第十五讲

上次课

- 线性磁介质： $\nabla^2\varphi_m=0$，H 与 E 对应。
- 饱和磁化的铁磁介质：$\nabla^2\varphi_m=-\rho_m$， $\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}_0$，假想磁荷
- $\vec{H}\to\varphi_m\to\rho_m$
$\vec{B}\to\vec{A}\to\vec{j}$ 不同的方法"看到" 的东西不一样。

---

§5.5 磁 多 极 矩 展 开 - 磁 偶 极 子

若源电流分布集中在一个小区域 V 中，而我们只讨论其在远处的产生的磁场，这时可以仿照静电情况用多极矩展开的方法来处理。这里，我们重点讨论磁偶极子的场、磁偶极子与外磁场的相互作用。

1．磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中，矢势$\vec{A}$的解为

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'. \qquad (5.5.1)$$

类似静电问题中的多极展开，把$\dfrac{1}{R}$在区域 V 内的某一点展开成$\vec{r}'$的幂级数。若展开点取在座标的原点，则

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\Big|_{r'=0}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{R}\Big|_{r'=0}+\cdots \qquad (5.5.2)$$

只保留前两项，代人矢势表达式中得

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}}{R}d\tau'=\vec{A}^{(0)}+\vec{A}^{(1)}+\cdots \qquad (5.5.3)$$

其中

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu}{4\pi r}\int \vec{j}(\vec{r}')d\tau',$$
$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi r^3}\int \vec{j}\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}\right)d\tau', \qquad (5.5.4)$$

这里我们将不直接处理电流密度 $\vec{j}(\vec{r}')$，而利用一个没有证明其严格性但却非常有启发性的思路 - 将体积 V 内的电流分成许多独立的电流管道的叠加。因为是稳恒电流，每个流管为闭合回路且电流为一常数 I_i。根据这一思路，可以在积分中做如下代换： $\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau' = \sum_i I_i d\vec{l}_i$ 。 考虑第一项

$$\vec{A}^{(0)} \propto \int \vec{j}\,d\tau' = \sum_i I_i \oint d\vec{l}_i \equiv 0 \qquad (5.5.5)$$

（5.5.5）式背后的物理原因是电流为稳定电流。与电场的多级矩展开不同，磁多极矩的第一项恒为 0，***<u>事实上，这正是自然界没有磁单极的显现</u>***。下面考虑第二项 $\vec{A}^{(1)}$：

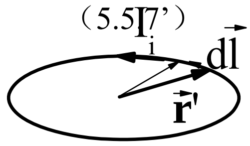
$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_i I_i \oint\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}\right)d\vec{l}_i \qquad (5.5.6)$$

对方环或是圆环，上式都可以严格积分出来（详见第二讲）。对任意形状，注意到 $d\vec{r}\,' = d\vec{l}_i$，我们可以首先将上式中的积分进行配分，

$$\oint(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')d\vec{l}_i = \oint(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')d\vec{r}\,' = \oint\left[d\left((\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{r}\,'\right) - \vec{r}\,'(\vec{r}\cdot d\vec{r}\,')\right] \qquad (5.5.7)$$

在闭合环路条件下上式第一项为 0，因此得到一个恒等式

$$\boxed{\oint(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')d\vec{l}_i = -\oint\vec{r}\,'(\vec{r}\cdot d\vec{r}\,') = -\oint\vec{r}\,'(\vec{r}\cdot d\vec{l}_i)} \qquad (5.5.7')$$



现将（5.5.6）中的积分分成 2 项，

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\left[\oint\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}\right)d\vec{l}_i + \oint\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}\right)d\vec{l}_i\right] \qquad (5.5.6')$$

将上式中的一项用（5.5.7’）来替代，则有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\left[\oint\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}\right)d\vec{l}_i - \oint\vec{r}\,'(\vec{r}\cdot d\vec{l}_i)\right] \qquad (5.5.8)$$

利用矢量叉乘的恒等式$\boxed{\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}$，（5.5.8）可以被进一步改写

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\oint\left(\vec{r}'\times d\vec{l}_i\right)\times\vec{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{5.5.9}$$

其中

$$\boxed{\vec{m}=\frac{1}{2}\sum_i I_i\oint\vec{r}'\times d\vec{l}_i=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau'.} \tag{5.5.10}$$

被定义为<u>**磁偶极矩**</u>。上式是对磁偶极矩的最一般定义，针对任意电流分布均可以由此计算。对磁偶极子，我们或多或少已在不同场合介绍其性质，现再总结如下：

（1）对于一个小的载流闭合线圈，其磁偶极矩 $\vec{m}$ 可以由（5.5.10）计算为：

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times\vec{j}d\tau'=\frac{I}{2}\oint\vec{r}'\times d\vec{l}'=I\vec{S} \tag{5.5.11}$$

式中 $\vec{S}$ 是电流回路的面积，方向取右手螺旋。这是我们熟知的结果，只不过此处给出的磁偶极矩的定义（5.5.10）更一般。

(2) 磁偶极子产生的场在第二讲中已经导出来过

$$\boxed{\vec{B}_m=\nabla\times\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\vec{m}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3}} \tag{1.2.24}$$

其与电偶极子 $\vec{p}$ 产生的电场 $\vec{E}_p$ 形式一致。根据第十四讲，对一个磁偶极子产生的场，在没有电流的地方（$r\neq 0$ 处）可以引入磁标势 $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0=-\nabla\varphi_m$。磁偶极子的磁标势为：

$$\boxed{\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}} \tag{5.5.12}$$

与电偶极子的电标势一一对应。因此对于磁偶极子产生的场，我们既可以用矢势（5.5.9）计算，也可以利用磁标势（5.5.12）计算。在无源区，这两个表示方式是一致的。

<u>（3）任意形状的环形电流回路的标势</u>

对任意形状的电流回路，若要考虑离环不太远处的场，这时磁偶极矩近似不精确。设回路中的电流强度为 I，我们可以把以此回路为边界的任意曲面切割成许多小块，每小块的边界上

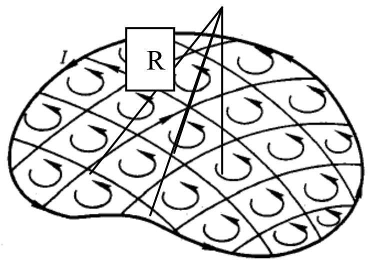


图 5.2

都流有电流I，电流的方向同大回路的

电流方向相同，这样，这些小块边界上

电流相加的结果仍只在大回路中流有电流I。对于每一小块面积都相应的有一个磁矩，其大小为$Id\vec{S}$，它在空间产生的磁标势为

$$\Delta\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\frac{\Delta\vec{S}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi}\Delta\Omega \qquad (5.5.13)$$

式中的R是$d\vec{S}$至观察点的位置矢量，$\Delta\Omega$为这一小块电流回路对观察点张开的立体角。当每个小块电流回路的尺度足够小时，其所产生的场由磁偶极子描述（5.5.13）变成精确的（对大块电流源远场近似不成立，对足够小的电流回路远程近似变成精确的）。于是，整个回路所产生的磁标势严格为

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\Omega, \qquad (5.5.14)$$

Ω是回路对观察点所张的立体角，是观察点 r 的函数。其磁感应强度为

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = -\mu_0\nabla\varphi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega(\vec{r}), \qquad (5.5.15)$$

Ω正负的规定是：按电流的右手法则决定$\vec{e}_n$的面法线方向以后，若观察点在$\vec{e}_n$的正方向，则$\Omega>0$，反之$\Omega<0$。注意当观察点穿过电流围出的面积时，磁标势不连续。当观察点在载流面上时，$\Omega^+ = 2\pi$，而当其在面积下时，$\Omega^+ = -2\pi$，故，$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$。其实，这个表面正是我们上次课讲的“磁壳”，必须挖掉其才使得磁标势的定义有意义，尽管其上面并无电流。

2．磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩

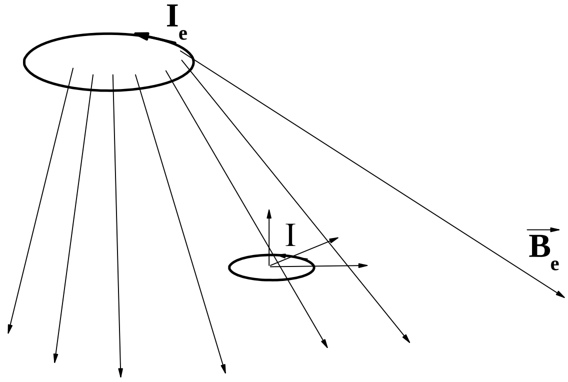
与电偶极子在电场中类似，下面我们考虑磁偶极子在外磁场中受到的作用力（矩）。首先，前面已经推导出任意电流分布情况下的体系的总磁能为

$$U_m = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{A}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (5.5.16)$$

假设一个载流线圈构成的磁偶极子（磁偶极矩为$\vec{m} = I\vec{S}$）处在由远处电流（简单起见，假设为另外一个载流线圈（电流为I_e））产生的静磁场$\vec{B}_e$中，则体系的总

磁能为

$$U_m=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}+\vec{A}_e\right)\cdot\left(\vec{j}+\vec{j}_e\right)d\tau$$
$$=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}\cdot\vec{j}+\vec{A}_e\cdot\vec{j}_e\right)d\tau+\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \qquad (5.5.17)$$



其中 $\vec{A},\vec{A}_e$ 分别对应电流 I,I_e 产生的矢势。

类似电场的情形，似乎我们可以将前一项定义为体系的**固有能**，后一项定义为体系的**相互作用能**，

$$U_{\text{int}}=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau$$ 。

进一步，根据矢量势的定义

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'}{R},\quad \vec{A}_e(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r}\,')d\tau'}{R} \qquad (5.5.18)$$

容易证明

$$\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}\right)d\tau=\int_\infty\left(\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \qquad (5.5.19)$$

因此有

$$U_{\text{int}}=\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}\right)d\tau=I\oint\vec{A}_e\cdot d\vec{l}=I\int_S\vec{B}_e\cdot d\vec{S}$$
$$=I\Phi_e=\frac{1}{2}\left(I\Phi_e+I_e\Phi\right) \qquad (5.5.20)$$

其中 $\Phi_{\mathrm{e}}=\int_S\vec{B}_e\cdot d\vec{S}$，$\Phi=\int_{S_e}\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 分别为偶极子线圈中通过的外磁场的磁通量以及源线圈中通过的磁偶极子磁场的磁通量。当源距离目标线圈足够远时，可以将其磁场在线圈所处的空间在原点附近做 Tayler 展开：

$$\vec{B}_e(\vec{r})\approx\vec{B}_e(0)+\vec{r}\cdot\nabla\vec{B}_e(\vec{r})_{\vec{r}=0}+\ldots \qquad (5.5.21)$$

带入上式并只保留第一项，

$$U_{B,\text{int}}=I\vec{B}_e(0)\cdot\int_S d\vec{S}=\vec{m}\cdot\vec{B}_e \qquad (5.5.22)$$

这个形式与电偶极子在电场中的相互作用能 $U_{e,int}=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$ ***不同，似乎意味着在磁场中磁偶极子喜欢反平行于外磁场！这显然是不合理的，但问题在哪里？***

问题出在对相互作用能以及固有能的定义上面。在电的情形，当电偶极子在电场中发生平动或是转动时，电场的固有能不发生变化，因为偶极子以及产生外

电场的电荷分布并没有发生变化（因为这里取的边界条件为电荷体为孤立体系；如果将边界条件取做等势条件，情况会有所不同）。对此类磁场体系则有所不同，当磁偶极子相对外磁场的位形发生变化时，会在线圈中生感生电动势。根据 Faraday 电磁感应定律，偶极子线圈和源线圈中产生的感生电动势分别为

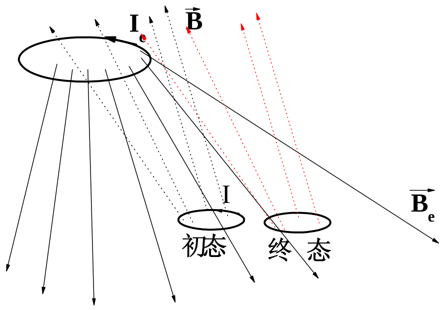
$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_e}{dt},\quad \varepsilon_e=-\frac{d\Phi}{dt} \qquad (5.5.23)$$

偶极子线圈以及源线圈中的电流会因此被改变，此即是“互感效应”。在这个过程中“固有能”不可能保持恒定不变。若我们要求在变化过程中 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}_e$ 均保持不变（亦即 I, I_e 不变），则必须由外接电动势做功抵消感生电动势的做功。在一个变动过程中，外电源必须做的功为

$$\Delta W_\varepsilon=-\int I\varepsilon dt-\int I_e\varepsilon_e dt=\int I\frac{d\Phi_e}{dt}dt+\int I_e\frac{d\Phi}{dt}dt=I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi \qquad (5.5.24)$$

其中 $\Delta\Phi_e, \Delta\Phi$ 是 Φ_e, Φ 在过程中的变化。对比（5.5.20），我们发现

$$\Delta W_\varepsilon=2\Delta U_{int} \qquad (5.5.25)$$



现在我们根据能量守恒来看一下保持电流不变条件下的“磁相互作用能”。对比目标线圈与源线圈的位形发生变化前后的初态与终态，因为电流强度一致保持不变，体系的总能量变化包括：

（1）磁场相互作用的变化：$\Delta U_B=\frac{1}{2}\left(I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi\right)$

（2）为了保证 I_e, I 维持不变，目标线圈及原线圈所携带的电源必须提供 $\Delta W_\varepsilon=I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi=2\Delta U_B$ 的能量。因此，将磁场与电源看成一体，电源中少了 $2\Delta U_B$ 的能量。

因 此 ， 线 圈 + 电 源 这 个 系 统 总 的 能 量 的 变 化 为 ，

$\Delta\tilde{U}_{\text{int}} = \Delta U_B - \Delta W_\varepsilon = \Delta U_B - 2\Delta U_B = -\Delta U_B$。因此可以定义有效相互作用能：

$$\boxed{\tilde{U}_{\text{int}} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_e} \tag{5.5.31}$$

与电偶极子在电场中的势能（相互作用能）完全一样！仿照电偶极子在电场受力及受力矩的推导，我们可推出磁偶极子在磁场中所受的力及力矩分别为

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -\nabla\tilde{U}_{int} = \nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{m}\cdot\nabla\right)\vec{B} \\ \vec{\tau}_B &= \vec{m}\times\vec{B} \end{aligned} \tag{5.5.32}$$

Tips:

电磁理论最难掌握的就是这一点了：许多物理量必须在注明是在什么条件下得到的。等势条件和孤立导体的条件得到的结论截然不同，同样，等电流条件和等矢势也不相同。

第六章　似 稳 场 （准静场）

前面几章中我们研究了静止电荷产生的静电场、稳恒电流产生的静磁场。从现在开始，我们开始研究随时间变化的电磁场。本章研究随时间变化足够缓慢的电磁场，叫做似稳场，又叫“准静场”（Quasi-Static field），这部分的研究是整个电工学的基础。事实上，对很多实际问题，尽管其中电磁场是随时间变化的，由于其满足“似稳”条件，这些问题可以在似稳近似下求解。这将极大地简化我们的计算，而且使得我们具有非常清晰的物理图像。在引言中我提及的“**电磁流变液**”，“**光镊**”等现象其实都属于此类问题。

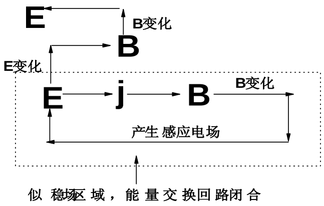
§6.1 似 稳 条 件

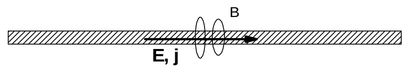
原则上电磁规律是由 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

决定的，其中 $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 称为“位移电流”。位移电流的是由 Maxwell 引入的，其直接

后果是导致电磁波的出现，使得电磁能量以电磁场的形式脱离源而存在。看如下示意图，由电荷（由电荷密度ρ刻画）产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 作用于电荷上时会产生电流（由电流密度 $\boldsymbol{j}$ 刻画），而进一步会产生磁场 $\boldsymbol{B}$。 当磁场 $\boldsymbol{B}$ 发生变化时，根据 Faraday 定律会产生感应电场$\vec{E}_K$，其又进一步作用于电荷改变电流，回到之前的循环。*若不考虑“位移电流”的影响，则这个图像告诉我们：电场、磁场被一直束缚在电荷、电流附近，即使随时间变化，也不会脱离电荷、电流而去，其行为大致与静态的电磁场相仿。*





然而考虑了“位移电流”项之后，这个图像被从根本上打破了。如右图所示，变化的电场不仅可以作用到导线中的载流子上，而且可以因为电场变化通过**“位移电流”**的效应会导致新的磁场，而磁场的变化导致新的电场，电磁场就这样脱离电荷而去，这个过程叫做“辐射” – 将在第十二章具体展开阐述。

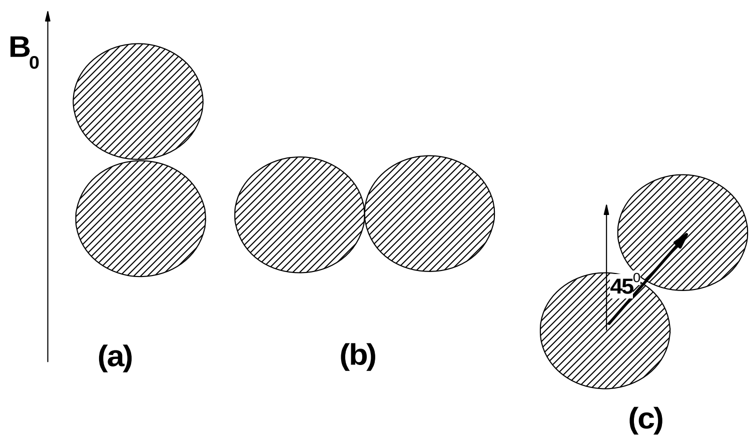
“电磁辐射”产生的电磁场的主要性质是：假设电荷电流均分布在原点附近，则空间 $\boldsymbol{r}$ 位置处产生的场在某一时刻t的值$\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$ 是由比t早一些时候的电流、电荷$\vec{j}(t'=t-r/c),\rho(\vec{r},t'=t-r/c)$决定的，而并不是由$t$时刻的电流和电荷决定，*这就是所谓的“推迟效应”*。 物理上，这非常容易理解，因为某一时刻的电荷、电流产生的影响要经过r/c时间的电磁波的传播才能到达 r 点。这样的后果是场和源**不再满足瞬时的变化关系**，给我们的研究带来了麻烦。对此类问题具体计算时，必须严格求解全空间的波动方程（严格方法在第十二章中介绍）。

当某些时空条件满足时，我们可以略去“位移电流”的影响，这样做的后果是使得源和场之间具有瞬时关系（当然是某种近似下的后果）。每一时刻，其源和场之间的关系类似于静态场的源和场的关系，因此这种场也称作“**似稳场**”。对这种场，很多我们针对静态电磁场发展的方法就可以使用，因此“似稳场”的研究具有重要的实际意义。那么，在什么情况下略去“位移电流”才算是合理的？这就是下面我们要讨论的**似稳条件**。

习题：

1） 考虑一个半径为 R 的均匀带电 Q 的绝缘体球壳，沿对称轴（设为 z 轴）以角速度ω匀角速度转动，求空间的磁场分布。[提示：分下面 3 步走 （1）求出电流分布；（2）证明球体对应于一个均匀磁化球，并求出磁化强度$\vec{M}$；（3）利用磁标势的方法求解。]

2） 将一个半径为 R 的磁导率为μ_2的磁介质球放入磁导率为μ_1的溶液中，当外加一均匀磁场$\vec{B}_0$时，求磁介质球携带的有效磁偶极矩（做了好多遍了，可以无需推导直接写出来）。若体系中有两个相同的磁介质球体，问体系将最终选择如图所示的那一种构型？为什么？



注：这个题目的背景就是“磁流变液”，我曾在第 8 届亚洲中学生奥林匹克竞赛中出过一道类似的题目。

思考题

（1）根据磁偶极子的矢势和标势，分别推出磁偶极子的 B 场的形式，讨论 2 个表达式在什么条件下是一样的？

（2）能否从 Maxwell 张量出发计算一个磁偶极子(载流线圈)在外磁场中受到的力和力矩？若可以，将一个自旋看成一个磁偶极子，根据其在磁场中受到的力和力矩写出自旋在磁场中的有效相互作用能。

（3）编一段小程序，根据（5.5.14）-（5.5.15）计算一个任意形状的载流线圈的磁标势分布及磁场，通过与磁偶极子的远场标势的比较确定什么时候可以看成远场？

（4）基于磁偶极子与外磁场相互作用的有效势的推导方法，你能否计算出当外电场是由等势条件下的导体产生的体系下，极化能的正确表达式？