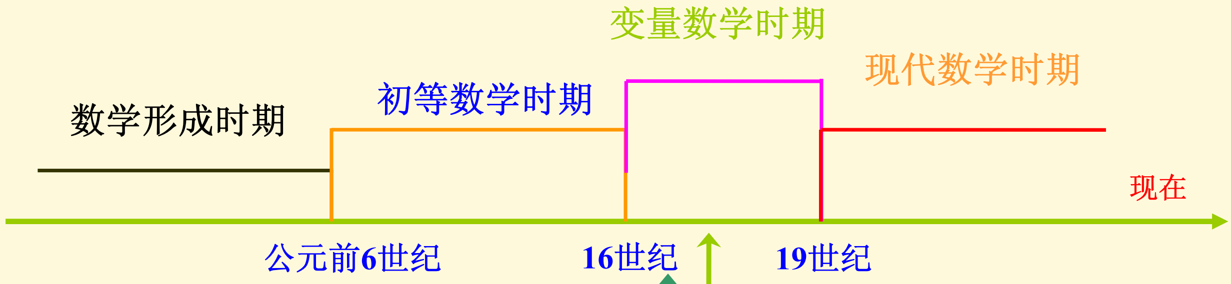
Lecture 1
第一讲
Sets and Functions
集合与函数

Zhenglu Jiang
Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China
姜正禄
中山大学数学系，广州 510275

数学历史

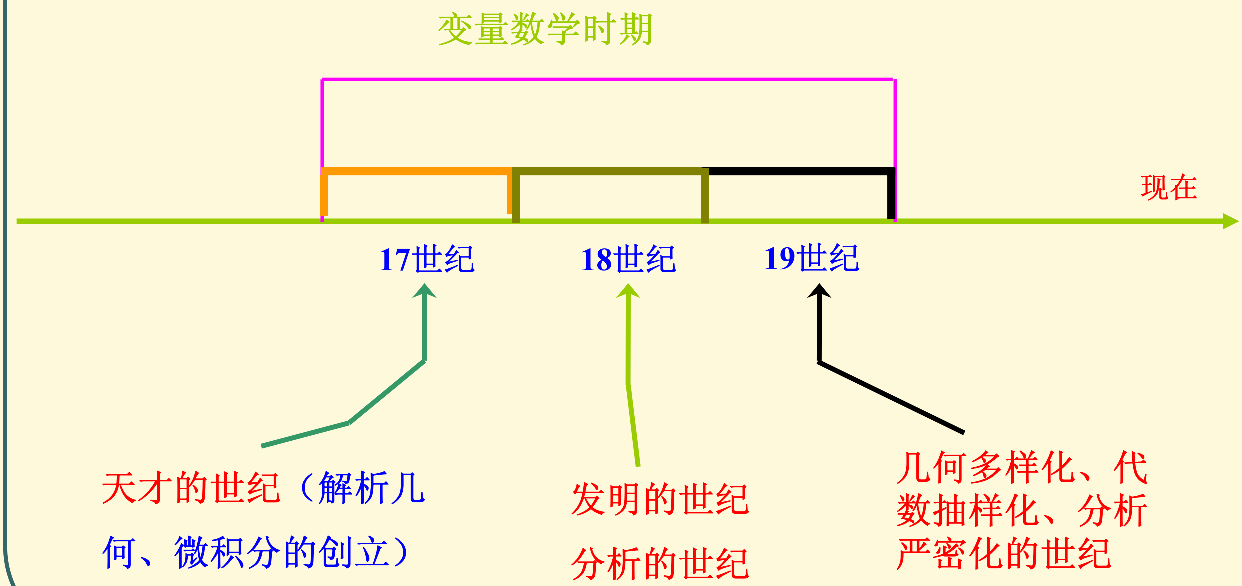


牛顿:1643——1727

莱布尼兹:1646——1716

欧拉:1707——1783

18世纪，欧拉的世纪


变量数学时期
现在
17世纪
18世纪
19世纪
天才的世纪（解析几何、微积分的创立）
发明的世纪
分析的世纪
几何多样化、代数抽样化、分析严密化的世纪

目录

一. 集合的基本概念

1. 集合的定义
2. 集合的表示
3. 元素与集合的关系
4. 集合与集合的关系
5. 三个特殊的集合 – 全集、空集和集合的幂集
6. 集合的基数
7. 集合的分类
8. 基数的性质
9. 连续统假设
10. 有理数集、无理数集、实数集、数轴
11. 区间、绝对值、距离

1. 集合的定义

集合是指一个由具有某种特征或性质的研究对象 汇集在一起所组成的单一的整体。通常把集合中的研究对象叫做该集合的元素。

- 集合是一个原始概念，概念当中的“对象”、“整体”等不能用更基本的概念界定，正如Euclid（欧几里德，古希腊）几何系统中的“点”、“直线”和“平面”，只能做描述性的说明和经验性的理解。

- 优点是集合概念的描述既原始又直观。缺点是集合概念的描述有可能违犯排中律，从而出现悖论（paradox），其问题在于描述集合概念的外延过大。

- 从历史的发展来看，至少迄今为止，一切要对集合概念做出所谓严格的、合乎数学要求的定义的尝试都还没有成功。

G. Canter
（康托儿，1845-1918，德）

⇓

朴素集合论

⇓

Epimenides说谎者悖论
（伊壁孟德，约公元前六世纪，古希腊）
B. A. W. Russell悖论
（罗素，1872-1970，英）
A. A. Fraenkel“悖论”定义
（弗兰克尔，1891-1965，德）

⇓ ⇓ ⇓

ZF系统　　Russell的类型论　　GB系统

- Epimenides说谎者悖论 – “所有克里特人都是说谎者”。Epimenides（伊壁孟德，古希腊）是半传奇的古希腊克里特人。
- Russell悖论 – Russell构造了“所有不属于自身的集合构成的集合” – 表述了“反身自指”的问题。比如说理发师悖论 – 本理发师只给一切“不给自己刮脸的人刮脸”。
- Fraenkel“悖论”定义 – 如果某一理论中看上去是合理的公理或规则能推导出两个相互矛盾的命题，或者被证明是一个能表现两个相互矛盾结论的复合命题，那么就说该理论包含了一个悖论或称该理论是悖论。悖论的基本意思是指荒谬的理论。

- ZF系统 – 排除了Russell悖论

  E. Zermelo（策墨罗，1871-1953，德）

  A. A. Fraenkel（弗兰克尔，1891-1965，德）

- Russell的类型论

  B. A. W. Russell（罗素，1872-1970，英）

- GB系统

  John von Neumann（冯·诺依曼，1904-1957，德）

  P. Bernays（贝尔耐斯，1888-1977，德）

  K. Godel（哥德尔，1906-1978，奥地利）

2. 集合的表示

一般用大写英文字母A、B、C等表示集合，小写英文字母a、b、c等表示集合中的元素。

列举法 把集合中所有的元素一一列举出来，用逗号分开，放在大括号内；

描述法 把集合中元素的共同性质用语言或数学符号描述出来，写在大括号内.

3. 元素与集合的关系

元素与集合的关系是一种从属关系，即“属于”或“不属于”的关系。

记号$\in$表示“属于”，记号$\notin$表示“不属于”。

例如

若a 是集合A的元素，则记为$a\in A$; 若a不是集合A的元素，则记为$a\notin A$。

4. 集合与集合的关系

集合与集合的关系是一种包含关系，即“包含”或“包含于”的关系。

记号$\supseteq$表示“包含”，记号$\subseteq$表示“包含于”。

例如

若集合A包含集合B，则记为$A\supseteq B$;

若集合B包含于集合A，则记为$B\subseteq A$。

集合与集合的相等关系

若集合A包含集合B且集合B包含集合A，则称A与B相等，记为A＝B。

若集合A包含集合B且集合A中至少有一个元素不属于集合B，则记为A$\supset$B或B$\subset$A。

5. 三个特殊的集合－全集、空集和集合的幂集

全集（或论域）是指在某个问题的研究当中所论及的所有对象组成的集合。通常用U表示全集。全集是一个相对的概念。一个集合在某个问题当中是全集，在另一个问题里可以不是全集。例如，统计人口时，自然数集合是全集，但在测量距离、高度和重量时，它就不是全集。

空集是指不含任何元素的集合。通常用$\varnothing$表示空集。

集合A的幂集是指集合A所有子集组成的集合。通常用$\Psi(A)$表示集合A的幂集。

6. 集合的基数

集合的基数是指集合所含元素的“个数”或“总数”。它刻划了集合中所含的元素的“多少”，是集合的一个重要的数量特征。两个集合的基数的比较是用两个集合之间的“一一对应”关系来确定的。“一一对应”关系是指一个建立在两个集合A和B之间并满足下列两个条件的对应规则:

- 对集合A中的每个元素，总可以在集合B中找到唯一的元素与它对应;
- 对集合B中的每个元素，总可以在集合A中找到唯一的元素与它对应。

7. 集合的分类

集合按其含元素的多少，可分为有限集和无限集。无限集还可分为可数集（或可列集）和不可数集（或不可列集）。

集合按其元素间的关系，可分为有序集和无序集。

8. 基数的性质

有限集 — n　可数集 — $\aleph_0$　实数集 — $\aleph$

(1) $\aleph > \aleph_0$;　(2) $n+\aleph_0 = \aleph_0$;　(3) $\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0$;

(4) $\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 + \cdots}_{\aleph_0} = \aleph_0$;

(5) $n + \aleph = \aleph$;　(6) $\aleph_0 + \aleph = \aleph$;

(7) $\underbrace{\aleph + \aleph + \cdots + \aleph + \cdots}_{\aleph_0} = \aleph$;

(8) $\aleph = 2^{\aleph_0}$;　(9) 基数没有最大的上限。

G. Galilo于1638年发现“平方数的总数等于自然数的总数”。这与人们一直认为的公理“部分必小于全部”矛盾，称为Galilo悖论。

（伽利略，1564-1642，意）

9. 连续统假设

Cantor连续统假设指的是，$\aleph_0$与$\aleph$之间不存在其它的基数。

Cantor认为，$\aleph$是继$\aleph_0$之后的次一个无穷基数，这是不能证明的，它独立于集合论的公理系统，犹如在欧几里德几何中的平行公理。

10. 有理数集、无理数集、实数集、数轴

有理数集与无理数集之并集称为实数集。实数集是一个完备的有序数域，并满足加法与乘法的交换律、结合律、分配律:

$$a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a;$$

$$(a+b)+c=a+(b+c),\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c。$$

可将实数集的数与直线上的点一一对应，建立数轴。

$\sqrt{2}$是无理数集。

自然数系

- $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- *Property*

(1) 加法交换律：$a + b = b + a$；

(2) 加法结合律：$(a + b) + c = a + (b + c)$；

(3) 乘法交换律：$ab = ba$；

(4) 乘法结合律：$(ab)c = a(bc)$；

(5) 加法与乘法的分配律：$a(b + c) = ab + ac$；

(6) 对加法，乘法运算封闭.

- **整数系** $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$
- **有理数系**

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in Z,q\neq 0\right\}$$

- *Property* (1) 减法在 Z 中封闭；

(2) 除法在 Q 中封闭；

(3) Q 具有稠密性，而 Z 无.

顺序关系

- 数系 S 上的顺序关系 $<$，是指满足下面两个性质的关系：

(A) $\forall\ a, b \in S$，下列关系中有且只有一个成立：

$$a < b,\ b < a,\ a = b;$$

(B) 传递性：若 $a < b,\ b < c$，则 $a < c$.

- 在有理数系中，$<$ 还满足对加法和乘法的不变性：

(C) 若 $a < b$，则 $a + c < b + c$;

(D') 若 $a < b,\ c > 0$，则 $ac < bc$.

实数系是一个有序的稠密的完备的集合。

注：实数系是完备的，也称为连续的。

11. 区间、绝对值、距离

开区间、闭区间、半开半闭区间、半闭半开区间称为区间。区间(a, b)的中心为

$$c = \frac{a+b}{2}$$

绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当} x \geq 0 \text{时} \\ -x, & \text{当} x < 0 \text{时} \end{cases}$$

距离

$$|x - y|$$

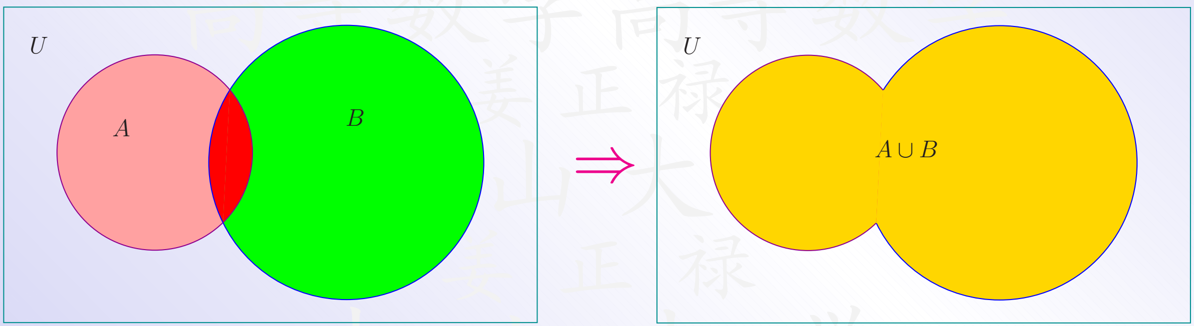
二. 集合的基本运算

并集　交集　差集　补集

1. 并集

A+B

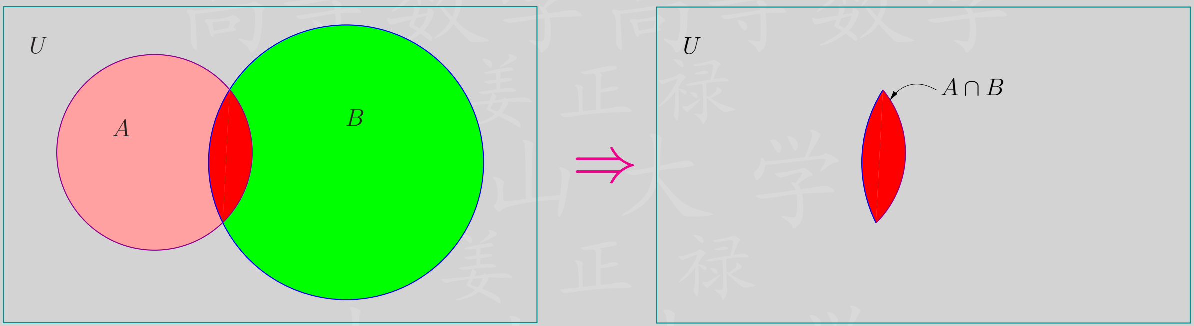
称$\{x|x\in A$ 或$x\in B\}$为A和B的并集，记为$A\cup B$。



2. 交集

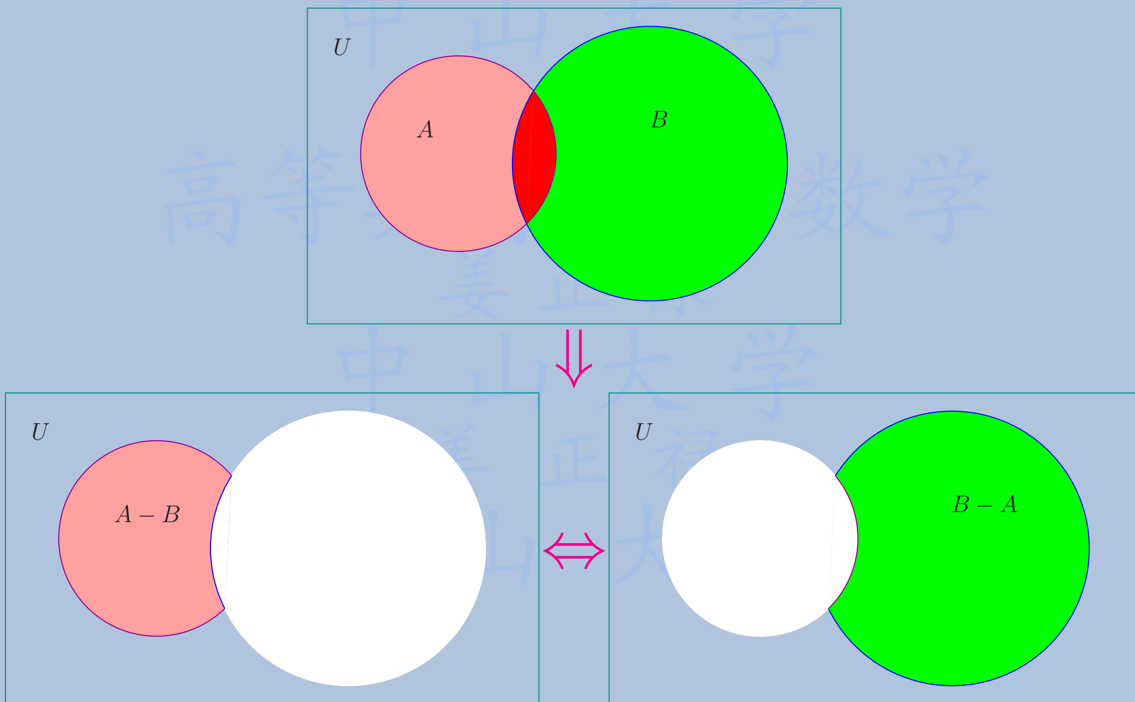
AB

称$\{x|x\in A$ 且$x\in B\}$为A和B的交集，记为$A\cap B$。



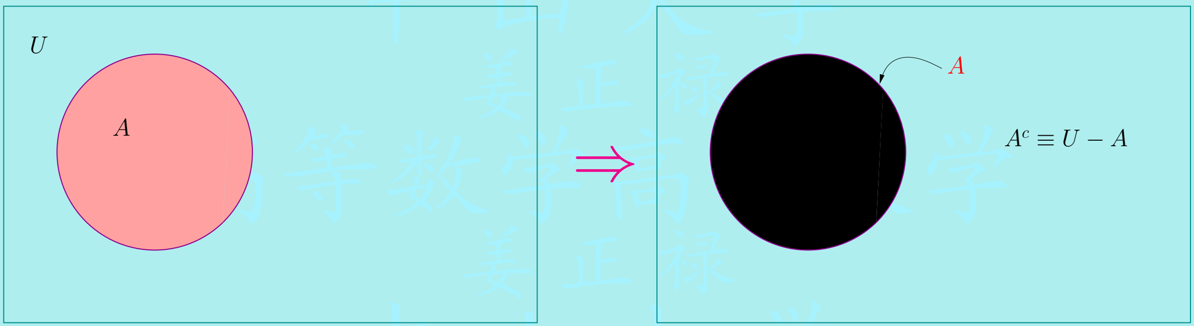
3. 差集 $A\backslash B$

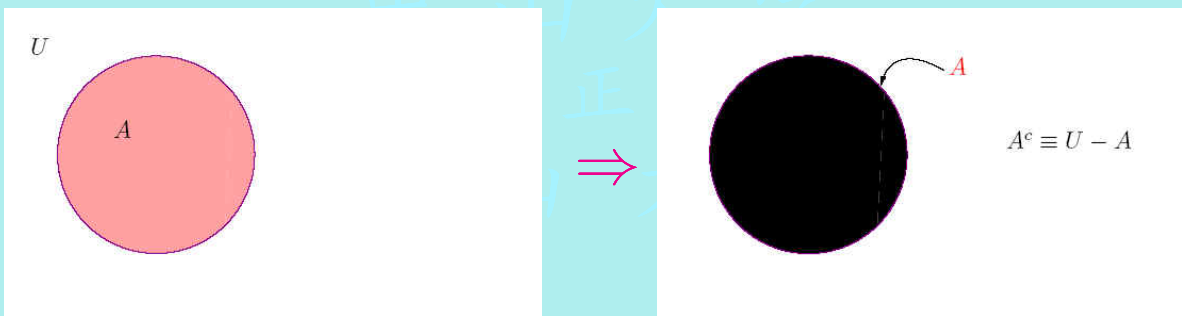
称$\{x|x\in A$ 且$x\notin B\}$为A和B的差集，记为$A-B$。



4. 补集

称$\{x|x\in U$ 且$x\notin A\}$为A的补集，记为A^{c}。





三. 集合的运算性质

设A、B、$C\in\Psi(U)$，U是全集，则有

（1）幂等律：$A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

（2）交换律：$A\cup B= B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

（3）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

（4）吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(B\cup A)=A$;

（5）分配律：$A\cap(B\cup C)= (A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

（6）0 – 1律：$A\cup U=U$, $A\cap U=A$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$;

（7）还原律：$(A^c)^c=A$;

（8）对偶律：$(A\cup B)^c= A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c= A^c\cup B^c$;

（9）排中律：$A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\varnothing$。

四. 函数的基本概念

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象。函数是一种变量之间的依赖关系。一元函数微积分学的研究对象是实数集上一元函数 – 只有一个自变量的函数。

1. 函数的定义

2. 函数的表示

3. 函数的一般化：映射

4. 反函数

1. 函数的定义

函数是一种关系（规则或法则），是一种变量之间的依赖关系。

定义 设X和Y是实数集中的两个集合，如存在一个确定的法则f，使得对于集合X中的任意元素x，有集合Y中唯一的元素y按照该法则与它对应，则称该法则f为集合X上的函数。记为

$$y=f(x)\text{或}y=y(x)\text{。}$$

x — 自变量，y — 因变量

X — 函数f的定义域 — 记为$D(f)$

$\{f(x)|x\in \mathrm{X}\}$ — 函数f的值域 — 记为$R(f)$

$\{(x,f(x))|x\in \mathrm{X}\}$ — 函数f的图象 — 记为G_f

2. 函数的表示

列表法　图象法　解析法

- 列表法就是一种将自变量与因变量的对应关系列成表格来表示函数的方法。例如平方根表、三角函数表和对数函数表等等。列表法的优点是可以由自变量的值通过查表直接得到对应的函数值，不足之处是列出的数据一般说来是不够完整。

- 图象法是一种用函数f的图象G_f在平面上所代表的曲线来表示函数f的方法。图象法的特点是直观明确，对我们的理论分析有着重要的启发和引导作用。

- 解析法是一种用解析式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法，也称公式法。解析法虽然没有列表法那样具体，也没有图象法那样直观，但却便于进行统一的理论分析与研究。在我们后面将要学习的微积分当中，主要讨论由解析法表示的函数。需要注意的是，并非所有函数都可以用解析法来表达。

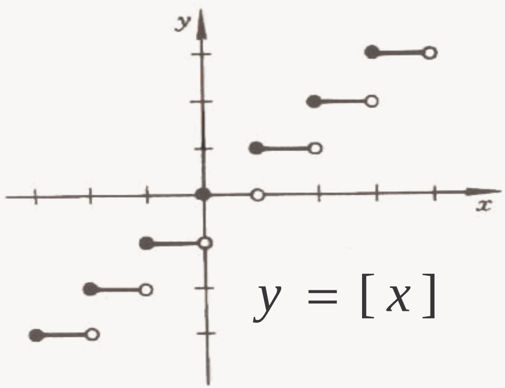
常用函数

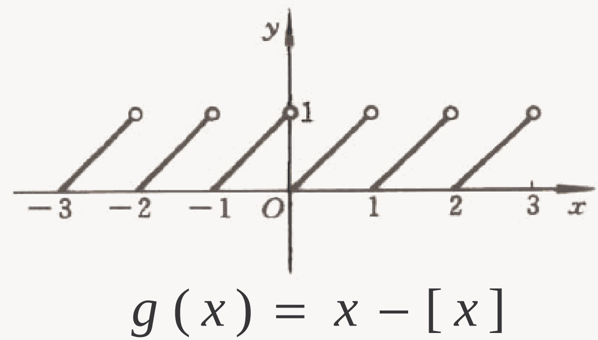
- **取整函数** $f(x)=[x],\quad x\in\Re,$

  其中 $[x]=$ 不超过 x 的最大整数.

- x 的小数部分可表为：

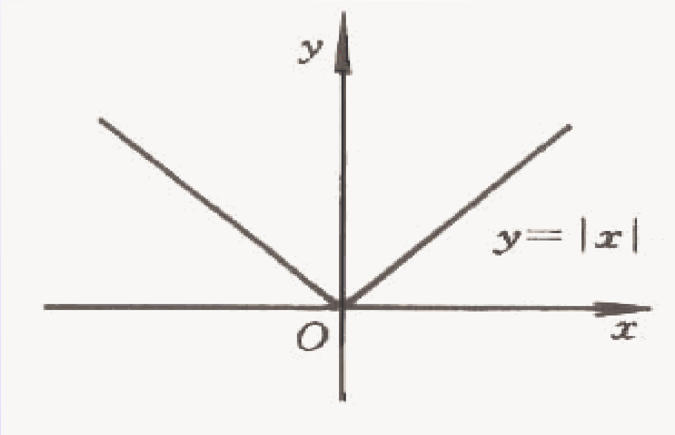
$$g(x)=x-[x],\quad x\in\Re.$$





绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$



- 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

- 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}.$$

- 常值函数 $f(x)=C,\quad x\in\Re,$

其中 C 为常数.

3. 函数的一般化：映射

定义 设X和Y是两个集合，如存在一个确定的法则f，使得对于集合X中的任意元素x，有集合Y中唯一的元素y按照该法则与它对应，则称该法则f 为集合X上的映射。记为

$y = f(x)$或$y = y(x)$。

x — 变元，y — 像点

X — 函数f的定义域 — 记为$D(f)$

$\{f(x)|x \in \mathrm{X}\}$ — 函数f的值域或像集 — 记为$R(f)$

$\{(x, f(x))|x \in \mathrm{X}\}$ — 函数f的图象 — 记为G_f

满射、单射、双射

4. 反函数

定义 设X和Y是实数集中的两个集合，f是集合X上的函数，而且对于集合Y中的任意元素y，对应到集合X中只有一个元素x 使得f在x处的函数值为y，则确定了一个从集合Y到集合X的对应法则。如把y看作自变量，把x看作因变量，按照函数的定义，就得到一个新的函数，则称该新函数为函数$y = f(x)$的反函数。记为$y = f^{-1}(x)$。

定义 设$D(f)$和$R(f)$分别为函数$y = f(x)$的定义域和值域, 如对于任意的$y \in R(f)$, 按$y = f(x)$, 在$D(f)$中总有唯一的元素x与y对应，则由$y = f(x)$就确定了一个从$R(f)$到$D(f)$上的新的函数。称该新函数为函数$y = f(x)$的反函数。记为$y = f^{-1}(x)$。

五. 函数的基本特征

单调性　　奇偶性　　有界性　　周期性

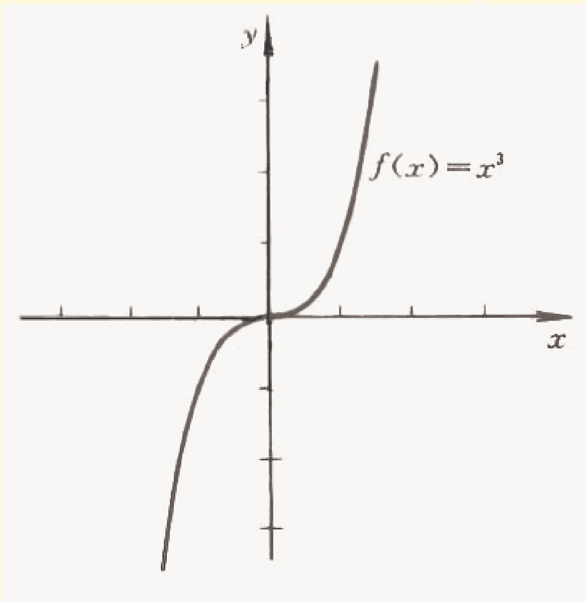
1. 单调性

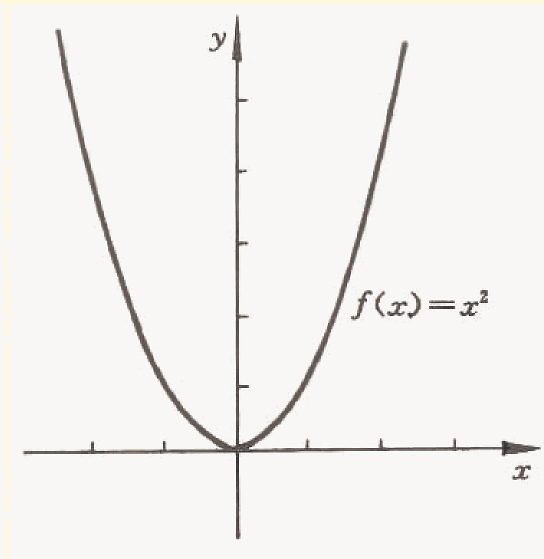
设I是函数f定义域中的一个区间，如对区间I中满足$x_1 < x_2$的任意两点x_1和x_2，有$f(x_1) < f(x_2)$，则称f为在区间I上严格单调增加的函数；如对区间I中满足$x_1 < x_2$的任意两点x_1和x_2，有$f(x_1) > f(x_2)$，则称f为在区间I上严格单调减少的函数。

设I是函数f定义域中的一个区间，如对区间I中满足$x_1 < x_2$的任意两点x_1和x_2，有$f(x_1) \le f(x_2)$，则称f为在区间I上单调增加的函数；如对区间I中满足$x_1 < x_2$的任意两点x_1和x_2，有$f(x_1) \ge f(x_2)$，则称f为在区间I上单调减少的函数。

2. 奇偶性

若对函数f定义域中的任意一点x，都有$f(-x)=f(x)$，则称f为偶函数；若对函数f定义域中的任意一点x，都有$f(-x)=-f(x)$，则称f为奇函数。


y
$f(x)=x^3$
x


y
$f(x)=x^2$
x

3. 有界性

若存在正数M，对函数f定义域中的任意一点x，都有$|f(x)| < M$，则称f为**有界**函数。

4. 周期性

若存在正数T，对函数f定义域中的任意一点x，都有$f(x+T)=f(x)$，则称f为**周期**函数。满足这个等式的最小正数T，叫做f的周期。

六. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数称为基本初等函数。

1. 幂函数
2. 指数函数
3. 对数函数
4. 三角函数
5. 反三角函数

1. 幂函数

函数$y = x^a$（a是常数）叫做幂函数。如a为自然数，则它的定义域是区间$(-\infty, +\infty)$。

幂函数

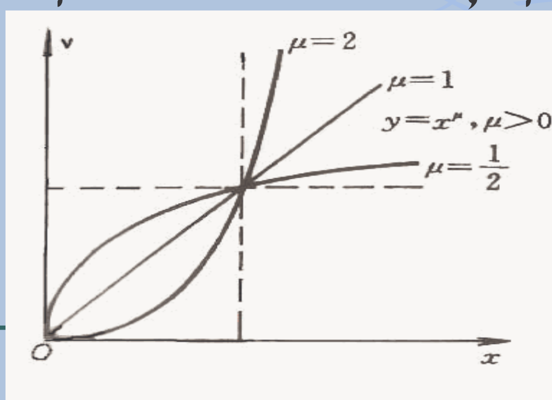
$$y = x^{\mu}, \quad 其中 \ \mu \neq 0.$$

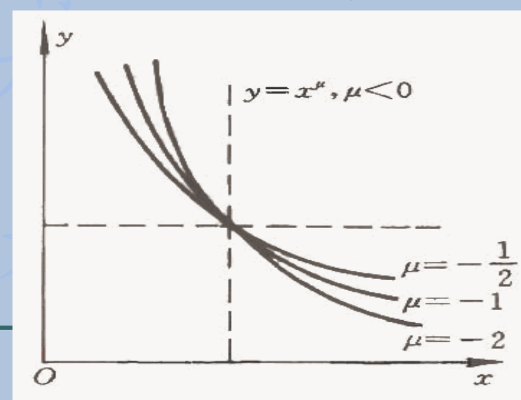
- 幂函数的定义域根据μ值的不同而不同．当$\mu = \dfrac{p}{q}$是有理数时(其中p，q是整数，且p，q互质)，其定义域见下表：

$\mu = \dfrac{p}{q}$		定义域
$\mu > 0$	q 为奇数	$(-\infty, +\infty)$
	q 为偶数	$[0, +\infty)$
$\mu < 0$	q 为奇数	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
	q 为偶数	$(0, +\infty)$

- 当μ是无理数时，x^{μ}定义为 $x^{\mu}=10^{\mu\lg x}$，故定义域为$(0,+\infty)$.
- $y=x^{\mu}$在$(0,+\infty)$总有定义，且必过点$(1,1)$.
- 单调性 (只考虑$x>0$情形)

  $\mu>0$ 时严格上升，$\mu<0$时严格下降.





2. 指数函数

函数$y = a^x$（a是常数且$a > 0, a \neq 1$）叫做指数函数。它的定义域是区间$(-\infty, +\infty)$。

- 因为对于任何实数值x, 总有$y > 0$,又$a^0 = 1$, 所以指数函数的图形总在x轴的上方, 且通过点$(0, 1)$。
- 若$a > 1$，指数函数是单调增加的。
- 若$0 < a < 1$，指数函数是单调减少的。

指数函数

$$y = a^x,\ x \in (-\infty, +\infty),\ (a > 0, a \neq 1)$$

- *Property*

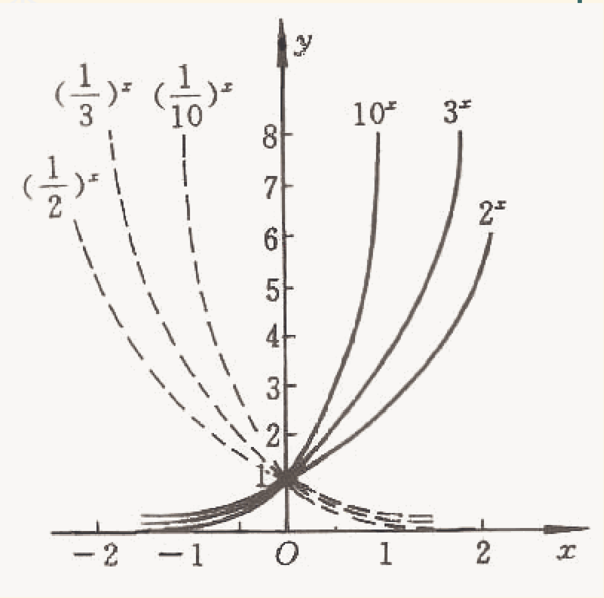
(1) 值域：$(0, +\infty)$；

(2) 必过点 $(0, 1)$；

(3) $a > 1$ 时，严格上升；

$a < 1$ 时，严格下降；

(4) a^x 与 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称.



3. 对数函数

对数函数是指指数函数$y = a^x$的反函数，记作$y = \log_a x$（a是常数且$a > 0, a \neq 1$）。它的定义域是区间$(0, +\infty)$。

- 对数函数的图形与指数函数的图形关于直线$y = x$对称。对数函数的图形总在y轴右侧，且通过点$(1, 0)$。
- 若$a > 1$，对数函数是单调增加的，在开区间$(0, 1)$内函数值为负，而在区间$(1, +\infty)$内函数值为正。
- 若$0 < a < 1$, 对数函数是单调减少的, 在开区间$(0, 1)$内函数值为正，而在区间$(1, +\infty)$内函数值为负。

对数函数

$$y = \log_a x, \quad x \in (0, +\infty), \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- *Property* (1) 对数函数与指数函数互为反函数;

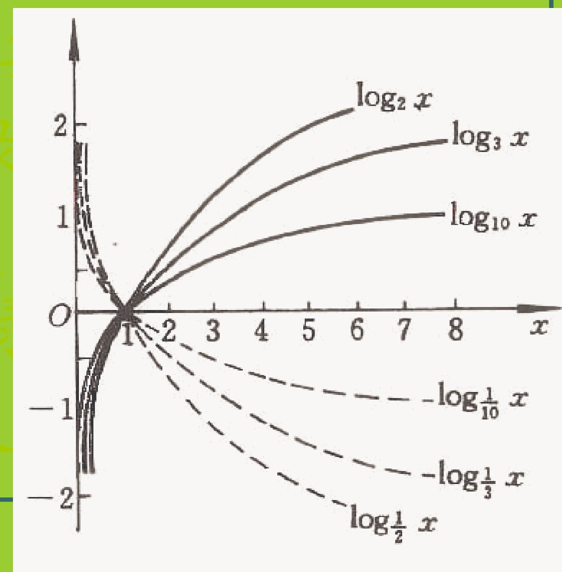
(2) 值域为 $(-\infty, +\infty)$;

(3) 必过点 $(1, 0)$;

(4) $a > 1$ 时, 严格上升;

$a < 1$ 时, 严格下降;

(5) $\log_a x$ 与 $\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图形关于 x 轴对称.



4. 三角函数

$$\sin(x) \quad \cos(x) \quad \tan(x) \quad \cot(x)$$

正弦函数和余弦函数都是以2π为周期的周期函数，它们的定义域都是区间$(-\infty, +\infty)$，值域都是闭区间$[-1, 1]$。

- 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数。
- 正切函数和余切函数都是以π为周期的周期函数，它们都是奇函数。

三角函数

- **正弦函数** $y = \sin x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
- **余弦函数** $y = \cos x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
- **正切函数** $y = \tan x, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$
- **余切函数** $y = \cot x, \quad x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

5. 反三角函数

- 反三角函数是三角函数的反函数，其图形都可由相应的三角函数的图形按反函数作图法的一般规则作出。
- $\mathrm{Arcsin}(x)$、$\mathrm{Arccos}(x)$、$\mathrm{Arctan}(x)$和$\mathrm{Arccot}(x)$表示四个反三角多值函数。
- $\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、$\arctan(x)$ 和$\mathrm{arccot}(x)$ 表示四个反三角函数，它们是通过选取相应的反三角多值函数的一个单值支得到的。

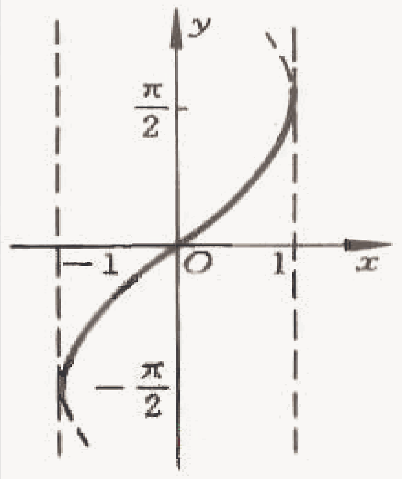
$\arcsin(x)$、$\arccos(x)$

- $\arcsin(x)$
  $\text{Arcsin}(x)$限制在闭区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上的值被称为反正弦函数的主值，并记作$\arcsin(x)$。$y = \arcsin(x)$就是定义在闭区间$[-1, 1]$上的函数，且$-\pi/2 \le \arcsin(x) \le \pi/2$。

- $\arccos(x)$
  $\text{Arccos}(x)$限制在闭区间$[0, \pi]$上的值被称为反余弦函数的主值，并记作$\arccos(x)$。$y = \arccos(x)$就是定义在闭区间$[-1, 1]$上的函数，且$0 \le \arccos(x) \le \pi$。

反三角函数

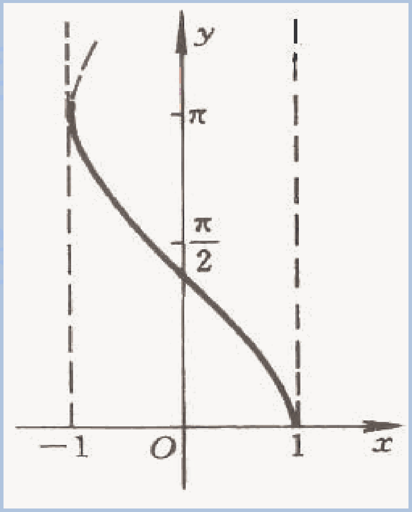
- 反正弦函数 $y = \arcsin x, \quad x \in [-1,1]$
- 单调性 严格上升
- 奇偶性 奇函数
- 有界性 值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$



反余弦函数

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$$

- 单调性 严格下降
- 奇偶性 无
- 有界性 值域为 $[0, \pi]$



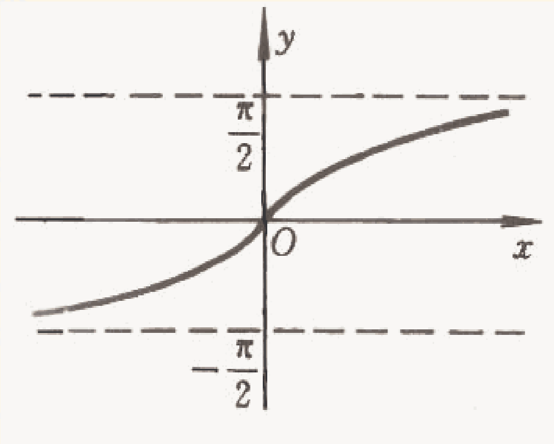
$\arctan(x)$ 、 $\mathrm{arccot}(x)$

- $\arctan(x)$
  $\mathrm{Arctan}(x)$限制在闭区间$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上的值被称为反正切函数的主值，并记作$\arctan(x)$。$y = \arctan(x)$就是定义在闭区间$(-\infty, +\infty)$上的函数，且$-\pi/2 \leq$arctan(x)$\leq \pi/2$。
- $\mathrm{arccot}(x)$
  $\mathrm{Arccot}(x)$限制在闭区间$[0, \pi]$上的值被称为反余切函数的主值，并记作$\mathrm{arccot}(x)$。$y = \mathrm{arccot}(x)$就是定义在闭区间$(-\infty, +\infty)$上的函数，且$0 \leq \mathrm{arccot}(x) \leq \pi$。

反正切函数

$$y = \arctan x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

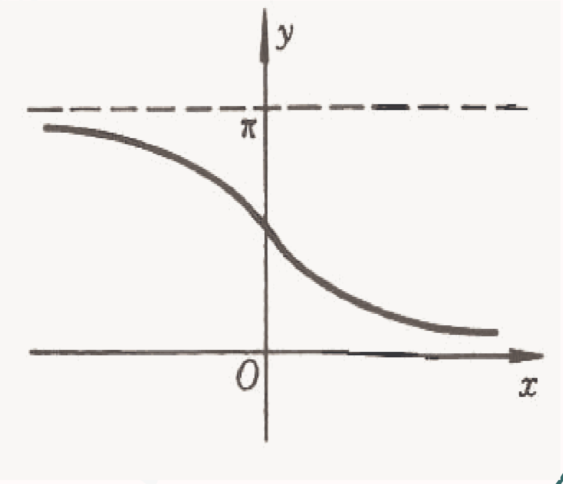
- 单调性 严格上升
- 奇偶性 奇函数
- 有界性 值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$



反余切函数

$$y = \operatorname{arc\,cot} x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

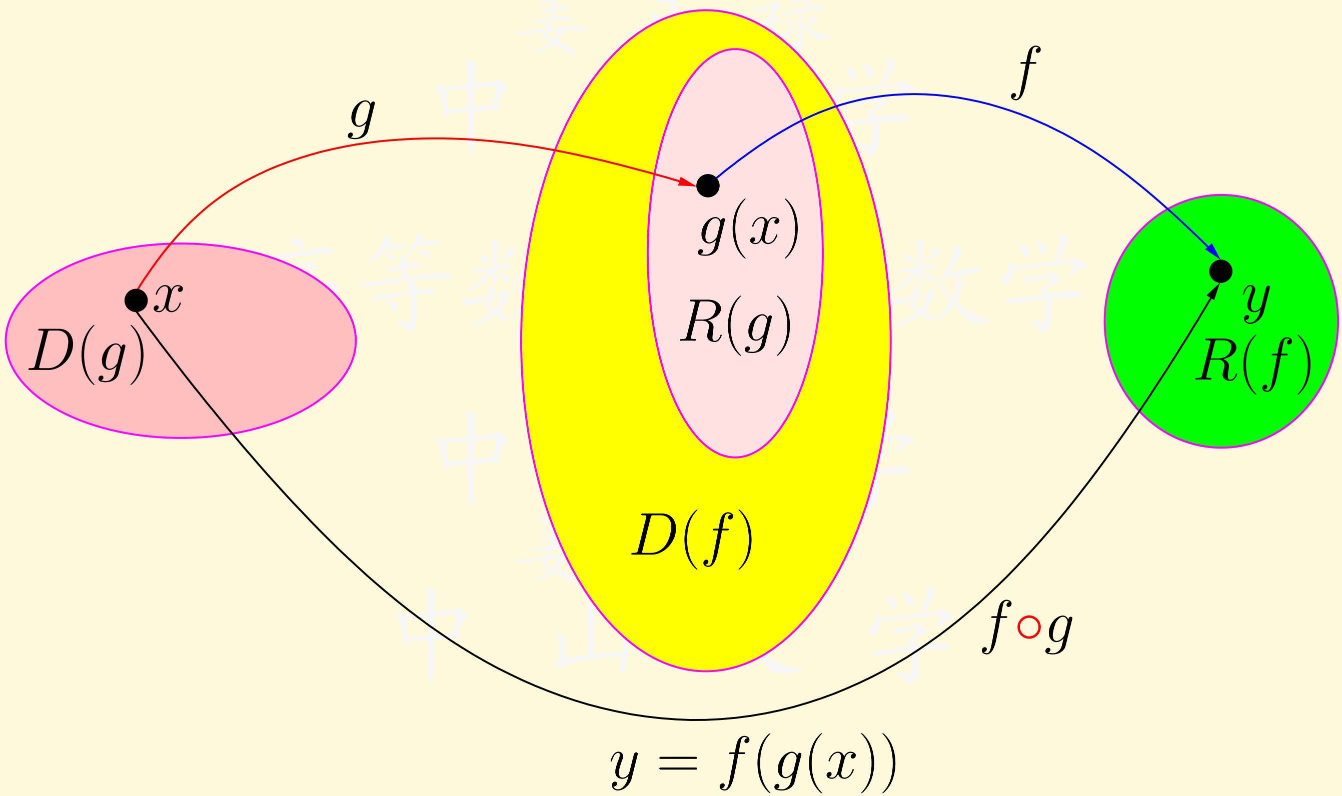
- 单调性 严格下降
- 奇偶性 无
- 有界性 值域为 $(0, \pi)$



七. 复合函数

设$D(f)$为函数$y = f(x)$的定义域，$R(g)$为函数$u = g(x)$的值域，如$R(g)\cap D(f) \neq \emptyset$，则由这两个函数$y = f(u)$和$u = g(x)$就可以确定一个新的函数$y = f(g(x))$。这种由已知函数“嵌套”而成的新的函数被称为复合函数，记为$f\circ g(x)$，即$f\circ g(x) \equiv f(g(x))$，其中符号$\circ$被称为函数的复合运算符。由两个或更多的已知函数在复合运算符的作用下推导出一个复合函数的过程被称为复合运算。

如$R(g) \subseteq D(f)$，则由两个函数$y = f(u)$和$u = g(x)$所确定的复合函数如下图所示。



例如

$$y=\sin(\ln(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sin(u) \\ u=\ln(x) \end{cases}$$

$$y=\arctan(x^2+1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\arctan(u) \\ u=x^2+1 \end{cases}$$

八. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数被称为初等函数。

小结

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!

1. 集合及其基本运算;
2. 函数，反函数，复合函数，初等函数;
3. 函数的基本特征.