电动力学

第二章：Laplace 方程与分离变量法

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

April 11, 2019

Laplace 方程，分离变量法：

考虑某个区域 V 中静电场的电势分布.

1. 假设自由电荷只分布在 V 的边界 S 上，V 的内部无自由电荷分布.这样，区域内部的电势满足 Laplace 方程:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

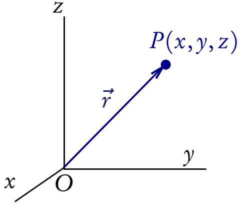
2. 根据边界面 S 的几何形状，选取适当的坐标系求解 Laplace 方程.

直角坐标系中的分离变量法:

分离变量法的特点是将偏微分方程化简为若干常微分方程进行求解.

首先讨论直角坐标系中 $\nabla^2\varphi = 0$ 的分离变量法. 如图示, 直角坐标系中场点 P 的位置矢量可表为:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



而,

$$\nabla^2 = \partial_i\partial_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为简单计, 设静电势的分布不依赖坐标 z, $\varphi = \varphi(x, y)$, 这样, Laplace 方程化为:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

按照分离变量法的精神，我们尝试求形如

$$\varphi(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

的特解. 将此试探解代回到 Laplace 方程中，可得：

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

上式成立的充要条件是等号两端均为同一常数，记作：$-\alpha^2$，则有：

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - \alpha^2 Y = 0.$$

- 常参数 α 可实可虚，其值要通过静电势的边界条件确定.
- 对于一个确定的 α，Laplace 方程的特解是：$\varphi_\alpha = X_\alpha\, Y_\alpha$，此处的 X_α 与 Y_α 是上述二常微分方程的通解：

$$X_\alpha = a_\alpha \sin(\alpha x) + b_\alpha \cos(\alpha x), \qquad Y_\alpha = c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y}.$$

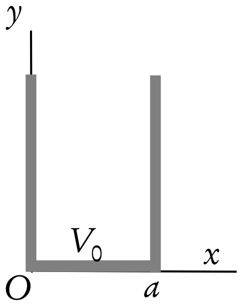
为了满足边值关系，需要将各种可能的特解做线性叠加：

$$\varphi(x, y) = \sum_{\alpha} \left[a_\alpha \sin(\alpha x) + b_\alpha \cos(\alpha x)\right] \left(c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y}\right)$$

Sample: 设静电场局限在由间距为 a 的两个半无限大平行导体板和与之垂直、宽度为 a 的无限长导体端板构成的区域中. 端板和平行板彼此绝缘. 将二平行板接地，端板加上电势 V_0. 求该区域中的静电势分布.

Solution: 如图示，此问题中的电势仅与 x, y 有关，属于二维问题. 试探解由本页第一个方程给出. 因平行导体板接地，$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=a} = 0$, 我们有 $b_\alpha = 0$, 且：

$$\alpha = m\pi/a, \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$



静电势在 $y \to +\infty$ 时应取有限值，这称作自然边界条件. 因此，
$c_\alpha = 0$,

$$\varphi(x, y) = \sum_{\alpha>0} a_\alpha \sin(\alpha x) \cdot d_\alpha e^{-\alpha y} = \sum_{m=1}^{+\infty} d'_m \sin\left(m\pi x/a\right) \exp\left(-m\pi y/a\right)$$

最后一组待定系数 d'_m 可由 $y = 0$ 处的给定电势 V_0 确定：

$$V_0 = \varphi\Big|_{y=0} = \sum_{m=1}^{+\infty} d'_m \sin\left(m\pi x/a\right)$$

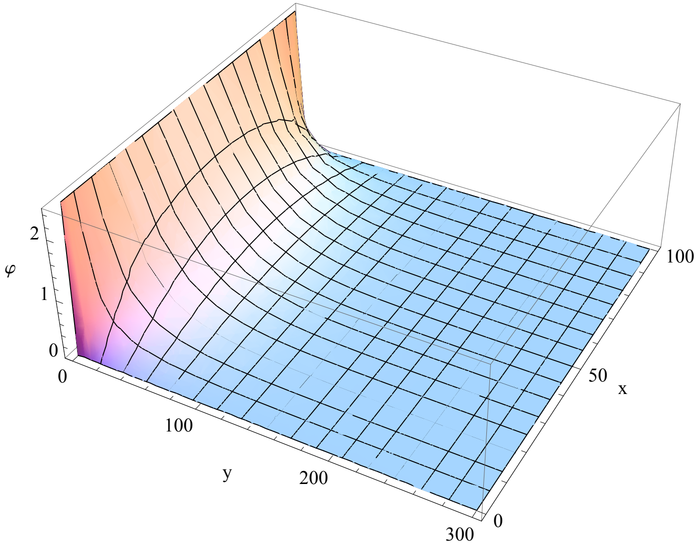
此式是 V_0 的正弦级数表式. 展开系数的计算公式是：

$$d'_m = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin(m\pi x/a) dx = \begin{cases} 4V_0/m\pi, & \text{若 } m \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{若 } m \text{ 是偶数} \end{cases}$$

于是本问题的解是：

$$\varphi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)\pi y}{a}\right]$$

电势分布的示意图如下:

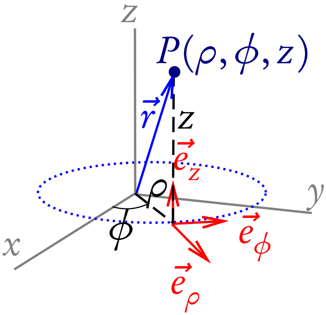


柱坐标系中的分离变量法:

接着讨论圆柱坐标系中求解 $\nabla^2\varphi = 0$ 的分离变量法.

如图示，柱坐标系中场点 P 的位置矢量可表为:

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$$



从而,

$$d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{e}_\phi + dz\,\vec{k}$$

式中的 $\vec{e}_\phi$ 是极角 ϕ 增大方向的单位矢量，定义为: $\vec{e}_\phi = \partial_\phi \vec{e}_\rho$.

于是，柱坐标系中各个坐标相应的拉梅系数是: $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$ 和 $h_z = 1$.

$$\rightsquigarrow \qquad \nabla = \vec{e}_\rho\partial_\rho + \frac{\vec{e}_\phi}{\rho}\partial_\phi + \vec{e}_z\partial_z$$

现在求出 $\nabla^2\varphi$ 在柱坐标系中的表达式. 利用柱坐标可以将静电势的梯度表为:

$$\nabla\varphi = \vec{e}_\rho\partial_\rho\varphi + \frac{\vec{e}_\phi}{\rho}\partial_\phi\varphi + \vec{e}_z\partial_z\varphi$$

注意到: $\nabla\cdot(u\vec{A}) = \nabla u\cdot\vec{A} + u\nabla\cdot\vec{A}$ 以及对于 $i\neq j\neq k\neq i$,

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_i}{h_jh_k}\right) = 0$$

我们有:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla\cdot\left[\vec{e}_\rho\partial_\rho\varphi + \frac{\vec{e}_\phi}{\rho}\partial_\phi\varphi + \vec{e}_z\partial_z\varphi\right] \\
&= \nabla\cdot\left[\frac{\vec{e}_\rho}{\rho}\,(\rho\partial_\rho\varphi) + \vec{e}_\phi\,(\frac{1}{\rho}\partial_\phi\varphi) + \vec{e}_z\,\partial_z\varphi\right] \\
&= \nabla(\rho\partial_\rho\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_\rho}{\rho} + \nabla(\frac{1}{\rho}\partial_\phi\varphi)\cdot\vec{e}_\phi + \nabla(\partial_z\varphi)\cdot\vec{e}_z \\
&= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2\varphi + \partial_z^2\varphi
\end{aligned}$$

所以，在圆柱坐标系中，Laplace 方程的显示表达式是：

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2\varphi + \partial_z^2\varphi = 0$$

若静电势分布与 z 坐标无关，则上式简化为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \qquad \text{(以下仅考虑此情形.)}$$

按照分离变量法的精神，设其具有如下因子化形式的特解：

$$\varphi(\rho,\ \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$$

代入到简化版的 Laplace 方程中，可以将其化为：

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

因此存在实参数 m^2，它既不依赖于 ρ 也与 ϕ 无关，使得：

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) = m^2\, R,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\, \Phi.$$

- 若 $m = 0$，则以上二常微分方程变为：

$$\rho \frac{dR}{d\rho} = \text{常数}, \qquad \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0.$$

注意到上式中的第一个方程可以等价地写作，

$$\frac{dR}{d(\ln\rho)} = \text{常数}$$

于是，这两个常微分方程的通解分别是：

$$R_0 = a_0 + b_0 \ln\rho, \qquad \Phi_0 = c_0 + d_0\phi.$$

轴对称情形下 $\nabla^2\varphi = 0$ 在柱坐标系中的通解：

- 若 $m \neq 0$，角函数 $\Phi(\phi)$ 满足的方程及其通解是：

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\,\Phi = 0, \qquad \rightsquigarrow \quad \Phi_m(\phi) = c_m\cos(m\phi) + d_m\sin(m\phi)$$

而径向方程化为：

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} - m^2R = 0.$$

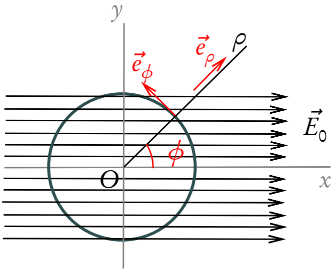
以 $R = c\rho^\gamma$ 作为试探解代入，可得 $\gamma = \pm m$. 所以，径向静电势 $R(\rho)$ 的通解是：

$$R_m(\rho) = a_m\rho^m + b_m\rho^{-m}$$

我们的结论是：若静电势的分布与场点的 Z 坐标无关 (轴对称)，则 Laplace 方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 在圆柱坐标系中的一般解为，

$$\begin{aligned}\varphi(\rho,\,\phi) \quad &= (a_0 + b_0\ln\rho)(c_0 + d_0\phi) \\ &\quad + \sum_{m\neq 0}\left(a_m\rho^m + b_m\rho^{-m}\right)\left[c_m\cos(m\phi) + d_m\sin(m\phi)\right]\end{aligned}$$

例： 半径为 a 的无限长导体圆柱置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，该电场的场强矢量与圆柱轴线垂直. 设单位长度圆柱所带电荷为 λ，柱外是真空. 求柱外空间的静电势分布.



解： 如图示，此问题中的电势仅与 ρ, ϕ 有关，属于二维问题. 注意到极角 ϕ 在 $0 \sim 2\pi$ 区间变化，电势的单值性要求

$$\varphi(\rho,\ \phi) = \varphi(\rho,\ \phi + 2\pi)$$

意味着 m 必须为整数. 进一步，若 $m = 0$，还需令 $d_0 = 0$ 才能保证电势的单值性.

所以，柱外空间静电势的一般解是：

$$\varphi = c' \ln \rho + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(a_m \rho^m + \frac{b_m}{\rho^m} \right) \left[c_m \cos(m\phi) + d_m \sin(m\phi) \right]$$

现在使用边界条件确定系数.

首先考虑 $\rho\to\infty$ 时的边界条件. 若 ρ 趋于无穷大, 带电导体圆柱就表现为一根无限长的带电直线. 于是,

$$\vec{E}\Big|_{\rho\to\infty} \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\,\rho}\vec{e}_\rho + E_0\,\vec{e}_x$$

1. 为了把此边界条件与上述静电势的通解比较, 注意到在柱坐标系中,

$$\nabla = \vec{e}_\rho\partial_\rho + \frac{\vec{e}_\phi}{\rho}\partial_\phi + \vec{e}_z\partial_z, \qquad \rightsquigarrow \quad \vec{e}_\rho = \nabla\rho, \quad \frac{\vec{e}_\phi}{\rho} = \nabla\phi.$$

从而:

$$\frac{\vec{e}_\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\nabla\rho = \nabla(\ln\rho)$$

此外, 按照柱坐标系与直角坐标系基矢之间的联系,

$$\vec{e}_\rho = \cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\phi = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$$

我们有：

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_x &= \vec{e}_\rho \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi = \cos\phi\, \vec{e}_\rho - \rho\sin\phi\, \frac{\vec{e}_\phi}{\rho} \\
&= \cos\phi\, \nabla\rho - \rho\sin\phi\, \nabla\phi \\
&= \cos\phi\, \nabla\rho + \rho\nabla(\cos\phi) \\
&= \nabla(\rho\cos\phi)
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\vec{E}\Big|_{\rho\to\infty} \approx \nabla\left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\rho + E_0\rho\cos\phi\right]
$$

根据 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 可知，静电势在 ρ 趋于无穷远情形下需要满足的边界条件是：

$$
\varphi\Big|_{\rho\to\infty} \approx -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\rho - E_0\rho\cos\phi
$$

比较知：

$$c' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}, \qquad a_m c_m = -E_0 \delta_{m1}, \qquad a_m d_m = 0$$

所以，球外空间静电势的表达式简化为：

$$\varphi(\rho,\ \phi) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\rho - E_0 \rho\cos\phi + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b_m}{\rho^m}[c_m\cos(m\phi) + d_m\sin(m\phi)]$$

在静电平衡状态下，导体是等势体．所以，

$$\varphi(\rho,\ \phi)\Big|_{\rho=a} = \text{常数} \qquad \rightsquigarrow \ b_m c_m = E_0 a^2 \delta_{m1}, \qquad b_m d_m = 0$$

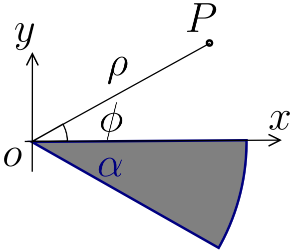
于是，本问题中静电势分布的最终表达式为：

$$\varphi(\rho,\ \phi) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\rho - E_0\rho\cos\phi + \frac{E_0\ a^2}{\rho}\cos\phi$$

例题二：

例： 导体尖劈带电势 V，分析它的尖角附近的电场。采取用柱坐标系，取 z 轴沿尖劈顶端垂直于纸面向外，非零电场存在的区域由极角 θ 界定为：

$$0 \le \theta \le 2\pi - \alpha$$



解： 根据对称性，静电势的分布不依赖于坐标 z，故 $\nabla^2\varphi = 0$ 在柱坐标系中简化为：

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\varphi = 0$$

用分离变量法解之，其通解形式为：

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= (A_0 + B_0 \ln r)(C_0 + D_0\theta) \\ &\quad + \sum_{\nu\neq 0}\left(A_\nu r^\nu + \frac{B_\nu}{r^\nu}\right)\Big[C_\nu\cos(\nu\theta) + D_\nu\sin(\nu\theta)\Big]\end{aligned}$$

现在使用边界条件确定积分常数:

1. 在尖劈 $\theta = 0$ 的面上 (即示意图上的 x 轴), $\varphi = V$, 与 r 坐标无关. 由此知:

$$A_0 C_0 = V, \quad B_0 = 0, \quad C_\nu = 0 \ (\forall\, \nu \neq 0).$$

2. 当 $r \to 0$ 时静电势应该有限. 所以,

$$B_0 = B_\nu = 0 \quad (\forall\, \nu \neq 0).$$

3. 在尖劈 $\theta = (2\pi - \alpha)$ 的面上, $\varphi = V$, 与 r 坐标无关. 所以,

$$D_0 = 0, \qquad \sin\nu(2\pi - \alpha) = 0$$

参数 ν 因此不能随意取值, 它的可能取值是:

$$\nu_n = \frac{n\pi}{2\pi - \alpha}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

本问题中物理空间静电势的分布可以写为:

$$\varphi(r,\theta) = V + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n r^{\nu_n} \sin(\nu_n \theta),$$

$$\left[0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi - \alpha\right]$$

式中,

$$\nu_n = \frac{n\pi}{2\pi - \alpha}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

系数 A_n 没有完全确定, 是因为边界条件给的不完全.

现在讨论球坐标系中用分离变量法求解 Laplace 方程的细节.

首先需要将 Laplace 方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 在球坐标系中表达出来. 因为,

$$\nabla\varphi = \vec{e}_r\partial_r\varphi + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\varphi + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\varphi$$

所以:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \nabla\cdot\nabla\varphi \\
&= \nabla\cdot\left(\vec{e}_r\partial_r\varphi + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\varphi + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\varphi\right) \\
&= \nabla\cdot\left[(r^2\sin\theta\partial_r\varphi)\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} + (\sin\theta\partial_\theta\varphi)\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} + \left(\frac{\partial_\phi\varphi}{\sin\theta}\right)\frac{\vec{e}_\phi}{r}\right] \\
&= \nabla(r^2\sin\theta\partial_r\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} + \nabla(\sin\theta\partial_\theta\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} \\
&\qquad + \nabla\left(\frac{\partial_\phi\varphi}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{\vec{e}_\phi}{r}
\end{aligned}$$

这里我们使用了矢量分析公式，

$$\nabla\cdot(u\vec{A})=\nabla u\cdot\vec{A}+u\nabla\cdot\vec{A}$$

以及球坐标系基矢满足的无散性质：

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}\right)=\nabla\cdot\frac{\vec{e}_\phi}{r}=0$$

接下来继续化简 $\nabla^2\varphi$ 的表达式. 前页最后一式的各项可以进一步改写为：

$$\nabla(r^2\sin\theta\partial_r\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}=\vec{e}_r\partial_r(r^2\sin\theta\partial_r\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\varphi)$$
$$\nabla(\sin\theta\partial_\theta\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}=\frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\varphi)\cdot\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\varphi)$$
$$\nabla\left(\frac{\partial_\phi\varphi}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{\vec{e}_\phi}{r}=\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\left(\frac{\partial_\phi\varphi}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{\vec{e}_\phi}{r}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\varphi$$

将以上各项相加，即得到球坐标系中 $\nabla^2\varphi$ 的表达式：

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\varphi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\varphi$$

所以，Laplace 方程的球坐标形式为：

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\varphi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\varphi = 0.$$

分离变量法的要点是设

$$\varphi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

代入到 $\nabla^2\varphi = 0$ 中，两端同乘 $r^2/R\Theta\Phi$，得：

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -n(n+1)$$

- 径向静电势 $R(r)$ 满足如下方程:

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-n(n+1)R=0$$

其通解为:

$$R(r)=A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}$$

但参数 n 的取值至此并未确定.

- 角向函数 $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 服从如下方程:

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=-n(n+1)$$

此式两端乘以 $\sin^2\theta$ 可得:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+n(n+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=m^2$$

- 所以，方位角静电势 $\Phi(\phi)$ 满足方程:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2$$

其通解为:

$$\Phi(\phi) = C_m \sin(m\phi) + D_m \cos(m\phi)$$

参数 m 的取值:

因为 ϕ 与 $\phi + 2\pi$ 在物理上不可区分，

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$$

所以参数 m 只能取整数，$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

极角函数 $\Theta(\theta)$ 满足所谓缔合勒让德 (Legendre) 方程,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0$$

只有当 n 为非负整数时才存在 $0\le\theta\le\pi$ 全空间的有限解. 这样的解称为缔合勒让德多项式, 记为:

$$\Theta(\theta)=P_n^m(\cos\theta),\qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$$

1. $P_n^0(\cos\theta)=P_n(\cos\theta)$ 称为勒让德多项式, 其一般表达式是:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

显然,

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=\frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1)=x$$

Laplace 方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 在球坐标中的通解为:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[a_{nm}r^n + b_{nm}\frac{1}{r^{n+1}}\right]P_n^m(\cos\theta)\cos(m\phi) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[c_{nm}r^n + d_{nm}\frac{1}{r^{n+1}}\right]P_n^m(\cos\theta)\sin(m\phi)$$

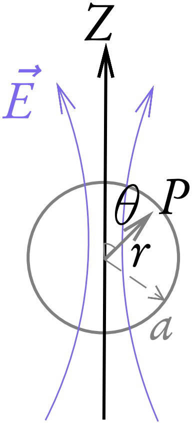
式中 a_{nm}、b_{nm}、c_{nm}、d_{nm} 等为积分常数，需要由边界条件确定.

特例:

1. 若某具体问题中电场分布具有对称轴，取对称轴为极轴，则静电势 φ 不依赖于方位角 ϕ，这种情形下 Laplace 方程通解的形式简化为:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

例题：



例. 半径为 a、电容率为 ϵ 的介质球置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，求电势分布.

解： 介质球的存在使得空间被划分为 $0 \le r < a$ 的球内区域 (区域一) 与 $r > a$ 的球外区域 (区域二). 两区域中均无自由电荷，因此电势都满足 Laplace 方程. 注意到体系具有的轴对称性，球内空间的电势分布应为：

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad (0 \le r < a) \end{aligned}$$

最后一步源于 $r \to 0$ 处电势应为有限值的自然边界条件.

在球外空间，$a < r < \infty$，电势分布应为：

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

式中不应取所有的 c_n 系数为零.这是因为在无穷远处，$r \to \infty$，$\vec{E} \to \vec{E}_0$，相应的电势表达式应该是：

$$\varphi_2|_{r\to\infty} \to -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

这正是题目里给定的关于电势的 Dirichlet 边界条件. 所以，

$$\varphi_2 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

$r = a$ 的球面是介质球与真空的分界面.在此几何面上，

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}, \quad \epsilon \partial_r \varphi_1|_{r=a} = \epsilon_0 \partial_r \varphi_2|_{r=a}$$

即：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n P_n(\cos\theta) = -E_0 a P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

$$\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} n a_n a^{n-1} P_n(\cos\theta) = -\epsilon_0 E_0 P_1(\cos\theta) - \epsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

由于不同阶的勒让德多项式相互独立，以上两式对任意的 θ 值都成立就意味着：

$$a_n a^n = -E_0 a \delta_{n1} + \frac{d_n}{a^{n+1}}, \quad \epsilon n a_n a^{n-1} = -\epsilon_0 E_0 \delta_{n1} - \epsilon_0 \frac{(n+1)d_n}{a^{n+2}}$$

求得：

$$a_1 = -\frac{3\epsilon_0 E_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}, \quad d_1 = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)E_0 a^3}{2\epsilon_0 + \epsilon}$$

而其余的系数皆为零.

因此本问题的解是:

$$\varphi_1 = -\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0 r\cos\theta, \qquad (0 \le r < a)$$

$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\frac{E_0 a^3\cos\theta}{r^2}, \qquad (r > a)$$

即,

$$\varphi_1 = -\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\vec{E}_0\cdot\vec{r}$$

$$\varphi_2 = -\vec{E}_0\cdot\vec{r} + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\left(\frac{a}{r}\right)^3\vec{E}_0\cdot\vec{r}$$

介质球内的场强矢量为:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= -\nabla\varphi_1 \\ &= \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\nabla(\vec{E}_0\cdot\vec{r}) \\ &= \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\vec{e}_i\partial_i(E_{0j}x_j) \\ &= \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\vec{e}_iE_{0j}\delta_{ij} = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\vec{E}_0 < \vec{E}_0\end{aligned}$$

所以球内电场较外电场为弱. 这是因为介质球极化后在上半球面产生了正极化电荷, 在下半球面产生了负极化电荷. 极化电荷在介质球内激发的电场与外场反向, 使总电场减弱.

介质球的极化强度为:

$$
\begin{aligned}
\vec{P} &= \chi_e \epsilon_0 \vec{E}_1 \\
&= (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}_1 = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \vec{E}_0
\end{aligned}
$$

于是，介质球可以看做一个电偶极矩为:

$$
\vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3}\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \vec{E}_0
$$

的电偶极子. 此电偶极子在空间中激发的静电势为:

$$
\varphi_{\text{dipole}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \vec{E}_0 \cdot \vec{r}
$$

这正是前面求出的介质球外部空间总电势表达式中的第二项.

作业:

1. 一个半径为 R 的球面上的静电势为[1]:

$$V_0 = k\cos(3\theta)$$

此处 k 为一常参数. 试计算球面内外空间的电势分布以及球面上的电荷面密度 $\sigma(\theta)$.

2. 介电常数为 ϵ 的均匀介质球壳, 内外半径分别为 a 和 b, 把它置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中, 试求:
   (1). 球壳内的电场强度分布.
   (2). 表面束缚电荷组成的电偶极矩矢量.

3. 一个横截面半径为 R 的无限长圆柱体表面上分布有电荷面密度

$$\sigma(\phi) = a\sin(5\phi)$$

式中 a 为一常数. 求出柱面内外空间中的静电势分布.

[1] 上一版教案中此作业题的表述出现物理错误, 感谢某同学指出. 现已改正.