§5 矩

1、定义

若 EX^k 存在，称之为 X 的 k 阶原点矩。

若 $E(X-EX)^k$ 存在，称之为 X 的 k 阶中心矩。

若 $E(X-EX)^k(Y-EY)^l$ 存在，称之为 X 和 Y 的 k+l 阶混合中心矩。

所以 EX 是一阶原点矩，DX 是二阶中心矩，协方差 Cov(X,Y)是二阶混合中心矩。

例1

设随机变量 $X \sim N(0,\ \sigma^2)$，试求 $E(X^n)$.

解：

令：$Y = \dfrac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \dfrac{X}{\sigma}$　　则　$Y \sim N(0,\ 1)$.

所以，

$$E(X^n) = \sigma^n E(Y^n) = \sigma^n \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f_Y(y)dy = \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

(1). 当n为奇数时，由于被积函 数是奇函数，所以

$E(X^n) = 0$.

(2). 当n为偶数时，由于被积函数是偶函数，所以

$$EX^n=\frac{2\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}y^n e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

令：$\frac{y^2}{2}=t$, 则 $y=\sqrt{2}\sqrt{t}$,

$$dy=\frac{\sqrt{2}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=2^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$EX^n=\frac{2\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}2^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-t}dt=2^{\frac{n}{2}}\frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$$

返回主目录

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

其中 $\Gamma(t)=\int_0^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx.$

利用$\Gamma-$函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$，得

$$E(X^n)=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}=\sigma^n(n-1)!!$$

因而，

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}\sigma^n(n-1)!! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases}$$

其中，

$$n!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot n & n\text{为奇数}\\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot n & n\text{为偶数}\end{cases}$$

特别，若　$X\sim N(0,\ 1)$，则

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}(n-1)!! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases},\quad n=4\text{时},\quad EX^4=3.$$

返回主目录

2、n维正态分布的性质

1) n维随机变量$(X_1,\cdots,X_n)$服从n维正态分布$\Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$的任意线性组合$l_1X_1+\cdots+l_nX_n$服从一维正态分布。

2) 若$(X_1,\cdots,X_n)$服从n维正态分布，$Y_1,\cdots,Y_n$是$X_j(j=1,\cdots,n)$的线性函数，则$(Y_1,\cdots,Y_n)$也服从正态分布。

3) 若$(X_1,\cdots,X_n)$服从n维正态分布，则$X_1,\cdots,X_n$相互独立$\Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$两两不相关。

3、n维正态分布的概率密度函数形式

它的矩阵表示见教材P111.

返回主目录

例2 (1) 设 X, Y 独立，$X \sim N(1,4), Y \sim N(2,9)$,

求: $2X - Y$ 的分布；

(2) $(X, Y) \sim N(1,2;4,9;0.5)$

求: $2X - Y$ 的分布；

解: (1) $E(2X - Y) = 2EX - EY = 0$

$$D(2X - Y) = 4DX + DY = 4 \times 4 + 9 = 25$$

则: $2X - Y \sim N(0,25)$

(2) $D(2X - Y) = 4DX + DY - 2 \times 2COV(X, Y)$

$$= 25 - 4\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 25 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 13$$

则: $2X - Y \sim N(0,13)$

返回主目录

第四章　小　结

1 阐述了数学期望、方差的概念及背景，要掌握它们的性质与计算，会求随机变量函数的数学期望和方差。

2 要熟记两点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的数学期望与方差。

3 给出了契比雪夫不等式，要会用契比雪夫不等式作简单的概率估计。

4 引进了协方差、相关系数的概念，要掌握它们的性质与计算。

5 要掌握二维正态随机变量的不相关与独立的等价性。

6 给出了矩与协方差矩阵。

返回主目录