

## 第七讲

上次课:

- $\vec{F} = -\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{T}$       Maxwell 张量, 电磁(光)力
  - $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$       附加动量——带电运动粒子与磁场的相互作用
  - $\vec{S}_p = (\vec{E} \times \vec{H}), \quad u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$       电磁介质中的能流密度、能量密度
- 

### 第三章 静电学 I – 导体静电学

第一二两章给出了电磁场的基本规律及守恒定律。从本章开始, 我们将由简入深介绍这些电磁规律在不同的具体情况下的应用。第三、四两章将介绍最简单的情况 – 静电学。我们将分成两个部分来介绍静电学, 本章主要研究与导体相关的静电学, 而下一章主要关注与介质相关的静电问题。但是这种划分并不是严格的, 其实两类问题满足相同的方程, 只不过解决问题的方法和侧重点有所不同而已。

#### § 3.1 静电问题

##### 1. 静电基本方程

静电现象 (electrostatics) 研究的是电磁学中这样的一类问题:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量})=0 \quad \text{和} \quad \vec{j}=0$$

即所有物理量都不随时间改变 (指“静”), 且电荷静止不动 (指“电”)。把静电条件代入麦克斯韦方程中, 显然空间不会激发磁场 (即没有电流, 也没有变化电场), 故只有静电场, 满足

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

根据  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , 可以引入标势  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ , 进一步带入 (3.1.1) 中第一式, 有

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\vec{r}) \nabla \varphi(\vec{r})) = -\rho(\vec{r}) \quad (3.1.2)$$

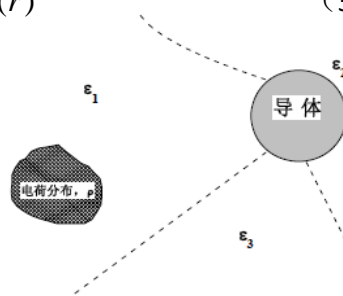
一个标准的静电问题如右下图所示。

在一块均匀介质的内部有  $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon$ ,

则上式转化成标准的 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) / \varepsilon \quad (3.1.3)$$

在不同物质交界面上场及势要满足相应的边界条件。本章主要研究不用求解



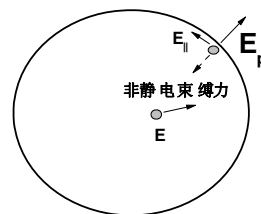
Poisson 方程的前提下，有关导体的静电状态我们到底能知道多少。要解微分方程，必须知道边界条件。下面我们将讲述导体与介质的交界面上的边界条件。

## 2. 静电条件下导体的边界条件

所谓导体即是能导电的介质，当它内部存在电场时就会引起传导电流。在导体中有关系式  $\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$ ，可见在静电学(即  $\vec{j} = 0$ )的前提下，**导体内的电场强度必须处处为零**，否则必定引起电流。根据  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = 0$  的关系知  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0$ ，**即导体内部不可能有电荷分布**。所以对导体来讲，**电荷只能分布在表面上**。进一步分析导体表面的电荷是如何分布的：若导体表面上切向电场不为 0，则表面电荷必然在电场的作用下在表面上运动，引起表面电流，这与静电条件不符。因此，**静电条件下导体表面的电场的切向分量为 0，亦即，导体表面的标势处处相等**。导体表面电场的**法向分量可以不为 0**，这与切向电场很不相同 --- 导体电荷在表面处受到非静电来源的束缚能-即“功函数”，自由电荷受到垂直电场的作用不会飞出导体。**根据 Gauss 定理，垂直电场与此处的表面电荷面密度成正比** ( $D_{\perp} = \sigma \Rightarrow E_{\perp} = \sigma / \epsilon$ )。总结下来，

与导体相关的电场行为满足

$$\begin{cases} \vec{E}_{in} = 0, \rho_{in} = 0 \\ \vec{E}_{\parallel}^{surface} = 0 \\ \vec{E}_{\perp}^{surface} = \sigma / \epsilon, \text{ both are unknowns!!!} \end{cases} \quad (3.1.4)$$



需要强调指出的是：导体表面上的电荷分布和表面垂直电场均是未知量！进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$\begin{cases} \varphi|_{\text{Boundary}} = \text{Constant}; \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{Boundary}} = -\frac{\sigma}{\epsilon}, \quad Q = -\epsilon \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件 (3.1.5) 下求解 (3.1.3)。这里可能有两类问题，

- (1) **等势问题** - 假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡， $\varphi = \text{const.}$  (注意：此时导体上的总电荷不能预先设定)
  - (2) **孤立导体问题** - 假设导体孤立，则  $Q$  已知，但此时  $\varphi$  不能预先设定。
- 某种意义上讲， $Q, \varphi$  是一对共轭量，不可能同时预先设定。

## § 3.2 格林互易定理

在讨论具体问题之前，先介绍一个一般的定理 - 格林互易定理，其在导体静电学中相当有用。它的表述如下：

**“当  $m$  个导体上的电荷为  $q_1, q_2, \dots, q_m$  时，它们的电势等于  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ ；当导体上的电荷为  $q'_1, q'_2, \dots, q'_m$  时，它们的电势等于  $\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_m$ ，那么有关系式**

$$\sum_{i=1}^m q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^m q'_i \phi_i \quad (3.2.1)$$

证明:

证明 Green 互易定理之前,我们先证明一个**数学恒等式**。取任意的一个闭合曲面  $S$ , 假设  $\Phi, \Psi$  是  $S$  包围的体积  $V$  内的 2 个连续可微的函数, 则由高斯定理可得

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) d\tau = \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\vec{S}$$

将  $\Phi, \Psi$  位置互换, 有

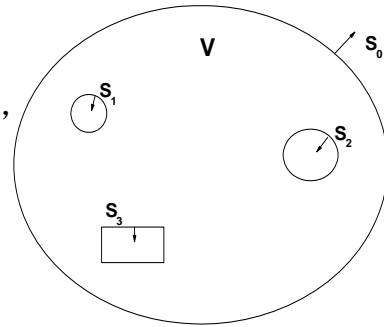
$$\int_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) d\tau = \oint_S \Psi \nabla \Phi \cdot d\vec{S}$$

两式相减, 我们就得到

$$\boxed{\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) d\tau = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S}} \quad (3.2.2)$$

此式即是格林定理, 它的重要性是 **将任意两个标量函数的空间的性质转化为边界处的行为**。下面我们进一步利用格林定理证明格林互易定理。

对包含  $m$  个导体的空间, 取无限远处为封闭曲面  $\vec{S}_0$ , 然后再在其中挖掉所有  $m$  个导体, 因此产生  $m$  个封闭曲面  $\vec{S}_i$ 。剩余的空间, 体积为  $V$ , 是一个多连通的闭合区域, 其边界由  $\vec{S}_0$  及  $\vec{S}_i$  共同确定, 记为  $S$ 。



考虑两个状态, 其中导体上分别带有电荷

$\{q_i\}$  和  $\{q'_i\}$ , 此时对应的电势分布分别为  $\varphi(\vec{r}), \varphi'(\vec{r})$ 。由于电荷都分布在导体表面上, 所以在体积  $V$  内  $\nabla^2 \varphi = 0, \nabla^2 \varphi' = 0$ 。我们现在令  $\psi = \varphi, \Phi = \varphi'$ , 代入 (3.2.2) 式, 则 (3.2.2) 左边=0。取  $\vec{S}_0$  在无限远处, 因 (3.2.2) 中右边项以  $r^{-3}$  在无穷远处趋向于 0, 则易知其对  $\vec{S}_0$  的积分=0。故有

$$\sum_{i=1}^m \oint_{S_i} (\varphi \nabla \varphi' - \varphi' \nabla \varphi) \cdot d\vec{S}_i = 0 = \sum_{i=1}^m \oint_{S_i} \left( \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \cdot dS_i \quad (3.2.3)$$

对每个导体表面的积分, 注意导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i = \epsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_i}, \quad \sigma'_i = \epsilon \left. \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right|_{S_i}$$

(这里取+号是因为  $\vec{S}_i$  的方向定义为垂直表面向导体内部), 以及导体表面是等势体

$$\phi_i = \varphi|_{S_i}, \quad \phi'_i = \varphi'|_{S_i}$$

将他们代入 (3.2.3) 式得

$$\sum_i \left[ \oint_{S_i} \phi_i \sigma'_i dS_i - \oint_{S_i} \phi'_i \sigma_i dS_i \right] = 0$$

积分可得格林互易定理:

$$\sum_{i=1}^m q'_i \phi_i = \sum_{i=1}^m q_i \phi'_i$$

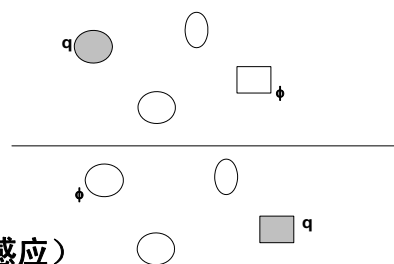
由格林互易定理, 我们可以马上得到一个重要的结果。令  $q'_1 = q'_3 = q'_4 = \dots = q'_n = 0$ ,  $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$ , 则有

$$q'_2 \phi_2 = q_1 \phi'_1$$

再令  $q_1 = q'_2$ , 则得

$$\phi'_1 = \phi_2.$$

这就是说, 带电  $q$  的导体 B 在不带电的导体 A 上 (感应) 产生的电势等于带电  $q$  的导体 A 在不带电的导体 B 上 (感应) 产生的电势。

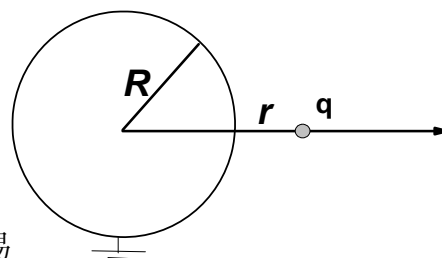


*注: 你可能 Argue 说这没什么啊, 比如一个点电荷产生的势为  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ , 只与观察点与*

*源的距离相关, 显然有上述互易性质。但注意上面的定理显示这种互易关系在任意导体形状下、任意的其他导体分布情况下均成立。这并不显然, 因为场会引发导体上的电荷的再分布 (即使总体不带电), 使得问题变得非常复杂。格林互易定理在处理导体相关问题上很有优势。格林互易定理从本质上讲述的是源-观察点之间的对称关系。*

例1, 在一个接地导体球 (半径为  $R$ ) 外距球心距离为  $r$  的地方放置一个带电量为  $q$  的点电荷, 求在导体球上的感应电荷。

解: 对这个由两个导体组成的导体系统, 对应电荷分布  $\{q, q_R\}$ , 电势分布为  $\{\phi_q, 0\}$ , 其中  $q_R$  为导体球上的感应电荷,  $\phi_q$  为点电荷所在地的电势, 均未知。现制备另外一个电荷分布  $\{0, q'_R\}$ , 则非常容易



求出空间的电场为  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$ , 故, 两个导体上的电势分别为  $\frac{q'_R}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r}, \frac{1}{R} \right\}$ , 因

此, 根据格林互易定理, 可得

$$q \frac{1}{r} + q_R \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow q_R = -\frac{R}{r} q$$

因此导体球上的感应电荷为  $-\frac{R}{r} q$ 。

*Tips: 有同学会被“导体球接地”这个条件所迷惑, 当设计第二个状态时仍然把导体球接地, 这样就无法改变球的电势状态从而达到利用格林定理的目的。“接地”只是把导体球的电势设为0而已, 并不意味着我需要一直连一根导线到地。*

### § 3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

#### 1. 利用静电标势来表示静电能量

静电场能量可以用电势  $\varphi$  来表述。假设一系列导体放置在介电常数为  $\epsilon$  的线性电介质背景中, 则体系的静电总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}) d\tau \quad (3.3.1)$$

利用  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , 上式可写成

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int (\nabla\varphi) \cdot \vec{D} d\tau = -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \vec{D}) d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \nabla \cdot \vec{D} d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \oint \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau \end{aligned}$$

其中用到了  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 。若我们考察的是体系的总能量, 则(3.3.1)式的体积分是对全空间进行的, 因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行。对电荷体系分布在有限区域内的情况,  $\varphi \vec{D}$  以  $r^{-3}$  形式在无穷远处趋向 0, 因此面积分的值为零。另一方面, 导体上的电荷分布全部集中在导体的表面, 而导体表面上的势为常数。因此, 能量的表达式变为

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i \quad (3.3.2)$$

其中  $\phi_i, Q_i$  为第  $i$  个导体的势和总电荷。

**注:**

(1) 上式虽然只与自由电荷相关, 却是包含了极化能的电磁总能量。从物理上讲, 静电总能可以被理解成建立这样一个导体体系, 外界做的总功。因此 (3.3.2) 也可这样推出: 假设电荷从处于无限远处一点点搬来的, 将这些电荷一点点搬来做的功的总和即是 (3.3.2)。试着推导一下, 并解释为什么有  $1/2$  因子?

(2) 从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式, 一种是  $W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau$ , 这表示

静电能量是以密度  $u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$  的形式在介质空间连续分布, 场强的地方能量也大。

另一种表达式是  $W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau$ , 它表示能量只与存在着电荷分布的空间有关。以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效, 而当讨论空间某一有限范围内的

电磁能量时两者不再等效，因为面积分在有限范围内的值一般不会为零，我们只能应用第一种表达式。第二种表达式并不意味着 $\frac{1}{2}\phi\rho$ 是电场的能量密度-没有电荷就没有能量的看法是错误的！

## 2. 电容

一个有多个导体组成的体系，每个导体都是等势体，其电势为 $\{\phi_i\}$ ，同时每个导体上带有不同的电量 $\{Q_i\}$ 。这个导体体系的状态既可以用 $\{\phi_i\}$ 来刻画，也可以用 $\{Q_i\}$ 来刻画。那么， $\{\phi_i\}$ 与 $\{Q_i\}$ 之间是什么关系呢？

利用线性叠加原理可以证明：任意一个导体上的电势 $\phi_i$ 是各个导体上的电量的线性函数。用数学表述为： $\{\phi_i\}$ 一定可以表示为 $\{Q_i\}$ 的线性函数

$$\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j \quad (3.3.3)$$

式中的比例系数 $C_{ij}^{-1}$ 与导体的形状和相对位置有关，其量纲是长度量纲的负一次方。反之亦然：

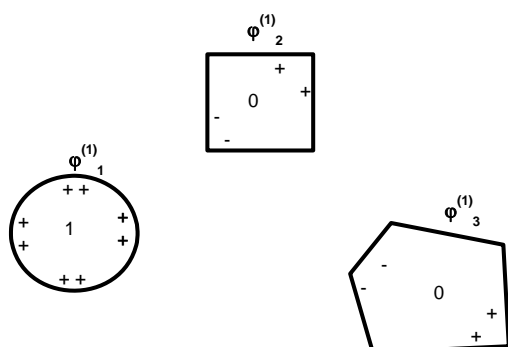
$$Q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j \quad (3.3.4)$$

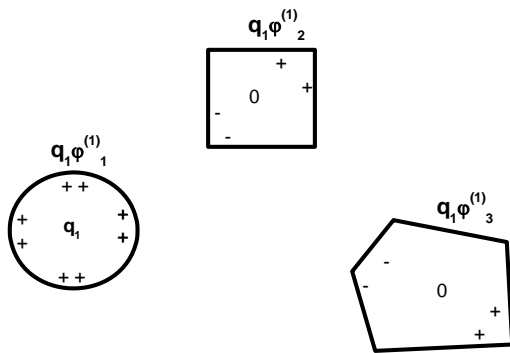
这里的 $C_{ij}$ 是 $C_{ij}^{-1}$ 的逆阵元素。

证明上式并不容易，因为所有的带电体均可呈现任意形状，任何一个带电体上的电荷增减都会影响到其它带电体上的电荷分布，从而影响到整个体系的电势分布！但仔细考虑静电平衡和线性叠加原理发现问题可以得到证明。

分3步考虑

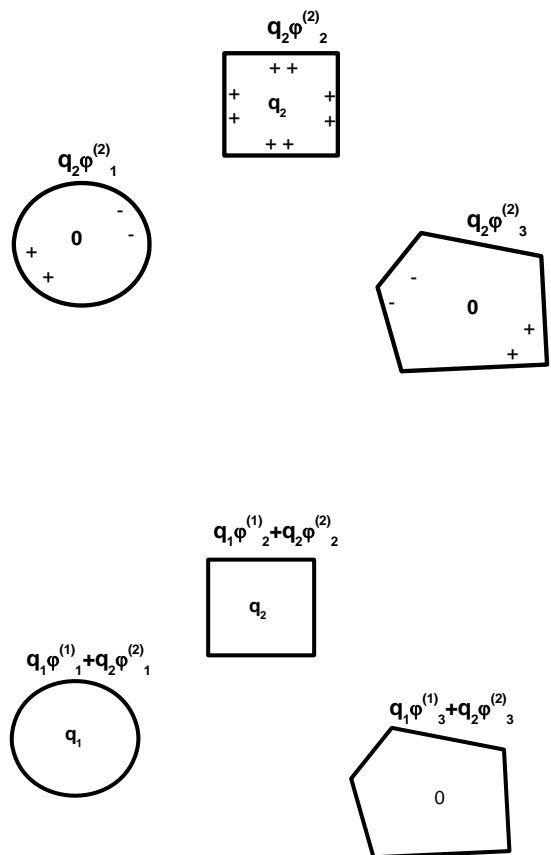
(1) 如左下图所示，只第1个导体上放置单位电量的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为 $\{1, \dots, 0, \dots\}$ 。当此体系达到静电平衡时，对应的电势分布为 $\{\phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \dots, \phi_j^{(1)}, \dots\}$ ，同时记下所有导体上的面电荷分布 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots\}$ ，注意此时其它导体上虽不带净电荷，电荷分布却未必为0！





(2) 当第 1 个导体上的电荷线性增加  $q_1$  倍时 (如右上图), 即分布为  $\{q_1, 0, \dots, \dots\}$  时, 达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为  $\{q_1\sigma_1, \dots, q_1\sigma_j, \dots\}$ , 根据线性叠加原理, 对应的电势分布一定为  $\{q_1\phi_1^{(1)}, q_1\phi_2^{(1)}, \dots, q_1\phi_j^{(1)}, \dots\}$ 。

(3) 换第二个带电体, 在其上充电  $q_2$  (其它带电体上不充电), 则得到电势分布  $\{q_2\phi_1^{(2)}, q_2\phi_2^{(2)}, \dots, q_2\phi_j^{(2)}, \dots\}$ , 如左上图所示。将这个状态与 (2) 中的状态线性叠加, 得到的电荷分布状态一定也是静电平衡态, 其对应电荷分布为  $\{q_1, q_2, \dots, \dots\}$  的状态。将这样的过程循环往复, 我们发现对应于  $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots\}$  的状态, 第  $i$  个导体上的电势为  $\phi_i = \sum_j q_j \phi_i^{(j)}$ , 对比



(3.3.3) 发现问题得证, 而  $C^{-1}_{ij} = \phi_i^{(j)}$ , 物理意义为: 只在第  $j$  个带电体上充单位电量时在第  $i$  的带电体上诱导的电势。

将导体体系能量的用电势或电荷表示:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \phi_i \phi_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} C^{-1}_{ij} Q_i Q_j \quad (3.3.7)$$

为了看清  $C_{ij}$  的物理含义, 设只有一个导体, 则

$$Q_1 = C_{11} \phi_1$$

注意到对一个半径为  $R$  的金属球,  $Q = 4\pi\epsilon_0 R \phi$ 。显然, 这里的  $C_{11} = 4\pi\epsilon_0 R$  是导体的电容, 几何的意义就是电荷之间的“有效距离”, 物理上具有长度量纲 (除去不重要的常数  $\epsilon_0$ )。这个距离越大, 当然体系就可以“装下”更多的电荷, 因



此电容也就越大.

\*\*\*\*\*

这里电容完全是个经典的概念。在量子力学世界中，电荷不再是经典的粒子，而是由一个几率函数描述的物质波。这里有许多有趣的新问题值得研究

1) 此时电容如何定义？如何计算？（加拿大 McGill 大学的郭鸿教授做了许多这方面的研究）；

2) 电容能的本质是“库仑相互作用”，对一个量子点，其静电能可写成  $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 。设量子点内部只有一个电子填充时的能级为  $E_n$ ；当量子点中已有一个电子填充的时候，此时在向里面填充一个电子就要付出  $\frac{1}{2C}$  的能量，因此此时电子的能级为  $E_n + \frac{1}{2C}$ 。

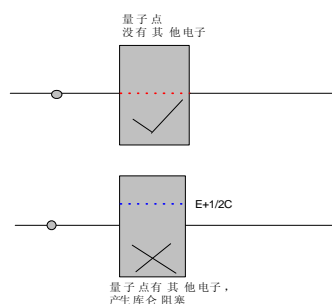
考虑如图所示的隧穿机制，设外部环境中的电子能级与  $E_n$  匹配的时候，电子可以通过跃迁到量子点中的此能级而穿过量子点；然而当量子点中已有一个电子存在的时候，能级发生了改变，电子不能进行共振隧穿。这种现象叫做

“库仑阻塞”——由于库仑力阻塞了电子的运动

外部环境中的电子能级与  $E_n$  匹配

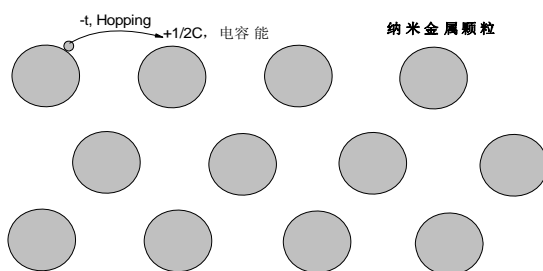
的时候，电子可以通过跃迁到量子点中的此能级而穿过量子点；然而当量子点中已有一个电子存在的时候，能级发生了改变，电子不能进行共振隧穿。这种现象叫做

“库仑阻塞”——由于库仑力阻塞了电子的运动



3) “Mott 相变”等问题的研究根据量子的能带理论，当能带没有被填满时，固体中的电子可以自由流动从而固体表现为金属。然而在 50-60 年代，英国物理学家 Mott 指出对半填充的固体存在一种新的绝缘体-金属相变机制。固体中的电子在两个原子之间跃迁时，能量上可以降低  $t$  (hopping 常数)。然而当能带半满时，每个原子上已经存在一个电子，此时当电子从一个原子跳到另一个原子上时，会和那上面的电子有静电相互作用，使得能量上升。这两个因素 ( $t$  以及静电相互作用能  $U$ ) 互相制约。当原子之间远离时， $t$  很小因此电子不喜欢跳跃，此时体系表现为绝缘体。当给晶格施加压力使得原子之间的间距变短提高  $t$  的时候，有可能使得  $t$  大到可以克服  $U$  将绝缘体

变成一个导体。然而自然的 Mott 相变得例子极少。随着科技的发展，人们可以人工合成一些由纳米金属颗粒排成的人工晶格，利用这种体系来研究 Mott 相变。此时作为最低级近似，对体系的静电能部分的描述就是经典的电容能  $U = Q^2 / 2C$ 。定量描述这个问题就需要知道体系的电容系数。



---

[例 2] 《电磁学》中，两个带  $\pm Q$  电荷的导体的互电容定义为  $C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1}$ 。在《电



动力学》中，我们更多地会使用电容系数，试用电容系数表示互电容。

解：这个两导体的体系当电荷分布为 $\{Q_1 = -Q, Q_2 = +Q\}$ 时，电势分布为 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ 。

根据电容系数的定义，

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= C_{11}^{-1}Q_1 + C_{12}^{-1}Q_2 = C_{11}^{-1}(-Q) + C_{12}^{-1}(+Q) \\ \varphi_2 &= C_{22}^{-1}Q_2 + C_{21}^{-1}Q_1 = C_{22}^{-1}(+Q) + C_{21}^{-1}(-Q)\end{aligned}$$

因此

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Q \left[ C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1} \right]$$

与互电容的定义 $\varphi_2 - \varphi_1 = C^{-1}Q$ 比较可知

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}$$

习题

**P. 84, 3.3, 3.4, 3.6**

### 数值计算 Project

假设半径为  $R$  的金属球排成一个晶格常数为  $a$  的 2 维三角晶格，计算中心一个金属球对其它金属球的电容系数。你可以利用 COMSOL 计算不同的 $\{Q_i\}$ 对应的 $\{\phi_i\}$ ，或者相反，这样就可以得到电容系数。

## 第八讲

上次课:

- 导体静电边界条件:  $\varphi|_{\text{Surface}} = \text{const.}; \quad E_{\perp} = \sigma / \epsilon_0, \leftrightarrow -\epsilon \oint dS \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\text{Surface}} = Q$
- Green 及 Green 互易定理:  $\sum_{i=1}^m q_i' \phi_i = \sum_{i=1}^m q_i \phi_i'$
- 静电导体系的电场总能:  $W = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i$ ; 电容系数:  $Q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j$

### 3. 固有能和相互作用能

设有两个带电体 1 和 2, 他们各自独立存在时在空间激发的电场分别为  $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$ 。  
将它们放在一起, 当如下条件之一存在时

- (1) 两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时,
- (2) 一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸,

**两个带电体上的电荷分布不因两个它们之间的相对构型的改变而产生显著变化。** 则空间总的电场可近似写为  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。因此, 体系的总能量

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int \vec{E}^2 d\tau = \underbrace{\frac{\epsilon}{2} \int E_1^2 d\tau + \frac{\epsilon}{2} \int E_2^2 d\tau}_{W_1 + W_2} + \underbrace{\epsilon \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau}_{W_{\text{int}}} \quad (3.3.9)$$

由上式可以看出, 系统的总能量由两部分组成。

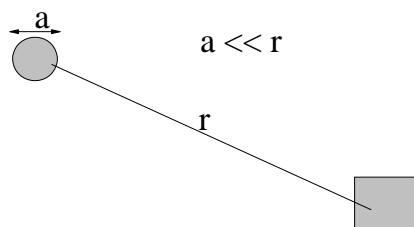
在这个条件下, 上式右方第一和第二项表示

1 或 2 带电体单独存在时的能量  $W_1$  和  $W_2$ , 称

为**固有能**; 上式右方的第三项表示两

个体系合起来之后与原来单独存在时的

能量差, 称为**相互作用能**, 可写成



$$W_{\text{int}} = \epsilon \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau = \epsilon \int \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 d\tau$$

其中  $\varphi_1, \varphi_2$  为两个带电体**单独存在时**的空间的电势分布, 分别满足

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\rho_1 / \epsilon, \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\rho_2 / \epsilon$$

其中  $\rho_1, \rho_2$  为两个带电体的电荷分布。可以利用分部积分将上式进一步简化：

$$W_{\text{int}} = \varepsilon \int \nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \varphi_2) d\tau - \varepsilon \int \varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 d\tau = \int \varphi_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}) d\tau$$

在许多情况下带电体的自身的尺寸远小于它们之间的间距， $\varphi_1$  在带电体 2 的所处的区间内近似为一常数，则

$$W_{12} \approx \varphi_1 \int_V \rho_2 d\tau = \varphi_1 q_2 \quad (3.3.10)$$

此即是相互作用能的表达式。显然 (3.3.10) 可以应用于小的电荷体系（如点电荷）在大的电荷体系产生的电场中（满足条件 (2)），以及点电荷之间的相互作用能（满足条件 (1)）。

### 点电荷在外电场中

对一个点电荷  $q$  放置于外电场中，设点电荷所在的位置处外电场的电势为  $\varphi_{\text{ext}}(\vec{r})$ ，则这个体系的相互作用能为

$$W_{\text{int}} = q\varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (3.3.11)$$

**注意：这个相互作用能是点电荷和外场共有的，不是点电荷自身的。可以与运动粒子在静磁场中的附加动量  $\Delta \vec{P} = q\vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r})$  相比较，均为带电体与外场共有的“相互作用能（动）量”。**

### 电荷系的相互作用能

现在考虑由一系列点电荷组成的体系的相互作用能。首先考虑相距为  $R$  的两个点电荷  $q_1$  和  $q_2$  的相互作用能

$$W_{\text{int},12} = q_1 \varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

其中  $\varphi_2$  是电荷  $q_2$  在电荷  $q_1$  处的势。同理我们也可以把  $W_{\text{int},12}$  表示为  $q_2 \varphi_1$ ，其中  $\varphi_2$  为电荷  $q_1$  在电荷  $q_2$  处产生的势，所以相互作用能可以写为

$$W_{\text{int},12} = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2)$$

因此，将上式推广到  $n$  个电荷组成的体系，相互作用能可表示为

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad (3.3.11)$$

其中  $\phi_{\alpha}$  为 **除电荷  $q_{\alpha}$  之外** 所有其余电荷在电荷  $q_{\alpha}$  处的势之和

**注意此处 (3.3.13) 的形式虽然与  $W$  的形式很类似，但  $\phi_{\alpha}$  的含义与总能中  $\varphi_{\alpha}$  的含义不同 – 前者刨去了自己对自己的贡献，也就是能量中的固有能。相互作用能可正可负，但总能量**

严格为正。

### § 3.4 静电体系的稳定性问题

我们前面研究了当导体位置确定时的静电问题。然而有几个问题并没有得到回答 --- 1) 静电体系处在给定的构型下是否稳定? 2) 稳定时体系中电荷分布及导体的构型应满足什么条件? 要回答这些问题, 我们需要研究体系的能量, 因为体系的稳定状态对应于能量取极小值时的状态。一个荷电导体体系的总静电能为

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\tau \quad (3.4.1)$$

一个体系的状态可以由电荷分布  $\rho(\vec{r})$  描述, 也可以由电势分布  $\phi(\vec{r})$  唯一描述, 这两个量一一对应。对应于不同的电荷分布  $\rho(\vec{r})$  (假设可以给定, 无论其稳定与否), 体系具有不同的能量。因此能量  $W$  是  $\rho(\vec{r})$  或  $\phi(\vec{r})$  的泛函:  $W = W[\rho(\vec{r})]$ 。现在的问题即时:

**对应怎样的电荷分布 (或电势分布), 体系的能量为极小值?**

问题进一步转化成: 对给定的  $\rho(\vec{r})$  做一个虚变动  $\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r}) + \delta\rho(\vec{r})$ , 则要求

$$\frac{\delta W}{\delta \rho} = 0 \quad (3.4.2)$$

下面就根据 (3.4.2) 的要求讨论静电体系的平衡问题。电荷分布的变动  $\delta\rho(\vec{r})$  有 2 类 ---- 一种是导体位置不动, 电荷在导体上的再分布; 另一种是由导体的位置变动引起的 (当然严格来说这个情况下会同时引起单个导体上的电荷再分布)。我们下面分别研究这两种情况, 这两个问题的解答分部给出两个重要定理。

#### 1. 汤姆孙定理

先考虑一种相对简单的情况: 假设每个导体都是不动的, 但电荷在导体上可以自由再分布。显然, 这种扰动必须满足如下约束条件:

$$\int \delta\rho_i d\tau = \delta Q_i = 0 \quad (3.4.3)$$

让我们考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量的变化

$$\delta W = W[\rho + \delta\rho] - W[\rho] = \epsilon \int \vec{E} \cdot \delta\vec{E} d\tau = -\epsilon \int \nabla\phi \cdot \delta\vec{E} d\tau \quad (3.4.4)$$

其中  $\delta\vec{E}$  为  $\delta\rho$  所产生的电场, 满足

$$\nabla \cdot \delta\vec{E} = \delta\rho / \epsilon$$

对 (3.4.4) 进行分部积分可得

$$\delta W = -\varepsilon \int \nabla \cdot (\varphi \delta \vec{E}) d\tau + \varepsilon \int \varphi \nabla \cdot \delta \vec{E} d\tau = \int \varphi \delta \rho d\tau = \sum_i \int \varphi \delta \rho_i d\tau \quad (3.4.5)$$

上式第一项可利用高斯定理变为面积分，其结果为零。由于约束 (3.4.3) 的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子  $\lambda_i$ ，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \delta W - \sum_i \lambda_i \delta Q_i = \sum_i \int \varphi(\vec{r}_i) \delta \rho_i d\tau_i - \sum_i \lambda_i \int \delta \rho_i d\tau_i \\ &= \sum_i \int [\varphi(\vec{r}_i) - \lambda_i] \delta \rho_i(\vec{r}) d\tau_i \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

因为  $\delta \rho_i(\vec{r})$  相互独立，上式导致

$$\varphi(\vec{r}_i) = \lambda_i \quad (3.4.7)$$

因此，若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，能量到达极小值，体系处于平衡状态。

**(思考：严格来说还需证明  $\frac{\delta^2 W}{\delta \rho^2} > 0$ ，你能否证明？)** 这就是**汤姆孙定理**。我们

在前面讨论讲导体静电平衡条件时曾通过物理的 **Argument** 得到过这个结论，这里根据能量在约束条件下达到极小这一平衡判据对这个结论给出了数学上的严格证明。但得到这样的静电平衡状态有两个条件：

- 1) 导体上的电荷不会离开导体；
- 2) 每个导体的位置保持不变。

对条件 1) 我们已经知道有**非静电来源的表面束缚能**（功函数）阻止电荷脱离导体。如果我们将条件 2) 放松，使得导体的位置可以发生变化，那么这种导体构型的变动必然导致电荷密度的再分布进一步改变体系的总能量。

**下面的问题是：什么样的构型是体系的稳定状态呢？**

## 2. 恩肖定理

在讨论由于导体构型的变化而产生的能量改变时，我们做如下假设

- 1) **“绝热近似” - 即带电体的运动速度很慢使得每个时刻上面的电荷分布都有足够的时间达到平衡（即称为等势体）。**
- 2) 带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

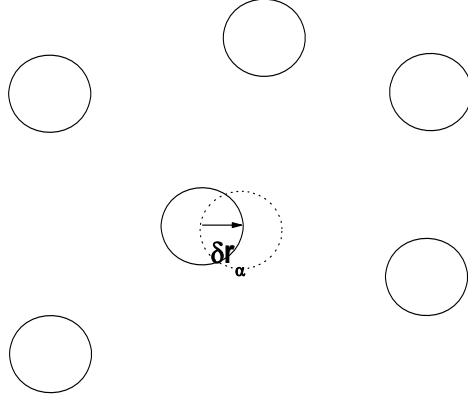
在此近似下，我们可以不考虑体系的固有能（因为在构型发生改变时固有能不变），而只考虑相互作用能：

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad (3.4.8)$$

$W_{\text{int}}$  是各个导体位置  $\{\vec{r}_\alpha\}$  的函数:  $W_{\text{int}}(\{\vec{r}_\alpha\})$ , 其具有极小值的充要条件是:  $W_{\text{int}}$  对所有电荷的坐标的一阶微商必须为零, 而二阶微商必须恒大于零. 简单起见, 这里我们只考虑其中一个导体的位置发生了变化  $\vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{r}_\alpha + \delta\vec{r}_\alpha$ , 则变分后第一个条件要求

$$\nabla_\alpha W_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \nabla \phi_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{E}_\alpha = 0 \quad (3.4.9)$$

亦即, 在每个导体所在处, 由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为 0。



这一条件依赖于具体的导体构型。假设这一个条件能够实现, 我们进一步考察这种状态的稳定性问题。让我们检查  $W$  在某一个“平衡位置”附近对其中一个导体位置做相应扰动  $\vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha$ , 保留到 2 阶, 有

$$\delta^2 W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j = \frac{q_\alpha}{2} \sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j = \sum_{i,j=x,y,z} B_{i,j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j \quad (3.4.9)$$

其中  $B_{i,j} = \frac{q_\alpha}{2} \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}$  为一个对称矩阵。*(这里少了一个 1/2, 原因是我们计算  $\vec{r}_\alpha$  的变化时, 不仅考虑其它导体对第  $\alpha$  个导体的电势变化, 还要考虑第  $\alpha$  个导体在其它带电体处的电势变化, 根据对称性, 这两项贡献相等)*。要使得体系稳定,  $\delta^2 W$  应当针对任意的变动恒为正! 单独从 (3.4.9) 式中得不出任何结论, 因为不同的方向上的虚位移耦合在一起。可以将  $B$  矩阵对角化, 得到一系列本征值  $b_i$ , 则有,

$$\delta^2 W = \sum_{i=1,2,3} b_i (d\vec{r}_\alpha^i)^2 \quad (3.4.9')$$

其中  $d\vec{r}_\alpha^i$  对应这一本征值的本征矢量, 可以理解为这些扰动的“简正”模式。要得到稳定状态, 则要求所有可能的扰动均导致能量上升, 从 (3.4.9') 中可以看出我们要所有的本征值均大于 0:

$$\boxed{b_i > 0, \quad i = 1, 2, 3} \quad (3.4.10)$$

另一方面，考虑  $\phi_\alpha$  是除  $q_\alpha$  之外所有其他电荷在第  $\alpha$  个电荷处产生的势，故根据 Poisson 方程（因为  $\vec{r}_\alpha$  处没有电荷）

$$\nabla_\alpha^2 \phi_\alpha = \sum_i \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^i} = 0 \quad (3.4.11)$$

所以，根据  $B_{i,j}$  矩阵的定义，我们有

$$\boxed{2 \sum_{i=1,2,3} b_i = 2 \text{Tr}[B_{i,j}] = q_\alpha \nabla_\alpha^2 \phi_\alpha = 0} \quad (3.4.12)$$

很显然，(3.4.12) 与 (3.4.10) 相互矛盾！故  $W_{\text{int}}$  不可能有极小值，只可能存在“鞍点”类型的极值点（某些方向为极小，某些方向为极大值）。**因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态，任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与。**如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在。为此，在静电学中我们总是假定存在着某种**非静电的约束力**。

**注意：这里所有的讨论都是针对“静电力”，也就是满足  $\nabla \times \vec{E} = 0$  的力。当电场随时间变化时，此时的力不再受这个定理的约束。另外，量子力学中可能存在其他来源复杂的力（如交换耦合力），也不受这个定理的约束。**

习题：

P85, 3.5, 3.8, 3.9

小课题（供有兴趣的同学选作）

- 1) 计算几个典型的静电体系（比如两个点电荷，两个偶极子等）的能量随位置的变化关系，用图形画出它们的依赖关系，体会“静电体系没有约束就没有平衡态”这一结论。
- 2) 阅读文献“Wen WJ, et. al, Phys. Rev. Lett. 85 5464 (2000)”，搞明白他们是怎样引入非静电力来形成静电稳定体系的。



## 第九讲

### 上次课

- 相互作用能  $W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha}^n q_{\alpha} \phi_{\alpha}$  --- 注意  $\phi_{\alpha}$  的物理意义!
  - 能量极小---静电平衡:
    - 1) 有约束下平衡态为导体成为等势体 - 汤姆逊定理
    - 2) 无约束下静电体系没有平衡态 - 恩肖定理
- 

### § 3.5 导体表面所受的静电力

置于静电场内的导体会受到静电场的作用力, 这种静电力作用在导体的表面, 因为电荷在静电平衡时只堆积在导体表面。我们可以从两个不同的角度进行计算。

#### 方法 1: Maxwell 张量

在上一章, 我们已经详细介绍了如何计算一个放置于电磁场中的物体受力问题。在定态(不随时间变化)或者时谐场条件下, 物体的受力就是 Maxwell 张量的面积分:

$$\vec{F} = -\oint d\vec{S} \cdot \vec{T} \quad (3.5.1)$$

因为导体内的场  $\vec{E}_{\text{内}} = 0$ , 故只有导体的外表面受力。单位面积所受的力为

$$\vec{F}_s = -\vec{e}_n \cdot \vec{T} \quad (3.5.2)$$

静电条件下, 真空中的麦克斯韦张力张量为:

$$\vec{T} = \epsilon_0 \left( \frac{1}{2} E^2 \vec{I} - \vec{E} \vec{E} \right) \quad (3.5.3)$$

导体外表面的场只有法向分量, 故

$$\vec{F}_s = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \vec{e}_n \quad (3.5.4)$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度, 方向指向导体外法线方向, 也就是说, 导体受到一种“负压力”。

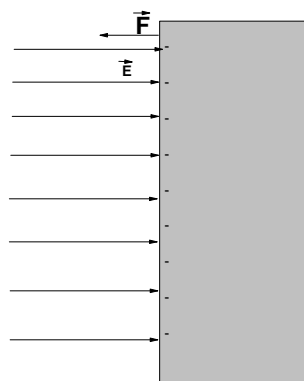
*你也许会问: 这是电场作用到自由电荷上的力啊! 不一定就是作用到导体上的力! 其实, 导体中的自由电荷在静电平衡时全都集中在导体表面, 由于有非静电的束缚力才使得电荷不能飞离导体。因而场对自由电荷的作用力通过非静电来源的平衡力转嫁到导体上。换一句话说, 把导体和其中的电荷看成一个整体, 则外界对电荷的力就等于对整个导体的作用力。*

导体表面的场也可用面电荷表示，即

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_n \quad (3.5.5)$$

代入 (3.5.4) 式可得

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \vec{e}_n \quad (3.5.6)$$



## 方法 2: 直接计算电荷受力

如前所述，导体表面受力实际上是电场对面电荷的作用力，所以我们可以直接用洛伦兹力来计算

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E} d\tau \quad (3.5.7)$$

然而直接利用上式计算有困难，因为理想的导体模型为导体的电荷分布为面电荷分布： $\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}_{\parallel})\delta(z)$ ，然电场在导体的内外表面不连续： $\vec{E}_+ = \sigma/\epsilon_0, \vec{E}_- = 0$ 。

代入 (3.5.7) 时，有

$$\vec{F} = \int \sigma(\vec{r}_{\parallel})\delta(z)\vec{E}(\vec{r}_{\parallel}, z)d\vec{r}_{\parallel}dz, \quad (3.5.8)$$

此时对  $z$  的积分不容易进行，因为将  $z=0$  代入  $E$  的表达式时我们不知道该取  $\vec{E}_+$  还是  $\vec{E}_-$ 。

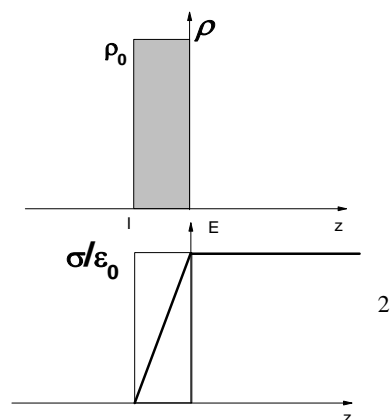
这个问题的产生是因为其实导体上的电荷本来就非完全分布于表面上的，**面电荷分布**只是我们对导体的一个**理想化**的模型处理。真实情况下，电荷是分布在一个非常薄的表面层内的。模型计算表明，这个过渡区约为  $10^{-10}\text{m}$ 。让我们取最简单的情况，假设电荷均匀地分布在这个厚度为  $l$  的过渡层中，亦即，

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & z < -l \\ \rho_0, & -l < z < 0 \\ 0, & z > 0 \end{cases} \quad (3.5.9)$$

利用 Gauss 定理可容易计算出电场分布，即

$$E = \begin{cases} 0, & z < -l \\ \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(z+l), & -l < z < 0 \\ \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 l, & z > 0 \end{cases} \quad (3.5.10)$$

则导体表面所受的力为



$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int dS \int_{-l}^0 \rho_0 \vec{E} dz = \int dS \int_{-l}^0 \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0^2 (z+l) \vec{e}_n dz \\ &= \int \frac{1}{2\epsilon_0} (\rho l)^2 \vec{e}_n dS.\end{aligned}\quad (3.5.11)$$

当此过渡层非常小，而我们又关心过渡层内部的电场时，过渡层的电荷可以等价成面电荷分布，

$$\sigma = \lim_{l \rightarrow 0} (\rho l). \quad (3.5.12)$$

所以，导体表面单位面积所受的力为

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2\epsilon_0} (\rho l)^2 \vec{e}_n = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \vec{e}_n \quad (3.5.13)$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致。

*Tips: 这个世界上本来没有奇性，人们为了计算以及表述的方便引入了奇异的物理量（如面电荷分布），但未必给你强调这种方便的代价及适用范围。我们在学习的过程中一定要深入掌握原理的来龙去脉，才能对问题理解的更加透彻，在遇到新问题时不会上当或是手足无措。另外，05 级物理系的一位同学曾经证明，上述结论在电荷分布是任意幂次（未必是线性）的情况下都成立。*

## 第四章 静电学 II-电介质静电学

上一章中我们研究了静电学的第一部分 - 与导体相关的静电问题。在那里，我们没有真正求解电势的方程，而是根据导体具有自由电荷这一特点研究了与导体相关的一些静电基本定理 --- 汤姆逊定理、恩肖定理、格林互易定理，以及一些基本量的行为 - 如相互作用能、导体受力、电容系数等等。但要具体计算出这些物理量，我们仍需知晓空间的电势分布  $\varphi(\vec{r})$ 。在这一章中，我们转而研究电介质中的静电场的行为，目的就是计算  $\varphi(\vec{r})$ 。与导体不同，电介质中的电场不为 0，电场的标势由方程

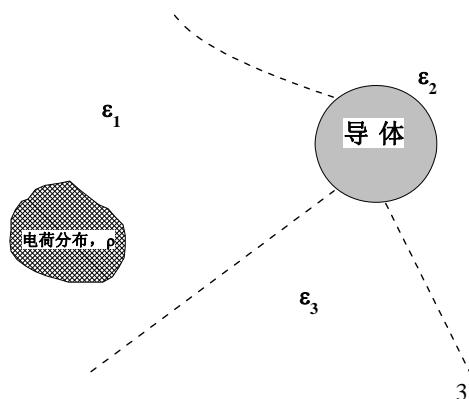
$$\nabla \cdot [\epsilon(\vec{r}) \nabla \varphi] = -\rho_f(\vec{r})$$

决定，其中  $\epsilon$  可以是位置的函数（针对非均匀介质的情形）。在一块均匀介质内部， $\epsilon$  是常数，故上式变为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_f$$

为大家熟知的泊松方程。

电介质中电场问题就转化成在合适的边界条件下解上述 Poisson 方程。这些边界条件包括我们上一章讨论



过的介质/导体表面边界条件，以及我们下面要介绍的介质/介质边界条件。

## § 4.1 电介质边界条件

由 Maxwell 方程我们已导出场在两个介质分界面的边值关系

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \quad (4.1.1)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.1.2)$$

其中  $\vec{e}_n$  为垂直于界面上 2 指向 1 的单位矢量，而  $t$  指的是界面上两个独立方向矢量。这里需要强调指出的是  $\sigma_f$  是自由电荷面密度，**它们是外加的原本不属于介质的源电荷，而且分布在介质分界面的一个薄层里所以被当作奇性的面电荷分布处理（不关心过渡层中的电场）**。根据  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \nabla \varphi$ ，容易由 (4.1.1) 导出

$$\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f} \quad (4.1.3)$$

在将  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  带入 (4.1.2) 可得

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{||}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{||}} \Rightarrow \frac{\partial (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n_{||}} = 0 \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_{\text{surface}} = \text{const.} \quad (4.1.4)$$

其中  $n_{||}$  为界面上的两个独立方向，而  $\text{const.}$  是个与界面上位置无关的一个常数。亦即：在两个介质的界面上，左右两边的标势值最多只差一个对此界面通用的常数值。下面来考虑这个常数。根据势的定义：

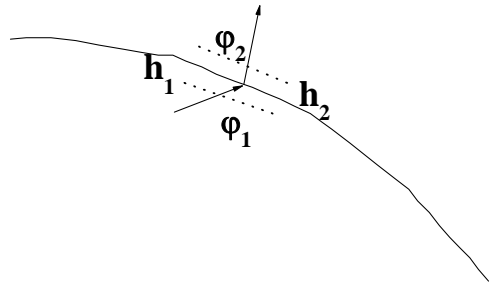
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{h \rightarrow 0} E_{2,n} h / 2 + E_{1,n} h / 2 = \left( \frac{E_{2,n} + E_{1,n}}{2} \right) h \quad (4.1.5)$$

其中， $h$  为 1, 2 两个点之间的距离，而  $E_{2,n}, E_{1,n}$  为界面两端的垂直电场分量。在  $h \rightarrow 0$  时，显然 (4.1.5) 式只有在电场存在奇性 ( $E_{1,n} \rightarrow \infty, E_{2,n} \rightarrow \infty$ ) 的时候才不为 0！**在所有我们考虑的情况下，电场都不会发散 - 即使有面电荷存在，两边的电场不会发散（尽管可以不连续），**

因此上面右端=0，即

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2} \quad (4.1.6)$$

(4.1.3) 及 (4.1.6) 就是关于势的边界条件。显然，边界条件 (4.1.6) 直接导致关于场的边界条件 (4.1.2)



**注：关于电势条件 (4.1.6)，唯一的例外是点电荷，因为点电荷的场在原点是发散的，的确  $\varphi|_{0^+}, \varphi|_{0^-}$  是不连续的。只要将点电荷描述成一个带电为  $q$  的半径为  $a$  的小球，则一切问题均解决了。这再一次显示了点电荷只是一个数学模型而已。**

## § 4.2. 唯一性定理

有了边界条件，原则上可以解 Poisson 方程以得到所有关于场的信息。在介绍静电方程的解的具体方法之前，首先介绍一个重要的定理--- **唯一性定理**。

**定理：** 如果静电体系内存在电荷分布  $\rho(\vec{r})$  和电介质分布  $\varepsilon(\vec{r})$ ，且关系式  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  成立，则体系的电场由边界条件（即边界上的  $\varphi$  或  $\hat{e}_n \cdot \vec{D}$ ）唯一确定 --- 即，不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件（参照 4.1 节上面的图）。

**证明：** 我们利用反证法证明。设对同一个体系存在有两个解  $\varphi'$  和  $\varphi''$ ， $\vec{E}' = -\nabla \varphi'$ ,  $\vec{E}'' = -\nabla \varphi''$ ； $\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}'$ ,  $\vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$ ，下面我们将证明它们其实是同样的：

$$\vec{D}' = \vec{D}'', \vec{E}' = \vec{E}'' \quad (4.2.1)$$

根据定义，这两个场都要满足同样的边界条件，即在边界处有

$$\varphi' = \varphi'' \quad \text{或者} \quad \vec{D}' \cdot \vec{e}_n = \vec{D}'' \cdot \vec{e}_n \quad (4.2.2)$$

因此定义一个函数， $\vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\vec{D}' - \vec{D}'')$ ，其在边界上的积分一定为 0：

$$0 = \oint_S (\varphi' - \varphi'')(\vec{D}' - \vec{D}'') \cdot d\vec{S} = \oint_S Z(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) d\tau \quad (4.2.3)$$

检查对  $\vec{Z}(\vec{r})$  的散度，发现

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\nabla \cdot \vec{D}' - \nabla \cdot \vec{D}'') + (\nabla \varphi' - \nabla \varphi'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.4)$$

由于讨论的是同一个体系，必有  $\nabla \cdot \vec{D}' = \nabla \cdot \vec{D}'' = \rho$ ，故

$$\nabla \cdot \vec{Z}(\vec{r}) = -(\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') \quad (4.2.5)$$

将上式带入 (4.2.3) 可得，

$$\int_V (\vec{E}' - \vec{E}'') \cdot (\vec{D}' - \vec{D}'') d\tau = - \int_V \nabla \cdot \vec{Z} d\tau = 0 \quad (4.2.6)$$

根据已知条件

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}', \vec{D}'' = \varepsilon \vec{E}''$$

带入上式可得

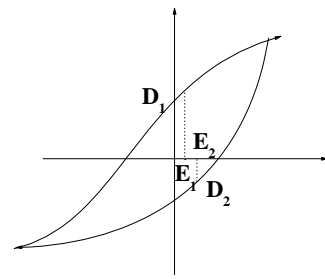
$$\int_V \varepsilon(\vec{r}) |\vec{E}' - \vec{E}''|^2 d\tau = 0 \quad (4.2.7)$$

而由于  $\varepsilon \geq 1$ ，所以有

$$\vec{E}' = \vec{E}''$$

两个解相同，静电场是唯一的。由  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  可知，电势  $\varphi'$  与  $\varphi''$  之间最多差一个任意常数。我们对此作一些讨论：

(1) 在某些一些介质中  $\vec{D}$  和  $\vec{E}$  之间并不一定是线性的，一般说来  $\vec{D}$  是  $\vec{E}$  的函数。这时，只要  $\vec{D}$  是  $\vec{E}$  的单值单调递增函数，则由 (4.2.6) 式可看出，定理仍成立。对铁电介质来说，上述唯一性定理不成立，因为有电滞



回线存在， $\bar{D}$  和  $\bar{E}$  不再是单值的。的确，此时对应同样的边界条件可以不同的解。物理上，这是因为铁电介质中的状态不仅与边界条件有关，还与历史有关。

- (2) 唯一性定理对静电学的重要性在于：只要我们得到了一个解，其满足 Poisson 方程以及相应的边界条件，它一定就是问题的严格解。因此，有些时候，我们根据物理直觉可以猜出一些问题的解，其正确性有唯一性定理保证。

---

Comments added:

静电问题原则上就是在一定的边界条件下解 Poisson 方程，这变成了一个纯粹的数学问题。下面我们将介绍两种解决方法，它们仅仅适用于一些特殊的具有高对称性的问题。在一般情况下，电荷分布、边界形状都是任意的，此时解决问题必须要用到计算机及合适的数值计算方法。目前有许多成功的计算方法—其中之一就是“有限元方法”，现成的软件为 COMSOL。这个方法精髓就是将任意空间分成一个个的小区间，分而治之。还有一些其他的方法，如“边界元”方法等。原则上讲，解析方法和数值方法对我们都同要重要，前者给我们许多灵感和 insight 但可解的东西有限；后者可以解决很多问题，而且可以给我们许多直观的图像，但如果太依赖于它，又有可能失去许多严格的结论以及物理的嗅觉。二者应当结合起来，相得益彰。

---

### § 4.3 镜像法

镜像法是解静电边值问题的一种特殊解法，这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷代替，特别适合研究空间内有源电荷的情况。原则上讲，区域内的电势是由区域内的电荷和处在边界处的电荷（假设边界外的空间为导体，没有电荷）共同决定的：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma_b(\vec{r}')ds'}{R} \quad (4.3.1)$$

区域内的电荷分布已知，因此电势容易计算。但边界处的电荷密度  $\sigma_b(\vec{r}')$  通常是未知数 – 对设定电势的情形电荷本来就不确定；对孤立导体情形我们只知道总电荷，不知道电荷分布，这给我们解决问题带来了不便。幸运的是，在某些特定情形下，后一部分的影响可以等价于处于区域外部的一些虚拟电荷对区域内的影响，亦即，

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{image} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_{image}(\vec{r}'')d\tau''}{R} \quad (4.3.2)$$

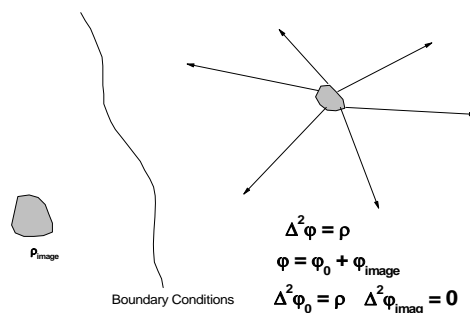
其中后一个积分区域在考虑的区域外。因像电荷放在边界的外部，故有

$$\nabla^2 \varphi_{image} \equiv 0, \quad (4.3.3)$$

因此我们仍有 Poisson 方程

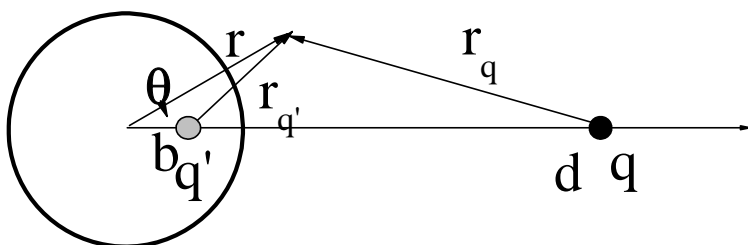
$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$$

因此只要调整像电荷的位置和大小，使它总电势  $\varphi$  满足所给的边界条件，那么我们便找到了问题的解。这种解法的正确性可由唯一性定理保证。下面我们将借助一个典型例题来说明这种问题的解法。



**[例]** 设一点电荷附近有一接地导体球面，求空间电势分布。

**解：** 如图所示，取球心为坐标原点，球心到点电荷  $q$  的方向为  $x$  轴。设  $q$  的坐标为  $(d, 0, 0)$ ，球半径为  $R$ ，球内的电势为零，这是显然的，故只要讨论球外空间的电势即可。



球外空间的电势所满足的方程和边界条件是：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} q \delta(x-d, y, z) \\ \varphi|_{r=a} = 0 \\ \varphi|_{r=\infty} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3.4)$$

球外空间的电势由两部分组成，即点电荷  $q$  所产生的电势和球面感应电荷所产生的电势。根据镜像法的精神，可以试图找到界面外的一个像电荷来等价这部分贡献。根据问题对称性，容易明白此像电荷（如果存在的话）应在球内  $(b, 0, 0)$  处，设其电量为  $-q'$ 。因此，我们得到球外空间的试解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right) \quad (4.3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} r_q &= \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}, \\ r_{q'} &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

下面的工作是看能否确定适当的  $b$  和  $q'$ ，使试解满足边界条件（**Poisson 方程自动满足，这是镜像法的一大优点！**）。



无穷远处的边界条件自动满足，只需考虑势在球面( $r=R$ )上为零的边界条件。为此，把条件 $\varphi|_{r=R}=0$ 代人试解，转换成球坐标表示，则有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta}} = 0 \quad (4.3.7)$$

即

$$q^2(b^2 + R^2 - 2Rb \cos \theta) = q'^2(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta) \quad (4.3.8)$$

因为对任意 $\theta$ 值，上式都应成立，故有

$$\begin{cases} q^2(b^2 + R^2) = q'^2(d^2 + R^2) \\ q^2b = q'^2d \end{cases} \quad (4.3.9)$$

这有两组解

$$\begin{aligned} b &= d, \quad q' = q; \\ b &= \frac{R^2}{d}, \quad q' = \frac{R}{d}q \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

解 ( $b=d, q'=q$ ) 不符合要求 (像电荷不应在源电荷的空间内)，只有解

( $b=\frac{R^2}{d}, q'=\frac{R}{d}q$ ) 满足要求。于是得到问题的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{d}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{d} \cos \theta}} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad (4.3.11)$$

知道了电势的分布便可求出球面上的电荷面密度

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 E_r = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{R}{d} \right) \frac{\left( 1 - \frac{R^2}{d^2} \right)}{\left[ 1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d} \cos \theta \right]^{3/2}} \\ &= -\frac{q'}{4\pi R^2} F(\theta) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

其中

$$F(\theta) = \frac{\left( 1 - \frac{R^2}{d^2} \right)}{\left[ 1 + \frac{R^2}{d^2} - 2\frac{R}{d} \cos \theta \right]^{3/2}} \quad \text{为一个角分布函数。}$$

在两个极限条件下考虑面点荷 (电场) 分布:

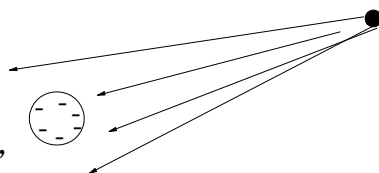
A)  $R/d \rightarrow 0$ ，此时源电荷离导体球很远，对整个导体球来讲近似为均匀电场。

此时，角分布为  $F(\theta) \approx 1 + 3\frac{R}{d}\cos\theta$ 。这意味着导体的面电荷基本为均匀分布，但有一个因电场而产生与角度相关的调制(其实这点调制正是形成了一个偶极子，后面会讲到)；

B)  $R/d \rightarrow 1$ ，此时源电荷离导体球很近，其看到的导体表面基本上是一个无限大平面。的确，

$$F(\theta) = \begin{cases} \infty, & \cos\theta \rightarrow 1 \\ 0, & \cos\theta \rightarrow -1 \end{cases}$$

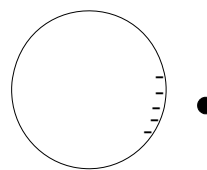
感应电荷只出现在靠近源电荷的一边。



然而无论怎样，总感应电荷为

$$\int \sigma dS = \int \sigma(\theta) 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{R}{d}q = -q' \quad (4.3.13)$$

即像电荷的大小等于导体面上的感应电荷。**注意：这个结果与之前利用 Green 互易定理得到的结论一致。**



导体球所受的静电力等于电场作用到导体球上的感应电荷的作用力。导体表面单位面积受的作用力为

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

导体球受的总力可以由积分求得。根据对称性，只有 x 分量非 0。经过一个繁复的积分可得：

$$F = \oint \vec{f} \cdot \hat{x} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R^2} \left( \frac{R^3}{d^3} \right) \left/ \left( 1 - \frac{R^2}{d^2} \right)^2 \right. \quad (4.3.14)$$

简单计算可得

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' / (d-b)^2} \quad (4.3.14')$$

这个力正好是点电荷  $q$  对像电荷  $q'$  的作用力；根据牛顿第 3 定律，点电荷受到导体上像电荷等量反向的作用力，称为“镜像力”。

习题：利用直接积分推导 (4.3.13) 和 (4.3.14)

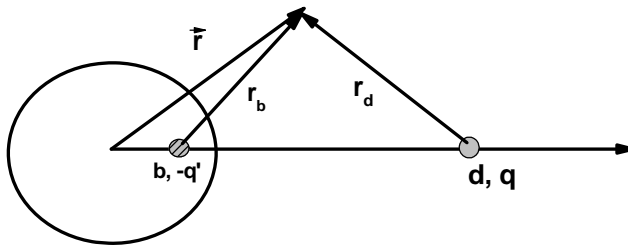
小课题 (选作)

- 1) 寻找并阅读 Lang 的文章 (应当是书上 P71 所引的文章)，弄明白表面束缚能的来源，理解它是否是静电来源。
- 2) 不用牛顿第三定律，你能否利用 Maxwell 张量或者其他方法直接计算点电荷受到导体上像电荷的作用力 (即镜像力)？

## 第十讲

上节课:

- 导体在电场中受力  $\vec{f} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{n} = \frac{1}{2 \epsilon_0} \sigma^2 \vec{n}$
- 介质/介质边界条件:  $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$
- 唯一性定理 - 边条确定后解唯一确定
- 镜像法 - 利用虚拟电荷代替界面处的面电荷, 使其满足边条, 唯一性定理可确定其是问题的真实解



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right], \quad b = \frac{R^2}{d}, \quad q' = \frac{R}{d} q \quad \text{--- 与格林互易定理得出的结果一致}$$

利用上面得到的结果, 我们可以引申出来许多题目, 并得到解答。

(1) 当  $R/d \rightarrow 1$  时, 设  $d = R + \delta, \delta \rightarrow 0$ , 有:

$$b = R^2 / (R + \delta) \approx R - \delta,$$

$$q' = qR / (R + d) \sim q(1 - d/R) \sim q,$$

此时物理问题等价于无限大平面的像电荷的解。

(2) 导体球接电势  $V_0$ 。此时边界条件为:  $\varphi|_{r=R} = V_0$ ,  $V_0$  是已知常数。为了满足此边界条件, 应在原解 ( $\varphi|_{r=R} = 0$ ) 的基础上再加上镜像电荷 (处于导体内部), 其作用是 **在导体表面上产生一个常数电势**。简单的分析发现此像电荷应处于导体球中心, 电量为  $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 。故此时的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} + \frac{q''}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right] + \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.15)$$

(3) 导体球为孤立导体带电  $Q$  这种情况的边界条件为  $\varphi|_{r=R} = \text{常数(未知)}$ , 以及

$$-\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \quad (4.3.16)$$

根据与上题相同的 Argument, 必须加上一个放在球心电量为  $q''$  的像电荷。于是, 球外电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} + \frac{q''}{r} \right] \quad (4.3.17)$$

此时计算球面上的电荷可知

$$Q = -\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -q' + q'' \Rightarrow q'' = Q + q' \quad (4.3.18)$$

问题得解。

(4) 点电荷  $q$  在导体球壳内, 距球心  $d$  处。

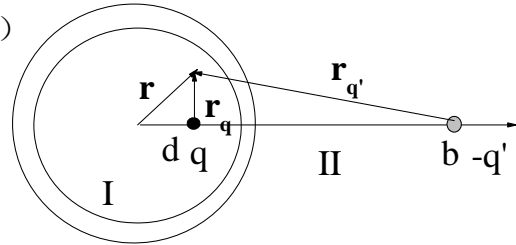
这类问题要复杂许多, 先考虑一个简单的情形: **球壳接地**。

此时球内 (I) 外 (II) 区域内都可以存在电场及电势, 其分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = -q\delta(x-d, y, z)/\varepsilon_0 \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0 \end{cases} \quad (4.3.19)$$

而边界条件为

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = 0, & r = R, \\ \varphi_{II} \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$



先考虑球内的电势。根据镜像法的精神, 球内的电势应当是由真实电荷  $q$  和球外的“像电荷”  $-q'$  的叠加:

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right]$$

与电荷在球 (壳) 外面的情形类似, 可以解得  $q' = q \frac{R}{d}$ ,  $b = R^2/d$ 。考虑球壳外的电势, 注意到此区域没有真实电荷,  $r = R$  与  $r \rightarrow \infty$  的边界上电势均为 0, 因此, 满足此边界条件的解只有

$$\varphi_{II} = 0$$

接下来考虑一个复杂一点的情形, 假设球壳的电势设为  $V_0$ , 因此边条 (1) 改为

$\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$ ,  $r = R$ 。此时原来得到的解不能满足边界条件 (1), 需再设“像电荷”才行。简单的分析发现任何处于 II 区的像电荷都不能满足条件 (1), 又不能在原点设像电荷 (因处于考察区), 怎么办呢?

解决的办法是注意到  $\varphi = V_0$  本身就是 Poisson 方程的解。在以前电荷放置于球外的问题中我们不用这个解, 因为那时考察区域在球外, 这个解不能满足边界条件  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $r = \infty$ 。但现在考察区在球内, 不需要满足  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $r = \infty$  这个边界条件, 故  $\varphi = V_0$  可以采用。因此, I 区电势的最终解为

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right] + V_0 \quad (4.3.20)$$

其满足所有的边界条件同时满足 Poisson 方程, 故唯一性定理保证其正确性。下面考虑 II 区中的电势。这个区域内无源, 电势应当是某些处于其它区域的像电荷产生, 考虑修好后的边条 (1):  $\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$ ,  $r = R$ , 显然“像电荷”为处于原点 (I 区) 的电量为  $4\pi\epsilon_0 V_0 R$  的点电荷。因此, II 区电势:

$$\varphi_{II} = \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.21)$$

(4.3.20) - (4.3.21) 就是问题的解, 满足所有的方程以及边条。问题虽然得解, 但物理图像不清楚: 比如此时导体球壳上带电荷为多少? 为什么 I 区的电场与外部条件无关? 要搞清楚这些问题, 必须意识到事实上导体球壳不是无限薄的, 而是一个具有有限厚度 (尽管很薄) 的一个金属壳层, 其具有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上, 球壳内部的电荷密度为 0。内表面上的电荷密度可以容易由

$$\sigma_{in} = -\epsilon_0 E_{in} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \frac{-q}{4\pi R^2} \frac{1 - (d/R)^2}{(1 + (d/R)^2 - 2(d/R)\cos\theta)^{3/2}} = \frac{-q}{4\pi R^2} \tilde{F}(\theta) \quad (4.3.22)$$

求出, 其总电荷可以由上式积分求出, 但更容易地, 可由 Gauss 定理求出:

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{in} + q \Rightarrow q_{in} = -q \quad (4.3.23)$$

而外表面上电荷均匀分布, 总电量为

$$q_{out} = \oint \sigma_{out} \cdot dS = 4\pi\epsilon_0 R V_0 \quad (4.3.24)$$

因此物理图像是：

(1) 球内的电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡，再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会呆在外表面。

(2) 这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势，但对内电场没有丝毫影响。

(3)  $\sigma_{in}$  对应于 II 区处于  $b$  处的“像电荷”，而  $\sigma_{out}$  对应于贡献  $\varphi = V_0$  的像电荷（对应于一个球对称的势的“像电荷”也应当对称分布）

## § 4.4 本征函数展开法

本节介绍的是静电学的一个相当普适的方法，大家学习时应仔细体会。这种方法其实可以推广到求解其他许多类似的问题（如电磁波的散射）。以静电问题为例，在很多问题中，我们求解的空间中无源，但其处在某一种外场中，这种外场通常可以以边界条件的形式反映出来。此时空间中电势满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.4.1)$$

据不同的边界形状（空间的对称性），我们可以选取适当的坐标系，用分离变量法求解拉普拉斯方程的通解。假设我们得到了这组解  $\{\varphi_n, n=1,2,\dots\}$ ，它们通常是正交完备的： $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$ 。根据完备性，我们一定可以将  $\varphi$  展开成这组本征态的线性叠加：

$$\varphi = \sum C_n \varphi_n \quad (4.4.2)$$

(4.4.2) 一定是 (4.4.1) 的解，但不一定满足所要求的边界条件。必须根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数  $C_n$ 。比如通常的边界条件是

$$\varphi|_{\text{boundary}} = \varphi_0(\xi) \quad (4.4.3)$$

其中  $\xi$  是界面上的位置变量。根据本征函数的正交性，我们很容易得到展开系数的表达式：

$$C_n = \langle \varphi_n | \varphi_0 \rangle = \int \varphi_n(\xi) \varphi_0(\xi) d\xi \quad (4.4.4)$$

下面总结一下不同坐标系下的本征函数及它们的正交性。我们应当根据所面临的问题的对称性选择合适的通解形式进行求解。

### (1) 轴对称的球坐标系问题 (与变量 $\phi$ 无关)

对此类问题, Laplace 方程的本征解为  $r^l P_l(\cos \theta)$ ,  $r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$ 。因此通解可以一般写成:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (4.4.5)$$

径向波函数  $r^l$  在  $r=0$  处收敛,  $r^{-(l+1)}$  在  $r \rightarrow \infty$  时收敛。  $P_l(x)$  为 Legendre 多项式, 低阶的几项为

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ \dots \end{cases} \quad (4.4.6)$$

本征函数之间满足如下正交关系

$$\int P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d \cos \theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (4.4.7)$$

### (2) 与 $z$ 无关的柱对称问题

对此类问题, Laplace 方程的本征解为  $\rho^{\pm n} e^{\pm i n \phi}$ ,  $\ln(\rho)$ , 1。因此其通解为

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \quad (4.4.8)$$

本征函数之间的正交性为

$$\begin{aligned} \int \cos(n\phi) \sin(n\phi) d\phi &= 0 \\ \int \cos(n\phi) \cos(n'\phi) d\phi &= \int \sin(n\phi) \sin(n'\phi) d\phi = 0, \quad n \neq n' \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

下面, 我们通过几个实例来介绍这种方法。为增强信心, 先考虑一个简单的情形

**[例 4]** 一半径为  $R$  的接地导体球置于一均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 求空间场的分布。

**解:** 如图所示, 取  $\vec{E}_0$  方向为  $z$  轴, 这是一个绕  $z$  轴旋转对称的问题。球外空



间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势，总的来说，电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \varphi = 0, & r = R \quad (1) \\ \varphi \rightarrow -E_0 r \cos \theta, & r \rightarrow \infty \quad (2) \end{cases} \quad (4.4.9)$$

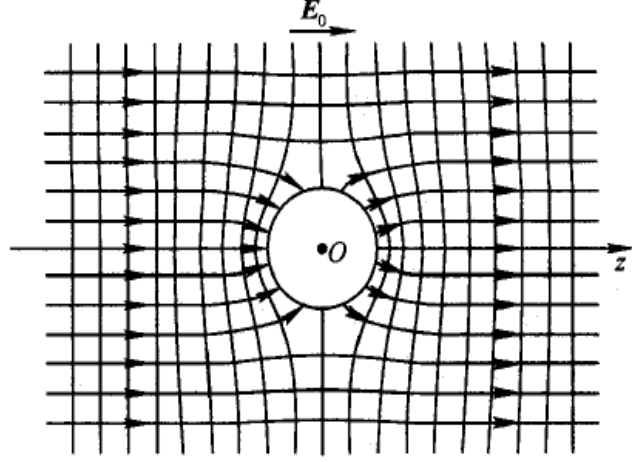


图 4.5

这个问题的通解即为：

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (4.4.10)$$

通解中有无穷多常数，虽然看上去很难确定这些常数，其实仔细分析之后发现这些常数均可由问题的边界条件确定。将试解带入边条（2），发现

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 r \cos \theta \quad (4.4.11)$$

根据  $P_l(\cos \theta)$  函数的**相互正交性**，我们可以分别比较（4.4.11）式左右两边中不同  $P_l(\cos \theta)$  函数的系数，使得它们相等。因此可得

$$A_1 = -E_0, \quad A_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \dots \quad (4.4.12)$$

再将试解带入边条（1），得到

$$\left( -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \right) \cos \theta + \sum_{l \neq 1}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = 0 \quad (4.4.13)$$

再次利用  $P_l(\cos \theta)$  函数的**相互正交性**，不同  $P_l(\cos \theta)$  的参数应当分别为 0，故

$$B_1 = E_0 R^3, \quad B_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \dots \quad (4.4.14)$$

将 (4.4.12) 与 (4.4.14) 代入试解, 我们得到最终的结果

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta \quad (4.4.15)$$

至此, 我们已完成了这个问题的求解。注意到  $r^{-2}$  依赖关系是偶极子势的特征, 可将 (4.4.15) 改为

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4.16)$$

其中

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \quad (4.4.17)$$

我们看到此时除了外加的均匀电场的贡献外, 还有一个偶极子的电场。这是由于导体球在电场的作用下正电荷堆积在一侧, 而负电荷堆积在电场的另一侧, 因此对外面的作用等效为一个偶极子, 其偶极矩正比于外加电场以及球的体积!

讨论:

- (1) 我们可以认为偶极子的场就是这个体系对外场的散射场。外场是均匀电场, 其只具有  $l=1$  的项 ( $-E_0 r \cos \theta$ ), 因此体系的响应也就只有  $l=1$  项, 所以只产生偶极子。若外场不是均匀场, 而是具有高  $l$  的项, 则体系的响应也一定有高  $l$  项。这恰恰是唯一性定理的一个体现 --- **边条唯一确定解的形式。这里边条的对称性决定了解对称性。**
- (2) 我们之前研究导体球外有点电荷的问题时, 曾经考虑过当点电荷离导体球非常远的情形。那时我们的结论是导体球在外场下的电荷分布是形成了一个偶极子。其实当电荷离目标很远时, 其电场就是近似为均匀场! 将其与现在我们考虑的情况建立一个联系将是非常有意思的事情。

**注: 人们会问边界条件  $\varphi \rightarrow -E_0 r \cos \theta$ ,  $r \rightarrow \infty$  (2) 为什么不能加上一个常数电势**

**$\varphi_0$ ? 若加上的话, 这个常数是什么意思? 其实无限大空间均匀电场的问题从来不是一个 “well-defined” 的问题。因为我们通常取无限远处为电势 0 点, 但无限区域中的均匀电场要求无限远处有电荷以及电势不是 0。真正的实验上实现均匀场只能在有限空间, 比如用平板电容器, 此时问题是 Well-defined, 但求解这样一个问题就比现在我们考虑的复杂许**

多，因为极板会引入无穷多镜像电荷…。因此我们现在考虑的是真实情况的一种理想化，是实验上不能实现的。在我们今后的学习中，我们还要考虑这种理想情形，因为这类问题可以解析求解且给我们许多 Insight。需要说明的是，此时我们总是假设  $\varphi_0$  为 0，相当于我们选择了坐标原点为电势 0 点。

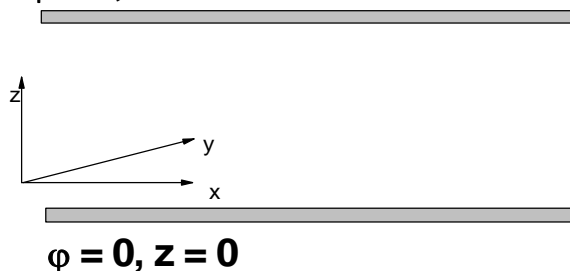
习题：

- (1) 一个孤立的带电  $Q$  的导体球壳（半径为  $R$ ）内距离球心  $d$  处放置一个带电为  $q$  的点电荷，求空间的电势分布及电荷分布。
- (2) 设一个孤立的带电量为  $Q$  的导体球放置在外电场中，计算空间的电势分布。仿照课件给出所有的推导步骤。
- (3) 翻阅《数学物理方法》，分别在旋转对称的球坐标系及与  $z$  轴无关的柱坐标系中求解 Laplace 方程，求出所有的本征函数（亦即，(4.4.5)，(4.4.8)）。

### Project（有兴趣的同学选作）

- (1) 在两块无限大接地金属平板之间，利用分离变量法计算直角坐标系下的 Laplace 方程的通解，并讨论不同本征函数之间的正交关系。

$$\varphi = 0, z = d$$



$$\varphi = 0, z = 0$$

(2) 考虑镜像法问题中更多的变种（球壳中加 2 个电荷，球外加电荷，…），利用叠加的方法求解，编一个小程序将感应电荷分布显现出来。利用 COMSOL 模拟椭球形状金属的 Case，看看是否也有镜像电荷？通过数值计算进一步理解镜像法的真谛？

(3) 等电量的正负电荷相距较远时，两电荷连线中点附近的场近似为均匀电场。你能否根据这点特征，利用镜像法计算放置于这个电场中的金属球的静电行为，并将结果与本征函数法解得的结果比较？

# 第十一讲

上次课

- 本征函数展开法:

(1)  $\nabla^2 \varphi = 0$  有一系列正交完备的解 – 本征函数  $\{\varphi_n\}$

(2) 完备性 ---  $\varphi = \sum_n c_n \varphi_n$

(3) 展开系数:  $c_n = \langle \varphi_n | \varphi \rangle$ , 根据正交性比较不同本征函数前的系数

- 例子: 接地金属球放置于均匀电场中

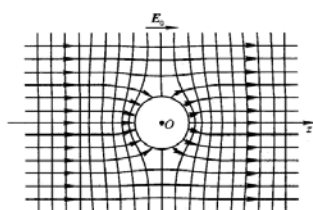


图 4.5

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

## 进一步做一个更难一些的例子。

[例 5] 半径为  $R$ 、介电常数为  $\epsilon_2$  的均匀介质球，被置于均匀外场  $\vec{E}_0$  中，球外空间充满均匀介电常数为  $\epsilon_1$  的介质。求空间电势的分布。

解: 如图 4.6, 取  $\vec{E}_0$  方向为极轴  $z$  方向。与上一道例题不同的是, 此处**介质球内可以存在电场**。为此我们把空间分为球内球外两个区域 (I、II), 电势分别为  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , 则它们满足的方程:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (4.4.18)$$

相应的边条为

$$\begin{cases} \varphi_1 \rightarrow -E_0 r \cos \theta, & r \rightarrow \infty & (1) \\ \varphi_1 = \varphi_2, & r = R & (2) \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} & & (3) \\ \varphi_2 \text{ 有限}, & r = 0 & (4) \end{cases}$$

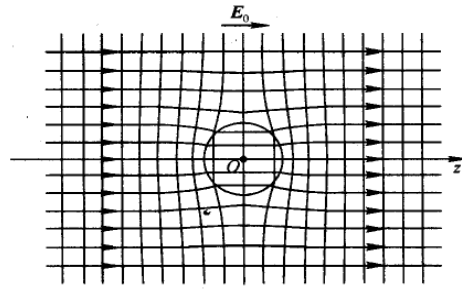


图 4.6

本问题为三维轴对称球坐标系下的问题，因此可选取合适的本征函数将  $\varphi_1, \varphi_2$  展开。显然应当选择 (4.4.5)，即

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \\ \varphi_2 &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l' r^l + B_l' r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)\end{aligned}\quad (4.4.19)$$

其中  $\{A_l, A_l', B_l, B_l'\}$  为一系列展开系数，需要由边界条件确定。根据我们上次课对均匀电场中的金属球的问题的求解，我们已有了经验 - 均匀电场的边界条件

(1) 只包含  $l=1$  项的贡献，而球这种良好的几何形状保证了它不会将  $l=1$  的模式散射到其它  $l$  的模式上去。因此 (4.4.19) 中只有  $l=1$  项的系数非 0。故有

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta \\ \varphi_2 &= (A_1' r + B_1' r^{-2}) \cos \theta\end{aligned}\quad (4.4.19')$$

\*\*\*\*\*

下面我们利用本征函数的正交性对上述论断做严格证明。

对 I 区来讲，边条 (1) 决定了除了  $A_1$  外所有的  $\{A_l\}$  均为 0。因  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ ，易知：

$$A_1 = -E_0; \quad A_l = 0, \quad l \neq 1 \quad (4.4.20)$$

对 II 区来讲，边条 (4) 决定了

$$B_l' = 0, \quad l = 0, 1, \dots, \infty \quad (4.4.21)$$

下面考虑边条 (2)。代入可知，

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} [A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l' R^l + B_l' R^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \\ \varepsilon_1 \sum_{l=0}^{\infty} [l A_l R^{l-1} - (l+1) B_l R^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) &= \varepsilon_2 \sum_{l=0}^{\infty} [l A_l' R^{l-1} - (l+1) B_l' R^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta)\end{aligned}\quad (4.4.22)$$

根据本征函数的正交性，上面 2 式中每个  $l$  项的系数必须分别相等，即

$$\begin{aligned}A_l R^l + B_l R^{-(l+1)} &= A_l' R^l + B_l' R^{-(l+1)} \\ \varepsilon_1 [l A_l R^{l-1} - (l+1) B_l R^{-(l+2)}] &= \varepsilon_2 [l A_l' R^{l-1} - (l+1) B_l' R^{-(l+2)}]\end{aligned}\quad (4.4.23)$$

对所有  $l \neq 1$  的项，我们有

$$\left. \begin{aligned} B_l R^{-(l+1)} &= A_l' R^l \\ \varepsilon_1 [-(l+1)B_l R^{-(l+2)}] &= \varepsilon_2 [lA_l' R^{l-1}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B_l = A_l' R^{(2l+1)} \\ B_l = -A_l' R^{(2l+1)} \frac{l\varepsilon_2}{(l+1)\varepsilon_1} \end{cases} \quad (4.4.24)$$

显然有:

$$A_l' = B_l = 0, \quad l \neq 1 \quad (4.4.25)$$

因此只有  $l=1$  的项有非零解。

\*\*\*\*\*

代入边条 (1) - (4) 分别可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ A_1 R + B_1 R^{-2} = A_1' R + B_1' R^{-2} \\ \varepsilon_1 (A_1 - 2B_1 R^{-3}) = \varepsilon_2 (A_1' - 2B_1' R^{-3}) \\ B_1' = 0 \end{cases} \quad (4.4.26)$$

解之可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ B_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 R^3 \\ A_1' = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \\ B_1' = 0 \end{cases}, \quad (4.4.27)$$

故

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta \\ \varphi_2 &= -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r \cos \theta \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

作如下的讨论:

(1) 先做极限分析: 当  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$  时, 介质球与环境的介电常数一样, 故其对外场的响应消失。带入发现,  $\varphi_1 = \varphi_2 = -E_0 r \cos \theta$ , 即空间的电场就是均匀电场!

(2) 球面上的束缚电荷就是球对外场的响应来源。其对球外区域的贡献为:

$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta$ 。回想一个偶极子(偶极矩为  $p$ )的电势为  $\varphi_p = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ , 对

比发现这些束缚电荷对外场的贡献相当于一个放在原点的偶极子, 其大小为

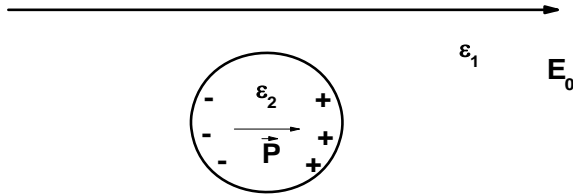
$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} R^3 \vec{E}_0 \quad (4.4.29)$$

**要注意：这个结论是严格的，并非在远场成立，这一点是否让你感到很意外？**

(3) 球内的场为外场与束缚电荷所产生的附加电场之和，结果为一均匀电场：

$$\vec{E}_{\text{内}} = -\frac{\partial\phi_2}{\partial z} \hat{e}_z = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \vec{E}_0 \quad (4.4.30)$$

(4) 当  $\epsilon_2 \rightarrow -\infty$  时，介质球内的场为  $\vec{E}_{\text{内}} \rightarrow 0$ ，其效果相当于一个导体球。而此时， $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ ，也回到上堂课我们求解的导体球的解。其实，这样的推论（导体相当于  $\epsilon_2 \rightarrow -\infty$  的介质）具有普遍意义，后面我们可以严格证明。



下面我们考虑一个简单的情况，即  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ （背景介质是空气）， $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r$ ，此时的物理图像更加清楚。因介质球内的场为均匀场，故整个介质球被均匀极化，极化强度为

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0 \vec{E}_{\text{内}} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (4.4.31)$$

而同时，(4.2.29) 可化成

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} R^3 \vec{E}_0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 \times (4\pi R^3 / 3) \quad (4.2.29')$$

上面 2 式对比发现，此时极化强度正好就是偶极子的电偶极矩/体积：

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{4\pi R^3 / 3} \quad (4.4.32)$$

这当然是合理的，因为极化强度的定义就是  $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Omega}$ 。因  $\epsilon_2 > \epsilon_0$ ，我们发现  $\vec{E}_{\text{内}} < \vec{E}_0$ ，这是因为极化电荷在球内产生了电场抵消了部分外电场的贡献。这部分由**极化电荷在球内产生的电场**为

$$\vec{E}_{\text{内}} = \vec{E}_{\text{内}} - \vec{E}_0 = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_2} \vec{E}_0 = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (4.4.33)$$



这个场通常被称为“退极场”- 由于极化产生的极化电荷产生的场，其作用是“退”掉外场的作用。整理后的结果为：

$$\vec{E}_{\text{内}} = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (4.4.34)$$

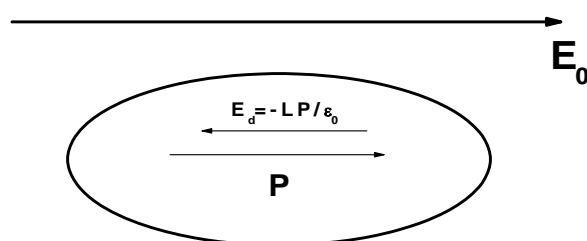
上面 2 式在很多情况下成立的，一般来说，退极场可以写成

$$\vec{E}_{\text{退}} = -L \cdot \vec{P} / \epsilon_0 \quad (4.4.35)$$

$L$  称为退极化因子，只依赖于物体的几何形状，其越大，说明退极效应越显著。

容易证明：对平板  $L=1$ ，对球  $L=\frac{1}{3}$ ，对细针， $L=0$ ，对椭球，针对长短轴的不同， $L$  可以由 0~1 不等。总结下来，介质在外场下的静电行为是

- 被外场极化
- 极化电荷在球外的贡献为偶极子
- 极化电荷对球内的贡献为均匀电场
  - 退极场 (depolarization field)



**思考题：**

- (1) 若外部介质不是空气，而是具有介电常数  $\epsilon_1$  的某种电介质，极化强度  $P$  是多少？  
(4.4.32) 是否仍然成立？若不成立，为什么？
- (2) 有兴趣的同学请找文献查一查椭球体的“退极因子”的推导

下面研究一个 2 维柱坐标问题。

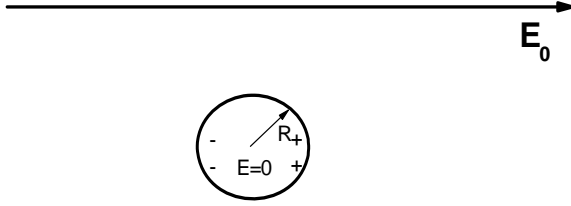
**[例 7]** 在均匀外电场  $\vec{E} = E_0 \hat{e}_x$  中有一半径为  $R$ 、电荷线密度为  $\lambda$  的无限长导体圆柱。柱轴与外场垂直，求空间中的电场分布。

**解：** 柱内区域的场为零，只需考虑柱外区域的电势，其满足方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.4.36)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \vec{E}_{\rho \rightarrow \infty} = E_0 \hat{x}; & (1) \\ \phi|_{\rho=R} = \text{常数}; & (2) \\ \oint \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} dS = -\lambda/\epsilon_0 & (3) \end{cases} \quad (4.4.37)$$



第一个边条值得讨论一下。处理均匀外场中的散射体的问题时，如果散射体是三维物体（如球），则任何感应（极化）电荷均在空间局域，因此在无穷远处，它们对场或者势的贡献都趋向于 0，此时我们可以将边条（1）进一步改写成  $\phi|_{r \rightarrow \infty} = -\vec{E} \cdot \vec{r}$ 。然而处理 2 维问题（如无限长柱子）时，感应（极化）电荷会出现在无穷远处（因为柱子会延伸到无限远处），它们对电势的贡献不趋向于 0！幸运的是，此时，它们对电场的贡献  $\sim 1/\rho$ ，故对电场的贡献仍趋于 0。处理无限大平面问题时这个问题更严重 - 感应（极化）电荷沿着 2 个方向散布到无限远，故电场、电势均不趋向于 0！不过通常 1 维问题根本无须这样求解。

此问题为与  $z$  无关的柱对称问题，故可以利用（4.4.8）展开

$$\phi = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\phi)$$

注意到  $\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$ ，电场中  $\rho$  的阶数比电势中的低一阶。根据边

条（1），势函数中所有比  $\rho^1$  发散快的项都不可以保留，故

$$A_n = C_n = 0, \quad n > 1 \quad (4.4.38)$$

进一步利用边条（1）比较系数

$$E_\rho \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -A_1 \cos \phi - C_1 \sin \phi = E_0 \cos \phi \quad (4.4.39)$$

因为  $\sin \phi$  与  $\cos \phi$  正交，可得

$$A_1 = -E_0, \quad C_1 = 0 \quad (4.4.40)$$

考虑边条 (2), 因  $\phi|_{\rho=R}$  应与  $\theta$  无关, 故有

$$\begin{cases} A_n R^n + B_n R^{-n} = 0 \\ C_n R^n + D_n R^{-n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_n = 0, n > 1; & B_1 = E_0 R^2 \\ D_n = 0 \end{cases} \quad (4.4.41)$$

现考虑边条 (3): 对角度积分过程中所有  $n > 1$  的项都没有贡献 (因为与角度有关), 只有  $A_0, B_0$  两项留下来。最后结果为:

$$B_0 \frac{1}{R} 2\pi R = -\lambda \Rightarrow B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \quad (4.4.42)$$

$A_0$  为一常数, 不能唯一确定。总结下来, 最终的电势为

$$\phi = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho - E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 R^2}{\rho} \cos \phi \quad (4.4.43)$$

分析 (4.4.43), 我们发现空间电势由三部分贡献叠加而成: 外场, 无限长带电导体棒, 以及一个 2 维偶极子 ( $\vec{p} = 2\pi\epsilon_0 E_0 R^2$ , 参考补充题) 的场:

$\phi_p^{(2)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{\rho}}{\rho}$ 。柱外电场强度为

$$\vec{E} = \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} + E_0 \cos \phi + \frac{E_0 R^2}{\rho^2} \cos \phi \right) \hat{e}_\rho + \left( -E_0 \sin \phi + \frac{E_0 R^2}{\rho^2} \sin \phi \right) \hat{e}_\phi \quad (4.4.44)$$

*注: 由这个问题的求解我们又一次发现一个规律, 即均匀外电场下无限长柱子的静电问题我们只需要考虑  $l=1$  项的贡献。这里的物理是均匀电场只包含  $l=1$  项, 而同时柱子的良好几何特征保证了不会将不同  $l$  的项耦合, 因此最终的散射场不会激发其他  $l$  项的贡献。*

## § 4.5 多极矩法

之前对静电边值问题我们已经介绍了 2 种严格的方法——镜像法及本征函数展开法。然而这些方法只能处理一些具有良好对称性的问题。在实际问题中, 激发电场的电荷分布不见得具有良好的对称性, 此时应如何处理? 一般来讲这类问题我们只能数值处理。不过对某一类特定问题, 电荷分布全部集中在一个很小的区域内, 而我们要求的又是远离带电体空间的电场, 这时我们可采用一种近似的

方法 —— 多极矩展开法。

如图 4.10, 若电荷分布在有限体积  $V$  内, 电荷密度为  $\rho(\vec{r}')$ , 这个体积的线度为  $l$ , 考查的是  $P$  点的电场, 而  $P$  点和体积  $V$  内任一点  $O$  的距离为  $\vec{r}$ 。多极矩法是讨论在  $|\vec{r}| \gg l$  情况下的场分布。 $P$  点电势的准确解的形式为

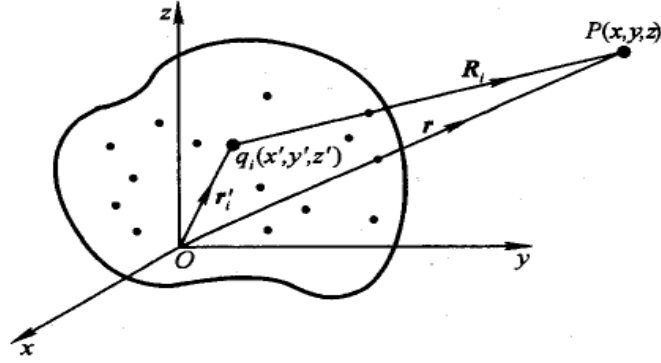


图 4.10

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R} \quad (4.5.1)$$

这里,  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ 。由于  $P$  点离源较远, 有  $r' \ll r$ , 因此作为  $\vec{r}'$  的函数  $\frac{1}{R}$  可以在  $\vec{r}' = 0$  附近作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} + \sum_{i=x,y,z} (-r'_i) \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{R} \right) \bigg|_{\vec{r}'=0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left( \frac{1}{R} \right) \bigg|_{\vec{r}'=0} + \dots \\ &= \frac{1}{r} - \sum_{i=x,y,z} r'_i \cdot \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left( \frac{1}{r} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

上式可以写成更紧凑的数学上完全等价的矢量（并矢）的形式:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \dots \quad (4.5.2')$$

习题:

P. 115, 4.2, 4.5, 4.6, 4.7

补充题

(1) 考虑两个距离为  $d$  的线电荷密度为  $\pm\lambda$  的无限长带电棒组成的体系, 计算其在远场的电势表达式。

## 第十二讲

上次课:

- 介质球/柱在均匀电场中的行为

(1) 被外场极化, 均匀外场只包含 $l=1$ 阶项

(2) 极化电荷在球外的贡献为偶极子

(3) 在球内的贡献为均匀电场 - 退极场 (depolarization field)

- 多极矩展开

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \dots$$


---

因此, 电势可以展开为:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad Q = \int \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (4.5.4)$$

$$\varphi_1 = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r}, \quad \vec{p} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau' \quad (4.5.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau' : \nabla \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r}, \quad (4.5.6)$$

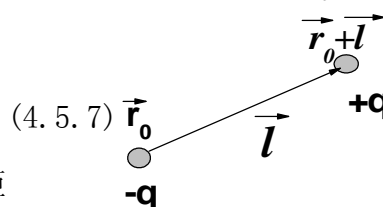
$$\vec{D} = 3 \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau'$$

各项的物理意义如下:

第一项是一个点电荷的势, 相当于 $V$ 内电荷都集中在坐标原点时在 $P$ 点所产生的势; 第二项是偶极子的势,  $\varphi_1 = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , 体系相应的偶极矩为  $\vec{p} = \int \rho \vec{r}' d\tau'$ 。

为便于理解, 考虑由一正一负两个点电荷组成体系, 电荷位置分别处于  $\vec{r}_0$  及  $\vec{r}_0 + \vec{l}$  处, 经过简单计算可得

$$Q = 0, \quad \vec{p} = q\vec{l}$$



此即我们熟悉的电偶极矩。(4.5.5) 是电偶极矩

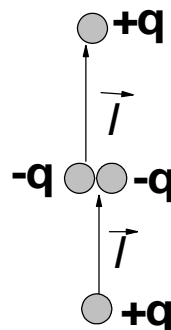
在一般情况下的定义, 相当于(4.5.7)式的推广。

第三项称为体系的四极矩的势， $\boxed{\vec{D} = 3 \int \rho \vec{r}' \vec{r}' d\tau'}$  为体系的四极矩。就像偶极矩可以看做两个大小相等符号相反的电荷（单极矩）靠近组成的体系一样，四极矩可以看作是由 **大小相等方向相反的偶极子** 组成的系统，最简单的情况如下图所示。此时，容易证明， $\vec{D}$  中唯一不为 0 的分量是

$$D_{zz} = 6l^2q$$

一般的电荷分布情况下，电四极矩的定义是 (4.5.6) 式。

$\vec{D}$  是一个并矢，或者说是个  $3 \times 3$  矩阵，共有九个分量，由于它是对称的，所以只有六个独立分量。 $\vec{D}$  中还有一个



隐含的不独立分量，注意到在  $\vec{r} \neq 0$  处总有  $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ （空间无电荷分布），亦即：

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} = \vec{\vec{I}} : \nabla \nabla \frac{1}{r} = 0 \quad (4.5.8)$$

上式显示对任意一个常数 C，均有

$$C \vec{\vec{I}} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \equiv 0 \quad (4.5.9)$$

若选择此常数正比于  $\vec{D}$  矩阵的迹，

$$C \propto \text{Tr}\{\vec{D}\} / 3 = (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) / 3 \quad (4.5.10)$$

根据 (4.5.6) 和 (4.5.9) 式，我们发现  $\varphi_2$  可改写为

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \left( \vec{D} - \frac{\text{Tr}\{\vec{D}\}}{3} \vec{\vec{I}} \right) : \nabla \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

其中

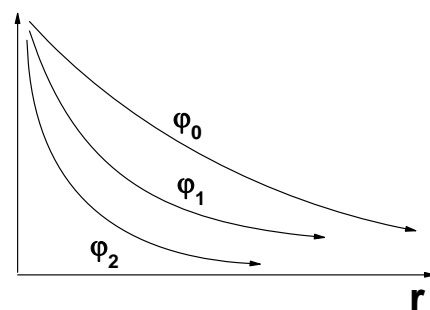
$$\boxed{\vec{\vec{D}} = \int (3\vec{r}'\vec{r}' - \vec{r}'^2 \vec{\vec{I}}) \rho d\tau'} \quad (4.5.12)$$

$\vec{\vec{D}}$  称为 **约化四极矩**，显然它是对称的无迹张量，即

$$\vec{D}_{ij} = D_{ji}, \quad \vec{D}_{11} + \vec{D}_{22} + \vec{D}_{33} = 0 \quad (4.5.13)$$

只有 5 个独立分量。

**根据 (4.5.4-6) 可以看出，随着多极矩级数的增加，其对远处的势的贡献更快地减小  $\varphi_0 \gg \varphi_1 \gg \varphi_2$ 。换言之，**



随着距离的推进，我们逐渐感知到电荷体的电荷、偶极子、四极子、…的贡献。

\*\*\*\*\* 以下为选读内容

直角坐标系中的多极距表达式比较容易被人理解，但科研中更常用的是球坐标系中的多极距展开。在球坐标下对  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R}$  作 Taylor 展开。根据恒等式

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{(2l+1)} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \quad r > r', \quad \text{电势为}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (4.5.14)$$

$q_{lm} = \int r'^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') d\tau'$  称为多极矩，它实质上是笛卡儿坐标系中的多极矩在球坐标系中的表示。非常容易理解  $l=0, 1, 2, \dots$  分别对应于点电荷、偶极矩、电四极矩、… 的贡献，而他们分别具有  $2l+1$  个独立分量（不同的  $m$  值），而这些矩所对应的“波函数—— $\varphi$ ”类似原子物理中  $s, p, d, f \dots$  轨道电子的波函数。。其实，我们可以这样来进一步理解多级矩。在无源区 Laplace 的通解（假设  $r \rightarrow \infty$  时收敛）为

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l,m} \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}^m(\theta, \phi) = \sum_l \frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (4.5.15)$$

其中第二个表达式为轴对称条件下的形式。对比 (4.5.14) 和 (4.5.15)，我们理解多极距展开不过是把无源区势函数展开成本征函数的形式，而展开系数由外界条件（进一步由源区的电荷分布）唯一确定！



无源区，满足 Laplace 方程

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l,m} \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}^m(\theta, \phi) = \sum_l \frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

思考题:

比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同  $l$  子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以  $l=1$  为例）。

\*\*\*\*\*

[例] 利用多极距展开法计算一个长度为  $L$  的带电棒（线电荷密度为  $\lambda$ ）的电势（展开到电四极距）

解：设棒的中心在坐标原点，则

$$Q = L\lambda$$

$$\vec{p} = \int \lambda z dz = 0$$

$$D_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} 3\lambda z^2 dz = \frac{\lambda L^3}{4}$$



因此，电势为

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{1}{6} D_{zz} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right] + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\lambda L}{r} + \frac{\lambda L^3}{24} \frac{(3z^2 - r^2)}{r^5} \right] + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \lambda \left( \frac{L}{r} \right) + \frac{\lambda}{24} \left( \frac{L}{r} \right)^3 (3\cos^2 \theta - 1) \right] + \dots \end{aligned}$$

你也可以选择直接积分求出电势，然后按照  $(L/r)$  的幂次展开，结果应当一致。

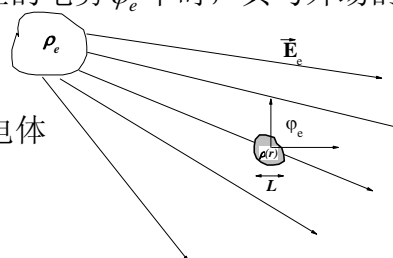
这里我们可以清晰地看出多极矩展开其实是将电势作幂次展开，展开的特征小量是（尺度/距离）。

*Tips:*

- (1) 从物理上讲，电偶极距考量的是体系是否破缺镜面反射对称性（ $x$  与  $-x$ ， $y$  与  $-y$ ， $z$  与  $-z$ ）；电四极距考量的是体系的更细节的东西： $x, y, z$  之间的对称性否被破坏 - 若破坏，则必有电四极距出现。
- (2) 函数形式  $(3\cos^2 \theta - 1)$  似曾相识，事实上它就是  $P_2 = (3x^2 - 1)/2$ ，也可以认为就是  $l=2, m=0$  的波函数  $Y_{2,0}$ （这里有轴对称）。

## § 4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论一块电荷集中在小区域内体系的多极矩，不仅可以容易地得到其在远处产生的电场，还可以容易地计算出一个任意的带电体系与外场的相互作用。尽管这两类问题看上去很不相同，但使用的方法非常类似。上一章中我们知道当一个点电荷在放置在远处的带电体（电荷密度  $\rho_e$ ）产生的电势  $\varphi_e$  中时，其与外场的相互作用能为  $q\varphi_e(\vec{r})$ 。现考虑处于  $\varphi_e$  中的连续带电体（电荷密度为  $\rho$ ，处在坐标原点附近），则带电体





与外场的相互作用能为

$$U_i = \int \rho(\vec{r}) \varphi_e(\vec{r}) d\tau \quad (4.6.1)$$

应当注意我们得到这个结论的前提是体系与源相距甚远，以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。因为  $V$  很小，所以可将  $\varphi_e$  在参考点附近（即原点）作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!} \vec{r} \vec{r} : \nabla \nabla \varphi_e|_{\vec{r}=0} + \dots \quad (4.6.2)$$

代入(4.6.1)式得

$$U_i = U_i^{(0)} + U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + \dots$$

其中

$$U_i^{(0)} = Q \varphi_e(0) \quad (4.6.3)$$

$$U_i^{(1)} = \vec{p} \cdot \nabla \varphi_e|_0 = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e(\vec{r}=0) \quad (4.6.4)$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \varphi_e|_0 \quad (4.6.5)$$

因为  $(\nabla^2 \varphi_e)_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{e0}$ ，而作为外源的  $\rho_{e0}$  一般分布在离  $V$  很远处，故在  $V$  区域内

$\rho_e = 0$ ，因此有  $C \vec{I} : \nabla \nabla \varphi_e|_0 = C \nabla^2 \varphi_e|_0 = 0$ 。再一次，若我们选择常数  $C$  满足  $C \propto \text{Tr}\{\vec{D}\}/3$ ，则有

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \nabla \varphi_e|_0 = \frac{1}{6} \left[ \vec{D} - \frac{1}{3} \text{Tr}\{\vec{D}\} \vec{I} \right] : \nabla \nabla \varphi_e|_0 = \frac{1}{6} \vec{\tilde{D}} : \nabla \nabla \varphi_e|_0 = -\frac{1}{6} \vec{\tilde{D}} : \nabla \vec{E} \quad (4.6.6)$$

$U_i^{(0)}$ ， $U_i^{(1)}$  和  $U_i^{(2)}$  分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。

我们发现，电荷感知到外场的积分效应，电偶极子感知到电场，而电四极子感受到电场的微分效应——因此，多极矩随着级数的增加，愈加能感知到外场细微的变化，因为其本身就是结构的细微不对称给出的。

下面，我们将根据电偶极矩与外场的相互作用能  $U_i^{(1)} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$ ，来求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩。

#### (A) 电偶极矩在外场中受的力

设电偶极子在电场  $\vec{E}_e$  中受到电场的作用力  $\vec{F}_e$ ，方向大小未知。假设施加外力  $\vec{F}' = -\vec{F}_e$ ，则偶极子达到平衡，静止不动。现在在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力  $\delta\vec{F}' \rightarrow 0$ ，使得偶极子 **无限缓慢地** 平移  $\delta\vec{r}$ 。将偶极子与外场 **看成一个体系**，则在这个过程中，外力对体系（偶极子+外场）做的功为

$$\delta W' = (\vec{F}' + \delta\vec{F}') \cdot \delta\vec{r} = \vec{F}' \cdot \delta\vec{r} = -\vec{F}_e \cdot \delta\vec{r} \quad (4.6.7)$$

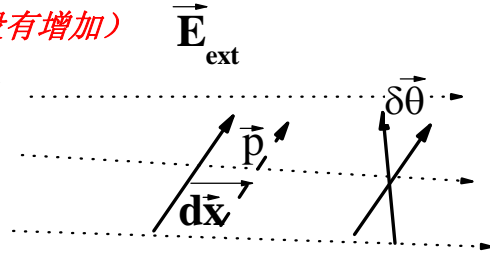
整个体系（电偶极子+外场）的能量增加为

$$\delta U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r} + \delta\vec{r}) + \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\delta\vec{r} \cdot \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r})) \quad (4.6.8)$$

**（注：因为偶极子运动无限缓慢，故动能没有增加）**

根据能量守恒上面 2 式应相等，因此电场对偶极子的作用力为

$$\vec{F}_e = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} + \vec{p} \times (\nabla \times \vec{E})$$



利用静电场  $\nabla \times \vec{E} = 0$ ，得

$$\boxed{\vec{F}_e = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}} \quad (4.6.9)$$

**一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有电场非均匀时才受到电场的作用力！**

### (B) 电偶极矩在外场中受的力矩

完全类比于力的处理，设电场对偶极子的力矩为  $\vec{M}_e$ ，则施加外力矩  $\vec{M}' = -\vec{M}_e$  将偶极矩 **准静态地** 转动一个  $\delta\vec{\theta}$ ，外力矩作的功为  $\vec{M}' \cdot \delta\vec{\theta} = -\vec{M} \cdot \delta\vec{\theta}$ ，体系（偶极子+外场）的能量增加为  $\delta(-\vec{p} \cdot \vec{E})$ ，故根据能量守恒有

$$-\vec{M}_e \cdot \delta\vec{\theta} = -\delta(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\delta\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (4.6.10)$$

因为  $\vec{p}$  的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\vec{p} = \delta\vec{\theta} \times \vec{p} \quad (4.6.11)$$

这样

$$\vec{M}_e \cdot \delta\vec{\theta} = (\delta\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{E} = (\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \delta\vec{\theta} \quad (4.6.12)$$

即

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}} \quad (4.6.13)$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，则其就会受到一个力矩的作用使其平行于电场！

## 第五章 静 磁 场

本章中我们将学习静磁场的处理。静磁场是由**稳恒电流**产生的不随时间变化的场。电流是由电场驱动电荷运动而产生的。因为电流在流动过程中一定有能量耗散（将动能交给杂质，以热能形式给环境），静电场本身产生的电流一定不能稳恒！必须有外加的非静电来源的场（电动势）一直给体系提供能量才能保持电流稳恒！因为课程的时间限制，这里我们将略去对稳恒电流的来源及其满足的规律的讨论，而只假设我们得到某种一定分布的稳恒电流  $\vec{j}$ ，讨论由其产生的静磁场的基本行为。

### § 5.1 磁场的矢势方程和边值关系

静磁场的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

本构关系（假设为线性、各向同性介质）为  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。在两个磁介质的交界面上相应的边值关系为

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\alpha} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式。利用  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，可得

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j} \quad (5.1.3)$$

静磁场满足  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  [此结论可由 Biot-Sarvert 定律推出（见第 1 章）]，上式变成

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (5.1.4)$$

(5.1.4)式即为我们熟知的泊松方程，只不过现在其表现成矢量得方程 – 亦即每一个  $\vec{A}$  的分量场都满足泊松方程。所以矢势  $\vec{A}$  和标势  $\varphi$  在静场时满足同一形式

的方程。

习题：P. 115, 4.9, 4.11, 4.14

补充题：证明 (4.6.6) 式（补齐课件中省略的所有数学运算步骤）

选做题

1) 比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同  $l$  子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以  $l=1$  为例）。

2) 对课件中的例题，利用直接积分法求出电势，然后按照  $(L/r)$  的幂次展开，将最后结果与多级矩展开法比较。

# 第十三讲

上次课

- 多极矩展开（点电荷、偶极子、四极距）

$$\begin{aligned}
 Q, \quad \vec{p}, \quad \vec{D} \\
 \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \\
 W_{\text{int}} = Q\varphi_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \vec{p} + \dots \\
 \downarrow \\
 \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_{\text{ext}} \\
 \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}
 \end{aligned}$$

- 静磁场:  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$  泊松方程

为了求解 (5.1.4)，我们还要导出关于  $\vec{A}$  的边值关系。在介质分区均匀时，对应 (5.1.1) 式我们有

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot [(\nabla \times \vec{A})_1 - (\nabla \times \vec{A})_2] = 0 & (5.1.5) \\ \vec{e}_n \times \left[ \frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A})_1 - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A})_2 \right] = \vec{\alpha}_f & (5.1.6) \end{cases}$$

(5.1.5) 式可进一步简化为

$$\nabla \cdot [\vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)]_{\text{boundary}} = 0 \quad (5.1.7)$$

上式显示  $\vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{\text{boundary}}$  为与界面位置无关的常矢量，但其方向和大小并不能从中得到。仿照我们以前在静电学中对电势的边界条件的处理，将关系式

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

应用到交界面的一个闭合回路上，只要  $\vec{B}$  在交界面上的值是有限的，则有

$$(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0 \quad (5.1.8)$$

这表示  $\vec{A}$  在边界的切线方向的分量是连续的，这与静电学中的边界条件  $\varphi_1 = \varphi_2|_{\text{boundary}}$  (4.1.6) 相对应。同样道理，事实上 (5.1.6) 对应于静电学中的另

外一条边界条件  $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$  (4.1.3)，在某一些特定的条件下，完全可以把 (5.1.6) 式化成与 (4.1.3) 类似的形式。

因此，对静磁学问题，边界条件有 2 中设置方法，(1) 或者设置在边界上

的  $\vec{e}_n \times \vec{A}$  的数值（根据 (5.1.8)），(2) 或者设置在边界上的  $\vec{e}_n \times \vec{H}$  的数值（对应边条 (5.1.6)）。设置好体系的边界条件，就可以(5.1.8)在边条下求解 Poisson 方程解出  $\vec{A}$  和  $\vec{B}$ 。

我们一再看到了静磁场问题和静电场问题的类似性，其实这 2 个问题中场能的表达式也完全类似。静电场能量为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varphi \rho d\tau$$

静磁场的能量为

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \end{aligned}$$

形式与静电场总能非常类似。

注：

1) 从现有的所有证据来看，你一定以为静磁场中的  $\vec{A}$  与静电场中的  $\varphi$  的地位类似（都是势），而  $\vec{j}$  与  $\rho$  的地位一致（都是源）。这是对的，但又不完全对。从满足的方程和相对论协变等许多问题来看这个论断是对的，在有些情况下结论却恰恰相反 ——  $\vec{A}$  与  $\rho$ ， $\vec{j}$  与  $\varphi$  的地位一致（参考 Landau 或者 Jackson 的书）。严格推导需要很大的篇幅，但我们可以从一个简单的 Argument 来理解：在静电学中，当我们将电荷给定时，相当于使导体成为孤立导体，任何外界的变动都不会改变孤立导体上的电荷，这样的体系是“孤立体系”；当我们确定  $\varphi$  时，外界的变化会改变导体的电势因此必须有“外源”输出或抽出能量以保持恒定电势，因此这样的体系是个“有源体系”。现在我们看静磁学，给定电流  $j$  情况下，如果外界发生改变则驱动电场相应发生变化，此时也必须从“电动势”输出或抽出能量以保持恒定电流，因此这个体系不是“孤立体系”，恰恰是一个“有源体系”！。从这个意义上讲，在考虑这类问题是（孤立或者有源）， $\vec{j}$  与  $\varphi$  的地位一致！

2) 静电边界条件的两类设置方法很容易实行 —— 确定电势（接一个大的等势体，对应  $\varphi$ ）或者确定电荷（孤立导体，对应  $\vec{n} \cdot \vec{D}$ ）。你能否考虑下实际情况下静磁边界条件如何设置（ $\vec{n} \times \vec{A}$ ， $\vec{n} \times \vec{H}$ ）？

## § 5.2 静磁场的唯一性定理

与静电场类似，静磁场也有唯一性定理 --- 对确定的体系，场的解由边界条件唯一确定。对静电问题，边界条件可以是设定边界上标势值  $\varphi|_b$ ，或者是  $\vec{D}$  场在边界上垂直分量（与导体上的表面电荷有关）；与此相对应，对静磁问题，前者是边界上的矢势  $\vec{A}$  的切向分量（见边条 (5.1.5)），后者是  $\vec{H}$  场的切向分量（与导体上的表面电流相关，见 (5.1.1)）。

**定理：**如果静磁体系  $V$  内存在着电流和磁介质，且关系式  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  成立，则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及边界条件（边界上  $\vec{A}$  或  $\vec{H}$  的切向分量）唯一确定。

**证明：**设对同一个体系存在两组不同的解  $\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \mu \vec{H}'$  和  $\vec{B}'' = \nabla \times \vec{A}'' = \mu \vec{H}''$ ，均满足预设的边界条件，则有

$$\nabla \times \vec{H}' = \nabla \times \vec{H}'' = \vec{j} \quad (5.2.1)$$

$$\vec{e}_n \times \vec{H}'|_b = \vec{e}_n \times \vec{H}''|_b \quad \text{or} \quad \vec{e}_n \times \vec{A}'|_b = \vec{e}_n \times \vec{A}''|_b \quad (5.2.2)$$

根据场的线性叠加原理，我们可构造一个新的场，即令

$$\vec{B} = \vec{B}' - \vec{B}'', \quad \vec{H} = \vec{H}' - \vec{H}'', \quad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}'' \quad (5.2.3)$$

对于这样一个场，显然，

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \vec{e}_n \times \vec{A}|_b = 0, \quad \text{or}, \quad \vec{e}_n \times \vec{H}|_b = 0 \quad (5.2.4)$$

我们来计算这个场的能量：

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_S [(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{e}_n] dS \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

根据矢量混合积公式  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ ，(5.2.5) 中右方积分函数可改写为

$$(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{e}_n = (\vec{e}_n \times \vec{A}) \cdot \vec{H} = (\vec{H} \times \vec{e}_n) \cdot \vec{A} \quad (5.2.6)$$

根据 (5.2.4)，我们发现，无论我们设置的边条是对  $A$  还是对  $H$ ，(5.2.5) 式右端恒为 0。于是，

$$\int \frac{1}{\mu} (\vec{B}' - \vec{B}'') \cdot (\vec{B}' - \vec{B}'') d\tau = 0 \quad (5.2.7)$$

由于体系的磁导率  $\mu_r$  恒正，故要使积分值恒为零，被积函数必须恒为零，即

$$\vec{B}' = \vec{B}'' \text{ 或 } \vec{H}' = \vec{H}''$$

可见，所设的两个解是同一个解，定理得证。显然，类似我们对静电问题唯一性定理的证明，静磁问题中，只要  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的关系是单调上升的，即使不是线性介质，唯一性定理仍然成立！

*简单的讲，静磁场的唯一性定理和静电场的唯一性定理一样，都表述的是：对以一个给定的物理问题，解由边界条件唯一确定。当然，它们的适用条件也是一样的，只对 B-H 关系单调且一一对应的体系成立。对铁磁/铁电等体系，一个给定的 E, B 场对应不同的 D, H 场，则唯一性定理不成立。*

### § 5.3 磁场的矢势解法：二维问题

原则上讲，给定边界条件以及电流分布（磁场的源），我们即可以通过解泊松方程（5.1.4）求解矢势从而进一步求解磁场。然而真正利用解析方法解矢势方程非常麻烦而且可解的问题并不太多。下面我们举最简单的一种体系---二维的稳定电流体系---来介绍求解矢势的方法。所谓二维问题，是指不仅体系的边界是二维的，而且体系内的电流只沿着  $z$  轴方向流动。根据稳定电流的条件  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  可知， $\frac{\partial}{\partial z} j_z = 0$ ，电流密度与  $z$  方向的空间坐标无关，即

$$\vec{j} = \vec{e}_z j(x, y) \quad (5.3.1)$$

根据静磁场的矢势的定义  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R}$ ， $\vec{A}$  只有  $z$  方向的分量；进一步根据体系沿  $z$  方向的平移不变性， $\vec{A}$  只能是  $x, y$  的函数。综上，

$$\boxed{\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y)} \quad (5.3.2)$$

于是， $\vec{A}$  所满足的方程变成一个标量方程：

$$\nabla^2 A = -\mu j_f \quad (5.3.3)$$

下面举一些例题来说明问题的求解。



**[例 1]** 空间沿  $z$  方向有一无限长载流直导线（载有电流  $I$ ），求空间的矢势分布。

解：这是个典型的 2 维问题，当然可以通过求解 (5.3.3) 得到。但这里可先求空间的磁场分布，再由  $\mathbf{B}$  场求  $\mathbf{A}$  场。由安培定理可得（取柱坐标系）

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\phi$$

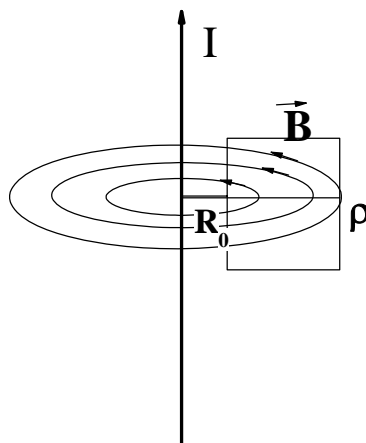
根据  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ，可利用 Stokes 定理有  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ，选择如图所示的安培环路，则有

$$[A(\rho) - A(R_0)]h = -h \int_{R_0}^{\rho} B(\rho') \cdot d\rho'$$

积分可得

$$\begin{aligned} A(\rho) &= A(R_0) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{R_0}\right) \\ &= \text{const.} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(\rho) \end{aligned}$$

其中 const. 取决于矢势原点的选取。



**注：**本例也可以用  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$  直接求出，不妨试试。

**[例 2]** 求均匀场  $\vec{B} = B_0 \hat{e}_x$  对应的矢势分布

解：乍一看，这个未必是各 2 维问题。考虑到均匀磁场可以由放在无限远处的无限大载有  $z$  方向均匀面电流的金属板（平行于  $xz$  面）产生，这个问题就很清楚是 2 维问题，因此可设  $\vec{A} = A(x, y) \hat{e}_z$ 。根据  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ，得

$$\partial_y A \hat{e}_x - \partial_x A \hat{e}_y = B_0 \hat{e}_x$$

因此有

$$A(x, y) = B_0 y = B_0 \rho \sin \theta$$

**注：**矢势的选取并不唯一，除了可以差一个积分常数外，矢势还可以任意加上一个“规范场”而不影响它们给出相同的磁场。上面这个结果是假设电流沿  $z$  方向， $\mathbf{A}$  的方向因此定下来沿  $z$  方向，这等价于我们取定了一个规范。其实我们不一定非得做这个假设（规范），其它形式的电流也有可能产生同样的均匀磁场。比如  $\vec{A} = (1/2) \vec{B} \times \vec{r}$  也可以对应同样的磁场，这是所谓 Landau 规范下的结果，你能证明这个结论并讨论一下其对应的电流分布吗？

**[例 3]** 半径为  $R$  的圆柱形磁介质（磁导率为  $\mu_2$ ），放置于均匀的外磁场  $\vec{B}_0$  中，设

柱外面为磁导率为  $\mu_1$  的介质。场的方向与柱轴垂直，求空间的场分布。

**解** 如图 5.1 所示，空间分成两个区域， $\rho > R$  的区域矢势为  $\hat{A}_1(x, y)$ ， $\rho < R$  的区域矢势为  $\hat{A}_2(x, y)$ ，它们均满足 Laplace 方程（没有传导电流）：

$$\nabla^2 A_1 = 0, \nabla^2 A_2 = 0 \quad (5.3.4)$$

考虑边值关系。在  $\rho = R$  的边界上，显然(5.1.8)式即为

$$A_1(\rho = R) = A_2(\rho = R) \quad (5.3.5)$$

考虑边条（5.1.6）。因为  $\vec{A} = \hat{A}(x, y)$ ，利用柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  中的公式可得

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{n} \times (\nabla \times \vec{A}) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_z$$

我们就可以把(5.1.6)式写成

$$\left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=R} = -\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \quad (5.3.6)$$

把它们与介质中的静电方程和边值关系比较，立即发现它们的形式完全一样。因此，二维静磁问题完全可以仿照静电问题中的各种解法来求解。

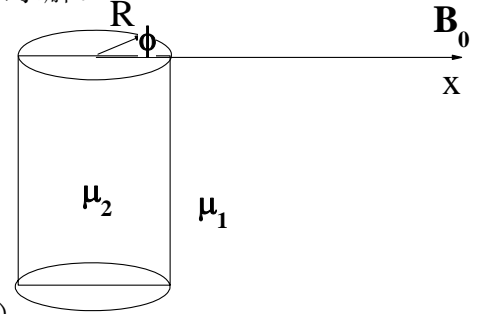
其他边界条件：

$$\rho = 0, A_2 \text{ 有限。} \quad (5.3.7)$$

$$\rho \rightarrow \infty, A_1 \text{ 包括均匀场的贡献。} \quad (5.3.8')$$

即

$$\rho \rightarrow \infty, A_1 = \text{const.} + B_0 y = \text{const.} + B_0 \rho \sin \phi \quad (5.3.8)$$



下面我们根据上述条件利用本征函数展开法找出各区的解。

根据问题的对称性， $A_1, A_2$  可以展开成相应的本征函数的线性叠加：

$$\begin{aligned} A_1 &= g_0 + h_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \rho^n + h_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \\ A_2 &= g'_0 + h'_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (g'_n \rho^n + h'_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \rho^n + d'_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

根据边条（5.3.7）-（5.3.8），易知：

$$\begin{aligned} g_n &= 0, n = 1, 2, \dots; & c_n &= 0, n > 1, c_1 = B_0; & h_0 &= 0 \\ h'_n &= 0, n = 1, 2, \dots; & d'_n &= 0, n = 1, 2, \dots; & h'_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

由边条 (5.3.5) - (5.3.6), 得到

$$\begin{cases} g_n R^n + h_n R^{-n} = g'_n R^n + h'_n R^{-n} \\ \frac{1}{\mu_1} (n g_n R^{n-1} - n h_n R^{-n-1}) = \frac{1}{\mu_2} (n g'_n R^{n-1} - n h'_n R^{-n-1}) \end{cases} \quad (5.3.11)$$

以及

$$\begin{cases} c_n R^n + d_n R^{-n} = c'_n R^n + d'_n R^{-n} \\ \frac{1}{\mu_1} (n c_n R^{n-1} - n d_n R^{-n-1}) = \frac{1}{\mu_2} (n c'_n R^{n-1} - n d'_n R^{-n-1}) \end{cases} \quad (5.3.12)$$

根据 (5.3.10), 当  $n > 1$  时, (5.3.11) - (5.3.12) 没有非平凡解, 亦即所有  $n > 1$  时的参数均为 0。当  $n = 1$  时, 由 (5.3.12) 可以解得

$$d_1 = R^2 B_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad c'_1 = \frac{2 B_0 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.3.13)$$

除了不重要的常数  $g_0 = g'_0$  外, 其余的系数均为零。故空间矢势 (取常数为 0) 为

$$\begin{aligned} A_1 &= B_0 \rho \sin \phi + B_0 R^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{\sin \phi}{\rho} \\ A_2 &= \frac{2 B_0 \mu_2}{\mu_2 + \mu_1} \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

根据矢势可以容易地计算出磁场的形式。这里, 柱外的磁场由外磁场和介质磁化后的磁化电流在柱子外产生的磁场, 后者完全等价于放置在原点处的一个 2 维偶极子, 柱内的场为一均匀磁场, 包含了外磁场以及“退磁场”的贡献。

*Tips: 从上一章到这一章的这么多例子中, 我们可以清楚地明白, 均匀外场下对柱、球等的影响只是激发  $l=1$  项 (即偶极项), 其他的项都是 0。这个原因也很简单, 均匀场的势正比于  $r$  的一次方, 因此它也只作用到  $l=1$  这个子空间。明白了这个道理, 以后再做相应的题目时可直接仅仅保留  $l=1$  项 (对均匀外场), 结果的正确性由唯一性定理保证, 以简化计算书写步骤。*

## § 5.4 磁场的标量势解法

上节课我们介绍了磁场的矢势解法。尽管这种方法物理图像直接, 但因  $\vec{A}$  是矢量场, 运算极其繁复, 实用性 (特别是解析计算) 不强。对比静电场, 如果能引入标量势就容易多了。下面我们将仔细讨论引入磁标势的条件, 并用它研究线性磁介质及 (具有复杂的非线性响应) 铁磁介质中的磁场。

## 1. 磁标势

什么条件下可以引入磁标势？带着这个问题，让我们重新考察静磁场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \end{cases} \quad (5.4.1)$$

如果所考察的空间区域没有传导电流，则有

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (5.4.2)$$

上式提醒我们似乎可以据此引入标势  $\varphi_m$ （称为磁标势）

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m. \quad (5.4.3)$$

但是，仔细考虑之后发现：只有条件(5.4.2)还不够保证可以引入磁标势。原因是能引入  $\varphi_m$  的充分必要条件是  $\vec{H}$  为保守场，亦即

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.4.4)$$

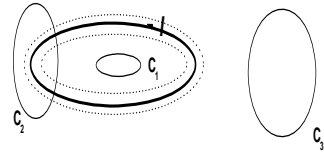
**其中  $C$  为空间中的任意闭合回路。**只有  $H$  场对任意环路的积分都为 0，才能对一个点唯一确定标势，亦即， $\varphi_m$  为位置的单值函数。在很多情况下，(5.4.2) 已经可以导致保守场，但有些情况下，即使考虑的空间没有电流，(5.4.4) 仍不成立。比如对一个载流线圈，若我们做一个轮胎状的东西将空间有电流的部分完全清除（如右图所示），选择  $C_1$ ,  $C_2$ ,

$C_3$  等 3 个环路，对  $C_1$ ,  $C_3$  来说，(5.4.4)

均成立，对  $C_2$  来讲不成立。 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \Big|_{C_2} = I$ ,

意味着是空间同一点的标势值不唯一。

**因此，仅有“无传导电流”这一条件还不能保证  $\varphi_m$  的单值性。**



为了解决这个问题，我们引入以电流环为边界的任意曲面，并规定积分路径不允许穿过此曲面。直观地看，这个以电流环为边界的任意曲面对积分路径来说是个刚性的屏障，使得任何闭合积分路径都穿不过去，这样， $\varphi_m$  不再是多值的了。为此，从曲面的一侧穿过曲面到另一侧，磁标势  $\varphi_m$  是不连续的，存在着大小为  $I$  的跃变，即

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} \Big|_{C_3} = -\int_+^- \nabla \varphi_m \cdot d\vec{l} = \varphi_m^+ - \varphi_m^- = I \quad (5.4.5)$$

所以有时称此曲面为“磁壳”，而 (5.4.5) 作为磁标势在磁壳上的边界条件。因此，为了引入“磁标势”，我们必须，

- 构造合适的“磁壳”已使得空间变成“无源”且“单连通”；
- 设置合适的边界条件。

## 习题

**P. 141, 5.3, 5.4**

选做题：在上面的例 3 中，求束缚在磁介质界面上的磁化电流分布。进一步定义一个 2 维磁偶极子，求出其矢势，然后对比例题 3 的解写出磁介质柱被磁化后的等效（2 维）磁偶极矩。

## 第十四讲

上次课:

- 静磁场唯一性定理 (问题给定后, 边条  $\vec{n} \times \vec{A}$  or  $\vec{n} \times \vec{H}$  唯一确定解的形式)
- 静磁场的矢势解法 – 2D 问题, 与电场类比
- 引入磁标势充分必要条件:  $\vec{j}_f = 0$ , 空间单连通

必须引入“磁壳”使得空间变成单连通! 这样, 就阻挡了那些有可能环绕电流的回路。这样的空间中  $\varphi_m$  不再是多值的了。但代价是:  $\varphi_m$  在磁壳的两边不连续, 必须设定合适的边界条件。考虑磁壳的某一点上下的磁标势的差, 按照定义, 这个差值就是磁场沿某一路线在单连通空间由“+”这一点积分到“-”这一点:

$$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = - \int_+^- \nabla \varphi_m \cdot d\vec{l} = \int_-^+ \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (5.4.5)$$

而另一方面, 根据安培定律, 这个积分的数值是:  $\int_-^+ \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ 。所以在“磁壳”的上下表面磁标势有一个  $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$  的跳跃, 这就是磁标势在磁壳上的边界条件。

**注: 某种意义上讲, 多联通空间中磁标势的“多值性”就像是几何上多个黎曼面的问题, 引入“磁壳”就是选定其中一个“黎曼面”来工作。**

### 2. 线性磁介质中磁场问题

对于顺磁、抗磁两种线性磁介质, 本构关系  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  成立。因此在定义了合适的磁壳之后的区域内, 有  $\vec{B} = -\mu \nabla \varphi_m$ 。将其带入 (5.4.1) 式可得  $\nabla \cdot (\mu \nabla \varphi_m) = 0$ 。在分块均匀的每一块磁介质内部,  $\mu$  是常数, 因此有

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (5.4.6)$$

我们发现此时磁标势  $\varphi_m$  满足和电标势  $\varphi$  完全一样的 Laplace 方程, 事实上, 在无源区下, 电和磁有着完美的对称

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 & \Leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & \Leftrightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \varepsilon & \Leftrightarrow \mu \\ \varphi & \Leftrightarrow \varphi_m \\ \vec{E} = -\nabla \varphi & \Leftrightarrow \vec{H} = -\nabla \varphi_m \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

因此, 无须推导我们就可以根据电标势的结论直接给出两块磁介质界面上的磁标势的边界条件:

$$\begin{aligned}\varphi_{m1} &= \varphi_{m2}; \\ \mu_1 \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_1 &= \mu_2 \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_2\end{aligned}\quad (5.4.8)$$

所以，对无源的线性磁介质中磁场问题，需在边条（5.4.8）下求解方程（5.4.6）。解法技巧可借鉴电场的标势问题---**唯一应当注意的是此时  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{H}$  对应**，尽管这里只是数学上的对应，物理上讲  $\mathbf{H}$  不是真实的磁场！

**[例 1]** 真空中将一个半径为  $R$  的磁介质球（磁导率为  $\mu$ ）放置于均匀磁场（ $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ ）中，求空间的  $\mathbf{B}$  场分布。

解：这个问题的解法可借鉴第十一讲中的例 5。只要把那里的解做代换： $E_0 \rightarrow H_0, \varepsilon \rightarrow \mu$ ，即可求出这个问题的空间磁标势分布：

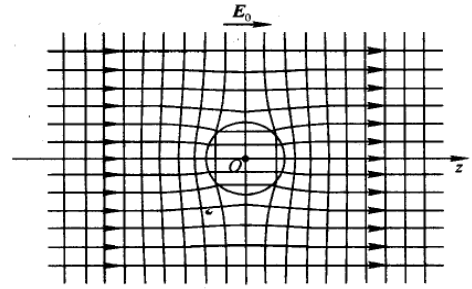


图 4.6

$$\varphi_{m1} = -H_0 r \cos \theta + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} R^3 H_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta$$

$$\varphi_{m2} = -\frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 r \cos \theta$$

定义  $\vec{m} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} 4\pi R^3 H_0 \hat{z}$  并带入上式可得： $\varphi_{m1} = -H_0 r \cos \theta + \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$ 。

利用矢量微分运算，空间的  $\mathbf{H}$  场可因此求出：

$$\vec{H}_1 = -\nabla \varphi_{m1} = H_0 \hat{z} - \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3}$$

$$\vec{H}_2 = -\nabla \varphi_{m2} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 \hat{z}$$

$\mathbf{H}$  场不对应物理场，为了看清楚物理，进一步可以求出  $\mathbf{B}$  场，

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = B_0 \hat{z} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 = \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} B_0 \hat{z}$$

注意到  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}$  正是真空中放置于原点的一个磁矩为  $\vec{m}$  的磁偶极子产生的磁感应场（参考第 3 讲（1.2.24）式），因此磁介质球被磁化后对外界表现为一个磁偶极子。磁偶极子的磁标势和电偶极子的电标势之间有着很好的对称性：

$$\boxed{\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}}$$

与静电场问题类似，磁介质球内部的  $\mathbf{H}$  场也是均匀磁场，强度小于外  $\mathbf{H}$  场（因为有退磁场的原因）。

注：

1) 磁标势以及磁偶极子  $\vec{m}$  的定义中没有  $\mu_0$ ，这是为什么？

2) 退磁场的概念是对  $\mathbf{B}$  场还是对  $\mathbf{H}$  场？讨论一下介质内的  $\mathbf{B}$  场与外场的大小？

[例 2] 均匀磁介质球壳放在均匀外磁场  $\vec{H}_0$  中，外面的区域是真空，求场分布。

解 设介质球壳的内外半径分别为  $R$ 、 $R'$ ，球壳的磁导率为  $\mu$ 。取  $\vec{H}_0$  方向为极轴方向的球坐标系，把空间分成三个区域： $r > R'$ ， $R' > r > R$ ， $r < R$ 。三个区域都没有传导电流，因此可使用磁标势，

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0 \quad r > R',$$

$$\nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad R' > r > R,$$

$$\nabla^2 \varphi_{m3} = 0 \quad r < R.$$

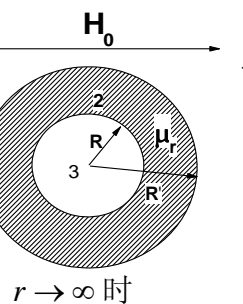
相应的边界条件为

$$\varphi_{m1} \rightarrow -H_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \quad \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \mu_r \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r},$$

$$\varphi_{m2} = \varphi_{m3}, \quad \mu_r \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{m3}}{\partial r},$$

$$\varphi_{m3} \text{ 有限}$$



$r \rightarrow \infty$  时

$r = R'$

$r = R$

$r \rightarrow 0$  时

原则上，我们仍应将  $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \varphi_{m3}$  展开成本征函数的叠加。因此时激发外场为均匀场，只有  $l=1$  项非 0，且处理的是球状体，因此我们可以引入如下试解：

$$\varphi_{m1} = \left( c_1 r + \frac{d_1}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\varphi_{m2} = \left( c_2 r + \frac{d_2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\varphi_{m3} = \left( c_3 r + \frac{d_3}{r^2} \right) \cos \theta,$$

根据边条 (1)，(4) 我们得知

$$c_1 = -H_0, \quad d_3 = 0$$

利用边值关系 (2) - (3) 可以确定系数  $d_1, c_2, d_2, c_3$  (过程从略)。我们比较关心其中的 2 项

$$d_1 = \frac{H_0(\mu_r - 1)(1 + 2\mu_r)(R'^3 - R^3)}{(2 + \mu_r)(1 + 2\mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2 \left(\frac{R}{R'}\right)^3},$$

$$c_3 = \frac{-9\mu_r H_0}{(2 + \mu_r)(1 + 2\mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2 \left(\frac{R}{R'}\right)^3}.$$

下面分析一下结果。从磁标势的结果中可以看出，球壳外的场是均匀场和偶极子



场的叠加。与磁偶极子的标势对比发现整个球壳磁化后对外场表现为一个磁偶极矩  $4\pi d_1$  的磁偶极子。分析几个极限行为：

- 1) 在  $R \rightarrow R'$  或者  $\mu_r \rightarrow 1$  时,  $m = 4\pi d_1 \rightarrow 0$ , 诱导磁矩消失;
- 2) 当  $R \rightarrow 0$  时,  $m = 4\pi d_1 \vec{m} \Rightarrow \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R^3 H_0$ , 回到之前的例题;
- 3) 当  $\mu_r \rightarrow \infty$  时, 磁偶极矩

$$m = 4\pi d_1 \approx 4\pi H_0 R'^3$$

它与  $R$  的大小无关, 与一个金属球 (或者是金属球壳) 对外场的响应类似。

- 4) 球壳内的场是均匀场, 其大小为  $-c_3$ 。当  $\mu_r \rightarrow \infty$  时, 球壳内的磁场

$$\vec{H} = \frac{9\vec{H}_0}{2\mu_r \left[ 1 - \left( \frac{R}{R'} \right)^3 \right]} \rightarrow 0$$

这就是所谓的磁屏蔽。选择的材料  $\mu_r$  越大, 壳层越厚 (即  $\frac{R}{R'} \ll 1$ ), 则屏蔽效果越好。

注:

(1) 在电的世界中, 我们有自由电荷, 而由自由电荷组成的介质就是金属导体, 其对电场完全屏蔽, 相当于  $\epsilon_r \rightarrow -\infty$  的电介质; 前面我们讲到当  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  时, 在静电学的范畴内也可以完全等效于一个导体。在磁的世界中, 由于没有磁单极子的存在, 我们没有类似金属导体的“磁导体”。然而要实现类似一个“磁导体”一样对磁场的响应, 我们可以利用  $\mu_r \rightarrow \infty$  的磁介质 - 在静磁学的范畴内, 其响应与“磁导体”一致。然而要实现高的  $\epsilon_r, \mu_r$  并不容易, 目前的一个前沿课题就是基于“Metamaterial”的理念来实现任意的  $\epsilon_r, \mu_r$ 。

(2) 计算多层介质膜对外场的响应时, 由于直接计算边值关系比较复杂, 有时常采用“转移矩阵”的方法。其理念是根据  $l$  层和  $l+1$  层之间的边值关系确定  $\{c_l, d_l\}$  与  $\{c_{l+1}, d_{l+1}\}$  之间的关系, 并写成一个矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} = T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}, \text{ 以此类推可以推知最外层和最内层的转开系数之间的关系}$$

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \prod T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \text{ 最后根据最外层和最内层的边值条件确定相应系数。这种}$$

方法是非常一般且有用, 可用在所有多层体系 (板、柱、球) 的“波” (量子、静电、静磁、电磁波...) 的散射问题。

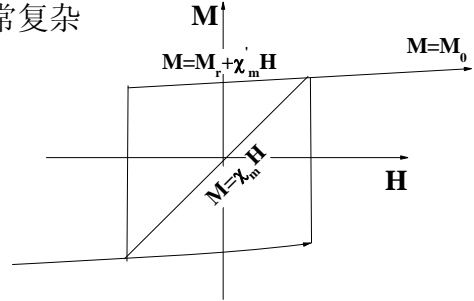
### 3. 铁磁介质问题

铁磁介质为非线性介质, 本构关系  $\vec{B} \neq \mu \vec{H}$ 。因此之前对线性介质推出的方法不

再成立。但  $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$  总是成立的，因此 (5.4.1) 式中第一式变为

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \quad (5.4.9)$$

若空间无传导电流且单连通，则可定义磁标势  $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ 。在铁磁介质的问题中， $\vec{M}$  是  $H$  的函数，由磁滞回路决定，换言之， $\vec{M}$  是  $\varphi_m$  的隐函数，这使得 (5.4.9) 变为  $\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}(\varphi_m)$ ，这是关于  $\varphi_m$  的一个非常复杂的方程，很难处理。必须明确知道  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{H}$  的关系才可以求解。右图是个非常典型的铁磁介质的磁化曲线，从中我们发现不同的过程对应不同的物理。



### A 初始磁化过程

铁磁介质一开始处于无磁性状态，加上磁场后磁矩出现。在这个过程中  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，与顺磁介质一样（见上图），相应的方程为 (5.4.6)。

### B 饱和磁化

当  $H \rightarrow \infty$  时，铁磁介质达到饱和磁化， $\vec{M} = \vec{M}_0$ ，再加外场都不会增加磁矩的大小。因此  $\nabla \cdot \vec{M} = \nabla \cdot \vec{M}_0(\vec{r})$  就变成了与等式左边  $\mathbf{H}$  无关的物理量，可以等效看作一个决定磁标势的有效的“源”。定义

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}_0 \quad (5.4.10)$$

这里  $\rho_m$  称为假象磁荷密度，而磁标势满足的方程为标准的 Poisson 方程

$$\boxed{\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m} \quad (5.4.11)$$

在这里，磁荷对磁标势起的作用于电荷对电标势的作用类似。

\*\*\*\*\* 以下为选读内容

### C 靠近剩余磁矩点时的行为

当体系被饱和磁化后再逐渐撤掉外磁场，在一般情况下，这个过程中  $H$  与  $M$  的关系可近似为

$$\vec{M} = \vec{M}_r + \chi'_m \vec{H} \quad (5.4.12)$$

其中  $\vec{M}_r$  为剩余磁矩。将 (5.4.12) 代入 (5.4.10)，并整理可得

$$(1 + \chi'_m) \nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}_r(\vec{r}) \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \varphi_m = -\rho_m / \mu'_r \\ \nabla \cdot \vec{M}_r(\vec{r}) = -\rho_m \end{cases} \quad (5.4.13)$$

此时的物理行为仍然是有“磁荷”作为源的 Poisson 方程，只是处于一个顺磁介质的背景中。可以说是将体系的顺磁性与饱和磁矩两样贡献分开。

\*\*\*\*\*

下面求  $\varphi_m$  在两个磁介质交界面上的关系。

根据  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -\Delta\varphi_m$ ，只要  $\mathbf{H}$  在边界处不发散，边条

$$\boxed{\varphi_{1m} = \varphi_{2m}} \quad (5.4.14)$$

始终成立。考虑微分方程 (5.4.9) 对应的边界条件，显然有

$\vec{e}_n \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -\vec{e}_n \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2)$ ，对情况 B 有

$$\boxed{\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \vec{e}_n \cdot (\vec{M}_0^1 - \vec{M}_0^2)} \quad (5.4.15)$$

\*\*\*\*\* 以下为选读内容

对情况 C 有：

$$\mu_{r1} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1 - \mu_{r2} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \vec{e}_n \cdot (\vec{M}_r^1 - \vec{M}_r^2) \quad (5.4.15')$$

\*\*\*\*\*

可见，交界面上的关系和静电介质完全类似，(5.4.15) 式中等式右边对应的其实就是“假想”磁荷面密度。因此，引入磁荷和磁标势的好处在于我们可以借用静电学中的方法，第四章中讨论的许多方法都可运用。这在处理永久磁石所激发的磁场等问题时特别方便 ---- 因为对此类问题，体系本来就不存在“传导电流”又是单连通的，因此磁标势方法天然适用。

**[例 5]** 求半径为  $R$  的球形永久磁铁（假设被饱和磁化  $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ ）所激发的磁场。

**解** 把空间分成球内和球外两部分，整个空间不存在传导电流，因此球内外均可用磁标势。球外空间，没有磁矩因此磁荷  $\rho_m = 0$ ，球内区域有磁矩，但其为常数因此仍然没有磁荷。所以  $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}$  均满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0, \quad \nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad (5.4.16)$$

体系的边界条件

$$\begin{cases} \varphi_{m1} \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty \\ \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = -\vec{e}_n \cdot \vec{M}_0 = -M_0 \cos \theta & r = R \\ \varphi_{m2} \text{ finite}, & r = 0 \end{cases} \quad (5.4.17)$$

将  $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}$  展开成本征函数的叠加，根据 (5.4.17) 中边界条件，可以预期只有  $l=1$  项非 0（因为只有  $l=1$  项带有  $\cos \theta$  的角度依赖关系）。只保留  $l=1$  项，再考虑了 (5.4.17) 中两个极限下的边条，试解可以取为：

$$\varphi_{m1} = \frac{A}{r^2} \cos \theta, \quad \varphi_{m2} = Br \cos \theta, \quad (5.4.18)$$

代入 (5.4.17) 得

$$\begin{cases} \frac{A}{R^2} = BR \\ B + 2\frac{A}{R^3} = M_0 \end{cases} \quad (5.4.19)$$

解之可得

$$A = \frac{M_0 R^3}{3}, \quad B = \frac{M_0}{3} \quad (5.4.20)$$

所以

$$\varphi_{m1} = \frac{M_0 R^3}{3} \frac{1}{r^2} \cos \theta, \quad \varphi_{m2} = \frac{M_0}{3} r \cos \theta. \quad (5.4.22)$$

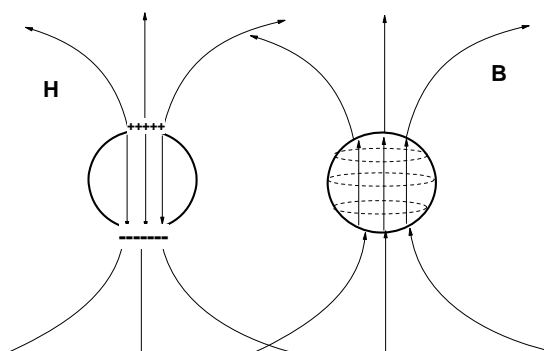
可见，球外空间的磁场是偶极场，其磁偶极矩为  $\vec{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{M}_0$

球内的磁场强度  $\vec{H} = -\vec{M}_0 / 3$

球内的磁感应强度为  $\vec{B} / \mu_0 = \vec{H} + \vec{M} = \frac{2}{3} \vec{M}_0$

这时候比较 **B** 场与 **H** 场的行为很有意思。**B** 场线的法向是连续的，（因为  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ），但其在球的表面切向分量不连续（因  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_M = \mu_0 \nabla \times \vec{M} \neq 0$ ，有磁化电流面密度）。**H** 场与电场的行为类似，与 **B** 恰恰相反 – 其法向不连续，因为  $\nabla \cdot \vec{H} = \rho_M$ ，但其切向却连续。具体的场分布示意图如下。这里面的物理是：

**B 场看到的是磁化“电流”，看不到“磁荷”，H 场恰恰相反，看到的是“磁荷”，看不到“电流”。**



习题：

5.11

### 补充题

利用磁标势方法重新求解第十三讲中的例题 3，体会标势与矢势法的异同。

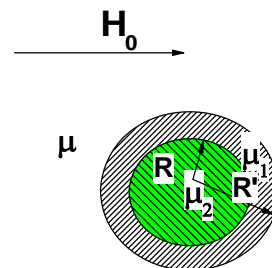
整理下面的问题写成 Note（供学有余力的同学选作）：

- （1） 根据上课的提示，建立多重球壳结构的磁标势解法的转移矩阵方法，并将其推广到量子力学体系（多层介质对电子的散射）及其它可能的几何结构（柱状）。
- （2） 求解下图所示的问题-半径为  $R$  的磁介质球（磁导率为  $\mu_2$ ）外面包一层另外的磁介

质（磁导率为  $\mu_1$ ），总的双层球的半径为  $R'$ ，将这样一个体系放置于第三种磁介质

（磁导率为  $\mu$ ）中，施加均匀磁场，问体系的有效偶极子大小等于多少？调整  $\mu$  的

大小，问什么条件下体系的有效偶极矩消失？



## 第十五讲

### 上次课

- 线性磁介质:  $\nabla^2 \varphi_m = 0$ ,  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{E}$  对应。
  - 饱和磁化的铁磁介质:  $\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m$ ,  $\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}_0$ , 假想磁荷
  - $$\begin{array}{l} \vec{H} \rightarrow \varphi_m \rightarrow \rho_m \\ \vec{B} \rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{j} \end{array}$$
 不同的方法“看到”的东西不一样。
- 

## § 5.5 磁多极矩展开 - 磁偶极子

若源电流分布集中在一个小区域  $V$  中, 而我们只讨论其在远处的产生的磁场, 这时可以仿照静电情况用多极矩展开的方法来处理。这里, 我们重点讨论磁偶极子的场、磁偶极子与外磁场的相互作用。

### 1. 磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中, 矢势  $\vec{A}$  的解为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau'. \quad (5.5.1)$$

类似静电问题中的多极展开, 把  $\frac{1}{R}$  在区域  $V$  内的某一点展开成  $\vec{r}'$  的幂级数。若展开点取在座标的原点, 则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \Big|_{r'=0} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{R} \Big|_{r'=0} + \dots \quad (5.5.2)$$

只保留前两项, 代入矢势表达式中得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{R} d\tau' = \vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)} + \dots \quad (5.5.3)$$

其中

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(0)} &= \frac{\mu}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}') d\tau', \\ \vec{A}^{(1)} &= \frac{\mu}{4\pi r^3} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{r} d\tau',\end{aligned}\quad (5.5.4)$$

这里我们将不直接处理电流密度  $\vec{j}(\vec{r}')$ ，而利用一个没有证明其严格性但却非常有启发性的思路 - 将体积  $V$  内的电流分成许多独立的电流管道的叠加。因为是稳恒电流，每个流管为闭合回路且电流为一常数  $I_i$ 。根据这一思路，可以在积分中做如下代换： $\vec{j}(\vec{r}') d\tau' = \sum_i I_i d\vec{l}_i$ 。考虑第一项

$$\vec{A}^{(0)} \propto \int \vec{j} d\tau' = \sum_i I_i \oint d\vec{l}_i \equiv 0 \quad (5.5.5)$$

(5.5.5) 式背后的物理原因是电流为稳定电流。与电场的多级矩展开不同，磁多极矩的第一项恒为 0，**事实上，这正是自然界没有磁单极的显现**。下面考虑第二项  $\vec{A}^{(1)}$ ：

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \sum_i I_i \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i \quad (5.5.6)$$

对方环或是圆环，上式都可以严格积分出来（详见第二讲）。对任意形状，注意到  $d\vec{r}' = d\vec{l}_i$ ，我们可以首先将上式中的积分进行配分，

$$\oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}_i = \oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = \oint [d((\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{r}')] \quad (5.5.7)$$

在闭合回路条件下上式第一项为 0，因此得到一个恒等式

$$\boxed{\oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}_i = -\oint \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{r}') = -\oint \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{l}_i)}$$

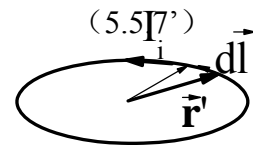
现将 (5.5.6) 中的积分分成 2 项，

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[ \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i + \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i \right] \quad (5.5.6')$$

将上式中的一项用 (5.5.7') 来替代，则有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \left[ \oint (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{l}_i - \oint \vec{r}'(\vec{r} \cdot d\vec{l}_i) \right] \quad (5.5.8)$$

利用矢量叉乘的恒等式  $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}}$ ，(5.5.8) 可以被进一步改写



$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}_i) \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.5.9)$$

其中

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint \vec{r}' \times d\vec{l}_i = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\tau'. \quad (5.5.10)$$

被定义为**磁偶极矩**。上式是对磁偶极矩的最一般定义，针对任意电流分布均可以由此计算。对磁偶极子，我们或多或少已在不同场合介绍其性质，现再总结如下：

(1) 对于一个小的载流闭合线圈，其磁偶极矩  $\vec{m}$  可以由 (5.5.10) 计算为：

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j} d\tau' = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{l}' = I\vec{S} \quad (5.5.11)$$

式中  $\vec{S}$  是电流回路的面积，方向取右手螺旋。这是我们熟知的结果，只不过此处给出的磁偶极矩的定义 (5.5.10) 更一般。

(2) 磁偶极子产生的场在第二讲中已经导出来过

$$\vec{B}_m = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \quad (1.2.24)$$

其与电偶极子  $\vec{p}$  产生的电场  $\vec{E}_p$  形式一致。根据第十四讲，对一个磁偶极子产生的场，在没有电流的地方 ( $r \neq 0$  处) 可以引入磁标势  $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 = -\nabla \varphi_m$ 。磁偶极子的磁标势为：

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (5.5.12)$$

与电偶极子的电标势一一对应。因此对于磁偶极子产生的场，我们既可以用矢势 (5.5.9) 计算，也可以利用磁标势 (5.5.12) 计算。**在无源区，这两个表示方式是一致的。**

### (3) 任意形状的环形电流回路的标势

对任意形状的电流回路，若要考虑离环不太远处的场，这时磁偶极矩近似不精确。设回路中的电流强度为

$I$ ，我们可以把以此回路为边界的任意曲面切割成许多小块，每小块的边界上

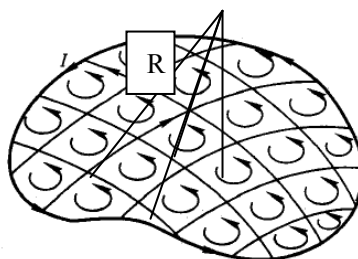


图 5.2



都流有电流  $I$ ，电流的方向同大回路的电流方向相同，这样，这些小块边界上电流相加的结果仍只在大回路中流有电流  $I$ 。对于每一小块面积都相应的有一个磁矩，其大小为  $I d\vec{S}$ ，它在空间产生的磁标势为

$$\Delta\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta\vec{S} \cdot \vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (5.5.13)$$

式中的  $R$  是  $d\vec{S}$  至观察点的位置矢量， $\Delta\Omega$  为这一小块电流回路对观察点张开的立体角。当每个小块电流回路的尺度足够小时，其所产生的场由磁偶极子描述 (5.5.13) 变成精确的（对大块电流源远场近似不成立，对足够小的电流回路远程近似变成精确的）。于是，整个回路所产生的磁标势严格为

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega, \quad (5.5.14)$$

$\Omega$  是回路对观察点所张的立体角，是观察点  $r$  的函数。其磁感应强度为

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\mu_0 \nabla \varphi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega(\vec{r}), \quad (5.5.15)$$

$\Omega$  正负的规定是：按电流的右手法则决定  $\vec{e}_n$  的面法线方向以后，若观察点在  $\vec{e}_n$  的正方向，则  $\Omega > 0$ ，反之  $\Omega < 0$ 。注意当观察点穿过电流围出的面积时，磁标势不连续。当观察点在载流面上时， $\Omega^+ = 2\pi$ ，而当其在面积下时， $\Omega^- = -2\pi$ ，故， $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$ 。其实，这个表面正是我们上次课讲的“磁壳”，必须挖掉其才使得磁标势的定义有意义，尽管其上面并无电流。

## 2. 磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩

与电偶极子在电场中类似，下面我们考虑磁偶极子在外磁场中受到的作用力（矩）。首先，前面已经推导出任意电流分布情况下的体系的总磁能为

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \quad (5.5.16)$$

假设一个载流线圈构成的磁偶极子（磁偶极矩为  $\vec{m} = I\vec{S}$ ）处在由远处电流（简单起见，假设为另外一个载流线圈（电流为  $I_e$ ）产生的静磁场  $\vec{B}_e$  中，则体系的总

磁能为

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A} + \vec{A}_e) \cdot (\vec{j} + \vec{j}_e) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A} \cdot \vec{j} + \vec{A}_e \cdot \vec{j}_e) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j} + \vec{A} \cdot \vec{j}_e) d\tau \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

其中  $\vec{A}, \vec{A}_e$  分别对应电流  $I, I_e$  产生的矢势。

类似电场的情形，似乎我们可以将前一

项定义为体系的**固有能**，后一项定义

为体系的**相互作用能**，

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j} + \vec{A} \cdot \vec{j}_e) d\tau。$$

进一步，根据矢量势的定义

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R}, \quad \vec{A}_e(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_e(\vec{r}') d\tau'}{R} \quad (5.5.18)$$

容易证明

$$\int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j}) d\tau = \int_{\infty} (\vec{A} \cdot \vec{j}_e) d\tau \quad (5.5.19)$$

因此有

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \int_{\infty} (\vec{A}_e \cdot \vec{j}) d\tau = I \oint \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} \\ &= I \Phi_e = \frac{1}{2} (I \Phi_e + I_e \Phi) \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

其中  $\Phi_e = \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$ ,  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  分别为偶极子线圈中通过的外磁场的磁通量以及源线圈中通过的磁偶极子磁场的磁通量。当源距离目标线圈足够远时，可以将其磁场在线圈所处的空间在 origin 附近做 Taylor 展开：

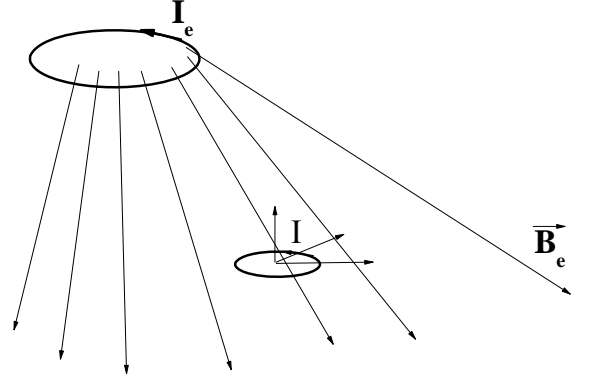
$$\vec{B}_e(\vec{r}) \approx \vec{B}_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})|_{\vec{r}=0} + \dots \quad (5.5.21)$$

带入上式并只保留第一项，

$$U_{B,\text{int}} = I \vec{B}_e(0) \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e \quad (5.5.22)$$

这个形式与电偶极子在电场中的相互作用能  $U_{e,\text{int}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$  不同，似乎意味着在磁场中磁偶极子喜欢反平行于外磁场！这显然是不合理的，但问题在哪里？

问题出在对相互作用能以及固有能的定义上面。在电的情形，当电偶极子在电场中发生平动或是转动时，电场的固有能不发生变化，因为偶极子以及产生外



电场的电荷分布并没有发生变化（因为这里取的边界条件为电荷体为孤立体系；如果将边界条件取做等势条件，情况会有所不同）。对此类磁场体系则有所不同，当磁偶极子相对外磁场的位形发生变化时，会在线圈中生感生电动势。根据 Faraday 电磁感应定律，偶极子线圈和源线圈中产生的感生电动势分别为

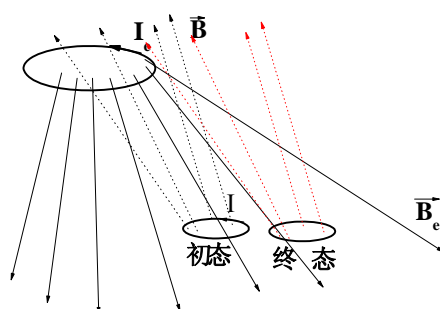
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt}, \quad \varepsilon_e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.5.23)$$

偶极子线圈以及源线圈中的电流会因此被改变，此即是“互感效应”。**在这个过程中“固有能”不可能保持恒定不变。**若我们要求在变化过程中  $\vec{m}$  与  $\vec{B}_e$  均保持不变（亦即  $I, I_e$  不变），**则必须由外接电动势做功抵消感生电动势的做功。**在一个变动过程中，外电源必须做的功为

$$\Delta W_\varepsilon = -\int I \varepsilon dt - \int I_e \varepsilon_e dt = \int I \frac{d\Phi_e}{dt} dt + \int I_e \frac{d\Phi}{dt} dt = I \Delta\Phi_e + I_e \Delta\Phi \quad (5.5.24)$$

其中  $\Delta\Phi_e, \Delta\Phi$  是  $\Phi_e, \Phi$  在过程中的变化。对比 (5.5.20)，我们发现

$$\Delta W_\varepsilon = 2\Delta U_{int} \quad (5.5.25)$$



现在我们根据能量守恒来看一下**保持电流不变**条件下的“磁相互作用能”。对比目标线圈与源线圈的位形发生变化前后的初态与终态，因为电流强度一致保持不变，体系的总能量变化包括：

$$(1) \text{ 磁场相互作用的变化: } \Delta U_B = \frac{1}{2}(I \Delta\Phi_e + I_e \Delta\Phi)$$

(2) 为了保证  $I_e, I$  维持不变，目标线圈及原线圈所携带的电源必须提供  $\Delta W_\varepsilon = I \Delta\Phi_e + I_e \Delta\Phi = 2\Delta U_B$  的能量。因此，**将磁场与电源看成一体**，电源中少了  $2\Delta U_B$  的能量。

因此，线圈 + 电源这个系统总的能量的变化为，

$\Delta\tilde{U}_{\text{int}} = \Delta U_B - \Delta W_\varepsilon = \Delta U_B - 2\Delta U_B = -\Delta U_B$ 。因此可以定义有效相互作用能：

$$\boxed{\tilde{U}_{\text{int}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e} \quad (5.5.31)$$

与电偶极子在电场中的势能（相互作用能）完全一样！仿照电偶极子在电场受力及受力矩的推导，我们可推出磁偶极子在磁场中所受的力及力矩分别为

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -\nabla \tilde{U}_{\text{int}} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \\ \vec{\tau}_B &= \vec{m} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

*Tips:*

电磁理论最难掌握的就是这一点了：许多物理量必须在注明是在什么条件下得到的。等势条件和孤立导体的条件得到的结论截然不同，同样，等电流条件和等矢势也不相同。

## 第六章 似稳场（准静场）

前面几章中我们研究了**静止电荷产生的静电场**、**稳恒电流产生的静磁场**。从现在开始，我们开始研究随时间变化的电磁场。本章研究随时间变化足够缓慢的电磁场，叫做似稳场，又叫“准静场”（Quasi-Static field），这部分的研究是整个电工学的基础。事实上，对很多实际问题，尽管其中电磁场是随时间变化的，由于其满足“似稳”条件，这些问题可以在似稳近似下求解。这将极大地简化我们的计算，而且使得我们具有非常清晰的物理图像。在引言中我提及的“**电磁流变液**”，“**光镊**”等现象其实都属于此类问题。

### § 6.1 似稳条件

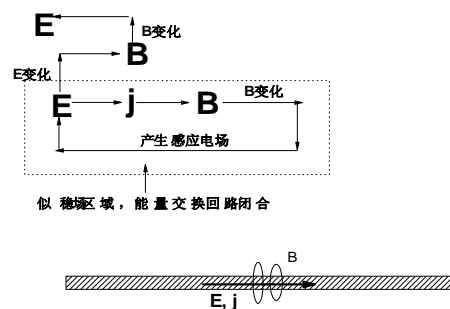
原则上电磁规律是由 Maxwell 方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

决定的，其中  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  称为“位移电流”。位移电流的是由 Maxwell 引入的，其直接

后果是导致电磁波的出现，使得电磁能量以电磁场的形式脱离源而存在。看如下示意图，由电荷（由电荷密度  $\rho$  刻画）产生的电场  $\mathbf{E}$  作用于电荷上时会产生电流（由电流密度  $\mathbf{j}$  刻画），而进一步会产生磁场  $\mathbf{B}$ 。当磁场  $\mathbf{B}$  发生变化时，根据 Faraday 定律会产生感应电场  $\vec{E}_K$ ，其又进一步作用于电荷改变电流，回到之前的循环。若不考虑“位移电流”的影响，则这个图像告诉我们：电场、磁场被一直束缚在电荷、电流附近，即使随时间变化，也不会脱离电荷、电流而去，其行为大致与静态的电磁场相仿。

然而考虑了“位移电流”项之后，这个图像被从根本上打破了。如右图所示，变化的电场不仅可以作用到导线中的载流子上，而且可以因为电场变化通过“位移电流”的效应会导致新的磁场，而磁场的变化导致新的电场，电磁场就这样脱离电荷而去，这个过程叫做“辐射” – 将在第十二章具体展开阐述。

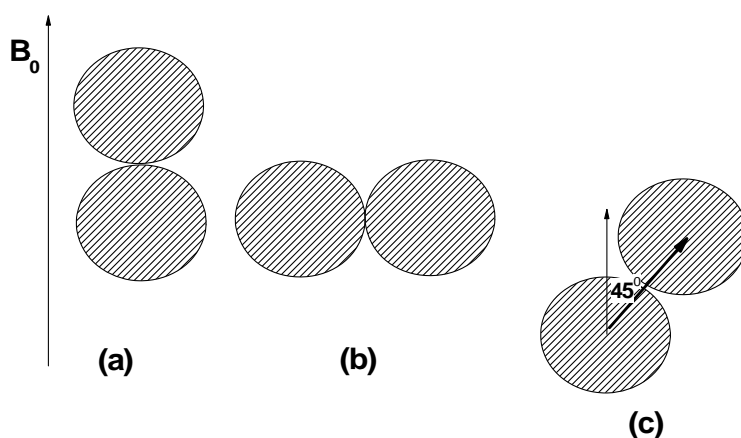


“电磁辐射”产生的电磁场的主要性质是：假设电荷电流均分布在原点附近，则空间  $\mathbf{r}$  位置处产生的场在某一时刻  $t$  的值  $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$  是由比  $t$  早一些时候的电流、电荷  $\vec{j}(t' = t - r/c), \rho(\vec{r}, t' = t - r/c)$  决定的，而并不是由  $t$  时刻的电流和电荷决定，这就是所谓的“推迟效应”。物理上，这非常容易理解，因为某一时刻的电荷、电流产生的影响要经过  $r/c$  时间的电磁波的传播才能到达  $\mathbf{r}$  点。这样的后果是场和源不再满足瞬时的变化关系，给我们的研究带来了麻烦。对此类问题具体计算时，必须严格求解全空间的波动方程（严格方法在第十二章中介绍）。

当某些时空条件满足时，我们可以略去“位移电流”的影响，这样做的后果是使得源和场之间具有瞬时关系（当然是某种近似下的后果）。每一时刻，其源和场之间的关系类似于静态场的源和场的关系，因此这种场也称作“似稳场”。对这种场，很多我们针对静态电磁场发展的方法就可以使用，因此“似稳场”的研究具有重要的实际意义。那么，在什么情况下略去“位移电流”才算是合理的？这就是下面我们要讨论的似稳条件。

习题：

- 1) 考虑一个半径为  $R$  的均匀带电  $Q$  的绝缘体球壳，沿对称轴（设为  $z$  轴）以角速度  $\omega$  匀角速度转动，求空间的磁场分布。[提示：分下面 3 步走（1）求出电流分布；（2）证明球体对应于一个均匀磁化球，并求出磁化强度  $\vec{M}$ ；（3）利用磁标势的方法求解。]
- 2) 将一个半径为  $R$  的磁导率为  $\mu_2$  的磁介质球放入磁导率为  $\mu_1$  的溶液中，当外加一均匀磁场  $\vec{B}_0$  时，求磁介质球携带的有效磁偶极矩（做了好多遍了，可以无需推导直接写出来）。若体系中有两个相同的磁介质球体，问体系将最终选择如图所示的那一种构型？为什么？



注：这个题目的背景就是“磁流变液”，我曾在第 8 届亚洲中学生奥林匹克竞赛中出过一道类似的题目。

思考题

- （1）根据磁偶极子的矢势和标势，分别推出磁偶极子的  $B$  场的形式，讨论 2 个表达式在什么条件下是一样的？
- （2）能否从 Maxwell 张量出发计算一个磁偶极子（载流线圈）在外磁场中受到的力和力矩？若可以，将一个自旋看成一个磁偶极子，根据其在磁场中受到的力和力矩写出自旋在磁场中的有效相互作用能。
- （3）编一段小程序，根据 (5.5.14) – (5.5.15) 计算一个任意形状的载流线圈的磁标势分布及磁场，通过与磁偶极子的远场标势的比较确定什么时候可以看成远场？
- （4）基于磁偶极子与外磁场相互作用的有效势的推导方法，你能否计算出当外电场是由等势条件下的导体产生的体系下，极化能的正确表达式？