第一章　牛顿力学的基本定律

万丈高楼从地起。整个力学大厦的地基将在此筑起，三百年的人类最高科学智慧结晶将飘来他的古朴与幽香。此时矢量言语将尽显英雄本色，微积分更是风光占尽。

【要点分析与总结】

1 质点运动的描述

（1）直线坐标系

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

（2）平面极坐标系

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$
$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

（3）自然坐标系

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{e}_t$$
$$\vec{a} = \dot{\upsilon}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

（4）柱坐标系

$$\vec{a} = \dot{\upsilon}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$
$$\vec{\upsilon} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

〈析〉　上述矢量顺序分别为： $\vec{i},\vec{j},\vec{k};\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_k;\vec{e}_t,\vec{e}_n,\vec{e}_b;\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z.$

矢量微分：

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\dot{\theta}\vec{e}_k\times\vec{e}_r=\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\dot{\theta}\vec{e}_k\times\vec{e}_\theta=-\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_k}{dt}=\dot{\theta}\vec{e}_k\times\vec{e}_k=0$$

（其它各矢量微分与此方法相同）

微分时一定要注意矢量顺序

2 牛顿定律

惯性定律的矢量表述

$$m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$$

（1） 直角坐标系中

$$\begin{cases}F_x=m\ddot{x}\\F_y=m\ddot{y}\\F_z=m\ddot{z}\end{cases}$$

（2） 极挫标系中

$$\begin{cases}F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\\F_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\\F_k=0\end{cases}$$

（3） 自然坐标系中

$$\begin{cases}F_\tau=m\dot{\upsilon}\\F_n=m\dfrac{\upsilon^2}{\rho}\\F_b=0\end{cases}$$

3 质点运动的基本定理

几个量的定义：

动量 $\vec{P}=m\vec{\upsilon}$

角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}=\vec{r}\times\vec{P}$

冲量 $\vec{I}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

冲量矩 $\vec{H}=\vec{I}_2-\vec{I}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt$

动能 $T=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

（1）动量定理 $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$

$\hat{e}_\ell$ 方向上动量守恒：$\frac{d\vec{P}}{dt}\hat{e}_\ell=\vec{F}\,\hat{e}_\ell=0$

（2）动量矩定理 $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$

（3）动能定理 $\vec{F}\,\vec{\upsilon}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}=\frac{dT}{dt}$

4 机戒能守恒定理

T+V=E

〈析〉势函数 V： $dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=-\vec{F}\,d\vec{r}$

$$\vec{F}=-(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})$$

稳定平衡下的势函数： $\left.\frac{dV_{(x)}}{dx}\right|_{x=x_0}=0$；$\left.\frac{dV^2{}_{(x)}}{dx}\right|_{x=x_0}>0$

此时势能处极小处 V_m

且能量满足 $\begin{cases}V_M<E<0\text{质点再平衡点附近振动}\\0<E\text{质点逃逸}-\infty\\V_m<E\text{质点逃逸}+\infty\end{cases}$

【解题演示】

1 细杆 OL 绕固定点 O 以匀角速率ω转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动，O 点与钢丝间的垂直距离为 d，如图所示。求

小环的速度$\vec{\upsilon}$和加速度$\vec{a}$。

解：依几何关系知： $x = d\tan\theta$

又因为：$\vec{\upsilon} = \dot{x}\vec{i} = \dfrac{d\omega}{\cos^2\theta}\vec{i} = \dfrac{d^2 + x^2}{d}\omega\vec{i}$

故：$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = 2x\dot{x}\dfrac{\omega}{d}i = \dfrac{2(d^2 + x^2)x}{d^2}\omega^2\vec{i}$

2 椭圆规尺 AB 的两端点分别沿相互垂直的直线 O x 与 Oy 滑动，已知 B 端以匀速 c 运动，如图所示。求椭圆规尺上 M 点的轨道方程、速度及加速度的大小 υ 与 α 。

解：依题知： $y_B = (b + d)\cos\theta$

且：$\dot{y}_B = -C = -(b + d)\dot{\theta}\sin\theta$

得：$\dot{\theta} = \dfrac{C}{(b + d)\sin\theta}$……*

又因 M 点位置： $x_M = b\sin\theta, y_M = d\cos\theta$

故有：$\vec{\upsilon}_M = \dot{x}_M\vec{i} + |\dot{y}_M\vec{j} = b\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} - d\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

代入（*）式得：$\vec{\upsilon}_M = \dfrac{bc\cot\theta}{b + d}\vec{i} - \dfrac{dc}{b + d}\vec{j}$

即：$\upsilon = \dfrac{c}{b + d}\sqrt{b^2\cot^2\theta + d^2}$

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{\upsilon}}_M = -\frac{bc\dot{\theta}}{(b + d)\sin^2\theta}\vec{i} = \frac{bc^2}{(b + d)^2\sin^2\theta}\vec{i}$$

1 一半径为 r 的圆盘以匀角速率ω沿一直线滚动，如图所示。求圆盘边上任意一点 M 的速度$\vec{\upsilon}$和加速度$\vec{a}$（以 O、M 点的连线与铅直线间的夹角 θ 表示）；并证明加速度矢量总是沿圆盘半径指向圆心。

解：设 O 点坐标为（$\omega Rt + x_0, R$）。则 M 点坐标为

（$\omega Rt + x_0 + R\sin\theta, R + R\cos\theta$）

故：$\vec{\upsilon}_M = \dot{x}_M\vec{i} + \dot{y}_M\vec{j} = (\omega R + R\omega\cos\theta)\vec{i} - R$

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{\upsilon}}_M = -R\omega^2\sin\theta\vec{i} - R\omega^2\cos\theta\vec{j} = -R\omega^2(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

2　一半径为 r 的圆盘以匀角深度ω在一半经为 R 的固定圆形槽内作无滑动地滚动，如图所示，求圆盘边上 M 点的深度υ和加速度α（用参量θ，Ψ表示）。

解：依题知：$\dot{\varphi} = -\dfrac{\dot{\theta}r}{R-r} = -\dfrac{\omega r}{R-r}$

且 O 点处：$\vec{e}_k = \cos(\theta-\varphi)\vec{e}_r - \sin(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta$

则：

$$\begin{aligned}\vec{r}_M &= \vec{r}_{O'O} + \vec{r}_{OM}\\ &= (R-r)\vec{e}_R + r\vec{e}_r\\ &= [(R-r)\cos(\theta-\varphi) + r]\vec{e}_r - (R-r)\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\upsilon} &= \dot{\vec{r}}_M\\ &= \dot{\vec{r}}_M(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_r + [(R-r)\cos(\theta-\varphi)+r]\dot{\theta}\vec{e}_\theta - (R-r)(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\cos(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta + (R-r)\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_r\\ &= -r\omega\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_r + r\omega[1-\cos(\theta-\varphi)]\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \dot{\vec{\upsilon}}\\ &= r\omega(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\cos(\theta-\varphi)\vec{e}_r - r\omega\dot{\theta}\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta - r\omega(\dot{\varphi}-\dot{\theta})\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta - r\omega\dot{\theta}[1-\cos(\theta-\varphi)]\vec{e}_r\\ &= r\omega\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\vec{e}_r - r\omega\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta - r\omega\dot{\theta}\vec{e}_r\\ &= \frac{r\omega^2}{R-r}\left\{\left[(r-R) - r\cos(\theta-\varphi)\right]\vec{e}_r + r\sin(\theta-\varphi)\vec{e}_\theta\right\}\end{aligned}$$

3　已知某质点的运动规律为：y=bt，$\theta = at$，a 和 b 都是非零常数。

（1）写处质点轨道的极坐标方程；（2）用极坐标表示出质点的速度$\vec{\upsilon}$和加速度$\vec{a}$。

解：$(1)\ y = r\sin\theta = bt = \dfrac{b\theta}{a}$

得：$\vec{r}=\frac{b}{a}\theta\csc\theta\vec{e}_r$

$$(2)\vec{\upsilon}=\dot{\vec{r}}=\frac{b}{a}\frac{a\sin\theta-a\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\vec{e}_r+\frac{b}{a}\frac{\theta}{\sin\theta}a\vec{e}_\theta$$

$$=\frac{b}{\sin\theta}\left[\left(1-\theta\cot\theta\right)\vec{e}_r+\theta\vec{e}_\theta\right]$$

4　已知一质点运动时，经向和横向的速度分量分别是λr 和μθ，这里μ和λ是常数。求出质点的加速度矢量$\vec{a}$.

解：由题知：$\vec{\upsilon}=\lambda r\vec{e}_r+\mu\theta\vec{e}_\theta$

且：$\dot{r}=\lambda r, r\dot{\theta}=\mu\theta$

故：$\vec{a}=\dot{\vec{\upsilon}}=\lambda\dot{r}\vec{e}_r+\lambda r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\mu\dot{\theta}\vec{e}_\theta-\mu\theta\dot{\theta}\vec{e}_r$

$$=\left(\lambda\dot{r}-\mu\theta\dot{\theta}\right)\vec{e}_r+(\lambda r+\mu)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$=(\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r})\vec{e}_r+\mu\theta(\lambda+\frac{\mu}{r})\vec{e}_\theta$$

5　质点作平面运动，其速率保持为常量，证明质点的速度矢量与加速度矢量正交。

证明：设速度为$\vec{\upsilon}=\upsilon\vec{e}_\tau$。

则：$\vec{a}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{e}_\tau+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_n$

由于$\vec{e}_\tau$与$\vec{e}_n$为正交矢量。即得证。

8 一质点沿心脏线$r=\kappa(1+\cos\theta)$以恒定速率 v 运动，求出质点的速度$\vec{\upsilon}$和加速度$\vec{a}$.

解：设$\vec{\upsilon}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta=\dot{\theta}\kappa\left(-\sin\theta\right)\vec{e}_r+\dot{\theta}\kappa\left(1+\cos\theta\right)r\vec{e}_\theta$

且有：$[\dot{\theta}\kappa\left(-\sin\theta\right)]^2+[\dot{\theta}\kappa\left(1+\cos\theta\right)r]^2=\upsilon^2$

解得：$\dot{\theta}=\frac{\upsilon}{2\cos\frac{\theta}{2}\kappa}$

得：$\dot{r}=\dot{\theta}\kappa\left(-\sin\theta\right)=-\upsilon\sin\dfrac{\theta}{2},r\dot{\theta}=\upsilon\cos\dfrac{\theta}{2}$

则：$\vec{\upsilon}=\upsilon(-\sin\dfrac{\theta}{2}\vec{e}_r+\cos\dfrac{\theta}{2}\vec{e}_\theta)$

$$\vec{a}=\dot{\vec{\upsilon}}=-\frac{1}{2}\dot{\theta}\upsilon\cos\frac{\theta}{2}\vec{e}_r-\dot{\theta}\upsilon\sin\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta-\frac{1}{2}\dot{\theta}\upsilon\sin\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta-\dot{\theta}\upsilon\cos\frac{\theta}{2}\vec{e}_r$$

$$=\frac{3\upsilon^2}{4\kappa}(-\vec{e}_r-\tan\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta)$$

9 已知质点按 $r=e^{\alpha t},\theta=\beta t$ 运动，分别求出质点加速度矢量的切向和法向分量，经向分量和横向分量。

解：（1）极坐标系下：

由 $r=e^{\alpha t},\theta=\beta t$ 得：$\dot{r}=\alpha e^{\alpha t},\dot{\theta}=\beta$

且设：$\vec{\upsilon}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

则：$\vec{\upsilon}=\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2}\vec{e}_\tau=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

得：$\vec{e}_\tau=\dfrac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2}}\vec{e}_r+\dfrac{r\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2}}\vec{e}_\theta$

$$\vec{e}_n=-\frac{r\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2}}\vec{e}_r+\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2}}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}=\dot{\vec{\upsilon}}=\ddot{r}\vec{e}_r+\dot{\theta}\dot{r}\vec{e}_\theta+(\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$=(\alpha^2-r\beta^2)e^{\alpha t}\vec{e}_r+2\alpha\beta e^{\alpha t}\vec{e}_\theta$$

则：径向与横向的分量分别为$(\alpha^2-r\beta^2)e^{\alpha t}$，$2\alpha\beta e^{\alpha t}$。

10 质点以恒定速率 c 沿一旋轮线运动，旋轮线方程为 $x=R(\theta+\sin\theta),y=-R(1+\cos\theta)$。证明质点在 y 方向做等加速运动。

解：依题意：$C^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=R^2(1+\cos\theta)^2\dot{\theta}^2+R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$

得：$\dot{\theta}=\dfrac{C}{2R\cos\dfrac{\theta}{2}}$

则：$a_y=\ddot{y}=R(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta)$

$$=\frac{C^2}{4R}\left(\frac{\cos\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{C^2}{4R}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{C^2}{4R}$$

11 一质点沿着抛物线 $y^2=2px$ 运动，如图所示，其切向加速度的量值是法向加速度值的$-2k$ 倍。若此质点从正焦弦的一端点 $(p/2,p)$ 以速率 u 出发，求质点到达正焦弦的另一端点 $(p/2,-p)$ 时的速率 υ。

解：建立自然坐标系有：$\vec{a}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{e}_\tau+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_n$

且：$\frac{d\upsilon}{dt}=-2k\frac{\upsilon^2}{\rho}=-2k\frac{\upsilon ds}{\rho dt}=-2k\frac{\upsilon ds}{\frac{ds}{d\theta}dt}=-2k\upsilon\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-2kd\theta$

积分得：$\upsilon=ue^{-2k\theta}$（代入 $\upsilon_0=u$）

又因为：$y^2=2px$ 在 $(p/2,p)$ 点处斜率：

$$k_1=\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=p/2}=\left.\frac{d\sqrt{2px}}{dx}\right|=\left.\sqrt{\frac{p}{2x}}\right|_{x=p/2}=1$$

在 $(p/2,-p)$ 点处斜率：

$$k_2=\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=p/2}=-\left.\frac{d\sqrt{2px}}{dx}\right|=-\left.\sqrt{\frac{p}{2x}}\right|_{x=p/2}=-1$$

故：$\theta=\left|\arctan k_2-\arctan k_1\right|=\frac{\pi}{2}$

即：$\upsilon = ue^{-k\pi}$

12 竖直上抛一小球，设空气阻力恒定。证明小球上升的时间比下落返回至原地点的时间短。

解：设空气阻力为f，且小球初速为υ，质量为没，则有：

上升时间：$t_1 = \dfrac{\upsilon}{g + f/m}$

上升高度：$h = \dfrac{\upsilon^2}{2(g + f/m)}$

下落时间：$t_2 = \sqrt{2h/a_2} = \upsilon_0 \dfrac{1}{\sqrt{g^2 - f^2/m^2}}$

得：$\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{\sqrt{g^2 - f^2/m^2}}{(g + f/m)} = \sqrt{\dfrac{g - f/m}{g + f/m}} < 1$

即得证。

13 质量为m的质点自离地面h高度处下落。若空气阻力与质点速度的平方成正比，比例常数为C，试讨论此质点下落过程中的运动状况。

解：设加速度为a，速率为υ，则：$ma = mg - C\upsilon^2 = m\dot{\upsilon}$

得：$\dfrac{d\upsilon}{g - C\upsilon^2/m} = dt$积分并代入$t = 0$时$\upsilon = 0$有：

$$\upsilon = \sqrt{\frac{mg}{C}}\left(1 - \frac{2}{1 + e^{2t\sqrt{gC/m}}}\right)$$

$$a = \dot{\upsilon} = \frac{4g}{(1 + e^{2t\sqrt{gC/m}})^2} > 0$$

$$\dot{a} = 8ge^{2t\sqrt{gC/m}}\sqrt{gC/m}(1 + e^{2t\sqrt{gC/m}})^{-3}(1 - e^{2t\sqrt{gC/m}}) < 0$$

知：质点一直在做向下的变加速运动，且加速度越来越小。

14 将一质量为m的质点以初速度υ_0与水平线成α角抛出，此质点受

到的空气阻力是其速度的mk倍，这里k是常数。试求当质点的速度与水平线之间的夹角又为α角度时所需时间。

解：依牛顿第二运动定律有：$m\dot{\upsilon}_x=-mk\upsilon_x, m\dot{\upsilon}_y=-mg-mk\upsilon_y$

积分并代入初始条件：$t=0$时：$\upsilon_{0x}=\upsilon_0\sin\theta,\upsilon_{0y}=\upsilon_0\cos\theta$

解得：$\upsilon_x=\upsilon_0\cos\theta e^{-kt},\upsilon_y=(\upsilon_0\sin\theta+\frac{g}{k})e^{-kt}-\frac{g}{k}$

当再次夹角为α时：$\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=-\tan\alpha$

可解出：$t=\frac{1}{k}\ln(1+\frac{2\upsilon_0 k\sin\theta}{g})$

15 一质量为m的质点用一长度为l的不可伸长的轻绳悬挂于一小环上，小环穿于一固定的水平钢丝上，其质量为$3m/2$。开始时，小环静止质点下垂，处于平衡态。今若沿钢丝的水平方向给质点以大小为$\sqrt{2gl}$的初速度，证明若轻绳与铅垂线之间的夹角是θ时，小环在钢丝上仍不滑动，则钢丝与小环间的摩擦系数至少是$1/\sqrt{3}$，此时绳中的张力为$F_T=3mg\cos\theta$。

解：依 $\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2-mgl(1-\cos\theta)$

得：$m\upsilon^2/r=2mg\cos\theta$

则：$F_T=m\upsilon^2/r+mg\cos\theta=3mg\cos\theta$

$$\mu=\frac{F_T}{F_{T\perp}+\frac{3}{2}mg}=\frac{3mg\cos\theta\sin\theta}{3mg\cos^2\theta+\frac{3}{2}mg}=\frac{\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta+2}=\frac{2\tan\theta}{3+\tan^2\theta}$$

又因为：$\frac{d\mu}{d\tan\theta}=\frac{2(3+\tan^2\theta-2\tan^2\theta)}{(3+\tan^2\theta)^2}=0$

得：$\tan\theta=\sqrt{3}$

故：$\tan\theta=\sqrt{3}$

即得证。

16 滑轮上绕有轻绳，绳端与一弹簧的一个端点联结，弹簧的另一端挂一质量为m的质点，如图所示。当滑轮以匀角速率转动时，质点以匀速率υ_0下降。若滑轮突然停止转动，试求弹簧的最大伸长及弹簧中的最大张力。已知弹簧作用力为W时的静止伸长λ_0。

解：（注：此题中$W=mg$）设最大伸长为λ_m有：$k=\dfrac{mg}{\lambda_0}=\dfrac{W}{\lambda_0}$

依能量守恒：$\dfrac{1}{2}k\lambda_m{}^2-\dfrac{1}{2}k\lambda_0{}^2=\dfrac{1}{2}m\upsilon_0{}^2+mg\left(\lambda_m-\lambda_0\right)$

解得：$\lambda_m=\lambda_0+\upsilon_0\sqrt{\lambda_0/g}$

则：$F_{Tm}=k\lambda_m=\dfrac{W}{\lambda_0}\left(1+\upsilon_0\sqrt{1/g\lambda_0}\right)$

17 两个相同的轻质弹簧，劲度系数为k，自然长度是l_0，在它们中间竖直地串接一质量为m的质点。弹簧的另外两端点分别固定于A点和B点，如图所示，A、B间的高度差是$3l_0/2$。设开始时质点静止于AB的中点，求质点的运动规律。

17解：质点运动时势能

$$V=-mgx+\frac{1}{2}k\left(x-\frac{l_0}{4}\right)^2+\frac{1}{2}k\left(-\frac{l_0}{4}-x\right)^2=-mgx+kx^2+\frac{kl^2}{16}$$

在平衡时：$\dfrac{dV}{dx}=-mg+2kx=0$

得：$x_0=\dfrac{mg}{2k}$

且运动时受力满足：$F=-\dfrac{dV}{dx}=mg-2kx=m\ddot{x}$

代入初始条件：$t=0, x=0, A=x_0$

可解得：$x=\frac{mg}{2k}\left(1-\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{mg}}\right)\right)$

18 两个质量都是m的质点A和质点B用一自然长度为l_0的轻质弹簧相连，置于一光滑水平桌面上，如图所示。弹簧的劲度系数为k。两质点处于静止状态，弹簧呈自然长度；而后，质点B沿AB方向受到一大小为kl_0的恒力作用。分别求处质点A和质点B的运动规律。

18解：依受力分析知 $\begin{cases}F_A=m\ddot{x}_A=k\left(x_B-x_A-l_0\right)\cdots\cdots *_1\\ F_B=m\ddot{x}_B=k\left(2l_0+x_A-x_B\right)\cdots\cdots *_2\end{cases}$

$*_1+*_2$得：$\ddot{x}_A+\ddot{x}_B=\frac{k}{m}l_0$

积分得：$x_A+x_B=\frac{kl_0}{2m}t^2+l_0$

代入$*_1$得：$\ddot{x}_A=\frac{k}{m}(\frac{kl_0}{2m}t^2-2x_A)$

积分得：$x_A=\frac{l_0}{4}(\frac{\omega^2t^2}{2}+\cos\omega t-1)$

同理：$\ddot{x}_B=\frac{k}{m}(\frac{kl_0}{2m}t^2+3l_0-2x_B)$

积分得：$x_B=\frac{l_0}{4}(\frac{\omega^2t^2}{2}-\cos\omega t+5)$

式中$\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}}$。

另解：先将AB及弹簧看成一系统，其质心做一受恒力kl的作用，再将A与B 理解成绕质心做周期性振动，可得A的运动规律为质心运动与A振动的合运动，B亦然。计算亦很简单！

19 一质点从一光滑圆柱表面最高处，自静止下滑，如图所示。问质点滑至何处将脱离圆柱表面？

解：将脱离时滑过相应角度为θ，此时满足：$\begin{cases} mgr\left(1-\cos\theta\right)=\dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ mgr\dot{\theta}^2=mgr\cos\theta \end{cases}$

可解得：$\theta=\arccos\dfrac{2}{3}$

20 一钢丝弯成尖端朝上的摆线：$x=a(\varphi-\sin\varphi),z=a(1+\cos\varphi)$，上面穿有一质量为$m$的小环。今若小环在钢丝的最低处获得大小为$\upsilon_0$的初速度，开始沿摆线滑动。求出当小环的速度与水平线成α角度时，小环的速率υ。已知小环与钢丝的摩擦系数为μ。

解：小环运动时，依受力分析知：其

对钢丝的正压力为 $N=mg\cos\alpha+m\upsilon^2/\rho$

又因为：$\tan\alpha=\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}=\dfrac{dz/d\varphi}{dx/d\varphi}=-\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=-\cot\dfrac{\varphi}{2}$

得：$\varphi=2\alpha+\pi$

$$dl=d\sqrt{x^2+z^2}=2a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=4a\cos\alpha\, d\alpha$$

代入：$\varphi=2\alpha+\pi,\rho=\dfrac{dl}{d\alpha}=4a\sin\dfrac{\varphi}{2}=4a\cos\alpha$

得：$N=mg\cos\alpha+m\upsilon^2/4a\cos\alpha$

则损失能量：$dQ=\mu N dl=\mu(mg\cos\alpha+T/2a\cos\alpha)4a\cos\alpha\, d\alpha$

再依能量守恒：$d(T+Q+V)/d\alpha=0$

得：$\dot{T}+2\mu T+2mga(\mu\cos2\alpha+\sin2\alpha+\mu)=0$

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon^2=e^{-2\int\mu d\alpha}[C-2mga\int\left(\mu\cos2\alpha+\sin2\alpha+\mu\right)e^{2\int\mu d\alpha}d\alpha]\cdots\cdots*_1$$

（其中$V=mgz=mga(1+\cos\varphi)$）

现进行积分：$e^{-2\int\mu d\alpha}=e^{-2\mu\alpha}$

$$\int \cos 2\alpha e^{2\mu\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\mu}(e^{2\mu\alpha}\cos 2\alpha + 2\int \sin 2\alpha e^{2\mu\alpha} d\alpha)$$

$$\int \sin 2\alpha e^{2\mu\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\mu}(e^{2\mu\alpha}\sin 2\alpha + 2\int \cos 2\alpha e^{2\mu\alpha} d\alpha)$$

解出：$$\begin{cases} \int \cos 2\alpha e^{2\mu\alpha} d\alpha = \dfrac{\mu}{2\left(\mu^2+1\right)}\cos 2\alpha\, e^{2\mu\alpha} \\ \int \sin 2\alpha e^{2\mu\alpha} d\alpha = \dfrac{\mu\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{2\left(\mu^2+1\right)} e^{2\mu\alpha} \end{cases}$$

代入$*_1$得：

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = e^{-2\int \mu d\alpha}\{C - \frac{mga}{\mu^2+1}e^{2\mu\alpha}[\mu\sin 2\alpha + (\mu^2-1)\cos 2\alpha + (\mu^2+1)]\}\cdots\cdots *_2$$

代入$t=0, \alpha=0, T_0=\frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2$得： $C = \frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2 + \frac{2mga\mu^2}{\mu^2+1}$

再将C代入$*_2$得：

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = (\frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2 + \frac{2mga\mu^2}{\mu^2+1})e^{-2\mu\alpha} - \frac{mga}{\mu^2+1}[\mu\sin 2\alpha + (\mu^2-1)\cos 2\alpha + (\mu^2+1)]$$

故：$$\upsilon = \{(\upsilon_0{}^2 + \frac{4ga\mu^2}{\mu^2+1})e^{-2\mu\alpha} - \frac{2ga}{\mu^2+1}[\mu\sin 2\alpha + (\mu^2-1)\cos 2\alpha + (\mu^2+1)]\}^{1/2}$$

21 如图所示，用细线将一质量为m'的圆环悬挂起来，环上套有两个质量都是m的小环，它们可以在大环上无摩擦地滑动。若两小环同时从大环顶部由静止向两边滑动，证明如果$m > 3m'/2$，大环将升起；此时角θ是多少？

解：小环因重力对m'的压力$N = mg\cos\theta$。而小环运动所需向心力必由m'对m的弹力F与重力提供，满足：$N + F = \frac{m\upsilon^2}{r}$（法向）

又依能量守恒知：$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mg(1-\cos\theta)$

且依两环的对称性知，大环受合力向上，且大小为：

$$F_{合}=2(\frac{m\upsilon^2}{r}-N)\cos\theta=2[2mg(1-\cos\theta)-mg\cos\theta]\cos\theta$$

当大环升起须满足：$F_{合}>m'g$

故得方程：$2mg(2-3\cos\theta)\cos\theta>m'g$

$$\frac{m'}{2m}<-3\cos^2\theta+2\cos\theta=-3(\cos\theta-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}\leq\frac{1}{3}$$

故：$m>3m'/2$

当满足$m>3m'/2$时，升起时角度满足$3\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{m'}{2m}<0$

解出：$\frac{1}{3}(1-\sqrt{1-\frac{3m'}{2m}})<\cos\theta<\frac{1}{3}(1+\sqrt{1-\frac{3m'}{2m}})$

则刚升起时：$\theta=\arccos[\frac{1}{3}(1+\sqrt{1-\frac{3m'}{2m}})]$

第三章 非惯性参考系

不识庐山真面目，只缘身在此山中。地球的多姿多彩，宇宙的繁荣，也许在这里可以略见一斑。春光无限，请君且放千里目，别忘了矢量语言在此将大放益彩。

【要点分析与总结】

1 相对运动

$$\vec{r}=\vec{r}_t+\vec{r}'$$

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_t}{dt}+\frac{d\vec{r}'}{dt}=\frac{d\vec{r}_t}{dt}+\frac{d\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$=\vec{\upsilon}_t+\vec{\upsilon}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_t}{dt}+\frac{d(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt}$$

$$=\frac{d^2\vec{r}_t^2}{dt^2}+\frac{d^{2*}\vec{r}'}{dt^2}+\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$=\vec{a}_t+\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$=\vec{a}_t+\vec{a}'+\vec{a}_c$$

〈析〉仅此三式便可以使“第心说”与“日心说”归于一家。

（1）平动非惯性系（$\vec{\omega}=0$）

$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_t$ **即：** $m\vec{a}'=\vec{F}+(-m\vec{a}_t)$

（2）旋转非惯性系（$\vec{a}_t=\vec{\upsilon}_t=0$）

$$\vec{a}=\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'$$

2 地球自转的效应（以地心为参考点）

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}-m\vec{g}-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$

写成分量形式为：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases}$$

〈析〉坐标系选取物质在地面上一定点 O 为坐标原点，x 轴指向南方，y 轴指向东方，铅直方向为 z 轴方向。 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ 为旋转非惯性系 $\vec{F} - m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}} + m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ 在 $\dot{\omega}$ ω, r R 条件下忽略 $m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ 与 $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ 所得。正因如此，地球上的物体运动均受着地球自转而带来的科氏力 $-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ 的作用，也正是它导致了气旋，反气旋，热带风暴，信风，河岸右侧冲刷严重，自由落体，傅科摆等多姿多彩的自然现象。

〈注〉自由落体偏东的推导时，取 $\vec{F}$=0，且须应用级数展开，对小量 ω 作近似

$$\cos 2\omega t \approx 1 - \frac{1}{2}(2\omega t)^2, \sin 2\omega t \approx 2\omega t$$

【解题演示】

1　一船蓬高 4 米，在雨中航行时，它的雨篷遮着蓬的垂直投影后 2m 的甲板；但当停航时，甲板上干湿两部分的分界线却在蓬前 3m 处，

如果雨点的速率是 8 米每秒，求船航行时的速率？

解：取湖面为惯性坐标系，如右图所示建立坐标系

依几何关系，设雨点相对湖面速度为$\vec{\upsilon}_t=\frac{32}{5}\vec{j}+\frac{24}{5}\vec{i}(m/s)$

船相对雨点的速度为$\vec{\upsilon}'=-\frac{32}{5}\vec{j}+\frac{16}{5}\vec{i}(m/s)$

则：船相对湖面的航行速度$\vec{u}=\vec{\upsilon}_t+\vec{\upsilon}'=8\vec{i}\ (m/s)$

则: u=8 m/s

2. 河的宽度为d，水的流速与离开河岩的距离成正比。岩边水的流速为 0，河中心处水的流速为c。河中一小船内的人，以相对于水流恒定的速率u，垂直于水流向岸边划去。求小船的舫行轨道和抵达对岩的地点。

解: 如右图所示，建立 xoy 惯性系，且依题意可知人的位置（x, y）满足：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{cases}2y/d\,c & (y\le\frac{d}{2})\cdots\cdots *_1\\ 2(1-y/d)c & (y>\frac{d}{2})\cdots\cdots *_2\end{cases}\\ \dot{y}=\dot{y}'=u & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots *_3\end{cases}$$

由$*_3$得：y=ut 分别代入$*_1$，$*_2$并联立

得: $$\begin{cases}x=\dfrac{c}{ud}y^2 & (y\le\dfrac{d}{2})\\ x=\dfrac{2c}{u}y-\dfrac{c}{ud}y^2-\dfrac{cd}{2u} & (y\ge\dfrac{d}{2})\end{cases}$$

到达对岸时$y=d$, 代入得: $x=\frac{cd}{2u}$

3. 一圆盘以匀角速度$\vec{\omega}$绕过圆心并与圆盘面垂直的轴转动。一质

点 M 沿圆盘上的弦，以恒定的相对速度 $\vec{u}$ 运动，如图所示。已知该弦离盘心的距离为 b，求在以地面为参考系时，质点 M 的速度和加速度（表示成质点 M 离弦中点的距离 x 的函数）.

解:设 M 的速度,加速度分别为 $\vec{\upsilon}$ 和 $\vec{a}$,依题意知:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'+\vec{\upsilon}_t$$

$$=u\vec{i}+\omega\vec{k}\times(x\vec{i}+b\vec{j})+0$$

$$=(u-b\omega)\vec{i}+\omega x\vec{i}$$

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_e+\vec{a}_c$$

$$=0+0+0+\omega\vec{k}\times[\omega\vec{k}\times(x\vec{i}+b\vec{j})]+2\omega\vec{k}\times u\vec{i}$$

$$=-\omega^2x\vec{i}-\omega^2b\vec{j}+2\omega u\vec{j}$$

$$=-\omega^2x\vec{i}-\omega^2b+(2\omega u-\omega^2b)\vec{j}$$

4 一飞机在赤道上空以速率 $1000\,{}^{km}/_{h}$ 水平飞行。考虑到地球的自转效应，分别在下列情形下求出飞机相对于惯性坐标系（不随地球转动的坐标系）的速率：(1) 向北飞行；(2) 向西飞行；(3) 向东飞行。已知地球半径为 6370km.

解:以飞机为坐标原点,以向东为 x 方向,向南为 y 方向,竖直向上为 z 方向,相对于地心(设为惯性系)的速度为:

$$\upsilon_t=\omega R\vec{i}=7.295\times10^{-5}\times6.4\times10^6\,{}^{m}/_{s}\,\vec{i}=466.7\,{}^{m}/_{s}\,\vec{i}$$

则:三种情况相对于地心的速度分别为:

(1) $\vec{\upsilon}_1=\vec{\upsilon}_t+\vec{\upsilon}_1'=466.7\,{}^{m}/_{s}\,\vec{i}-1000\,{}^{km}/_{h}\,\vec{j}$ 则: $\upsilon_1=\sqrt{\upsilon_t^{\,2}+\upsilon_1'^2}=543\,{}^{m}/_{s}$

(2) $\vec{\upsilon}_2=\vec{\upsilon}_t+\vec{\upsilon}_2'=466.7\,{}^{m}/_{s}\,\vec{i}-1000\,{}^{km}/_{h}\,\vec{i}=189\,{}^{m}/_{s}$ 则: $\upsilon_2=189\,{}^{m}/_{s}$

(3) $\vec{\upsilon}_3=\vec{\upsilon}_t+\vec{\upsilon}_3'=466.7\,{}^{m}/_{s}\,\vec{i}+1000\,{}^{km}/_{h}\,\vec{i}=744\,{}^{m}/_{s}$ 则: $\upsilon_3=744\,{}^{m}/_{s}$

5 一楔子，顶角为 α，以匀加速度 $\vec{a}_0$ 沿水平方向加速度运动。质量

为m的质点沿楔子的光滑斜面滑下，如图所示。求质点相对于楔子的加速度$\vec{a}'$及质点对楔子的压力$\vec{F}$.

解:依$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'$ 得:

$$\vec{a}'=\vec{a}-\vec{a}_0=g\sin\alpha\vec{i}+a_0\cos\alpha\vec{j}-(a_0\cos\alpha\vec{j}+a_0\sin\alpha\vec{i})=(g\sin\alpha-a_0\cos\alpha)\vec{i}$$

又因为在平动非惯性中:$m\vec{a}'=\vec{F}-m\vec{a}_t$. 得:$\vec{F}=m(\vec{a}_0+\vec{a}')-m\vec{g}$

$$\vec{F}=m(g\sin\alpha\vec{i}+a_0\cos\alpha\vec{j})-m(-g\cos\alpha\vec{j}+g\sin\alpha\vec{i})=m(g\cos\alpha+a_0\sin\alpha)\vec{j}$$

则楔子对斜面的压力 $\vec{F}'=-\vec{F}=-m(g\cos\alpha+a_0\sin\alpha)\vec{j}$

6 一缆车，以大小为a_0,与地平线成α角的匀加速度上升。缆车中一物体自离缆车地板高度h处自由下落。求此物体落至地板处的位置。

解:以缆车为坐标原点建立坐标系,如右图则,物体满足：

$$\vec{a}_t=\vec{a}_0=-a_0\sin\alpha\vec{j}+a_0\cos\alpha\vec{i}\quad,\ \vec{a}=g\vec{j}$$

则：$\vec{a}'=\vec{a}-\vec{a}_t=(g+a_0\sin\alpha)\vec{j}-a_0\cos\alpha\vec{i}$

知：$a_i'=-a_0\cos\alpha, a_j'=g+a_0\sin\alpha$

又因为：$t=\sqrt{\dfrac{2h}{a_j'}}$

则：$S_i=\dfrac{1}{2}a_i't^2=\dfrac{a_i'}{a_j'}h=-\dfrac{ha_0\cos\alpha}{(g+a_0\sin\alpha)}$

即:向后方偏离$\dfrac{ha_0\cos\alpha}{(g+a_0\sin\alpha)}$

7 一单摆摆长为l，悬挂点O在水平线上作简谐振动：$x=a\sin pt$。这里x是悬挂点离开水平线上的固定点0的距离，如图所示。开始时摆锤沿铅直下垂，相对于O的速度为零。证明单摆此后的微小振动规律为

$$\theta=\frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}(\sin pt-\frac{p}{k}\sin kt),\text{式中}k^2=g/l$$

解:以摆锤为原点建立坐标系$e_n c e_\tau$,如右图,则：C 相对于O'点运动状况：

$\vec{a}'_\tau=\ddot{X}_t\vec{e}_\tau-\vec{g}\vec{e}_\tau=ap^2\sin pt\cos\theta\vec{e}_\tau-g\sin\theta\vec{e}_\tau=l\ddot{\theta}\vec{e}_\tau$ （利用：$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_t$）

再利用微振动$\cos\theta \quad 1,\sin\theta \quad \theta$，并令$k^2=\frac{g}{l}$有：

$$\ddot{\theta}=-k^2\theta+\frac{ap^2}{l}\sin pt$$

可解得: $\theta=A\sin(kt+\varphi_0)+\frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}\sin pt$

并代入初始条件$t=0,\theta=\dot{\theta}=0$

得：$\varphi_0=0$，$A=-\frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}$

故:

积分并代入,得: $\theta=\frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}(\sin pt-\frac{p}{k}\sin kt)$

8 一竖直放置的钢丝圆圈，半径为r，其上套有一质量为m的光滑小环。今若钢丝圈以匀加速度$\vec{a}$竖直向上运动，求小环相对于钢丝圈的速率u和钢丝圈对小环的作用力大小F_N'。已知初始时刻钢丝圈圆心与小环的连线跟铅直线之间的夹角$\varphi=\varphi_0$，小环的相对速率$u=u_0$.

解:设与沿直线向方向的夹角为φ。如右图所示，以小环质心为参考原点建立坐标系$e_n o e_\tau$，则在$\vec{e}_\tau$方向上：$a_\tau=a_{\tau t}+a_{\tau'}$

即 $-g\sin\varphi=a\sin\varphi+a_{\tau'}$

得 $-(g+a)\sin\varphi = a_{\tau'} = \frac{du}{dt} = \dot{\varphi}\frac{du}{d\varphi} = \frac{u}{rd}\frac{du}{d\varphi}$

积分得：$u = \sqrt{{u_0}^2 + 2r(g+a)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$

在$\vec{e}_n$方向保持力平衡,则支持力

$$F' = \frac{mu^2}{r} + m(\vec{g}\ \vec{e}_n - \vec{a}\ \vec{e}_n)$$

$$= m[\frac{{u_0}^2}{r} + 2(g+a)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)] + m(g+a)\cos\varphi$$

$$= m[(g+a)(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) + \frac{{u_0}^2}{r}]$$

9 一平放于光滑水平桌面上的圆盘，以恒定角速度$\vec{\omega}$绕固定的圆盘中心转动。有一质量为m的人沿圆盘上确定的半径以恒定的相对速率u向圆盘的边缘走动。试分别利用（1）地面惯性系；（2）圆盘非惯性系，讨论圆盘对人的作用力

解：（1）以地面惯性参考系讨论,设人走的半径为$r\vec{e}_n$，切向为$\vec{e}_\tau$，则有：

$$\vec{F} = mg\vec{k} + m\omega^2 r(-\vec{e}_n) = mg\vec{k} - m\omega^2 ut\vec{e}_n$$

（2）以圆盘非惯性讨论： $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}' = \frac{\vec{F} - m\vec{g}}{m}$

则：$\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 0 = m\vec{g} - m\omega^2 ut\vec{e}_n$

10 一半径为r竖直放置的光滑圆环，绕通过其圆心的铅直轴以恒定的角速度$\vec{\omega}$转动。在此圆环上套有一质量为m的小环，自$\theta = \pi/4$处相对于圆环无初带地沿环下滑。问小环的位置θ为何值时，它的滑动将开始反向？这是θ是圆环的圆心与小环的连线跟转轴之间的夹角。

解:同（8）题：$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}'$　　在$\vec{e}_\tau$方向上有：

$g\sin\theta=-\omega r\cos\theta\sin\theta+a'$

得：$\vec{a}'=\dfrac{du}{dt}=\dfrac{udu}{rd\varphi}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2u}{d\varphi}=-(g+\omega r\cos\theta)\sin\theta$

积分并代入$\varphi=\dfrac{\pi}{4},u=0$　得：

$\dfrac{1}{2}u^2=g(\cos\theta-\dfrac{\pi}{2})+\dfrac{\omega r}{2}(\cos^2\theta-\dfrac{1}{2})$

当开始反向时,$u=0$，　代入上式解得：

$$\theta=\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2g}{r\omega^2})$$

11 一内壁光滑的管子，在水平面内绕通过其端点 0 的铅直轴，以恒定的角速度$\vec{\omega}$转动。管内有一质量为m的质点，用一自然长度为l，劲度系数为k的弹簧和管子的端点 0 相连，设初始时质点到 0 的距离为$x=l$且$\dot{x}=0$。求质点在管中的运动方程及它对管壁的压力$\vec{F}_N$。

解：以 O 为原点,如右图建立直角坐标系,则有：

$$\vec{a}=\vec{a}_c+\vec{a}_e+\vec{a}'=\ddot{x}\vec{i}+\omega\vec{k}\times(\omega\vec{k}\times x\vec{i})+2\omega\vec{k}\times\dot{x}\vec{i}$$

得：$\vec{a}=(\ddot{x}-\omega^2x)\vec{i}+2\omega\dot{x}\vec{j}\cdots\cdots *_1$

又因为：$\vec{a}=\dfrac{(F_{Ny}\vec{j}+F_{Nz}\vec{k}-mg\vec{k})}{m}-\dfrac{k(x-l)}{m}\vec{i}\cdots\cdots *_2$

故：在x方向有：$\ddot{x}=-(\Omega^2-\omega^2)x+\Omega^2 l$　　（其中：$\Omega^2=\dfrac{k}{m}$）

解方程并代入$t=0,x=l,\dot{x}=0$得：

$$x=\frac{l\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\cos\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t)$$

再由$*_1$，$*_2$式得：$F_{Ny}=2m\omega\dot{x}=2ml\dfrac{\omega^3}{\sqrt{\Omega^2-\omega^2}}\sin\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t$

$$F_{Nz}=mg$$

故：$F_N=2ml\dfrac{\omega^3}{\sqrt{\Omega^2-\omega^2}}\sin\sqrt{\Omega^2-\omega^2}\vec{t}\vec{j}+mg\vec{k}$

12 质量为m的小环，套在半径为r的光滑圆圈上，若圆圈在水平面内以匀角速度ω绕其圆周上的一点转动。试分别写出小环沿圆圈切线方向和法线方向的运动微分方程（以小环相对于圆圈绕圆心转过的角度θ为参量写出），设圆圈对小环的作用力大小以F_N表示，并可略去小环重力。

解：如右图所示建立坐标系,则：$\vec{r}'=r(1+\cos\theta)\vec{i}+r\sin\theta\vec{j}$

$$\vec{\upsilon}'=-r\sin\theta\dot{\theta}\vec{i}+r\cos\theta\dot{\theta}\vec{j}$$

$$\vec{a}'=-r(\cos\theta\dot{\theta}^2+\sin\theta\ddot{\theta})\vec{i}+r(\cos\theta\ddot{\theta}-\sin\theta\dot{\theta}^2)\vec{j}$$

$$\vec{a}_e=\vec{a}_t+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=0+0-\omega^2r(1+\cos\theta)\vec{i}-\omega^2r\sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'=-2\omega r\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}-2\omega r\dot{\theta}\cos\theta\vec{i}$$

则：$\vec{a}=\vec{a}_c+\vec{a}_e+\vec{a}'$

$$=[-r(\cos\theta\dot{\theta}^2+\sin\theta\ddot{\theta})-\omega^2r(1+\cos\theta)-2\omega r\dot{\theta}\cos\theta]\vec{i}$$

$$+[r(\cos\theta\ddot{\theta}-\sin\theta\dot{\theta}^2)-\omega^2r\sin\theta-2\omega r\dot{\theta}\sin\theta]\vec{j}$$

$$=a_\tau\vec{e}_\tau+a_n\vec{e}_n$$

又因为：$\vec{a}=-\dfrac{F_N}{m}\vec{e}_n+0\vec{e}_\tau,\vec{i}=-\sin\theta\vec{e}_\tau+\cos\theta\vec{e}_n$， $\vec{j}=\cos\theta\vec{e}_\tau+\sin\theta\vec{e}_n$

在$\vec{e}_\tau$方向投影：$a_\tau=r\ddot{\theta}+\omega^2r\sin\theta=0$

得切线方向：$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$

在$\vec{e}_n$方向投影：$a_n=-r\dot{\theta}^2-\omega^2r(1+\cos\theta)-2\omega r\dot{\theta}=-\dfrac{F_N}{m}$

得在法线方向：$mr\dot{\theta}^2=F_N-m\omega^2r(1+\cos\theta)-2mr\omega\dot{\theta}$

13 一质量为m的质点，位于光滑的水平平台上，此平台以匀角速度$\vec{\omega}$绕通过平台上一定点 0 的铅直轴转动。若质点受到 0 点的

吸引力$\vec{F}=-m\omega^2\vec{r}$作用，这里$\vec{r}$是质点相对于 0 点的径矢。试证明：质点在任何起始条件下，将绕 0 点以角速度2ω作圆周轨道运动。

证明:（注：此题与 12 题过程与条件基本相同）

如右图建立坐标系：

$$\vec{r}'=r\cos\theta\vec{i}+r\sin\theta\vec{j}$$
$$\vec{\upsilon}'=\dot{\vec{r}}'=-r\sin\theta\dot{\theta}\vec{i}+r\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}$$
$$\vec{a}'=\ddot{\vec{r}}'=-r(\cos\theta\dot{\theta}^2+\sin\theta\ddot{\theta})\vec{i}+r(\cos\theta\ddot{\theta}-\sin\theta\dot{\theta}^2)\vec{j}$$
$$\vec{a}_e=\vec{a}_t+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=0+0-\omega^2r(1+\cos\theta)\vec{i}-\omega^2r\sin\theta\vec{j}$$
$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'=-2\omega r\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}-2\omega r\dot{\theta}\cos\theta\vec{i}$$

则：$\vec{a}=\vec{a}_c+\vec{a}_e+\vec{a}'$

$$=[-r(\cos\theta\dot{\theta}^2+\sin\theta\ddot{\theta})-\omega^2r(1+\cos\theta)-2\omega r\dot{\theta}\cos\theta]\vec{i}$$
$$+[r(\cos\theta\ddot{\theta}-\sin\theta\dot{\theta}^2)-\omega^2r\sin\theta-2\omega r\dot{\theta}\sin\theta]\vec{j}$$
$$=a_\tau\vec{e}_\tau+a_n\vec{e}_n$$

因为: $\vec{i}=-\sin\theta\vec{e}_\tau+\cos\theta\vec{e}_n$， $\vec{j}=\cos\theta\vec{e}_\tau+\sin\theta\vec{e}_n$

且：$a_\tau=0,a_n=-\omega^2r$

得: $a_\tau=-r\ddot{\theta}=0,\ddot{\theta}=0$

$$a_n=-r\dot{\theta}^2-\omega^2r-2\omega r\dot{\theta}=-\omega^2r,\quad \dot{\theta}=-2\omega$$

即: 将绕以角速度2ω作圆周轨道运动。

14 一抛物线形金属丝竖直放置，顶点向下，以匀角速率ω绕竖直轴转动。一质量为m的光滑小环套在金属丝上。写出小环在金属丝上滑动时的运动微分方程。已知金属丝构成的抛物线方程为$x^2=4ay$，这里a为常数。

解：如右图建立直解坐标系,则：

$$\vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + \frac{x^2}{4a}\vec{j}$$

$$\vec{\upsilon}' = \dot{\vec{r}}' = \dot{x}\vec{i} + \frac{x\dot{x}}{2a}\vec{j}$$

$$\vec{a}' = \dot{\vec{\upsilon}}' = \ddot{x}\vec{i} + (\frac{x\ddot{x}}{2a} + \frac{\dot{x}^2}{2a})\vec{j}$$

则： $\vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_t + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \omega\vec{j} \times (\omega\vec{j} \times \vec{r}') + 2\omega\dot{x}\vec{k} = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n + a_b\vec{e}_b$

其中：$\vec{i} = -\sin\theta\vec{e}_\tau + \cos\theta\vec{e}_n$，$\vec{j} = \cos\theta\vec{e}_\tau + \sin\theta\vec{e}_n$ ，$\vec{k} = \vec{e}_b$ 且 $\tan\theta = \frac{x}{2a}$

则： $a_\tau = -(\ddot{x} - \omega^2 x)\cos\theta - (\frac{x}{2a}\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2}{2a})\sin\theta = g\sin\theta$

代入 $\tan\theta = \frac{x}{2a}$

得： $(1 + \frac{x^2}{4a^2})\ddot{x} = -\frac{x\dot{x}}{4a^2} - \frac{xg}{2a} + \omega^2 x$

15 在北纬 λ 处，一质点以初速率 υ_0 竖直上抛，到达高度为 h 时又落回地面。考虑地球的自转效应，不计空气的阻力，求质点落地位置与上抛点之间的距离；是偏东还是偏西？为什么？

解：依地球上质点运动方程：$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda & \cdots\cdots *_1 \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) & \cdots\cdots *_2 \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\lambda & \cdots\cdots *_3 \end{cases}$

初始条件为 $t = 0, x = y = z = 0, \ddot{z} = \upsilon_0$

对 $*_1 *_2$ 式进行第一次积分 $\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda \\ \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\lambda + \upsilon_0 \end{cases}$

代入 $*_2$ 得：$\ddot{y} = -4\omega^2 y - 2\omega(\upsilon_0 - gt)\cos\lambda$

积分得：$y = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t + \frac{gt - \upsilon_0}{2\omega}\cos\lambda$

代入初始条件得：$y = \frac{gt\cos\lambda}{2\omega} - \frac{\upsilon_0\cos\lambda}{2\omega} + \frac{\upsilon_0\cos\lambda\cos 2\omega t}{2\omega}$

$$-\omega t^2\upsilon_0\cos\lambda + \frac{1}{3}\omega t^3\cos\lambda$$

落地时：$t=2\sqrt{\dfrac{2h}{g}},\upsilon_0=\sqrt{2hg},$代入上式得：

$$y=-\frac{8}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\lambda \qquad （y<0）$$

故偏西。

16 在北纬λ的地方，以仰角α向东方发射一炮弹，炮弹的出口速率为υ，考虑地球的自转效应，证明炮弹地点的横向偏离为

$$d=\frac{4\upsilon^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha \quad 。$$

解：（此题与上题解题基本相同）初始条件变为：

$$t=0,\dot{y}=\upsilon_0\cos\alpha,\dot{z}=\upsilon_0\sin\alpha,\dot{x}=y=x=z=0$$

对$*_1$ $*_2$进行积分$\begin{cases}\dot{x}=2\omega y\sin\lambda\cdots\cdots\cdots *_4\\ \dot{z}=-gt+2\omega y\cos\lambda+\upsilon_0\sin\alpha\end{cases}$

代入$*_2$得：$\ddot{y}=-4\omega^2 y-2\omega(\upsilon_0\sin\alpha-gt)\cos\lambda$

积分并代入初始条件得：

$$y=\frac{gt\cos\lambda}{2\omega}-\frac{\upsilon_0\sin\alpha\cos\lambda}{2\omega}+\frac{\upsilon_0\sin\alpha\cos\lambda\cos 2\omega t}{2\omega}-\frac{g\cos\lambda\sin 2\omega t}{4\omega^2}+\frac{\upsilon_0\cos\alpha}{2\omega}$$

代入$*_4$得：

$$x=2\omega\sin\lambda\int_0^t ydt$$

$$=2\omega\sin\lambda[\frac{g\sin\alpha\cos\lambda\sin 2\omega t}{4\omega^2}-\frac{1}{4\omega^2}(\upsilon_0\cos\alpha-\frac{g\cos\lambda}{2\omega})(\cos 2\omega t-1)+\frac{g\cos\lambda t^2}{4\omega}-\frac{\upsilon_0\sin\alpha\cos\lambda}{2\omega}t]$$

代入$\sin 2\omega t \quad 2\omega t,\cos 2\omega t \quad 1-2(\omega t)^2$ 得：$x=\omega\upsilon_0 t^2\sin\lambda\cos\alpha$

当落地时：$t=\dfrac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}$ 并代入上式得：$x=\dfrac{4\upsilon_0{}^2\omega\sin\lambda\cos\alpha\sin^2\alpha}{g^2}$

即横向偏离：$d=\dfrac{4\upsilon_0{}^2\omega\sin\lambda\cos\alpha\sin^2\alpha}{g^2}$

第四章 质点组动力学

以彼之道，还施彼身。单身独影自是无风不起浪,无论是亲朋相会,还是冤家聚头,定有故事流传.代数方程在此将笑傲江湖.

【要点分析与总结】

1 质点组

（1） 质心： $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$

对于连续体: $\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r} dm}{m}$

（2） 内力与外力: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ij}$

且内力满足: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

2 质点组运动的动量、角动量、动能

（1） 动量 $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}_c = \vec{p}_c$

（2） 角动量 $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_c \times m\dot{\vec{r}}_c = \vec{L}_c' + \vec{L}_c$

（3） 动能 $T = \dfrac{1}{2} m\dot{\vec{r}}_c^2 + \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 = T_c + \sum_{i=1}^{N} T_i'$

3 质点组运动的基本定理

（1） 动量定理：$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}^{(e)}$

质心定理：$m\ddot{\vec{r}}_c = \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$

（2）　角动量定理：$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt}=\vec{M}^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{L}_c'}{dt}=\vec{M}_c'$$

（3）　动能定理：$dT=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\ d\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}\ d\vec{r}_i$

对质心：$dT'=\sum\vec{F}_i\ d\vec{r}_i'+\sum_{i,j=1;i\neq j}^{N}\vec{F}_{ij}\ d\vec{r}'$

4 开放的质点组：　$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\left(\vec{u}-\vec{\upsilon}\right)\frac{dm}{dt}=\vec{F}$

或 $\frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt}-\vec{u}\frac{dm}{dt}=\vec{F}$

〈析〉此章中许多等式的推导多用到分部积分与等量代换. 在本章的习题解答中多用到动量定理, 角动量定理与机械能守恒定理的联立方程组, 有时质心定理的横空出世会救你于水深火热之中.

【解题演示】

1 在一半径为r的圆圈上截取一段长为s的圆弧，求出这段圆弧的质心位置。

解：如右图所示建立坐标系 。则：$\theta_0={s}/{2r}$

设$\vec{r}_c=x_c\vec{i}+y_c\vec{j}$　有：

$$x_c=\frac{\eta\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} r\sin\theta ds}{\eta\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} ds}=\frac{-\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r^2 d\cos\theta}{s}=\frac{-r^2}{s}\cos\theta\Big|_{-\theta_0}^{\theta_0}=0$$

$$y_c=\frac{\eta\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} r\cos\theta ds}{\eta\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} ds}=\frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} r^2 d\sin\theta}{s}=\frac{r^2}{s}\sin\theta\Big|_{-\theta_0}^{\theta_0}=\frac{2r^2}{s}\sin\theta_0=\frac{2r^2}{s}\sin\frac{s}{2r}$$

则质心位置为 $(0,\frac{2r^2}{s}\sin\frac{s}{2r})$，

距顶点 o' 的位置为 $r-y_c=r(1-\frac{2r}{s}\sin\frac{s}{2r})$

2．求出半径为 r 的匀质半球的质心位置。

解：如右图所示，取一截面元与底面相距 $d\sin\theta$，则其质量：

$$d_m=\rho\pi(r\sin\theta)^2 d(r\sin\theta)$$

则：质心与底面距离

$$d=\frac{\int_m didm}{m}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r_m\theta\rho\pi(r\sin\theta)^2 d(r\sin\theta)}{\rho\frac{2}{3}\pi r^3}$$

$$=\frac{3r}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\sin^2\theta=\frac{3r}{4}(\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{3r}{8}$$

3．两只质量均为 m' 的冰船，静止地放在光滑的冰面上。一质量为 m 的人自第一只船跳入第二只船，并立即自第二只船跳回第一只船。设所有的运动都在一条直线上。求两船最后的速度之比。

解：人在两船运动为人与船组成系统的内部作用，故此系统动量守恒，

有：$(m+m')\upsilon_1+m'\upsilon_2=0$

得：$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=-\frac{m'}{m+m'}$

4．一船以速度$\vec{\upsilon}$前进，船上某人以相对速度$\vec{u}$向船头抛出一质量为m的铁球。已知船和人的总质量是m'。求人抛掷铁所作的功W。

解：同上题。动量守恒得：$m(\vec{\upsilon}'+\vec{u})+m'\vec{\upsilon}'=(m+m')\upsilon$　得：$\vec{\upsilon}'=-\vec{\upsilon}\dfrac{m'\vec{u}}{m+m'}$

系统前后能量变化：

$$\begin{aligned}\Delta E&=\frac{1}{2}m'\vec{\upsilon}'^2+\frac{1}{2}m(\vec{\upsilon}'+\vec{u})^2-\frac{1}{2}(m+m')\vec{\upsilon}^2\\&=\frac{1}{2}m'(\vec{\upsilon}-\frac{m'\vec{u}}{m+m'})^2+\frac{1}{2}m(\vec{\upsilon}+\frac{m'\vec{u}}{m+m'})^2-\frac{1}{2}(m+m')\vec{\upsilon}^2\\&=\frac{mm'u^2}{2(m+m')}\end{aligned}$$

即：人做功$W=\dfrac{mm'u^2}{2(m+m')}$

5．一质量为$3m$的粒子爆炸成质量相同的三小块。其中两块的飞行方向相互垂直。它们的速率分别是2υ和3υ。求出第三块的速度和动量的大小。

解：设三块的速度分别为$\vec{\upsilon}_1,\vec{\upsilon}_2,\vec{\upsilon}_3$　且：$\vec{\upsilon}_1=2\upsilon\vec{i},\vec{\upsilon}_2=3\upsilon\vec{j}.$

则依动量守恒　：$m\vec{\upsilon}_1+m\vec{\upsilon}_2+m\vec{\upsilon}_3=0$

得：$\vec{\upsilon}_3=-(\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_2),\vec{p}_3=m\vec{\upsilon}_3=-2m\upsilon\vec{i}-3m\upsilon\vec{j}$

则：$p_3=\sqrt{(2m\upsilon)^2+(3m\upsilon)^2}=\sqrt{13}m\upsilon$

6．重量为W的大楔子放在光滑的水平面上，在它的斜面上放置一与它相似的小楔子。小楔了的重量是P。大小楔子的水平边长分别为a和b。小楔子自大楔子顶部静止下滑，求小楔子完全下滑到水平面时，大小楔子完全下滑到水平面时，大小楔子分别移动了多少距离？

解：依图设大小楔子水平位移分别为$\vec{x}_W,\vec{x}_P$　且依水平方向动量守恒：

$$W\dot{x}_W+P\dot{x}_P=0$$

对其积分得：$W\vec{x}_W + P\vec{x}_P = 0$

且有 $\vec{x}_W - \vec{x}_P = (b-a)\vec{i}$

代入上式得：$\vec{x}_W = -\dfrac{P}{W+P}(a-b)\vec{i}, \vec{x}_P = \dfrac{W}{W+P}(a-b)\vec{i}$

7．一炮弹以仰角α发射，速率为$\vec{\upsilon}$，当炮弹达到最高点时，爆炸成质量分别为m_1和m_2的两块弹片。已知火药爆炸的能量是E。爆炸后的瞬时，两弹片仍沿原方向飞行。求两弹片落地时相隔的距离s。

解：炮弹从空中降下的时间$t = \dfrac{\upsilon\sin\theta}{g}$，在最高点处沿飞行方向动量守恒。 设$m_1, m_2$炸后的速率分别为$\upsilon_1, \upsilon_2$。则有：

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)\upsilon\cos\alpha \\ E = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1{}^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2{}^2 - \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)(\upsilon\cos\alpha)^2 \end{cases}$$

可解得： $\upsilon = |\upsilon_1 - \upsilon_2| = \sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)}{m_1\ m_2}E}$ 则：$s = \ \upsilon t = \dfrac{\upsilon\sin\theta}{g}\sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)}{m_1\ m_2}E}$

8．重量为W的人，手里拿着一个重量为w的物体，以与地平线成α角度的速度$\vec{\upsilon}_0$向前跳出。当他达到最高点时，将手中的物体以速率u向后抛去。问抛出物体后，人向前跳的距离增加多少？

解：（同理）设抛去w后，人的速率变为υ'，由于最高处水平方向动量守恒得：$w(\upsilon'-u) + W\upsilon' = (w+W)\upsilon_0\cos\alpha$

解得：$\upsilon' = \upsilon_0\cos\alpha + \dfrac{wu}{w+W}$

故人向前增加的距离：$s = \ \upsilon t = \dfrac{\upsilon_0\sin\theta}{g}|\upsilon' - \upsilon_0\cos\alpha| = \dfrac{wu\upsilon_0\sin\theta}{(w+W)g}$

9．质量为m的物体沿一直角劈的光滑斜面下滑，直角劈的质量为m'倾角为θ，置于光滑水平面上。求（1）物体水平方向的加速度$\ddot{x}_m$；（2）劈的加速度$\ddot{x}_p$；（3）劈对物体的反作用力F_1和水平面对劈的反作用力

$\vec{F}_2$。

解：如右图所示，建立各方向矢量，设劈与物体间的与反作用力为

$\vec{F}_1, \vec{F}_1'$，则：$\ddot{x}_{m'} = \frac{F_1'}{M'}\vec{i} = -\frac{F_1 \sin\theta}{M'}\vec{i}, \ddot{x}_m = \frac{F_1}{m'}\vec{i} = \frac{F_1 \sin\theta}{m'}\vec{i} \cdots\cdots *_1$

则物体相对于尖劈的水平加速度：$a_x = \ddot{x}_m - \ddot{x}_M = \frac{m+m'}{mm'}F_1 \sin\theta$

在$\vec{e}_z$方向上，物体受$\vec{F}_{1\perp}$与$m\vec{g}$的作用：$\alpha_\perp = g + \frac{F(-\cos\theta)}{m} = g - \frac{F\cos\theta}{m}$

依几何关系：$\frac{\alpha_\perp}{a_x} = \tan\theta = \frac{(g - \frac{F\cos\theta}{m})}{(\frac{m+m'}{mm'}F_1 \sin\theta)}$

解得：$\vec{F}_1 = \frac{mm'g\cos\theta}{m' + m\sin\theta}\vec{e}_n$

代入$*_1$式可得：
$$\ddot{x}_m = \frac{F_1 \sin\theta}{m} = \frac{m'g\cos\theta\sin\theta}{m' + m\sin^2\theta}$$
$$\ddot{x}_M = -\frac{F_1 \sin\theta}{m'} = -\frac{mg\cos\theta\sin\theta}{m' + m\sin^2\theta}$$

水平面对劈的反作用力$\vec{F}_2 = m'g(-\vec{e}_z) + \vec{F}_1' \cos\theta(-\vec{e}_z)$

$$= -(m'g + \frac{m'g\cos^2\theta}{m' + m\sin^2\theta})\vec{e}_z$$

$$= -\frac{(m'+m)mg}{m' + m\sin^2\theta}\vec{e}_z$$

10．质量为m'，半径为r的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上。一质量为m的质点沿此半球面下滑。设质点跟球心的连线与铅直轴之间的夹角为θ。已知初始时系统是静止的，$\theta = \alpha$ 求当$\theta = \beta$时，$\dot{\theta}$的值。

解：如右图所示，质点m相对于半球的速度$\vec{u} = \vec{r} \times \dot{\theta}$满足：

$$\vec{u} = r\dot{\theta}\vec{e}_\tau = \vec{u}_x + \vec{u}_y = r\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} + r\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_x = \dot{\vec{x}}_m - \dot{\vec{x}}_{m'}$$

在水平方向动量守恒，联立能量守恒得

$$\begin{cases} m'\dot{x}_{m'} + m\dot{x}_m = 0 \\ \dfrac{1}{2}m'(\dot{x}_{m'})^2 + \dfrac{1}{2}m(\dot{x}_m)^2 = mg(\cos\alpha - \cos\theta)r \end{cases}$$

可解得：$\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g(m+m')(\cos\alpha - \cos\theta)}{r(m\sin^2\theta + m')}$

则：$\dot{\theta}\Big|_{\theta=\beta} = \sqrt{\dfrac{2g(m+m')(\cos\alpha - \cos\theta)}{r(m\sin^2\theta + m')}}$

11．质量为m的小珠A能在一水平光滑的滑轨上滑动。另有一质量也是m的质点B用无弹性的轻绳与A联结，质点B可以铅垂平面内摆动。已知绳长为$2l$。初始时系统静止，绳与铅直线间的夹角为$\theta = \alpha$。证明：当夹角$\theta = \beta$时，有$\dfrac{\dot{\theta}^2}{2} = \dfrac{g(\cos\beta - \cos\alpha)}{l(2-\cos^2\beta)}$

解：证明，如右图所示。知：$\vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_B = -2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} + 2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

水平方向动量守恒：$m\upsilon_A + m(\upsilon_A - 2l\dot{\theta}\cos\theta) = 0$

得：　$\upsilon_A = -l\dot{\theta}\cos\theta \cdots\cdots *$

又依能量守恒：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^{\ 2} + \frac{1}{2}m[(\upsilon_A - 2l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (2l\dot{\theta}\sin\theta)^2] = 2mgl(\cos\alpha - \cos\theta)$$

代入*得：$\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g(\cos\alpha - \cos\theta)}{l(\sin^2\theta + 1)}$

得：$\dfrac{\dot{\theta}^2}{2}\Big|_{\theta=\beta} = \dfrac{g(\cos\beta - \cos\alpha)}{l(2-\cos^2\beta)}$

12．在光滑水平桌面上，有两个质量都是m的质点，用长为l的不可伸长的轻绳联结。今在其中一个质点上作用与绳垂直的冲量$\vec{I}$求证此后这两个质点分别作圆滚线运动，且它们的能量之比为$\cot^2(\dfrac{It}{2lm})$，其中t为质点运动时间。

证明：如右图。由于水平光滑，依质心定理与解动量守恒得：

$$\begin{cases}2m\upsilon_c = I \\ 2m\dfrac{l}{2}\dot{\theta} = I\end{cases} \quad 得： \begin{cases}\upsilon_c = \dfrac{I}{2m} & \cdots\cdots *_1 \\ \dot{\theta} = \omega = \dfrac{I}{ml} & \cdots\cdots *_2\end{cases}$$

分析可知：$\begin{cases}\vec{\upsilon}_A = \dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{e}_{\tau A} + \upsilon_c\vec{j} = (\upsilon_c + \dfrac{l}{2}\omega\cos\theta)\vec{j} + \dfrac{l}{2}\omega\sin\theta\vec{i} \\ \vec{\upsilon}_B = \dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{e}_{\tau B} + \upsilon_c\vec{j} = (\upsilon_c - \dfrac{l}{2}\omega\cos\theta)\vec{j} - \dfrac{l}{2}\omega\sin\theta\vec{i}\end{cases}$

则：

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{(\upsilon_c + \frac{l}{2}\omega\cos\theta)^2 + (\frac{l}{2}\omega\sin\theta)^2}{(\upsilon_c - \frac{l}{2}\omega\cos\theta)^2 + (\frac{l}{2}\omega\sin\theta)^2} \overset{代入*_1*_2}{=} \frac{\frac{I^2}{4m^2}[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]}{\frac{I^2}{4m^2}[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]} = \cot^2\frac{\theta}{2} = \cot^2(\dot{\theta}\ \frac{t}{2}) = \cot^2(\frac{It}{2lm})$$

即两质点间的能量之比为$\cot^2(\dfrac{It}{2lm})$。

13．质量为m的小环，穿在质量为m'的光滑圆圈上，此体系静止地平放在光滑的水平桌面上。今若突然使小环沿圆圈的切线方向有一速度$\vec{\upsilon}_0$。试证明圆圈将不发生转动，而圆心则绕体系的持赠作等速圆周运动。

证明：设圆圈半径为r，以质心 C 为坐标原点建立坐标系xcy，如右图所示，且依质心定理有$x_{m'} = -\dfrac{m}{m'}x_m, y_{m'} = -\dfrac{m}{m'}y_m$。

由于冲量作用在圆圈切线方向，故：$\upsilon_C = 0$。即质心不动。

当m, m'绕转过θ时，有：$\begin{cases}x_m - x_{m'} = r\cos\theta \\ y_m - y_{m'} = r\sin\theta\end{cases}$并代入$\begin{cases}x_{m'} = -\dfrac{m}{m'}x_m \\ y_{m'} = -\dfrac{m}{m'}y_m\end{cases}$

得：$\begin{cases} x_{m'}=-\dfrac{m}{m+m'}r\cos\theta \\ y_{m'}=-\dfrac{m}{m+m'}r\sin\theta \end{cases}$

得：$x^2+y^2=(\dfrac{mr}{m+m'})^2$

即圆圈中心 C 作圆周运动。

由于小环动时不受切向力作用，故：$I=m\upsilon_0=\dfrac{2mm'r}{m+m'}\dot{\theta}$

而：$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{m}{m+m'}r\sin\theta\dot{\theta} \\ \dot{y}=-\dfrac{m}{m+m'}r\cos\theta\dot{\theta} \end{cases}$　　得：$\upsilon_{圆心}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\dfrac{2mr\dot{\theta}}{m+m'}=\dfrac{I}{m'}=const$

即得：为匀速圆周运动，而依动量守恒知圆圈无转动。

14 一长为$2l$的匀质链条，县挂于钉在墙上的光滑钉子上。开始时，挂在钉子两边的链条长度相同，处在平衡状态，后因微小扰动，链条自一边滑下。糖在链条完全脱离钉子的时刻，链条的速度大小。

解：依机械能守恒可得：$V+\ T=0$

$$V=-l\frac{mg}{2}=-\frac{mgl}{2},\quad T=\frac{1}{2}m\upsilon^2-0$$

故：$V=\sqrt{gl}$

15 长为l的匀质链条，伸直地平放在光滑水平桌面上，链条与桌面的边缘垂直。初始时，链条的一半从桌面下垂，链条的一半从桌面下垂，但处在静止状态。求此链条的的末端滑到桌子边缘时，链条的速度大小。

解：同上题：$V=-\dfrac{3}{4}l\dfrac{mg}{2}=-\dfrac{3mgl}{8},\quad T=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$

得：$V=\dfrac{1}{2}\sqrt{3gl}$

16 质量为m面积为S的圆盘，盘心受一与平面垂直的恒力$\vec{F}$的作用，

同时有一股体密度为ρ的尘土以恒定的速度$\vec{u}$迎面而来，与盘面相遇的尘土皆粘于盘面上。已知圆盘的初速度为零。求t时刻圆盘的速度及圆盘移动过的距离。

解：取$\vec{F}$方向为$\vec{e}_n$，即：$\vec{F}=F\vec{e}_n$，$\vec{u}=-u\vec{e}_n$则依变质量动力方程：

$$m'\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-(\vec{u}-\vec{\upsilon})\frac{dm'}{dt}=\vec{F}$$

得：$m'\frac{d\upsilon}{dt}+(u+\upsilon)\frac{dm'}{dt}=F\cdots\cdots*_1$

而：$\frac{dm'}{dt}=\rho S(u+\upsilon)\cdots\cdots*_2$

求导得：$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{1}{\rho S}\frac{d^2m'}{dt^2}\cdots\cdots*_3$

将$*_2$ $*_3$代入$*_1$得：$\frac{m'}{\rho S}\frac{d^2m'}{dt^2}+\frac{1}{\rho S}(\frac{dm'}{dt})^2=F$

可化为：$\frac{d[\frac{1}{2}(\frac{dm'}{dt})^2]}{dt}=\rho SF$

积分并代入初始条件得：$(\frac{dm'}{dt})^2=\rho S(Ft+mu)$

再积分得（并代入$t=0$时，$m'=m$）：$m'=\sqrt{\rho SFt^2+2m\rho Sut+m^2}$

代入$*_2$式可得：$\vec{\upsilon}=(\frac{Ft+mu}{m'}-u)\vec{e}_n$

$$d=\int_0^t\upsilon\,dt=\int_0^t(\frac{1}{\rho S}\frac{dm'}{dt}-u)dt=\frac{1}{\rho S}\int_0^t dm'-ut=\frac{1}{\rho S}(m'-m)-ut$$

第五张 刚体力学

平动中见彼此,转动中见分高低.运动美会让你感受到创造的乐趣.走过这遭,也许会有曾经沧海难为水的感叹.别忘了,坐标变换将为你迷津救渡,同时亦会略显身手.

【要点分析与总结】

1 刚体的运动

（1）刚体内的任一点的速度、加速度（A为基点）

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a}=\vec{a}_A+\frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)}{dt}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

（2）刚体内的瞬心S：$\vec{r}_s=\vec{r}_A+\frac{1}{\omega^2}\left(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_A\right)$

〈析〉$\vec{\omega}$为基点转动的矢量和，$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2+\cdots$

$$\vec{r}=\vec{r}_A+\vec{r}'$$

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$=\frac{d\vec{r}_A}{dt}+\frac{d\vec{r}'}{dt}=\vec{\upsilon}_A+\frac{d^*\vec{r}'}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\vec{\upsilon}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\vec{\upsilon}_A}{dt}+\frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)}{dt}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

值得注意的是：有转动时$\vec{r}'$与$\vec{\omega}\times\vec{r}'$的微分，引入了$\vec{\omega}\times\vec{r}'$与$\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$项。

2 刚体的动量，角动量，动能

（1）动量：$\vec{P}=m\vec{\upsilon}_c$

（2）角动量： $\vec{L}=\sum \vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i=\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}=\vec{\vec{J}}\,\vec{\omega}=\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

式中：

$$转动惯量\begin{cases} J_{xx}=\int\left(y^2+z^2\right)dm \\ J_{yy}=\int\left(z^2+x^2\right)dm \\ J_{zz}=\int\left(x^2+y^2\right)dm \end{cases}$$

$$惯量积\begin{cases} J_{xx}=\int xydm \\ J_{yy}=\int yzdm \\ J_{zz}=\int zxdm \end{cases}$$

且 $\vec{L}=\vec{r}_c\times m\vec{\upsilon}_c+\vec{L}'_c$

＊ $\vec{e}_l$方向（以l为轴）的转动惯量：

$$J=\vec{e}_l\,\vec{\vec{J}}\,\vec{e}_l=\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\vec{\vec{J}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{yz}\beta\gamma-2J_{zx}\gamma\alpha-2J_{xy}\alpha\beta$$

（α,β,γ 分别为 $\vec{e}_l$ 与 x,y,z 轴夹角的余弦）

＊ 惯量主轴

惯量主轴可以是对称轴或对称面的法线

若 X 轴为惯量主轴，则含 X 的惯量积为 0，即：$J_{xy}=J_{xz}=0$

若 x,y,z 轴均为惯量主轴，则：$\vec{L}=J_{xx}\vec{i}+J_{yy}\vec{j}+J_{zz}\vec{k}$

〈析〉建立的坐标轴轴应尽可能的是惯量主轴，这样会降低解题繁度。

(3) 动能：$T=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i\upsilon_i'^2=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\,\vec{\vec{J}}_c\,\vec{\omega}$

＊ 定轴转动时:　$T=\frac{1}{2}J\omega^2$

＊ 平面平行运动:　$T=\frac{1}{2}m\upsilon_c{}^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2$

3 刚体的动力学方程

与质点动力学方程相同。

〈析〉求角动量$\vec{L}$时，须注意：

$$\vec{L}=\dot{\vec{J}}\,\vec{\omega}$$

$$=\dot{\vec{J}}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\left(J_{xx}\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z\right)\vec{i}\\&+\left(-J_{yx}\omega_x+J_{yy}\omega_y-J_{yz}\omega_z\right)\vec{j}\\&+\left(-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_{zz}\omega_z\right)\vec{k}\end{aligned}$$

4 刚体的定轴转动:

$$\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z=\dot{\varphi}\ \vec{e}_z$$

$$\vec{L}=\dot{\vec{J}}\,\vec{\omega}=-J_{zx}\ \omega\ \vec{i}-J_{yz}\ \omega\ \vec{j}+J_{zz}\ \omega\ \vec{k}$$

$$T=\frac{1}{2}J\omega^2$$

质心定理:　$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=\vec{F}^{(e)}$

角动量定理: $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}^{(e)}$

〈析〉须注意外力与外力矩包括轴对物体作用

5 刚体的平面平行运动　$T=\frac{1}{2}m\upsilon_c{}^2+\frac{1}{2}J\omega^2$

$$m\,\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}=\vec{F}$$

$$\frac{dL_z}{dt}=J\ddot{\varphi}=M_z$$

6 刚体的定点运动

（1）基本方程（以惯量主轴为坐标轴）

$$\vec{L}=\dot{J}\,\vec{\omega}=L_x\,\vec{i}+L_y\,\vec{j}+L_z\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d^*\vec{L}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{L}$$

$$=\dot{L}_x\,\vec{i}+\dot{L}_y\,\vec{j}+\dot{L}_z\,\vec{k}+\vec{\Omega}\times\vec{L}=\vec{M}$$

质心定理：$m\dfrac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=m\ddot{\vec{r}}_c=\vec{F}$

机械能守恒：$\dfrac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^{\ 2}+J_{yy}\omega_y^{\ 2}+J_{zz}\omega_z^{\ 2}\right)+V=E$

〈析〉 $\vec{\Omega}$为活动坐标系绕固定坐标系的转速

则有：$\dfrac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{i}$

如：$\dfrac{d\vec{L}_x}{dt}=\dfrac{d\left(L_x\vec{i}\right)}{dt}$

$$=\frac{dL_x}{dt}\vec{i}+L_x\frac{d\vec{i}}{dt}$$

$$=\dot{L}_x\vec{i}+L_x\vec{\Omega}\times\vec{i}$$

$$=\dot{L}_x\vec{i}+\vec{\Omega}\times\vec{L}_x$$

（2）欧拉方程（活动坐标系随刚体自旋）

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d^*\vec{L}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{L}=\vec{M}$$

写成分量形式：

$$\begin{cases}J_x\dot{\Omega}_x-\left(J_y-J_z\right)\Omega_y\Omega_z=M_x\\ J_y\dot{\Omega}_y-\left(J_z-J_x\right)\Omega_z\Omega_x=M_y\\ J_z\dot{\Omega}_z-\left(J_x-J_y\right)\Omega_x\Omega_y=M_z\end{cases}$$

〈析〉$\vec{M}=0$时，$J_z\dot{\Omega}_z=0$可导出 $\Omega_z=\varepsilon=const$可以解释地球的纬度变迁。

（3）对称重陀螺的定点运动（活动坐标系不随刚体自旋）

三个角速度：

自旋： $\dot{\psi}\vec{k}$

进动： $\dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$

章动： $\dot{\theta}\vec{i}$

总角速度：$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{i}+\dot{\varphi}\vec{e}_\zeta+\dot{\psi}\vec{k}$

$$=\dot{\theta}\vec{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{j}+\left(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\right)\vec{k}$$

即 $\begin{cases}\omega_x=\dot{\theta}\\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{cases}$

由于对称；$J_x=J_y=J_*$

代入 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d^*\vec{L}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{L}$

$$=\vec{M}=l\vec{k}\times\left(-mg\vec{e}_\zeta\right)$$

$$=mgl\sin\theta\vec{i}$$

可得：$\begin{cases}J_x\dot{\omega}_x-J_x\omega_y\dot{\varphi}\cos\theta+J_z\omega_z\dot{\varphi}\sin\theta=mgl\sin\theta\\ J_*\dot{\omega}_y+J_x\omega_x\dot{\varphi}\cos\theta-J_z\omega_z\dot{\theta}=0\\ J_z\dot{\omega}_z=0\end{cases}$

代入： $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{i}+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{j}+\left(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\right)\vec{k}$

可整理出；$\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\varepsilon$

$$\frac{J_*}{2}\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{J_z}{2}\varepsilon^2+mgl\cos\theta=E$$

$$J_*\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+J_z\varepsilon\cos\theta=S$$

$$E=\frac{J_*\dot{\theta}^2}{2}+\left[\frac{\left(s-J_z\varepsilon\cos\theta\right)^2}{2J_*\sin^2\theta}+\frac{J_z}{2}\varepsilon^2+mgl\cos\theta\right]$$

$$=\frac{J_*\dot{\theta}^2}{2}+U(\theta)$$

〈析〉可以用势函数$U(\theta)$来判断进动的规则性，

如：规则进动时， $\frac{dU(\theta)}{d\theta}=0,\frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2}>0$

另外，也可用 S 来判断，（其实更简单）。

规则进动时： $\dot{\varphi}>0$

[解题演示]

1．一长为l的棒 AB，靠在半径为r的半圆形柱面上，如图所示。今 A 点以恒定速度$\vec{\upsilon}_0$沿水平线运动。试求:(1)B 点的速度$\vec{\upsilon}_B$;(2)画出棒的瞬时转动中心的位置.

解：如右图所示建立坐标系xoy，依图知:

$$\dot{\vec{r}}_A=\frac{d}{dt}(\frac{r}{\sin\theta})\vec{i}=\frac{r\cos\theta}{\sin^2\theta}\dot{\theta}\vec{i}=\upsilon_0\vec{i}$$

得: $\dot{\theta}=\frac{\upsilon_0\sin^2\theta}{r\cos\theta}$

$$\vec{\upsilon}_B=\vec{\upsilon}_A+\dot{\theta}\vec{k}\times\vec{r}_{BA}$$

$$=\upsilon_0\vec{i}+\frac{\upsilon_0\sin^2\theta}{r\cos\theta}\vec{k}\times(-l\cos\theta\vec{i}+l\sin\theta\vec{j})$$

$$=\upsilon_0(1-\frac{l\sin^3\theta}{r\cos\theta})\vec{i}-\upsilon_0\frac{l\sin^2\theta}{r}\vec{j}$$

瞬心 S 满足： $\vec{r}_S=\vec{r}_A+\frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_A)$

$$=\frac{r}{\sin\theta}\vec{i}+\frac{1}{\dot{\theta}^2}(\dot{\theta}\vec{k}\times\upsilon_0\vec{i})$$

$$=\frac{r}{\sin\theta}\vec{i}+\frac{r\cos\theta}{\sin^2\theta}\vec{j}$$

如上图所示.

2．一轮的半径为r，竖直放置于水平面上作无滑动地滚动，轮心

以恒定速度$\vec{\upsilon}_0$前进。求轮缘上任一点（该点处的轮辐与水平线成θ角）的速度和加速度。

解：如右图所示建立坐标系xoy，则：

$$\vec{\upsilon}_C=\upsilon_0\vec{i},\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}_C+\dot{\theta}(-\vec{k})\times(-r\vec{j})$$

得：$\dot{\theta}=\dfrac{\upsilon_0}{r}$

故：$\vec{\upsilon}_B=\vec{\upsilon}_C+\dot{\theta}(-\vec{k})\times(r\cos\theta\vec{i}+r\sin\theta\vec{j})$

$$=\upsilon_0(1+\sin\theta)\vec{i}-\upsilon_0\cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{a}_B=\vec{a}_C+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{BC}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{BC})$$

$$=0+0+\dot{\theta}(-\vec{k})\times[\dot{\theta}(-\vec{k})\times(r\cos\theta\vec{i}+r\sin\theta\vec{j})]$$

$$=-\frac{{\upsilon_0}^2}{r}(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})$$

3． 半径为r的圆柱夹在两块相互平等的平板 A 和 B 之间，两板分别以速度$\vec{\upsilon}_1$和$\vec{\upsilon}_2$反向运动，见图。若圆柱和两板间无相对滑动，求（1）圆柱瞬心位置；（2）圆柱与板的接触点 M 的加速度。

解：如右图所示建立坐标系xoy，设瞬心在 S 点。

$$\vec{\upsilon}_M=\vec{\upsilon}_N+\vec{\omega}\times\vec{r}_{MN}=-\upsilon_2\vec{i}+\omega\vec{k}\times2r\vec{j}=-(\upsilon_2+2\omega r)\vec{i}=\upsilon_1\vec{i}$$

得：$\omega=-\dfrac{(\upsilon_1+\upsilon_2)}{2r}$

（1） $\vec{r}_S=\vec{r}_M+\dfrac{1}{\omega^2}(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_1)=r\vec{j}+(-\dfrac{2r\upsilon_1}{\upsilon_1+\upsilon_2})\vec{j}=\dfrac{r(\upsilon_2-\upsilon_1)}{\upsilon_1+\upsilon_2}\vec{j}$

（2） $\vec{a}_M=\vec{a}_S+\vec{\omega}\times\vec{r}_{MS}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{MS})=\omega\vec{k}\times(\omega\vec{k}\times\dfrac{2r\upsilon_1}{\upsilon_1+\upsilon_2}\vec{j})=-\dfrac{(\upsilon_1+\upsilon_2)\upsilon_1}{2r}\vec{j}$

4． 高为h，顶角为2α的圆锥，在一平面上无滑动的滚动。已知圆锥轴线以恒定角速度$\vec{\Omega}$绕过顶点的铅直顽固不化转动。求（1）圆锥的角速度；（2）锥体底面上最高点的速度；（3）圆锥的角加速

度。

解：如右图所示建立坐标系$oxyz$，并取定$OABC$点。

（1）$\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}_O+\Omega\vec{k}\times(h\cos\alpha\vec{j}+h\sin\alpha\vec{k})$

$$=0-\Omega h\cos\alpha\vec{i}$$
$$=\vec{\upsilon}_B+\omega\vec{j}\times h\sin\alpha\vec{k}$$
$$=0+\omega h\sin\alpha\vec{i}$$

得：$\vec{\omega}=-\Omega\cot\alpha\vec{j}$

（2）$\vec{r}_{BC}=\dfrac{h}{\cos\alpha}\sin 2\alpha\vec{k}+(\dfrac{h}{\cos\alpha}\cos 2\alpha-h\cos\alpha)\vec{j}$

$$=2h\sin\alpha\vec{k}-h\tan\alpha\sin\alpha\vec{j}$$

则：$\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}_B+\vec{\omega}\times\vec{r}_{BA}$

$$=0+(-\Omega\cot\alpha)\vec{j}\times(2h\sin\alpha\vec{k}-h\tan\alpha\sin\alpha\vec{j})$$
$$=-2\Omega h\cos\alpha\vec{i}$$

（3）$\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}=-\Omega\cot\alpha\dfrac{d\vec{j}}{dt}=-\Omega\cot\alpha(\Omega\vec{k}\times\vec{j})=\Omega^2\cot\alpha\vec{i}$

5．在一半径为 R 的球队体上置一半径为r的较小的球，它们的连心线OO'与竖直轴间保持α角，如图。若OO'绕竖直轴以恒定的角速度$\vec{\omega}$转动，小球在大球上无滑动地滚动。分别求出小球最高点 A 和最低点 B 的速度.

解：如右图所示建立坐标系$o'xyz$，则有：

$$\vec{\omega}=\omega(-\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{k})$$

设O'球的转动速度为：$\vec{\omega}'=\omega\vec{i}$

则有：$\vec{\upsilon}_{O'}=\vec{\upsilon}_C+(\vec{\omega}'+\vec{\omega})\times r\vec{k}=-(\omega-\omega\sin\alpha)r\vec{k}$

又有：$\vec{\upsilon}_{O'}=\vec{\upsilon}_O+\omega(-\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{k})\times(R+r)\vec{k}$

$$=\omega(R+r\sin\alpha\vec{j})$$

得：$\vec{\omega}'=-\dfrac{\omega R\sin\alpha}{r}\vec{i}$

则：$\vec{\upsilon}_A=\vec{\upsilon}_{O'}+\vec{\omega}'\times(-r\sin\alpha\vec{i}+r\cos\alpha\vec{k})$

$$=\omega(R+r)\sin\alpha\vec{j}+R\omega\sin\alpha\cos\alpha\vec{j}$$
$$=\omega\sin\alpha[(1+\cos\alpha)R+r]\vec{j}$$

$$\vec{\upsilon}_B=\vec{\upsilon}_{O'}+\vec{\omega}'\times(r\sin\alpha\vec{i}-r\cos\alpha\vec{k})$$

$$=\omega(R+r)\sin\alpha\vec{j}-R\omega\sin\alpha\cos\alpha\vec{j}$$
$$=\omega\sin\alpha[(1-\cos\alpha)R+r]\vec{j}$$

6．一边长为d，质量为m的匀质立方体，分别求出该立方体对过顶点的棱边，面对角线和体对角线的转动惯量J_p,J_f和J_b.

解：如右图所示，取三条对称轴建立坐标系$oxyz$.

依对称性知:

$$J_x=J_y=J_z=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}(x^2+y^2)dxdy\,\frac{m}{d^3}=\frac{m}{d^3}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}(d^2y^2+\frac{d^4}{12})dy=\frac{md^2}{6}$$

再依平行轴定理：$J_p=J_x+\dfrac{1}{2}md^2=\dfrac{2}{3}md^2$

$$J_f=\frac{1}{2}J_x+\frac{1}{2}J_y+\frac{1}{4}md^2=\frac{5}{12}md^2$$
$$J_b=\frac{1}{3}J_x+\frac{1}{3}J_y+\frac{1}{3}J_z=J_x=\frac{1}{6}md^2$$

7．一匀质等边三角形的薄板，边长为l。质量为m，试在图所示的坐标系下，求出薄板对质心 C 的惯量矩阵$\vec{J}_c$，并由此导出对顶点 O 的惯量矩阵$\vec{J}_o$。图中坐标系$Cxyz$和坐标系$O\xi\eta\zeta$的坐标轴分别相互平行，$\xi\eta$和xy都在薄板平面内.

解：（1）

$$J_{xx}=\int(y^2+z^2)dm=\int y^2dm=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}l}^{\frac{\sqrt{3}}{3}l}y^2(\frac{\sqrt{3}}{3}l-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\sigma\frac{l^2}{24}=\frac{ml^2}{24}$$

$$J_{yy}=\int(x^2+z^2)dm=\int x^2dm=\sqrt{3}\sigma\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}x^2(\frac{1}{2}l-x)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\sigma\frac{l^2}{24}=\frac{ml^2}{24}$$

$$J_{zz}=\int(x^2+y^2)dm=\int x^2dm+\int y^2dm=\frac{ml^2}{12}$$

又因为 y 与 z 为对称轴，则 $J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0$

故：$\vec{\vec{J}}_C=\frac{ml^2}{24}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

（2） $\vec{\vec{J}}_O=\vec{\vec{J}}_{mc}+\vec{\vec{J}}_C$

$$=m\begin{pmatrix}z_c^2+y_c^2&-x_cy_c&-x_cz_c\\-x_cy_c&x_c^2+z_c^2&-y_cz_c\\-x_cz_c&-y_cz_c&x_c^2+y_c^2\end{pmatrix}+\vec{\vec{J}}_C$$

$$=ml^2\begin{pmatrix}\frac{1}{12}&-\frac{\sqrt{3}}{12}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{12}&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\frac{ml^2}{24}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{ml^2}{24}\begin{pmatrix}3&-2\sqrt{3}&0\\-2\sqrt{3}&7&0\\0&0&10\end{pmatrix}$$

8． 质量为 m，长为 l 的细长杆，绕通过杆端点 0 的铅直轴以角速度 ω 转动。杆于转轴间的夹角 θ 保持恒定。求杆对端点 0 的角动量.

解：如右图建立坐标系 ，有 $J_y=J_2\sin^2\theta+J_1\cos^2\theta=\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta$

则：角动量 $\vec{L}=J_y\vec{\omega}=\frac{1}{3}ml^2\omega\sin^2\theta\vec{j}$

9． 一半径为 r 质量为 m 的圆盘，在水平面上作纯滚动，盘面法线与铅直轴间保持恒定角度 θ，盘心则以恒定速率 u 作半径为 $2r$ 的圆

周运动。求圆盘的动能.

解：如右图所示取定各参量及坐标系，则有：

$$\vec{\Omega}=\Omega\cos\alpha\vec{k}-\Omega\sin\alpha\vec{i}$$

且有：$\vec{\Omega}\times\vec{k}=\Omega\ 2r\vec{j}=u_0\vec{j}$

得：$\Omega=\dfrac{u_0}{2r}$

又依：$-\omega\vec{k}\times(-r)\vec{i}=u_0\vec{j}$

得：$\omega=\dfrac{u_0}{r}$

故：$T=\dfrac{1}{2}[J_x(\Omega\cos\alpha)^2+J_y(\Omega\sin\alpha)^2]+\dfrac{1}{2}J_z\omega^2=\dfrac{mu^2}{32}(25+\cos^2\alpha)$

10. 一半径为 r 的匀质圆盘，平船在粗糙的水平桌面上，绕通过其中心的竖直轴转动，初始时刻圆盘的角速度大小为 ω_0。已知圆盘与桌面间的磨擦系数为 μ。问经过多少时间圆盘将停止转动？

解：$M_f=\int_0^r(2\pi\sigma gu)da=\dfrac{2gu}{3}mr$

$L_0=J\omega_0=\dfrac{1}{2}mr^2\omega_0$

故：$t=\dfrac{L_0}{M_f}=\dfrac{\frac{1}{2}mr^2\omega_0}{\frac{2gu}{3}mr}=\dfrac{3r\omega_0}{4gu}$

11. 如图，一矩莆匀质薄板 $ABCD$，长为 l，宽为 d，质量为 m。薄板绕竖直轴 AB 以初角速度 $\vec{\omega}_0$ 转动，阻力与薄板表面垂直并与面积及速度的平方成正比，比例系数为 k。问经过多少时间后，薄板的角速度减为初角速度的一半？

解：$M_f=\int_0^d rdf=\int_0^d r^3\omega^2kldr=\dfrac{1}{4}\omega^2kld^4$

$L=-M_f\ \ t$

得 ： $\frac{1}{3}md^2\dot{\omega}=-\frac{1}{4}\omega^2 kld^2$

积分并代入： $t=0,\omega=\omega_0$ 　 得： $t=0,\omega=\omega_0$

故$\omega=\frac{1}{2}\omega_0$时： $t=\frac{4m}{3kld^2\omega_0}$

12. 　一质量为m，长为l的匀质细长杆，一端与固定点 o 光滑铰链。初始时刻杆竖直向上，尔后倒下。试分别求出此后杆绕铰链 0 转动的角速度$\vec{\omega}$，作用于铰链上的力$\vec{F}_N$与杆转过的角度θ的关系.

解：（1）如右图。有： $\vec{M}=\vec{OC}\times m\vec{g}=\frac{1}{2}l\vec{e}_l\times(-mg\vec{k})=-\frac{1}{2}mgl\sin\theta\vec{i}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=-\frac{1}{3}ml^2\dot{\omega}\vec{i}=-\frac{mgl\sin\theta}{2}\vec{i}$$

得： $\dot{\omega}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}=\frac{3g\sin\theta}{2l}$

将$d\theta$移至右侧且积分得：

$$\omega^2=-\frac{1}{l}3g\cos\theta\Big|_0^1=\frac{3g(1-\cos\theta)}{l}$$

得： $\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l}}$

（2）设$\vec{F}_N=F_\theta\vec{e}_\theta+F_l\vec{e}_l$ 　则以质心 C 为参照点有：

$F_\theta\cdot\frac{l}{2}=J_c\dot{\omega}=\frac{1}{12}ml^2\cdot\frac{3g\sin\theta}{2l}=\frac{1}{8}mgl\sin\theta$

得： $F_\theta=\frac{1}{4}mg\sin\theta$

在$\vec{e}_l$方向上： $F_l+mg\cos\theta=m\omega^2\cdot\frac{l}{2}$

得： $F_l=\frac{1}{2}mg(3-5\cos\theta)$

故： $\vec{F}=F_l\vec{e}_l+F_\theta\vec{e}_\theta=\frac{mg}{4}\left[2(3-5\cos\theta)\vec{e}_l+\sin\theta\vec{e}_\theta\right]$

13. 　一段匀质圆弧，半径为 R 绕通过弧线中点并与弧线垂直的水平轴线摆动。求弧线作微振动时的周期.

解:参量如右图所示,易求得: $J_0=2\int_0^{\varphi_0}(2R\sin\frac{\varphi}{2})^2\eta Rd\varphi=2mR^2(1-\frac{\sin\varphi}{\varphi})$

（由 4.1 题知）而：$l=R(1-\frac{\sin\varphi}{\varphi})$，$M=-mgl\sin\theta$

故：$\ddot{\theta}=\dot{\omega}=\frac{1}{J}\frac{dL}{dt}=\frac{M}{J_0}=-\frac{mg\sin\theta R(1-\frac{\sin\varphi}{\varphi})}{2mR^2(1-\frac{\sin\varphi}{\varphi})}=-\frac{g\sin\theta}{2R}$

又因为是微振动 $\sin\theta\quad\theta$，故：$\ddot{\theta}=-\frac{g\theta}{2R}$

积分得：$\theta=A\cos\sqrt{\frac{g}{2R}}t+B$

则：$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

14. 一矩形薄板，边长分别为 l 和 d，以角速度 $\vec{\omega}$ 绕对角线转动。今若突然改为绕 l 边转动，求此时薄板的角速度 $\vec{\Omega}$。

解：如右图所示，则：

$$\vec{\vec{J}}_C=\begin{pmatrix}\frac{1}{12}m(l^2+d^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}md^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2\end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{J}}_O=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m(l^2+d^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}md^2 & -\frac{1}{4}ml^2\\ 0 & -\frac{1}{4}ml^2 & \frac{1}{3}ml^2\end{pmatrix}$$

对 OA 轴： $\vec{L}=\vec{\vec{J}}_C\ \omega(\frac{l}{\sqrt{l^2+d^2}}\vec{j}+\frac{d}{\sqrt{l^2+d^2}}\vec{k})=\frac{ml\omega d}{12\sqrt{l^2+d^2}}(d\vec{j}+l\vec{k})$

设绕 OB 轴的角速度为：$\vec{\Omega}=\Omega\vec{j}$

则有：$\vec{L}=\vec{\vec{J}}_O\,\Omega\vec{j}=\Omega(\frac{1}{3}md^2\vec{j}-\frac{1}{4}mdl\vec{k})$

在转换时，z方向有冲量矩作用，而y方向动量矩守恒，故有：

$$\Omega\frac{1}{3}md^2=\frac{ml\omega d^2}{12\sqrt{l^2+d^2}}$$

得：$\vec{\Omega}=\frac{l\omega}{4\sqrt{l^2+d^2}}\vec{j}$

15.　一半径为r，质量为m的球体，无转动地以速度$\vec{\upsilon}$运动，今若突然将其表面化上的一点 0 定住不动，求此后球体的角速度矢量$\vec{\omega}$及球体对 0 点的角动量$\vec{L}$。已知 0 点和球心 C 的连线与$\vec{\upsilon}$成α角，如图所示.

解：如右图所示建立坐标系，则：$\vec{\upsilon}=\upsilon\sin\alpha\vec{j}+\upsilon\cos\alpha\vec{i}$

当点 0 固定时：$\vec{\upsilon}=\upsilon\sin\alpha\vec{j}+\upsilon\cos\alpha\vec{i}$　（$\upsilon_x=0$）

又因为 $\vec{\vec{J}}_O=\frac{7}{5}mr^2$ 故：$\vec{\omega}=\frac{5\upsilon}{7r}\sin\alpha\vec{k}$

$$\vec{L}=\vec{\vec{J}}\vec{\omega}=rm\upsilon\sin\alpha\vec{k}$$

16.　一匀质圆盘竖直地在一坡角为α的斜面上无滑动滚下。证明：（1）圆盘质心的加速度大小为$\frac{2}{3}g\sin\alpha$；（2）圆盘和斜面间的磨擦系数至少为$\frac{1}{3}\tan\alpha$。

证明：（1）$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_C^{\,2}+\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2=\frac{3}{4}m\dot{x}_C^{\,2}$　（$\dot{x}_C=r\dot{\theta}$）

以开始处为势能原点，则因无滑动：

$$T+V=\frac{3}{4}m\dot{x}_C^{\,2}-mgx_C\sin\alpha=0$$

则：$\frac{d(T+V)}{dt}=\frac{3}{2}m\dot{x}_C\ddot{x}_C-mg\dot{x}_C\sin\alpha=0$

得：$\ddot{x}_C=\frac{2}{3}g\sin\alpha$

（2）依 $mg\sin\alpha-f=m\ddot{x}_C=\frac{2}{3}mg\sin\alpha$

而　$f \le mg\mu\cos\alpha$

得：　$\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$

17.　长为l的匀质棒，一端以光滑铰链悬挂于固定点。若起始时，棒自水平位置静止开始运动，当棒通过竖直位置时铰链突然松脱，棒开始自由运动。在以后的运动中（1）证明棒质心的轨迹为一抛物线；（2）棒的质心下降h距离时，棒已转过多少圈?

解：（1）证明：如右图建立坐标系 ，刚松脱时，具有ω，满足：

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\ \omega^2 = \frac{1}{2}mgl \quad 得：\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

则此后：$\begin{cases} x_C = -\upsilon_{Ox}t = -\omega\frac{l}{2}t = \frac{t}{2}\sqrt{3gl} \\ y_C = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

消去t参数得：$y_C = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}g(\frac{2x_C}{\sqrt{3gl}})^2 = \frac{l}{2} + \frac{2x_C{}^2}{3l}$

即为抛物线。

（2）质心下降h时，有：$\frac{1}{2}gt^2 = h$　　得：$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

则转动圈数：$n = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{l}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6h}{l}}$

18.　质量为m'的平板，受水平力$\bar{F}$的作用，在一不光滑的水平面上运动。平板与水平面间的磨擦系数为μ。平板上放有一质量为m的匀质实心圆球，在平板上作纯滚动，试求出平板的加速度.

解：运动时，球与板之间无滑动，则：$\dot{x}_O + \omega r = \dot{x}$

设球与板磨擦力为f，则：$ft = m\dot{x}_O, frt = J_O\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega$

可得：$\omega r=\frac{5}{2}\dot{x}_O,\dot{x}_O=\frac{2}{7}\dot{x}$

故：$T=\frac{1}{2}m'\dot{x}^2+\frac{1}{2}\dot{x}_O{}^2+\frac{1}{5}mr^2\omega^2=(\frac{1}{2}m'+\frac{29}{98}m)\dot{x}^2$

而：$\omega=(F-f)x=[F-\mu g(m+m')]x$

依能量守恒，有：

$$\frac{d(T+V)}{dt}=m'\dot{x}\ddot{x}+\frac{29}{49}m\dot{x}\ddot{x}-[F-\mu g(m+m')]\dot{x}=0$$

得：$a=\ddot{x}=\frac{49[F-\mu g(m+m')]}{29m+49m'}$

19． 一粗糙的半糙的半球形碗，半径为R，另有一半径为r较小的匀质球体从碗边无初速地沿碗的内壁滚下，如图求出球体的角速度大小ω与所在位置φ角的关系，以及球体在最低处时球心的速度.

解:依题意知：$\vec{\upsilon}_{o'}=\omega r\vec{e}_\varphi=\frac{R-r}{r}\dot{\varphi}r\vec{e}_\varphi=(R-r)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon_{o'}{}^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mr^2\omega^2=\frac{7}{10}mr^2\omega^2$$

取开始时$\upsilon_0=0$，则：$V=-mg(R-r)\cos\varphi$

依机械能守恒 $T+V=E$得：

$$\frac{7}{10}mr^2\omega^2-mg(R-r)\cos\varphi=0=E_0$$

得：$\omega=\sqrt{\frac{10g(R-r)\cos\varphi}{7r^2}}$

而：$\vec{\upsilon}\Big|_{\varphi=0}=\omega\Big|_{\varphi=0}r\vec{e}_\varphi=\sqrt{\frac{10g(R-r)\cos 0}{7r^2}}r\vec{e}_\varphi=\sqrt{\frac{10g(R-r)}{7r}}\vec{e}_\varphi$

20 一半径为 R 的匀质圆球，置于同样的固定球体的表面上。初始时刻此两球的连心线与铅直线成α角，球体静止，尔后开始沿固定球表面无滑动地滚下。求出球体脱离固定球表面时，连心线与铅直线间的夹角θ，及此时球体的角速度的大小ω。

解；依能量守恒与受力分析知，刚脱离时：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mr^2\omega^2=\frac{7}{10}mr^2\omega^2=2mgr(\cos\alpha-\cos\theta)\\ \frac{m\upsilon^2}{2r}=\frac{1}{2}mr\omega^2=mg\cos\theta\end{cases}$$

可解得：$\theta=\arccos(\frac{10}{17}\cos\alpha),\omega=2\sqrt{\frac{5g\cos\alpha}{17r}}$

21 一半径为 r 的球体，绕其平的直径以角速度 $\vec{\omega}_o$ 转动，尔后将其放置在磨擦系数为 μ 的水平桌面上。求出此球体开始作纯滚动时，球体已前进的距离 s。

解：依题知球受一稳定外力为：$F_l^{(e)}=mg\mu$，$M^{(e)}=-mg\mu r$

当纯滚动时：$\upsilon_c=\omega r=r(\omega_0+\dot{\omega}t)=r\omega_0-\frac{mg\mu}{\frac{2}{5}mr^2}t=(\omega_0-\frac{5g\mu}{2})t$

且此时：$\upsilon_c=at=\frac{1}{2}g\mu t$

代入上式得：$t=\frac{2r\omega_0}{7g\mu}$

故：$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}g\mu(\frac{2r\omega_0}{7g\mu})^2=\frac{2r^2\omega_0{}^2}{49g\mu}$

22 桌球是用棍棒冲击使球体运动的一种游戏。设桌球的半径为 r，置于光滑的平面上。问应在什么高度处水平冲击球体，球体才不会滑动而作纯滚动？

解：设打击中心的高度为 h，当纯滚动时：$m\upsilon_c=I$

且 $\omega=\frac{\upsilon_c}{r}$，$\vec{J}_C\omega=I(h-r)$

代入：$\vec{J}_C=\frac{2}{5}mr^2$，$I=m\upsilon_c=m\omega r$

可得：$h=\frac{7}{5r}$　　　　（以地面为参考系 $h_0=0$）

23 一半径为 R 的匀质球体，以速度 υ_o 在水平面上无滑动地滚动，

突然遇到一高为h（〈$R/2$）的台阶，见图。球体受台阶的冲击是非弹性的。试求出球体受到冲击后，角速度的大小ω。若球体在台阶处无滑动，为使球体能登上台阶，初速度的大小υ_o至少应为多大？

解：（1）依情形知；受列冲量$I=m\upsilon_o$ 有：

$$\vec{J}_C \ \omega = I(R-h) = m\upsilon_o(R-h)$$

则冲击后角速度大小：$\omega=\omega_0+\ \omega=\dfrac{\upsilon_o}{R}+\dfrac{m\upsilon_o(R-h)}{\dfrac{2}{5}mR^2}=\dfrac{\upsilon_o(7R-5h)}{2R^2}$

（2）球登上台阶，须满足：$\dfrac{1}{2}J_0\omega^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{5}mR^2[\dfrac{\upsilon_o(7R-5h)}{2R^2}]^2\geq mgh$

解得：$\upsilon_o\geq\dfrac{2R}{7R-5h}\sqrt{\dfrac{10}{7}gh}$

24 一半径为r的匀质圆盘，在光滑的水平面上绕铅直的直径以角速度ϖ转动。证明：$\omega>2\sqrt{g/r}$时，圆盘旋转是稳定的.

解：如右图所示建立坐标系，得：

$$\omega_z=\varepsilon=0, s=J_*\dot{\varphi}\sin^2\theta+J_*\varepsilon\cos\theta=J_*\dot{\varphi}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

则：$E=\dfrac{1}{2}(mr^2\cos^2\theta+J_*)\dot{\theta}+U_{(\theta)}$

$$U_{(\theta)}=\frac{(s-J_*\varepsilon\cos\theta)^2}{2J_*\sin^2\theta}+\frac{1}{2}J_z\varepsilon^2+mgr\sin\theta=\frac{J_*\dot{\varphi}^2}{2\sin^2\theta}+mgr\sin\theta$$

当稳定时：$\left.\dfrac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\left.\dfrac{d^2U_{(\theta)}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}>0$

可得：

$$\left.\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\left.\frac{J_*\dot{\varphi}^2\cos\theta}{2\sin^3\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}+mgr\cos\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$$

$$\left.\frac{d^2U_{(\theta)}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=J_*\dot{\varphi}^2\frac{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}{2\sin^4\theta}-mgr\cos\theta>0$$

得：$\dot{\varphi}>2\sqrt{g/r}$

对称重陀螺定点运动的稳定性即规则问题可以从两方面入手，

规定运动（1） $\left.\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\left.\frac{d^2U_{(\theta)}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}>0$

（2） $s>J_z\varepsilon\cos\theta\Rightarrow\dot{\varphi}>0$

由于（2）方面解题更快，下题采用此法

25 一陀螺由一半径为 r 的匀质圆盘和长为 $4r/3$ 的轴杆构成，圆盘的质量为 $4m$，轴杆的质量为，此陀螺绕杆的端点 O 作定点转动，如图所示，若欲使陀螺绕铅直轴作规则进动，且盘的最低点 M 保持与 O 点在同一水平面内，则陀螺的角速度在对称轴上的分量 ω_z 应满足什么条件？

解：依题及图可得：

$$J_z=J_{z盘}=2mr^2,J_*=J_x=J_y=\frac{1}{3}m(\frac{4}{3}r)^2+2mr^2+4m(\frac{4}{3}r)^2=\frac{235}{27}mr^2$$

为规则进动时：$\omega_x=\dot{\theta}=0$ 再将 $\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta$ 代入

$$J_*\dot{\omega}_x-J_*\omega_y\dot{\varphi}\cos\theta+J_z\omega_z\dot{\varphi}\sin\theta=mgl\sin\theta$$

并化简得满足：$J_*\dot{\varphi}^2\cos\theta-\dot{\varphi}J_z\omega_z+6mgr=0$

满足：$\dot{\varphi}_1\ \dot{\varphi}_2>0,\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2>0$，$\dot{\varphi}>0$

故只须满足：$\Delta=(J_z\omega_z)^2-24mgrJ_*\cos\theta>0$

得：$\omega_z>\sqrt{\frac{24mgrJ_*\cos\theta}{J_z^{\ 2}}}=\sqrt{\frac{24mgr\frac{235}{27}r^2}{4m^2r^4}\times\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{94g}{3}r}$

26 一对称陀螺初始时自旋角速率 $\dot{\psi}=\sqrt{6mghJ_*}/J_z$，转轴与铅直轴间的夹角为 $\theta=\theta_0=\arccos(3/4)$，尔后释放。求在此后的运动中，$\theta$ 角将在什么范围内摆动？

解：依题意知：陀螺将在θ_0与另一角度θ'之间章动，依平衡知

$U_{(\theta_0)}=U_{(\theta)}$将$s=J_z\varepsilon\cos\theta_0=\sqrt{6mghJ_*}\cos\theta_0$代入$U_{(\theta)}$得：

$$U_{(\theta)}=3mgh\frac{(\cos\theta_0-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}+\frac{1}{2}J_z\varepsilon^2+mgl\cos\theta$$

则：$U_{(\theta)}-U_{(\theta_0)}=3mgl\dfrac{(\cos\theta_0-\cos\theta')^2}{\sin^2\theta'}+mgl(\cos\theta'-\cos\theta_0)=0$

即：$\cos^2\theta'-3\cos\theta'+3\cos\theta_0-1=0$

代入：$\cos\theta_0=\dfrac{3}{4}$；　可得：　$\theta'=\arccos(\dfrac{1}{2})$

27 一对称陀螺，质心离顶点的距离为l，对顶点的主转动惯量为J_*，J_*和J_z。若此陀螺对顶点作规则进动，进动角速度大小为ω_0，章动角为θ_0。求出陀螺的角速度在对称轴方向的分量.

解：因为是规则进动。有：$\omega_x=\dot{\theta}=0,\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta_0=\omega_0\sin\theta_0$

将其代入重陀螺的点运动第一方程：

$$J_*\dot{\omega}_x-J_*\omega_y\dot{\varphi}\cos\theta+J_z\omega_z\dot{\varphi}\sin\theta=mgl\sin\theta$$

可解得：$\omega_z=\dfrac{mgl}{J_z\omega_0}+\dfrac{J_*}{J_z}\omega_0\cos\theta_0$

28 一带轴的匀质轮子，半径为r，轴的质量可忽略不计。，在离盘心为d的轴的端点处用一长为l的轻绳悬挂于天花板上的 0 点。今轮子绕轴以角速度$\bar{\omega}$高速自转，轮轴水平地绕过定点 0 的铅直线作规则进动。求绳子与铅直线间的夹角α。（由于α很小，可作近似$\sin\alpha\quad\alpha$）

解：依角动量定理得：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d^*\vec{L}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{L}=\Omega\vec{k}\times I_C\omega\vec{j}=-\Omega I_C\omega\vec{i}=\vec{M}=-mgd\vec{i}$$

可得：$\Omega=\dfrac{mgd}{I_C\omega}=\dfrac{2gd}{r^2\omega}$

又依受力分析知：$F_{向} = m(l\sin\alpha + d)\Omega^2 = mg\tan\alpha$

可得：$\Omega^2 = \dfrac{g\tan\alpha}{l\sin\alpha + d}$

并与上式联立，取 $\tan\alpha \quad \sin\alpha \quad \alpha$

可解得：$\alpha = 4gd^2 \big/ (r^4\omega^2 - 4gld^2)$

第六章 分析力学

滚滚长江东逝水，浪花淘尽英雄。达朗贝尔，拉格朗日，哈密顿等许多前贤相聚于此“力学论剑”，其“冲击波”使非线性问题也不攻自破。长江后浪推前浪，你也许在此可以更加“得意忘形‘。微分方程将叱咤风云。

[要点分析与总结]

1 虚功原理：（平衡时）

理想条件下，力学系的平衡条件是各质 点上的主动力所作的虚功之和为零：

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0$$

用广义坐标来表述： $\dfrac{\delta W}{\delta q_\alpha} = \sum_{i=1}^{3n} F_i \dfrac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = 0$

2 达朗贝尔原理（动力学下的虚功原理）：

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \bullet \delta \vec{r}_i = 0$$

〈析〉δr，δW均是在时间未变化（$dt=0$）时所设想的量，而广义坐标q_a可以是角度，长度或其它的独立的坐标变量。

3 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (a = 1, 2, 3, \cdots, s)$$

在保守力下，取拉氏数 $L = T - V$

方程为： $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$

若拉氏数中L不显含广义坐标q_β，则：$\frac{\partial L}{\partial q_\beta}=0$

即 循环积分： $p_\beta=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}=const$

4 微振动

非线性系统在小角度近似下，对拉氏方程的应用

5 哈密顿函数与正则方程

（1）哈密顿函数

$$H(p,q,t)=-L+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha$$

式中$p_\alpha=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$为广义坐标动量

（2）正则方程

$$\begin{aligned}&\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\\&\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\qquad (a=1,2,3,\cdots,s)\\&\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

若哈氏函数H中不显含广义坐标q_β，则：$\dot{p}_\beta=-\frac{\partial H}{\partial q_\beta}=0$

即：循环积分 $p_\beta=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta}=const$

在稳定条件下（H 中不显含t），$\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\ \dot{q}_\alpha=2T$则有能量积分：

$H=T+V$

6 泊松括号

$$[G,H]=\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha})$$

7 哈密顿原理与正则变换

（1）哈密顿原理

保守力系下：$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$

定义：$S=\int_{t_1}^{t_2} L dt$ 为主函数

（3）正则变换

通过某种变数的变换，找到新的函数 H^*，使正则方程的形式不变（相当于坐标变换）。

新的正则变量：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_\alpha &= \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2\cdots\mathrm{p}_s;\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2,\cdots\mathrm{q}_s;\mathrm{t}) \\ \mathrm{Q}_\alpha &= \mathrm{Q}_\alpha(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2\cdots\mathrm{p}_s;\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2,\cdots\mathrm{q}_s;\mathrm{t}) \end{aligned}$$

正则变换的条件：

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha dq_\alpha - \mathrm{P}_\alpha d\mathrm{Q}_\alpha) + (H^* - H)dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial U}{\partial Q_\alpha}d\mathrm{Q}_\alpha\right) + \frac{\partial U}{\partial t}dt \\ &= dU \end{aligned}$$

依上亦可得：

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \\ \mathrm{P}_\alpha &= -\frac{\partial U}{\partial Q_\alpha} \\ H^* - H &= \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned}$$

U 为母函数，当 P_α，Q_α，H 不显含 t 时，

以上条件等于：$\sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha dq_\alpha - \mathrm{P}_\alpha d\mathrm{Q}_\alpha) = dU$

〈析〉：正则变换妙在不解方程而使问题出解。“得意忘形”到极点了。

[解题演示]

1. 一长为l_0质量为m的匀质棒，斜靠在固定的半球形碗的边缘，一端置于碗内，如图。已知碗是光滑的，半径为r；棒在碗内的长度为l $(l<2r)$。用虚功原理证明棒的全长为$l_0=\dfrac{4(l^2-2r^2)}{l}$。

解：如右图所示，取定α,β。依几何关系知：$\beta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$

依余弦定理：$\sin\alpha=-\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{l^2-2r^2}{2r^2}\cdots\cdots *$

知：杆的势能：$V=mg(\dfrac{l_0}{2}\sin\beta-r\cos\alpha)=mg[\dfrac{l_0}{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})-r\cos\alpha]$

因静平衡，应用虚功原理得：$\dfrac{dV}{d\alpha}=mg[-\dfrac{l_0}{4}\cos(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})+r\sin\alpha]=0$

得：$\dfrac{l_0}{4}\cos(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})=r\sin\alpha$

两边平方并代入*可解得：$l_0=\dfrac{4(l^2-2r^2)}{l}$

2. 用绳子等距离地在定点0处悬挂两个相同的匀质球，两球之上另放置一相同的球体，如图。已知分别悬挂两球的绳长都是l。用虚功原理求出α角与β角之间的关系。

解：依受力分析知$F_T=\dfrac{mg}{2}\tan\beta$

且：$\delta W=-2mg\delta(l\cos\alpha)+mg\delta(l\cos\alpha-2r\cos\beta)+2F_T\delta(l\sin\alpha)$

$$=-2mgl\sin\alpha\delta\alpha-mgl\sin\alpha\delta\alpha+2mgl\sin\beta\delta\beta+2F_Tl\cos\alpha\delta\alpha$$

则：依虚功原理达到平衡时有：

$$\frac{\delta W}{\delta\alpha}=-3mgl\sin\alpha+2F_Tl\cos\alpha$$

$$=-3mgl\sin\alpha+mgl\tan\beta\cos\alpha$$

$$=0$$

可得：　　$\tan\beta = 3\tan\alpha$

3. 用轻质橡皮圈捆扎三个置于光滑水平桌面上的相同球体，捆扎的高度与还需心的高度相同。将第四个同样的球体置于三球之上。由虚功原理求出橡皮圈中的张力。已知每个球体的重量为 P。

解：如右图所示。取三个桌面上球的球心所在面，及四球心立体

结构可分析得：$d=\sqrt{3}\sqrt{4r^2-h^2};h\big|_{t=0}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r$

皮周长：$l=3d+2\pi r=3\sqrt{3}\sqrt{4r^2-h^2}+2\pi r$

依虚功原理：$\delta W=mg\delta h+F_T\delta l=mg\delta h-\dfrac{3\sqrt{3}h}{\sqrt{4r^2-h^2}}F_T\delta h$

则依：　　$\dfrac{\delta W}{\delta h}=mg-\dfrac{3\sqrt{3}h}{\sqrt{4r^2-h^2}}F_T=0$

代入：　　$h\big|_{t=0}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r$

得：$F_T=\dfrac{mg}{3\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{18}mg$

4. 一弹性绳圈，它的自然长度为 l_0，弹性系数为 k，单位长度质量（线密度）为 σ。将此弹性圈套在一半径为 $R(2\pi R>l_0)$ 的光滑球面上，弹性圈因自重而下滑。用虚功原理法语出平衡时弹性绳圈对球心所张的角度为 θ 应满足的方程。

解:易知:绳伸长量 $x=2\pi R\sin\theta-l_0$ 以 0 为参照点,高度为: $h=R\cos\theta$

$$\delta W=mg\delta h+kx\delta x$$

$$=-\sigma gl_0R\sin\theta\delta\theta+k(2\pi R\sin\theta-l_0)\ 2\pi R\cos\theta\delta\theta$$

$$\frac{\delta W}{\delta\theta}=-\sigma g l_0 R\sin\theta+2\pi^2R^2k\sin2\theta-2\pi kRl_0\cos\theta=0$$

化简得：$\sin2\theta-\frac{l_0}{\pi R}\cos\theta-\frac{\sigma g l_0}{2\pi^2Rk}\sin\theta=0$

5. 一半径为 R 的半球形碗内装有两个质量分别为 m_1 和 m_2 的球体，它们的半径同为 r（$2r<R$）。用虚功原理求出这两个球体在碗中平衡时它们的连心线与水平线间的夹角

解：如右图所示，以 o 为参照点，取 $\frac{1}{2}\angle O_2OO_1=\varphi$， O_2O_1 与水平线角为 θ。则有：$h_{O_1}=-(R-r)\cos(\varphi-\theta),h_{O_2}=-(R-r)\cos(\varphi+\theta)$

$$\delta W=m_1g\delta h_{O_1}+m_2g\delta h_{O_2}=-m_1g(R-r)\sin(\varphi-\theta)\delta\theta+m_2g(R-r)\sin(\varphi+\theta)\delta\theta$$

则：
$$\begin{aligned}\frac{\delta W}{\delta\theta}&=-(R-r)g[m_1\sin(\varphi-\theta)-m_2\sin(\varphi+\theta)]\\&=-\frac{(R-r)g}{\cos\varphi\cos\theta}[m_1\tan\varphi-m_1\tan\theta-m_2\tan\varphi-m_2\tan\theta]\\&=0\end{aligned}$$

代入 $\tan\varphi=\frac{r}{\sqrt{(R-r)^2-r^2}}=\frac{r}{\sqrt{R^2-2Rr}}$

得：$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\tan\varphi$　　　$\theta=\arctan\frac{(m_1-m_2)r}{(m_1+m_2)\sqrt{R^2-2Rr}}$

6. 一轻杆长为 $2l$，一端光滑铰链于固定点 0，另一端点及中点分别焊接有质量为 m' 和 m 的小球。杆可在铅直平面内绕固定点摆动。写出此力学 系统的拉格朗日函数，并求出其作微小摆动时的周期。

解：以 0 为参照点，取杆与竖直方向夹角为 θ。则有：

$$V=-mgl\cos\theta+(-m'g2l\cos\theta)=-(m+2m')gl\cos\theta$$
$$T=\frac{1}{2}J_{m'}\dot\theta^2+\frac{1}{2}J_m\dot\theta^2=\frac{m+4m'}{2}l^2\dot\theta^2$$

拉氏函数：　　$L = T - V = \dfrac{m+4m'}{2} l^2\dot{\theta}^2 + (m+2m')gl\cos\theta$

解拉氏方程：$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = (m+4m')l^2\ddot{\theta} + (m+2m')gl\sin\theta = 0$

微振动，取近似$\sin\theta \quad \theta$，　得：

$$\ddot{\theta} = -\frac{m+2m'}{m+4m'}\frac{g\theta}{l}$$

积分：　　　　$\theta = A\cos(\sqrt{\dfrac{m+2m'}{m+4m'}\dfrac{g}{l}}t) + B$　　（A，B 为积分常数）

则：$T_{(\text{周期})} = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+2m'}{m+4m'}\dfrac{g}{l}}$

7.　一半径为r质量为m'的圆柱形轱辘，其轴线沿水平方向。轱辘上绕有长为l的轻绳，绳的自由端系一质量为m的重物。初始时绳子完全绕在轱辘上，体系静止。尔后重物下落带动轱辘转动。写出此力学系列化的拉格朗日函数，并求出绳子完全释放时轱辘转动角速度的大小。

解：如右图，取θ为转过的角度，x为下降的距离。有：$x = r\theta$。

取 O 为参照点：　$V = -mgx = -mgr\theta$

$$T = \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

则：　$L = T - V = \dfrac{2m+m'}{4}r^2\dot{\theta}^2 + mgr\theta$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = (\frac{2m+m'}{2})r^2\ddot{\theta} - mgr = 0$$

得：　$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dfrac{2m}{2m+m'}\dfrac{g}{r}$

积分得：$\dot{\theta}^2 = \dfrac{4mg\theta}{(2m+m')r}$

当完全释放（$\theta = \dfrac{L}{r}$）时：$\omega = \dot{\theta}\Big|_{\theta=\frac{L}{r}} = \dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{mgl}{2m+m'}}$

8. 上题中，如果绳子具有弹性，弹性势能为$\frac{ks^2}{2}$，s为绳子的伸长证明重物m的运动为维持恒定的加速运动上附加一角频率为ω的振动。其中$\omega^2 = k\frac{(m'+2m)}{mm'}$。求出此种振动的振幅。设初始时绳子完全绕在轱辘上，体系静止，尔后释放

解：参数同上题，则可得：$x = s + r\theta$；$V = -mgx + \frac{ks^2}{2}$；$T = \frac{1}{4}m'r^2\dot{\theta}^2 + \frac{ks^2}{2}$

则：$L = T - V$

$$= \frac{1}{4}m'r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s} + r\dot{\theta}\right)^2 + mg\left(s + r\theta\right) - \frac{ks^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}\left(m' + 2m\right)r^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{s}\dot{\theta} - \frac{ks^2}{2} + mg\left(s + r\theta\right)$$

可得：
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\left(m' + 2m\right)r^2\ddot{\theta} + mr\ddot{s} - mgr = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = m\ddot{s} + mr\ddot{\theta} + ks - mg = 0 \end{cases}$$

即：
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{kr}{J_0}s \\ \ddot{s} = -k\frac{(m' + 2m)}{mm'}s + g \end{cases}$$

积分得：
$$\begin{cases} s = -\frac{g}{\omega^2}\cos\omega t + \frac{g}{\omega^2} \\ \theta = \frac{krg\cos\omega t}{J_0\omega^4} + \frac{krgt^2}{2g\omega^2} - \frac{krg}{J_0\omega^4} \end{cases}$$

式中 $\omega^2 = k\frac{(m' + 2m)}{mm'}$

故：$x = s + r\theta$

$$= \frac{g}{\omega^4}\left(\frac{2k}{m'} - \omega^2\right)\cos\omega t + \frac{kgt^2}{m'\omega^2} + \frac{g}{\omega^4}\left(\omega^2 - \frac{2k}{m'}\right)$$

即得恒定加速度值：$a=\dfrac{2kg}{m'\omega^2}=\dfrac{2mg}{m'+2m}$

振动角频率：　　$\omega^2=k\dfrac{(m'+2m)}{mm'}$

振幅：$A=\left|\dfrac{g}{\omega^4}\left(\dfrac{2k}{m'}-\omega^2\right)\right|=\dfrac{m'^2mg}{k\left(m'+2m\right)^2}$

9. 力学系统如图所示。二滑轮为相同的圆盘，半径为r质量为m。悬挂的重物质量分别为m_1和m_2，且$m_2<\dfrac{m+m_1}{2}g$。初始时系统静止（1）导出此力学系列化的运动微分方程；（2）分别求出两重物下降的速度与重物下落距离h之间的关系。

解：如右图。依几何关系知：$2y_{m_1}+y_{m_2}=l_0$

得：$y_{m_1}=-\dfrac{1}{2}y_{m_2}+\dfrac{l_0}{2}$

取y_{m_1}作广义坐标有：

$$V=-m_2gy_{m_2}-mgy_{m_1}-m_1g\left(y_{m_1}+l_1\right)$$

$$T=T_{o1}+T_{o2}+T_{m_1}+T_{m_2}$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{y}_{m_1}^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{y}_{m_2}}{r}\right)^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{y}_{m_1}}{r}\right)^2+\frac{1}{2}m_1\dot{y}_{m_1}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_{m_2}^2$$

$$=\frac{\dot{y}_{m_2}^2}{16}\left(8m_2+2m_1+7m\right)$$

可得：$L=T-V$

$$=\frac{\dot{y}_{m_2}^2}{16}\left(8m_2+2m_1+7m\right)+\frac{1}{2}\left(2m_2-m_1-m\right)y_{m_2}g+\frac{ml_0}{2}g-m_1g\left(\frac{l_0+l_1}{2}\right)$$

可得：$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_{m_2}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y_{m_2}}=\dfrac{\ddot{y}_{m_2}}{8}\left(8m_2+2m_1+7m\right)-\dfrac{g}{2}\left(2m_2-m_1-m\right)=0$

即得系统运动的微分方程：$\ddot{y}_{m_2}=\dfrac{4(m_1+m-2m_2)}{8m_2+2m_1+7m}g$

再对其进行第一积分：$\ddot{y}_{m_2}=\dot{y}_{m_2}\dfrac{d\dot{y}_{m_2}}{dy_{m_2}}=\dfrac{d(\frac{1}{2}\dot{y}_{m_2}{}^2)}{dy_{m_2}}$

可积得：
$$\upsilon_{m_2}=\dot{y}_{m_2}=2\sqrt{\frac{4(m_1+m-2m_2)}{8m_2+2m_1+7m}gh}$$
$$\upsilon_{m_1}=\dot{y}_{m_1}=-\frac{1}{2}\dot{y}_{m_2}=-\sqrt{\frac{4(m_1+m-2m_2)}{8m_2+2m_1+7m}gh}$$

10. 一质量为m，半径为r的小圆住体，置于一半径为 R 的大圆柱面的内侧作纯滚动。写出小圆柱体的拉格朗日函数，并求出在最低点附近小圆柱体作微小振动时的周期

解：以 0 为参照点：

$$V=-mg(R-r)\cos\theta$$
$$T=\frac{1}{2}J(\frac{\upsilon}{r})^2=\frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2[\frac{\dot{\theta}}{r}(R-r)]^2=\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

则：$L=T-V=\dfrac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)\cos\theta$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}+mg(R-r)\sin\theta=0$$

得：$\theta=A\sin[\sqrt{\dfrac{2g}{3(R-r)}}t]+B$

即：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{3(R-r)}{2g}}$

11. 一质量为m，半径为r的小圆柱体，放在半径为R的另一大圆柱体上，大圆柱体m'则置于粗糙的水平面上。两柱体的轴相互平等，质心在同一竖直平面内，初始时力学系统静止。若以初始时大圆柱体的质心为固定坐标系的坐标原点，证明此后的任意时刻小圆柱体的质心坐标为

$$x_m = \frac{m\theta + (3m' + m)\sin\theta}{3(m' + m)}(R + r), y_m = (R + r)\cos\theta$$

解：由于纯滚动则：$\vec{\upsilon}_C = \overrightarrow{(R+r)} \times \dot{\vec{\theta}} + \vec{R} \times \dot{\vec{\varphi}}$

得：$\upsilon_C{}^2 = [(R+r)\dot{\theta} - R\dot{\varphi}\cos\theta]^2 + R^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta$

$$= [R^2\dot{\varphi}^2 + (R+r)^2\dot{\theta}^2 - 2R(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta]$$

有：$L = T - V$

$$= \frac{3}{4}m'R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m[(R+r)\dot{\theta} + R\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_C{}^2 - mg(R+r)\cos\theta$$

$$= \frac{3}{4}(m' + m)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m(R+r)^2\dot{\theta}^2$$

$$+ mR(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}(\frac{1}{2} - \cos\theta) - mg(1 + \cos\theta)(R + r)$$

则：$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dfrac{3}{2}(m' + m)R^2\dot{\varphi} + mR(R+r)\dot{\theta}(\dfrac{1}{2} - \cos\theta) = const = 0$

得：$R\varphi = \dfrac{m(\sin\theta - \theta)}{3(m' + m)}(R + r)$

所以：$x_m = (R + r)\sin\theta - R\varphi = \dfrac{m\theta + (3m' + m)\sin\theta}{3(m' + m)}(R + r)$

$$y_m = (R + r)\cos\theta$$

点评：其实此类题用能量变分法有时更简单（对t或关于t变量的变分为零）。此题中：$\dfrac{dE}{d\dot{\varphi}} = \dfrac{d(T+V)}{d\dot{\varphi}} = 0$。

12. 小球 1 和小球 2 的质量分别为m_1和m_2，用绳子相连，绳子穿过光滑水平桌面上的小孔。小球 1 在桌面上运动，小球 2 则垂直悬挂在桌面下。写出此力学系的拉格朗日函数和所有的第一积分。设绳长为l。

解：设m_1到孔的距离为r。以孔为参照点有：

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2$$ （此式中用到 $\dot{r}_1=-\dot{r}_2=\dot{r}$ ）

$$V=-m_2g(l-r)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2+m_2g(l-r)$$

（1）L 中不含积分 θ，循环积分：$\frac{\partial L}{\partial\theta}=m_1r^2\dot{\theta}=L_0$

（2）能量表达式中不含 t，能量积分：

$$E=\int_0^t\frac{d(T+V)}{dt}=T+V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2-m_2g(l-r)$$

13. 长为 $2l$，质量为 m 的匀质棒，两端分别用长都为 s 的轻绳垂直悬挂。今若突然将其中一根绳子剪断，用拉格朗格日方程求出棒下落的运动微分方程。

解：参量及坐标如右图所示。则：

$$\vec{r}_C=-(s\cos\theta+l\cos\varphi)\vec{j}+[l\sin(-\varphi)-s\sin\theta]\vec{i}$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_C^{\,2}+\frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}m[(s\sin\theta\dot{\theta}+l\cos\varphi\dot{\varphi})^2+(l\cos\varphi\dot{\varphi}-s\cos\theta\dot{\theta})^2]+\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ms^2\dot{\theta}^2+msl\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)$$

$$V=-mg(s\cos\theta+l\cos\varphi)$$

故：$L=T-V$

$$=\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ms^2\dot{\theta}^2+msl\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)+mg(s\cos\theta+l\cos\varphi)$$

得拉氏方程：$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0\\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}})-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=0\end{cases}$

微分方程为：

$$\begin{cases} ms^2\ddot{\theta} + msl\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - msl\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta) + mgs\sin\theta = 0 \\ \dfrac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi} + msl\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + msl\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta) + mgs\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

14. 一半径为 r，质量为 m 的圆环，用三根长度都为 l 的无弹性轻绳在等弧点处水平悬挂，成一扭摆，如图所示。求此扭摆绕中心铅直轴扭转的微振动周期 T。

解：易分析得：

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2 \end{aligned}$$

（用到 $\cos\theta \quad 1-\dfrac{\theta^2}{2}$）

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

得：$\theta = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t\right) + B$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

15. 如图所示的耦合摆，若两摆锤的质量不同，分别为 m 和 m'。求此耦合摆的本征频率。初始条件为 $t=0$ 时，$\theta=\theta_0, \varphi=\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$，仅第一个摆有微小偏移 θ_0，求第二个摆可能达到的最大摆幅。当第二个摆的摆动最大时，第一个摆的摆幅是否为零？

解：$T = \dfrac{l^2}{2}(m\dot{\theta}^2 + m'\dot{\varphi}^2)$

$$V = gl[m(1-\cos\theta) + m'(1-\cos\varphi)] + \frac{1}{2}k(s-s_0)^2$$

$$s = l(\cos\theta - \cos\varphi)\vec{i} + l(\cos\varphi - \sin\theta)\vec{j} + s_0$$

经泰勒展开：$V=\frac{1}{2}gl(m\theta^2+m'\varphi^2)+\frac{1}{2}kl^2(\theta^2-2\theta\varphi+\varphi^2)$

$L=T-V$关于θ与φ的拉氏方程为：

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+(\frac{g}{l}+\frac{k}{m})\theta-\frac{k}{m}\varphi=0\\ \ddot{\varphi}-\frac{k}{m'}\theta+(\frac{g}{l}+\frac{k}{m'})\varphi=0\end{cases}$$

令 $\begin{cases}\theta=A_\theta e^{j\omega t}\\ \varphi=A_\varphi e^{j\omega t}\end{cases}$

代入得：$\begin{cases}(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2)A_\theta-\frac{k}{m}A_\varphi=0\\ -\frac{k}{m'}A_\theta+(\frac{g}{l}+\frac{k}{m'}-\omega^2)A_\varphi=0\end{cases}$

A_θ， A_φ有解的条件：$\left|\begin{pmatrix}\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m'} & \frac{g}{l}+\frac{k}{m'}-\omega^2\end{pmatrix}\right|=0$

可解出：$\omega^2=\frac{g}{l},\frac{g}{l}+\frac{k(m+m')}{mm'}$

且：$A_\theta^{(1,2)}\Big/A_\varphi^{(1,2)}=1,A_\theta^{(3,4)}\Big/A_\varphi^{(3,4)}=-\frac{m'}{m}$。则$\theta$与$\varphi$通解为：

$$\begin{cases}\theta=A_\theta{}^1e^{i\omega t}+A_\theta{}^2e^{-i\omega t}+A_\theta{}^3e^{i\omega' t}+A_\theta{}^4e^{-i\omega' t}\\ \varphi=A_\theta{}^1e^{i\omega t}+A_\theta{}^2e^{-i\omega t}-\frac{m'}{m}A_\theta{}^3e^{i\omega' t}-\frac{m'}{m}A_\theta{}^4e^{-i\omega' t}\end{cases}$$

式中$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}},\omega'=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{k(m+m')}{mm'}}$

代入$t=0$时， $\theta=\theta_0,\varphi=\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$可解出：

$$A_\theta{}^1=A_\theta{}^2=\frac{m\theta_0}{2(m+m')},A_\theta{}^3+A_\theta{}^4=\frac{m'\theta_0}{2(m+m')}$$

且令：$\omega_A=\frac{\omega-\omega'}{2},\omega_B=\frac{\omega+\omega'}{2}$

则：$\begin{cases}\varphi=\frac{2m\theta_0}{m+m'}\sin\omega_At\sin\omega_Bt\\ \theta=\varphi-\theta_0(\sin\omega_At\sin\omega_Bt-\cos\omega_At\cos\omega_Bt)=\varphi+\theta_0\cos(\omega_A+\omega_B)t\end{cases}$

第二个摆的最大摆幅：$\varphi_{\max}=\dfrac{2m\theta_0}{m+m'}$

此时：$\sin\omega_A t\sin\omega_B t=1,\cos\omega_A t\cos\omega_B t=0$

则有：$\theta\Big|_{\varphi_{\max}}=\varphi_{\max}-\theta_0=\dfrac{m-m'}{m+m'}\theta_0$

16. 摆长为l，摆捶质量为m的两个相同单摆串接成为一个双摆，如图。求此双摆在铅直平面内作微振动时的各个本征频率。

解：易知：$\vec{\upsilon}_{m_2}=l\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta)\vec{e}_{2n}+l(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\sin(\varphi-\theta)\vec{e}_{2\tau}$

（θ，φ如右图）

则：$V=-mgl(2\cos\theta+\cos\varphi)\overset{\text{近似}}{=}-mgl(\theta^2+\dfrac{1}{2}\varphi^2-3)$

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\upsilon_{m_2}{}^2\overset{\text{近似}}{=}ml^2(\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}\dot{\varphi})$$

$L=T-V$可得拉氏方程：$\begin{cases}2l^2\ddot{\theta}+l^2\ddot{\varphi}-2gl\theta=0\\ l^2\ddot{\varphi}+l^2\ddot{\theta}-gl\varphi=0\end{cases}$

设：$\begin{cases}\theta=A_\theta e^{i\omega t}\\ \varphi=A_\varphi e^{i\omega t}\end{cases}$

可得：$\begin{cases}2(l^2\omega^2-gl)A_\theta+l^2\omega^2A_\varphi=0\\ l^2\omega^2A_\theta+(l^2\omega^2-gl)A_\varphi=0\end{cases}$

有非零解条件：$\left|\begin{pmatrix}2(l^2\omega^2-gl) & l^2\omega^2\\ l^2\omega^2 & l^2\omega^2-gl\end{pmatrix}\right|=0$

易得：$\omega^2=(2\pm\sqrt{2})\dfrac{g}{l}$

所有本征频率为：

$$-\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}},\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}},-\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}},\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}}$$

17. 两质量为m和另一个质量为m'的球体用两根劲度系数都为k的轻质弹簧沿一直线串接，如图. 求出体系的微振动本征频率

解:取弹簧所在方向建立坐标系，且取参量如右图。有：

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^{\,2}+\dot{x}_2^{\,2})+\frac{1}{2}m'\dot{x}_3^{\,2}$$
$$V=\frac{1}{2}k(x_3-x_1-b)^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_3-b)^2$$

依振动特点，取简正坐标： $q_1=x_1, q_2=x_2-b, q_3=x_3-b$

代入上式得：

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^{\,2}+\dot{q}_2^{\,2})+\frac{1}{2}m'\dot{q}_3^{\,2}-\frac{1}{2}k(q_3-q_1)^2-\frac{1}{2}k(q_2-q_3)^2$$

得拉氏方程： $\begin{cases} m\ddot{q}_1-k(q_3-q_1)=0 \\ m\ddot{q}_2+k(q_2-q_3)=0 \\ m'\ddot{q}_3+k(2q_3-q_2-q_1)=0 \end{cases}$

设 $q_i=A_ie^{j\omega t}$ 得： $\begin{cases} (k-m\omega^2)A_1-kA_3=0 \\ (k-m\omega^2)A_2-kA_3=0 \\ (2k-m'\omega^2)A_3-kA_1-kA_2=0 \end{cases}$

方程有非零解的条件： $\left|\begin{pmatrix} k-m\omega^2 & 0 & -k \\ 0 & k-m\omega^2 & -k \\ -k & -k & 2k-m'\omega^2 \end{pmatrix}\right|=0$

可解得： $\omega^2=0,\frac{k}{m},\frac{2m+m'}{mm'}k.$

18. 一质量为 m 的质点在一光滑锥面的内壁上运动。锥体的半顶角为 α，锥体口朝上。以质点离锥体顶点的距离 r 及围绕锥体轴线转动的角度 φ 为广义坐标，写出质点的哈密顿函数；当质点绕锥体轴转动的角速度为多大时，可以绕轴作稳定的圆周运动？

解：此系统为保守系，参照如右图所示。则：

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\varphi}r\sin\alpha)^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2$$
$$V=mgr\cos\alpha$$

定义广义动量： $p_r=\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}, p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=m\dot{\varphi}r^2\sin^2\alpha$

得： $\dot{r}=\frac{p_r}{m},\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}$

则： $H=T+V=\frac{{p_\varphi}^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+\frac{{p_r}^2}{2m}+mgr\cos\alpha$

得： $\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{{p_\varphi}^2}{mr^3\sin^2\alpha}-mg\cos\alpha$

联： $\dot{p}_r=\frac{d(m\dot{r})}{dt}=m\ddot{r}$

当稳定时：$\ddot{r}=0$，此时：$\dot{p}_r=\frac{{p_\varphi}^2}{mr^3\sin^2\alpha}-mg\cos\alpha=0$

代入：$p_\varphi=m\dot{\varphi}r^2\sin^2\alpha$

可解得： $\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r\sin^2\alpha}}$

19. 一质量为m的质点在三维势场$V(r)$中运动。以球坐标r，θ和φ为质点的广义坐标，写出此质点的哈密顿函数。哪些广义坐标为循环坐标？并写出相应的循环积分。

解：如右图取地球中心为坐标原点，取参数如图. 则:

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$
$$V=-\frac{GMm}{r}=-\frac{k}{r}$$

则:哈密顿函数为: $H=T+V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-\frac{k}{r}$

广义动量坐标: $\begin{cases} p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \\ p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta \end{cases}$

得：
$$\begin{cases}\dot{r}=\dfrac{p_r}{m}\\ \dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{mr^2}\\ \dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\end{cases}$$

代入 H 得：$H=T+V=\dfrac{1}{2m}(\dfrac{p_\varphi{}^2}{r^2\sin^2\alpha}+p_r{}^2+\dfrac{p_\theta{}^2}{r^2})-\dfrac{k}{r}$

上式中不含φ，故φ为循环坐标故：

$$p_\varphi=m\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta=C=const$$
$$\dot{\varphi}=\frac{C}{mr^2\sin^2\theta}$$

20. 写出对称陀螺丝绕其顶点 0 作定点运动的哈密顿量。设陀螺关于对称轴及横轴的转动惯量分别为 I, I_*. 质心离项点的距离为l.

解:依题参数如右图则有:

$$T=\frac{1}{2}I_*(\omega_x{}^2+\omega_y{}^2)+\frac{1}{2}I_z\omega_z{}^2=\frac{1}{2}I_*(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}I_z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$
$$V=mgl\cos\theta$$

则:
$$\begin{cases}p_\theta=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=I_*\dot{\theta}\\ p_\varphi=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I_*\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_z\cos\theta(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\\ p_\psi=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=I(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\end{cases}$$

可得:
$$\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{I_*}\\ \dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_*\sin^2\theta}\\ \dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\dfrac{p_\psi}{I_z}\end{cases}$$

则：$H=T+V=\dfrac{p_\theta^{\ 2}}{2I_*}+\dfrac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_*\sin^2\theta}+\dfrac{p_\psi^{\ 2}}{2I}+mgl\cos\theta$

21. 力学量 A，B 和 C 都是体系正则变量的函数，证明它们的泊松括号存在如下关系：

$[A,B]=-[B,A]$；$[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$；

$[AB,C]=[A,C]B+A[B,C]$

解：证明：

（1）$[A,B]=\sum_{\alpha=1}^{s}(\dfrac{\partial A}{\partial q_\alpha}\dfrac{\partial B}{\partial p_\alpha}-\dfrac{\partial A}{\partial p_\alpha}\dfrac{\partial B}{\partial q_\alpha})$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha})$$
$$=-[B,A]$$

（2）$[A+B,C]=\sum_{\alpha=1}^{s}\{\dfrac{\partial(A+B)}{\partial q_\alpha}\dfrac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\dfrac{\partial(A+B)}{\partial p_\alpha}\dfrac{\partial C}{\partial q_\alpha}\}$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial C}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial B}{\partial p_\alpha}\frac{\partial C}{\partial q_\alpha})$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial C}{\partial q_\alpha})+\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial B}{\partial p_\alpha}\frac{\partial C}{\partial q_\alpha})$$
$$=[A,C]+[B,C]$$

（3）$[AB,C]=\sum_{\alpha=1}^{s}\{\dfrac{\partial(A\bullet B)}{\partial q_\alpha}\dfrac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\dfrac{\partial(A\bullet B)}{\partial p_\alpha}\dfrac{\partial C}{\partial q_\alpha}\}$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\{[(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha})B+A(\frac{\partial B}{\partial q_\alpha})]\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}-[(\frac{\partial A}{\partial p_\alpha})B+A(\frac{\partial B}{\partial p_\alpha})]\frac{\partial C}{\partial q_\alpha}\}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\{(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial C}{\partial q_\alpha})B+A(\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial C}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial B}{\partial p_\alpha}\frac{\partial C}{\partial q_\alpha})\}$$
$$=[A,C]B+A[B,C]$$

22. 证明，任何正则变量的函数，$\mathrm{G}(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2\cdots\mathrm{p}_\mathrm{s};\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2,\cdots\mathrm{q}_\mathrm{s};\mathrm{t})$，存在如下关系：

$$\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}=-[p_\alpha,G];\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}=[q_\alpha,G] \qquad (\alpha=1,2,3\cdots,s)$$

证明：（1）$[p_\alpha,G]=\sum_{\beta=1}^{s}(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial G}{\partial p_\beta}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial G}{\partial q_\beta})=0-\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}$

得：$\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}=-[p_\alpha,G]$

（2）$[\partial q_\alpha,G]=\sum_{\beta=1}^{s}(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial G}{\partial p_\beta}-\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial G}{\partial q_\beta})=\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}$

得：$\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}=[q_\alpha,G]$

23. 证明一质点关于坐标原点的位矢$\vec{r}$，动量$\vec{p}$和角动量$\vec{L}$的直角坐标分量存在如下关系：

$[x,L_y]=z$；　$[x,L_z]=-y$；　$[x,L_x]=0$

$[p_x,L_y]=p_z$；　$[p_x,L_z]=-p_y$；　$[p_x,L_x]=0$

$[L_x,L_y]=L_z$；　$[L_x,L_z]=-L_y$；　$[L_x,L^2]=0$

证明：$\vec{L}=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}=\vec{r}\times\vec{p}=(yp_z-zp_y)\vec{i}+(zp_x-xp_z)\vec{j}+(xp_y-yp_x)\vec{k}$

可得：$L_x=yp_z-zp_y,L_y=zp_x-xp_z,L_z=xp_y-yp_x$

（1）$[x,L_y]=\sum_{\alpha=x,y,z}(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial\alpha})=\frac{\partial L_y}{\partial p_x}=z$

$[x,L_z]=\sum_{\alpha=x,y,z}(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial L_z}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_z}{\partial\alpha})=\frac{\partial L_z}{\partial p_x}=-y$

$[x,L_x]=\sum_{\alpha=x,y,z}(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial L_x}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_x}{\partial\alpha})=\frac{\partial L_x}{\partial p_x}=0$

（2）$[p_x,L_y]=\sum_{\alpha=x,y,z}(\frac{\partial p_x}{\partial\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial\alpha})=-\frac{\partial L_y}{\partial x}=p_z$

$$[p_x, \mathrm{L_z}] = \sum_{\alpha=x,y,z} (\frac{\partial p_x}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial \alpha}) = -\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial x} = -p_y$$

$$[p_x, \mathrm{L_x}] = \sum_{\alpha=x,y,z} (\frac{\partial p_x}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial \alpha}) = \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial x} = 0$$

（3） $$[\mathrm{L_x}, \mathrm{L_y}] = \sum_{\alpha=x,y,z} (\frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{L_y}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathrm{L_y}}{\partial \alpha})$$

$$= \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{L_y}}{\partial p_z} - \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial p_y}\frac{\partial \mathrm{L_y}}{\partial z}$$

$$= xp_y - yp_x$$

$$= \mathrm{L_z}$$

$$[\mathrm{L_x}, \mathrm{L_z}] = \sum_{\alpha=x,y,z} (\frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial \alpha})$$

$$= \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial p_y} - \frac{\partial \mathrm{L_x}}{\partial p_y}\frac{\partial \mathrm{L_z}}{\partial y}$$

$$= xp_z - zp_x$$

$$= -L_y$$

$$[\mathrm{L_x}, \mathrm{L_x}] = 0, L^2 = \vec{L} \bullet \vec{L}$$

$$[\mathrm{L_x}, \mathrm{L}^2] = [\mathrm{L_x}, \vec{L} \bullet \vec{L}]$$

$$= [\mathrm{L_x}, \vec{L}] \bullet \vec{L} + \vec{L} \bullet [\mathrm{L_x}, \vec{L}]$$

$$= 2\vec{L} \bullet [\mathrm{L_x}, \mathrm{L_x}\vec{i} + \mathrm{L_y}\vec{j} + \mathrm{L_z}\vec{k}]$$

$$= 2\vec{L} \bullet (\mathrm{L_z}\vec{j} - \mathrm{L_y}\vec{k})$$

$$= 2(\mathrm{L_y L_z} - \mathrm{L_z L_y})$$

$$= 0$$

24. 试问变换$Q = q, P = 2p$是正则变换吗？

解：因为： $p = \frac{\partial U}{\partial q}, \mathrm{P} = -\frac{\partial U}{\partial Q}$

则：

$$pdq - \mathrm{P}\,d\mathrm{Q} = \frac{\partial U}{\partial q}dq + \frac{\partial U}{\partial Q}d\mathrm{Q} == \frac{\partial U}{\partial q}dq + \frac{\partial U}{\partial q}dq = 2\frac{\partial U}{\partial q}dq = d(2U)$$

即：是正则变换

25. 取母函数$U(q,P)=\sum_{\alpha=1}^{s}q_\alpha \mathrm{P}_\alpha$，求出正则变换关系。

解：$p=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial U(q,P)}{\partial q_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial (q_\alpha \mathrm{P}_\alpha)}{\partial q_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}\mathrm{P}_\alpha$

$$Q=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial U(q,P)}{\partial \mathrm{P}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial (q_\alpha \mathrm{P}_\alpha)}{\partial \mathrm{P}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}q_\alpha$$

26. 试证变换$Q=\ln(\frac{1}{q}\sin p), P=q\cot p$为一正则变换。

证明：$pdq-\mathrm{P}d\mathrm{Q}=pdq-q\cot pd(\ln(\frac{1}{q}\sin p))$

$$\begin{aligned}
&=pdq-q\cot p(\frac{\cos p}{\sin p}dp-\frac{1}{q}dq)\\
&=(p+\cot p)dq-q\cot^2 pdp\\
&=pdq+qdp+\cot pdq-\frac{q}{\sin^2 p}dp\\
&=d(pq)+d(q\cot p)\\
&=d(pq+q\cot p)\\
&=dU
\end{aligned}$$

27. 证明，变换关系$q=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos P, p=(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\sin P$为一正则变换。

证明：依$q=(2Q/k)^{\frac{1}{2}}\cos P, p=(2Qk)^{\frac{1}{2}}\sin P$，

可得：

$$pdq-\mathrm{P}d\mathrm{Q}=pdq-\arctan\frac{p}{kq}d(\frac{p^2+k^2q^2}{2k})$$

$$
\begin{aligned}
&= pdq - d(\frac{p^2}{2k}\arctan\frac{p}{kq}) + \frac{\frac{p^2}{2k}}{1+(\frac{p}{kq})^2}d(\frac{p}{kq}) - d(\frac{k}{2}q^2\arctan\frac{p}{kq}) + \frac{\frac{q^2}{2k}}{1+(\frac{p}{kq})^2}d(\frac{p}{kq}) \\
&= -d(\frac{p^2}{2k}\arctan\frac{p}{kq} + \frac{k}{2}q^2\arctan\frac{p}{kq}) + \frac{k}{2}q^2 d(\frac{p}{kq}) + pdq \\
&= -d[(\frac{p^2}{2k} + \frac{k}{2}q^2)\arctan\frac{p}{kq}] + \frac{q}{2}dp + \frac{p}{2}dq \\
&= d[\frac{pq}{2} - \frac{1}{2}(\frac{p^2}{k} + kq^2)\arctan\frac{p}{kq}] \\
&= dU
\end{aligned}
$$

28. 质量为 m 的质点竖直上抛，写出质点运动的哈密顿函数。利用母函数 $U = mg(\frac{1}{6}gQ^3 + xQ)$ 作正则变换，求解此质点的运动。求解此质点的运动。其中 x 为质点上抛的距离，Q 为“新广义坐标”；在初始时刻 $x = 0, \dot{x} = \upsilon_0$。

解：$H = T + V = \frac{p_x^{\ 2}}{2m} + mgx$

则：$p_x = \frac{\partial U}{\partial x} = mgQ$

得：$H = \frac{1}{2}mg^2Q^2 + mgx$

$$P = -\frac{\partial U}{\partial Q} = -\frac{1}{2}mg^2Q^2 - mgx$$

定义新的哈氏函数得：$H^* = -P$

则有：$\dot{P} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q} = 0, \dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P} = -1$

积分得：$P = A, Q = -t + B$　（A，B 为常数）

代入原哈氏函数得：$-A = \frac{1}{2}mg^2(-t+B)^2 + mgx$

代入$t=0$时$x=0,\dot{x}=\upsilon_0$。

即可得：$x=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2$