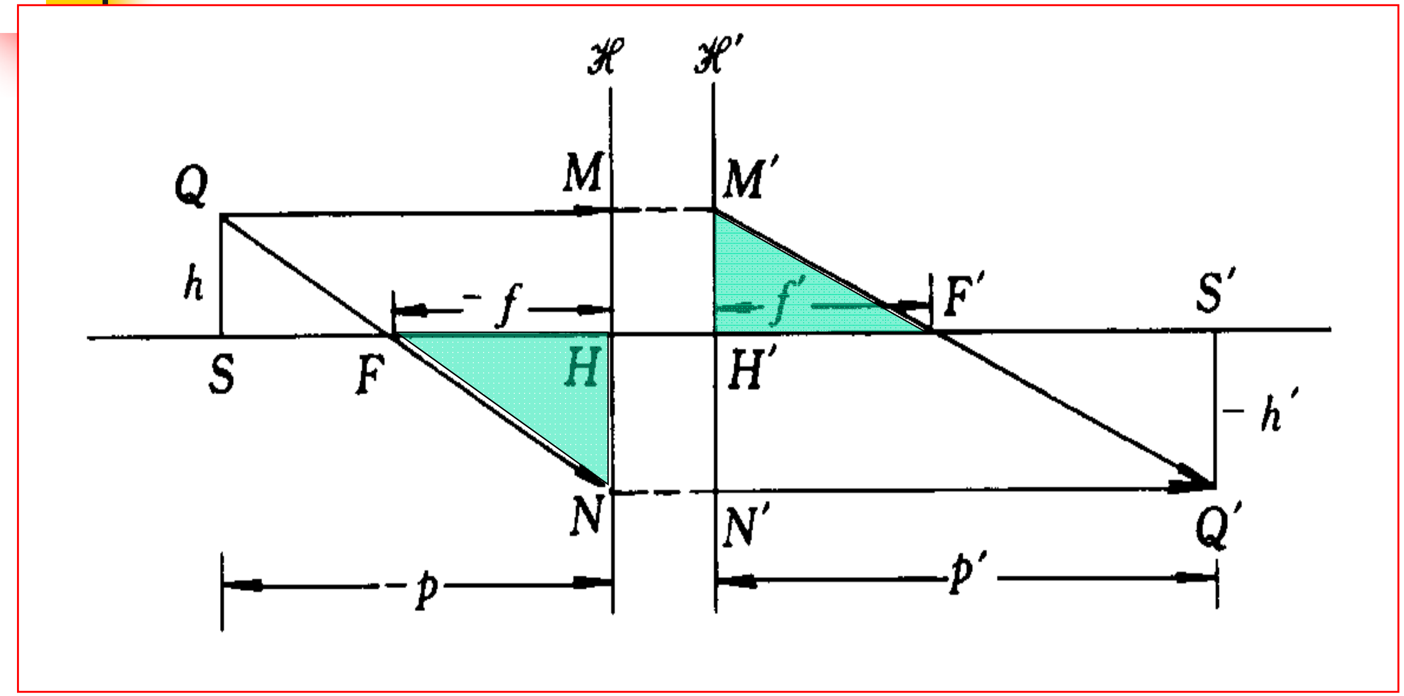
从薄透镜作图法成象可知，置于空气中的薄透镜有一条特殊光线，它通过光心不发生偏折。

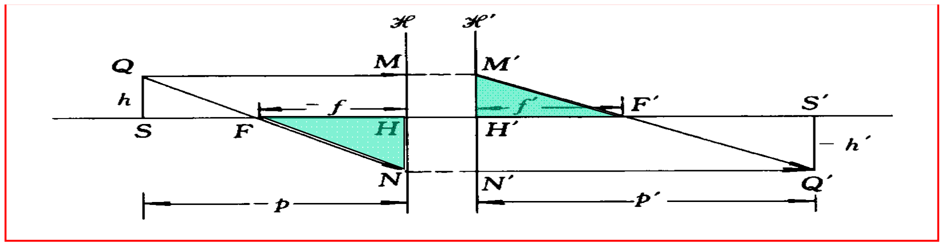


对于两边是同一介质的任意组合的理想光学系统来说，一个离轴物点发出的许多光线中，总有一条入射光与其对应的出射光平行。

这对共轭光线与光轴的交点为一对共轭点称为节点。物方节点记为 $\boldsymbol{k}$；象方节点记为 $\boldsymbol{k'}$ 。

1、计算法求物象关系：





$QM = -P$

$FH = -f$

$MN = h - h'$

$NH = -h'$

$-P/(-f) = (h-h')/(-h')$

$N'Q' = P'$

$H'F' = f'$

$M'N' = h - h'$

$M'H' = h$

$P'/f' = (h-h')/h$

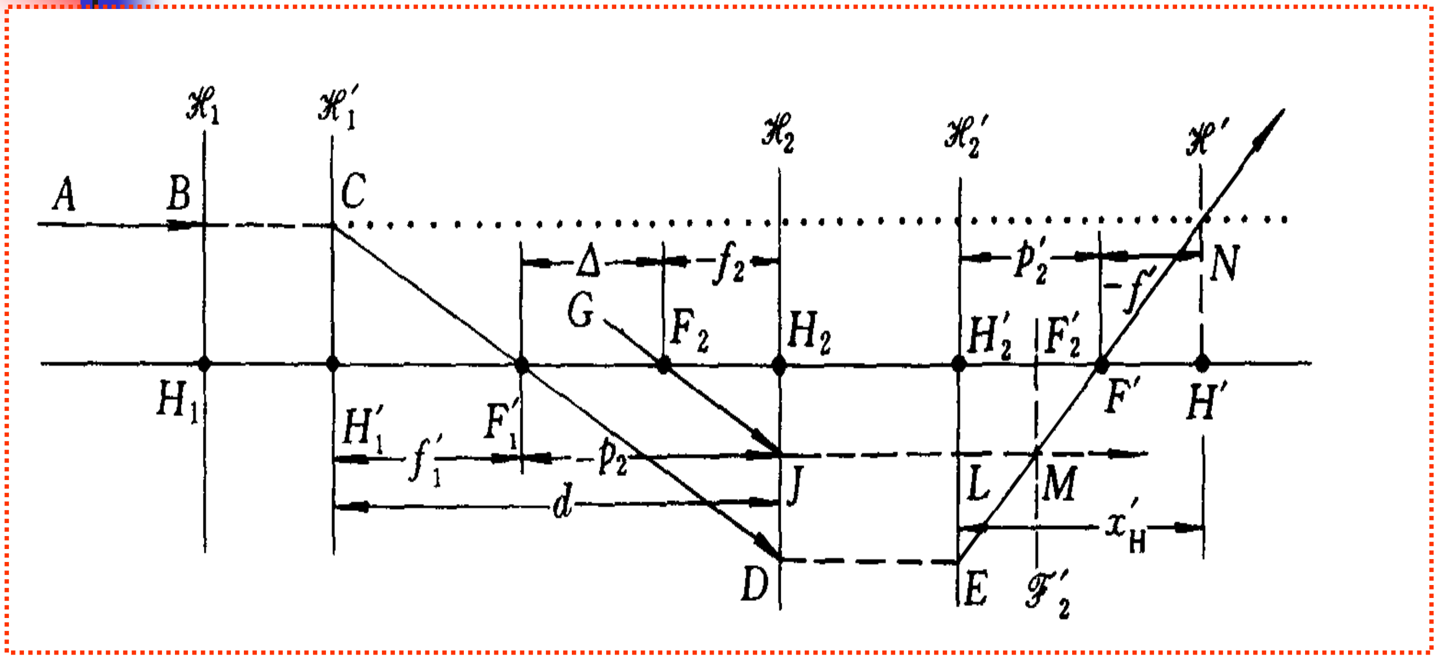
$$\frac{f'}{P'} + \frac{f}{P} = 1 \qquad xx' = ff'$$

- 共轴系统的高斯公式和牛顿公式与薄透镜和单球面中的公式在形式上完全相同。

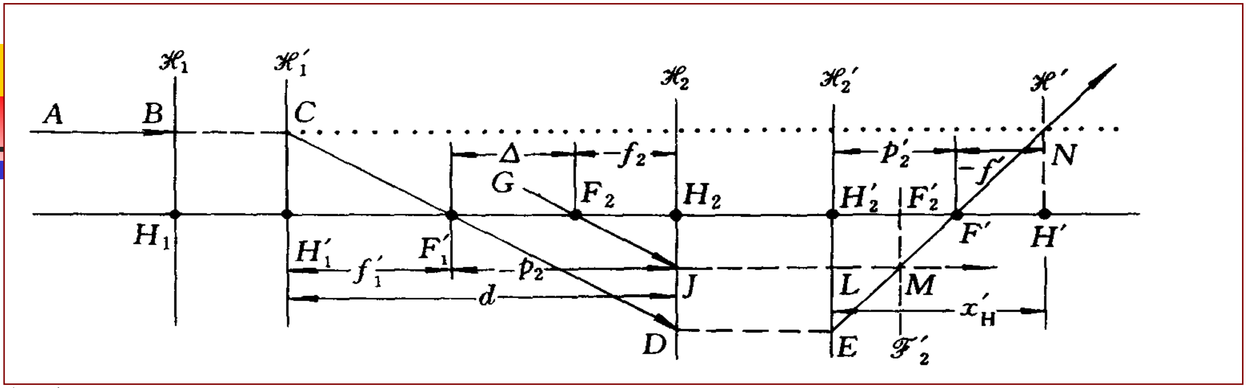
- 共轴系统的一对焦点，一对主点和一对节点，统称为系统的基点（*cardinal points*）

- 对于给定的光学系统，其基点之位置可通过光线追迹逐步成象，作图或计算求得。

2、计算法求组合共轴球面系统的基点



2、计算法求组合共轴球面系统的基点



(1) 定义：

$$F_1'F_2 = \Delta, H_1'H_2 = d, H_2'H' = x_H', H'F' = f'$$

(2) F_1'与F'有物象关系：

$$\frac{f_2'}{P_2'} + \frac{f_2}{P_2} = 1 \Rightarrow P_2' = \frac{f_2'P_2}{P_2 - f_2}$$

利用三角形相似关系可以得出：

$$\frac{f_1'}{-P_2} = \frac{-f'}{P_2'} \Rightarrow P_2' = \frac{P_2 f'}{f_1'}$$

$$P_2' = \frac{f_2' P_2}{P_2 - f_2} \qquad P_2' = \frac{P_2 f'}{f_1'}$$

$$f' = f_1'\left(\frac{f_2'}{P_2 - f_2}\right) = \frac{f_1' f_2'}{-\Delta}$$

$$P_2' = \frac{P_2}{f_1'} \times \frac{f_1' f_2'}{-\Delta} = -\frac{P_2}{\Delta} f_2' = \frac{(\Delta - f_2)}{\Delta} f_2'$$

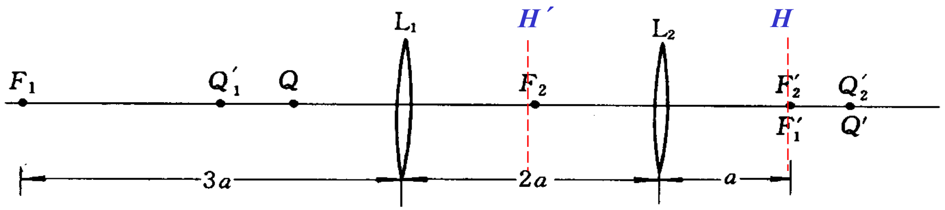
$$x_H' = P_2' - f' = \frac{(\Delta - f_2) f_2'}{\Delta} + \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{(\Delta - f_2 + f_1') f_2'}{\Delta} = \frac{f_2' d}{\Delta}$$

同理，定义

$$x_H = H_1 H,\ f = HF$$

可得：

$$x_H = \frac{f_1 d}{\Delta} \qquad f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$$



例题1： $f_1' = 3a,\ f_2' = a, d = 2a$ 物点 ***Q*** 位于***L₁***前 ***a*** 处

解：

$$\Delta = F_1'F_2 = -2a, d = H_1'H_2 = 2a$$

$$x_H = H_1H = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{-3a\cdot 2a}{-2a} = 3a$$

$$x_H' = H_2'H' = \frac{f_2' d}{\Delta} = \frac{a\cdot 2a}{-2a} = -a$$

$$f = HF = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{-3a * (a)}{-2a} = 3a/2$$

$$f' = H'F' = \frac{f_1' f_2'}{-\Delta} = \frac{3a \cdot a}{-(-2a)} = 3a/2$$

对于物点 Q，$P = HQ = 4a$ 由高斯公式

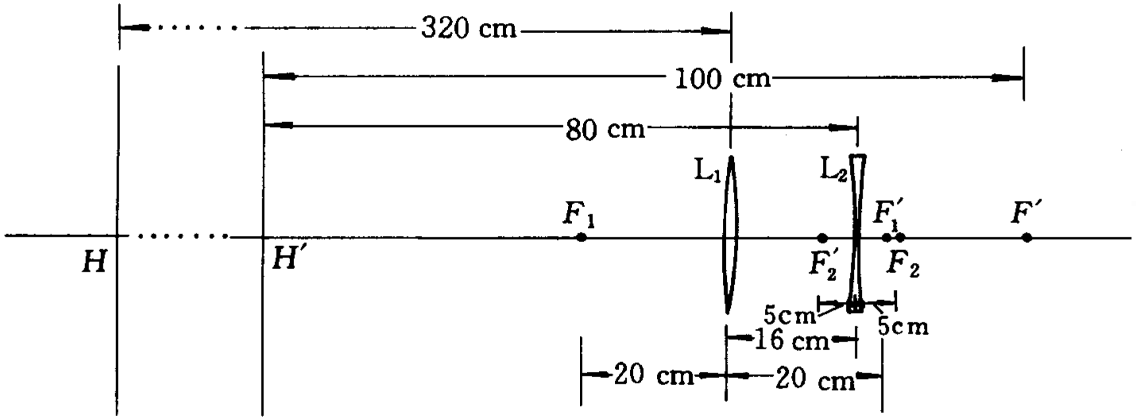
$$\frac{f'}{P'} + \frac{f}{P} = 1$$

$$\frac{3a/2}{P'} + \frac{3a/2}{4a} = 1$$

得 $P' = H'Q' = 2.4a$

即象点位于第二个透镜后**1.4 *a***

例题2



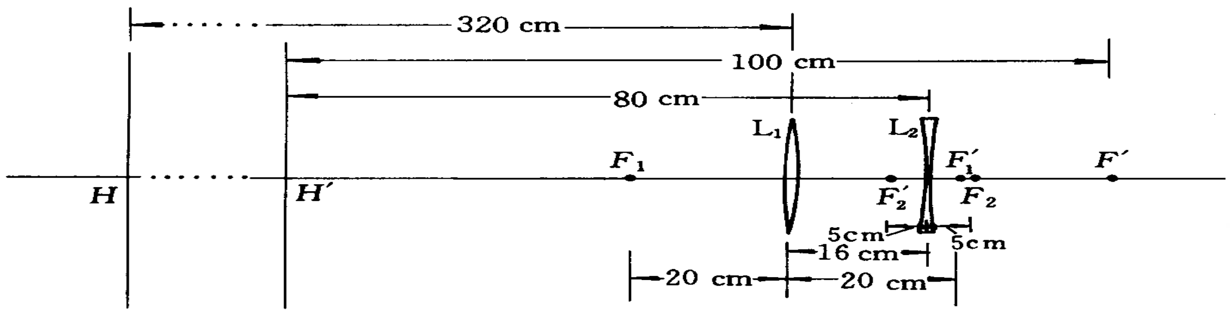
解:

$$f_1' = 20cm,\ f_2' = -5cm, d = 16cm$$

$$\Delta = F_1'F_2 = 1cm, d = H_1'H_2 = 16cm$$

$$x_H = H_1H = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{-20\times16}{1} = -320cm$$

$$x_H' = H_2'H' = \frac{f_2' d}{\Delta} = \frac{-5\times16}{1} = -80cm$$



$$f = HF = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{-20\times 5}{1} = -100cm$$

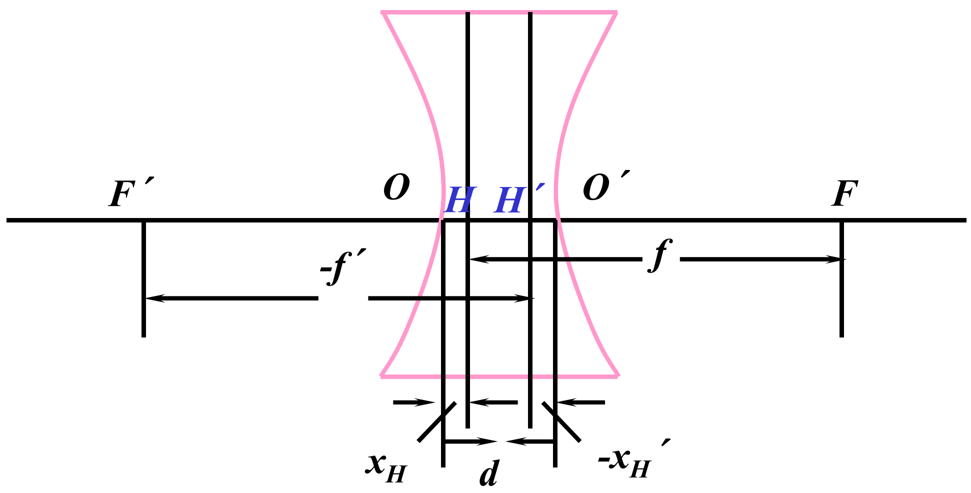
$$f' = H'F' = \frac{f_1' f_2'}{-\Delta} = \frac{20\times(-5)}{-1} = 100cm$$

(1) $f' > 0, f < 0$ 组合系统是会聚透镜

(2) x_H 和 x_H' 在系统前方很远处，f' 在系统后不远处，组合系统是一个望远系统。

(3) 只要稍稍改变 d，即可大大改变 x_H？？

例题3：空气中双凹厚透镜的两个凹面半径 r_1 和 r_2 分别为-8厘米和7厘米，沿主轴的厚度 d 为2厘米。玻璃的折射率 n 为1.5，求焦点和主平面的位置。



解：

厚透镜可看作两个球形折射界面的组合，它们的焦距分别为：

$$f_1 = -\frac{n}{n'-n} r_1 = -\frac{1}{1.5-1} \times (-8) = 16cm$$

$$f_1' = -\frac{n'}{n'-n} r_1 = \frac{1.5}{1.5-1} \times (-8) = -24cm$$

$$f_2 = -\frac{n}{n'-n} r_2 = -\frac{1.5}{1-1.5} \times 7 = 21cm$$

$$f_2' = \frac{n'}{n'-n} r_2 = \frac{1}{1-1.5} \times 7 = -14cm$$

光学间隔：

$$\Delta = d - f_1' + f_2 = 2 + 24 + 21 = 47cm$$

$$x_H = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{16\times 2}{47} = 0.68cm$$

$$x'_H = \frac{f'_2 d}{\Delta} = \frac{(-14)\times 2}{47} = -0.60cm$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{16\times 21}{47} = 7.15cm$$

$$f' = \frac{-f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{(-24)\times(-14)}{47} = -7.15cm$$

由于 ***F*′**是在透镜右表面的左方，故此透镜是发散的。

例题4：半径为2厘米，折射率为1.5的玻璃球放在空气中，求：

（1）球的焦距和主面、焦点的位置。

（2）若一物置于距球面6厘米处,求从球心到象的距离,并确定垂轴放大率。

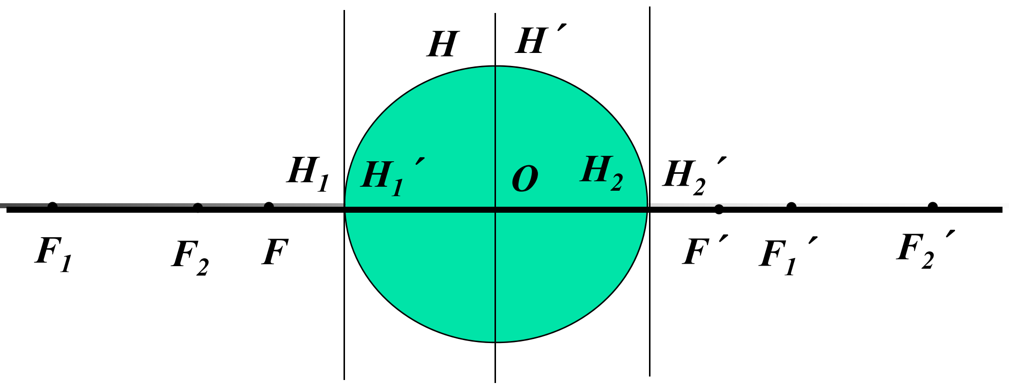
解:（1）

$$f_1 = -\frac{n}{n'-n} r_1 = -\frac{1}{1.5-1} \times 2 = -4cm$$

$$f_1' = -\frac{n'}{n'-n} r_1 = \frac{1.5}{1.5-1} \times 2 = 6cm$$

$$f_2 = -\frac{n}{n'-n} r_2 = -\frac{1.5}{1-1.5} \times (-2) = -6cm$$

$$f_2' = \frac{n'}{n'-n} r_2 = \frac{1}{1-1.5} \times (-2) = -4cm$$



$$d = 4cm \qquad \Delta = F_1'F_2 = -8cm$$

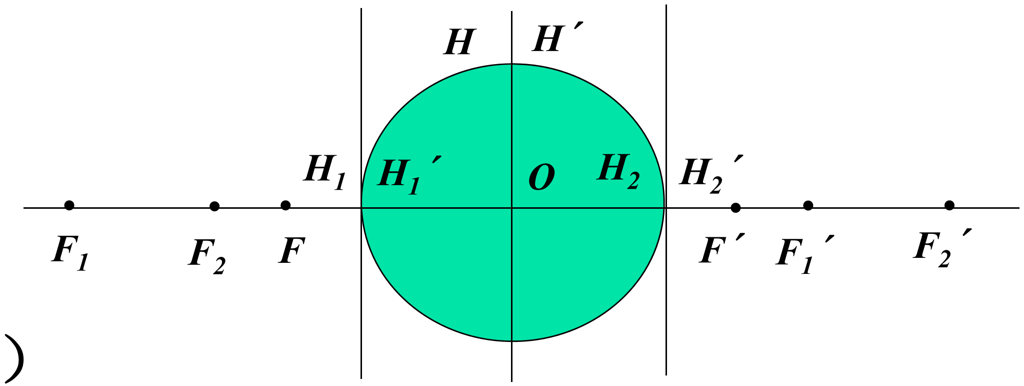
$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{(-4)\times(-6)}{-8} = -3cm$$

$$f' = \frac{-f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{(-6)\times 4}{-8} = 3cm$$

$$x_H = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{(-4)\times 4}{-8} = 2cm$$

$$x'_H = \frac{f'_2 d}{\Delta} = \frac{4\times4}{-8} = -2cm$$

可见，***H*** 和 ***H*´**重合，均在球心 ***O***处。



（**2**）

$$P = -8cm \qquad \frac{f'}{P'} + \frac{f}{P} = 1 \qquad P' = \frac{Pf'}{P+f'} = 4.8cm$$

横向放大率：
$$\beta = \frac{P'n}{Pn'} = \frac{P'}{P} = -0.6$$

例题5：一焦距为20厘米的薄凸透镜与一焦距为20厘米的凹透镜相距6厘米。求：

（1）复合光学系统的焦点及主平面的位置

（2）物放在凸透镜前30厘米处，求象的位置和放大率。

解一：（1）两透镜的焦距分别为：

$$f_1 = -20cm,\ f_1' = 20cm$$

$$f_2 = 20cm,\ f_2' = -20cm$$

光学间隔 $\Delta = d - f_1' + f_2 = 6 - 20 + 20 = 6cm$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{-20\times 20}{6} = -\frac{200}{3}cm = -\frac{2}{3}m$$

$$f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta}=-\frac{20\times(-20)}{6}=\frac{200}{3}cm=\frac{2}{3}m$$

解二：（1）两透镜的光焦度分别为

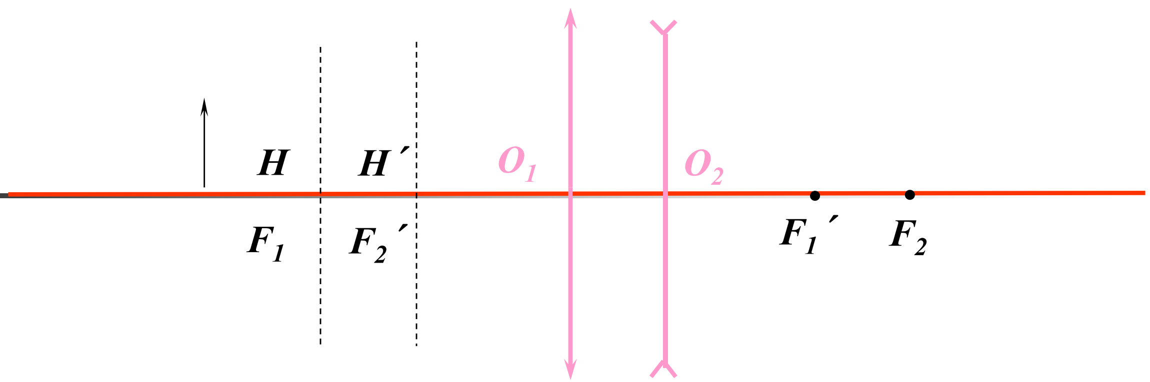
$$\Phi_1=\frac{1}{f_1'}=\frac{1}{20}cm \quad \Phi_2=\frac{1}{f_2'}=-\frac{1}{20}cm$$

复合光学系统光焦度公式：

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2-d\Phi_1\Phi_2$$

$$=\frac{1}{0.2}-\frac{1}{0.2}-0.06\times\frac{1}{0.2}(-\frac{1}{0.2})=1.5m^{-1}$$

$$f'=\frac{1}{\Phi}=\frac{2}{3}m \quad f=-\frac{1}{\Phi}=-\frac{2}{3}m$$



（2）利用高斯公式求象距得

$$P=-(30-20)=-10cm$$

$$\frac{f'}{P'}+\frac{f}{P}=1 \qquad P'=\frac{Pf'}{P+f'}=-\frac{200}{17}cm$$

横向放大率：$$\beta=\frac{P'n}{Pn'}=\frac{P'}{P}=\frac{20}{17}$$

L8　光线转换矩阵

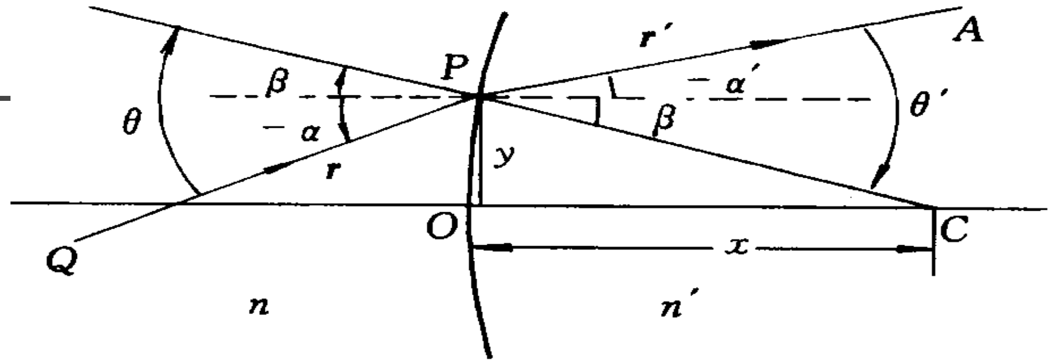
光学系统的物象关系可用矩阵方法建立。用四元矩阵**ABCD**来代表系统的转换功能

转换矩阵的特点是：只与组成系统的参数有关而与入射光线的状态无关。

在矩阵方法中，光线的状态是由坐标位置及传播方向所确定的。

r	状态矩阵	**2×1矩阵**
R	折射矩阵	**2×2矩阵**
T	过渡矩阵	**2×2矩阵**

单球面折射矩阵的导出

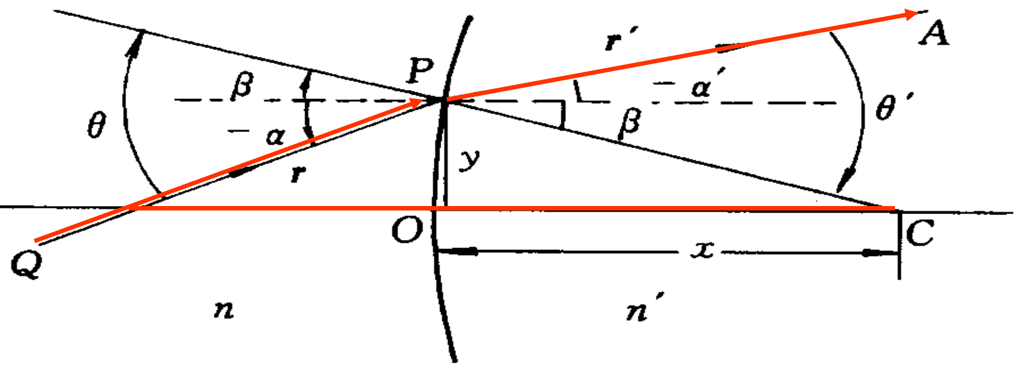


一、状态矩阵和折射矩阵

光线的状态可用两个特征量描述：

$n\alpha$　α为光线与光轴的夹角

y　光线上一特定点（入射点、折射点）离开光轴的距离



在近轴条件下，按折射定律有：

$$n\theta = n'\theta' \qquad n(-\alpha+\beta) = n'(-\alpha'+\beta)$$

$$\beta = y/x \qquad n(-\alpha+y/x) = n'(-\alpha'+y/x)$$

$$n'\alpha' = n\alpha + \frac{n'-n}{x}y$$

$$n'\alpha' = n\alpha + \frac{n'-n}{x}y \qquad \boxed{\Phi = \frac{n'-n}{x}}$$

$$n'\alpha' = n\alpha + \Phi y \qquad y' = 0 + y$$

两个方程都是线性方程，用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n\alpha \\ y \end{pmatrix}$$

状态矩阵 $r' = \begin{pmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{pmatrix}$ $\quad r = \begin{pmatrix} n\alpha \\ y \end{pmatrix}$

折射矩阵 $R = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det R = 1$

$$\begin{pmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ y \end{pmatrix} \qquad r' = Rr$$

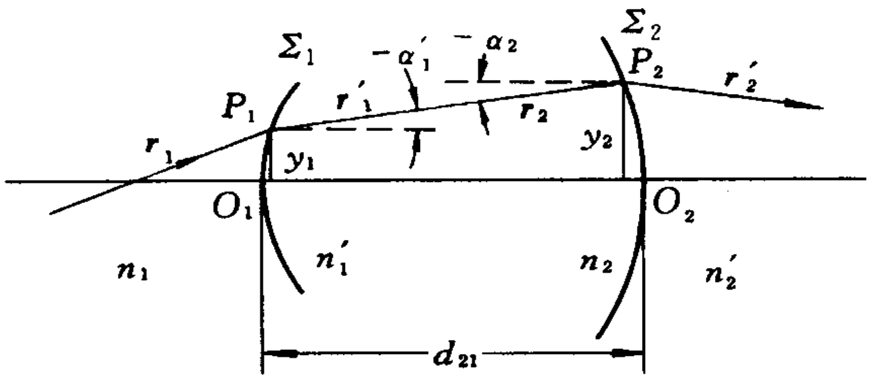
对于反射镜： $n = n' = 1, \Phi = \dfrac{2}{r} = \dfrac{1}{f}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二、过渡矩阵和系统矩阵

若一个光学系统由两个相邻的共轴单球面组成，$\mathbf{d}_{21}$为两单球面之间的距离。

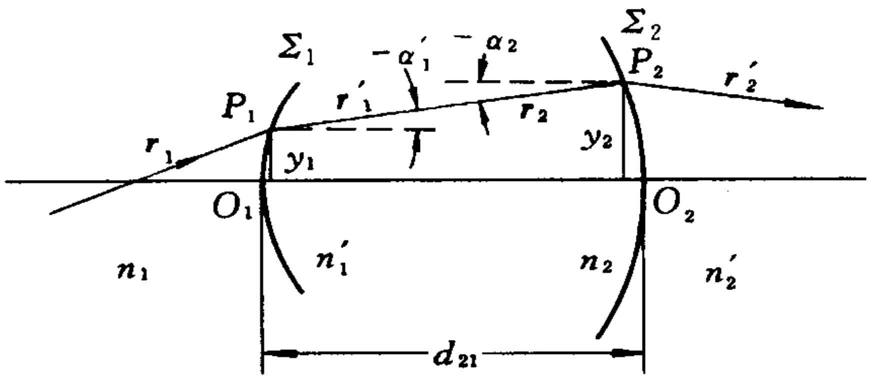
入射光线 $\mathbf{r}_1$　　出射光线 $\mathbf{r}_2'$



P_1* 和 *P_2*的状态分别为*r_1*´和*r_2

$$r_1' = \begin{pmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y_1' \end{pmatrix} \qquad r_2 = \begin{pmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

光线在同一介质中直线传播 $\quad n_1' = n_2 \quad \alpha_1' = \alpha_2$



在近轴条件下 $\quad -\alpha_1' = \dfrac{y_2 - y_1'}{d_{21}} \Rightarrow y_2 = -d_{21}\alpha_1' + y_1'$

$$n_2\alpha_2 = n_1'\alpha_1' + 0 \qquad y_2 = -(d_{21}/n_1')n_1'\alpha_1' + y_1'$$

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_{21}/n_1' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_{21}/n_1' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$$

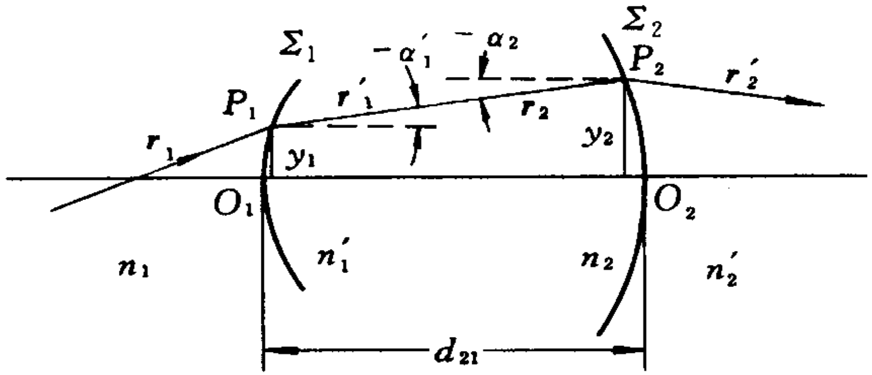
过渡/传输矩阵 $T_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_{21}/n_1' & 1 \end{pmatrix}$ $\det T_{21} = 1$

$\boldsymbol{T_{21}}$的作用是将光线的状态从 $\boldsymbol{P_1}$ 处移到 $\boldsymbol{P_2}$ 处

$r_2 = T_{21} r_1'$ $r' = Rr$ → $r_2 = T_{21} R_1 r_1$

$$\det(T_{21}R_1) = \det T_{21} \times \det R_1 = 1$$

$\boldsymbol{r_2}$ 再经过第二个球面的折射后，光线就经过了一个完整的光学系统。



$\boldsymbol{P_2}$ 处的折射矩阵为 $R = \begin{pmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

折射前光线 $\mathbf{r}_2$　　折射后光线 $\mathbf{r}_2'$

$r_2' = R_2 r_2$　　$r_2 = T_{21} R_1 r_1$ ➡ $r_2' = R_2 T_{21} R_1 r_1$

$$r_2' = R_2 T_{21} R_1 r_1$$

系统矩阵 $S = R_2 T_{21} R_1$ $\det S = 1$

当系统由 **n**个共轴球面组成时，系统的矩阵为

$$S = R_n T_{n,(n-1)} R_{n-1} \cdots R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

系统矩阵中的矩阵元都由系统的参数、球面之间的距离、光焦度及介质折射率所组成，它们表征了系统的一些特征。

与单球面的折射矩阵**R**一样，系统矩阵中的矩阵元 S_{12} 表示整个光学系统的光焦度。

$$\Phi = S_{12}$$

讨论特例　　厚透镜：透镜的厚度 d_{21} 不可忽略

$$S = R_2 T_{21} R_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_{21}/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Phi_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Phi_1 \\ -d_{21}/n & -\Phi_1 d_{21}/n + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \Phi_1 d_{21}/n & \Phi_1 - \Phi_1 \Phi_2 d_{21}/n + \Phi_2 \\ -d_{21}/n & -\Phi_1 d_{21}/n + 1 \end{pmatrix}$$

厚透镜的光焦度

$$\Phi = S_{12} = \Phi_1 - \Phi_1\Phi_2 d_{21}/n + \Phi_2$$

当 $d_{21} \to 0$时，即为薄透镜的光焦度

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

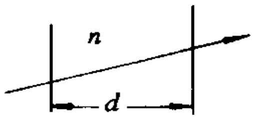
若薄透镜两侧为空气，则 $\Phi = -(1/f)$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

三、成象的矩阵计算

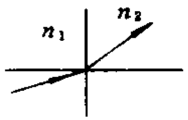
光学矩阵确定后，利用系统矩阵可求出物象关系：

在折射率为 n 的介质中传播



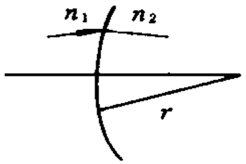
$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -d/n & 1\end{pmatrix}$$

平面上折射



$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

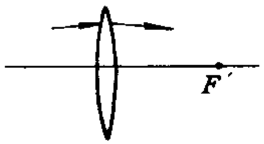
球面上折射



凹面 $r>0$
凸面 $r<0$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & \frac{n_2-n_1}{r}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

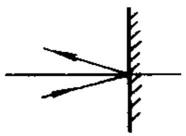
薄透镜



凸透镜 $f<0$
凹透镜 $f>0$

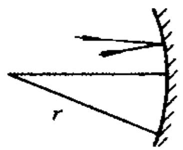
$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{f}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

平面反射镜



$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

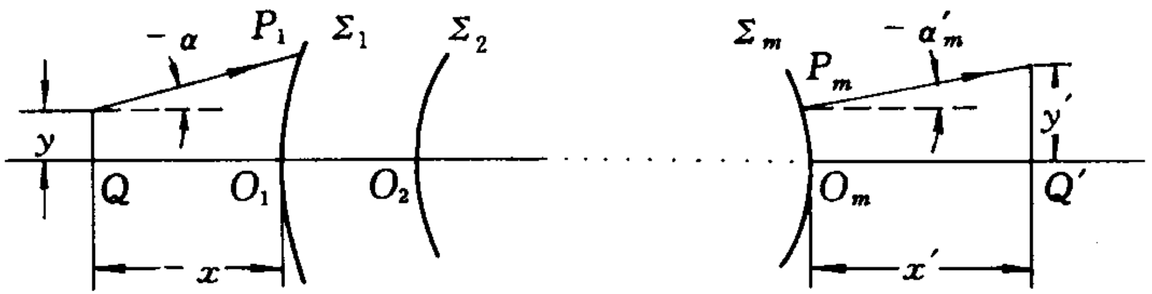
球面反射镜



凹面镜 $r<0$
凸面镜 $r>0$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{r}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

各种光学元件及其对应的 *ABCD* 转换矩阵



Q和 **Q′** 处的光线状态分别为

$$r_Q=\begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{pmatrix} \qquad r'_{Q'}=\begin{pmatrix} n'_m\alpha'_m \\ y' \end{pmatrix}$$

Q处光线传播到 $\mathbf{P_1}$ 处时的过渡矩阵和 $\mathbf{P_m}$处光线传播到 **Q′** 处时的过渡矩阵分别为

$$T_{1Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +x/n_1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{Q'm}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x'/n'_m & 1 \end{pmatrix}$$

Q处的光线经过系统到 Q′ 时的矩阵转换，只需按光线进行的前后将这两过渡矩阵依次作用于系统矩阵，即

$$r'_{Q'} = T_{Q'm} S T_{1Q} r_Q$$

$$\begin{pmatrix} n'_m \alpha_m \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x'/n_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x/n_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x'/n_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} + (x/n_1) S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (x/n_1) S_{22} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{11} + (x/n_1) S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (x/n_1) S_{22} - (x'/n'_m) S_{11} - xx'/(n_1 n'_m) S_{12} & S_{22} - x'/n'_m S_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y \end{pmatrix}$$

矩阵元的具体表示

$$\begin{pmatrix} n'_m\alpha_m \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x'/n_m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x/n_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x'/n_m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11}+(x/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21}+(x/n_1)S_{22} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{11}+(x/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21}+(x/n_1)S_{22}-(x'/n'_m)S_{11}-xx'/(n_1n'_m)S_{12} & S_{22}-x'/n'_mS_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{pmatrix}$$

物象矩阵：　$A=TST$　　$\det A=1$

$$y'=(S_{21}+\frac{x}{n_1}S_{22}-\frac{x'}{n'_m}S_{11}-\frac{xx'}{n_1n'_m}S_{12})n_1\alpha_1+(S_{22}-\frac{x'}{n'_m}S_{12})y$$

在近轴条件时，**y′** 与 $\boldsymbol{\alpha_1}$ 应无关系，即自物点发出的所有光线经系统成象后都会聚于对应的象点上。

$$(S_{21}+\frac{x}{n_1}S_{22}-\frac{x'}{n'_m}S_{11}-\frac{xx'}{n_1n'_m}S_{12})n_1\alpha_1=0$$

$$y'=(S_{22}-\frac{x'}{n'_m}S_{12})y$$

$$\frac{x'}{n'_m}=\frac{(x/n_1)S_{22}+S_{21}}{(x/n_1)S_{12}+S_{11}}$$

若系统处于空气中时，有 $n_1 = n'_m = 1$

$$x' = \frac{xS_{22} + S_{21}}{xS_{12} + S_{11}}$$

系统的垂轴放大率 $\beta = \frac{y'}{y} = S_{22} - \frac{x'}{n'_m} S_{12}$

$$(S_{11} + \frac{x}{n_1} S_{12})(S_{22} - \frac{x'}{n'_m} S_{12}) = 1$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{1}{S_{11} + S_{12}(x / n_1)}$$

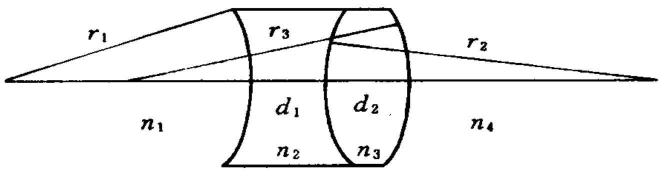
系统的物象矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1/\beta & \Phi \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

已知：r_1= -1.0 m , r_2= 1.5 m , r_3= -1.0 m , d_1= 4cm

d_2=5 cm , n_2=1.632, n_3=1.5

求： (1)复合透镜的光焦度

(2)离透镜前表面为4m的轴上物体的成象



解:

$$S = R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & (n'-n)/r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d/n & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & (n_3'-n_3)/r_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_2/n_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (n_2'-n_2)/r_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_1/n_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (n_1'-n_1)/r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n_3' = n_4, n_2' = n_3, n_1' = n_2$$ 代入上式得

$$S = \begin{pmatrix} 0.973 & -0.202m^{-1} \\ -0.058m & 1.040 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = S_{12} = -0.202m^{-1} \qquad x = -4.0m$$

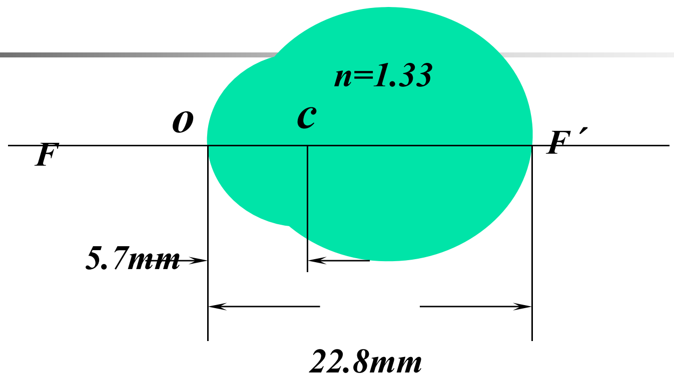
$$x' = \frac{xS_{22} + S_{21}}{xS_{12} + S_{11}} = -2.39m$$

$$\beta = \frac{1}{S_{11} + S_{12}(x/n_1)} = \frac{1}{S_{11} + S_{12}x} = 0.56$$

$0 < \beta < 1$ 是一个缩小的正立的虚象

L9　几何光学仪器

一、人眼



明视距离：睫状肌处于正常状态而能仔细看清物体时，物离眼睛的距离。对正常眼是**25cm**。

二、助视仪器

放大镜、显微镜、望远镜

（1）目镜

复杂的助视仪器总包括目镜和物镜两部分。目镜是放大视角的仪器。通常由不相接触的两个透镜组成。面向物体的透镜为向场镜（场镜），接近眼睛的为接目镜(视镜）。

目镜的设计，除要考虑较高的放大本领，还应注意象差的矫正。可配备一块分划板，以提高测量的精度。

常用的目镜有两种：惠更斯目镜和冉斯登目镜。

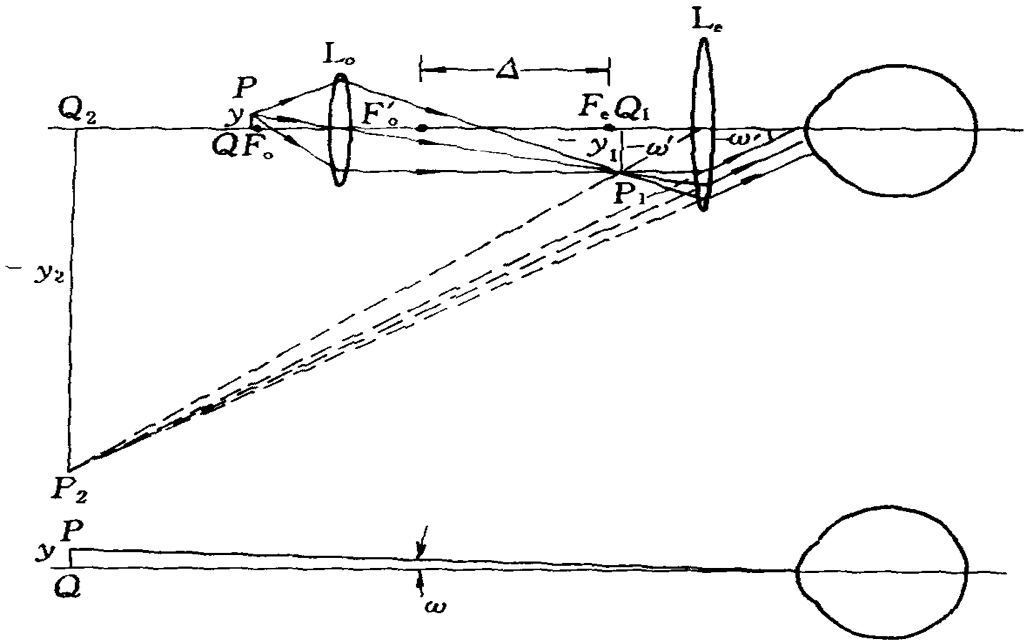
惠更斯目镜的两个平凸透镜的凸面向着场镜，场镜的焦距是视镜焦距的三倍。两透镜的距离为视镜焦距的二倍。

冉斯登目镜的两个平凸透镜焦距相同，凸面相同，平面向外。两透镜的距离为每一个透镜焦距的**2/3**。

区别：

- 冉斯登目镜可作一般放大镜观察实物，而惠更斯目镜只能用来观察象。
- 在冉斯登目镜的物平面上加一分划板，可对物或来自物镜的实象进行长度测量，而惠更斯目镜不能

（2）显微镜：



用于观察细小物体，物镜的焦距极短。

显微镜的放大率 $M=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{y_1}{f_e'}\cdot\frac{p_0}{y}=\frac{y_1}{y}\cdot\frac{p_0}{f_e'}\approx\frac{\Delta}{f_0}\cdot\frac{p_0}{f_e'}$

数值孔径：　$R_{N.A} = n \sin \mu$

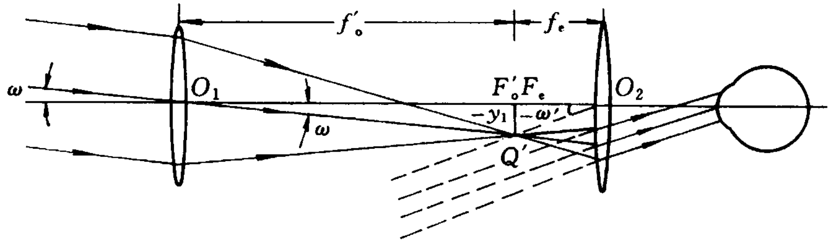
μ 为能进入显微镜而成象的物光束的最大孔径角。数值孔径越大，聚光本领越大，分辨本领越大。

（**3**）望远镜

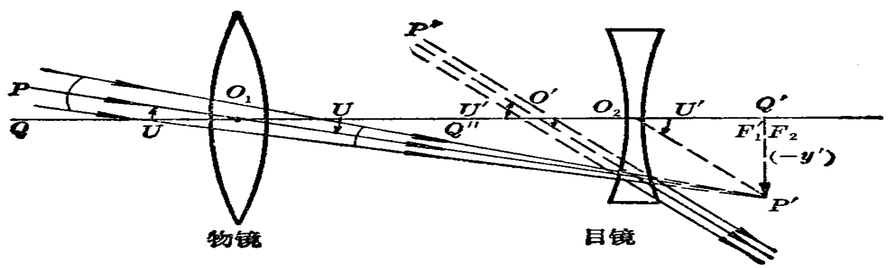
用于观察远处的大物体。入射光束和出射光束都为平行光。物镜的象方焦点和目镜的物方焦点重合，光学间隔为零（无焦系统）。望远镜物镜的 $f'_0 > 0$ 。

目镜有两种：$f'_e > 0$ 开普勒（***Kepler***）望远镜，$f'_e < 0$ 伽利略（***Galileo***）望远镜

开 普 勒 望 远 镜



放大率：
$$M=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{-y_1}{f_e}\cdot\frac{-f_0}{-y_1}=-\frac{f_0}{f_e}$$



伽 利 略 望 远 镜

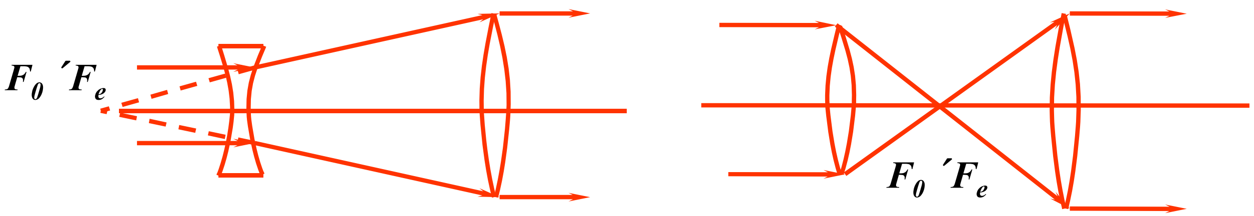
开普勒望远镜vs伽利略望远镜：

1. 开普勒望远镜的放大本领为负值，成倒立的象；伽利略望远镜的放大本领为正值，成正立的象。
2. 开普勒望远镜视场较大；而伽利略望远镜视场较小。
3. 开普勒望远镜的镜筒长等于两个焦距绝对值之和；而伽利略望远镜的镜筒长等于两个焦距绝对值之差。
4. 开普勒望远镜的目镜的物方焦平面在镜筒之内，在该处可放置叉丝或刻度尺，而伽利略望远镜不能配这种装置。

（4）激光扩束器

使激光器发出的光束经过一个高质量的望远镜，便可实现扩束。

通常望远镜目镜采用消色差的复合透镜，所以倒过来作为扩束器，可适用于单色激光。



在测量人造卫星离地球远度的激光测距仪中，发射激光用的望远镜系统采用的就是这种倒装的伽利略式望远镜。

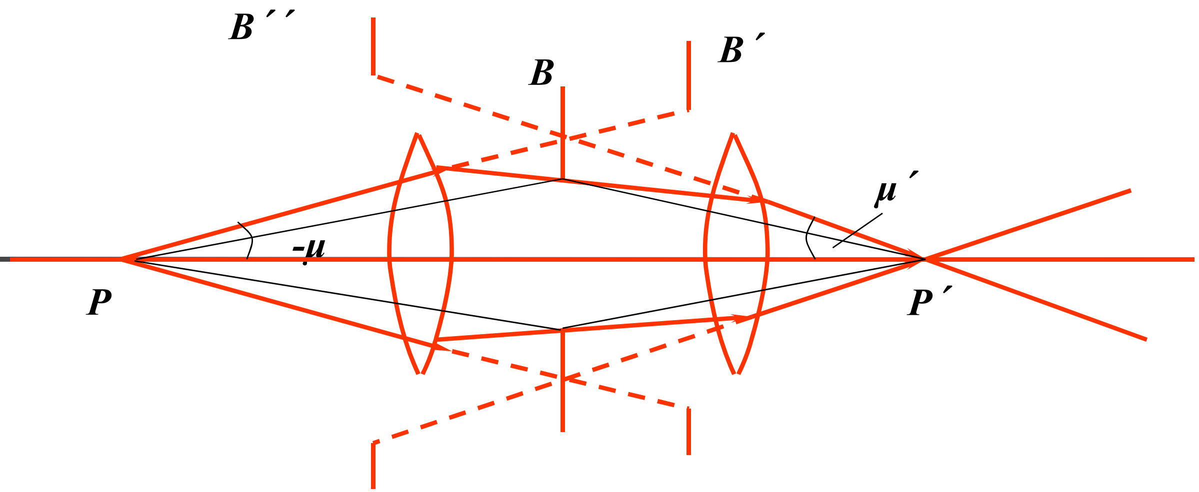
三、光阑（*stop*）

光学元件的边缘或有一定形状开孔的屏，在光学系统中都起着限制光束的作用。

孔径光阑（***aperture stop***）是所有光阑中对光束限制最严的光阑，它决定了入射光束的孔径的大小。如：照相机的光圈。

视场光阑（***field stop***）决定着成象平面视场的大小。如：照相机的感光胶片框。

（**1**）孔径光阑与光瞳（***pupil***）、孔径角



B为孔径光阑，它被自己前面部分的光具组所成的象为入射光瞳（**B**´）；它被自己后面部分的光具组所成的象为出射光瞳（**B**´´）；

入射光瞳对轴上物点所张的平面半角为入射孔径角**μ**；出射光瞳对轴上象点所张的平面半角为出射孔径角**μ**´；

若孔径光阑在系统的最前方，它本身为入瞳；若孔径光阑在系统的最后方，它本身为出瞳；

任何一个光瞳可能是虚象也可能是实象，出射光瞳的位置可能在入射光瞳的前面也可能在它的后面。

寻找孔径光阑的方法：

先求出系统中所有光阑和透镜的边框对其前方系统所成之象，比较每一个象对给定物点所张的孔径角，最小孔径角所对应的光阑就是孔径光阑。

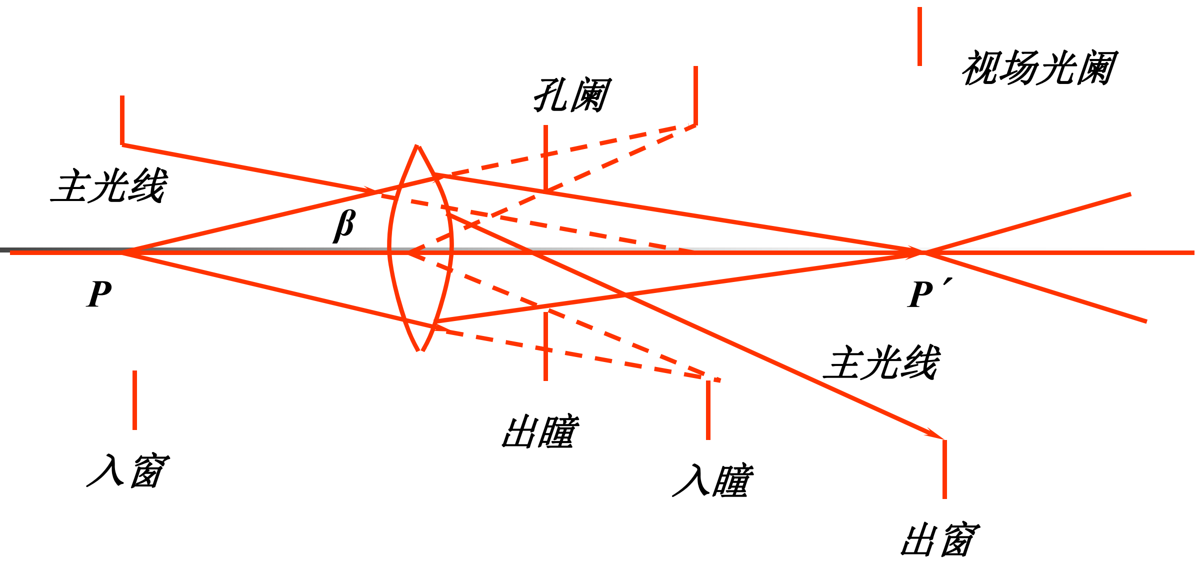
（2）视场光阑与入射窗、出射窗

如给定的光学系统只能让物空间一定范围的物体成象，这个区域为视场。

主光线：从某物点发出的经过入瞳中心的光线。不同物点对应着不同的主光线。

当轴外物点离主光轴之距离增加时，其主光线终与某一元件的边缘相交，此元件为视场光阑。

视场光阑被前方系统所成的象为入射窗，它相当于从入瞳中心看到的视场光阑的象。视场光阑被后方系统所成的象为出射窗。



视场角β（**field angle** ）：入射窗边框对入射光瞳中心所张之平面半角。

对于给定系统，其视场光阑是由主光线确定的。

主光线也应通过孔径光阑和出射光瞳的中心。因为入瞳和出瞳的中心这两点是与孔径光阑的中心是共轭的。

孔径光阑是以轴上物点为参考点；视场光阑是以入瞳中心为参考点。

寻找视场光阑的方法：

比较给定系统每一个元件对其前方系统所成的象对入射光瞳中心所张的角，最小视场角所对应的就是视场光阑。

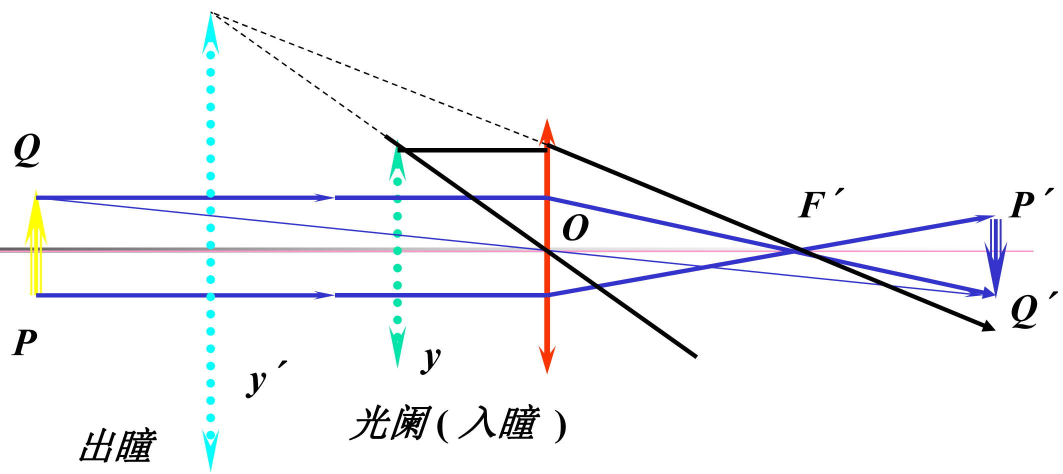
例题：有一光阑其孔径为2.5厘米，位于透镜前1.5厘米处，透镜焦距为3厘米，孔径4厘米。长为1厘米的物位于光阑前6厘米处，

求：（1）入射光瞳和出射光瞳的位置及大小

（2）象的位置，并作图

解：

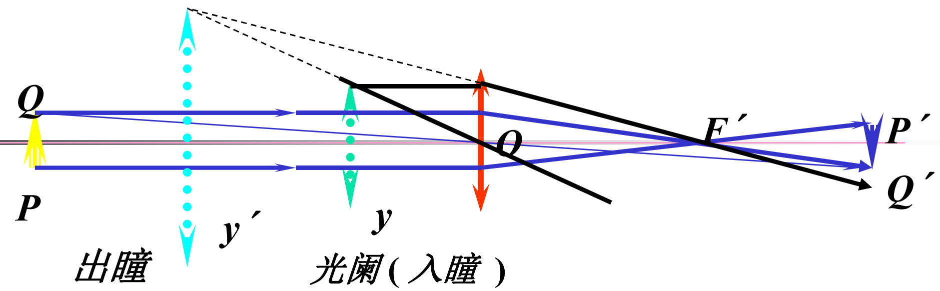
因光阑前无透镜，直接比较光阑及透镜对物的张角，可知光阑即入射光瞳。出射光瞳是这光阑被其后面透镜所成的象。



(1) 已知：***P* = -1.5 cm，*f*´= 3cm**

出射光瞳的位置 $\dfrac{1}{P'}-\dfrac{1}{P}=\dfrac{1}{f'}$ $P'=-3cm$

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{nP'}{n'P}=\frac{-3}{-1.5}=2 \qquad y'=\beta y=2.5\times 2=5cm$$



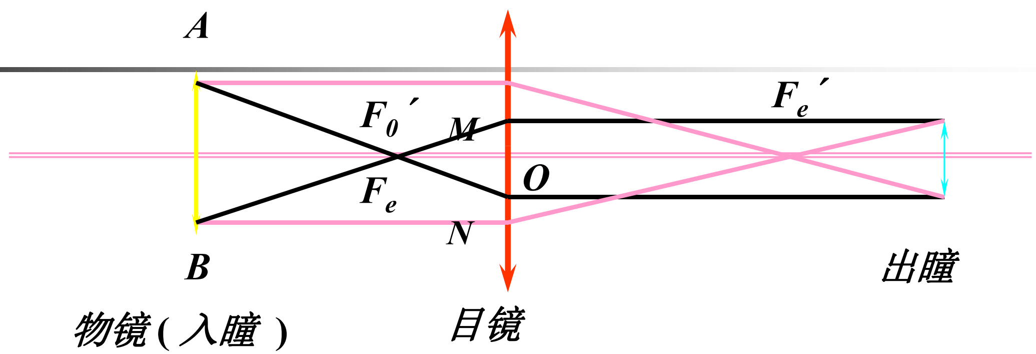
(2) 已知：$P = -(6+1.5)\ cm$，$f' = 3cm$

象的位置:

$$\frac{1}{P'} - \frac{1}{P} = \frac{1}{f'} \qquad P' = 5cm$$

证明: 望远镜系统的放大本领等于

入射光瞳与出射光瞳直径之比.



证: $\Delta ABF_0' \backsim \Delta MNF_e$ $\qquad f_0' : f_e = \overline{AB} : \overline{MN}$

入瞳(物镜)直径: $AB = D_1$ 出瞳直径: $MN = D_2$

望远镜的放大本领: $$M = \frac{f_0'}{f_e} = \frac{D_1}{D_2}$$

- LA 像差概述
  - 单色像差
  - 色差

LA-1　单色象差

对光学仪器的主要要求是获得正确的象，必须遵循以下几个条件：

（1）物面上每一个发光点应该成一个清晰的象点。

（2）所有的象点都必须位于同一平面上，这个平面必须垂直于主光轴。

（3）各象点的放大率都必须是常数。

（4）象的各部分应该保持与物有同样的彩色。

最主要的象差有下列几种：

- 近轴物宽光束引起的球面象差和彗形象差
- 远轴物窄光束引起的象散、象面弯曲和象形畸变。

象差的来源：

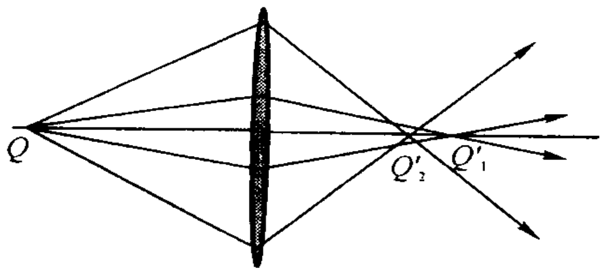
（1）参与成象的光是非近轴光

（2）参与成象的光是非单色光

（3）系统中各光学元件的表面是非球面

（4）系统中各光学元件的主光轴不重合

（1）球面象差

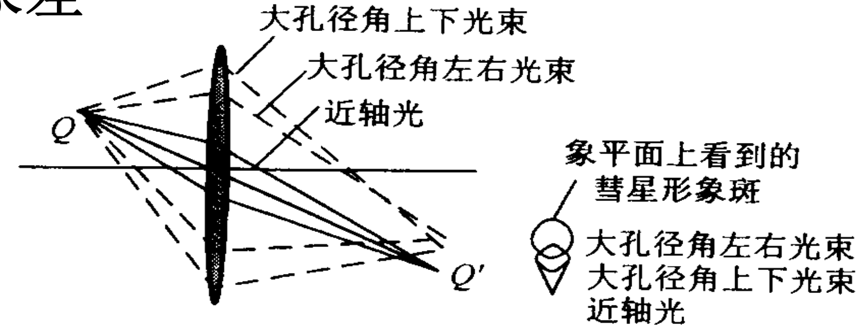


球差

位于主轴上的物点所发出的宽光束由透镜折射后，并不会聚于一个象点而是成为弥漫的圆斑。

孔径角大小不同的光线会聚在离球面透镜不同的位置。

（2）彗形象差

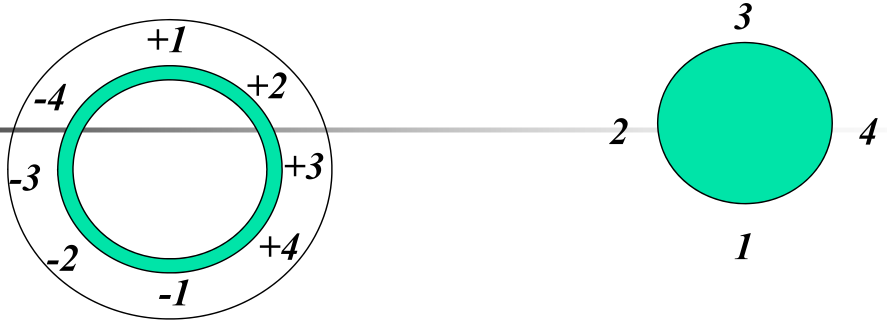


彗差

消去球差后，离轴光点发出的孔径角不同的光线会聚在离主光轴距离不同的位置上，且光斑大小不同而形成彗星形状的象差。

主截面：通过主光轴的任何一个平面。

子午面：物点所在的主截面。



透镜的截面

环带的+1和-1两点在物点的子午面上，经过这两点的光线相交于象面上的点1；

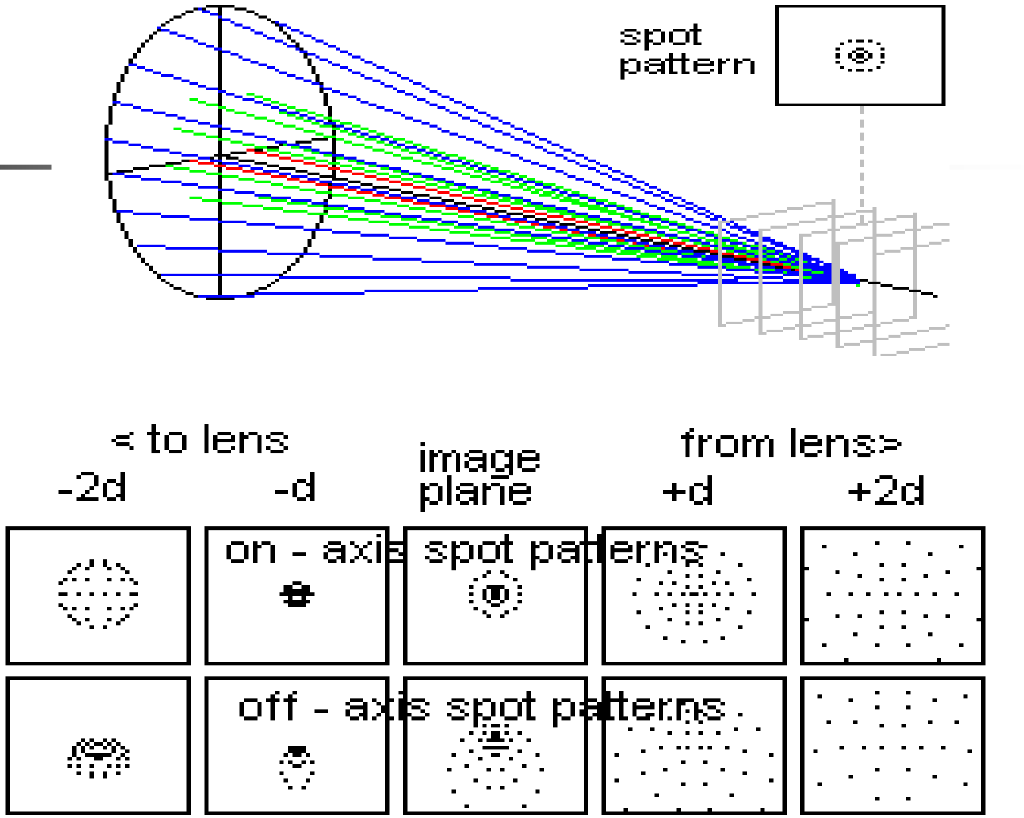
经过+3和-3两点虽不在子午面上，但和子午面是对称的。经过这两点的光线相交于象面上的点3。

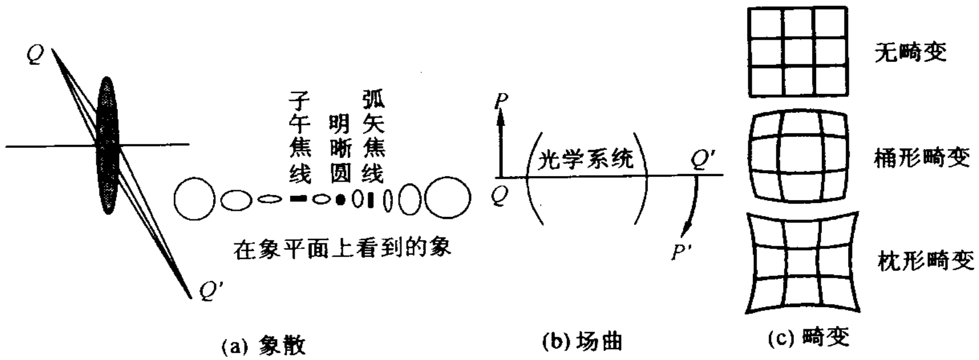
通过透镜不同环带的光线在理想象面上交成一系列大小不同相互重叠的圆，圆心在一直线上，与主轴有不同的距离，形成一个有尖端的亮斑。

（3）象散

当光屏垂直于主轴放在不同位置时，远离主轴物点发出的光束和光屏交点的轨迹是椭圆，这些椭圆的形状和大小将随光屏位置的不同而变化。

象点分别为：子午焦线、弧矢焦线、明晰圆


spot
pattern
< to lens
-2d
-d
image
plane
from lens>
+d
+2d
on - axis spot patterns
off - axis spot patterns



（4）象面弯曲（场曲）

象场发生弯曲，最清晰的成象面不是一个平面而是一个曲面。

（5）畸变（aberrance）

离轴远近不同的物点成象时，横向放大率不同。

如果横向放大率随物点离开主轴的距离而增大，则称为枕形畸变，如果距离减小，则称为桶形畸变。

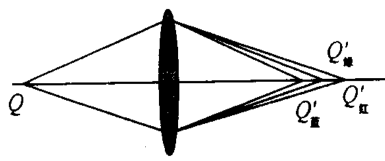
LA-2 色 差

色差是由于非单色光的物光束因透镜材料的折射率随波长而变，使不同颜色的物点成象于不同位置上所形成的象差。

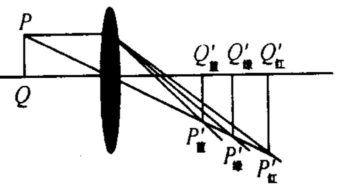
发光点在主轴上时产生的色差为纵向色差

发光点远离主轴上时产生的色差为横向色差

色差又可分为位置色差和放大率色差两种

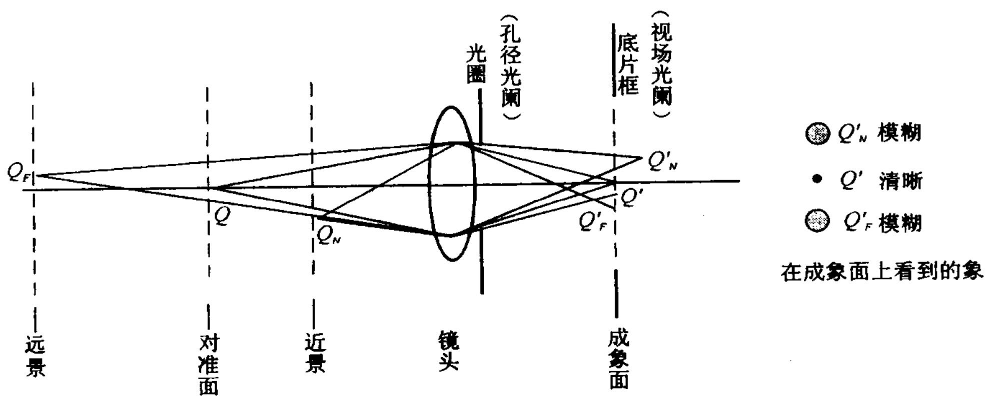


(a) 位置色差



(b) 放大率色差

减小象差的方法之一是恰当地设置光阑



减小象差的方法之二是采用反射系统

减小象差的方法之三是采用复合透镜

（1）消色差透镜

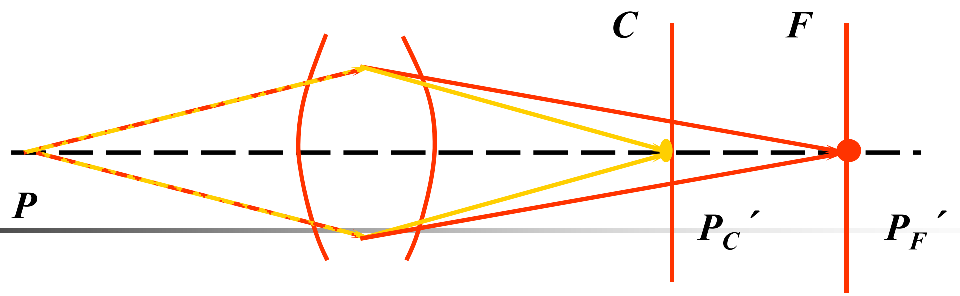
$$\Phi = (n-1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

不同波长的光因 ***n*** 不同而产生的光焦度不同

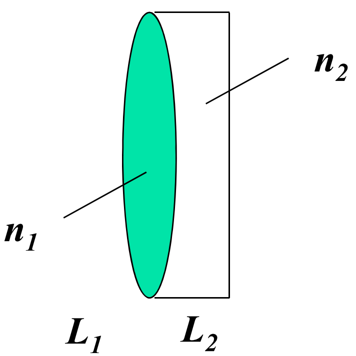
$$\Delta\Phi = \Delta n(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = \frac{\Delta n}{n-1}\Phi$$

材料的阿贝数

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{v}$$



红色（*F*）的折射光束成象于$P_F{}'$点蓝色（*C*）的折射光束成象于$P_C{}'$点



消 色 差 透 镜

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = \frac{\Phi_1}{v_1} + \frac{\Phi_2}{v_2}$$

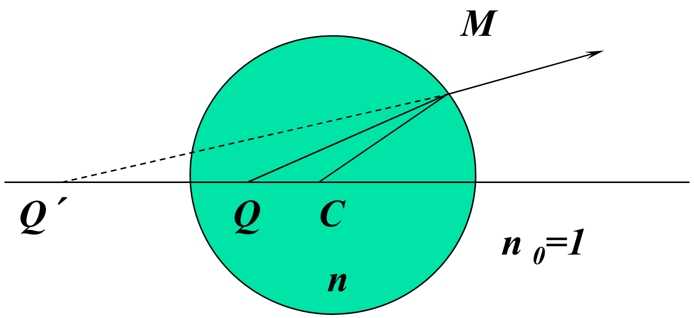
复合透镜色差最小，令 $\Delta\varphi = 0$

$$\Phi_1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}\Phi \qquad \Phi_2 = \frac{-v_2}{v_1 - v_2}\Phi$$

消色差透镜把红光与蓝光的焦点拉在一起，
使两波长的焦距相等。

组合透镜消色差的条件： $d=(f_1+f_2)/2$

（2）不晕点消象差



$$Q'C = nr \qquad QC = r/n$$

$$\frac{r}{QC}=n=\frac{Q'C}{r}$$

$$\frac{QM}{Q'M}=\frac{QC}{MC}=\frac{r/n}{r}=\frac{1}{n}$$

$$n\cdot QM = Q'M$$

Q*´**是 ***Q 的象，不需要近轴条件，与孔径角无关。