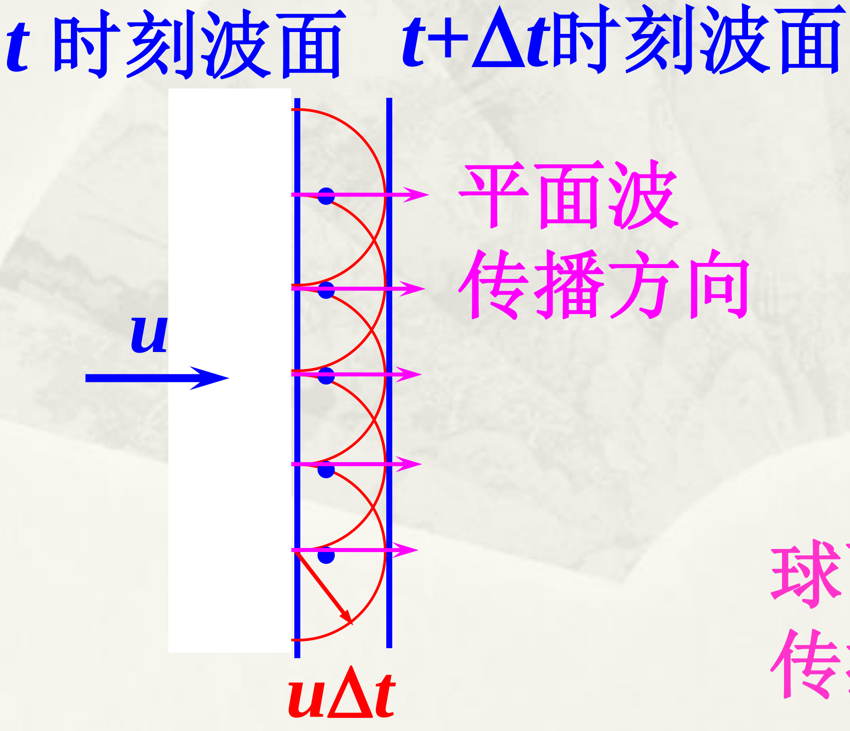
§2.2 惠更斯原理 Huygens’s Principle (1.3)

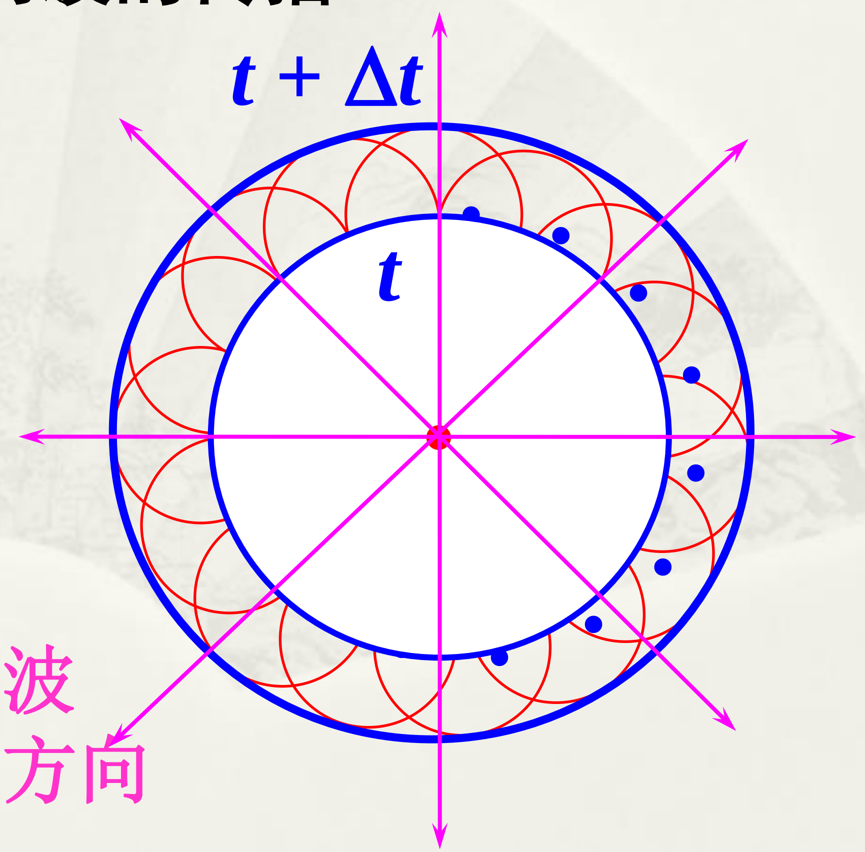
* 我们将会学到：

1. 什么是惠更斯原理。
2. 如何用惠更斯原理证明折反射定律，波面的画法。

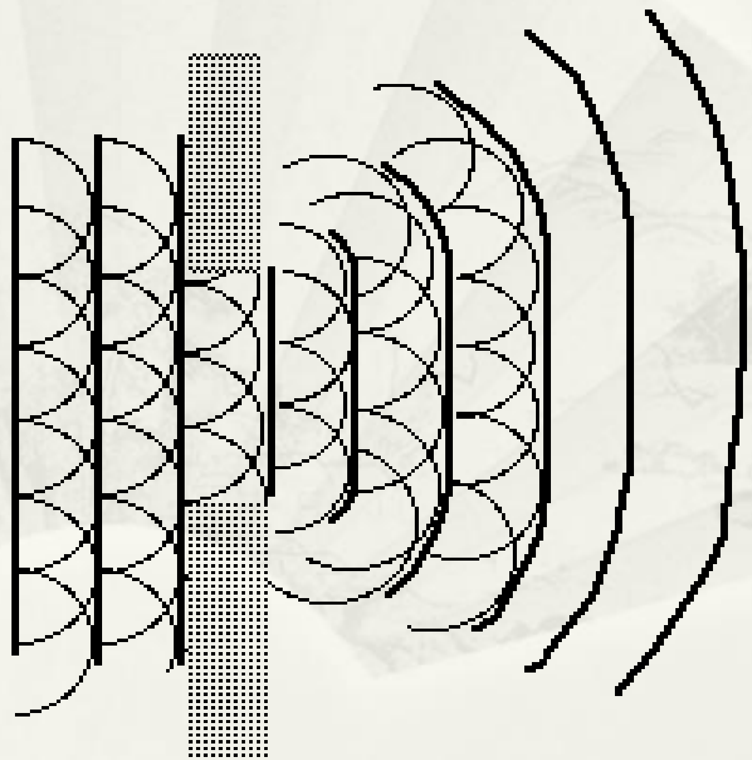
惠更斯原理

- 波面上每一个点都可看做是发出球面子波的波源，这些子波的包络面就是下一时刻的波面。
- **例如，均匀各向同性媒质内波的传播：**



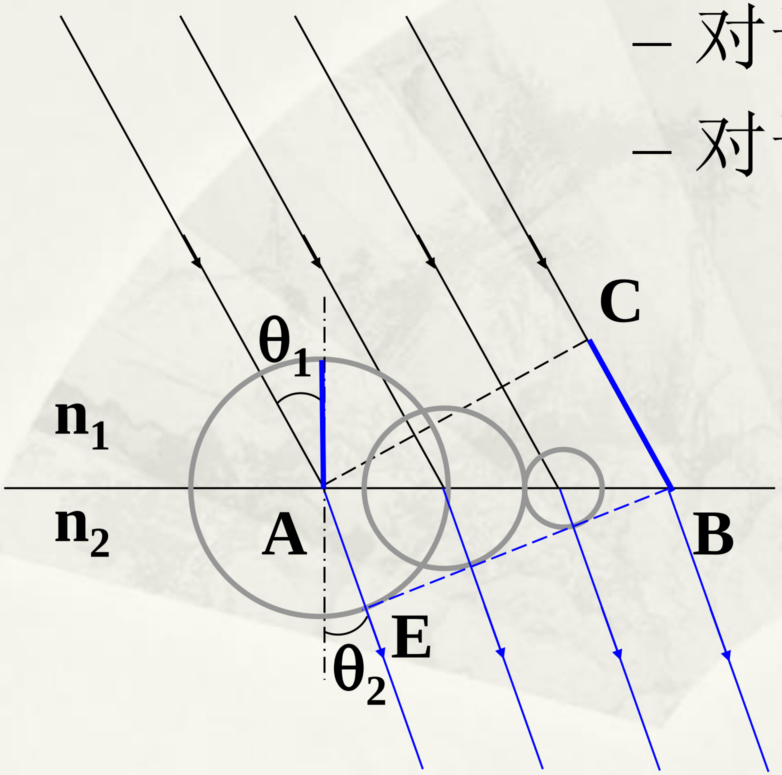


* 利用这个原理，可通过作图法确定下一时刻的波面位置。



惠更斯对折射的理解

- 设一束平行光入射，由n_1到n_2，且$n_1 < n_2$，入射角为θ_1。



  – 对于三角形ABC： $\sin\theta_1 = BC/AB$
  – 对于三角形ABE： $\sin\theta_2 = AE/AB$

$$\therefore \quad \sin\theta_1 / \sin\theta_2 = BC/AE$$
$$= v_1 / v_2$$

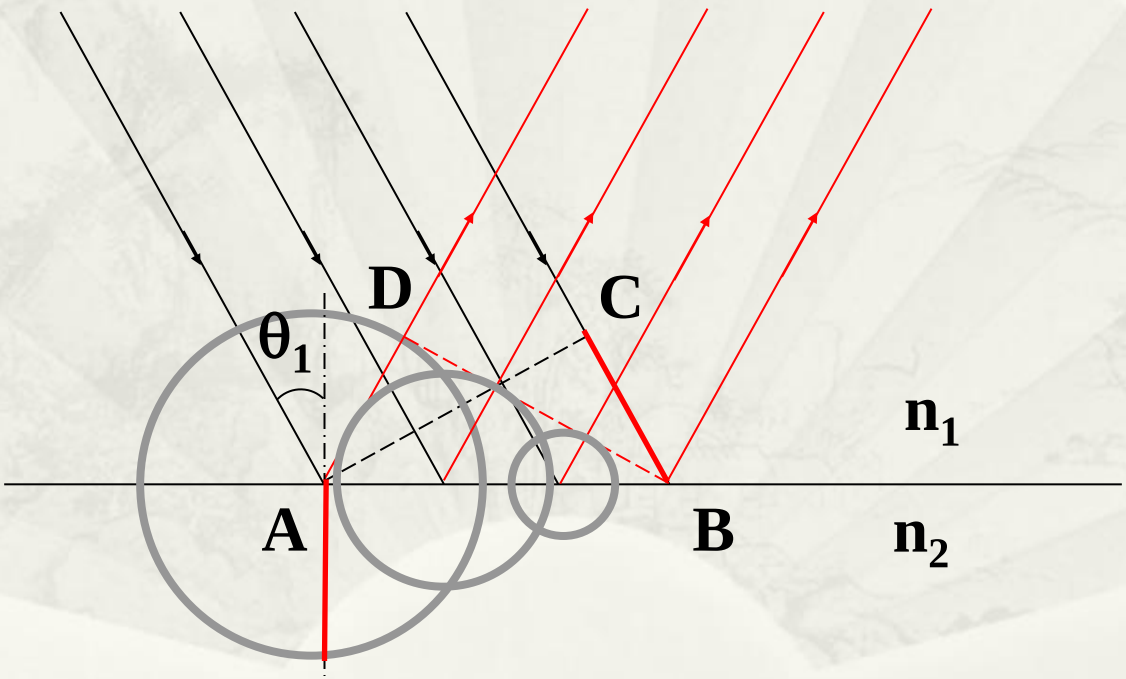
即：入射角的正弦与折射角的正 弦之比为一常数。

由折射率的定义不难推出：

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

惠更斯对反射的理解

- 设一束平行光入射由n_1到n_2，且$n_1 < n_2$，入射角为θ_1。



课堂练习

- 教材P31 思考题 1-7

1-7. 惠更斯原理是否适用于空气中的声波？你是否期望声波也服从和光波一样的反射定律和折射定律？

答：惠更斯原理是关于波面传播的理论，对任何波动过程它都是适用的。不论是机械波或电磁波，只要知道某一时刻的波面，都可以用惠更斯作图法求出下一时刻的波面，由此可以导出波的反射定律和折射定律。这既适用于光波，也适用于声波。不过声波的波长比光波的大得多，反射面或折射面太小时，衍射现象严重。

§2.3 费马原理 Fermat's Principle (1.4)

* 我们将会学到：

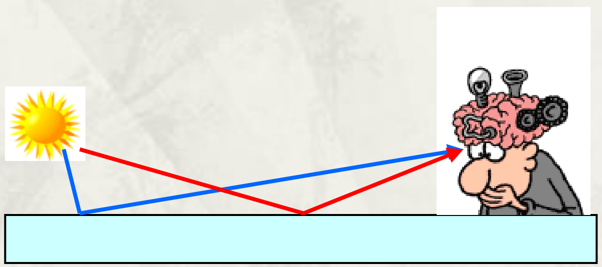
1. 费马原理的两种表述方式。
2. 运用费马原理证明折射、反射定律。

§2.3 费马原理 Fermat's Principle (1.3)

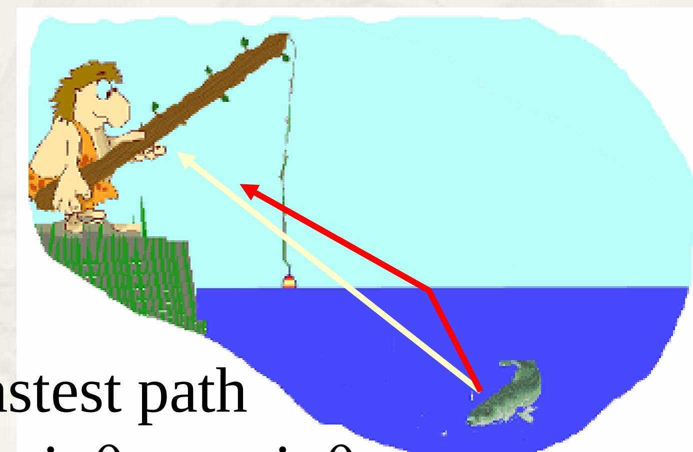
Pierre de Fermat
(1601 - 1665)

Fermat principle (1650):

光在两点之间传播的实际路径是使所花费的时间最短。(The actual path between two point taken by a beam of light is the one that is traversed in the least time.)



reflection: the fastest path corresponds to $\theta_i = \theta_r$



refraction: the fastest path corresponds to $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$

光程 Optical Path

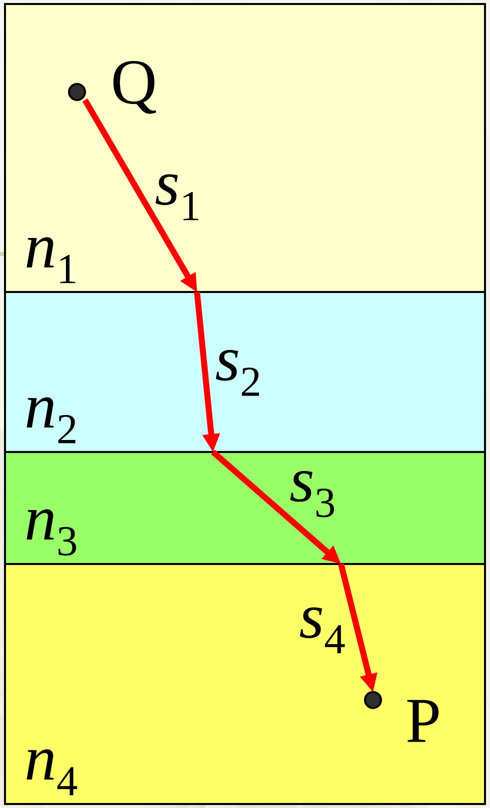
光从Q到P的时间为：

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \ldots$$

$$t = \frac{n_1 s_1}{c} + \frac{n_2 s_2}{c} + \frac{n_3 s_3}{c} + \ldots$$

$$t = \frac{1}{c}\sum_i n_i s_i \quad = \frac{1}{c}\sum_i \Delta_i$$

Δ_i – 光程



光程可理解为在相同时间内光在真空中传播的距离。这样便于比较光在不同介质中走过路程的长短。

对于连续介质：$\Delta \equiv \int_Q^P n(s)\,ds$

光程 Optical Path & 相位 Phase Shift

假设光沿z轴传播，波矢为**k**(=2π/λ)。那么在某个时刻t，位置z处的相位为（假设原点初位相为$\boldsymbol{\varphi_0}$）

$$\varphi = kz - \omega t + \varphi_0$$

仅考虑空间相位，即上式右边第一项，有

$$kz = \frac{2\pi}{\lambda_0 / n} z = \frac{2\pi}{\lambda_0} nz = k_0 nz = k_0 \Delta$$

其中k_0是真空波矢，λ_0是真空波长，Δ是光程。

更精确的费马原理表述

Fermat's Principle
(1679, modern form)

光从Q到P的实际路径，是光程QP为平稳的路径。严格的数学表示：

$$\delta\Delta = \delta\int_{Q\,(L)}^{P} n ds = 0$$

- 所谓“平稳”，是指在真实路径附近，作任何形式的微小变动（如反射点移动、界面形状变化、折射率变化等），光程的一阶改变量为0，仅有二阶改变量。
- 通常来说：

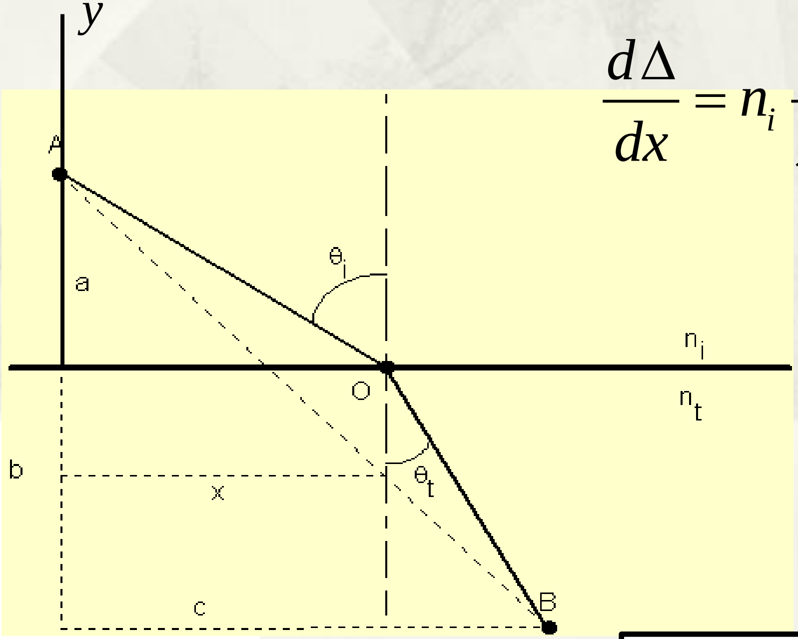
1. 直线传播、反射、 折射属于取极小值。
2. 成像系统属于取常数。
3. 少数情况（如凹球面反射镜）属于取极大值。

费马原理的应用

- 光程取极小值：折射

设A(0,y_A), O(x,y), B(x_B,y_B)，则

$$\Delta = n_i \cdot AO + n_t \cdot OB = n_i\sqrt{x^2+y_A^2} + n_t\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}$$



$$\frac{d\Delta}{dx} = n_i\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} - n_t\frac{(x-x_B)}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}} = 0$$

$$n_i\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} = n_t\frac{(x-x_B)}{\sqrt{(x-x_B)^2+y_B^2}}$$

即 $n_i\sin\theta_i = n_t\sin\theta_t$

Note：这里只对x求微分，是因为引起路径变化的只有x，这时变分退化到全微分。

费马原理的应用

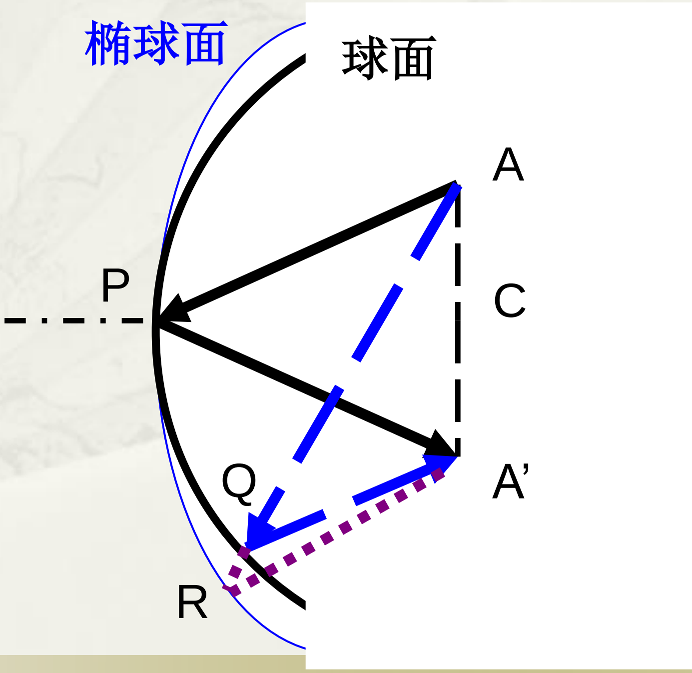
- 光程取极大值：凹球面反射镜
  - 球面反射镜的球心C，A和A’关于C对称；过顶点(切点)P，以A和A’为焦点作一椭球面。
  - 取球面上任意一点Q，并延长AQ至R。

$$\because \Delta(APA') = \Delta(ARA')$$

$$\because A'R + RQ > A'Q$$

$$\therefore \Delta(APA') > \Delta(AQA')$$

所以，实际光路APA’与邻近光路相比，为光程极大。



费马原理的应用

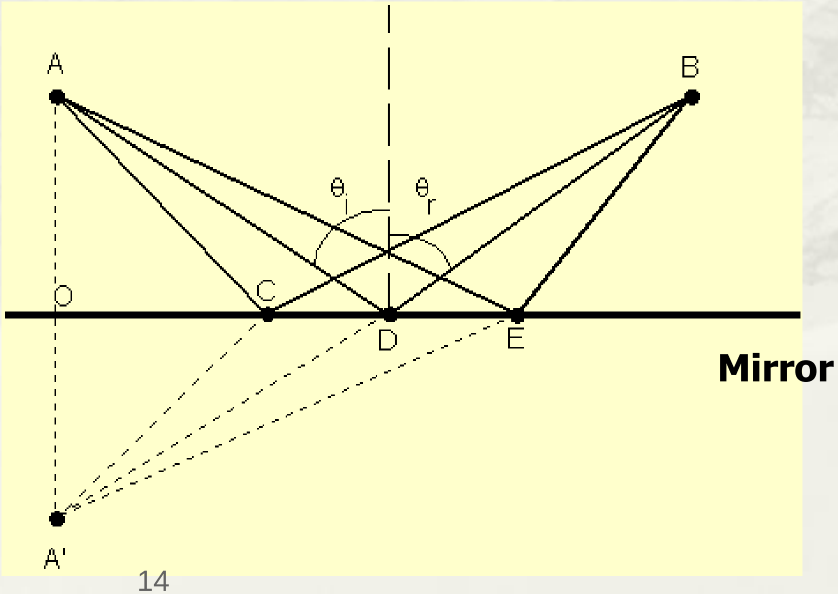
- 例：光程取极小值：反射

任设Mirror上的点C或E，作A的镜像A′，

$\therefore$ ACB = A′CB (或AEB = A′EB)

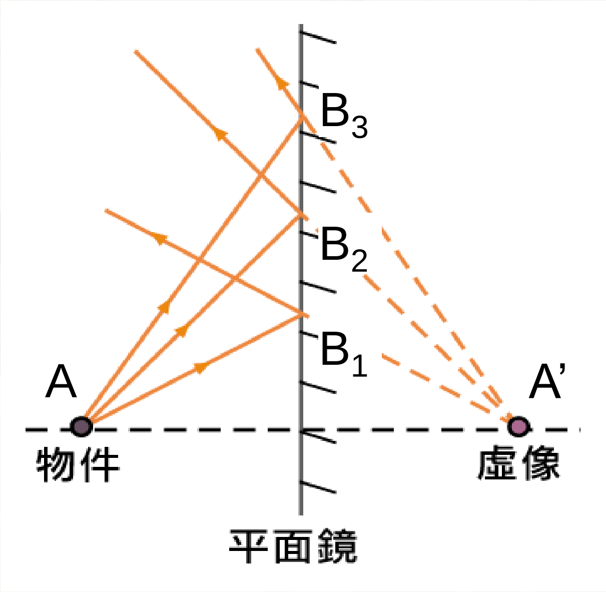
在A′B中，以直线A′B，交反射面M于D为最短路径，这时有

$$\theta_i = \theta_r$$



费马原理的应用

- **光程取常数：平面镜 成像**
  - 由反射光知识可知，物件经平面镜的反射光的延长线必交于虚像，可以证明，理想光学系统物象点A和A’间，总光程为0。



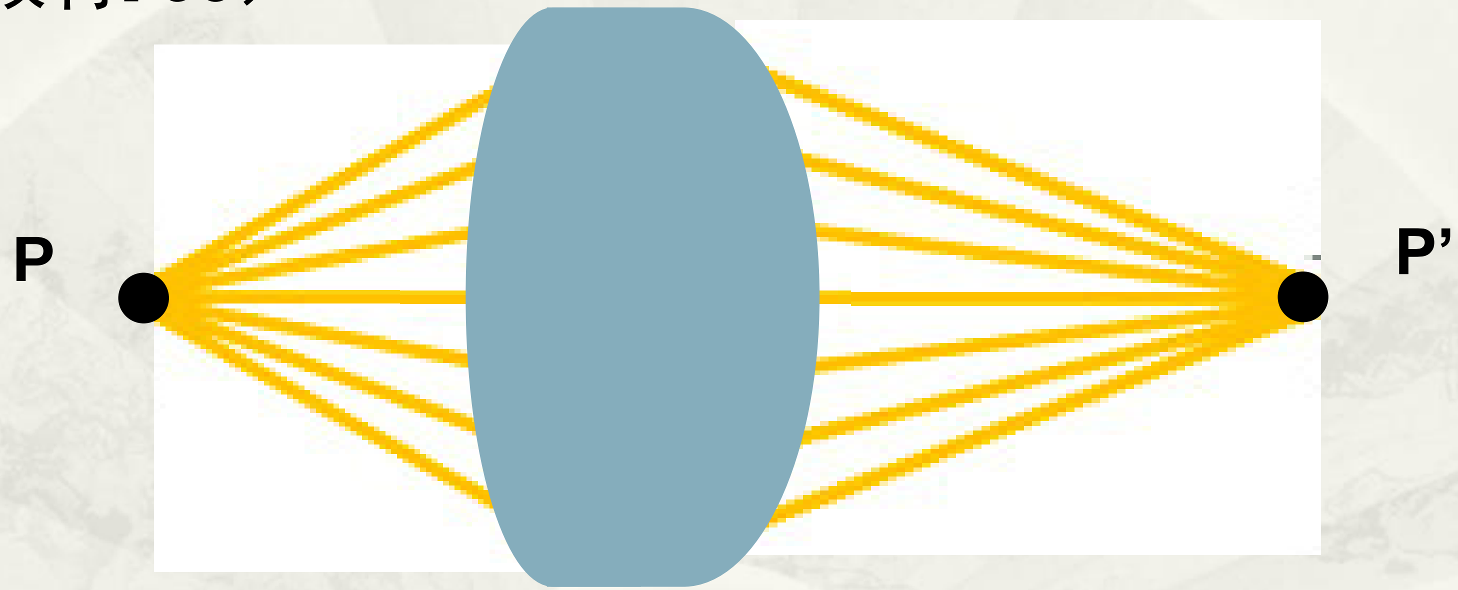
$$\because \Delta\left(AB_iA'\right) = n\int_A^{B_i} dl + n\int_{B_i}^{A'} dl$$

$$= n\overline{AB_i} + \boxed{(-n)\left(\overline{A'B_i}\right)} = 0$$

虚光程

物像等光程性

- 物像之间的等光程性，是费马原理的重要推论。（教材P38）



- 等光程反射面和等光程折射面（教材P39，自学）

Homework week 2 (due-date, next Wednesday)

- P31 思考题 1-8