第三章　多维随机变量及其分布

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

多维随机变量及其分布　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常用二维随机变量的分布两个及两个以上随机变量简单函数的分布

考试要求

1. 理解多维随机变量的概念，理解多维随机变量的分布的概念和性质，理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布，理解二维离散型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度，会求与二维随机变量相关事件的概率。
2. 理解随机变量的独立性及不相关性的概念，掌握随机变量相互独立的条件。
3. 掌握二维均匀分布，了解二维正态分布 $N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right)$ 的概率密度，理解其中参数的概率意义。

会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个相互独立随机变量简单函数的分布。

本章考点导读　本章的核心内容是 3 个二维分布函数（联合、边缘和条件），3 个二维离散分布律（联合、边缘和条件）；3 个连续概率密度（联合、边缘和条件）；均匀与正态，独立性系列结论。介绍了作者原创的 3 个秘技（直角分割法、平移法和旋转法）求二维分布题型。本章是教育部关于概率论大题命题的常年考点。

本章考点顺口溜：

二维分布要记熟　　3 分 3 律 3 密独
13 分布是一伙　　连续直割离散表
平移旋转偕公式　　6 大函数谙技巧

一、二维随机变量（向量）的分布函数

1. 二维随机变量（向量）的分布函数的概念界定

$(X,\ Y)$ 是二维随机变量，对任意实数 x 和 y，称

$$\boxed{F(x,\ y)=P\{X\ \le x,\ \ Y\le\ y\}=P\left\{(X=x)\cap(Y=y)\right\}=P(AB)}$$

为 $(X,\ Y)$ 的分布函数，又称**联合分布函数**。

2. $F(x,\ y)$ 具有一维随机变量分布类似的性质。

① $0\le F(x,\ y)\le 1$；

② $F(x,\ y)$ 对 x 和 y 都是单调非减的，如 $x_1>x_2\Rightarrow F(x_1,\ y)\ge F(x_2,\ y)$；

③ $F(x,\ y)$ 对 x 和 y 都是右连续；

④ $F(+\infty,\ +\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to+\infty}}F(x,\ y)=1,\ \ F(-\infty,\ -\infty)=F(x,\ -\infty)=F(-\infty,\ y)=0,$

3. $F(x,\ y)$ 几何意义：表示 $F(x,\ y)$ 在 $(x,\ y)$ 的函数值就是随机点 $(X,\ Y)$ 在 $X=x$ 左侧和 $Y=y$ 下方的无穷矩形内的概率。对有限矩形域有：

$$\boxed{P\left\{x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2\right\}=F(x_2,\ y_2)-F(x_1,\ y_2)-F(x_2,\ y_1)+F(x_1,\ y_1)}$$

二、2 维离散型随机变量的联合分布律、边缘分布律与条件分布律（3 律）

1. 联合分布律

设$(X,\ Y)$的一切可能取值为$(x_i,\ y_j)$； $i,j=1,2,\cdots$，且$(X,\ Y)$取各对可能值的概率为

$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij}$ ，则 $F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{y_j\le y}P_{ij}$ **称为联合分布律**。

2. 边缘分布律

设事件$A_i=\{X=x_i\}$，$B_j=\{Y=y_j\}$，根据全概率公式有

$$P\{X=x_i\}=P(A_i)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A_i\mid B_j)=\sum_{j=1}^{n}P(A_iB_j)=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}=P_{i.}$$

$$P\{Y=y_j\}=P(B_j)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B_j\mid A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB_j)=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}=P_{.j}$$

所以我们定义：$F_X(x)=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}P_{ij}=P_{i.}$ 及 $F_Y(y)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}P_{ij}=P_{.j}$ 分别称为 X，Y **的边缘分布律**

评 注 已知联合分布，可求出全部边缘分布，反之不然。如已知

$f(x,y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)\Rightarrow\begin{cases}f_X(x)\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)\\ f_Y(y)\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)\end{cases}$，反之则却确定不了 ρ，还必须另给条件。

■二维离散分布题型题法

【例 1】根据下表求$P\{X>1,\ Y\ge3\}$ 及 $P\{X=1\}$和$P\{Y=1\}$。

Y \ X	1	2	3
1	0.1	0.3	0
2	0	0	0.2
3	0.1	0.1	0
4	0	0.2	0

解：$P\{X>1,\ Y\ge3\}=P\{X=2,Y=3\}+P\{X=2,Y=4\}+P\{X=3,Y=3\}+P\{X=3,Y=4\}$

$=0.1+0.2+0+0=0.3$。

$P\{X=1\}=P\{X=1,\ Y=1,2,3,4\}=0.1+0+0.1+0=0.2$ （边缘分布）；

$P\{Y=1\}=P\{X=1,2,3,\ Y=1\}=0.1+0.3+0=0.4$ （边缘分布）。

3. 条件分布律

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{.j}};\quad P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i.}}\quad i,\ j=1,2\cdots$$

【例 2】 已知$(X,\ Y)$的联合分布律表，求$Y=1$条件下的X条件分布律。

Y \ X	1	2	3	4	$P_Y\{Y=y_j\}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{48}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{48}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{10}{48}$
$P_X\{X=x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

解：先求出所有的边缘分布，如上表，于是

$$P\{X=1|Y=1\}=\frac{P\{X=1,\ Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1}{4}\Big/\frac{25}{48}=\frac{12}{25};\quad P\{X=2|Y=1\}=\frac{1}{8}\Big/\frac{25}{48}=\frac{6}{25};$$

$$P\{X=3|Y=1\}=\frac{1}{12}\Big/\frac{25}{48}=\frac{4}{25};\ P\{X=4|Y=1\}=\frac{1}{16}\Big/\frac{25}{48}=\frac{3}{25}$$

X	1	2	3	4
P	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

【例 3】 把一硬币连掷三次，X 表示正面次数，$Y=|2X-3|$，求 $(X,\ Y)$ 的联合分布律和边缘分布律。

解：X 应符合二项式分布 $B(n,\ p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，本题中 $p=\frac{1}{2},\quad n=3,\quad k=x;\ X\sim B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

$$X=0,\ 1,\ 2,\ 3\Rightarrow Y=|2X-3|=3,\ 1,\ 1,\ 3$$

$$P(X=0,\ Y=3)=P(X=0)=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1,\ Y=1)=P(X=1)=C_3^1\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2,\ Y=1)=P(X=2)=C_3^2\cdot(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3,\ Y=3)=P(X=3)=C_2^3\cdot(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0=\frac{1}{8}$$

其它的 $(X,\ Y)$ 组合的概率全为 0。

$(X,\ Y)$ 的联合分布律如下：

Y \ X	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

(X, Y) 的边缘分布如下：

X	0	1	2	3		Y	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

【例 4】X_1, X_2 具有同一分布 $X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $(i=1,2)$，且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，求 $P\{X_1=X_2\}$。

解：已知 (X_1, X_2) 边缘分布，$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$，$X_2 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

又已知 $P\{X_1X_2=0\}=1 \Rightarrow P\{X_1X_2=1\}+P\{X_1X_2=-1\}=1-P\{X_1X_2=0\}=0$，则

$$\Rightarrow \begin{cases} P\{X_1X_2=1\}=0 \\ P\{X_1X_2=-1\}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\{X_1=1,\ X_2=1\}=0 \\ P\{X_1=-1,\ X_2=-1\}=0 \\ P\{X_1=1,\ X_2=-1\}=0 \\ P\{X_1=-1,\ X_2=1\}=0 \end{cases}$$

则 (X_1, X_2) 的联合分布律具有下列形式

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$P_{i.}$
-1	0	$\left(\frac{1}{4}\right)$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\left(\frac{1}{4}\right)$	(0)	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\left(\frac{1}{4}\right)$	0	$\frac{1}{4}$
$P_{.j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

于是可以根据表格中已有的数据推出括弧内的值

$P\{X_1=0,\ X_2=-1\}=\frac{1}{4}$　　$P\{X_1=0,\ X_2=1\}=\frac{1}{4}$

$P\{X_1=0,\ X_2=0\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$　　$P\{X_1=-1,\ X_2=0\}=\frac{1}{4}$

$P\{X_1=1,\ X_2=0\}=\frac{1}{4}$，　故 $P\{X_1=X_2\}=0$。

【例 5】设随机变量 $Y \sim E(1)$，$X_k = \begin{cases} 0, & Y \le k \\ 1, & Y > k \end{cases}$，$k = 1, 2$，求 X_1，X_2 的联合分布和边缘分布。

解：$(X_1,\ X_2)$ 的可能取值为 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} E(1)\,dt = \begin{cases} 1-e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow P\{X_1 = 0,\ X_2 = 0\} = P\{Y \le 1,\ Y \le 2\} = P\{Y \le 1\} = F(1) = 1 - e^{-1}$$

$$P\{X_1 = 0,\ X_2 = 1\} = P\{Y \le 1,\ Y > 2\} = P\{\Phi\} = 0$$

$$P\{X_1 = 1,\ X_2 = 0\} = P\{Y > 1,\ Y \le 2\} = P\{1 < Y \le 2\} = F(2) - F(1) = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P\{X_1 = 1,\ X_2 = 1\} = P\{Y > 1,\ Y > 2\} = P\{Y < 2\} = 1 - F(2) = e^{-2}$$

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

又，显然，$X_k\,(k=1,\ 2)$ 服从 $0-1$ 分布，则边缘分布为

$$P\{X_k = 0\} = P\{Y \le k\} = F(k) = 1 - e^{-k},\ k = 1,\ 2$$
$$P\{X_k = 1\} = P\{Y > k\} = 1 - F(k) = e^{-k},\ k = 1,\ 2$$
。

三、 二维连续型随机变量的联合概率密度、边缘概率密度与条件概率密度（3 密）

1．联合分布函数与联合概率密度

连续型联合分布函数：

$$\boxed{F(x,y) = P\{X \le x,\ Y \le y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \iint\limits_{\{\text{直角分割区域}\}\cap\{\text{正概率区间}D\}} f(u,v)\,du\,dv}$$

区域 D 按照**智轩直角分割法**确定。且有 **联合概率密度**：$\boxed{f(x,\ y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}}$

2．边缘分布的概率密度

$$\boxed{\begin{aligned} F_X(x) &= F(x,\ +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right]dx \Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ F_X(x) &= F(+\infty,\ y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right]dy \Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \end{aligned}}$$

评 注 二维连续型 $(X,\ Y)$ 的两个分量 X，Y 还是连续型，但两个分量都是连续型的随机变量构成的二维随机变量却不一定是连续型，即可能成为既非连续型，又非离散型。

3．条件概率密度

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}}$$

证明：$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\dfrac{P\{X\le x,\ y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(x,y)dy\right]dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(y)dy}\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(x,\ \xi_1)dx}{\varepsilon f_Y(\xi_2)}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,\ \xi_1)dx}{f_Y(\xi_2)}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,\ \xi_1)}{f_Y(\xi_2)}dx\xrightarrow[\varepsilon\to0^+\Rightarrow\xi_1,\ \xi_2\to y]{\xi_1,\ \xi_2\in(y,\ y+\varepsilon)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}dx\Rightarrow f(x|y)=\left[\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}dx\right]'=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}$$

同理：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,\ y)}{f_X(x)}$

■二维连续分布题型题法

【例 6】已知二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，求边缘分布概率密度。

解：$$\boxed{f(x,\ y)=N(\mu_1,\ \mu_2;\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\ \rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}$$

由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2}dy$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\Rightarrow f_X(x)\dfrac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$

同理 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，可见二维正态分布的两个边缘分布仍然是正态分布。

【例 7】 设$(X,\ Y)\sim N\ (0,\ 0;\ 1,\ 1;\ \rho\ )$，求 $f_{X|Y}(x|y)$ 与 $f_{Y|X}(y|x)$。

解： 因为 $f(x,y)=N\ (0,\ 0;\ 1,\ 1;\ \rho\ )=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$，

又， $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$， $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$f_{X|Y}=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2\left(1-\rho^2\right)}}\sim N\left(\rho y,\ 1-\rho^2\right)$$

$$f_{Y|X}=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2\left(1-\rho^2\right)}}\sim N\left(\rho x,\ 1-\rho^2\right)$$

可见正态分布的两个边缘分布仍然是正态分布。

$\boxed{评\ 注}$ 一般地 $(X,\ Y)\sim N\left(\mu_1,\ \mu_2;\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\ \rho\right)\Rightarrow\begin{cases}f_{X|Y}\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right)\\ f_{Y|X}\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\right)\end{cases}$

而且，从上式可以看出，当 $\rho=0$，即 $X,\ Y$ 独立或不相关时，两个正态边缘分布和条件分布相同。

【例 8】设随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数为 $f(x,\ y)=\begin{cases}k(6-x-y), & D:\ 0<x<2,\quad 2<y<4\\ 0, & 其它\end{cases}$，

试求 (1) k； (2) $P(X\le 1,\ Y\le 3)$； (3) $P(X\le 1.5)$； (4) $P(X+Y\le 4)$

解： (1) 由密度函数的归一化性质得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_2^4k(6-x-y)dy=8k\Rightarrow k=\frac{1}{8};$$

(2) $P(X\le 1,\ Y\le 3)=\int_{-\infty}^{1}dx\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^1dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3}{8}$； 属于联合分布。

(3) $P(X\le 1.5)=\int_{-\infty}^{1.5}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_{-\infty}^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{27}{32}$； 属于边缘分布。

(4) $P(X+Y\le 4)=\iint\limits_{\{x+y\le 4\}\cap D}f(x,\ y)dxdy=\int_0^2dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}$。属于函数分布。

【例 9】$(X,\ Y)$ 的概率密度 $f(x,\ y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x\\ 0, & other\end{cases}$，求 $P\left\{Y\le\frac{1}{2}\,|\,X\le\frac{1}{2}\right\}$。

解：由于条件分布和联合分布及其边缘分布有关，故首先求边缘分布 $f_X(x)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_0^{2x}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & other\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & other\end{cases};$$

$$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\,|\,X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{Y\le\frac{1}{2},\ X\le\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}}=\frac{\iint\limits_{\left\{点\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)的直角分割区域\right\}\cap\{正概率区域\}}f(x,\ y)dxdy}{\int_0^{\frac{1}{2}}f_X(x)dx}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}。$$

【例 10】设 $(X, Y) \sim U\left\{(0 \le x \le 2), (0 \le y \le 1)\right\}$，求边长为 X 和 Y 的矩形面积为 S 的概率密度 $f_S(s)$。

解：显然，$0 < s < 2$，曲线 $xy = s$ 与正概率区域的右边交点为 $\left(2, \dfrac{s}{2}\right)$，于是

$$F_S(s) = P\{XY \le s\} = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{s}{2}} f(x,y)dy + \int_{\frac{s}{2}}^1 dy \int_0^{\frac{s}{y}} f(x,y)dx$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{1}{S_D} dy + \int_{\frac{s}{2}}^1 dy \int_0^{\frac{s}{y}} \frac{1}{S_D} dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^2 dx \int_0^{\frac{s}{2}} dy + \int_{\frac{s}{2}}^1 dy \int_0^{\frac{s}{y}} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(s - s\ln\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}s(1 + \ln 2 - \ln s)$$

$$\Rightarrow f_S(s) = [F_S(s)]' = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln s)$$

【例 11】设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & other \end{cases}$。求 $f_X(x|y)$，$f_Y(y|x)$。

解：绘出 x，y 取值范围示意图。

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_y^1 dx = 1 - y, & 0 \le y < 1 \\ \int_{-y}^1 dx = 1 - y, & -1 \le y < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_{-x}^{x} dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & other \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

$\Rightarrow |y| < 1$（大前提）

$$f_X(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - |y|}, & |y| < x < 1 \quad \text{（大前提与}f(x, y)\text{正概率区域的交集）} \\ 0, & other \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 < x < 1$ （大前提）

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & |y| < x < 1 \quad \text{（大前提与}f(x, y)\text{正概率区域的交集）} \\ 0, & other \end{cases}$$

评 注 如何写出条件概率密度、条件分布函数和条件分布率中变量的范围是一个重点。

$f_X(x|y)$ 是 $Y = y$ 的条件下随机变量 X 的概率密度函数，是在 $Y = y$ 的条件下 x 的函数。因此，书写条件概率密度 $f_X(x|y)$ 时，应先书写 **y 的范围作为大前提**，再书写 **用 y 表示的 x 的范围** 作为概率密度函数的定义域，表明此函数是 x 的函数。y 的范围不能含有 x，从联合概率密度直接得到；而对应得定义域 x 需使用分割法来确定。请读者反复领会上例的解答过程。

智轩第 5 技 【二维直角分割法】。

在某局部区域中，已知 2 维随机变量不为零的分布密度 $f(x,\ y)$（这个局部区域又称为**正概率点区域**），求全部区域的分布函数 $F(x,\ y)$ 问题是一个难点。作者创立的直角分割法可以方便清晰地解决这类题型。二维直角分割法秘诀如下，

(1) 如果正概率点区域在 x 和 y 两个方向都有界，则需要将全平面区域划分为 5 类积分区域，在每类区域中求 $F(x,\ y)$ 时，积分区域为直角分割区域和正概率点区域的交集。

●**第 1 类积分区域** 点 $(x,\ y)$ 的直角分割区域与 $f(x,\ y)$ 正概率区域无交集，$F(x,\ y)=0$；

●**第 2 类积分区域** 点 $(x,\ y)$ 的直角分割区域画在与 $f(x,\ y)$ 正概率点区域 y 方向的外边，积分区域为直角分割区域和正概率区域的交集部分，显然这时相当于求 X 的边缘分布函数 $F(x,\ y)=F_X(x)$；

●**第 3 类积分区域** 点 $(x,\ y)$ 的直角分割区域画在与 $f(x,\ y)$ 正概率点区域 x 方向的外边，积分区域为直角分割区域和正概率区域的交集部分，显然这时相当于求 Y 的边缘分布函数 $F(x,\ y)=F_Y(y)$；

●**第 4 类积分区域** 点 $(x,\ y)$ 的直角分割区域画在 $f(x,\ y)$ 正概率点区域的内部，积分区域为直角分割区域和正概率区域的交集部分；

●**第 5 类积分区域** 点 $(x,\ y)$ 的直角分割区域包含整个正概率点区域的全部，积分区域是正概率点区域本身，显然此时有 $F(x,\ y)=1$。

(2) 如果正概率点区域在 x 和 y 两个方向有一个区间无界，由于直角分割区域顶点无法画在该无界区间的外部，则只需将全部区域划分为 3 类积分区域，即没有第 2 类和第 5 类，或者没有第 3 类和第 5 类。在每类区域中 $F(x,\ y)$ 积分区域仍为直角分割区域和正概率点区域的交集。

■二维直角分割法题型题法

【例 12】已知随机变量 (X,Y) 的联合分布密度为 $f(x,\ y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x<1,\ 0\le y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

求 $(X,\ Y)$ 的的联合分布函数 $F(x,\ y)$。

解：采用二维直角分割法。

第 1 类：$x<0$ 或 $y<0\Rightarrow F(x,\ y)=0$；

第 2 类：直角分割区域顶点 $(x,\ y)$ 在区域 $y\ge 1,\ 0\le x<1$ 内（即在正概率点区域 $0\le x<1,\ 0\le y<1$ 的 y 方向的外部），积分区域为直角分割区域与定义区域 $0\le x<1,\ 0\le y<1$（即正概率区域）的公共部分（即交集）。

$F(x,\ y)=F_X(x)=\int_0^x\int_0^1 4uvdudv=\int_0^x 4udu\int_0^1 vdv=x^2$。

第 3 类：直角分割区域顶点$(x,\ y)$在区域$x\ge 1,\ 0\le y<1$内（即在正概率点区域$0\le x<1,\ 0\le y<1$的x方向的外部），积分区域为直角分割区域与定义区域$0\le x<1,\ 0\le y<1$（即正概率区域）的公共部分（即交集）。

$$F(x,\ y)=F_Y(y)=\int_0^y\int_0^1 4uvdudv=\int_0^y 4vdv\int_0^1 udu=y^2$$

第 4 类：直角分割区域顶点$(x,\ y)$在正概率点区域$0\le x<1,\ 0\le y<1$的内部，积分区域为直角分割区域与定义区域$0\le x<1,\ 0\le y<1$（即正概率区域）的公共部分（即交集）。

$$F(x,\ y)=\int_0^y\int_0^x 4uvdudv=\int_0^y 4vdv\int_0^x udu=x^2y^2$$

第 5 类：直角分割区域顶点$(x,\ y)$在区域$x\ge 1,\ y\ge 1$的内部，直角分割区域包含正概率点区域$0\le x<1,\ 0\le y<1$的全部，积分区域为定义区域$0\le x<1,\ 0\le y<1$（即正概率区域）的本身，$F(x,\ y)=1$。

综上所述，得 $F(x,\ y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0\\ x^2, & 0\le x<1,\ y\ge 1\\ y^2, & 0\le y<1,\ x\ge 1\\ x^2y^2, & 0\le x<1,\ 0\le y<1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$

【例 13】设随机变量(X,Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y} & 0<x<y<+\infty\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，试求分布函数 $F(x,y)$。

解：利用**【二维直角分割法】**计算，先画图确定正概率区域$0<x<y<+\infty$，由于区域边界不是常数，易知全平面只有 3 类直角分割区域。

第 1 类：$x<0$ 或 $y<0\Rightarrow F(x,\ y)=0$，因为直角区域与正概率区域$0<x<y<+\infty$无公共部分；

第 2 类：不存在；

第 3 类：直角区域顶点在$0\le y<x<+\infty$内（即正概率区域$0<x<y<+\infty$的x方向外部），积分区域为直角分割区域与定义区域$0<x<y<+\infty$（即正概率区域）的公共部分（即交集）。

$$F(x,\ y)=F_Y(y)=P(X\le x,\ Y\le y)=\int_0^y dy\int_0^y xe^{-y}dx=1-(\frac{1}{2}y^2+y+1)e^{-y}$$

第 4 类：三角区域顶点在$0<x<y<+\infty$内，积分区域为三角区域与定义区域$0\le x>y<+\infty$的公共部分。

$$F(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)=\int_0^x dx\int_x^y xe^{-y}dy=1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}$$

第 5 类：不存在。

综上所述，得 $F(x,\ y)=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ 或 } y<0 \\ 1-(\frac{1}{2}y^2+y+1)e^{-y} & 0\le y<x<+\infty \\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y} & 0\le x<y<+\infty \end{cases}$

$\boxed{评\ 注}$ 由于 $\left.\frac{\partial^2 F(X,Y)}{\partial x\partial y}\right|=0,$ 所以当密度函数为零，分布函数却不一定为零。如本题 $f(x,\ y)$ 在区域 $0\le y<x<+\infty$ 为零，而在概率分布函数中等于 $1-(\frac{1}{2}y^2+y+1)e^{-y}$。

四、 3 分 3 律 3 密与随机变量的相互独立性

二元分布有离散型的联合、边缘和条件分布律 3 种形式和连续型的联合、边缘和条件 3 种密度函数，简称 3 分 3 密，它们的一种重要关系就是独立性。

1．独立性的一般形式

任意 $x_1,\cdots,x_n$ 的联合分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 满足

$\boxed{F(x_1,\ x_2\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n) \text{时，称} x_1,\cdots,x_n \text{相互独立}}$。

注意，可以证明，这个定义与前面的用事件的概率来定义事件之间的独立性是完全等价的。

★ 二维离散型： $X,\ Y$ 相互独立的充要条件是 $p_{ij}=p_{i.}p_{.j}$

★ 二维连续型： $X,\ Y$ 相互独立的充要条件是 $f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$

2. 二维连续密度函数具有下列重要结论：

如果 $f(x,\ y)$ 在规则区域，如矩形区间等，具有分离变量形式，即

$f(x,\ y)=g(x)h(y)\quad [x\in(a,\ b),\ \ y\in(c,\ d)]$，则 $X,\ Y$ 一定相互独立。

(a) 如 $f(x,\ y)=8xy\ (\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ 中 $X,\ Y$ 就一定独立。。

(b) 如 $f(x,\ y)=8xy\ (\ 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1)$，存在不规则区间，故 $X,\ Y$ 不独立。

如果上述两个条件$\boxed{\text{规则区域或分离变量形式}}$一个都不满足，则一般不独立。注意 $g(x),\ h(y)$ 不是边缘分布

3. 二维正态型随机变量 $X,\ Y$ 相互独立的充要条件是 相关系数 $\rho=0$，即 $X,\ Y$ 不相关。

如果 $X_i\sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2)$，且 $\{X_i\}$ 相互独立，则 $\boxed{Z=\sum_{i=1}^{n}k_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n}(k_i\sigma_i)^2\right)}$

4. 随机向量函数的相互独立性

●设随机向量$(X_1,\cdots,X_m)$和$(Y_1,\cdots,Y_n)$及$(X_1,\cdots,X_m;\ Y_1,\cdots,Y_n)$满足下式

$$F(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)=F_1(x_1,\cdots,x_m)F_2(y_1,\cdots,y_n)$$

则称$(X_1,\cdots,X_m)$与$(Y_1,\cdots,Y_n)$相互独立；此时，X_i与Y_j必相互独立；并且，任意函数分布$g(X_1,\cdots,X_m)$与$h(Y_1,\cdots,Y_n)$也相互独立，

● 如随机变量X_1,X_2相互独立，则随机变量的函数$f(X_1)$与$g(X_2)$必相互独立，但$f(X_1,\ X_2)$与$g(X_1,\ X_2)$却不一定独立。

● 设随机变量$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$相互独立，它们的联合分布函数为$F_{X_i}(x_i)$，则

$$\begin{cases}M=Max\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}\Rightarrow F_{Max}(z)=P(M\le z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)\\ N=Min\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}\Rightarrow F_{Min}(z)=P(N\le z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[F_{X_n}(z)]\end{cases}$$

$$\xrightarrow{F_{X_1}(z)=F_{X_2}(z)=\cdots=F_{X_n}(z)=F(x)}$$

$$\boxed{\begin{cases}M=Max\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}\Rightarrow F_{Max}(z)=P(M\le z)=[F(z)]^n\Rightarrow f_{Max}(x)=nf(x)[F(z)]^{n-1}\\ N=Min\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}\Rightarrow F_{Min}(z)=P(N\le z)=1-[1-F(z)]^n\Rightarrow f_{Min}(x)=nf(x)[1-F(z)]^{n-1}\end{cases}}$$

● $X,\ Y$相互独立，如$(X,\ Y)$的联合密度函数为$f(x,\ y)$，则

$$\boxed{Z=aX+bY\Rightarrow f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y\left(\frac{z-ax}{b}\right)dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(\frac{z-by}{a}\right)f_Y(y)dy}$$

形象记忆掌握法： 这个公式特别有规律，在形式上，只要从$z=ax+by$中解出$y=\dfrac{z-ax}{b}$代换$f_Y(y)$中的y，或者从$z=ax+by$中解出$x=\dfrac{z-by}{a}$代换$f_X(x)$中的x即可。

证明：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{aX+bY\le z\}=\displaystyle\iint_{ax+by\le z}f(x,\ y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{\frac{z-by}{a}}f(x,\ y)dx\xrightarrow[dx=\frac{1}{a}du]{ax+by=u}=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{z}f\left(\frac{u-by}{a},\ y\right)du=\int_{-\infty}^{z}\left[\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{u-by}{a},\ y\right)dy\right]du$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{u-by}{a},\ y\right)dy$$

5. **四类可加性分布（其余分布不可加）**

★$X,\ Y$相互独立，$X\sim B(m,\ p),\ Y\sim B(n,\ p)$，则 $\boxed{Z=X+Y\sim B(m+n,\ p)}$

★$X,\ Y$相互独立，$X\sim P(\lambda_1),\ Y\sim P(\lambda_2)$， 则 $\boxed{Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)}$

但泊松分布不存在线性性，即$Y=aX+b$不再是泊松分布。

★ X，Y 独立， $X \sim N\left(\mu_1,\ \sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2,\ \sigma_2^2\right)$，则 $\boxed{Z = aX + bY \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\right)}$

如果 $(X,\ Y)$ 联合分布是正态，且 X，Y 不独立，则

$$\boxed{Z = aX + bY \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2,\ \ a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2\right)}$$

★ X，Y 相互独立， $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，则 $\boxed{Z = X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)}$

6．模球模型的独立性质

在有若干个红球和黑球的箱中逐次随机取一球，令 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{如第 } i \text{ 取出红球} \\ 0, & \text{如第 } i \text{ 取出黑球} \end{cases}$ $(i=1,2)$，则不管放回与否， X_1 和 X_2 同分布；但放回抽样时 X_1 和 X_2 独立，不放回抽样时 X_1 和 X_2 不独立。

7．离散型与连续型分布函数的关系

$$\boxed{P\left\{X = x_i,\ Y = y_j\right\} \approx f(x,\ y)\,dxdy}$$

证明： $P\left\{x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2\right\} = F(x_2,\ y_2) - F(x_1,\ y_2) - F(x_2,\ y_1) + F(x_1,\ y_1)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P\left\{X = x_i,\ Y = y_j\right\} &\approx P\left(x < X \le x + dx,\ \ y < Y \le y + dy\right) \\
&= F(x+dx,\ y+dy) - F(x+dx,\ y) - F(x,\ y+dy) + F(x,\ y) \\
&= \left[F(x+dx,\ y+dy) - F(x+dx,\ y)\right] - \left[F(x,\ y+dy) - F(x,\ y)\right] \\
&= F_y'(x+dx,\ y)dy - F_y'(x,\ y)dy = \left[F_y'(x+dx,\ y) - F_y'(x,\ y)\right]dy \\
&= F_{xy}''(x,\ y)dxdy = f(x,\ y)\,dxdy
\end{aligned}$$

8．连续型分布的概率密度、边缘密度和条件密度函数的关系

● 乘法公式 $\boxed{\begin{aligned} &f(x,\ y) = f(xy) = f_X(x)\,f_{Y|X}(y\,|\,x) = f_Y(y)\,f_{X|Y}(x\,|\,y) \\ &P_{ij} = P_{i.}P_{j|i} = P_{.j}P_{i|j} \end{aligned}}$

● 全概率公式 $\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,f_{X|Y}(x\,|\,y)\,dy}$

● 贝叶斯公式 $\boxed{f_{X|Y}(x\,|\,y) = \dfrac{f_X(x)\,f_{Y|X}(y\,|\,x)}{f_Y(y)}}$

● 二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布唯一地确定两个边缘分布、条件分布；但反之不然。若 X，Y 独立，由两个边缘分布可以确定联合分布；若 X，Y 不独立，则由一个边缘分布再加上一个对应的条件分布才能确定联合分布（参看上述乘法公式）。

■二维随机变量的相互独立性题型题法

【例 14】设离散型(X, Y)的分布列如左

问α，β取什么值时X, Y独立。

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	α
3	$\frac{1}{18}$	β

解：边缘分布为

$X \backslash Y$	1	2	$P_{i.}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{9}$	α	$\frac{1}{9}+\alpha$
3	$\frac{1}{18}$	β	$\frac{1}{18}+\beta$
$P_{.j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$	1

由归一性知 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{1}{3}$

要使X, Y独立，显然要求

$$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{9}+\alpha\right) \Rightarrow \alpha=\frac{2}{9}, \quad \Rightarrow \beta=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

再验证每一项是否满足独立：经验证$\alpha=\frac{2}{9}, \beta=\frac{1}{9}$时，$X, Y$独立。

【例 15】X, Y独立，且$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=p>0$，$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=1-p>0$，

$$U=\begin{cases}1, & X+Y\text{为偶数}\\ -1, & X+Y\text{为奇数}\end{cases}$$，问当p为何值时，X与U独立？

解：如果X与U独立，又X与U都是二值变量，故只需要求任意组数独立即可（另一组自动满足独立性要求），则

$$P\{X=1, U=1\}=P\{X=1\}P\{U=1\}$$

$$\Rightarrow P\{X=1, X+Y\text{为偶数}\}=p\cdot P\{U=1\}$$

$$\Rightarrow P\{X=1, Y=1\}=p\left[P\{X=0, Y=0\}+P\{X=1, Y=1\}\right]$$

$$\Rightarrow P\{X=1\}P\{Y=1\}=p\left[P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\right]$$

$$\Rightarrow p^2=p\left[(1-p)^2+p^2\right]\Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

【例 16】设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，密度函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

试证明 $X+Y$ 与 $\dfrac{X}{Y}$ 也相互独立。

证明：(X,Y) 的联合密度函数 $f(x, y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

令 $x+y=u,\ \dfrac{x}{y}=v\Rightarrow x=\dfrac{uv}{1+v},\ y=\dfrac{u}{1+v},\ u>0,\ v>0$

$$\Rightarrow J=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \left(\frac{u}{1+v}-\frac{uv}{(1+v)^2}\right) \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}=-\frac{u}{(1+v)^2}$$

故得 (U, V) 的密度函数为

$$f_{(U,V)}(u, v)=f\left(\frac{uv}{1+v},\frac{u}{1+v}\right)\cdot\left|-\frac{u}{(1+u)^2}\right|=\begin{cases} \frac{1}{(1+v)^2}ue^{-u} & u>0,\ v>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(U, V) 的边缘密度函数为

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u, v)du=\begin{cases} \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+v)^2}ue^{-u}dv=ue^{-u}, & u>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_V(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u, v)du=\begin{cases} \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+v)^2}ue^{-u}du=\frac{1}{(1+v)^2}, & u>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是 $f_{UV}(u, v)=f_U(u)f_V(v)$，命题得证。

【例 17】证明：如 (X, Y) 的联合密度函数具有可分离变量形式，且正概率区域为矩形，则 X 和 Y 一定独立。

证明：设 $f(x, y)=\begin{cases} g(x)h(y), & a<x<b,\ c<y<d \\ 0, & other \end{cases}$

$$\Rightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^d g(x)h(y)dy=g(x)\int_c^d h(y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_a^b g(x)h(y)dx=h(y)\int_a^b g(x)dx$$

$$\Rightarrow f_X(x)f_Y(y)=\left[g(x)\int_c^d h(y)dy\right]\cdot\left[h(y)\int_a^b g(x)dx\right]$$

$$=g(x)h(y)\int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy=g(x)h(y)\int_a^b\int_c^d g(x)h(y)dxdy$$

$$=g(x)h(y)\times 1=f(x,y)$$

所以，X 和 Y 独立。

评 注　这是一个**重要结论**，在下一章的相关性质中具有很好的指导意义。因为，独立必不相关，不相关不一定独立。读者如遇到此类选择题，可以直接使用该结论。

【例 18】设 A, B 是两个随机变量，定义：$X=\begin{cases}x_1, & 若A出现\\ x_2, & 若A不出现\end{cases}$，$Y=\begin{cases}x_1, & 若B出现\\ x_2, & 若B不出现\end{cases}$

试证 X, Y 独立 $\Leftrightarrow A, B$ 独立。

证明：先化为标准的$0-1$变量，令 $\boxed{U=\dfrac{X-x_2}{x_1-x_2};\ V=\dfrac{Y-y_2}{y_1-y_2}}$，则

$$U=\begin{cases}1, & 若A出现\\ 0, & 若A不出现\end{cases},\quad V=\begin{cases}1, & 若B出现\\ 0, & 若B不出现\end{cases}$$

则 X, Y 独立 $\Leftrightarrow U, V$ 独立，U, V 独立得 U, V 不相关，又

$$EU=1\cdot P\{U=1\}+0\cdot\{U=0\}=P(A);\ EV=1\cdot P\{V=1\}+0\cdot\{V=0\}=P(B)$$

$$EUV=1\cdot P\{UV=1\}+0\cdot P\{UV=0\}=1\cdot P\{U=1, V=1\}=P(AB)$$

$$EUEV=P\{U=1\}P\{V=1\}=P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow EUV=EUEV\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

故，原命题得证。

评 注　这也是一个**重要结论**：事件 A, B 独立等价于它们相应的二值变量 X, Y 独立。

五、 2 大二维连续型分布函数（其它的多维分布函数不是考点）

1　二维均匀分布　$\boxed{f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & other\end{cases}\sim U(D)}$

评 注　设(X, Y)服从非矩形区域、圆形区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}$等上的均匀分布，则两个边缘分布都不是均匀分布，但两个条件分布都是均匀分布。

设(X, Y)服从$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le x\le d\}$上的均匀分布，则两个边缘分布和两个条件分布都

是对应的一维均匀分布，而且 X，Y 独立。

【例 19】设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 在服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$ 上的均匀分布，证明：$X+Y$ 服从 $[-1,\ 1]$ 上的均匀分布。

证明：令 $Z=X+Y$，D 的面积为 2。

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{x+y\le z} dxdy$$

$$z\le -1\Rightarrow F_Z(z)=0;$$

$$-1\le z\le 1\Rightarrow F_Z(z)=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}\times\frac{z+1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{z+1}{2};(\text{注意}x+y=z\text{与}x\text{轴的交点为}z)$$

$$z>1\Rightarrow F_Z(z)=1.$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le -1\\ \dfrac{z+1}{2}, & -1\le z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2 二维正态分布

$$\boxed{f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}\sim N\left(\mu_1,\ \mu_2;\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\ \rho\right)}$$

评注 设二维随机变量 $(X,\ Y)\sim N\left(\mu_1,\ \mu_2;\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\ \rho\right)$，则 $X,\ Y$ 的任意线性组合 $\boxed{Z=C_1X+C_2Y\sim N\left(C_1\mu_1+C_2\mu_2,\ \ C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\rho\sigma_1\sigma_2\right)}$ 仍然是正态分布；但任意两个单一正态随机变量的线性组合却不一定是正态分布；两个边缘分布都是正态分布的二维随机变量也不一定是正态分布，只有在相互独立的情形下才满足正态分布形式。

【例 20】设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合概率密度为 $f(x,\ y)=(1+\sin x\sin y)\varphi(x)\varphi(y)$，其中

$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，则下列结论错误的是（ ）

$(A)X$服从正态分布 $(B)Y$服从正态分布

$(C)(X,\ Y)$服从正态分布 $(D)(X,\ Y)$不服从正态分布

解：选 (C)。$f(x,\ y)=(1+\sin x\sin y)\varphi(x)\varphi(y)=\dfrac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，不是正态分布，故结论错误。

(A) $f_X(x)=\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)dy+\sin x\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y\varphi(y)dy=\varphi(x)+0=\varphi(x)$，故正确。

(B) 同理，正确。

评注 1. 注意二维随机变量 $(X,\ Y)$ 和两个一维随机变量 X、Y 的函数组合是不同的。

2．$(X,\ Y)$服从二维正态分布，则 X 、Y 的边缘分布和条件分布必定服从一维正态分布，反之不成立，如本题，并且 X 、Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$ 。

3．如果一维随机变量 X 、Y 均服从正态分布，且相互独立，则它们构成的二维$(X,\ Y)$为正态分布，即$(X,\ Y)\sim N\left(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ 0\right)$。

六、 6 大两个随机变量的函数的分布及其模型（简称函数分布 $Z=\varphi(X,\ Y)$）

■二维函数分布的题型题法

【例 21】设二维随机变量$(X_1,\ X_2)$的密度函数为 $f(x_1,\ x_2)$，且$Y_1=2X_1$，$Y_2=\frac{1}{3}X_2$，求 $f(y_1,\ y_2)$。

解：$F\{y_1,\ y_2\}=P\{Y_1\le y_1;\ Y_2\le y_2\}=P\left\{2X_1\le y_1;\ \frac{1}{3}X_2\le y_2\right\}$

$=P\left\{X_1\le\frac{1}{2}y_1;\ X_2\le 3y_2\right\}=F\left(\frac{y_1}{2},\ 3y_2\right)\Rightarrow f(y_1,y_2)=F''_{y_1y_2}\left(\frac{y_1}{2},\ 3y_2\right)=\frac{3}{2}f\left(\frac{y_1}{2},\ 3y_2\right)$。

【例 22】设 X，Y 相互独立，且都服从 $N\left(0,\ \sigma^2\right)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 函数分布。

解 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=P\left\{X^2+Y^2\le z^2\right\}$

当 $z<0\Rightarrow F_Z(z)=0$

当 $z\ge 0$ 时， $f_Z(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

$$\Rightarrow F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_o^{2\pi}d\theta\int_o^z re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

1 备用模型—$Z=X+Y\Rightarrow F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

1.1 离散型

一般方法：代入 X, Y 的各种可能值，再计算对应每一可能值的概率和。读者可以从下列例题提炼思路。

Y \ X	-1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$
1	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$
2	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

【例 23】$(X,\ Y)$分布律如右表，求 $Z=X+Y$ 和 $Z=XY$。

解：　列出表如下

P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$Z=X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$Z=XY$	1	-1	-2	-2	2	4

从表中看出：$Z=X+Y=-2$，0，1，3，4

$P\{Z=-2\}=P\{X+Y=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{5}{20}$

$P\{Z=0\}=\frac{2}{20}$

$P\{Z=1\}=P\{X+Y=1\}=P\{X=-1,Y=2\}+P\{X=2,Y=-1\}=\frac{6}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$

$P\{=3\}=\frac{3}{20}$

$P\{Z=4\}=\frac{1}{20}$

于是$Z=X+Y$的分布律如下

$Z=X+Y$	-2	0	1	3	4
P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

同理可得到$Z=XY$的分布律如下

XY	-2	0	1	3	4
P	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

【例 24】设X_1，X_2，$\cdots$，X_n相互独立，分布列都为$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ q & r & p\end{pmatrix}$，其中$0<p<1,\ 0<q<1,\ r\geq 0,$

$p+q+r=1$，求X_1+X_2，X_1X_2和$X_{(1)}=\underset{1\leq k\leq n}{Min}\{X_k\}$的函数分布。

解：　$X_1+X_2=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

由于X_1，X_2相互独立，　$P(X_1X_2)=P(X_1)P(X_2)$

$$P(X_1+X_2=-2)=P(X_1=-1,\ X_2=-1)=P(X_1=-1)P(\ X_2=-1)=q^2$$
$$P(X_1+X_2=-1)=P(X_1=-1,\ X_2=0)+P(X_1=0,\ X_2=-1)=qr+rq=2qr$$
$$P(X_1+X_2=0)=P(X_1=0,\ X_2=0)+P(X_1=1,\ X_2=-1)+P(X_1=-1,\ X_2=1)$$
$$=r^2+pq+qp=r^2+2pq$$
$$P(X_1+X_2=1)=P(X_1=1,\ X_2=0)+P(X_1=0,\ X_2=1)=pr+rp=2pr$$
$$P(X_1+X_2=2)=P(X_1=1,\ X_2=1)=P(X_1=1)P(\ X_2=1)=p^2$$

$$\Rightarrow X_1+X_2\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ q^2 & 2qr & 2pq+r^2 & 2pr & p^2\end{pmatrix}$$

同理$\Rightarrow X_1X_2\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2pq & 1-(p+q)^2 & p^2+q^2\end{pmatrix}$

又由于 $X_{(1)}$ 可能取值为$-1,\ 0,\ 1$，而

$$P\{X_{(1)}=1\}=P\{X_1=1,\ X_2=1,\ \cdots,\ X_n=1\}=p^n$$
$$P\{X_{(1)}=-1\}=P\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\ \text{中至少有一个为}-1\}$$
$$=1-P\{X_1\neq-1,\ X_2\neq-1,\ \cdots,\ X_n\neq-1\}=1-(r+p)^n$$
$$P\{X_{(1)}=0\}=1-\left[P\{X_{(1)}=1\}+P\{X_{(1)}=-1\}\right]=(r+p)^n-p^n$$

$$\Rightarrow X_{(1)}=\underset{1\le k\le n}{Min}\{X_k\}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1-(r+p)^n & (r+p)^n-p^n & p^n\end{pmatrix}。$$

1.2 连续型

设$(X,\ Y)$的概率密度为 $f(x,\ y)$，则连续型分布函数定义为 $F_z(z)=P\{Z\le y\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$。

其中 $x+y\le z$ 是 $x+y=z$ 及其左下方的半平面，可以改写如下：

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx\right]dy\xrightarrow{\text{令 }x=u-y\text{，并交换积分次序}}=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)dy\right]du$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,\ y)dy\quad(3y\ \text{型})$$

由于 X,Y 的轮换对称性，易知 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx\ (3x\ \text{型})$

即得备用模型的连续型公式 $\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,\ y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx}$

如果 X,Y 独立，则可写成下列**卷积形式**

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=f_X*f_Y\ \text{或}\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=f_Y*f_X=f_X*f_Y$$

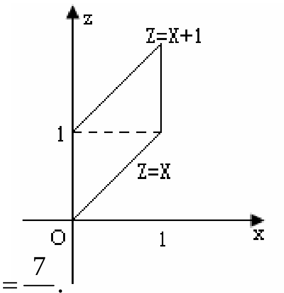
即得备用模型的连续型公式 $\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=f_X*f_Y}$

评 注 备用模型是常年考点，它的一般形式为

$\boxed{Z=aX+bY\Rightarrow f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\ \frac{z-ax}{b}\right)dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-by}{a},\ y\right)dy}$ 更重要，在 X，Y 相互独立时，

$\boxed{Z=aX+bY\Rightarrow f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y\left(\frac{z-ax}{b}\right)dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{z-by}{a}\right)f_Y(y)dy}$，希望读者仿照上述方法务必反复推导 2 次，领会其一般思想，切不可硬背。如果存在非正规区域（即：积分不能用一项表示出来），则需要使用**平移法**划分为若干个正规区域，请参阅后面的智轩平移法。

【例 25】设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$



(1) 求 $P\{X>2Y\}$；

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_z(z)$。

解：(1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{\{x>2y\}\cap\{0<x<1,\ 0<y<1\}} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2y}^{1}(2-x-y)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}-5y+4y^2)dy=\frac{7}{24}.$

(2) 如果已知 $(X,\ Y)$ 的联合概率密度为 $f(x,\ y)$，则 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_z(z)$ 可以直接用公式 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$ 求解，即 $f(x,\ z-x)=2-x-(z-x)=2-z.$

由于被积函数 $f(x,\ z-x)$ 只有在 $0<x<1,\ 0<z-x<1$ 即 $0<x<z<x+1<2$ 时不为 0（正概率区域），又由于积分存在非正规区域，则分两个区间分别计算如下

●当 $0<z<1$ 时，如左上图的下三角形区域（视 z 为常数），$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)dx=z(2-z).$

●当 $1\le z<2$ 时，如左上图的上三角形区域（视 z 为常数）

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0<z<1\\ (2-z)^2, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$。

智轩第 6 技 **【备选模型平移法】**。

备选模型中，已知两个随机变量的分布密度，求它们线性组合 $Z=aX+bY$ 的分布函数密度 $f_Z(z)$，如果积分区间是分段的，我们必须将 z 分割成不同的积分区间，再利用平面积分手段或备选模型公式

$\boxed{Z=aX+bY\Rightarrow f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\ \frac{z-ax}{b}\right)dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-by}{a},\ y\right)dy}$。问题关键和难点就是如何确定

z 的积分区间，为此，作者创立了平移法可以方便而清晰地解决这类题型。平移法步骤如下

(1) 首先画出基准直线 $ax+by=0$；

(2) 把基准直线**逐一平移**到正概率区域的全部边界点上，从而得到正概率区域的分割边界线，该直线与 x 轴的交点就是 x 方向的积分区间分段点，与 y 轴的交点就是 y 方向的积分区间分段点。下面以例题来具体体现。

【例 26】设 X，Y 独立，$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，求 $Z=2X+Y$ 的 $f_Z(z)$。

解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-2x)\,dx$

但由于上述积分区域不是正规区域，x 的积分区间必须依照 z 的不同范围分段进行。按照**平移法**，先作基准直线 $2x+y=0$，然后将该基准直线平移到 $x=1$ 边界点得直线方程 $2x+y=2$，从而得到 z 在 x 轴上的关于正概率区域的一个分界点 $z_2=2$（$z_1=0$，是基准直线与正概率区域的边界交点）。这样，我们就得到了 z 有 3 个取值区间。其中当 $0\le z<2$ 时，又把基准直线任意平移到该区间，得方程 $2x+y=z$，该直线与 x 轴的交点为 $x=\dfrac{z}{2}$（注意把 z 当成常数），即为此区间 x 的积分上限。由图形立即看出 $z<0$ 为零概率区域，分三段分别计算 $f_Z(z)$ 如下

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-2x)\,dx=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^{\frac{z}{2}} e^{2x-z}dx=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{z}\right), & 0\le z<2\\ \int_0^1 e^{2x-z}dx=\dfrac{1}{2}\left(e^{2}-1\right)e^{-z}, & z\ge 2\end{cases}$$

【例 27】$(X,\ Y)$ 的概率密度 $f(x,\ y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & other\end{cases}$，求

(1) $P\{X>2Y\}$；　　　　(2) $Z=X+Y$ 的 $f_Z(z)$。

解：(1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{\{x>2y\}\cap\{0<x<1,\ 0<y<1\}} f(x,\ y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\,dy=\dfrac{7}{24}$；

(2) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)\,dx$

但由于上述积分区域不是正规区域，x 的积分区间必须依照 z 的不同范围分段进行。按照**平移法**，先作基准直线 $x+y=0$，然后将该基准直线平移到 $x=1$ 边界点得直线方程 $x+y=1$，再平移到 $(x=1,\ y=1)$ 边界点得直线方程 $x+y=2$，从而得到 z 在 x 轴上的关于正概率区间的三个分界点 $z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=2$。其中，当 $0\le z<1$ 时，又把基准直线任意平移，得方程 $x+y=z$，该直线与 x 轴的交点为 $x=z$，即为此区间 x

的积分上限，当$1\le z<2$时，又把基准直线任意平移到该区间，也得方程$x+y=z$，但该直线与x轴的交点$x=z$已经超出正概率区间，积分上限直接取$x=1$，又该直线与直线$y=1$的交点为$x=z-1$在正概率区域内，即为此区间x的积分下限。由图形立即看出$z<0$为零概率区间，$f_Z(z)=0$，$z\ge 2$为全概率区间，$F_Z(z)=1\Rightarrow f_Z(z)=0$。所以分四段分别计算$f_Z(z)$如下

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx=\begin{cases}0, & z<0\ \ or\ \ z\ge 2\\ \int_0^z(2-z)dx=z(2-z), & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1(2-z)dx=(2-z)^2, & 1\le z<2\end{cases}$$

【例 28】$(X,\ Y)$的概率密度$f(x,\ y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & other\end{cases}$，求$Z=X-Y$的$f_Z(z)$。

解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx$

由于上述积分区域不是正规区域，x的积分区间必须依照z的不同范围分段进行。按照**平移法**，先作基准直线$x-y=0$，然后将该基准直线平移到$x=1$边界点得直线方程$x-y=1$，从而得到z在x轴上的关于正概率区间的二个分界点$z_1=0,\ \ z_2=1,$ 。其中，当$0\le z<1$时，又把基准直线任意平移到该区间，得方程$x-y=z$，该直线与x轴的交点为$x=z$，即为此区间x的积分下限（由图可知上限为 1）。而$z<0$显然为零概率区间，$f_Z(z)=0$；$z\ge 1$为全概率区间，$F_Z(z)=1\Rightarrow f_Z(z)=0$。所以分三段分别计算$f_Z(z)$如下

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx=\begin{cases}0, & z<0\ \ or\ \ z\ge 1\\ \int_z^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-z^2), & 0\le z<1\end{cases}$$

【例 29】设随机变量X，Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=i\}=\frac{1}{3}\ (i=-1,\ 0,\ 1)$，$Y$的概率分布为

$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & other\end{cases}$，记$Z=X+Y$。(1)求$P\left\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\right\}$；(2)求$f_Z(z)$。

解：(1) $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{X+Y\le\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{Y\le\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{Y\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}f_Y(y)dy=\int_0^{\frac{1}{2}}1\cdot dy=\frac{1}{2}$。

(2) **解法一**：全概率法。把X的分布律中全部取值作为一个划分，使用全概率公式

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\frac{1}{3}P\{X+Y\le z\mid X=-1\}+\frac{1}{3}P\{X+Y\le z\mid X=0\}+\frac{1}{3}P\{X+Y\le z\mid X=1\}$$
$$=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\}$$
$$=\frac{1}{3}F_Y(z+1)+\frac{1}{3}F_Y(z)+\frac{1}{3}F_Y(z-1)$$
$$\Rightarrow f_Z(z)=\frac{1}{3}f_Y(z+1)+\frac{1}{3}f_Y(z)+\frac{1}{3}f_Y(z-1)$$

$$\xrightarrow{\text{由于三个不等式}\begin{cases}0\le z+1<1\\0\le z<1\\0\le z-1<1\end{cases}\text{没有公共交集}}=\begin{cases}0, & z\le -1\\ \frac{1}{3}f_Y(z+1)=\frac{1}{3}, & -1\le z<0\\ \frac{1}{3}f_Y(z)=\frac{1}{3}, & 0\le z<1\\ \frac{1}{3}f_Y(z-1)=\frac{1}{3}, & 1\le z<2\\ 0, & z\ge 2\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

上述方法的难点是读者很难掌握 z 的分段区间。智轩平移法就是解决这一难点的。

(2) **解法二：智轩平移法。**

建立二维直角坐标系，在 x 轴上标出 $x=-1,\ 0,\ 1$ 三点，在 y 轴上画出 $y=1$ 直线，作基准直线 $x+y=0$，再把基准直线分别平移到 $(x=-1,\ y=0)$; $(x=1,\ y=0)$; $(x=1,\ y=1)$ 三点，分别得到分界直线 $x+y=-1;\ x+y=1;\ x+y=2$。可见 $-1\le z<2$ [注意在点 $(x=1,\ y=1)$ 时，y 处于零概率区域，故 $z\ne 2$，这也符合概率右连续的原则]。

●当 $-1>z$，画图易知，$x+y=z$ 完全处于零概率区域，$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=0$；

●当 $-1\le z<0$，画图易知，$x+y\le z$ 的区域只包含 $x=-1$ 的概率为 $\frac{1}{3}$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}f_Y(y)dy=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}1\cdot dy=\frac{z+1}{3};$$

●当 $0\le z<1$，由图易知，$x+y\le z$ 的区域包含 $x=-1$ 的概率为 $\frac{1}{3}$ 和 $x=0$ 的概率为 $\frac{1}{3}$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}$$

$$\xrightarrow{z+1<2\text{包含了}Y\text{的全部正概率区域}\to\text{边缘分布}\int_0^{z+1}f_Y(y)dy\equiv 1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^z f_Y(y)dy=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^z 1\cdot dy=\frac{z+1}{3}$$

注意，这里的 $z+1$ 与前一问的 $z+1$ 取值范围是不同的。

●当 $1\le z<2$，由图知 $x+y\le z$ 的区域 $x=-1$ 的概率为 $\frac{1}{3}$，$x=0$ 的概率为 $\frac{1}{3}$，$x=1$ 的概率为 $\frac{1}{3}$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\}$$

$$\xrightarrow{z+1<3,,\ z<2\text{都包含了}Y\text{的全部正概率区域}\to\int_0^{z+1}f_Y(y)dy\equiv 1,\ \int_0^z f_Y(y)dy\equiv 1,\ \text{但}0\le z-1<1\text{在正概率区域内}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{z-1}f_Y(y)dy=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{z-1}f_Y(y)dy=\frac{1+1+z-1}{3}=\frac{z+1}{3}$$

●当 $z\ge 2$，由图易知，$x+y\le z$ 包含了全平面的全部正概率区域，$F_Z(z)=1$。

$$\Rightarrow F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ \frac{z+1}{3}, & -1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2 并联模型—$M=Max(X,\ Y)$和串联模型—$N=Min(X,\ Y)$， $X,\ Y$独立

$$F_{Max}(z)=P(M\le z)=P\{X\le z,Y\le z\}=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{Min}(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P(X>z)P(Y>z)$$
$$=1-[1-P(X\le z)][1-P(Y\le z)]=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

一般地：
$$\boxed{\begin{aligned}&F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)\\&F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]\end{aligned}}$$

如 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为同分布，则有
$$\boxed{\begin{aligned}&F_{\max}(z)=[F(z)]^n\Rightarrow f_{\max}(z)=nf(x)[F(z)]^{n-1}\\&F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n\Rightarrow f_{\min}(z)=nf(x)[1-F(z)]^{n-1}\end{aligned}}$$

评 注 1。等价表示：$\boxed{M=Max(X,\ Y)=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)}$； $\boxed{N=Min(X,\ Y)=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)}$。

2．串并模型的 4 类情形

$\{Max(X,Y)\ge c\}=\{X\ge c\}+\{Y\ge c\}\to$ 大大大大

$\{Max(X,Y)\le c\}=\{X\le c\}\{Y\le c\}\to$ 大小小小

$\{Min(X,Y)\ge c\}=\{X\ge c\}\{Y\ge c\}\to$ 小大大大

$\{Min(X,Y)\le c\}=\{X\le c\}+\{Y\le c\}\to$ 小小小小

$\{Min(X,Y)\le c\}=\Omega-\{X>c,\ Y>c\}\to$ 两小取补

形象记忆：全大全小；买大买小。意思是，如求 $M=Max(X,\ Y)\le z$ 的概率，第一个大字就是 Max，则全部随机变量都取小于号；如求 $N=Min(X,\ Y)>z$ 的概率，第一个小字就是 Min，则全部随机变量都取大于号。

【例 30】设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从参数为 1 的指数分布，Y 服从区间[0，1]上的均匀分布，记 $U=Max(X,\ Y),\ V=Min(X,\ Y)$，试分别求 U 和 V 的概率密度。

解： X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ ；Y 的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

所以 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ ；Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$

$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ u(1-e^{-u}), & 0\le u<1\\ 1-e^{-u}, & 1\le u\end{cases}$， （注意：求两个分段函数的乘积函数画数轴帮助）

求导得（注意到 $F_U'(0)=0,\ F_U'(1)=0$）

$$f_U(u)=\begin{cases}0, & u<0 \text{ 或 } u=1\\ 1-e^{-u}+ue^{-u}, & 0\le u<1\\ e^{-u}, & 1<u\end{cases}$$ （注意：在 $u=1$ 点，$F_U(u)$ 连续，而 $f_U(u)$ 不连续）

而 $F_V(v)=1-[1-F_X(v)][1-F_Y(v)]=\begin{cases}0, & v<0\\ 1-(1-v)e^{-v}, & 0\le v<1\\ 1, & 1\le v\end{cases}$；同理得 $f_V(v)=\begin{cases}(2-v)e^{-v}, & 0<v<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$。

【例 31】设 $P\{X\ge 0,\ Y\ge 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\dfrac{4}{7}$，求 $P\{Max(X,\ Y)\ge 0\}$ 的分布律。

解：设事件 $A=\{X\ge 0\}$，$B=\{Y\ge 0\}$，则 $\{Max(X,\ Y)\ge 0\}=A\cup B=A+B$，则

$$P\{Max(X,\ Y)\ge 0\}=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{7}\times 2-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}。$$

【例 32】相互独立的 X，Y 具有同一分布律 $\begin{bmatrix}X_i & 0 & 1\\ P_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $(i=1,2)$，求 $Z=Max\{X,\ Y\}$ 的分布律。

解：$P\{Z=0\}=P\{X=0,\ Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\dfrac{1}{4}$；　$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\dfrac{3}{4}$

则 $Z=Max\{X,\ Y\}$ 的分布律为 $\begin{bmatrix}Z & 0 & 1\\ P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$。

【例 33】设 X，Y 相互独立，且都服从几何分布 $G(p)$，求 $Z=Max(X,\ Y)$ 的分布。

解：$G(p)=P(X=k)=(1-p)^{k-1}p=q^{k-1}p,\ \ k=1,2,3,\cdots$

$$\begin{aligned}&P\{Z=k\}=P\{X=k,\ Y<k\}+P\{X\le k,\ Y=k\}\\&=\sum_{i=1}^{k-1}P\{X=i,\ Y=k\}+\sum_{j=1}^{k}P\{X=k,\ Y=j\}\quad (\text{由于}P\{X=k,\ Y=k\}\text{不能重复取值，故}i\ne k)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}P\{X=i\}P\{Y=k\}+\sum_{j=1}^{k}P\{X=k\}P\{Y=j\}\\&=\sum_{i=1}^{k-1}p^2q^{i+k-2}+\sum_{j=1}^{k}p^2q^{j+k-2}=\left(2-q^{k-1}-q^k\right)pq^{k-1}\quad (k=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

【例 34】$(X,\ Y)$ 的分布律为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08

U	0	1	2	3	4	5

2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

求(1) $P\{X=2\mid Y=2\}$，$P\{Y=3\mid X=0\}$；

(2)求$U=Max\{X,\ Y\}$和$V=Min\{X,\ Y\}$的分布律；

(3)求$W=X+Y$的分布律。

解：边缘分布求出后的$(X,\ Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5	$P_{i.}=P\{X=x_i\}$
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	**0.25**
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	**0.26**
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	**0.25**
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	**0.24**
$P_{.j}=P\{Y=y_i\}$	**0.03**	**0.08**	**0.16**	**0.21**	**0.24**	**0.28**	1

(1) $P\{X=2\mid Y=2\}=\dfrac{P\{X=2,\ Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\dfrac{0.05}{0.16}=\dfrac{5}{16}$； $P\{Y=3\mid X=0\}=\dfrac{P\{Y=3\mid X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{0.01}{0.25}=\dfrac{1}{5}$

(2) $U=Max\{X,\ Y\}$

$$P\{U=k\}=P\{X=k,\ Y\le k\}+P\{Y=k,\ X<k\},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$$\left(\text{ 或 } P\{U=k\}=P\{X=k,\ Y<k\}+P\{Y=k,\ X\le k\}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P\{U=0\}=P\{X=0,\ Y\le 0\}+P\{Y=0,\ X<0\}=0+0=0\\ P\{U=1\}=P\{X=1,\ Y\le 1\}+P\{Y=1,\ X<1\}=(0.01+0.02)+(0.01)=0.04\\ \cdots\end{cases}$$

依次类推得$U=Max\{X,\ Y\}$的分布律为

p_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

$V=Min\{X,\ Y\}$

$P\{V=k\}=P\{X=k,\ Y\geq k\}+P\{Y=k,\ X>k\}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$

$\left(\text{或}\ P\{U=k\}=P\{X=k,\ Y>k\}+P\{Y=k,\ X\geq k\}\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}P\{V=0\}=P\{X=0,\ Y\geq 0\}+P\{Y=0,\ X>0\}=0.25+0.03=0.28\\ P\{V=1\}=P\{X=1,\ Y\geq 1\}+P\{Y=1,\ X>1\}=(0.26-0.01)+(0.03+0.02)=0.30\\ \cdots\end{cases}$$

依次类推得$V=Min\{X,\ Y\}$的分布律为

V	0	1	2	3
p_k	0．28	0.30	0.25	0.17

(3) $W=X+Y$ 的分布律为

$W=X+Y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

评 注　由于X，Y不一定独立，故如使用$P(W=X+Y)=P(X)P(Y)$计算反而麻烦。

3　商积模型 $f_{(U,\ V)}(u,\ v)$

一般来说，如果$U=g(X,Y)$，$V=\varphi(X,Y)$存在唯一的反函数：$X=X(U,\ V)$，$Y=Y(U,\ V)$，

利用雅可比微元变换 $J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$，可得 $\boxed{f_{(U,\ V)}(u,v)=f_{(X,\ Y)}\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J|}$

【例 35】 设随机变量X与Y相互独立，且都服从$(0,\ 1)$上的均匀分布

(1) 求$Z=|X-Y|$　的分布函数和密度函数；

(2) 设$U=X+Y$，$V=X-Y$，求$(U,\ V)$的密度函数；

(3) 求$(U,\ V)$关于 U 与 V 的边缘密度函数。

解：　均匀分布为：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,\ y)\in D\\ 0, & other\end{cases}=\begin{cases}1, & (x,\ y)\in D\\ 0, & other\end{cases}$

(1) $F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{|X-Y|\leq z\}$

$$=\begin{cases} 0, & z<0 \\ P\{-z\le X-Y\le z\}=\text{六边形的面积}=1-2\times\frac{1}{2}(1-z)\cdot(1-z), & 0\le z<1 \\ 1, & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases} 0 & z<0 \\ 1-(1-z)^2 & 0\le z<1 \\ 1 & z\ge 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 2(1-z), & 0\le z<1 \\ 0, & other\end{cases}$$

(2) X 和 Y 的联合密度函数为 $f(x,\ y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

又令 $u=x+y,\ u=x-y\Rightarrow x=\dfrac{u+v}{2},\ \ y=\dfrac{u-v}{2}\Rightarrow J=\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=-\dfrac{1}{2}$

根据 **商积模型** 公式，得 $(U,\ V)$ 的密度函数

$$f_{(U,V)}(u,\ v)=\begin{cases} f(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2})|J|, & 0<\frac{1}{2}(u+v)<1,\ 0<\frac{1}{2}(u-v)<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<u+v<2,\ 0<u-v<2 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(3) $(U,\ V)$ 关于 U 的边缘密度函数求法是：把 u 看成常数，对 v 进行全区域积分，得边缘 u 分布

由 $(x,\ y)\in(0,\ 1)\xrightarrow[v=x-y]{u=x+y}0\le u+v\le 2,\ 0\le u-v\le 2$， 画图可知 $u,\ v$ 所围区域是一个边长为 2，旋转了 45° 的正方形。由图形立即可得： $0\le u\le 2,\ -1\le v\le 1$。则

$$f_U(u)=\begin{cases} \int_{-u}^{u}\frac{1}{2}dv=u & 0\le u\le 1 \\ \int_{u-2}^{2-u}\frac{1}{2}dv=2u & 1\le u\le 2 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases} u & 0\le u<1 \\ 2u & 1\le u<2 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}; \quad f_V(v)=\begin{cases} \int_{-v}^{2+v}\frac{1}{2}du=v+1 & -1\le v<0 \\ \int_{v}^{2-v}\frac{1}{2}du=1-v & 0\le v<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

3.1 **商模型** 求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度，方法如下

$$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z}f(x,y)dxdy$$

$$\text{令}\ \ u=y,\ \ v=\frac{x}{y}\Leftrightarrow x=uv,\ \ y=u\Rightarrow J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 0\end{vmatrix}=-u$$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{v\le z} f(uv,\ u)|J|dudv=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(uv,\ u)|u|du\right]dv$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zu,\ u)|u|du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,\ y)|y|dy$$

如 X，Y 独立，则 $\boxed{Z=\frac{X}{Y}\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy)f_Y(y)|y|dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y\left(\frac{x}{z}\right)|x|dx}$。这也是一个常用公式。

【例 36】设 X，Y 相互独立，都服从 $E(\lambda)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的分布密度函数 $f_Z(z)$。

解：$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,\ y)|y|dy=\int_{0}^{+\infty} f_X(zy)f_Y(y)ydy=\lambda^2\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y(1+z)}ydy=\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{(1+z)^2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

评 注 商模型是重要考点。如果存在非正规区域（即：积分区域不能用一项表示出来），则需要使用**旋转法**划分为若干个正规区域。

智轩第 7 技 【商模型旋转法】。

商模型中，已知两个随机变量的分布密度求它们的商函数 $Z=\frac{X}{Y}$ 的分布函数密度 $f_Z(z)$，如果积分区间是分段的，我们必须将 z 分割成不同的积分区间，再利用平面积分手段或商模型公式 $\boxed{Z=\frac{X}{Y}\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,\ y)|y|dy}$。问题关键和难点就是如何确定 z 的积分区间，为此，作者创立了旋转法可以方便而清晰地解决这类题型。旋转法步骤如下

(1) 首先画出基准直线 $\frac{x}{y}=1$；

(2) 把基准直线绕原点**旋转**到正概率区域的全部边界点上，从而得到正概率区域的分割边界线，z 的取值范围由分割边界线确定，该直线与 x 轴的交点就是 x 方向的积分区间分段点，与 y 轴的交点就是 y 方向的积分区间分段点。

【例 37】设 X，Y 独立，都服从 $U(0,\ 1)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的 $f_Z(z)$。

解：$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\ge 1\\ 0, & other\end{cases}$

如直接得出 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zy,y)|y|dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy)f_Y(y)|y|dy=\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}$ 是错误的。

因为由于上述积分区域不是正规区域，y 的积分区间必须依照 z 的不同范围分段进行。按照**旋转法**，先作基准直线 $\frac{x}{y}=1$，它刚好与过原点和边界点 $(x=1,\ y=1)$ 的分界直线重合，对应 $z=1$。然后将该基准直线分别**旋转**到边界线 $x=0$ 与 $y=0$，从而得到 z 关于正概率区间的二个分界点 $z_1=0,\ z_2=\infty$。其中，当 $0\le z<1$ 时（对应直线 $y=x$ 的上部），又把基准直线任意**旋转**到该区域，得方程 $y=\frac{x}{z}$（视 z 为常数），得 y 的变化范围为 $[0,\ 1]$，即 y 积分区间；当 $z\ge 1$ 时，又把基准直线任意**旋转**到该正概率区域，也得方程 $y=\frac{x}{z}$，与直线 $x=1$ 的交点为 $\frac{1}{z}$，得 y 的变化范围为 $\left[0,\ \frac{1}{z}\right]$，即 y 积分区间。由图立即得出 $z<0\Rightarrow f_Z(z)=0$，。

所以分三段分别计算 $f_Z(z)$ 如下

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy)f_Y(y)|y|dy=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^1 ydy=\frac{1}{2}, & 0\le z<1\\ \int_0^{\frac{1}{z}} ydy=\frac{1}{2z^2}, & z\ge 1\end{cases}$$

评 注 为便于比较，下面提供本题的一般解法，请读者反复琢磨。

解法二：

(1) $z<0\Rightarrow f(x,y)=0\Rightarrow f_Z(z)=0$

(2) $0\le z<1\Rightarrow F_Z(z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy\xrightarrow{y=x\text{与}y=\frac{1}{z}x\text{及}x=1\text{所围的区域}}=\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{z}}^{x} dy=\frac{1}{2}-\frac{1}{2z}$

$$\Rightarrow f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\frac{1}{2z^2}$$

(3) $z\ge 1\Rightarrow F_Z(z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy\xrightarrow{y\text{轴与}y=\frac{1}{z}x\text{及}y=1\text{所围的区域}}=\int_0^1 dy\int_0^{yz} dx=\frac{z}{2}$

$$\Rightarrow f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\frac{1}{2}$$

故 $f_Z(z)=\int_0^1 ydy=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^1 ydy=\dfrac{1}{2}, & 0\le z<1\\ \int_0^{\frac{1}{z}} ydy=\dfrac{1}{2z^2}, & z\ge 1\end{cases}$

3.2 积模型　求 $Z=XY$ 的概率密度。只要改写成 $Z=XY=\dfrac{X}{\dfrac{1}{Y}}$，然后

令 $u=\dfrac{1}{y},\ v=xy\Leftrightarrow x=uv,\ y=\dfrac{1}{u}\Rightarrow J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v & u\\ -\dfrac{1}{u^2} & 0\end{vmatrix}=\dfrac{1}{u}$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{v\le z} f\left(uv,\ \frac{1}{u}\right)|J|dudv=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(uv,\ \frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}\right]dv$$

$$\boxed{Z=XY\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(zu,\ \frac{1}{u}\right)\frac{du}{u}=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y},\ y\right)\frac{dy}{|y|}=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\ \frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}}$$

评 注　积模型本质上就是二维联合分布。

4 $\chi^2(n)$模 型　$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为独立同分布 $\sim N(0,\ 1)$

$$W=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n);\quad Y_i\sim\chi^2(n)\Rightarrow Z=\sum_{i=1}^{k}Y_i\sim\chi^2(n_1+n_1+\cdots n_k)$$

5 $t(n)$模 型　$X\sim N(0,\ 1),\ Y\sim\chi^2(n)$

$$T=\frac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}\sim\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(n)}{n}}}\Rightarrow T\sim t(n),\ (-\infty<t<+\infty);\quad t_\alpha=-t_{1-\alpha}。$$

6 $F(n_1,\ n_2)$模 型　$X\sim\chi^2(n_1),\ Y\sim\chi^2(n_2)$，$X,Y$ 独立

$$\frac{\dfrac{X}{n_1}}{\dfrac{Y}{n_2}}\sim F(n_1,\ n_2)\quad ;\quad F_{1-\alpha}(n_1,\ n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,\ n_1)}$$

第三章 二维随机变量及其分布模拟题

一．填空题

1． 若（X，Y）的联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$，则常数$A=$______, $P(X\le 2, Y\le 1)=$_____.

2． 设 $X_1\sim N(0,2), X_2\sim N(1,3), X_3\sim N(0,6)$, 且$X_1, X_2, X_3$相互独立，则

$P(2\le 3X_1+2X_2+X_3\le 8)=$________。

3． 设 $P(X\ge 0, Y\ge 0)=\dfrac{3}{7}, P(X\ge 0)=P(Y\ge 0)=\dfrac{4}{7}$, 则$P(\max(X,Y)\ge 0)=$_____.

4． 设 X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从参数为 2 的泊松分布，而且 X 与 Y 相互独立，则 $P(\max(X,Y)\ne 0)=$________. $P(\min(X,Y)\ne 0)=$________.

5． 设 X 与 Y 相互独立，均服从[1，3]上的均匀分布，记 $A=(X\le a), B=(Y>a)$,

且$P(A\cup B)=\dfrac{7}{9}$，则 a=_______.

6． 二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(-\infty<x,y<+\infty),$$

则两个边缘密度为_________.

二．选择题

1． 设 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为$\dfrac{1}{2}$的 0—1 分布，Y 服从参数为$\dfrac{1}{3}$的 0—1 分布，则方程$t^2+2Xt+Y=0$中 t 有相同实根的概率为

（A）$\dfrac{1}{3}$ （B）$\dfrac{1}{2}$ （C）$\dfrac{1}{6}$ （D）$\dfrac{2}{3}$ [ ]

2．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\left(x^2+y^2\right), 0<x<2, 1<y<4,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

则 k 的值必为

（A）$\dfrac{1}{30}$ （B）$\dfrac{1}{50}$ （C）$\dfrac{1}{60}$ （D）$\dfrac{1}{80}$ [ ]

3．设（X，Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

则概率$P(X+Y\ge 1)$为

（A）$2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$ （B）$e^{-1}-e^{-2}$ （C）e^{-1} （D）$1-e^{-2}$ [ ]

4．设随机变量 X 与 Y 相互独立，而且 X 服从标准正态分布 N（0，1），Y 服从二项分布

B（n，p），0<p<1，则 X+Y 的分布函数

（A）是连续函数　　（B）恰有 n+1 个间断点

（C）恰有 1 个间断点　　（D）有无穷个间断点　　[ ]

5．设 X 与 Y 相互独立，$X\sim U(0,2)$, Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y\ge 0,\\ 0, \quad y<0.\end{cases}$ 则

$P(X+Y\ge 1)$为

（A）$1-e^{-1}$　　（B）$1-e^{-2}$

（C）$1-\frac{1}{2}e^{-1}$　　（D）$1-2e^{-2}$　　[ ]

三．解答题

1．箱子里装有 12 件产品，其中 2 件是次品，每次从箱子里任取一件产品，共取 2 次，定义随机变量 X_1,X_2 如下：

$$X_i=\begin{cases}0, 第i次取出正品,\\ 1, 第i次取出次品.\end{cases}$$

试分别在下面两种情况下求出（X_1,X_2）的联合分布律和关于 X_1,X_2 的边缘分布律：

（1）　放回抽样；

（2）　不放回抽样。

2．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0\le x\le 2, 2\le y\le 4,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

试求：（1）k 的值；

（2）$P(X\le 2, Y\le 3)$；

（3）$P(X\le \frac{3}{2})$；

（4）$P(X+Y\le 4)$.

3．一个电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命（单位为千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

（1）　问 X 和 Y 是否独立?

（2）　求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α 。

4．设（X，Y）服从 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1, 0\le y<1\}$ 上的均匀分布，试求 $Z=\frac{Y}{3X}$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

5．设（X，Y）的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4xy,0\le x\le 1,0\le y\le 1,\\0,\quad\quad 其他.\end{cases}$ 试求（X，Y）的联合分布函数。

6．设 X，Y 相互独立且服从同分布，已知 X 的分布律为 $P(X=i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3.$ 令 $U=\max(X,Y), V=\min(X,Y)$，试求：

（1）（U，V）的联合分布律；

（2）（U，V）关于 U 与关于 V 的边缘分布律；

（3）U 在 V=2 条件下的条件分布律。

7．设（X，Y）具有下列联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy),|x|<1,|y|<1,\\0,\quad\quad 其他.\end{cases}$$

证明 X 与 Y 不独立，但 X^2 与 Y^2 相互独立。

8．设随机变量 X 服从区间（0，2）上的均匀分布，而随机变量 Y 服从区间（X，2）上的均匀分布，试求：

（1）X 与 Y 的联合密度 f(x,y)；

（2）Y 的概率密度；

（3）概率 P（X+Y>2）。

9．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,\sigma^2), P(X<1)=\frac{3}{4}$, 试求概率 $P\{\max(X,Y)<1,\min(X,Y)<-1\}$。

10．设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的密度为 f(x)，Y 服从参数为 p 的 0—1 分布，求 Z=XY 的分布函数。

第三章 多维随机变量及其分布模拟题答案

一．填空题

1．A=2，$(1-e^{-4})(1-e^{-1})$

2．$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi(1)-\frac{1}{2}\approx 0.3413.$

3．$\frac{5}{7}$.

4．$1-e^{-3}$, $1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}$.

5．$\frac{5}{3}$或$\frac{7}{3}$.

6．$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

二．选择题

1．（B） 2．（B） 3．（A） 4．（A） 5．（C）

三．解答题

1．（1）

U \ V	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

（2）

X_1 \ X_2	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{15}{22}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

2．（1）$k=\frac{1}{8}$； （2）$\frac{5}{8}$； （3）$\frac{27}{32}$； （4）$\frac{2}{3}$。

3．（1）$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$对$\forall x,y$,从而X与Y相互独立.

（2）$\alpha=e^{-0.1}$。

4．$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{12z^2}, |z|\geq\frac{1}{3},\\ \frac{3}{4}, |z|<\frac{1}{3}.\end{cases}$$

5． $F(x,y)=\begin{cases}0, x<0\text{或}y<0,\\ x^2y^2, 0\le x<1\text{且}0\le y<1,\\ x^2, 0\le x<1\text{且}y\ge 1,\\ y^2, x\ge 1\text{且}0\le y<1,\\ 1, x\ge 1\text{且y}\ge 1.\end{cases}$

6．（1）联合分布律为

U\V	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	0	0
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

（2）两个边缘分布律为

U	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

V	1	2	3
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

（3） 条件分布律为

U|V=2	1	2	3
P	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

7． 求出边缘密度验证即可。

8． （1） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(2-x)}, 0<x<y<2,\\ 0, \quad\text{其他}\end{cases}$

（2） $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{2-y}, 0<y<2,\\ 0, \quad\text{其他}\end{cases}$

（3） $P(X+Y>2)=\ln 2.$

9． $\dfrac{5}{16}.$

10． $F_Z(z)=\begin{cases}p\int_{-\infty}^{z} f(x)dx, & z<0,\\ 1-p+p\int_{-\infty}^{z} f(x)dx, & z\ge 0.\end{cases}$