1. 根据算符$\nabla$的微分性与矢量性，推导下列公式：

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A})=\frac{1}{2}\nabla\vec{A}^2-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}$$

解：1）$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

首先，算符$\nabla$是一个微分算符，其具有对其后所有表达式起微分的作用，对于本题，$\nabla$将作用于$\vec{A}$和$\vec{B}$。

又$\nabla$是一个矢量算符，具有矢量的所有性质。

因此，利用公式$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{b})-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$可得上式，其中右边前两项是$\nabla$作用于$\vec{A}$，后两项是$\nabla$作用于$\vec{B}$

2）根据第一个公式，令$\vec{A}=\vec{B}$可得证。

2. 设 u 是空间坐标 x，y，z 的函数，证明：

$$\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla u$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$\nabla\times\vec{A}(u)=\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du}.$$

证明：

1）

$$\nabla f(u)=\frac{\partial f(u)}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f(u)}{\partial z}\vec{e}_z=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z=\frac{df}{du}\nabla u$$

2）

$$\nabla\cdot\vec{A}(u)=\frac{\partial\vec{A}_x(u)}{\partial x}+\frac{\partial\vec{A}_y(u)}{\partial y}+\frac{\partial\vec{A}_z z(u)}{\partial z}=\frac{d\vec{A}_x(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{d\vec{A}_y(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{d\vec{A}_z(u)}{dz}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\nabla u\cdot\frac{d\vec{A}}{du}$$

3）

$$\nabla\times\vec{A}(u)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \vec{A}_{x(u)} & \vec{A}_y(u) & \vec{A}_z(u)\end{vmatrix}=(\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial z})\vec{e}_x+(\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial\vec{A}_z}{\partial x})\vec{e}_y+(\frac{\partial\vec{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial y})\vec{e}_z=$$

$$=(\frac{d\vec{A}_z}{du}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{d\vec{A}_y}{du}\frac{\partial u}{\partial z})\vec{e}_x+(\frac{d\vec{A}_x}{du}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{d\vec{A}_z}{du}\frac{\partial u}{\partial x})\vec{e}_y+(\frac{d\vec{A}_y}{du}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{d\vec{A}_x}{du}\frac{\partial u}{\partial y})\vec{e}_z=\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du}$$

3. 设$r=\sqrt{(x-x^{'})^2+(y-y^{'})^2+(z-z^{'})^2}$为源点$x^{'}$到场点 x 的距离，r 的方向规定为从源点指向场点。

1）证明下列结果，并体会对源变数求微商$(\nabla^{'}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x^{'}}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y^{'}}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z^{'}})$与对场变数求微商$(\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})$的关系。

$$\nabla r=-\nabla^{'}r=\frac{\vec{r}}{r},\nabla\frac{1}{r}=-\nabla^{'}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3},\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}=0,\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\nabla^{'}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=0.(r\neq 0)$$

(最后一式在人 r=0 点不成立，见第二章第五节)。

2）求

$\nabla\cdot\vec{r},\nabla\times\vec{r},(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r},\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}),\nabla\cdot[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]$及$\nabla\times[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]$,其中$\vec{a},\vec{k}$及$\vec{E}_0$均为常矢量。

证明：$\nabla\cdot\vec{r}=\frac{\partial(x-x^{'})}{\partial x}+\frac{\partial(y-y^{'})}{\partial y}+\frac{\partial(z-z^{'})}{\partial z}=3$

$$\nabla\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-x^{'} & y-y^{'} & z-z^{'}\end{vmatrix}=0$$

$$(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}=[(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z)\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z)][(x-x')\vec{e}_x+(y-y')\vec{e}_y+(z-z')\vec{e}_z]$$

$$=(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z})[(x-x')\vec{e}_x+(y-y')\vec{e}_y+(z-z')\vec{e}_z]$$

$$=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z=\vec{a}$$

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}\times(\nabla\times\vec{r})+(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}+\vec{r}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{r}\cdot\nabla)\cdot\vec{a}$$

$$=(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}+\vec{r}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}$$

$$=\vec{a}+\vec{r}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{r}\cdot\nabla)\cdot\vec{a}$$

$$\nabla\cdot[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=[\nabla(\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]\cdot\vec{E}_0+\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})(\nabla\cdot\vec{E}_0)$$

$$=[\frac{\partial}{\partial x}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{e}_z]E_0$$

$$=\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})(k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z)\vec{E}_0=\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})(\vec{k}\cdot\vec{E})$$

$$\nabla\times[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=[\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]\times\vec{E}_0+\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\nabla\times\vec{E}_0$$

4. 应用高斯定理证明

$$\int_V dV\nabla\times\vec{f}=\oint_S d\vec{S}\times\vec{f}$$

应用斯托克斯（Stokes）定理证明

$$\int_S d\vec{S}\times\nabla\phi=\oint_L d\vec{l}\,\phi$$

证明：1)由高斯定理

$$\int_V dV\nabla\cdot\vec{g}=\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{g}$$

即：$\int_V(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z})dV=\oint_s g_x dS_x+g_y dS_y+g_z dS_z$

而$\int_V\nabla\times\vec{f}dV=\int[(\frac{\partial}{\partial y}f_z-\frac{\partial}{\partial z}f_y)\vec{i}+(\frac{\partial}{\partial z}f_x-\frac{\partial}{\partial x}f_z)\vec{j}+(\frac{\partial}{\partial x}f_y-\frac{\partial}{\partial y}f_x)\vec{k}]dV$

$$=\int[\frac{\partial}{\partial x}(f_y\vec{k}-f_z\vec{j})+\frac{\partial}{\partial y}(f_z\vec{i}-f_x\vec{k})+\frac{\partial}{\partial z}(f_x\vec{j}-f_y\vec{i})]dV$$

又：$\oint_S d\vec{S}\times\vec{f}=\oint_S[(f_z dS_y-f_y dS_z)\vec{i}+(f_x dS_z-f_z dS_x)\vec{j}+(f_y dS_x-f_x dS_y)\vec{k}]$

$$=\oint(f_y\vec{k}-f_z\vec{j})dS_x+(f_z\vec{i}-f_x\vec{k})dS_y+(f_x\vec{j}-f_y\vec{i})dS_z$$

若令$H_x=f_y\vec{k}-f_z\vec{j},H_y=f_z\vec{i}-f_x\vec{k},H_Z=f_x\vec{j}-f_y\vec{i}$

则上式就是：

$\int_V\nabla\cdot\vec{H}dV=\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{H}$,高斯定理，则证毕。

2)由斯托克斯公式有：

$$\oint_l\vec{f}\cdot d\vec{l}=\int_S\nabla\times\vec{f}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l\vec{f}\cdot d\vec{l}=\oint_l(f_x dl_x+f_y dl_y+f_z dl_z)$$

$$\int_S\nabla\times\vec{f}\cdot d\vec{S}=\int_S(\frac{\partial}{\partial y}f_z-\frac{\partial}{\partial z}f_y)dS_x+(\frac{\partial}{\partial z}f_x-\frac{\partial}{\partial x}f_z)dS_y+(\frac{\partial}{\partial x}f_y-\frac{\partial}{\partial y}f_x)dS_z$$

而$\oint_l d\vec{l}\,\phi=\oint_l(\phi_i dl_x+\phi_j dl_y+\phi_k dl_z)$

$$\int_S d\vec{S}\times\nabla\phi=\int_S(\frac{\partial\phi}{\partial z}dS_y-\frac{\partial\phi}{\partial y}dS_z)\vec{i}+(\frac{\partial\phi}{\partial x}dS_z-\frac{\partial\phi}{\partial z}dS_x)\vec{j}+(\frac{\partial\phi}{\partial y}dS_x-\frac{\partial\phi}{\partial x}dS_y)\vec{k}$$

$$=\int(\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{k}-\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{j})dS_x+(\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{i}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{k})dS_y+(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{j}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{i})dS_z$$

若令 $f_x=\phi_i, f_y=\phi_j, f_z=\phi_k$

则证毕。

5. 已知一个电荷系统的偶极矩定义为：

$$\vec{P}(t)=\int_V\rho(\vec{x}',t)\vec{x}'dV',$$

利用电荷守恒定律 $\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 证明 $\vec{P}$ 的变化率为：

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\int_V\vec{J}(\vec{x}',t)dV'$$

证明：$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\int_V\frac{\partial\vec{\rho}'}{\partial t}\vec{x}'dV'=-\int_V\nabla'\vec{j}'\vec{x}'dV'$

$$(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t})\Big|_x=-\int_V\nabla'\vec{j}'x'dV'=-\int[\nabla'\cdot(x'\vec{j}')-(\nabla'x')\cdot\vec{j}']dV'=\int_V(j_x'-\nabla'\cdot(x'\vec{j}')dV'$$

$$=\int j_x dV'-\oint_S x\vec{j}\cdot d\vec{S}$$

若 $S\to\infty$,则$\oint(x\vec{j})\cdot d\vec{S}=0,(\vec{j}\big|_S=0)$

同理，$(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t})\big|_y=\int j_y dV',(\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial t})\big|_z=\int j_z dV'$

即：$\frac{d\vec{P}}{dt}=\int_V\vec{j}(\vec{x}',t)dV'$

6. 若 $\vec{m}$ 是常矢量，证明除 R＝0 点以外，矢量 $\vec{A}=\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$ 的旋度等于标量 $\varphi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3}$ 的梯度的负值，即

$$\nabla\times\vec{A}=-\nabla\varphi$$

其中 R 为坐标原点到场点的距离，方向由原点指向场点。

证明：

$$\nabla\times\vec{A}=\nabla\times(\frac{\vec{m}\times\vec{R})}{R^3}=-\nabla\times[\vec{m}\times(\nabla\frac{1}{R})]=(\nabla\cdot\vec{m})\nabla\frac{1}{r}+(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}-[\nabla\cdot(\nabla\frac{1}{r})]\vec{m}-[(\nabla\frac{1}{r})\cdot\nabla]\vec{m}$$

$$=(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r},(r\neq 0)$$

$$\nabla\varphi=\nabla(\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3})=-\nabla[\vec{m}\cdot(\nabla\frac{1}{r})]=-\vec{m}\times[\nabla\times(\nabla\frac{1}{r})]-(\nabla\frac{1}{r})\times(\nabla\times\vec{m})-(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}$$

$$-[(\nabla\frac{1}{r})\cdot\nabla]\vec{m}=-(\vec{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}$$

$$\therefore\nabla\times\vec{A}=-\nabla\varphi$$

7．有一内外半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的空心介质球，介质的电容率为 $\varepsilon$，使介质内均匀带静止自由电荷 $\rho_f$，求

（1）空间各点的电场

（2）极化体电荷和极化面电荷分布

解：1）$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int\rho_f dV$，　　($r_2>r>r_1$)

即：$D\cdot 4\pi r^2=\frac{4\pi}{3}(r^3-r_1^3)\rho_f$

$$\therefore\vec{E}=\frac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon r^3}\vec{r},(r_2>r>r_1)$$

由 $\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_f}{\varepsilon_0}=\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}(r_2^3-r_1^3)\rho_f,(r>r_2)$

$$\therefore\vec{E}=\frac{(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\rho_f\vec{r},(r>r_2)$$

$r<r_1$时，$\vec{E}=0$

2) $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\vec{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$

$$\therefore\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot\vec{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot[\frac{(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon r^3}\rho_f\vec{r}]=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho_f\nabla\cdot(\vec{r}-\frac{r_1^3}{r^3}\vec{r})$$

$$=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho_f(3-0)=-(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$$

$$\sigma_P=P_{1n}-P_{2n}$$

考虑外球壳时，$r=r_2$， n 从介质 1 指向介质 2（介质指向真空），$P_{2n}=0$

$$\sigma_P = P_{1n} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{r^3-r_1^3}{3\varepsilon r^3}\rho_f\vec{r}\Big|_{r=r_2} = (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{r_2^3-r_1^3}{3r_2^3}\rho_f$$

考虑到内球壳时，r＝$r_2$

$$\sigma_P = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{r^3-r_1^3}{3\varepsilon r^3}\rho_f\vec{r}\Big|_{r=r_1} = 0$$

8．内外半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向流有恒定均匀自由电流 $J_f$，导体的磁导率为 $\mu$，求磁感应强度和磁化电流。

解：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = I_f$$

当 $r<r_1$ 时，$I_f=0$，故 $\vec{H}=\vec{B}=0$

当 $r_2>r>r_1$ 时，$\int_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi rH = \int_S \vec{j}_f\cdot d\vec{S} = j_f\pi(r^2-r_1^2)$

$$\vec{B} = \frac{\mu j_f(r^2-r_1^2)}{2r} = \frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r^2}\vec{j}_f\times\vec{r}$$

当 $r>r_2$ 时，　$2\pi rH = \pi j_f(r_2^2-r_1^2)$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r^2}\vec{j}_f\times\vec{r}$$

$$J_M = \nabla\times\vec{M} = \nabla\times(\chi_M\vec{H}) = \nabla\times(\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0})\vec{H} = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\nabla\times(\vec{j}_f\times\vec{r}\frac{r^2-r_1^2}{2r^2})$$

$$= (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\nabla\times\vec{H} = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{j}_f, (r_1<r<r_2)$$

$$\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1), (n\text{从介质1指向介质2})$$

在内表面上，$M_1=0, M_2 = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{r^2-r_1^2}{2r^2})\Big|_{r=r_1} = 0$

故 $\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times\vec{M}_2 = 0, (r=r_1)$

在上表面，r＝$r_2$ 时

$$\vec{\alpha}_M = \vec{n}\times(-\vec{M}_1) = -\vec{n}\times\vec{M}_1\Big|_{r=r_2} = -\frac{\vec{r}}{r}\times\frac{r^2-r_1^2}{2r^2}\vec{j}_f\times\vec{r}\Big|_{r=r_2} = -\frac{r^2-r_1^2}{2r}\vec{j}_f\Big|_{r_2}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)$$

$$= -(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{r_2^2-r_1^2}{2r^2}\vec{j}_f$$

9．证明均匀介质内部的体极化电荷密度 $\rho_P$ 总是等于体自由电荷密度 $\rho_f$ 的 $-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})$ 倍。

证明：$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}=-\nabla\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot\vec{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{\rho_f}{\varepsilon}=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$

10．证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等，方向相反(但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律)

证明：

1）线圈 1 在线圈 2 的磁场中的受力：

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{I_2 d\vec{l}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$d\vec{F}_{12}=I_1 d\vec{l}_1\times\vec{B}_2$$

$$\therefore \vec{F}_{12}=\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\vec{l}_1\times(I_2 d\vec{l}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3})-\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2) \qquad (1)$$

2）线圈 2 在线圈 1 的磁场中受的力：

同 1）可得：

$$\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}d\vec{l}_1(d\vec{l}_2\cdot\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3})-\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1) \qquad (2)$$

分析表达式（1）和（2）：

（1）式中第一项为

$$\oint_{l_1}\oint_{l_2}d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3})=\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint d\vec{l}_1\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}=\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint_{l_1}\frac{dr_{12}}{r_{12}^2}=\oint_{l_2}d\vec{l}_2\cdot(-\frac{1}{r_{12}})\Big|_{一周}=0$$

同理，对（2）式中第一项 $\oint_{l_2}\oint_{l_1}d\vec{l}_1(d\vec{l}_2\cdot\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3})=0$

$$\therefore \vec{F}_{12}=\vec{F}_{21}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)$$

11. 平行板电容器内有两层介质，它们的厚度分别为 $l_1$ 和 $l_2$，电容率为 $\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$，今再两板接上电动势为 E 的电池，求

（1）电容器两板上的自由电荷密度 $\omega_f$

（2）介质分界面上的自由电荷密度$\omega_f$

若介质是漏电的，电导率分别为$\sigma_1$和$\sigma_2$，当电流达到恒定时，上述两问题的结果如何？

解：在相同介质中电场是均匀的，并且都有相同指向

$$则\begin{cases} l_1E_1+l_2E_2=\mathrm{E} \\ D_{1n}-D_{2n}=\varepsilon_1E_1-\varepsilon_2E_2=0(介质表面上\sigma_\mathrm{f}=0) \end{cases}$$

故：$E_1=\dfrac{\varepsilon_2\mathrm{E}}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1},E_2=\dfrac{\varepsilon_1\mathrm{E}}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1}$

又根据$D_{1n}-D_{2n}=\sigma_f$，（n 从介质 1 指向介质 2）

在上极板的交面上，

$D_1-D_2=\sigma_{f_1}$　　　$D_2$是金属板，故$D_2=0$

即：$\sigma_{f_1}=D_1=\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1}$

而$\sigma_{f_2}=0$

$\sigma_{f_3}=D_1^{'}-D_2^{'}=-D_2^{'},(D_1^{'}是下极板金属，故D_1^{'}=0)$

$\therefore\sigma_{f_3}=-\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon}{l_1\varepsilon_2+l_2\varepsilon_1}=-\sigma_{f_1}$

若是漏电，并有稳定电流时，

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{j}_1}{\sigma_1},\vec{E}_2=\frac{\vec{j}_2}{\sigma_2}$$

$$又\begin{cases} l_1\dfrac{\vec{j}_1}{\sigma_1}+l_2\dfrac{\vec{j}_2}{\sigma_2}=\vec{\mathrm{E}} \\ j_{1n}=j_{2n}=j_1=j_2,(稳定流动，电荷不堆积) \end{cases}$$

$$得：j_1=j_2=\frac{\mathrm{E}}{\dfrac{l_1}{\sigma_1}+\dfrac{l_2}{\sigma_2}},即:\begin{cases} E_1=\dfrac{j_1}{\sigma_1}=\dfrac{\sigma_2\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1} \\ E_2=\dfrac{j_2}{\sigma_2}=\dfrac{\sigma_1\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1} \end{cases}$$

$$\sigma_{f_上}=D_3=\frac{\varepsilon_1\cdot\sigma_2\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}\qquad\sigma_{f_下}=-D_2=-\frac{\varepsilon_2\sigma_1\mathrm{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}$$

$$\sigma_{f_{中}} = D_2 - D_3 = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_2\sigma_1}{l_1\sigma_2 + l_2\sigma_1}\mathrm{E}$$

12. 证明

（1）当两种绝缘介质得分界面上不带面自由电荷时，电场线的曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

其中$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$分别为两种介质的介电常数，$\theta_1$和$\theta_2$分别为界面两侧电场线与法线的夹角。

（2）当两种导电介质内流有恒定电流时，分界面上电场线曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

其中$\sigma_1$和$\sigma_2$分别为两种介质的电导率。

证明：(1)根据边界条件：$n\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$,即：$E_2\sin\theta_2 = E_1\sin\theta_1$

由于边界面上$\sigma_f = 0$，故：$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$，即：$\varepsilon_2 E_2\cos\theta_2 = \varepsilon_1 E_1\cos\theta_1$

$\therefore$ 有$\dfrac{tg\theta_2}{\varepsilon_2} = \dfrac{tg\theta_1}{\varepsilon_1}$,即:$\dfrac{tg\theta_2}{tg\theta_1} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

(2)根据：$\vec{J} = \sigma\vec{E}$ 可得，电场方向与电流密度同方向。

由于电流 I 是恒定的，故有：$\dfrac{j_1}{\cos\theta_2} = \dfrac{j_2}{\cos\theta_1}$

即：$\dfrac{\sigma_1 E_1}{\cos\theta_2} = \dfrac{\sigma_2 E_2}{\cos\theta_1}$ 而：$\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ 即 $E_2\sin\theta_2 = E_1\sin\theta_1$

故有：$\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$

13．试用边值关系证明：在绝缘介质与导体的分界面上，在静电情况下，导体外的电场线总是垂直于导体表面；在恒定电流的情况下，导体内电场线总是平行于导体表面。

证明：（1）导体在静电条件下达到静电平衡

$\therefore$ 导体内$\vec{E}_1$=0

而：$\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

$\therefore \vec{n}\times\vec{E}_2 = 0$，故$\vec{E}_0$垂直于导体表面。

（3）导体中通过恒定电流时，导体表面$\sigma_f = 0$

$\therefore$导体外$\vec{E}_2 = 0$,即：$\vec{D}_2 = 0$

而： $\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f = 0$,即$:\vec{n}\cdot\vec{D}_1 = \vec{n}\cdot\varepsilon_0\vec{E}_1 = 0$

$\therefore \vec{n}\cdot\vec{E}_1 = 0$

导体内电场方向和法线垂直，即平行于导体表面。

14．内外半径分别为 a 和 b 的无限长圆柱形电容器，单位长度电荷为$\lambda_f$，板间填充电导率为$\sigma$的非磁性物质。

（1）证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消，因此内部无磁场。

（2）求$\lambda_f$随时间的衰减规律

（3）求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度

（4）求长度为 l 的一段介质总的能量耗散功率，并证明它等于这段的静电能减少率。

（1）证明：由电流连续性方程：$\nabla\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0$

据高斯定理 $\rho_f = \nabla\cdot\vec{D}$

$\therefore \nabla\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\nabla\cdot\vec{D}}{\partial t} = 0$，即：$\nabla\cdot\vec{J} + \nabla\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$

$\therefore \nabla\cdot(\vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}) = 0. \therefore \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$，即传到电流与位移电流严格抵消。

(2)解：由高斯定理得：$\int\vec{D}\cdot 2\pi\vec{r}dl = \int\lambda_f dl$

$$\therefore \vec{D} = \frac{\lambda_f}{2\pi r}\vec{e}_r, \vec{E} = \frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r$$

又$\vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0, \vec{J} = \sigma\vec{E}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$\therefore \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0, \vec{E} = \vec{E}_0 e^{=\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$$\therefore \frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r = \frac{\lambda_{r_0}}{2\pi\varepsilon r}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\vec{e}_r$$

$$\therefore \lambda_f = \lambda_{f_0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

（3）解：

$$\vec{J} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda_{f_0}}{2\pi r} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_f}{2\pi r}$$

能量耗散功率密度＝$J^2\rho = J^2\dfrac{1}{\sigma} = \left(\dfrac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2 \sigma$

（5）解：

单位体积 $dV = l \cdot 2\pi r dr$

$$\vec{P} = \int_a^b \left(\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2 \sigma l 2\pi r dr = \frac{l\sigma\lambda_f^2}{2\pi\varepsilon^2}\ln\frac{b}{a}$$

静电能 $W = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}dV = \int_a^b \frac{1}{2}\frac{l\lambda_f^2}{2\pi\varepsilon r}dr = \frac{1}{2}\cdot\frac{l\lambda_f^2}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{b}{a}$

减少率 $-\dfrac{\partial W}{\partial t} = -\dfrac{l\lambda_f}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\partial\lambda_f}{\partial t} = \dfrac{l\lambda_f^2\sigma}{2\pi\varepsilon^2}\ln\dfrac{b}{a}$