



信号与系统

LTI系统的分析方法

系统分析研究的主要问题就是对于给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。具体来说就是：建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法 { 输入输出法（外部法） - 单输入单输出
状态变量法（内部法） - 多输入多输出

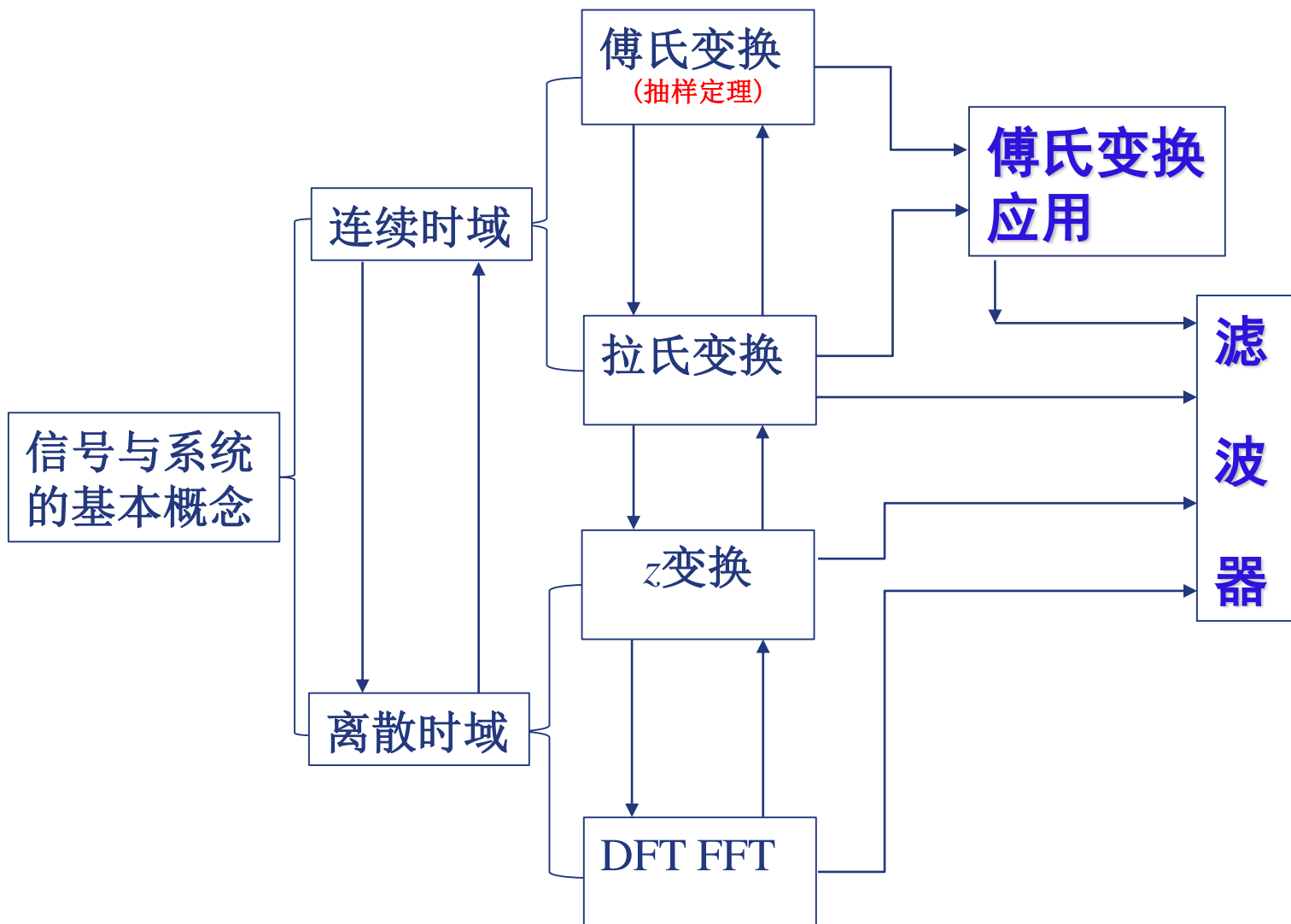
外部法 { 时域分析 { 连续系统 --- 微分方程，卷积积分
离散系统 --- 差分方程，卷积和
变换域分析 { 连续系统 --- 频域法和复频域法
离散系统 --- z 域法

系统特性： 系统函数-系统的稳定性

外部法： 状态变量法



信号与系统





第四章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



4.1 拉普拉斯变换

一. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

傅里叶变换的优点:

- ◆ 避免微分方程的求解和卷积计算, 简化了系统响应求解过程;
- ◆ 物理意义明确, 比如谐波、频率响应、带宽等等。

傅里叶变换的缺点:

- ◆ 只能处理满足收敛条件 (狄利赫里条件) 的信号, 对于某些不满足条件的必须引入奇异函数解决;
- ◆ 需要计算广义积分, 积分区间 $(-\infty, \infty)$, 有时候计算比较复杂;
- ◆ 只能求系统的零状态响应。

拉普拉斯变换的优点:

- ◆ 可以自动引入初始条件, 求系统的全响应;
- ◆ 变方程的微积分运算为乘除运算, 变卷积运算为乘法运算, 计算过程简化;
- ◆ 对信号的适应性比较强, 不需要引入奇异函数。



4.1 拉普拉斯变换

一. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

频域分析： 数学工具是傅里叶变换

以虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 为基本信号，任意信号可分解为众多不同频率的虚指数分量之和。

复频域分析(s 域分析)： 数学工具是拉普拉斯变换

通过把**频域**中的傅里叶变换推广到**复频域**来解决这些问题。本章引入复频率 $s = \sigma + j\omega$, 以复指数函数 e^{st} 为基本信号，任意信号可分解为不同复频率的复指数分量之和。这里用于系统分析的独立量是复频率 s ，故称为**复频域分析**或者 **s 域分析**。



4.1 拉普拉斯变换

一. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$x(t) = e^{at}u(t)$ $a > 0$ 的傅里叶变换? **不存在!**

将该信号 $x(t)$ 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ $\sigma > 0$

选择合适的 σ 值, 使得 $t \rightarrow \pm\infty$ 时信号的幅度衰减为0, 即满足绝对可积的条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < +\infty$$

$$F[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

傅里叶变换对: $x(t)e^{-\sigma t} \leftrightarrow X(\sigma + j\omega)$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



4.1 拉普拉斯变换

一. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

令 $s = \sigma + j\omega$, 则 $d\omega = \frac{ds}{j}$, 前面两式化简为:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

双边拉普拉斯变换对: $x(t) \leftrightarrow X(s)$,

$X(s)$ 称为 $x(t)$ 的双边拉斯拉氏变换(或象函数), 记为 $X(s)=L[x(t)]$;

$x(t)$ 称为 $X(s)$ 的双边拉普拉斯逆变换(或原函数)。

$x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。

物理意义: 信号 $x(t)$ 可分解成复指数 e^{st} 的线性组合。



4.1 拉普拉斯变换

一. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

例1：求信号 $x_1(t)=e^{\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{(\alpha-s)t} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} \right] = \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & \sigma = \operatorname{Re}[s] > \alpha \\ \text{不定}, & \operatorname{Re}[s] = \alpha \\ \text{无界}, & \operatorname{Re}[s] < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

因果信号: $x_1(t) = e^{\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \operatorname{Re}[s] > \alpha$



4.1 拉普拉斯变换

一. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

例2: 求信号 $x_2(t) = -e^{\alpha t} u(-t)$ 的拉氏变换。

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -u(-t) e^{(\alpha-s)t} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{s-\alpha} e^{(\alpha-s)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(\alpha-s)t} \right] = \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & \sigma = \text{Re}[s] < \alpha \\ \text{不定}, & \text{Re}[s] = \alpha \\ \text{无界}, & \text{Re}[s] > \alpha \end{cases}$$

$$x(t) = e^{\alpha t} u(t) + e^{\beta t} u(-t)$$

$$\alpha < \beta, \quad X(s) = \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}$$

$$(\alpha < \text{Re}[s] < \beta)$$

$$\alpha \geq \beta, \quad X(s) \text{ 不存在。}$$

$$x_2(t) = -e^{\alpha t} u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \text{Re}[s] < \alpha$$

非因果
信号



4.1 拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换

1. 单边拉普拉斯变换定义

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad t > 0^-$$

积分下限定义为零的左极限，目的在于分析和计算时可以直接利用起始给定的 0^- 状态。但是，为了书写方便，习惯上我们用 0 来表示，如没有特别说明，一般均指单边拉普拉斯变换。

单边拉普拉斯变换存在的条件：
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = C$$

对任意信号 $x(t)$ ，若满足上式，则 $x(t)$ 应满足：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0$$



4.1 拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换

2. 单边拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$$X(s) = \int_{0-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换,

而傅里叶变换即是 $\sigma=0$ 时的(即 s 平面虚轴上)拉氏变换。

1) 当收敛域包含虚轴时, 拉氏和傅氏变换都存在, 并且 $X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$

$$x(t) = e^{\alpha t} u(t), \alpha < 0; X(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha}, X(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \text{Re}[s] > \alpha$$

2) 当收敛域不包含虚轴并且不以虚轴为边界时, 拉氏变换存在, 但傅氏变换不存在

$$x(t) = e^{\alpha t} u(t), \alpha > 0; X(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \text{Re}[s] > \alpha$$

3) 当收敛域以虚轴为边界时, 拉氏和傅氏变换都存在, 但傅氏变换中含有冲激函数, 故有 $X(j\omega) \neq X(s)|_{s=j\omega}$

$$x(t) = u(t), X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, X(s) = \frac{1}{s}, \text{Re}[s] > 0$$

如果已知拉氏变换, 如何求解傅里叶变换?

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^N K_i \pi \delta(\omega - \omega_i)$$



4.1 拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换

3. 常用信号的单边拉普拉斯变换

1. 复指数函数: $x(t) = e^{s_0 t} u(t)$ (s_0 为复常数)

$$L[e^{s_0 t} u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{1}{s-s_0}, \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0]$$
$$e^{s_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0}, \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0]$$

若 s_0 为实数, 令 $s = \pm\alpha$ ($\alpha > 0$), 得实指数函数的拉氏变换为:

$$e^{\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \operatorname{Re}[s] > \alpha, \quad e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}, \operatorname{Re}[s] > -\alpha$$

若 s_0 为虚数, 令 $s = \pm j\beta$ ($\beta > 0$), 得虚指数函数的拉氏变换为:

$$e^{j\beta t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-j\beta}, \operatorname{Re}[s] > 0, \quad e^{-j\beta t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+j\beta}, \operatorname{Re}[s] > 0$$

若 $s_0=0$, 得阶跃函数的拉氏变换为:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \operatorname{Re}[s] > 0$$



4.1 拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换

3. 常用信号的单边拉普拉斯变换

2). 三角函数信号: $\cos(\beta t)u(t)$, $\sin(\beta t)u(t)$

$$e^{j\beta t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\beta}, \text{Re}[s] > 0, \quad e^{-j\beta t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + j\beta}, \text{Re}[s] > 0$$

$$\cos(\beta t)u(t) = \frac{e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}}{2}u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \text{Re}[s] > 0$$

$$\sin(\beta t)u(t) = \frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j}u(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \text{Re}[s] > 0$$

3). 斜坡函数: $x(t) = tu(t)$

$$\begin{aligned} L[tu(t)] &= \int_0^\infty tu(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}t \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st}t \Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2}e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}, \quad \text{Re}[s] > 0 \end{aligned}$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}, \text{Re}[s] > 0$$



4.1 拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换

3. 常用信号的单边拉普拉斯变换

4). t 的正幂函数: $t^n u(t)$, n 为正整数

$$\begin{aligned} L[t^n u(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} (t^n) e^{-st} dt = -\frac{t^n}{s} (e^{-st}) \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{n}{s} \int_{0^-}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_{0^-}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} L[t^{n-1} u(t)] \end{aligned}$$

根据以上推理, 可得

$$\begin{aligned} L[t^n u(t)] &= \frac{n}{s} L[t^{n-1} u(t)] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} L[t^{n-2} u(t)] \\ &= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} L[t^0 u(t)] \end{aligned}$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$



4.1 拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换

3. 常用信号的单边拉普拉斯变换

5) . 冲激函数和冲激偶函数: $\delta(t), \delta'(t)$

$$L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \text{Re}[s] > -\infty$$

$$L[\delta'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta'(t) e^{-st} dt = -(-s)e^{-st} \Big|_{t=0} = s \quad \delta'(t) \leftrightarrow s, \quad \text{Re}[s] > -\infty$$

6) . 矩形脉冲信号: $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{其余} \end{cases} = G_{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right)$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\tau} x(t) e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad G_{\tau} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}, \text{Re}[s] > -\infty$$

由于该信号是时限信号，函数值非零的时间段为有限长，拉氏变换定义式中的积分区间有限，故对所有的 s ， $X(s)$ 都存在。称为全 s 平面收敛。



4.1 拉普拉斯变换

[例] 计算下列信号拉普拉斯变换的收敛域

$$(1) u(t) \quad \sigma > 0$$

$$(2) u(t) - u(t - \tau) \quad \text{收敛域为全}s\text{平面}$$

$$(3) e^{3t} u(t) \quad \sigma > 3$$

$$(4) t^t, e^{t^2} \quad \text{不存在}$$

分析：求收敛域即找出满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt = C$

或 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0$ 的 σ 取值范围。



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

1. 线性特性

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1$ $x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$

则: $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{L} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

2. 展缩特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

则: $x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \quad \operatorname{Re}(s) > a\sigma_0$

$x(at+b)u(at+b) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}s} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \operatorname{Re}(s) > a\sigma_0$



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

3. 时移特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

则: $x(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 \geq 0 \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

4. 复频移特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c$

则: $x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s - s_0) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 + \sigma_c$



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

例：已知因果函数 $x(t)$ 的象函数为 $X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ ，求 $e^{-t}x(3t-2)$ 的象函数？

由于： $x(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1}$

由平移特性有： $x(t-2) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1} e^{-2s}$

由展缩特性有： $x(3t-2) \leftrightarrow \frac{1}{3} \frac{s/3}{(s/3)^2 + 1} e^{-2s/3} = \frac{s}{s^2 + 9} e^{-2s/3}$

由复频移特性有： $e^{-t}x(3t-2) \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

5. 时域微分和积分特性 若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ $\text{Re}(s) > \sigma_c$

微分: $x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$, 至少是 $\text{Re}(s) > \sigma_c$

$x^{(2)}(t) \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$, 至少是 $\text{Re}(s) > \sigma_c$

...

$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} x^{(m)}(0^-)$, 至少是 $\text{Re}(s) > \sigma_c$

[证明]

$$\begin{aligned} L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= -x(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

5. 时域微分和积分特性 若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ $\text{Re}(s) > \sigma_c$

积分:

$$\left(\int_{0^-}^t \right)^n x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} x^{(-1)}(0^-)$$

...

$$\left(\int_{-\infty}^t \right)^n x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} x^{(-m)}(0^-)$$

收敛域至少 $\text{Re}(s) > \sigma_c$ 与 $\text{Re}(s) > 0$ 相重叠的部分

[证明]

$$L\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] = L\left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \right] + L\left[\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \right]$$



4.1 拉普拉斯变换

[证明]

$$L\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = L\left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau\right] + L\left[\int_{0^-}^t x(\tau)d\tau\right]$$

其中，右边第一项 $\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau = x^{(-1)}(0^-) \Rightarrow L\left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau\right] = \frac{x^{(-1)}(0^-)}{s}$

第二项按部分分式，得

$$\begin{aligned} L\left[\int_{0^-}^t x(\tau)d\tau\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^t x(\tau)d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t x(\tau)d\tau\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \frac{X(s)}{s} \end{aligned}$$



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

6. 复频域微分和积分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ $\text{Re}(s) > \sigma_c$ 则:

微分:

$$(-t)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds},$$

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \text{Re}(s) > \sigma_c$$

积分:

$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(\eta) d\eta, \quad \text{Re}(s) > \sigma_c$$



证明



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

7. 卷积定理

若

$$\begin{aligned}x_1(t) &\leftrightarrow X_1(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1 \\x_2(t) &\leftrightarrow X_2(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_2\end{aligned}$$

则： $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$ 二者收敛域的公共部分

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(\eta)X_2(s-\eta)d\eta \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 < c < \operatorname{Re}(s) - \sigma_2,$$

其中 $\sigma=c$ 是 $X_1(\eta)$ 和 $X_2(s-\eta)$ 收敛域重叠部分内与虚轴平行的直线。

由于对积分路线限制较严，积分计算比较复杂，因而复频域卷积定理较少使用。



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

8. 初值定理和终值定理

若函数 $x(t)$ 不包含冲激函数及其各阶导数, 且 $x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_c$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

初值定理 $x'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[sX(s) - x(0^+) \right]$

$$x''(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[s^2 X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \right]$$

若函数 $x(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即 $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$,

且 $x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0, \quad \sigma_0 < 0$

终值定理 $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \quad s=0$ 在 $sF(s)$ 的收敛域内



4.1 拉普拉斯变换

三. 单边拉普拉斯变换的性质

例: $F(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 2} \Rightarrow F(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - \frac{2}{(s+1)^2 + 1} \Leftrightarrow 2e^{-t}(\cos t - \sin t)u(t)$

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2}{s^2 + 2s + 2} = 2$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

例: $F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 2} \Rightarrow F(s) = 1 - \frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 2} = 1 - \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} = 1 - F_1(s)$

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-2s^2 - 2s}{s^2 + 2s + 2} = -2$$



4.1 拉普拉斯变换 – 常用单边拉普拉斯变换

$$e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}, \operatorname{Re}(s) > -\alpha; \quad e^{\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha}, \operatorname{Re}(s) > \alpha;$$

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + j\omega_0}, \quad e^{j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0;$$

$$\cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0;$$

$$e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s + \sigma_0}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -\sigma_0$$

$$t \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad t \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$



4.1 拉普拉斯变换 – 常用单边拉普拉斯变换

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n, \quad \operatorname{Re}(s) > -\infty$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$te^{-\lambda t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s + \lambda)^2} \quad \operatorname{Re}(s) > -\lambda$$



拉普拉斯变换的性质

1. 线性特性 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$ 2. 展缩特性 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
3. 时移特性 $x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 \geq 0$, 4. 复频移特性 $x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0)$

5. 时域微积分特性

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-),$$

$$x^{(2)}(t) \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$$

...

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} x^{(m)}(0^-)$$

$$\left(\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right)^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} x^{(-1)}(0^-)$$

...

$$\left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right)^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} x^{(-m)}(0^-)$$

6. 复频域微积分特性

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \quad \frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(\eta) d\eta$$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(\eta)X_2(s-\eta) d\eta$$

7. 卷积定理

8. 初值定理和终值定理

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$x'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sX(s) - x(0^+)]$$

$$x''(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2 X(s) - sx(0^+) - x'(0^+)]$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \quad s=0 \text{ 在 } sF(s) \text{ 的收敛域内}$$



4.1 拉普拉斯变换

初值定理和终值定理证明

初值定理 $x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ $x(t)$ 不包含冲激函数及其各阶导数

终值定理 $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$, $s = 0$ 在 $sF(s)$ 的收敛域内

证明： 时域微分特性： $x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$

$$L[x'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} x'(t)e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt \quad \int_{0^-}^{0^+} x'(t)e^{-st} dt = x(0^+) - x(0^-)$$

$$sX(s) - x(0^-) = x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt$$

初值定理： $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = x(0^+)$

终值定理： $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = x(0^+) + x(\infty) - x(0^+) = x(\infty)$



4.1 拉普拉斯变换

练习:

$$(1)(\sin t + 2 \cos t)u(t) = \sin tu(t) + 2 \cos tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 1} = \frac{2s + 1}{s^2 + 1}$$

$$(2)(1 - e^{-\alpha t})u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} = \frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$$

$$\begin{aligned}(3)te^{-t}u(t-1) &= (t-1+1)e^{-(t-1)} \cdot e^{-1}u(t-1) \\ &= e^{-1}[(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) + e^{-(t-1)}u(t-1)] \\ &\leftrightarrow e^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}\right]e^{-s} = \frac{s+2}{(s+1)^2}e^{-(s+1)}\end{aligned}$$

$$(4)te^{-\alpha t} \sin tu(t) \quad e^{-\alpha t} \sin tu(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2 + 1}$$

$$te^{-\alpha t} \sin tu(t) \leftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds} = \frac{2(s+\alpha)}{[(s+\alpha)^2 + 1]^2}$$



4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



4.1 拉普拉斯变换 – 常用单边拉普拉斯变换

$$e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}, \operatorname{Re}(s) > -\alpha; \quad e^{\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha}, \operatorname{Re}(s) > \alpha;$$

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + j\omega_0}, \quad e^{j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0;$$

$$\cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0;$$

$$e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s + \sigma_0}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -\sigma_0$$

$$t \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad t \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$



4.1 拉普拉斯变换 – 常用单边拉普拉斯变换

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n, \quad \operatorname{Re}(s) > -\infty$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$te^{-\lambda t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s + \lambda)^2} \quad \operatorname{Re}(s) > -\lambda$$



拉普拉斯变换的性质

1. 线性特性 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$ 2. 展缩特性 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
3. 时移特性 $x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 \geq 0$, 4. 复频移特性 $x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0)$

5. 时域微积分特性

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-),$$

$$x^{(2)}(t) \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$$

...

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} x^{(m)}(0^-)$$

$$\left(\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right)^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} x^{(-1)}(0^-)$$

...

$$\left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right)^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} x^{(-m)}(0^-)$$

6. 复频域微积分特性

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \quad \frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(\eta) d\eta$$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(\eta)X_2(s-\eta) d\eta$$

7. 卷积定理

8. 初值定理和终值定理

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$x'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sX(s) - x(0^+)]$$

$$x''(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2 X(s) - sx(0^+) - x'(0^+)]$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \quad s=0 \text{ 在 } sF(s) \text{ 的收敛域内}$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

一. 单边拉普拉斯反变换:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, t > 0$$

直接利用定义式求反变换-复变函数积分，比较困难。

象函数 $X(s)$ 是 s 的有理分式

$$X(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

式中各系数 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n), b_j (j = 0, 1, \cdots, m)$ 均为实数，为简单不失一般性：设 $a_n = 1$ 。若 $m \geq n$ ，可用多项式除法将象函数 $X(s)$ 分解为有理多项式 $P(s)$ 与有理真分式之和，即

$$X(s) = P(s) + \frac{B(s)}{A(s)}$$

式中 $B(s)$ 的幂次小于 $A(s)$ 的幂次，因此 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 为真分式。



4.2 单边拉普拉斯反变换

二. 部分分式展开法

如果 $X(s)$ 是 s 的实系数**有理真分式**，式中 $m < n$ ，可写为

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

式中 $A(s)$ 称为 $X(s)$ 的特征多项式，方程 $A(s)=0$ 称为**特征方程**，它的根 s_i 称为特征根，也称为 $X(s)$ 的极点。

1. $X(s)$ 有单极点(特征根为单根)

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

$$X(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)} + \frac{k_2}{(s-s_2)} + \cdots + \frac{k_i}{(s-s_i)} + \cdots + \frac{k_n}{(s-s_n)}$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

二. 部分分式展开法

$$X(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)} + \frac{k_2}{(s-s_2)} + \cdots + \frac{k_i}{(s-s_i)} + \cdots + \frac{k_n}{(s-s_n)}$$

两边同时乘以 $(s-s_i)$

$$X(s)(s-s_i) = \frac{k_1(s-s_i)}{(s-s_1)} + \frac{k_2(s-s_i)}{(s-s_2)} + \cdots + k_i + \cdots + \frac{k_n(s-s_i)}{(s-s_n)}$$

取 $s \rightarrow s_i$

$$k_i = X(s)(s-s_i) \Big|_{s=s_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} \left[(s-s_i) \frac{B(s)}{A(s)} \right]$$

或

$$k_i = X(s)(s-s_i) \Big|_{s=s_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{B(s)}{\frac{A(s) - A(s_i)}{s-s_i}} = \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}$$

$$x(t) = (k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \cdots + k_n e^{s_n t}) u(t)$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

二. 部分分式展开法

例: $X(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6}$

$$X(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6} = \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3}$$

$$k_1 = X(s)(s+2)\big|_{s=-2} = \frac{4s+5}{s+3}\big|_{s=-2} = -3$$

$$k_2 = X(s)(s+3)\big|_{s=-3} = \frac{4s+5}{s+2}\big|_{s=-3} = 7$$

$$X(s) = \frac{-3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

$$x(t) = (-3e^{-2t} + 7e^{-3t})u(t)$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

二. 部分分式展开法

2. $X(s)$ 有 r 重极点(特征根为重根)
$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)^r (s-s_{r+1}) \cdots (s-s_n)}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{k_r}{(s-s_1)^r} + \frac{k_{r+1}}{s-s_{r+1}} + \cdots + \frac{k_n}{s-s_n} \\ &= \sum_{i=1}^r k_i (s-s_1)^{-i} + \sum_{i=r+1}^n k_i (s-s_i)^{-1} \end{aligned}$$

$$(s-s_1)^r X(s) = \sum_{i=1}^r k_i (s-s_1)^{r-i} + \sum_{i=r+1}^n k_i (s-s_1)^r (s-s_i)^{-1}$$

$$k_i = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s-s_1)^r X(s)] \Big|_{s=s_1} \quad i=1, 2, \cdots, r$$

$$k_i = (s-s_i) X(s) \Big|_{s=s_i} \quad i=r+1, r+2, \cdots, n$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

例： $X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} \leftrightarrow (-2 + 2e^{-t} + 2te^{-t} + 3t^2e^{-t})u(t)$

$$X(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+1)} + \frac{k_3}{(s+1)^2} + \frac{k_4}{(s+1)^3}$$

$$k_1 = sX(s)\big|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3}\big|_{s=0} = -2$$

$$k_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2 \left[(s+1)^3 X(s) \right]}{ds^2} \bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{s-2}{s} \right)'' \bigg|_{s=-1} = 2$$

$$k_3 = \frac{d \left[(s+1)^3 X(s) \right]}{ds} \bigg|_{s=-1} = \left(\frac{s-2}{s} \right)' \bigg|_{s=-1} = 2$$

$$k_4 = (s+1)^3 X(s) \big|_{s=-1} = \frac{s-2}{s} \bigg|_{s=-1} = 3$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

例：求下列象函数的原函数： $X(s) = \frac{s^2 + 8}{(s + 4)^2}$

$X(s)$ 为有理假分式,将 $X(s)$ 化为有理真分式

$$X(s) = 1 + \frac{-8s - 8}{(s + 4)^2} = 1 + \frac{k_1}{(s + 4)^2} + \frac{k_2}{s + 4}$$

$$k_1 = (s + 4)^2 F(s) \Big|_{s=-4} = (-8s - 8) \Big|_{s=-4} = 24$$

$$k_2 = \frac{d}{ds} (s + 4)^2 F(s) \Big|_{s=-4} = (-8s - 8)' = -8$$

因此原函数是： $x(t) = \delta(t) + 24te^{-4t}u(t) - 8e^{-4t}u(t)$



4.2 单边拉普拉斯反变换

练习: 1) $X(s) = \frac{s+8}{s(s+2)(s+4)}$ 2) $X(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2(s+3)}$

3) $X(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

$$1) X(s) = \frac{s+8}{s(s+2)(s+4)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+4}$$

$$k_1 = \left[s \cdot \frac{s+8}{s(s+2)(s+4)} \right] \Big|_{s=0} = 1 \quad k_2 = \left[(s+2) \cdot \frac{s+8}{s(s+2)(s+4)} \right] \Big|_{s=-2} = -\frac{3}{2}$$

$$k_3 = \left[(s+4) \cdot \frac{s+8}{s(s+2)(s+4)} \right] \Big|_{s=-4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x(t) = \left(1 - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

$$2) X(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{k_1}{s+3} + \frac{k_2}{(s+2)^2} + \frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1 = [(s+3) \cdot \frac{s+4}{(s+2)^2(s+3)}] \Big|_{s=-3} = 1 \quad k_2 = [(s+2)^2 \cdot \frac{s+4}{(s+2)^2(s+3)}] \Big|_{s=-2} = 2$$

$$k_3 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 \cdot \frac{s+4}{(s+2)^2(s+3)}] \Big|_{s=-2} = \frac{-1}{(s+3)^2} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$\therefore x(t) = (e^{-3t} + 2te^{-2t} - e^{-2t})u(t)$$

$$3) X(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = 1 + \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+1)} + \frac{k_3}{(s+2)}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \delta(t) + \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t)$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

练习:

$$1) X(s) = \frac{2s+1}{s^2} e^{-2s}$$

$$1) X(s) = \frac{2s+1}{s^2} e^{-2s} = \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{2}{s} e^{-2s}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore (t-2)u(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} e^{-2s}$$

$$u(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{s} e^{-2s}$$

$$\therefore tu(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{2}{s} e^{-2s}$$

$$x(t) = tu(t-2)$$

$$2) X(s) = \frac{1}{1+e^{-s}}$$

$$X(s) = \frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-ns}$$

$$\therefore \delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\therefore \delta(t-n) \leftrightarrow 1 \cdot e^{-ns}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-ns}$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$$



4.2 单边拉普拉斯反变换

单边拉普拉斯反变换

- 部分分式展开法只能解决有理函数，而留数法不受有理函数的限制；
- 与部分分式展开法对比，留数法在数学上比部分分式展开法严密；
- 部分分式展开法涉及的基础知识比留数法简单；
- 部分分式展开法在工程上的应用更加广泛。



第四章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



4.3 LTI系统的复频域分析

一. 微分方程的复频域求解

微分方程描述系统的s域分析





4.3 LTI系统的复频域分析

一. 微分方程的复频域求解

线性时不变系统用 N 阶**常系数**微分方程描述:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

式中, 各系数均为实数, 系统的初始状态为 $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$ 。

令 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $y(t) \leftrightarrow Y(s)$, 根据拉氏变换的时域微分特性有

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-)$$

$$y^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) - \cdots - y^{(n-1)}(0^-)$$

$y(t)$ 与 $x(t)$ 之间关系的微分方程 $\Rightarrow Y(s)$ 与 $X(s)$ 之间关系的代数方程, 并且初始状态已自然地包含在其中, 可以直接求解系统的全响应。



4.3 LTI系统的复频域分析

一. 微分方程的复频域求解

1. 二阶系统响应的S域求解

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 x(t)$$

已知 $x(t)$, $y(0^-)$, $y'(0^-)$, 求 $y(t)$ 。

求解步骤:

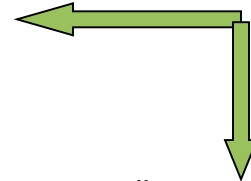
- (1) 经拉氏变换将域微分方程变换为s域代数方程;**
- (2) 求解s域代数方程, 求出 $Y_{zi}(s)$, $Y_{zs}(s)$;**
- (3) 拉氏反变换, 求出响应的时域表示式。**



4.3 LTI系统的复频域分析

$$\begin{array}{ccccc} y''(t) & & a_1 y'(t) & & a_2 y(t) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ [s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] & + & a_1 [sY(s) - y(0^-)] & + & a_2 Y(s) \end{array}$$

$$= b_0 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_2 X(s)$$



$$b_0 x''(t) + b_1 x'(t) + b_2 x(t)$$

$$Y(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + a_1 y(0^-)}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$Y_{zi}(s)$$

+

$$\frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} X(s)$$

$$Y_{zs}(s)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = L^{-1}\{Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)\}$$



4.3 LTI系统的复频域分析

例：已知线性时不变系统方程 $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 2x'(t) - 4x(t), t > 0$ ，求响应
输入信号 $x(t) = u(t)$ ，初始条件 $y(0^-) = 1$ ， $y'(0^-) = 5$ 。

解：对原微分方程两边取拉普拉斯变换

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5[sY(s) - y(0^-)] + 4Y(s) = 2sX(s) - 4X(s)$$

$$Y(s) = \frac{2s-4}{s^2+5s+4} X(s) + \frac{(s+5)y(0^-) + y'(0^-)}{s^2+5s+4} = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{2s-4}{s^2+5s+4} + \frac{s+10}{s^2+5s+4} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+4} + \frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+4}$$



$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = L^{-1}\{Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)\} = (2e^{-t} - e^{-4t} - 1)u(t) + (3e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$$



4.3 LTI系统的复频域分析

例：已知线性时不变系统方程 $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 2x'(t) - 4x(t), t > 0$, 求响应
输入信号 $x(t) = u(t)$, 初始条件 $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = 5$

解：

$$Y(s) = \frac{2s-4}{s^2+5s+4} X(s) + \frac{(s+5)y(0^-) + y'(0^-)}{s^2+5s+4}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+4}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{-1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+4}}_{\text{零状态响应}} = \underbrace{\frac{5}{s+1} + \frac{-3}{s+4}}_{\text{固有响应}} + \underbrace{\frac{-1}{s}}_{\text{强迫响应}}$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \underbrace{(3e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(2e^{-t} - e^{-4t} - 1)u(t)}_{\text{零状态响应}} = \underbrace{(5e^{-t} - 3e^{-4t})u(t)}_{\text{固有响应}} + \underbrace{-u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

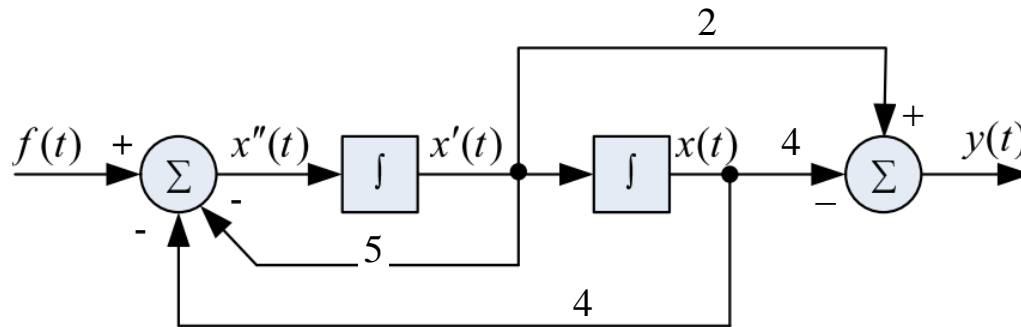
$Y(s)$ 的极点有两部分组成，一部分是特征根形成的极点，称为固有频率，构成系统的固有响应，另一部分是激励信号的象函数 $X(s)$ 形成的极点，构成强迫响应。



LTI系统的时域分析

三. 如图所示的LTI系统，(1)写出描述系统的微分方程；

(2) 当 $f(t) = u(t)$ 以及初始状态为 $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = 5$ ，利用经典法求解系统的零输入响应和零状态响应；



复习

解：1) 定义中间变量，写出微分方程

$$\begin{cases} \text{左端加法器: } x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = f(t) \\ \text{右端加法器: } y(t) = 2x'(t) - 4x(t) \end{cases}$$

系统微分方程为: $y''(t) + 5y''(t) + 4y(t) = 2f'(t) - 4f(t)$



LTI系统的时域分析 -

(2) 经典法求解零输入和零状态响应

解：零输入响应满足方程： $y_{zi}''(t) + 5y_{zi}'(t) + 4y_{zi}(t) = 0$

以及起始条件： $y_{zi}(0^+) = y_{zi}(0^-) = y(0^-) = 1,$
 $y_{zi}'(0^+) = y_{zi}'(0^-) = y'(0^-) = 5,$

复习

特征方程为： $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ 特征根： $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$

故零输入响应具有以下形式： $y_{zi}(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$

带入0+起始条件： $\begin{cases} A + B = 1 \\ -A - 4B = 5 \end{cases} \Rightarrow$ 解得 $A=3, B=-2$

零输入响应为： $y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 2e^{-4t}, t \geq 0$

解：零状态响应满足方程： $y_{zs}''(t) + 5y_{zs}'(t) + 4y_{zs}(t) = 2\delta(t) - 4u(t)$

以及初始条件： $y_{zs}(0^-) = y_{zs}'(0^-) = 0$

微分方程右端含有冲激函数，那么 $y_{zs}''(t)$ 包含冲激函数，而其它项均不含冲激函数项。因此对方程两端积分有：



LTI系统的时域分析

(2) 经典法求解零输入和零状态响应

$$\int_{0^-}^{0^+} y_{zs}''(t)dt + 5\int_{0^-}^{0^+} y_{zs}'(t)dt + 4\int_{0^-}^{0^+} y_{zs}(t)dt = 2\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt - 4\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt$$

因此，**0+**起始条件为： $y_{zs}'(0^+) = y_{zs}'(0^-) + 2\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 2$, $y_{zs}(0^+) = y_{zs}(0^-) = 0$

当**t>0**时，零状态响应满足： $y_{zs}''(t) + 5y_{zs}'(t) + 4y_{zs}(t) = -4$

齐次解为： $Ae^{-t} + Be^{-4t}$ 特解为： -1

$$y_{zs}(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t} - 1$$

带入**0+**起始条件： $\begin{cases} A + B - 1 = 0 \\ -A - 4B = 2 \end{cases} \Rightarrow$ 解得 $A=2, B=-1$

零状态响应为：

$$y_{zs}(t) = 2e^{-t} - e^{-4t} - 1, \quad t \geq 0$$



复习



4.3 LTI系统的复频域分析

例题： $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4f'(t) + 3f(t), t \geq 0$

$y(0^-) = -2, y'(0^-) = 3, f(t) = u(t)$, 求 $y_{zi}(t), y_{zs}(t)$

解： 对原微分方程两边取拉普拉斯变换

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = (4s + 3)F(s)$$

$$\therefore Y(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 3y(0^-)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} F(s)$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{-2s - 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{-1}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2} \Rightarrow y_{zi} = (-e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

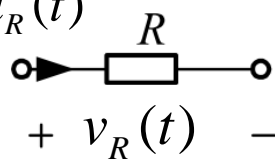
$$Y_{zs}(s) = \frac{4s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1.5}{s} + \frac{1}{s + 1} + \frac{-2.5}{s + 2} \Rightarrow y_{zs} = (1.5 + e^{-t} - 2.5e^{-2t})u(t)$$



4.3 LTI系统的复频域分析

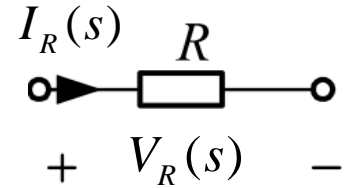
二. 电路系统的复频域求解

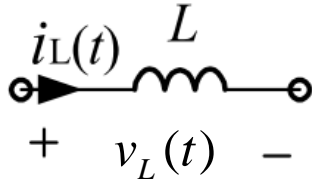
时域

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$


复频域

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

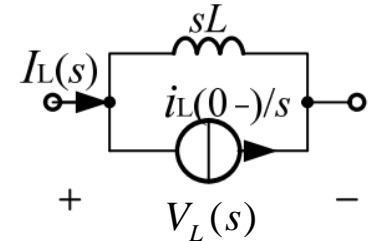
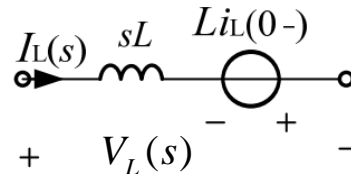


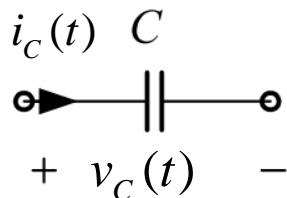
$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$


$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0^-)}{s}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^t v_L(x) dx + i_L(0^-)$$

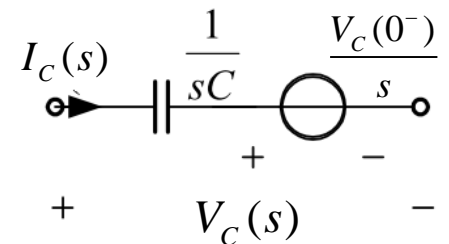
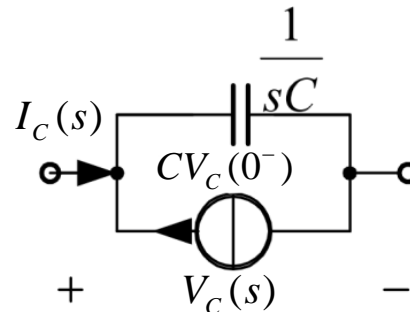


$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$


$$I_C(s) = sCV_C(s) - CV_C(0^-)$$

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{V_C(0^-)}{s}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(x) dx + v_C(0^-)$$





4.3 LTI系统的复频域分析

二. 电路系统的复频域求解

复频域中的KCL与KVL

节点: $\sum_k i_k(t) = 0 \xleftrightarrow{L} \sum_k I_k(S) = 0$

回路: $\sum_k u_k(t) = 0 \xleftrightarrow{L} \sum_k U_k(S) = 0$

时域中**电压与电流的微积分关系**转变为复频域中**象电压与象电流的代数关系**

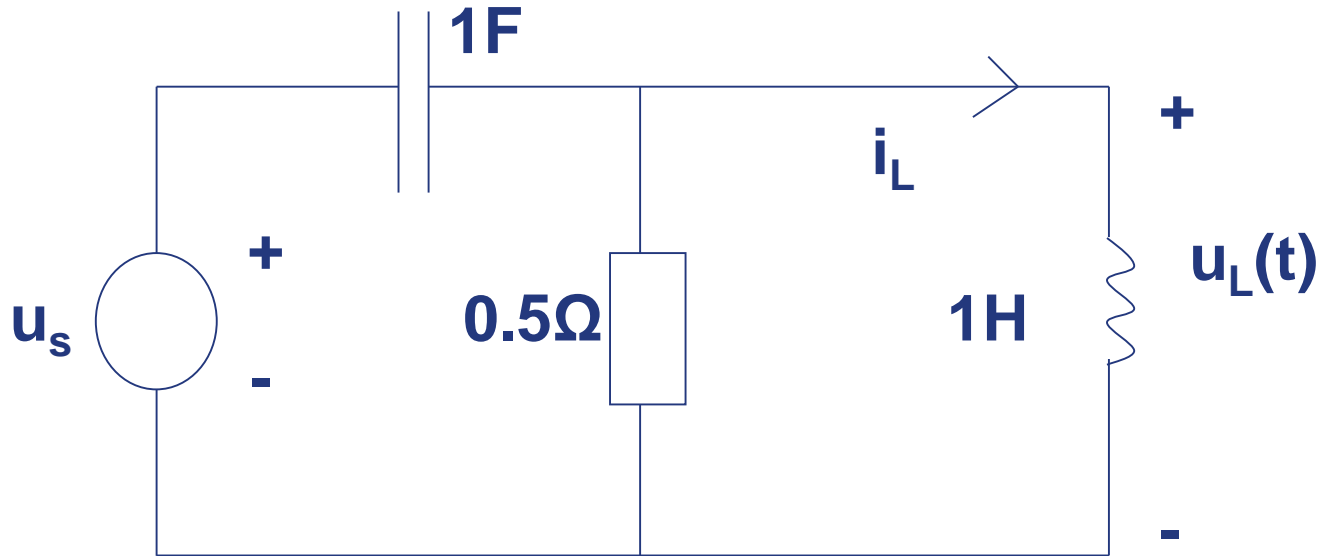
求解步骤:

- (1) 用s域模型代替电路中的元件;
- (2) 利用KCL和KVL的s域形式列出s域的电路方程;
- (3) 求解s域代数方程, 求出 $Y_{zi}(s)$, $Y_{zs}(s)$;
- (4) 拉氏反变换, 求出响应的时域表示式。



4.3 LTI系统的s域分析

例题：已知 $u_s(t)=u(t)$, $u_c(0_-)=1\text{V}$, $i_L(0_-)=2\text{A}$, 求 $t>0$ 时的电压 $u_L(t)$



依题： $u_s(t) = u_c(t) + u_L(t)$ (1)

$$i_c(t) = i_L + i_R = i_L + \frac{u_L(t)}{R} \quad (2)$$



4.3 LTI系统的复频域分析

依题: $u_s(t) = u_c(t) + u_L(t)$ (1) $i_c(t) = i_L + i_R = i_L + \frac{u_L(t)}{R}$ (2)

在(1)两边取拉氏变换得:

$$U_s(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{1}{s} u_c(0^-) + U_L(s)$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{1}{s} + U_L(s) \quad \text{因为: } u_s(t) = u(t)$$
$$\Rightarrow I_C(s) = -sU_L(s) \quad (3)$$

在(2)两边取拉氏变换得:

$$I_C(s) = \frac{U_L(s)}{Ls} + \frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{U_L(s)}{R} \quad (4)$$

$$\text{将(3)代入(4): } -sU_L(s) = I_C(s) = \frac{U_L(s)}{Ls} + \frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{U_L(s)}{R}$$

$$\therefore U_L(s) = \frac{i_L(0^-)}{s} \bigg/ \left(-s - \frac{1}{Ls} - \frac{1}{R} \right) = \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$u_L(t) = -2te^{-t}u(t)$$



第四章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



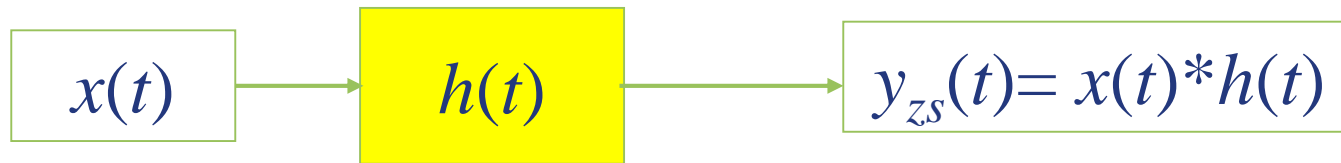
4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

1. 系统函数:

系统在零状态条件下，输出的拉氏变换式与输入的拉氏变换式之比，记为 $H(s)$ 。

$$H(s) = \frac{L[y_{zs}(t)]}{L[x(t)]} = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$$



$$H(s) = \frac{L[y_{zs}(t)]}{L[x(t)]} = \frac{L[x(t) * h(t)]}{L[x(t)]} = \frac{L[x(t)] \cdot L[h(t)]}{L[x(t)]} = L[h(t)]$$

$$H(s) = L[h(t)], \quad h(t) = L^{-1}[H(s)]$$



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

2. 系统函数表示

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

设初始状态为零，两边取拉氏变换：

$$\begin{aligned} a_n s^n Y_{zs}(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y_{zs}(s) + \cdots + a_1 s Y_{zs}(s) + a_0 Y_{zs}(s) \\ = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \cdots + b_1 s X(s) + b_0 X(s) \end{aligned}$$

$$Y_{zs}(s) \sum_{k=0}^n a_k s^k = X(s) \sum_{r=0}^m a_r s^r \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{r=0}^m b_r s^r}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$



4.3 LTI系统的复频域分析

例：某LTI系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s^2 + 5}{s^2 + 2s + 1}$

已知初始状态 $y(0_-) = 0$, $y'(0_-) = 2$, 激励 $f(t) = u(t)$, 求该系统全响应

解： $H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 5}{s^2 + 2s + 1} \Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y_{zs}(s) = (s^2 + 5)F(s)$

则微分方程为： $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f''(t) + 5f(t)$

方程两端取拉氏变换得到：

$$s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) + 2[sY(s) - y(0_-)] + Y(s) = (s^2 + 5)F(s)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 1} + \frac{s^2 + 5}{s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{s} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{4}{s+1}$$

$$y(t) = (5 - 4te^{-t} - 4e^{-t})u(t)$$



4.3 LTI系统的复频域分析

例：某LTI系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 4s + 3}$ ，零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的初始值

$y_{zi}(0) = 1$, $y'_{zi}(0) = -2$ ，欲使系统的全响应为0，求输入激励 $x(t)$

解：由系统函数可知，零输入响应具有如下的通解形式：

$$y_{zi}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

由初始条件可得： $a_1 = a_2 = 1/2$

由于 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ ，则有 $y_{zs}(t) = -\frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ 才能使全响应为零。

$$y_{zs}(t) = -\frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t) \Leftrightarrow \frac{-0.5}{s+1} + \frac{-0.5}{s+3} = \frac{-s-2}{s^2+4s+3}$$

$$X(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{H(s)} = -\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right) \rightarrow x(t) = -(1+2t)u(t)$$



4.3 LTI系统的复频域分析

课堂练习

练习1: 某LTI系统, 其初始状态一定。已知当 $f_1(t) = u(t)$, 全响应为 $y_1(t) = 3e^{-t}u(t)$, 当 $f_2(t) = \delta(t)$, 全响应为 $y_2(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$ 求: 1) 冲激响应; 2) 若 $f_3(t) = e^{-2t}u(t)$, 求全响应。

练习2: 假若某LTI系统对于的单位阶跃信号的 $y_{zs}(t)$ 为 $2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$, 试计算系统对于激励信号 $3e^{-t}u(t)$ 的 $y_{zs}(t)$ 。



4.3 LTI系统的复频域分析

练习1: 某LTI系统, 其初始状态一定。已知当 $x_1(t) = u(t)$, 全响应为 $y_1(t) = 3e^{-t}u(t)$,

当 $x_2(t) = \delta(t)$, 全响应为 $y_2(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$

求: 1) 冲激响应; 2) 若 $x_3(t) = e^{-2t}u(t)$, 求全响应。

$$(1) \quad Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) = Y_{zi}(s) + H(s)X(s)$$

$$x_1(t) = u(t) \quad \longrightarrow \quad Y_1(s) = Y_{zi}(s) + H(s)\frac{1}{s} = \frac{3}{s+1}$$

$$x_2(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad Y_2(s) = Y_{zi}(s) + H(s) = 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{2}{s+1}$$

因此冲激响应: $h(t) = L^{-1}[H(s)] = \delta(t) - e^{-t}u(t)$



$$(2): \quad Y_{zs3}(s) = H(s)X_3(s) = \frac{s}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

$$y_{zi}(t) = L^{-1}[Y_{zi}(s)] \\ = 2e^{-t}u(t)$$

$$y_{zs3}(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

$$y_3(t) = y_{zi}(t) + y_{zs3}(t) = (2e^{-2t} + e^{-t})u(t)$$



4.3 LTI系统的复频域分析

练习2: 假若某LTI系统对于的单位阶跃信号的 $y_{zs}(t)$ 为 $2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$, 试计算系统对于激励信号 $3e^{-t}u(t)$ 的 $y_{zs}(t)$ 。

解: $u(t) * h(t) = 2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$

$$\therefore h(t) = \frac{d}{dt}[2e^{-2t}u(t) + \delta(t)] = \delta'(t) + 2\delta(t) - 4e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore Y_{zs}(s) = L[h(t)] \cdot L[3e^{-t}u(t)] = \left(s + 2 - \frac{4}{s+2}\right) \frac{3}{s+1} = 3 - \frac{9}{s+1} + \frac{12}{s+2}$$

$$\therefore y_{zs}(t) = 3\delta(t) - [9e^{-t} - 12e^{-2t}]u(t)$$

$$y_{zs}(t) = 3e^{-t}u(t) * h(t) = 3e^{-t}u(t) * [\delta'(t) + 2\delta(t) - 4e^{-2t}u(t)]$$

卷积方法:

$$\begin{aligned} &= [3e^{-t}u(t)]' + 6e^{-t}u(t) - 12(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \\ &= 3\delta(t) - [9e^{-t} - 12e^{-2t}]u(t) \end{aligned}$$



4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

3. 系统零点和极点

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = K \frac{(s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

其中 K 为常数

极点： 分母多项式 $X(s) = 0$ 的根 $p_k, (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$

零点： 分子多项式 $Y_{zs}(s) = 0$ 的根 $r_k, (k = 1, 2, 3, \cdots, m)$

- 极点和零点可能为实数或者复数；
- 如果 $H(s)$ 表示一个实系统，则 $X(s), Y_{zs}(s)$ 中的系数都是实数，其复数零点或极点必成对出现；
- 如果不考虑常数 K ，为系统函数 $H(s)$ 由系统的零极点确定，因此零极点图可以表示一个系统，常用来分析系统特性。



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

3. 系统零点和极点

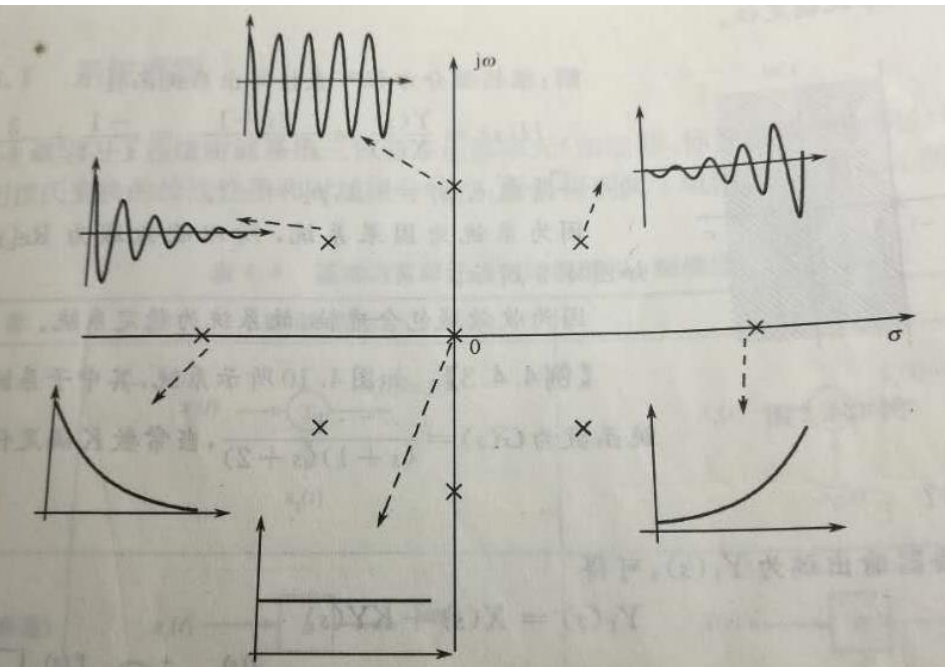


表 4-2 一阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s}, p_1 = 0 \text{ 在原点, } h(t) = L^{-1}[H(s)] = u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+a}, p_1 = -a$$

$a > 0$, 在左实轴上, $h(t) = e^{-at}u(t)$, 指数衰减

$a < 0$, 在右实轴上, $h(t) = e^{-at}u(t)$, $-a > 0$, 指数增加

$$H(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, p_1 = j\omega, \text{ 在虚轴上}$$

$h(t) = \sin\omega t u(t)$, 等幅振荡

$$H(s) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}, p_1 = -\alpha + j\omega, p_2 = -\alpha - j\omega, \text{ 共轭根}$$

当 $\alpha > 0$, 极点在左半平面, 衰减振荡

当 $\alpha < 0$, 极点在右半平面, 增幅振荡



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

1) 因果性

因果系统：响应不出现在激励之前的系统，

连续因果系统的充分必要条件是：

时域中： 单位冲激响应满足 $h(t) = 0, t < 0$ 。

s域中： 系统函数 $H(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0$ ，即其收敛域为收敛坐标 σ_0 以右的半平面，换言之， $H(s)$ 的极点都在收敛轴 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 的左边。



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

1) 因果性

必要性： 因果系统 $\longrightarrow h(t) = 0, \quad t < 0$

证明： 设系统的输入 $f(t) = \delta(t)$, 显然有 $t < 0, \quad f(t) = 0$

而此时的零状态响应为 $h(t)$

若系统是因果的, 则必然有 $h(t) = 0, \quad t < 0$ 。

充分性： $h(t) = 0, \quad t < 0 \longrightarrow$ 因果系统



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

证明：对于任意激励 $f(t)$ 系统的零状态响应用卷积来表示：

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau \xrightarrow{t < 0, f(t) = 0} y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau$$

若冲激响应满足 $h(t) = 0, t < 0$ ，我们可以得到：

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau, \quad t > 0$$

$$y_{zs}(t) = 0, \quad t < 0$$

充分性得证。

时域中： $h(t) = 0, t < 0。$

复频域中： $H(s) = L[h(t)], \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

2) 稳定性

稳定系统：指有界输入产生有界输出的系统。

BIBO: Bounded Input, Bounded Output

连续稳定系统充要条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < M, M \text{ 为有限正常数}$$

连续稳定系统：系统函数 $H(s)$ 的收敛域必定包含虚轴。

因果系统稳定条件：极点都位于左半开平面。



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

2) 稳定性

充分性： $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < M$, M 为有限正常数 \rightarrow 稳定系统

证明： 对于任意的有界输入 $f(t)$ ($|f(t)| \leq M_f$), 有:

$$\begin{aligned} |y_{zs}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |f(t-\tau)| d\tau \\ &\leq M_f \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = M_f M \end{aligned}$$

充分性得证。



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

2) 稳定性

必要性： 稳定系统 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < M$

反证法： 证明若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ 无界，则至少有某个有界输入将产生无界输出。

证明： 选择如下输入函数 $f(-t) = \begin{cases} -1 & \text{当 } h(t) < 0 \\ 0 & \text{当 } h(t) = 0 \\ 1 & \text{当 } h(t) > 0 \end{cases}$

于是有 $h(t)f(-t) = |h(t)|$

由于

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad y_{zs}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot f(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ 无界，则至少 $y_{zs}(0)$ 无界。 **必要性得证。**



4.3 LTI系统的复频域分析

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

2) 稳定性

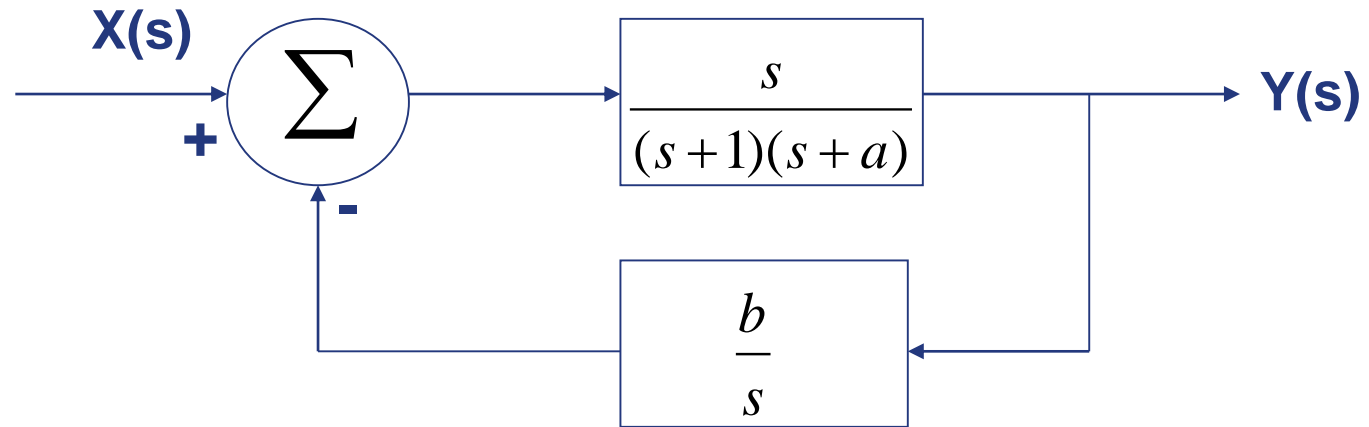
复频域系统函数满足条件。

- 1) $H(s)$ 的极点位于左半平面, $h(t)$ 绝对可积, 系统稳定
- 2) $H(s)$ 的极点位于右半平面或者虚轴上有二阶及以上极点,
 $h(t)$ 不满足绝对可积;
- 3) $H(s)$ 的极点位于虚轴上且阶次为一, $h(t)$ 处于不满足绝对可积的临界状态,
系统处于临界状态, 无规定, 认为属于不稳定范围



4.3 LTI系统的复频域分析

例题:



系统如上图:

1) 是确定**a**与**b**, 使得系统函数为: $\frac{s}{(s+2)(s+3)}$

2) 设**a=2**, 欲使系统有稳定的输出, 求**b**的值

解: 1)由系统图可知:

$$\left[X(s) - \frac{b}{s}Y(s)\right] \frac{s}{(s+1)(s+a)} = Y(s)$$

$$sX(s) - bY(s) = (s+1)(s+a)Y(s)$$

$$Y(s)[s^2 + (a+1)s + (a+b)] = sX(s)$$



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 + (a+1)s + (a+b)}$$

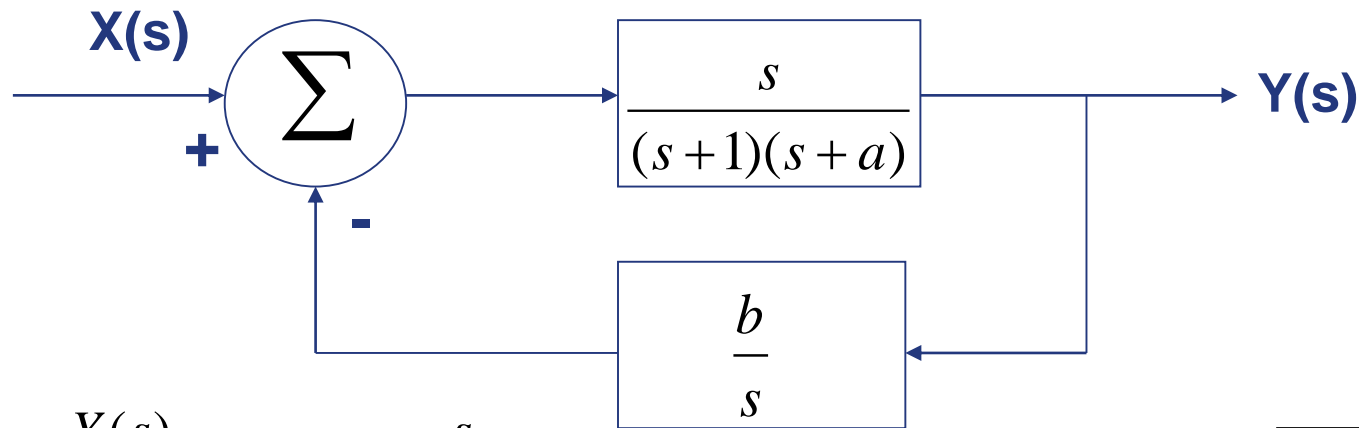
$$\frac{s}{(s+2)(s+3)}$$



因此: $a=4, b=2$



4.3 LTI系统的复频域分析



$$2) H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 + (a+1)s + (a+b)}$$

$$\text{极点: } p = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2+b)}}{2}$$

$$a = 2, H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + (2+b)}$$



$$= \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 4b}}{2}$$

$$b = -6, \quad p_1 = 1, p_2 = -4$$

$$b = -2, \quad p_1 = 0, p_2 = -3$$

$$b = 0, \quad p_1 = -1, p_2 = -2$$

$b > \frac{1}{2}$, 有共轭复根在左半平面

有一阶极点位于虚轴，
临界稳定

如果系统稳定，则有：

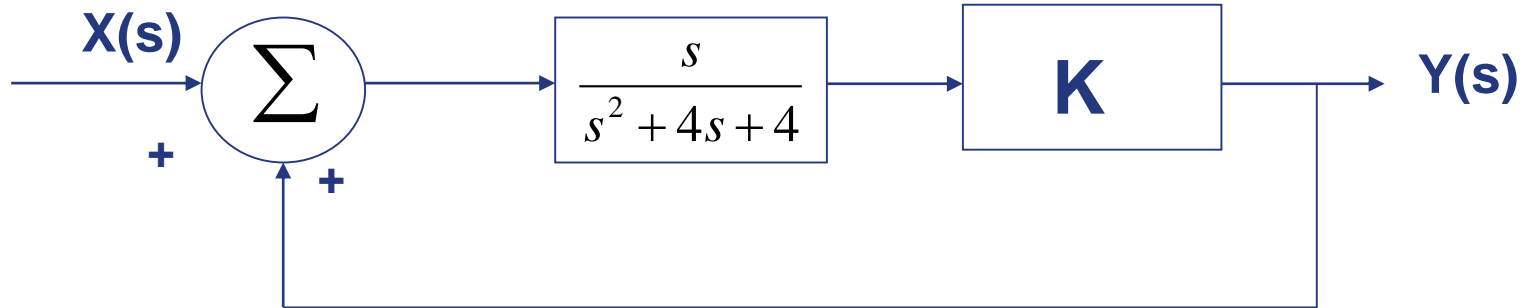
$$\frac{-3 + \sqrt{1 - 4b}}{2} < 0;$$

解得 $b > -2$

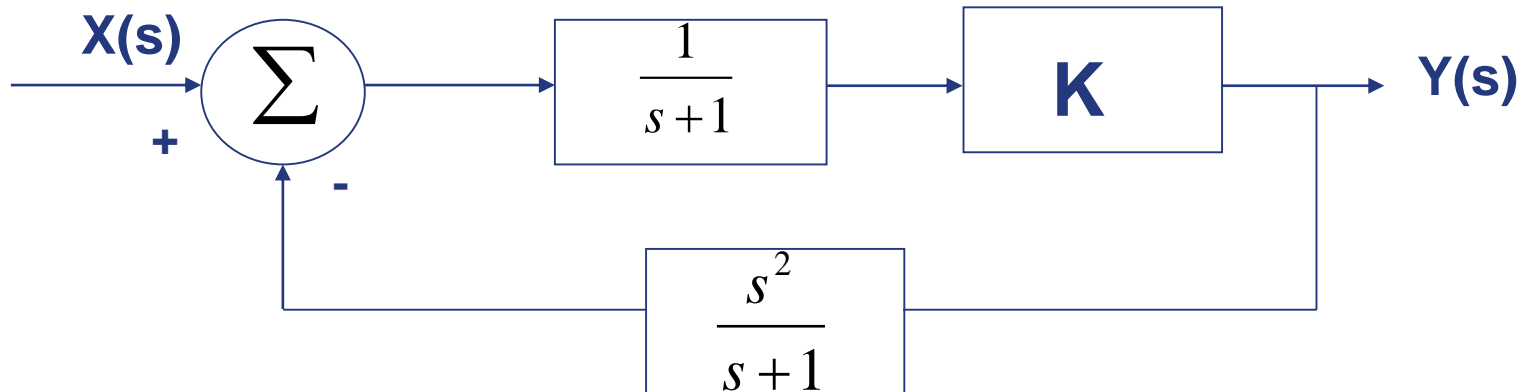


4.3 LTI系统的复频域分析

练习:



1) 写出系统函数 $H(s)$: 2) K 满足什么条件, 系统是稳定的

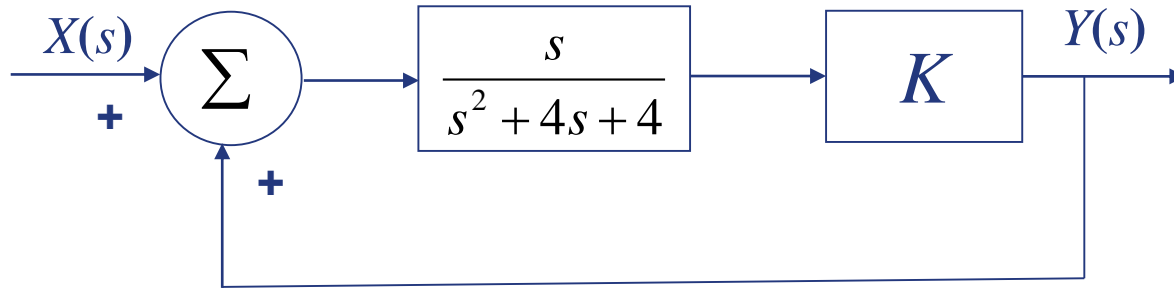


K 满足什么条件, 系统是稳定的



4.3 LTI系统的复频域分析

练习:



1) 写出系统函数 $H(s)$: 2) K 满足什么条件, 系统是稳定的

1)由系统图可知:

$$[X(s) + Y(s)] \frac{Ks}{s^2 + 4s + 4} = Y(s)$$

$$Ks[X(s) + Y(s)] = Y(s)(s^2 + 4s + 4)$$

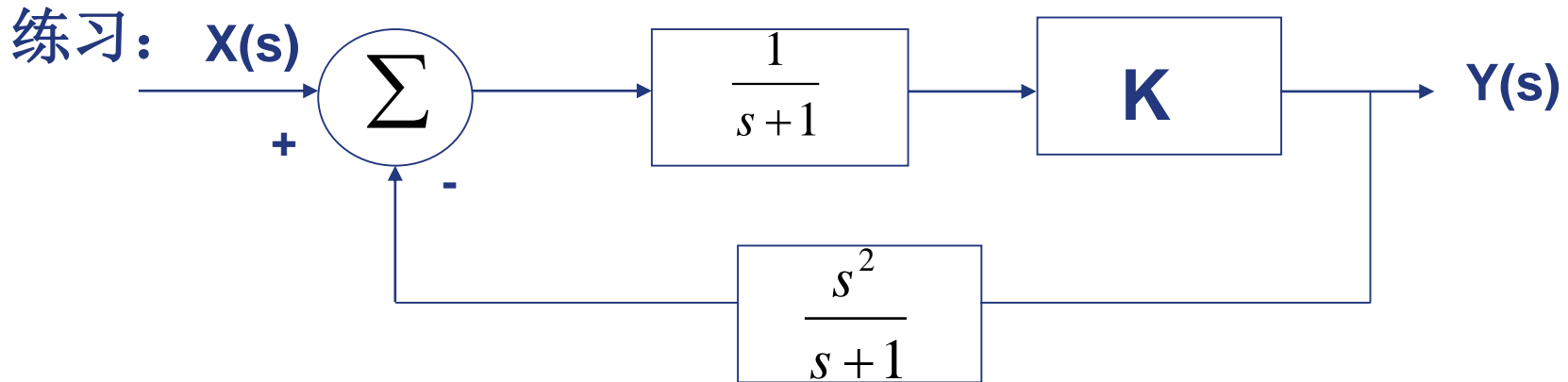
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks}{s^2 + (4 - K)s + 4}$$

$$2) \text{系统极点可以表示为 } p = \frac{-(4 - K) \pm \sqrt{(4 - K)^2 - 16}}{2}$$

当 $K \leq 4$, 系统函数的极点全部落在 s 平面左半平面, 系统稳定



4.3 LTI系统的复频域分析



K满足什么条件，系统是稳定的

由上图可知系统函数为：

$$\left[X(s) - \frac{s^2}{s+1}Y(s)\right] \frac{K}{s+1} = Y(s)$$

$$KX(s) - \frac{Ks^2}{s+1}Y(s) = (s+1)Y(s)$$

系统函数: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(s+1)}{(K+1)s^2 + 2s + 1}$ 系统极点为: $p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(K+1)}}{2(K+1)}$

$\therefore K > -1$ 时, $H(s)$ 极点都在s平面左平面, 系统稳定



第四章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



4.4 系统的图形表示

一. 系统框图

- 在所有的教材中，框图都是作为一个数学描述工具来介绍的；
- 实际上，框图是早期出现的模拟计算机的原型；
- 在电子技术尚未成熟的早期，模拟计算机的初期原型，是用机械系统来实现的；

机械式计算机

- 构成单元与电子计算机类似
- 输入单元，运算单元，输出单元(执行单元)等部分相互连接而成；
- 运算单元包括：加法器，标量乘法器，乘法器，积分器，微分其，正弦，执行器(系统输出)；
- 基本单元构成与电子计算机不同：齿轮，凸轮，连杆.....

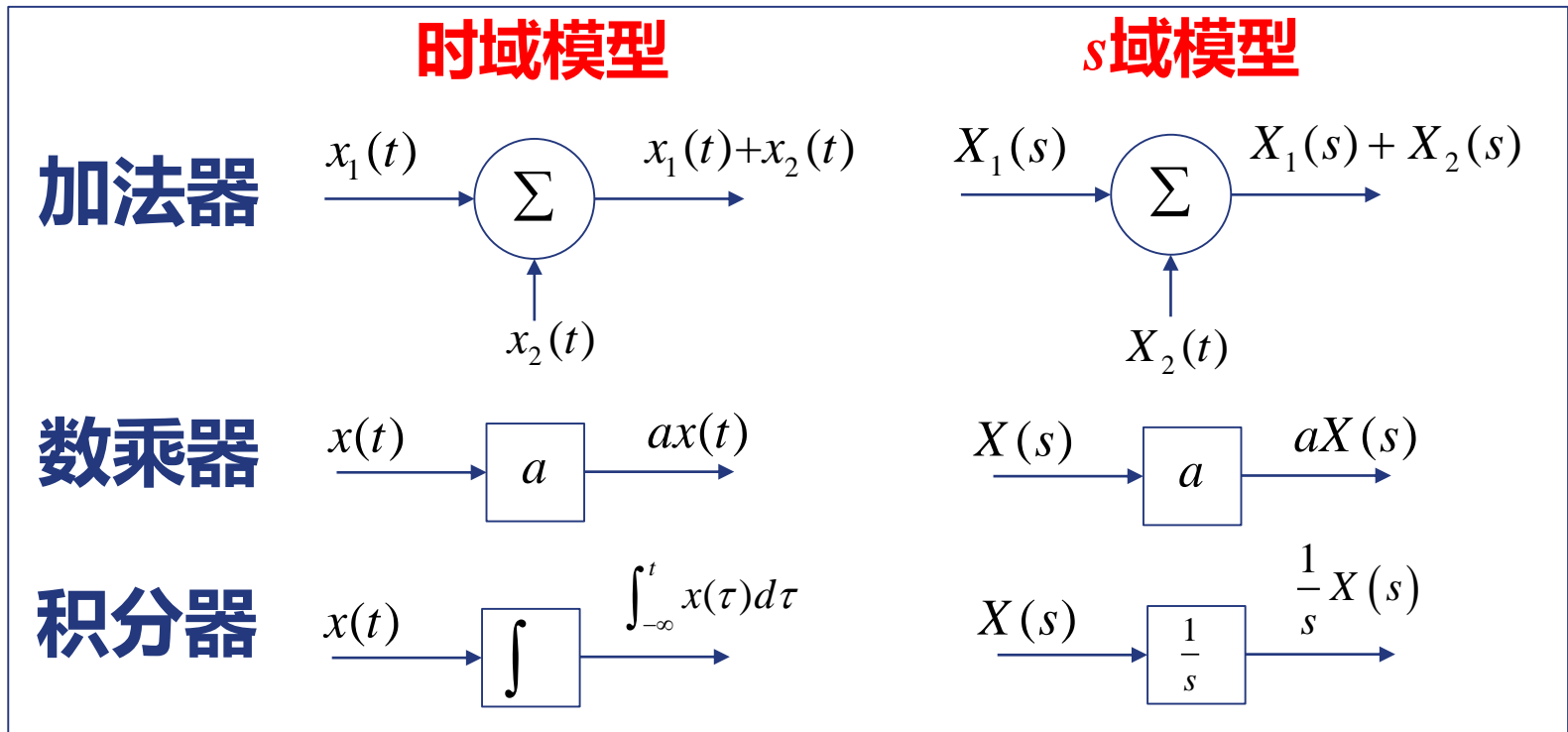
电子计算机

- 电子技术促进了模拟计算机的发展；
- 工程中，很多实际的电路可以实现理想的框图基本构成单元，加法器...
- 电单元连接起来就可以构成一个电子系统；



4.4 系统的图形表示

一. 系统框图



系统时域框图→微分方程→时域或复频域方法求解

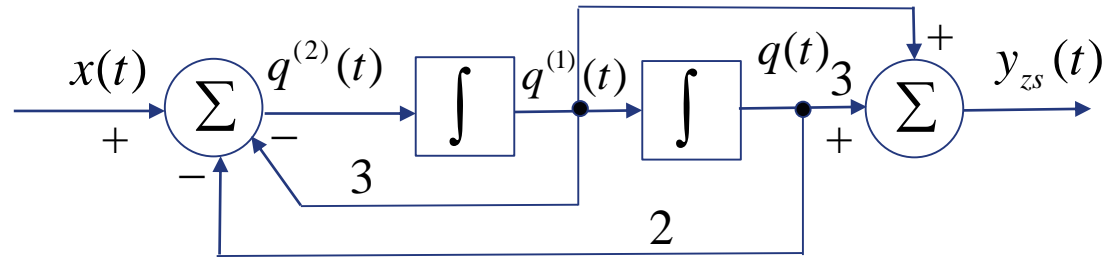
系统时域框图→系统 s 域框图→ s 域代数方程→逆变换，时域表达式



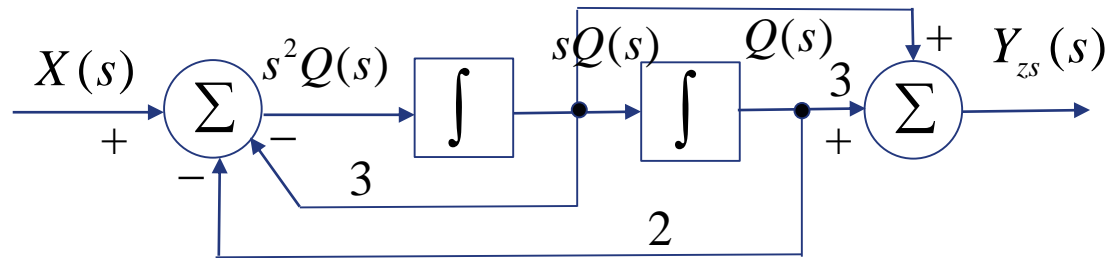
4.4 系统的图形表示

一. 系统框图

例：如图所示的LTI系统时域框图，已知输入 $x(t)=u(t)$ ，求冲激响应 $h(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。



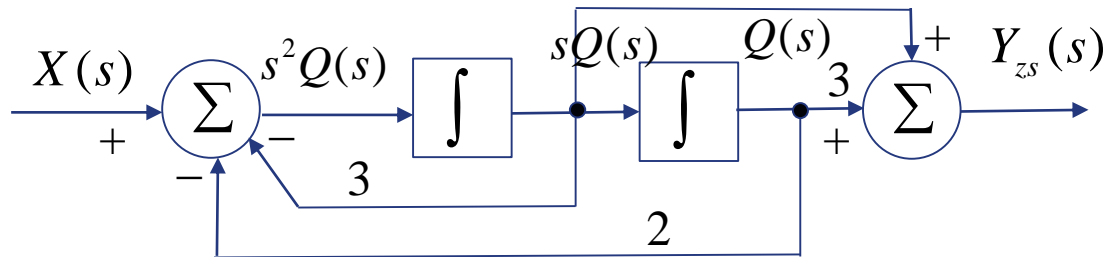
解：考虑到零状态响应，系统的 s 域框图如图所示：



$$\begin{cases} \text{左端加法器: } (s^2 + 3s + 2)Q(s) = X(s) \\ \text{右端加法器: } (s + 3)Q(s) = Y_{zs}(s) \end{cases}$$



4.4 系统的图形表示



$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} X(s)$$

系统函数为:

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

冲激响应为:

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$X(s) = L[x(t)] = \frac{1}{s}$$

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \frac{1}{s} = \frac{1.5}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{0.5}{s+2}$$

零状态响应为:

$$y_{zs}(t) = (1.5 - 2e^{-t} + 0.5e^{-2t})u(t)$$

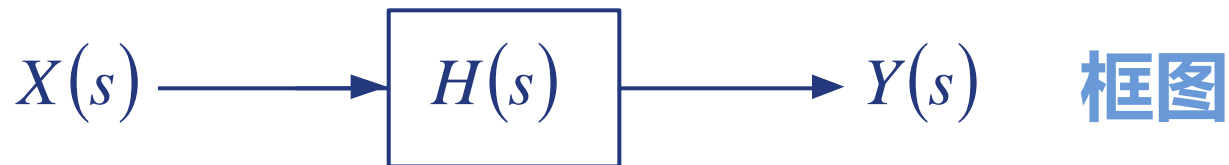


4.4 系统的图形表示

二. 信号流图

1. 信号流图概述

概述：信号流图是系统 s 域或 z 域框图的一种简化画法，与系统框图描述并无实质区别，信号流图是由若干节点和连接这些节点的有向支路组成的信号传递网络。



$X(s)$ 、 $Y(s)$ 称为**结点**

线段表示信号传输的路径，称为**支路**

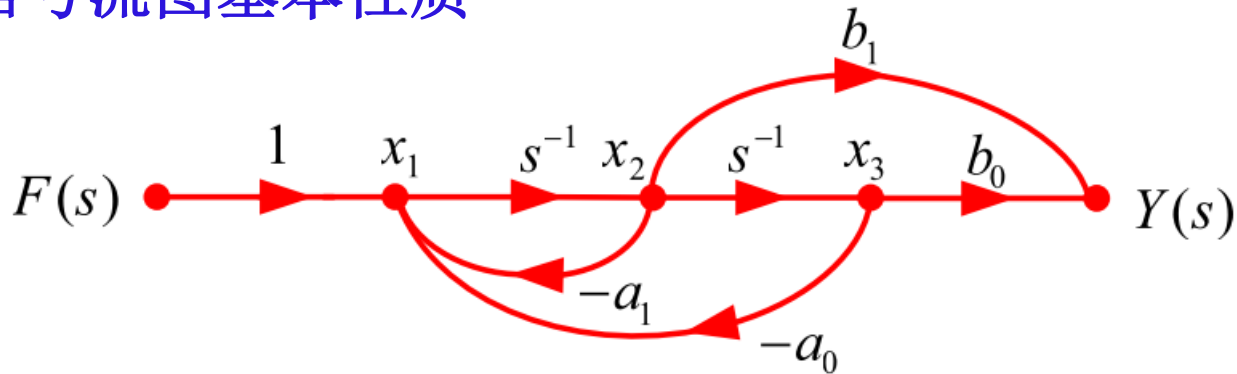
结点和支路是信号流图的基本组成部件。



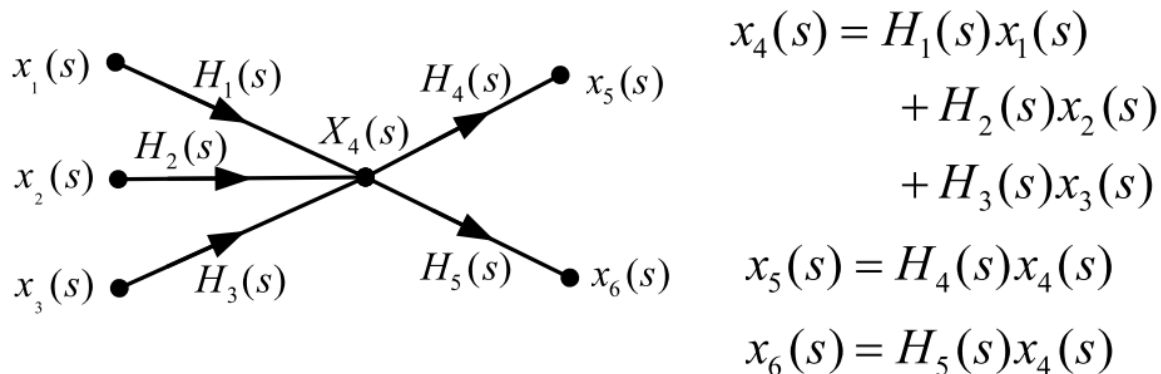
4.4 系统的图形表示

二. 信号流图

2. 信号流图基本性质



- ◆ 信号只能沿箭头指向传播，支路输出值=输入节点变量×支路增益；
- ◆ 当节点有多个输入时，节点将所有汇入支路信号相加，将和信号传送到与该节点相连的所有出支路。





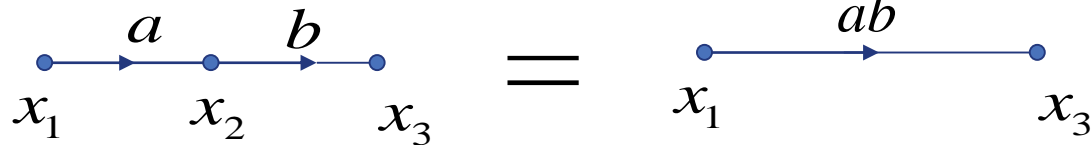
4.4 系统的图形表示

二. 信号流图

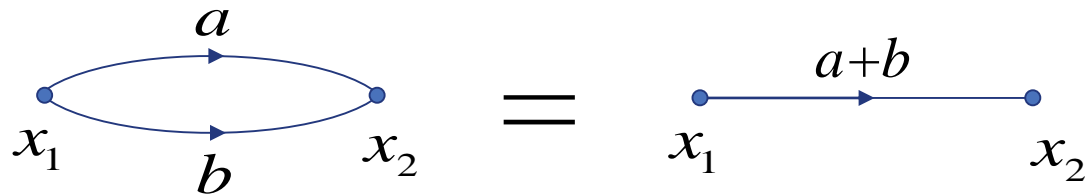
3. 信号流图化简基本规则

信号流图描述的是经过拉氏变换的**线性方程组**，可以按照代数规则化简使得复杂的信号流图简化为只有一个原点和一个汇点的信号流图，从而得到**系统函数**。

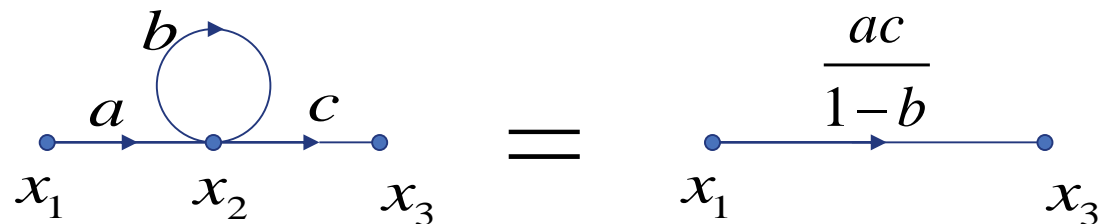
(1) 支路串联



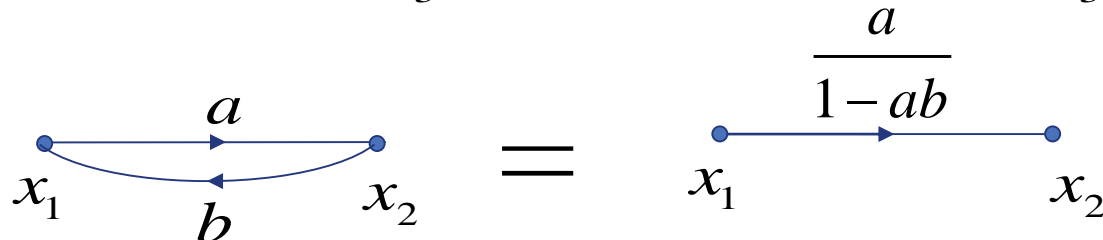
(2) 支路并联



(3) 自环



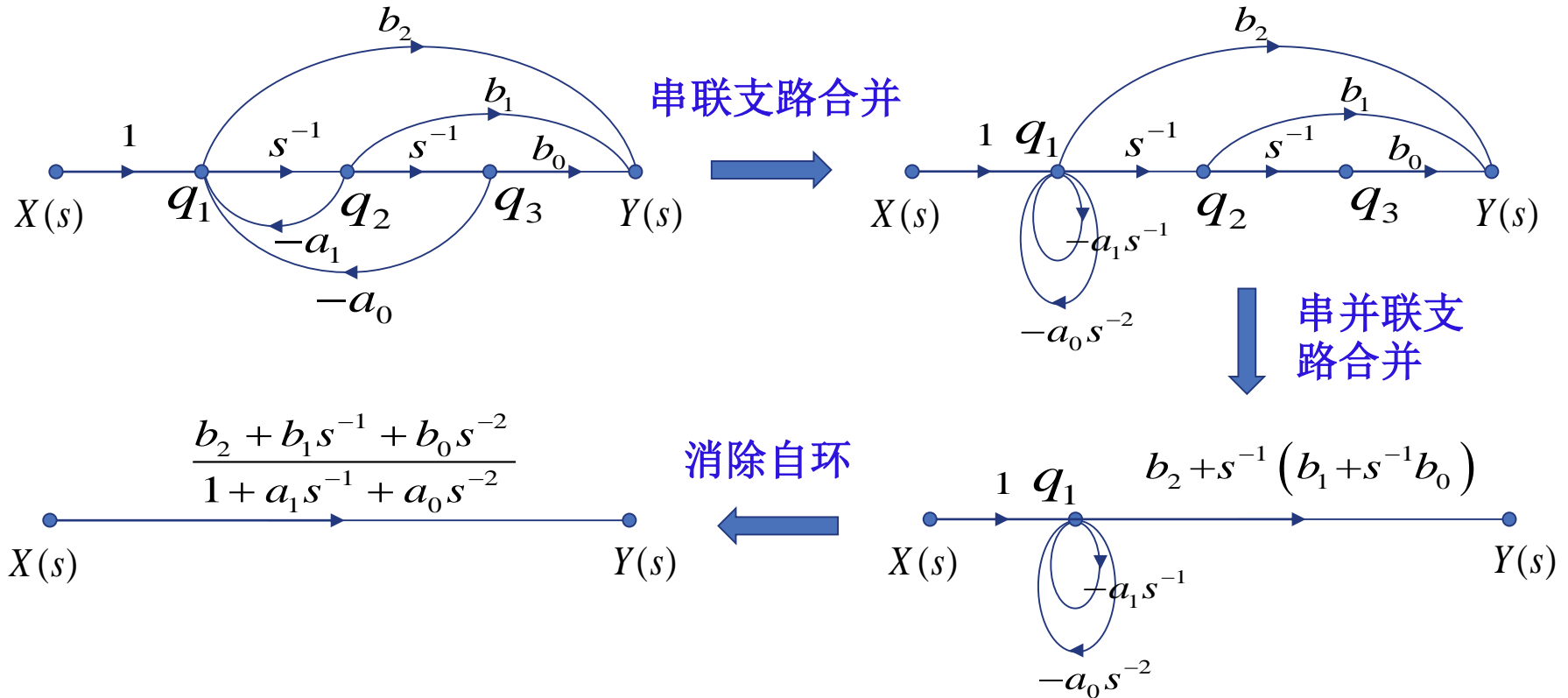
(4) 反馈支路





4.4 系统的图形表示

例：求如图所示信号流图的系统函数



对应分微分方程为：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 f''(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$



4.4 系统的图形表示

三.梅森公式

利用梅森公式可以根据信号流图很方便地得到输入输出间的系统函数。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_i p_i \Delta_i$$

Δ 称为信号流图的特征行列式
$$\Delta = 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \cdots$$

$\sum_j L_j$: 流图中所有回路增益之和;

$\sum_{m,n} L_m L_n$: 流图中所有两两互不接触回路的增益乘积之和;

$\sum_{p,q,r} L_p L_q L_r$: 流图中所有三个都互不接触回路的增益乘积之和;

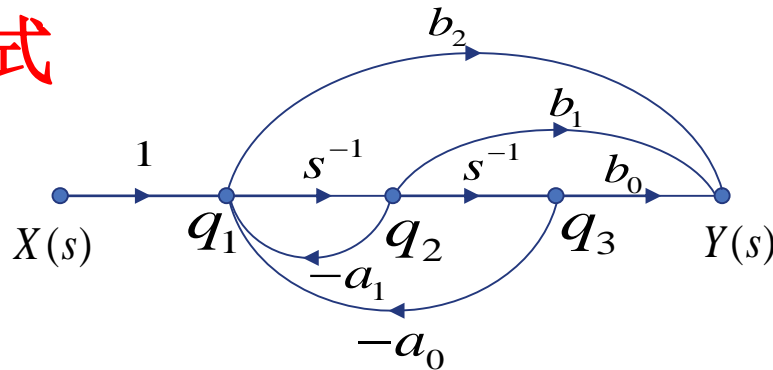
p_i : 由 $X(s)$ 到 $Y(s)$ 的第 i 条开路的总增益(传输函数)

Δ_i : 除去第 i 条开路, 剩余流图的流图行列式。



4.4 系统的图形表示

三.梅森公式



$$H(s) = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$$

$$\Delta = 1 - (-a_1 s^{-1} - a_0 s^{-2})$$

总共有**3**条通路

$$p_1 = b_2, \quad \Delta_1 = 1$$

$$p_2 = b_1 s^{-1}, \quad \Delta_2 = 1$$

$$p_3 = b_0 s^{-2}, \quad \Delta_3 = 1$$

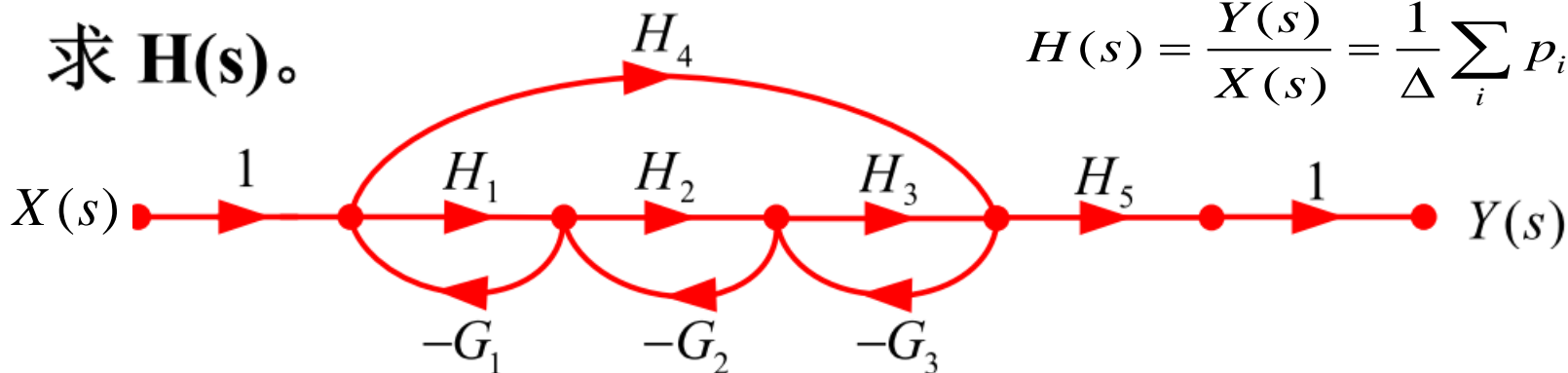
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_i p_i \Delta_i = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$



4.4 系统的图形表示

例 求 $H(s)$ 。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_i p_i \Delta_i$$



解:
$$\Delta = 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \dots$$

$$= 1 - (-H_1 G_1 - H_2 G_2 - H_3 G_3 - H_4 G_1 G_2 G_3) + H_1 G_1 H_3 G_3$$

$$p_1 = H_4 H_5, \quad \Delta_1 = 1 - (-H_2 G_2) \quad p_2 = H_1 H_2 H_3 H_5, \quad \Delta_2 = 1$$

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^2 p_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2}{\Delta}$$



4.4 系统的图形表示

四. 系统模拟

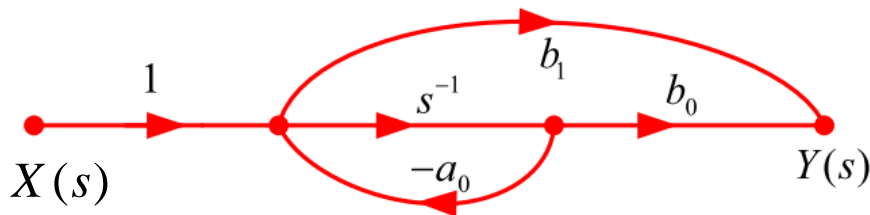
为了对信号进行某种处理，比如滤波，就必须构造出合适的实际结构（硬件实现结构），对于同样的系统函数往往有多种不同的实现方案。

1. 直接形式

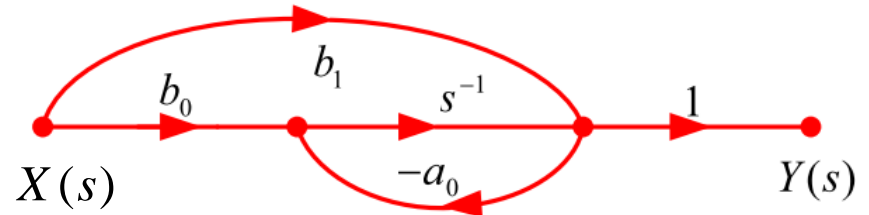
$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} \quad . \quad \text{画出系统的信号流图。}$$

解：
$$H(s) = \frac{b_1 + \frac{b_0}{s}}{1 + \frac{a_0}{s}} = \frac{b_1 + \frac{b_0}{s}}{1 - (-\frac{a_0}{s})}$$

由梅森公式：流图包含两条开路，一个环



形式一



形式二



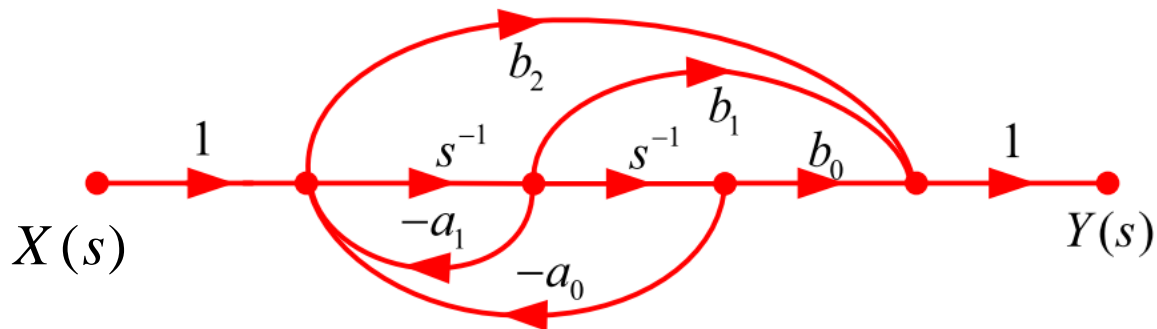
4.4 系统的图形表示

四.系统模拟

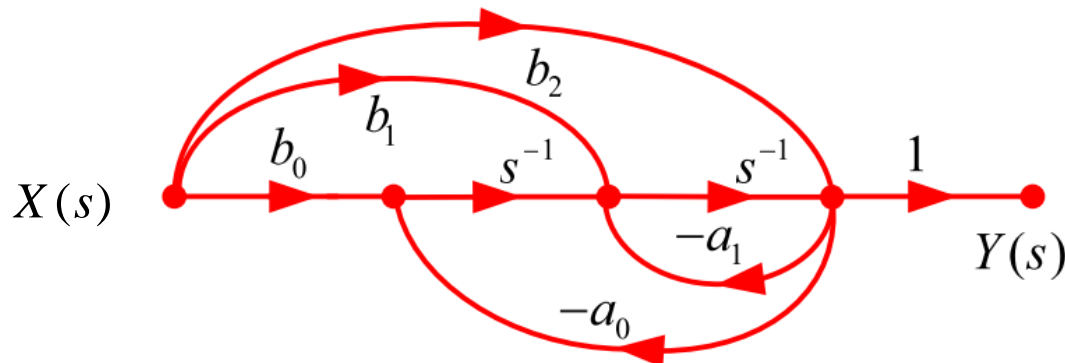
1. 直接形式

画出系统信号流图
$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$$

由梅森公式：流图包含三条开路，两个相接触环



形式一



形式二



4.4 系统的图形表示

四. 系统模拟

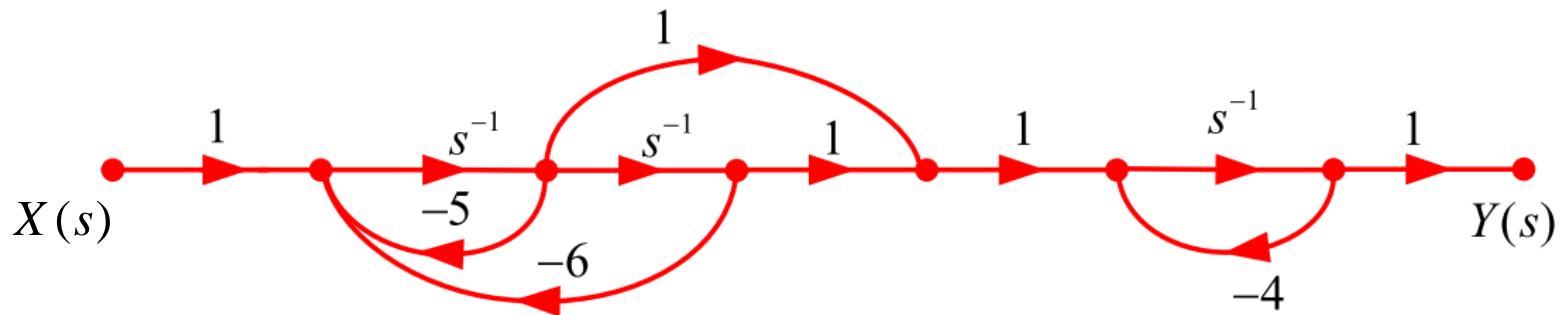
2. 级联形式 例: $H(s) = \frac{(s+1)}{(s^2+5s+6)(s+4)} = \frac{(s+1)}{(s^2+5s+6)} \cdot \frac{1}{(s+4)}$

$$= H_1(s) \cdot H_2(s)$$

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}}{1 - (-\frac{5}{s} - \frac{6}{s^2})}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s+4} = \frac{\frac{1}{s}}{1 - (-\frac{4}{s})}$$

由梅森公式：流图包含两条开路，两个相接触环





4.4 系统的图形表示

四. 系统模拟

3. 并联形式

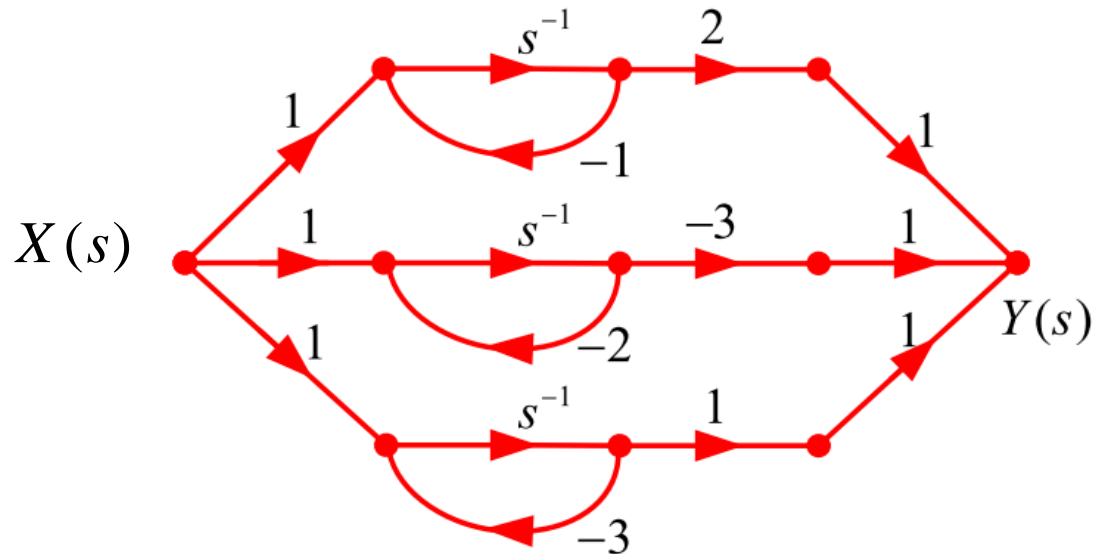
例:
$$H(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$
$$= H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$$

$$H_1(s) = \frac{2}{s+1} = \frac{\frac{2}{s}}{1 - (-\frac{1}{s})}$$

$$H_2(s) = \frac{-3}{s+2} = \frac{-\frac{3}{s}}{1 - (-\frac{2}{s})}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{\frac{1}{s}}{1 - (-\frac{3}{s})}$$

由梅森公式: 流图包含一条开路, 一环





第四章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

- ◆ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换
- ◆ 单边拉普拉斯变换的性质

4.2 单边拉普拉斯反变换

- ◆ 单边拉普拉斯反变换
- ◆ 部分分式展开法

4.3 LTI系统的复频域分析

- ◆ 微分方程的复频域求解
- ◆ 电路系统的复频域求解
- ◆ 系统函数分析

4.4 系统的图形表示方法

- ◆ 系统框图
- ◆ 信号流图
- ◆ 梅森公式
- ◆ 系统模拟



本章要点

1. 拉普拉斯变换的概念、收敛区域
2. 经典信号的单边拉普拉斯变换
3. 单边拉普拉斯变换的性质及应用
4. LTI系统的复频域分析
5. 系统分析 – 因果性和稳定性
6. 系统模拟-系统框图和信号流图



常用单边拉普拉斯变换

$$e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}, \operatorname{Re}(s) > -\alpha; \quad e^{\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha}, \operatorname{Re}(s) > \alpha;$$

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + j\omega_0}, \quad e^{j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0;$$

$$\cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0;$$

$$e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s + \sigma_0}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -\sigma_0$$

$$t \cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad t \sin \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n, \quad \operatorname{Re}(s) > -\infty \quad tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$te^{-\lambda t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s + \lambda)^2} \quad \operatorname{Re}(s) > -\lambda$$



拉普拉斯变换的性质

1. 线性特性 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$ 2. 展缩特性 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
3. 时移特性 $x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 \geq 0$, 4. 复频移特性 $x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0)$

5. 时域微积分特性

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-),$$

$$x^{(2)}(t) \leftrightarrow s^2 X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$$

...

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} x^{(m)}(0^-)$$

$$\left(\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right)^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} x^{(-1)}(0^-)$$

...

$$\left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right)^n \leftrightarrow \frac{1}{s^n} X(s) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} x^{(-m)}(0^-)$$

6. 复频域微积分特性

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}, \quad \frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(\eta) d\eta$$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(\eta)X_2(s-\eta) d\eta$$

7. 卷积定理

8. 初值定理和终值定理

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$x'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sX(s) - x(0^+)]$$

$$x''(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2 X(s) - sx(0^+) - x'(0^+)]$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \quad s=0 \text{ 在 } sF(s) \text{ 的收敛域内}$$



习题

4.1-3, 4.1.10

4.2-1, 4.3-1,

4.3.3, 4.5-1,



Thank You !