第 二 十 七 讲

上次课：

- **4-vectors：** $u_\mu = \gamma\{\vec{u}, ic\}$，$J_\mu = \rho_0 u_\mu = \{\vec{j}, ic\rho\}$，$A_\mu = \{\vec{A}, i\varphi / c\}$
- **Lorentz 协变下的 Maxwell 方程:**

  $\partial_\mu J_\mu = 0$, $\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu$, $\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu$...　　（$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$）
- 电磁场变换公式

$$\begin{cases} \vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \\ \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_\perp \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel \\ \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B} - \dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_\perp \end{cases}$$

[例 3]　试求匀速运动的点电荷的场。

解　设 S 系为实验室坐标系，其中点电荷以速度 $\vec{v}$ 沿 x 轴运动。在这个坐标系中既有电场，又有磁场（运动电荷产生电流进而产生磁场），不方便求解。不妨另设 S' 系，其原点固定在点电荷 q 上跟着点电荷一起运动。在 S' 系中点电荷是静止的，只有电场没有磁场，其场为

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{B}'(\vec{r}', t') = 0 \qquad (11.4.4)$$

我们随后将 S’系中的电磁场利用变换公式变换到 S 系。因为 S 系相对 S' 系沿 x 轴以速度 $-v$ 运动，则由式(11.4.2)得 S 系中的场强

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + vB'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - vB'_y), \\ &B_x = B'_x, \quad \vec{B}_\perp = \gamma(\vec{B}'_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}'_\perp) \end{aligned} \qquad (11.4.5)$$

由于 $\vec{B}' = 0$，故

$$\begin{aligned} &E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx'}{r'^3}, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qy'}{r'^3}, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qz'}{r'^3}, \\ &B_x = 0, \quad \vec{B}_\perp = \gamma\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}'_\perp = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_\perp \end{aligned} \qquad (11.4.6)$$

现在必须把 S’系中的 $\vec{r}', t'$ 用 S 系中的 $\vec{r}, t$ 来表示，因为我们要知道的是在 S 系中的某一个时空点地场强。为此，设 $t = 0$ 时点电荷 q 正好与 S 系的原点重合，并且我们在这一时刻测量空间的场，于是，根据洛伦兹变换，我们有

$$x' = \gamma x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = -\gamma \beta x / c \tag{11.4.7}$$

将（11.4.7）代入（11.4.6）即可得最终结果。S'系中$\vec{r}'$可表示成

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = [(\gamma x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \tag{11.4.8}$$

这样，S系中在$\vec{r}$这一点（等同于S'系的$\vec{r}'$这一点）的电场强度为

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma q \vec{r}}{[(\gamma x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{[(r\cos\theta)^2 + (1-\beta^2)(r\sin\theta)^2]^{3/2}\gamma^2} \\ &= \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\bullet\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\end{aligned} \tag{11.4.9}$$

式中θ是$\vec{r}$与$\vec{v}$的夹角。由（11.4.6）不难算出磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E} \tag{11.4.10}$$

我们看到，匀速运动的点电荷的场的特点是：

(1) 电场方向仍然是沿着径向，但强度分布不再是球对称的，而是受制于一个与θ及运动速度v有关的角度分布函数$F_\beta(\theta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$。$\theta = 0$处场最弱，$\theta = \frac{\pi}{2}$处场最强，场向着垂直于速度方向的平面集中，如图 11.10 所示，集中的程度与点电荷运动速度有关，当$v \longrightarrow c$时，场基本上集中分布在垂直于$\vec{v}$的平面内。图 11.11 画出了三种不同β值的分布情况。

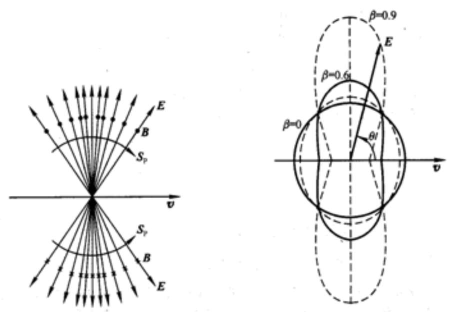

图 11.10　　图 11.11

（2）能流分布为

$$\vec{S}_P = \vec{E}\times\vec{H} = \varepsilon_0[\vec{v}E^2 - \vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{v})] \tag{11.4.11}$$

注意到 $\vec{E} \parallel \hat{r}$，容易计算得知

$$\vec{S}_p \cdot \hat{r} \propto \left[E^2 (\vec{v} \cdot \hat{r}) - E^2 (\vec{v} \cdot \hat{r}) \right] = 0 \qquad (11.4.12)$$

这说明没有能流沿着径向方向辐射出去。从图 11.10 我们也可直接看出，能流是在以电荷为中心的球面上流动。

(3) 虽然能量并不沿着 $\vec{r}$ 方向辐射出去，但在实验室系看，能流仍在做定向流，只伴随着电荷一起运动。要理解这个问题，只需要将时间加上即可。

Tips：

（1） 在利用相对论电磁场变换公式时，不用忘了需要做两次 Lorentz 变换，一次是将场变换，另一次是将坐标点进行变换。

（**2**） **为什么运动电荷的电场会发生有趣的畸变？根本的原因是“运动”尺子收缩，因此，将原本均匀分布的场向中间压缩。**

（**3**） **这个问题的求解，可以解释我们之前课堂上讲到的一个悬案：为什么两个孤立电流源之间的相互作用力不满足牛顿第三定律。你试试？**