非线性波动方程与极化理论

——周张凯

中山大学 物理学院

第二讲

1. 非线性介质的波动方程

2. 非线性极化理论

一、非线性极化方程

1. 非线性介质的基本波动方程的导入

1） 思考——我们有什么已知条件？

麦氏方程组

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

(1-1)

物质方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{\chi} \bullet \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

(1-2)

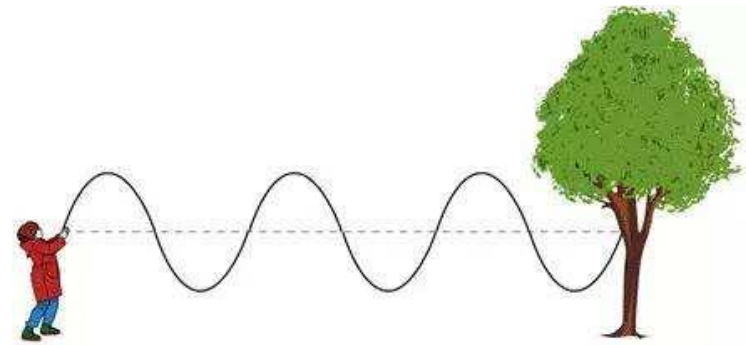
一、非线性极化方程

1. 非线性介质的基本波动方程的导入

2） 思考——什么是波动方程?

波动方程起源于弦运动方程

(达朗贝尔)



$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$f(z，t)$为弦上点的位移

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0$$

△ 是拉普拉斯算符

表示空间坐标取两阶导

一、非线性极化方程

1. 非线性介质的基本波动方程的导入

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0$$

3） 思考——如果要得到波动方程，我们需要什么？ ΔE

麦氏方程组

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \qquad \nabla \bullet \vec{D} = \rho \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0 \qquad \textbf{(1-1)}$$

物质方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{\chi} \bullet \vec{E} \qquad \vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \qquad \textbf{(1-2)}$$

$$\Delta A = \nabla^2 A$$

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

需要对麦克斯韦方程做算符操作！

一、非线性极化方程

1. 非线性介质的基本波动方程的导入

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0$$

3） 思考——如果要得到波动方程，我们需要什么？ ΔE

麦氏方程组

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1\text{-}1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

物质方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (1\text{-}2)$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{\chi} \bullet \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\Delta A = \nabla^2 A$$

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\boldsymbol{P}_{NL} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\chi}^{(2)} : \boldsymbol{EE} + \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(3)} \vdots \boldsymbol{EEE} \cdots = \boldsymbol{P}^{(2)} + \boldsymbol{P}^{(3)} + \cdots \qquad (2-10)$$

则式（2-9）可表示为

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}} \qquad (2-11)$$

将式（2-11）代入式（2-5）可得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}^{(1)} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}} \qquad (2-12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left[1 + \boldsymbol{\chi}^{(1)}\right] \qquad (2-13)$$

一、非线性极化方程

1. 非线性介质的基本波动方程的导入

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0$$

3) 思考——如果要得到波动方程，我们需要什么？ ΔE

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \sigma \boldsymbol{E} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}} \quad (3)$$

将（1）两边进行▽ ×运算，在将（2）带入，利用（3）可以得到

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}$$

$$\Delta A = \nabla^2 A$$

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

若设介质为无损耗的，即 σ=0，再利用公式 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$，

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \cdot \right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{r}, t)$$

以上结果为无吸收的各向异性非线性介质的时域波动方程

一、非线性极化方程

2. 各向同性非线性介质的时域波动方程 $\nabla \cdot E = 0$

无吸收的各向异性非线性介质的时域波动方程：

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon \cdot\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\Delta E = \nabla^2 E$$

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\nabla^2 E \qquad n = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{r},t)$$

以上是无吸收的各向同性非线性介质的时域波动方程

一、非线性极化方程

2. 各向同性非线性介质的时域波动方程 $\nabla \cdot E = 0$

无吸收的各向同性非线性介质的时域波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{r},t)$$

简化以上方程：假设单色平面波光场沿z方向传播，并将光场强度和非线性极化强度分别表示为振幅和相位两因子相乘

$$E(r,t) = E(z,t)e^{i(kz-\omega t)}$$

$$P_{NL}(r,t) = P_{NL}(z,t)e^{i(k'z-\omega t)}$$

带入上式

$$\nabla^2 E(r,t) = [(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k\frac{\partial}{\partial z} - k^2)|E(z,t)|]e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(r,t) = [(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - i2\omega\frac{\partial}{\partial z} - \omega^2)|E(z,t)|]e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{NL}(r,t) \approx -\omega^2|P_{NL}(z,t)|e^{i(k'z-\omega t)}$$

一、非线性极化方程

2. 各向同性非线性介质的时域波动方程 $\nabla \cdot E = 0$

$$\nabla^2 E(r,t) = [(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k\frac{\partial}{\partial z} - k^2)|E(z,t)|]e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(r,t) = [(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - i2\omega\frac{\partial}{\partial z} - \omega^2)|E(z,t)|]e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{NL}(r,t) \approx -\omega^2 |P_{NL}(z,t)| e^{i(k'z-\omega t)}$$

慢变振幅近似：假设光电场强度在波长量级的空间距离内和光频量级的时间范围内变化非常慢

$$\left|\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2}\right| \ll \left|k\frac{\partial E(z,t)}{\partial z}\right| \text{和} \left|\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2}\right| \ll \left|\omega\frac{\partial E(z,t)}{\partial t}\right|$$

一、非线性极化方程

2. 各向同性非线性介质的时域波动方程 $\nabla \cdot E = 0$

$$\nabla^2 E(r,t) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(r,t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{NL}(r,t)$$

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial E(z,t)}{\partial t} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 cn}P_{NL}(z,t)e^{i\Delta kz}$$

其中，$\Delta k = k' - k$, k和k'分别是原光场和极化光电场的波矢

$k = (\omega / c)n, v = c / n$

一、非线性极化方程

3. 各向异性非线性介质的频域波动方程

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon\bullet\right]E(r,t)=-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{NL}(r,t)$$

$$E(r,t)=\sum_i E_i(k_i,\omega_i)=\sum_i E_i e^{i(k_i r-\omega_i t)}$$

$$P_{NL}(r,t)=\sum_i P_i^{NL}(k'_i,\omega_i)e^{i(k'_i r-\omega_i t)}$$

$$\Downarrow$$

$$[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\varepsilon\cdot]E(k,\omega)=\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}P_{NL}(k',t)$$

一、非线性极化方程

4. 各向同性非线性介质的频域波动方程

$$[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\varepsilon\cdot]E(k,\omega)=\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}P_{NL}(k',t)$$

$$\nabla\cdot E=0$$

$$\nabla^2 E(k,\omega)+k^2E(k,\omega)=-\frac{k_0{}^2}{\varepsilon_0}P_{NL}(k',\omega)$$

$$k=k_0 n,k_0=\omega/c$$

慢变振幅近似

$$\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z}=\frac{i\omega}{2\varepsilon_0 cn}P_{NL}(z,\omega)e^{i\Delta kz}$$

以上就是在各向同性，均匀，无损耗的非线性介质中，慢变振幅近似的单色平面波沿z方向传播的频域波动方程

一、非线性极化方程

4. 各向同性非线性介质的频域波动方程

$$\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 cn} P_{NL}(z,\omega) e^{i\Delta kz}$$

讨论： 1）虽然方程很简单，但大部分的非线性过程都可以用以上方程表示

2）非线性耦合波动方程可以解决多波混频问题。比如，二阶非线性光学效应，有2个不同频率的原光场，加上1个新产生极化场，3个耦合波动方程，联立可以求解3个光电场强度。

3）若存在吸收，可以证明以上方程能够写为：

$$\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} E(z,\omega) = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 cn} P_{NL}(z,\omega) e^{i\Delta kz}$$

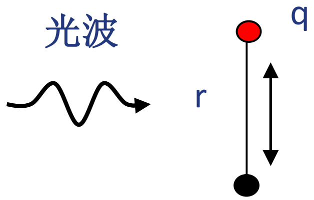
$\alpha = \mu_0 \sigma c / n$是介质的线性吸收系数

第二节 非线性极化率的求解

1. 谐振子模型求解

一、谐振子极化模型

1. 线性光学条件下的推导



设入射光为线偏振单色光（将因子1/2归入振幅中），阻尼系数为 γ

$$E(t)=Ee^{-i\omega t}+E^{*}e^{i\omega t}=Ee^{-i\omega t}+c.c. \qquad (2.1)$$

又设介质是一个含有固有振动频率为 ω_0 的偶极振子集合，N为单位体积振子数，于是极化强度：

$$P(t)=Nqr(t) \qquad qr(t) \text{ 为一个振子的电偶极矩} \qquad (2.2) \qquad P(t)=\varepsilon_0\chi(\omega)E(t)$$

$$\chi(\omega)=Nqr(t)/\varepsilon_0E(t)$$

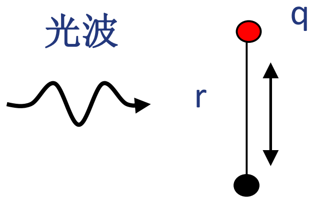
意义：用宏观可测量量表达微观

偶极振子在光场作用下的牛顿运动方程为：？

偶极振子所做是什么运动? **受迫阻尼简谐振动运动**

一、谐振子极化模型

1. 线性光学条件下的推导



设入射光为线偏振单色光（将因子1/2归入振幅中）

$$E(t)=Ee^{-i\omega t}+E^{*}e^{i\omega t}=Ee^{-i\omega t}+c.c. \qquad \text{（2.1）}$$

又设介质是一个含有固有振动频率为 ω_0 的偶极振子集合，N为单位体积振子数，于是极化强度：

$$P(t)=Nqr(t) \qquad qr(t)\ \text{为一个振子的电偶极矩} \qquad \text{（2.2）}$$

偶极振子在光场作用下作受迫振动，其牛顿运动方程为

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\Gamma\frac{dr}{dt}+\omega_0^2r=\frac{q}{m}Ee^{-i\omega t}+c.c. \qquad \Gamma\ \text{为阻尼} \qquad \text{（2.3）}$$

方程通解为：

$$\begin{cases} r(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(Ae^{-i\beta t}+Be^{i\beta t})+\dfrac{q}{m}\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}Ee^{-i\omega t}+c.c \\ \beta=\sqrt{\omega_0^2-\dfrac{\Gamma^2}{4}} \end{cases} \qquad (2.4)$$

稳态解（特解）

$$r(t)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}Ee^{-i\omega t}+c.c \qquad \text{（2.5）}$$

一、谐振子极化模型

1. 线性光学条件下的推导

稳态解（特解） $r(t)=\dfrac{q}{m}\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}Ee^{-i\omega t}+c.c$ （2.5）

极化强度

$$P(t)=Nqr(t)=\frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}Ee^{-i\omega t}+c.c \quad (2.6)$$

又因为： $P(t)=\varepsilon_0\chi(\omega)Ee^{-i\omega t}+c.c$ （2.7）

所以一阶极化率 $\chi(\omega)=\dfrac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E}=\dfrac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}$ （2.8）

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

设入射光包含两种单色光，且同向线偏振，故可用标量描述。

$$E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t} + c.c. \quad \textbf{(2.9)}$$

设 χ 为标量，χ 与 $\vec{B}$ 无关，对 P 作级数展开

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E + \varepsilon_0 \chi^{(2)} EE + \varepsilon_0 \chi^{(3)} EEE + \cdots \quad \textbf{(2.10)}$$

用单位体积电偶极矩表出

$$P = Nqr(t) = Nq[r_1(t) + r_2(t) + r_3(t) + \cdots] \quad \textbf{(2.11)}$$

牛顿方程

$$\chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r + ar^2 + br^3 + \cdots = \frac{q}{m} E(t) \quad \textbf{(2.12)}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

$$\frac{d^2 r}{dt^2}+\Gamma\frac{dr}{dt}+\omega_0^2 r+ar^2+br^3+\cdots=\frac{q}{m}E(t) \qquad \textbf{(2.12)}$$

从物理上判断,非线性效应比线性效应弱得多。采用数学上的迭代法求解。考虑二次近似，取$r=r_1+r_2$，代入上方程，并将光场的同次幂归并得

$$\frac{d^2(r_1+r_2)}{dt^2}+\Gamma\frac{d(r_1+r_2)}{dt}+\omega_0^2(r_1+r_2)+a(r_1+r_2)^2=\frac{e}{m}E \qquad (1)$$

只考虑r_1, 并且只考虑一次方

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_1}{dt}+\omega_0^2 r_1=\frac{e}{m}E \qquad (2)$$

考虑r_2, 但是不考虑r_2的高阶项：$a(r_1+r_2)^2 \longrightarrow ar_1^2$

(1) – (2)可得：

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_2}{dt}+\omega_0^2 r_2=-ar_1^2 \qquad (3)$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_1}{dt}+\omega_0^2 r_1=\frac{q}{m}E(t) \tag{2.13}$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_2}{dt}+\omega_0^2 r_2=-ar_1^2 \tag{2.14}$$

解方程(2.13)得特解（稳定解）$r_1=r_1(\omega_1)+r_1(\omega_2)$，其中

$$r_1(\omega_1)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma}E_1e^{-i\omega_1 t}+c.c \tag{2.15}$$

$$r_1(\omega_2)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma}E_2e^{-i\omega_2 t}+c.c \tag{2.16}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

利用(2-11)，一阶极化强度

$$P^{(1)}(t)=Nq[r_1(\omega_1)+r_1(\omega_2)]\overset{\Delta}{=}P^{(1)}(\omega_1,t)+P^{(1)}(\omega_2,t)$$

其中

$$P^{(1)}(\omega_1,t)=Nqr_1(\omega_1)=\frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma}E_1e^{-i\omega_1 t}+c.c.$$

$$\overset{\Delta}{=}\boxed{P^{(1)}(\omega_1)}e^{-i\omega_1 t}+c.c=\boxed{\varepsilon_0\chi^{(1)}(\omega_1)E_1}e^{-i\omega_1 t}+c.c. \qquad \textbf{(2-17)}$$

$$P^{(1)}(\omega_2,t)=Nqr_1(\omega_2)=\frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma}E_2e^{-i\omega_2 t}+c.c.$$

$$\overset{\Delta}{=}\boxed{P^{(1)}(\omega_2)}e^{-i\omega_2 t}+c.c.=\boxed{\varepsilon_0\chi^{(1)}(\omega_2)E_2}e^{-i\omega_2 t}+c.c \qquad \textbf{(2-17')}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

这里

$$\chi^{(1)}(\omega_1) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1\Gamma} \qquad (2\text{-}18)$$

$$\chi^{(1)}(\omega_2) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\omega_2\Gamma} \qquad (2\text{-}19)$$

比较：

$$\chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_1}{dt}+\omega_0^2 r_1=\frac{q}{m}E(t) \qquad \textbf{(2.13)}$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_2}{dt}+\omega_0^2 r_2=-ar_1^2 \qquad \textbf{(2.14)}$$

解方程**(2.13)**得特解（稳定解）$r_1=r_1(\omega_1)+r_1(\omega_2)$，其中

$$r_1(\omega_1)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma}E_1e^{-i\omega_1 t}+c.c \qquad \textbf{(2.15)}$$

$$r_1(\omega_2)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma}E_2e^{-i\omega_2 t}+c.c \qquad \textbf{(2.16)}$$

将 r_1 的解代入**(2-14)**右边，解得

$$r_2=r_2(\omega_1+\omega_2)+r_2(\omega_1-\omega_2)+r_2(2\omega_1)+r_2(2\omega_2)+r_2(0) \qquad \textbf{(2-20)}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

$$r_2 = r_2(\omega_1+\omega_2) + r_2(\omega_1-\omega_2) + r_2(2\omega_1) + r_2(2\omega_2) + r_2(0) \quad \text{（2-20）}$$

其中 $r_2(\omega_1+\omega_2)=$ $\quad (2-21)$

$$-\frac{2aq^2}{m^2}\frac{E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\ (\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2-i(\omega_1+\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

$r_2(\omega_1-\omega_2)=$ $\quad (2-21')$

$$-\frac{2aq^2}{m^2}\frac{E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\ (\omega_0^2-\omega_2^2+i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1-\omega_2)^2-i(\omega_1-\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

$$r_2(2\omega_1)=-\frac{aq^2}{m^2}\frac{E_1^2e^{-i2\omega_1t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)^2(\omega_0^2-4\omega_1^2-i2\omega_1\Gamma)}+c.c \quad \text{(2-22)}$$

$$r_2(2\omega_2)=-\frac{aq^2}{m^2}\frac{E_2^2e^{-i2\omega_2t}}{(\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma)^2(\omega_0^2-4\omega_2^2-i2\omega_2\Gamma)}+c.c \quad \text{(2-23)}$$

$$r_2(0)=-\frac{2aq^2}{m^2}\frac{1}{\omega_0^2}\left[\frac{|E_1|^2}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+\omega_1^2\Gamma^2}+\frac{|E_2|^2}{(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+\omega_2^2\Gamma^2}\right] \quad \text{(2-24)}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

$$P^{(2)}(\omega_1+\omega_2,t)=Nqr_2(\omega_1+\omega_2)= \qquad (2-25)$$

$$-\frac{2aNq^3}{m^2}\frac{E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\,(\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2-i(\omega_1+\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

又因为

$$P^{(2)}(\omega_1+\omega_2)e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}+c.c=2\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2)E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}+c.c$$

这里，和频极化率 $\chi(\omega)=\dfrac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E}$

$$\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2) \qquad (2-26)$$

$$=\frac{-aNq^3/(\varepsilon_0m^2)}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\,(\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1+\omega_2)^2-i(\omega_1+\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

自己求 $\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

$$P^{(2)}(\omega_1-\omega_2,t)=Nqr_2(\omega_1-\omega_2)= \qquad (2-25')$$

$$-\frac{2aNq^3}{m^2}\frac{E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)(\omega_0^2-\omega_2^2+i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1-\omega_2)^2-i(\omega_1-\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

而且

$$P^{(2)}(\omega_1-\omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}+c.c=2\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}+c.c.$$

(2-25')

$$\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2) \qquad (2-26')$$

差频极化率

$$=\frac{-aNq^3/(\varepsilon_0m^2)}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)(\omega_0^2-\omega_2^2+i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1-\omega_2)^2-i(\omega_1-\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

倍频极化率

$$\chi^{(2)}(2\omega_1)=\frac{-aNq^3/(\varepsilon_0 m^2)}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)^2(\omega_0^2-4\omega_1^2-i2\omega_1\Gamma)} \quad \textbf{(2-27)}$$

$$\chi^{(2)}(2\omega_2)=\frac{-aNq^3/(\varepsilon_0 m^2)}{(\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_1\Gamma)^2(\omega_0^2-4\omega_2^2-i2\omega_2\Gamma)} \quad \textbf{(2-28)}$$

零频（光学整流）极化率

$$\chi^{(2)}(0)=\frac{-aNq^3/(\varepsilon_0 m^2)}{\omega_0^2[(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+\omega_1^2\Gamma^2]} \quad \textbf{(2-29)}$$

$$\chi^{(2)'}(0)=\frac{-aNq^3/(\varepsilon_0 m^2)}{\omega_0^2[(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+\omega_2^2\Gamma^2]} \quad \textbf{(2-30)}$$

一、谐振子极化模型

2. 非线性光学条件下的推导

再引入记号

$$F(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\ \Gamma} \qquad \textbf{(2-31)}$$

则

$$\chi^{(1)}(\omega)=\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}F(\omega)$$

从以上的解看到，对两个单色平面波入射的情况，如果考虑二阶效应，就有可能出现以下频率的电偶极矩振动：

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_1+\omega_2,\quad \omega_1-\omega_2,\quad 2\omega_1,\quad 2\omega_2,\quad 0$$

按电动力学，振动的电偶极矩将发射电磁波，所以，要发射上述频率的电磁波。

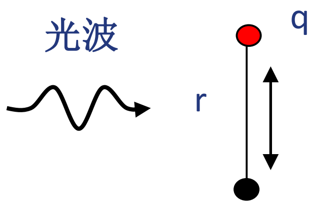
$$\chi^{(2)}(\omega_1,\omega_2)=-Na\frac{q^3}{\varepsilon_0 m^2}F(\omega_1)F(\omega_2)F(\omega_1+\omega_2) \qquad \textbf{（2－32）}$$

$$\chi^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\frac{Nq^4}{\varepsilon_0 m^3}\{-b+\frac{2}{3}a^2[F(\omega_1+\omega_2)+F(\omega_2+\omega_3)+F(\omega_3+\omega_1)]\}$$

$$\bullet F(\omega_1)F(\omega_2)F(\omega_3)F(\omega_1+\omega_2+\omega_3) \qquad (2-33)$$

复习

请用谐振子模型推导 $\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)$



Γ 为阻尼系数

设入射光包含两种单色光，且同向线偏振，故可用标量描述。

$$E(t)=E_1e^{-i\omega_1 t}+E_2e^{i\omega_2 t}+c.c.$$

设 χ 为标量，χ 与 $\vec{B}$ 无关，对 P 作级数展开

$$P=\varepsilon_0\chi^{(1)}E+\varepsilon_0\chi^{(2)}EE+\varepsilon_0\chi^{(3)}EEE+\cdots \quad \textbf{(2.10)}$$

用单位体积电偶极矩表出

$$P=Nqr(t)=Nq[r_1(t)+r_2(t)+r_3(t)+\cdots] \quad \textbf{(2.11)}$$

牛顿方程

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\Gamma\frac{dr}{dt}+\omega_0^2 r+ar^2+br^3+\cdots=\frac{q}{m}E(t) \quad \textbf{(2.12)}$$

复习

请用谐振子模型推导 $\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)$

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\Gamma\frac{dr}{dt}+\omega_0^2 r+ar^2+br^3+\cdots=\frac{q}{m}E(t) \qquad \textbf{(2.12)}$$

考虑二次近似，取r=r$_1$+r$_2$，带入上述方程

$$\frac{d^2(r_1+r_2)}{dt^2}+\Gamma\frac{d(r_1+r_2)}{dt}+\omega_0^2(r_1+r_2)+a(r_1+r_2)^2=\frac{e}{m}E \qquad （1）$$

只考虑r_1，并且只考虑一次方

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_1}{dt}+\omega_0^2 r_1=\frac{e}{m}E \qquad （2）$$

考虑r_2，但是不考虑r_2的高阶项：$a(r_1+r_2)^2 \longrightarrow ar_1^2$

(1) – (2)可得：

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_2}{dt}+\omega_0^2 r_2=-ar_1^2 \qquad (3)$$

复习

请用谐振子模型推导 $\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)$

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_1}{dt}+\omega_0^2r_1=\frac{q}{m}E(t) \tag{2.13}$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}+\Gamma\frac{dr_2}{dt}+\omega_0^2r_2=-ar_1^2 \tag{2.14}$$

解方程(2.13)得特解（稳定解）$r_1=r_1(\omega_1)+r_1(\omega_2)$，其中

$$r_1(\omega_1)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma}E_1e^{-i\omega_1t}+c.c \tag{2.15}$$

$$r_1(\omega_2)=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega_2^2-i\omega_2\Gamma}E_2e^{-i\omega_2t}+c.c \tag{2.16}$$

将r_1的解代入(2-14)右边，解得

$$r_2=r_2(\omega_1+\omega_2)+r_2(\omega_1-\omega_2)+r_2(2\omega_1)+r_2(2\omega_2)+r_2(0) \quad \text{（2-20）}$$

复习

请用谐振子模型推导 $\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)$

$$r_2(\omega_1-\omega_2)= \qquad (2-21')$$

$$-\frac{2aq^2}{m^2}\frac{E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\ (\omega_0^2-\omega_2^2+i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1-\omega_2)^2-i(\omega_1-\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

$$P^{(2)}(\omega_1-\omega_2,t)=Nqr_2(\omega_1-\omega_2)= \qquad (2-25')$$

$$-\frac{2aNq^3}{m^2}\frac{E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\ (\omega_0^2-\omega_2^2+i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1-\omega_2)^2-i(\omega_1-\omega_2)\Gamma]}+c.c$$

而且 $P^{(2)}(\omega_1-\omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}+c.c=2\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2)E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}+c.c.$

(2-25')

$$\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2) \qquad (2-26')$$

差频极化率 $=\dfrac{-aNq^3/(\varepsilon_0m^2)}{(\omega_0^2-\omega_1^2-i\omega_1\Gamma)\ (\omega_0^2-\omega_2^2+i\omega_2\Gamma)[\omega_0^2-(\omega_1-\omega_2)^2-i(\omega_1-\omega_2)\Gamma]}+c.c$

Thank You !