马氏链模型
(Markov Chain Model)

- 随机过程是研究随机动态系统演变过程规律性的学科;
- 广泛地应用于通信、控制、生物、地质、经济、管理、能源、气象等许多领域;
- **马氏链模型**是时间、状态均为离散的随机过程。

主要内容

一、 马氏链理论

二、 健康与疾病模型

三、 流行病监测中的马氏链模型

四、 钢琴销售的存贮策略

随机过程被认为是概率论的“动力学”部分，即它的研究对象是随时间演变的随机现象，它是从多维随机变量向一族(无限多个)随机变量的推广。

给定一随机试验E，其样本空间S={e}，将样本空间中的每一元作如下对应，便得到一系列结果:

$e \to X(e)$, 即X—— 一维随机变量

$e \to (X(e), Y(e))$, 即(X, Y)——二维随机变量

$e \to (X_1(e), X_2(e), \cdots X_n(e))$, 即$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$——$n$维随机变量

$e \to (X_1(e), X_2(e), \cdots)$, 即$X_1, X_2, \cdots$——随机序列

$e \to (X(e,t)\ \ t \in (-\infty, +\infty))$, 即$\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$——随机过程

1. 设 Z(t) 是北京市未来一天 t 时刻的温度. 对任意指定的时间 $t\in[0,24]$, 事先无法确定 Z(t) 的取值, 即 Z(t) 是一随机变量, 因此 Z(t), $t\in[0,24]$ 是一随机过程.

2. 设 Z(t) 是某市电话局在未来时间 t 内收到的呼叫次数, $t\in[0,+\infty]$. 由于任意给定的时间 t, 事先无法确定 Z(t) 的取值, 即 Z(t) 是一随机变量, 因此 Z(t), $t\in[0,+\infty]$是一随机过程.

3. 设 Z(t) 是未来第 t 个交易日收盘时的上证指数， $t\in T=\{1,2,3,\ldots\}$. 则 Z(t), $t\in T$是一随机过程.

4. 考查未来第 t 个交易日上证指数的涨跌情况，记

$$Z(t)=\begin{cases}1, & rise\\ 0, & sideway,\quad t\in T=\{1,2,3,\cdots\}\\ -1, & fall\end{cases}$$

,则 Z(t), $t\in T$是一随机过程.

一维、二维或一般的多维随机变量的研究是概率论的研究内容，而随机序列、随机过程则是随机过程学科的研究内容。从前面的描述中看到，它的每一样本点所对应的，是一个数列或是一个关于t的函数。

定义：设T是一无限实数集，$\{X(e,t), e\in S, t\in T\}$是对应于$e$和$t$的实数，

即为定义在S和T上的二元函数。

若此函数对任意固定的$t\in T$，$X(e,t)$是一个随机变量，

则称$\{X(e,t), e\in S, t\in T\}$是随机过程；

对于随机过程$\{X(e,t), e\in S, t\in T\}$进行一次试验，即$e$给定，

它是t的函数，称为随机过程的样本函数。

T为参数集，对固定的e和t，$X(e,t)$称为过程的状态；

$X(e,t)$所有可能的值的全体称为状态空间；

今后将$X(e,t)$简记为$X(t)$

一．马氏链理论

引例1

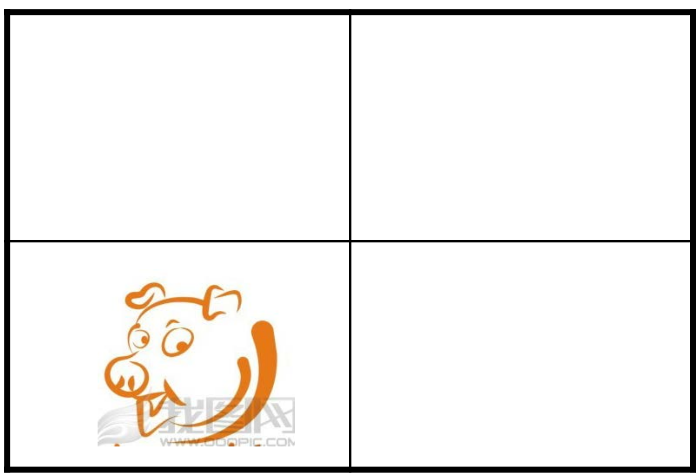
- 一个醉鬼摇摇晃晃地站在路中央，他向前迈一步的概率为p，向后退一步的概率为q=1-p. 无论他已经摇晃了几步，在当前位置向前或向后一步的概率仍然分别是p和q。在这个醉鬼酒醒之前，他的运动是一种“随机走动”(random walk),也常译为“随机游动”或“随机游走”。随机走动是一种马尔科夫链。

- 一个离散时间集合T={0,1,2,…}和一个有限或可列无穷的状态空间E={1,2,…}上，一个随机过程在任一时刻从一个状态以一定的概率向其他状态转移（或保持原状态不变）。

一．马氏链理论

引例2

❖ 一只荷兰猪在一个分成四个房间的笼子里随机运动。当它在任一时刻、处于任一房间时，在下一时刻跑到两个相邻房间之一的概率均为1/3,逗留在原房间里的概率也是1/3.这只荷兰猪的运动也是一种马尔科夫链。



❖一个离散时间集合T={0,1,2,…}和一个有限或可列无穷的状态空间E={1,2,…}上，一个随机过程在任一时刻从一个状态以一定的概率向其他状态转移（或保持原状态不变）。

1. 马氏链严格数学定义

设随机过程 $X_n(n \in T)$ 的时间集合 $T = \{1,2,3,\cdots\}$，状态空间 $E = \{1,2,3\cdots N\}$，

即 $X_n(n \in T)$ 是时间离散、状态离散的随机过程。若对任意的整数 $n \in T$，满足

$$P\{X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0\} = P\{X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\}$$

则称 $X_n(n \in T)$ 为马尔可夫链，简称马氏链。上式称为过程的马尔可夫性或无后效性。

一．马氏链理论

马氏链模型说明:

- 时间、状态均为离散的随机转移过程
  - 系统在每个时期所处的状态是随机的
  - 从一时期到下时期的状态按一定概率转移
  - 下时期状态只取决于本时期状态和转移概率
  - 已知现在，将来与过去无关（无后效性）

2. 转移概率矩阵

称条件概率 $p_{ij}=P_{ij}(1)=P\{X_{m+1}=a_j \mid X_m=a_i\}$, $i,j=1,2,\cdots$, 为马氏链 $X_n(n\in T)$ 的单步转移概率，简称转移概率。记矩阵 $P=(P_{ij})$ 为转移概率矩阵。它是随机矩阵.

转移概率矩阵具有下述性质：

（1） $p_{ij}\geq 0,\quad i,j=1,2,\cdots.$

（2） $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots.$

X_{m+1}的状态

X_m 的状态

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} = P(1)$$

此矩阵的每一行元素之和等于1.

例： 气象案例的马尔可夫链表示

$$X_t=\begin{cases}0 & \text{如果第t天是晴天}\\ 1 & \text{如果第t天是雨天}\end{cases}$$

$$P\{X_{t+1}=0 \mid X_t=0\}=0.8, P\{X_{t+1}=0 \mid X_t=1\}=0.6$$

由于第二天天气情况不受今天之前天气情况的影响，即状态0和状态1是相互独立且仅有的状态，所以两个状态的概率和为1。因此，该随机过程具有马尔可夫属性，该过程称为马尔可夫链。

$$P_{00}=0.8, P_{10}=0.6$$

$$P_{01}=1-0.8=0.2, P_{11}=1-0.6=0.4$$

因此，转移矩阵为：

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{pmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}\end{array}$$

马氏链的n步转移概率

称条件概率 $P_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\}$

为马氏链在时刻m处于状态a_i条件下,在时刻$m+n$

转移到状态a_j的转移概率.

马氏链的**n步转移概率:**

$$P_{ij}(n)=P_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\}.$$

$\boldsymbol{P(n)=(P_{ij}(n))}$为$n$步转移概率矩阵.

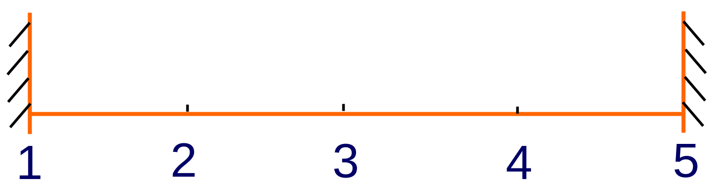
当转移概率 $P_{ij}(m,m+n)$ 只与 i,j 及时间间距 n

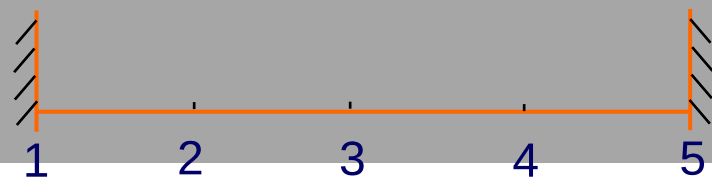
有关时,称转移概率具有平稳性.

同时也称此链是齐次的或时齐的.

一．马氏链理论

例1　一醉汉Q(或看作一随机游动的质点)在直线上的点集I={1,2,3,4,5}作随机游动，且仅在1秒、2秒等时刻发生游动，游动的概率规则是：如果Q现在位于点i(1<i<5)，则下一时刻各以 1/3 的概率向左或向右移动一格，或以 1/3 的概率留在原处；如果Q现在处于1(或5)这一点上，则下一时刻就以概率1移动到2(或4)这点上，1和5这两点称为反射壁，这种游动称为带有两个反射壁的随机游动。以Xn表示时刻n时Q的位置，说明{Xn,n=0,1,2 …}是一齐次马氏链，并写出它的一步转移概率矩阵。



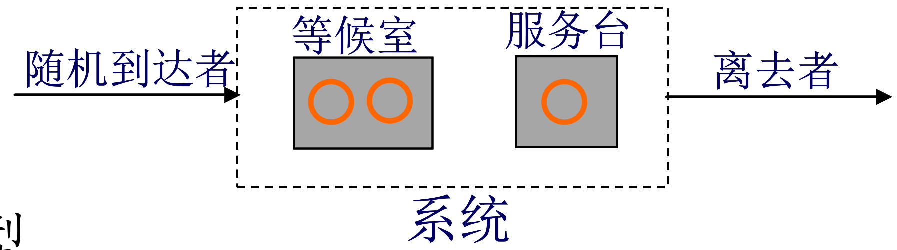


解：以X_n表示时刻n时Q的位置，不同的位置就是X_n的不同状态；而且当X_n=i为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与X_n=i有关，而与Q在时刻n以前如何到达i完全无关，所以{X_n,n=0,1,2 ...}是一马氏链，且是齐次的。它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

如果把1这点改为吸收壁，即Q一旦到达1这一点，则永远留在点1时，此时的转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

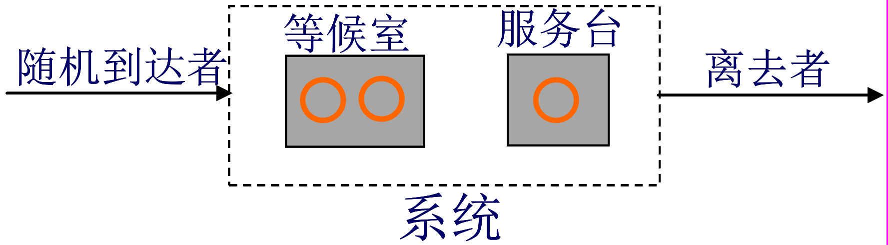


例2 排队模型

设服务系统由一个服务员和只可以容纳两个人的等候室组成。服务规则为：先到先服务，后来者需在等候室依次排队，假设一个需要服务的顾客到达系统时发现系统内已有3个顾客，则该顾客立即离去。

设时间间隔⊿t内有一个顾客进入系统的概率为q，有一接受服务的顾客离开系统(即服务完毕)的概率为p，又设当⊿t充分小时，在这时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的，再设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的。

现用马氏链来描述这个服务系统.



设时间间隔⊿t内有一个顾客进入系统的概率为q，有一接受服务的顾客离开系统的概率为p,

现用马氏链来描述这个服务系统:

设$X_n=X(n⊿t)$表示时刻n⊿t时系统内的顾客数，即系统的状态。$\{X_n,n=0,1,2\ldots\}$是一随机过程，状态空间I={0,1,2,3}, 它是一个齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为:

$$
P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad 0 \quad & \quad\quad 1 \quad\quad & \quad\quad 2 \quad\quad & \quad 3 \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1-q & q & 0 & 0 \\
p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\
0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\
0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

例3　某计算机机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔15分钟观察一次计算机的运行状态，收集了24个小时的数(共作97次观察)，用1表示正常状态，用0表示不正常状态，所得的数据序列如下:

11100100111111100111101111110011111111100011

01101111011011010111101110111101111110011011

111100111

设X_n为第n(n=1,2,…,97)个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马氏链.

求(1)一步转移概率矩阵;

(2)已知计算机在某一时段(15分钟)的状态为0，问在此条件下，从此时段起，该计算机能连续正常工作45分钟(3个时段) 的条件概率.

- 解: (1) 设X_n为第n(n=1,2,…,97)个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马氏链，状态空间I={0,1}，96次状态转移情况是:

0→0: 8次;　　0→1: 18次;

1→0: 18次;　　1→1: 52次;

因此一步转移概率可用频率近似地表示为:

$$P_{00}=P\left(X_{n+1}=0\mid X_n=0\right)\approx\frac{8}{8+18}=\frac{8}{26},$$

$$P_{01}=P\left(X_{n+1}=0\mid X_n=1\right)\approx\frac{18}{8+18}=\frac{18}{26}$$

$$P_{10}=P\left(X_{n+1}=1\mid X_n=0\right)\approx\frac{18}{18+52}=\frac{18}{70},$$

$$P_{11}=P\left(X_{n+1}=1\mid X_n=1\right)\approx\frac{52}{18+52}=\frac{52}{70}$$

即: $P=\begin{bmatrix}\frac{8}{26} & \frac{18}{26}\\ \frac{18}{70} & \frac{52}{70}\end{bmatrix}$

(2)已知计算机在某一时段(15分钟)的状态为0，问在此条件下，从此时段起，该计算机能连续正常工作45分钟(3个时段)的条件概率.

$$即:P=\begin{bmatrix}\frac{8}{26} & \frac{18}{26}\\ \frac{18}{70} & \frac{52}{70}\end{bmatrix}$$

(2) 某一时段的状态为0, 定义其为初始状态, 即$X_0=0$,

所求概率为:

$$P\left(X_1=1,X_2=1,X_3=1\mid X_0=0\right)$$

$$=P\left(X_1=1\mid X_0=0\right)P\left(X_2=1\mid X_0=0,X_1=1\right)$$

$$\times P\left(X_3=1\mid X_0=0,X_1=1,X_2=1\right)=P_{01}P_{11}P_{11}$$

$$=\frac{18}{26}\frac{52}{70}\frac{52}{70}=0.382$$

马氏链的n步转移概率

称条件概率 $P_{ij}(m, m+n) = P\{X_{m+n} = a_j \mid X_m = a_i\}$

为马氏链在时刻m处于状态a_i条件下,在时刻 $m+n$

转移到状态a_j的转移概率.

马氏链的**n步转移概率:**

$$P_{ij}(n) = P_{ij}(m, m+n) = P\{X_{m+n} = a_j \mid X_m = a_i\}.$$

$\boldsymbol{P(n) = (P_{ij}(n))}$为$\boldsymbol{n}$步转移概率矩阵.

当转移概率 $\boldsymbol{P_{ij}(m, m+n)}$ 只与 $\boldsymbol{i, j}$ 及时间间距 $\boldsymbol{n}$

有关时, 称转移概率具有平稳性.

同时也称此链是齐次的或时齐的.

多步转移概率的确定

$$P(n)=P^{n}.$$

马氏链的n步转移概率是一步转移概率的 n 次方,链的有限维分布可由初始分布和一步转移概率完全确定.

$$X_t=\begin{cases}0 & \text{如果第t天是晴天}\\ 1 & \text{如果第t天是雨天}\end{cases}$$

$$P\{X_{t+1}=0 \mid X_t=0\}=0.8,$$
$$P\{X_{t+1}=0 \mid X_t=1\}=0.6$$

例：气象案例的n步转移矩阵

解：2步转移矩阵：P(2)=PP $=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.76 & 0.24\\0.72 & 0.28\end{bmatrix}$

说明：

该2步矩阵说明，如果今天是晴天（0），那么后两天仍为晴天（0）的概率为0.76，为雨天（1）概率是0.24；类似地，如果今天是雨天（1），那么后两天为晴天（0）的概率是0.72，为雨天（1）的概率为0.28。

同样，3天、4天或5天后的气象状态转移概率可通过计算3步、4步和5步转移矩阵得到：

$$\mathbf{P(3)=PP^2}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.76 & 0.24\\0.72 & 0.28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.752 & 0.248\\0.744 & 0.256\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P(4)=PP^3}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.752 & 0.248\\0.744 & 0.256\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.75 & 0.25\\0.749 & 0.251\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P(5)=PP^4}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.75 & 0.25\\0.749 & 0.251\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.75 & 0.25\\0.75 & 0.25\end{bmatrix}$$

3.状态概率

记 $a_i(n) = P(X_n = i), i = 1,2,\cdots, N, n = 0,1,\cdots$，称为**状态概率**，满足 $\sum_{i=1}^{N} a_i(n) = 1$。

$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_N(n))$ 称为**状态概率向量**。

$\boldsymbol{a}(0) = (a_1(0), a_2(0), \cdots, a_N(0))$ 称为**初始状态概率向量**。

4. 马氏链基本方程

马氏链基本方程：

$$a_i(n+1)=\sum_{j=1}^{N}a_j(n)p_{ji},\quad i=1,2,\cdots,N$$

矩阵表示：

$$a(n+1)=a(n)P \text{ 或 } a(n)=a(0)P^n$$

例：设$\{X_n, n\geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的齐次马氏链，

一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

初始分布$p_i(0)=P\{X_0=i\}=\dfrac{1}{3}$

$i=0,1,2$

试求：

(1) $P\{X_0=0, X_2=1, X_4=1\}$;

(2) $P\{X_2=1, X_4=1, X_5=0 \mid X_0=0\}$

(3) $P\{X_2=1, X_4=1, X_5=0\}$

解：可得二步转移概率矩阵为：

$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(1) $P\{X_0=0, X_2=1, X_4=1\}=p_0(0)P_{01}(2)P_{11}(2)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{96}$

(2) $P\{X_2=1, X_4=1, X_5=0 \mid X_0=0\}=P_{01}(2)P_{11}(2)P_{10}$

$=\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{128}$

(3) $P\{X_2=1, X_4=1, X_5=0\}=P\{X_2=1\}P_{11}(2)P_{10}$

$=\{p_0(0)P_{01}(2)+p_1(0)P_{11}(2)+p_2(0)P_{21}(2)\}P_{11}(2)P_{10}$

$=\frac{1}{3}(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{192}$

5.正则链

定义：一个有 k 个状态的马氏链如果存在正整数 N，使得从任意状态 i 经 N 次转移都能够以大于零的概率到达状态 j (i , j = l ,2 ⋯ ⋯ N)，则称为正则链。

定理：若马氏链的转移矩阵为 P，则它是正则链的充要条件是存在正整数 N 使 $P^N > 0$.

定理：正则链存在唯一的极限状态概率 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_N)$，使得当 $n\to+\infty$ 时状态概率 $a(n)\to w$，w 与初始状态概率 $a(0)$ 无关。w 称为稳态概率。满足 $wP=w$，其中 w 满足

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1, w_i \geq 0.$$

6.吸收链

定义： 存在吸收状态（一旦到达就不会离开的状态 i, $p_{ii}=1$），且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态，这样的马氏链称为吸收链.

马氏链的基本方程

- 状态 $X_n = 1, 2, \cdots k \quad (n = 0, 1, \cdots)$
- 状态概率 $a_i(n) = P(X_n = i),\ i = 1, 2,\ n = 0, 1, \cdots \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1$
- 转移概率 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\ i, j = 1, 2,\ n = 0, 1, \cdots$

$$p_{ij} \ge 0, \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, k$$

- 基本方程

$$P = (p_{ij})_{k\times k}$$

$$\boxed{a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) p_{ji},\ i = 1, 2, \cdots, k} \longrightarrow \boxed{a(n+1) = a(n)P}$$

$$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n))$$

$$a(n) = a(0)P^n$$

二. 健康与疾病模型

(1) 问题提出： 人的健康状态随着时间的推移会随机地发生转变，保险公司要对投保人未来的健康状态作出估计,以制订保险金和理赔金的数额。

(2) 问题假设:

- 人的健康状况分为健康和疾病两种状态
- 设对特定年龄段的人
  - 今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8
  - 今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7
- 若某人投保时健康, 问10年后他仍处于健康状态的概率

(3)问题分析: 人的健康状态是依赖于时间t的随机变量，是随机过程，他在将来所处的状态都只与现在的状态有关，而与以前所处的状态无关，具有无后效性，若将人的状态分为健康疾病两种，时间以年为时间间隔，则人的健康状况问题是一时间、状态均离散的马氏链，若能用马氏链理论计算某人投保时健康,10年后他仍处于健康状态的概率和投保时疾病,10年后他仍转为健康状态的概率，再由上述概率计算出有投保人中的患病人数，利用十年内投保总额大于等于理赔金额来确定保险金和理赔金的数额。

即主要问题是计算若某人投保时健康,问10年后他仍处于健康状态的概率和若某人投保时疾病,问10年后他转为健康状态的概率.

二、健康与疾病模型

(4)问题求解:

设X_n表示第n年投保人身体所处的状态，记

$$\square\ \square\ \mathbf{X_n} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \square\ \mathbf{n}\square\ \square\ \square \\ \mathbf{2}, & \square\ \mathbf{n}\square\ \square\ \square \end{cases}$$

则 X_n 是时间状态均离散的马氏链，其中

状态概率 $a_i(n) = P(X_n = i), i = 1,2; n = 0,1,\cdots$

转移概率$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\ i,j = 1,2;\ n = 0,1,\cdots$

二、健康与疾病模型

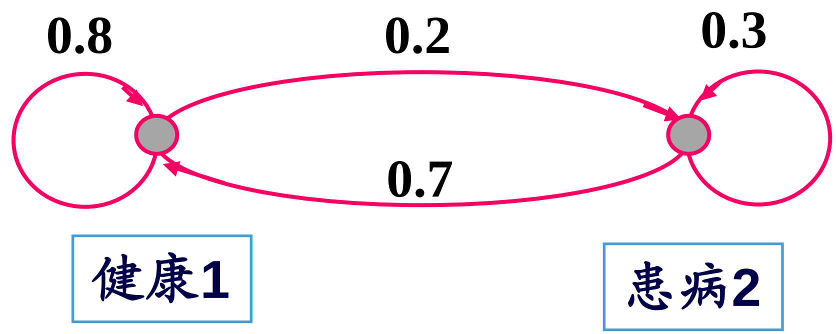
今年健康、明年保持健康状态的概率为0.8

今年患病、明年转为健康状态的概率为0.7

- 状态与状态转移

状态:

转移:



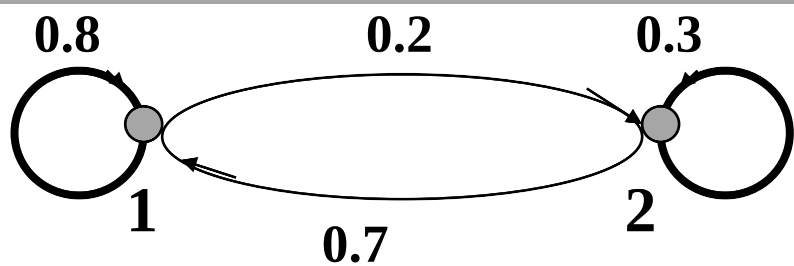
- 转移方程

状态概率　　转移概率

$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases}$$

- 给定$a(0)$ $\longrightarrow$ 预测 $a(n)$, $n=1,2\ldots$

二、健康与疾病模型



$$p_{11} = 0.8,\ p_{12} = 1 - p_{11} = 0.2,$$

$$p_{21} = 0.7,\ p_{22} = 1 - p_{21} = 0.3.$$

转移概率矩阵为: $$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

二、健康与疾病模型

$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)p_{11} + a_2(n)p_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)p_{12} + a_2(n)p_{22} \end{cases}$$

X_{n+1}只取决于X_n和p_{ij}, 与X_{n-1}, …无关，状态转移具有无后效性，由马氏链的基本方程有，给定$a(0)$, 预测 $a(n)$, n=1,2…

① 设投保时健康，即$a_1(0)=1$，$a_2(0)=0$由马氏链的基本方程

$$a_1(1) = a_1(0)p_{11} + a_2(0)p_{21} = 1\times 0.8 + 0\times 0.7 = 0.8$$

$$a_2(1) = a_1(0)p_{12} + a_2(0)p_{22} = 1\times 0.2 + 0\times 0.3 = 0.2$$

$$a_1(2) = a_1(1)p_{11} + a_2(1)p_{21} = 0.8\times 0.8 + 0.2\times 0.7 = 0.78$$

$$a_2(2) = a_1(1)p_{12} + a_2(1)p_{22} = 0.8\times 0.2 + 0.2\times 0.3 = 0.22$$

…… …… …… ……

二、健康与疾病模型

状态概率$a(n)$如下表

n	0	1	2	3	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	…	7/9
$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	…	2/9

② 设投保时疾病，即$a_1(0)=0$，$a_2(0)=1$由马氏链的基本方程

$$a_1(1) = a_1(0)p_{11} + a_2(0)p_{21} = 0\times 0.8 + 1\times 0.7 = 0.7$$

$$a_2(1) = a_1(0)p_{12} + a_2(0)p_{22} = 0\times 0.2 + 1\times 0.3 = 0.3$$

$$a_1(2) = a_1(1)p_{11} + a_2(1)p_{21} = 0.7\times 0.8 + 0.3\times 0.7 = 0.77$$

$$a_2(2) = a_1(1)p_{12} + a_2(1)p_{22} = 0.7\times 0.2 + 0.3\times 0.3 = 0.23$$

…… …… …… ……

状态概率$a(n)$如下表

n	0	1	2	3	…	∞
$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	…	7/9
$a_2(n)$	1	0.3	0.23	0.223	…	2/9

二、健康与疾病模型

综上，状态概率$a(n)$如下表

设投保时	n	0	1	2	3	……	∞
健康	$a_1(n)$	1	0.8	0.78	0.778	……	7/9
	$a_2(n)$	0	0.2	0.22	0.222	……	2/9
疾病	$a_1(n)$	0	0.7	0.77	0.777	……	7/9
	$a_2(n)$	1	0.3	0.23	0.223	……	2/9

- $n\to\infty$时：
  - 状态概率趋于稳定值
  - 稳定值与初始状态无关

二、健康与疾病模型

注 1. 该马氏链从任一状态出发经有限次转移能以正概率到达另外任一状态故为正则链.

2. 当$n\to\infty$时状态概率趋于稳定值，稳定值与初始状态无关，符合由定理正则链存在唯一的稳态概率，我们也可以由定理如下计算稳态概率:

$$P=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix} \qquad w\text{满足 } wP=w$$

$$\begin{cases}0.8w_1+0.7w_2=w_1\\ 0.2w_1+0.3w_2=w_2\end{cases} \Rightarrow 0.2w_1=0.7w_2$$

$$\sum_{i=1}^{2}w_i=w_1+w_2=1$$

$$\therefore w=(7/9,2/9)$$

(5) 实际意义

若调查患病病人平均理赔金额 2000 元，投保期为 10 年，投保人数为 10 人，由稳态概率可近似计算每年投保金额（未考虑利息理论）为

$$10*10*x=2000*2/9*10 \rightarrow x=44.4\text{（元）}$$

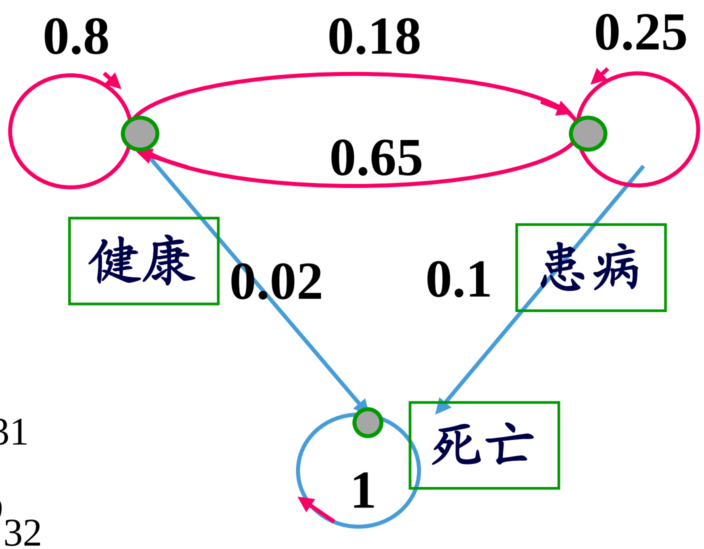
符号分析

- 状态 $X_n=\begin{cases}1 & 第n年健康\\ 2 & 第n年疾病\end{cases}$
- 状态概率 $a_i(n)=P(X_n=i),\ i=1,2,\ n=0,1,\cdots$
- 转移概率 $p_{ij}=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i),\ i,j=1,2,\ n=0,1,\cdots$
- 已知 $p_{11}=0.8 \qquad p_{12}=1-p_{11}=0.2$
  $p_{21}=0.7 \qquad p_{22}=1-p_{21}=0.3$
- 转移方程 $\begin{cases}a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}\\ a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}\end{cases}$
- 可见:
  - X_{n+1}只取决于 X_n 和 p_{ij}, 与 X_{n-1}, …无关
  - 状态转移具有无后效性

另一种情况——三种状态

如果人的状态分为健康、疾病和死亡三种状态，记 $X_n=1$ 表示健康，$X_n=2$ 表示疾病，$X_n=3$ 表示因疾病死亡.

$$p_{11}=0.8,\quad p_{12}=0.18,\quad p_{13}=0.02,$$
$$p_{21}=0.65,\quad p_{22}=0.25,\quad p_{23}=0.1,$$
$$p_{31}=0,\quad p_{32}=0,\quad p_{33}=1,$$



$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}+a_3(n)p_{31}$$
$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}+a_3(n)p_{32}$$
$$a_3(n+1)=a_1(n)p_{13}+a_2(n)p_{23}+a_3(n)p_{33}$$

若某人投保时健康，问n年后各状态的概率

状态与状态转移概率

设投保时处于健康状态，预测 $a(n)$, n=1,2…

n	0	1	2	3	…	50	…	∞
$a_1(n)$	1	0.8	0.757	0.7285	…	0.1293	…	0
$a_2(n)$	0	0.18	0.189	0.1835	…	0.0326	…	0
$a_3(n)$	0	0.02	0.054	0.0880	…	0.8381	…	1

注意：

不论初始状态如何，最终都要转到状态 3；一旦 $a_1(k)=a_2(k)=0$，$a_3(k)=1$，则对于 $n>k$，$a_1(n)=0$，$a_2(n)=0$，$a_3(n)=1$，即从状态 3 不会转移到其它状态。故该马氏链为吸收链.

$$a_1(n+1)=a_1(n)p_{11}+a_2(n)p_{21}+a_3(n)p_{31}$$
$$a_2(n+1)=a_1(n)p_{12}+a_2(n)p_{22}+a_3(n)p_{32}$$
$$a_3(n+1)=a_1(n)p_{13}+a_2(n)p_{23}+a_3(n)p_{33}$$

```
n=input('n=')
A=zeros(3,n+1);
A(1,1)=input('a01=');
A(2,1)=input('a02=');
A(3,1)=1-A(1,1)-A(2,1);
for i=1:n
    A(1,i+1)=0.8*A(1,i)+0.65*A(2,i)+0*A(3,i);
    A(2,i+1)=0.18*A(1,i)+0.25*A(2,i)+0*A(3,i);
    A(3,i+1)=0.02*A(1,i)+0.1*A(2,i)+1*A(3,i);
end
A
```

马氏链的基本方程

- 状态 $X_n = 1, 2, \cdots k \quad (n = 0, 1, \cdots)$

- 状态概率 $a_i(n) = P(X_n = i),\ i = 1, 2,\ n = 0, 1, \cdots \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1$

- 转移概率 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\ i, j = 1, 2,\ n = 0, 1, \cdots$

$$p_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, k$$

- 基本方程

$$P = (p_{ij})_{k \times k}$$

$$\boxed{a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) p_{ji},\ i = 1, 2, \cdots, k} \longrightarrow \boxed{a(n+1) = a(n)P}$$

$$a(n) = (a_1(n), a_2(n), \cdots, a_k(n))$$

$$a(n) = a(0)P^n$$

马氏链的两个重要类型

1、正则链

$$a(n+1)=a(n)P$$

- 任一状态出发经有限次转移→以正概率到达另一外任一状态

$$\Leftrightarrow \exists N, P^N > 0$$

$$\Rightarrow \exists w,\ a(n)\to w(n\to\infty)$$

$\boxed{\mathbf{w}\sim\text{稳态概率}}$ → $wP=w$ → 特征向量

- 例1:

$$P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix}0.8w_1+0.7w_2=w_1\\ 0.2w_1+0.3w_2=w_2\end{matrix} \longrightarrow 0.2w_1=0.7w_2$$

$$\sum_{i=1}^{k} w_i=1 \longrightarrow w_1+w_2=1 \longrightarrow w=(7/9,2/9)$$

2、吸收链

- 存在吸收状态
  - 一旦到达就不会离开的状态
  - 且从任一非吸收状态出发经有限次转移能以正概率到达吸收状态

$$a(n+1)=a(n)P$$

- **转移矩阵：**

有r个吸收状态

n-r个非吸收状态

$$\boxed{P=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}}$$

有非零元素

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^{s}$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots y_{k-r})=Me$$

$$e=(1,1,\cdots,1)^{T}$$

y_i ~ 从第 i 个非吸收状态出发，被某个吸收状态吸收前的平均转移次数

三．流行病监测中的马氏链模型

问题提出： 某市1980年至1995年肾综合征出血热（HFRS）的发病率分别为（单位：1/10万）：

2.95、6.28、10.28、7.01、7.36、13.78、33.93、35.87、33.40、28.38、30.50、33.79、39.70、30.39、39.70、33.59

（引自：李洪杰等.龙泉市肾综合征出血热发病趋势的预测.浙江预防医学,1997,02：44）.

预测疾病的发展变化趋势，为预防和控制疾病提供依据.

状态	1	2	3	4
发病率取值范围	X≤10	10＜X≤20	20＜X≤30	X＞30

三 · 流行病监测中的马氏链模型

状态	1	2	3	4
发病率取值范围	$X \le 10$	$10 < X \le 20$	$20 < X \le 30$	$X > 30$

问题求解： 首先根据资料将发病率划分为四个状态，统计各数据的状态归属及各状态出现的频率（初始概率）得下表.

某市HFRS流行状况

年份	发病率(1/10万)	状态	年份	发病率(1/10万)	状态
1980	2.95	1	1988	33.40	4
1981	6.28	1	1989	28.38	3
1982	10.28	2	1990	30.50	4
1983	7.01	1	1991	33.79	4
1984	7.36	1	1992	39.70	4
1985	13.78	2	1993	30.39	4
1986	33.93	4	1994	39.70	4
1987	35.87	4	1995	33.59	4

各状态取值范围及初始概率

状态	发病率取值范围	初始概率
1	X≤10	4/16
2	10＜X≤20	2/16
3	20＜X≤30	1/16
4	X＞30	9/16

三．流行病监测中的马氏链模型

由上表可得各状态的转移频率即状态转移概率的估计值，从而得模型的一步转移概率矩阵:

$$P=\begin{pmatrix} 2/4 & 2/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/(9-1) & 7/(9-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.875 \end{pmatrix}$$

三．流行病监测中的马氏链模型

可认为HFRS下一年的发病率只与当年发病率有关，而与过去的发病率无关，且任意时期的一步转移概率矩阵不变，从而满足无后效性和平稳性的假设，因而可用初始分布为（4/16，2/16，1/16，9/16），转移概率矩阵为*P*的马氏链模型来预测HFRS发病率未来的情况.

三．流行病监测中的马氏链模型

计算多步转移矩阵:

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.0000 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.0625 & 0.4375 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1250 & 0.8750 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1094 & 0.8906 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{pmatrix} 0.3750 & 0.2500 & 0.0312 & 0.3438 \\ 0.2500 & 0.1250 & 0.0547 & 0.5703 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1094 & 0.8906 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1113 & 0.8887 \end{pmatrix}$$

三．流行病监测中的马氏链模型

$$P^{(4)} = P^4 = \begin{pmatrix} 0.3125 & 0.1875 & 0.0430 & 0.4570 \\ 0.1875 & 0.1250 & 0.0713 & 0.6162 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1113 & 0.8887 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1111 & 0.8889 \end{pmatrix}$$

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ 或解方程

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1, p_2, p_3, p_4)P, \quad \sum_{k=1}^{4} p_k = 1$$

得模型的极限概率分布（稳态分布）：（0，0，1/9，8/9）.

分析预测:

由于95年处于状态4，比较P的第4行的四个数字知，$p_{44}=0.875$ 最大，所以预测96年仍处于状态4，即发病率大于30/10万. 同样，从二、三、四步转移矩阵知，依然是状态4转入状态4的概率最大，所以预测1996年至1999年该市的HFRS发病率将持续在大于30/10万（高发区）水平，这提醒我们应该对此高度重视，采取相应对策.

三．流行病监测中的马氏链模型

注意：

1. 如果转移概率矩阵始终不变，从极限分布看，最终HFRS发病率将保持在高发区水平，当然，这应该是不会符合实际情况的，因为随着各方面因素的改变，转移概率矩阵一般也会发生变化．所以Markov模型主要适用于短期预测.

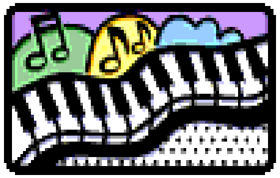
2. 在卫生管理事业中，用Markov模型还可预测医疗器械、药品的市场占有率，药品的期望利润收益等.

3. 在经济金融领域，用Markov模型还可预测股市中股票价格走势，房地产销售价格预测及销售面积预测和利润收益预测，钢琴销售的存储策略等均有指导性建议.

★关键在于转移矩阵的确定及状态概率的确定。

四、钢琴销售的存贮策略

背景与问题



- 钢琴销售
  - 售量很小
  - 商店的库存量不大以免积压资金
  - 一家商店根据经验估计：平均每周的钢琴需求为1架
- 存贮策略
  - 每周末检查库存量
  - 仅当库存量为零时，才订购3架供下周销售
  - 否则，不订购。
- 问题:
  - 估计在这种策略下失去销售机会的可能性有多大，以及每周的平均销售量是多少。

分析与假设

- 需求：顾客的到达相互独立
  - 需求量近似服从泊松分布，其参数由需求均值为每周1架确定 ⟶ 计算不同需求量的概率
- 失去销售机会：需求超过库存⟶动态过程⟶概率
- 存贮策略：周末库存量为零时订购3架, 周初到货；否则，不订购
  - 周末的库存量：0, 1, 2, 3
  - 周初的库存量：1, 2, 3共三种状态
- 用马氏链描述每周不同的需求导致周初库存状态的变化
  - 以每周初的库存量作为状态变量
  - 状态转移具有无后效性
- 在稳态情况下——时间充分长以后
  - 计算该存贮策略失去销售机会的概率、每周的平均销售量

动态过程中每周销售量不同，失去销售机会（需求超过库存）的概率不同.

模 型

$$a(n+1)=a(n)P$$

❖需求量　　**Dn~第n周需求量：泊松分布**

$$P(D_n=k)=\frac{e^{-1}}{k!}\quad (k=0,1,2\cdots)$$

均值为1

❖ 状态转移规律

状态变量：S_n~第n周初库存量　　$S_n\in\{1,2,3\}$

进货量

$$S_{n+1}=\begin{cases}S_n-D_n, & D_n<S_n\\ 3, & D_n\ge S_n\end{cases}$$

需求量

❖ 状态转移矩阵

$$S_n\in\{1,2,3\}\longrightarrow P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}$$

D_n~第n周需求量，均值为1的泊松分布

$$P(D_n = k) = e^{-1}/k!\ (k = 0,1,2,\cdots)$$

D_n	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

◆计算

$$p_{11} = P(S_{n+1} = 1 \mid S_n = 1) = P(D_n = 0) = 0.368$$

$$p_{12} = P(S_{n+1} = 2 \mid S_n = 1) = 0$$

$$p_{13} = P(S_{n+1} = 3 \mid S_n = 1) = P(D_n \geq 1) = 0.632$$

…………

$$p_{33} = P(S_{n+1} = 3 \mid S_n = 3) = P(D_n = 0) + P(D_n \geq 3) = 0.448$$

◆ 则

$$p = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{bmatrix}$$

S_n~第n周初库存量(状态变量) $S_n \in \{1,2,3\}$

状态转移规律 $S_{n+1} = \begin{cases} S_n - D_n, & D_n < S_n \\ 3, & D_n \geq S_n \end{cases}$

模型建立

- 状态概率　$a_i(n)=P(S_n=i),\ i=1,2,3$
- 马氏链的基本方程

已知初始状态：可预测第n周初库存量Sn=i 的概率

$$\boxed{a(n+1)=a(n)P}$$

无后效性　已知

$$p=\begin{bmatrix}0.368 & 0 & 0.632\\ 0.368 & 0.368 & 0.264\\ 0.184 & 0.368 & 0.448\end{bmatrix}$$

$P^2>0$　$\exists N, P^N>0 \Leftrightarrow$ 正则链

正则链

$w=(w_1,w_2,w_3)$　稳态概率分布 w 满足 wP=w

$=(0.285,0.263,0.452)$

n→∞，状态概率 $a(n)=(0.285,0.263,0.452)$

模型求解

- 估计在这种策略下失去销售机会的可能性
  - 第n周失去销售机会的概率

$$P(D_n > S_n) = \sum_{i=1}^{3} P(D_n > i \mid S_n = i) P(S_n = i)$$

需求 库存

稳态概率分布

n充分大时 $w_i \leftarrow (0.285, 0.263, 0.452)$

$$= P(D > 1) w_1 + P(D > 2) w_2 + P(D > 3) w_3$$

$$P(D_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2 \cdots)$$

D	0	1	2	3	>3
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.019

$$= 0.264 \times 0.285 + 0.080 \times 0.263 + 0.019 \times 0.452 = 0.105$$

- 从长期看，失去销售机会的可能性大约 10%

D	0	1	2	3	>3
P	**0.368**	**0.368**	**0.184**	**0.061**	**0.019**

❖估计这种策略下每周的平均销售量 $w=(w_1,w_2,w_3)$

$$=(0.285,0.263,0.452)$$

- 第n周平均售量

需求不超过存量,需求被售　　需求超过存量,存量被售

$$R_n=\sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n=j,S_n=i)+iP(D_n>i,S_n=i)]$$

存量 需求

$$=\sum_{i=1}^{3}[\sum_{j=1}^{i} jP(D_n=j|S_n=i)+iP(D_n>i|S_n=i)]P(S_n=i)$$

n充分大时 w_i

$P(S_n=i)=w_i$

$$=0.632\times0.285+0.896\times0.263+0.977\times0.452=0.857$$

◆从长期看，每周的平均销售量为 **0.857**(架)

思考：为什么每周的平均销售量略小于平均需求量?

敏感性分析

$$a(n+1) = a(n)P$$

❖ 平均需求：每周1 (架) 附近波动时，结果有多大变化

- 设D_n服从均值为λ的柏松分布

$$P(D_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

◈状态转移阵

$$S_{n+1} \longrightarrow p_{11} = P(S_{n+1} = 1 | S_n = 1) = P(D_n = 0)$$

$$S_n \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \lambda^2 e^{-\lambda}/2 & \lambda e^{-\lambda} & 1-(\lambda+\lambda^2/2)e^{-\lambda} \end{bmatrix}$$

◆第n周(n充分大)失去销售机会的概率：$P = P(D_n > S_n)$

```
for i=1:10
   lamda=0.5+0.1*i;
   d(i,1)=poisspdf(0,lamda); d(i,2)=poisspdf(1,lamda); d(i,3)=poisspdf(2,lamda);
   d(i,4)=poisspdf(3,lamda); d(i,5)=1-poisscdf(3,lamda);
   p1=[d(i,1) 0 1-d(i,1);d(i,2) d(i,1) 1-d(i,1)-d(i,2);d(i,3) d(i,2) 1-d(i,2)-d(i,3)]';
   [V,D]=eig(p1);  V1(i,:)=abs(V(:,1)/([1 1 1]*V(:,1)))';
   P(i)=[d(i,3)+d(i,4)+d(i,5),d(i,4)+d(i,5),d(i,5)]*V1(i,:)';
end
P
```

结果

λ	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
P	0.073	0.089	0.105	0.122	0.139

- **当平均需求(λ=1.0)增长（或减少）10%时，失去销售机会的概率将增长（或减少）约15%**

钢琴销售的存贮策略

存贮策略(周末库存为0则订购3架，否则不订购)已定，计算两个指标(失去销售的概率和每周平均销售量).

关键是在无后效性的前提下恰当地定义系统的状态变量(本例是每周初的库存量).

动态随机存贮策略是马氏链的典型应用.