珠海校区2015学年度第二学期14级《线性代数》期中考题D卷

学号:______ 评分:______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者，不授予学士学位。"

试卷共2大页,满分为100分。

一、 填空题: (每小题3分，共30分)

1. 排列315624的逆序数是 $\underline{6}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \underline{-30}$.

3. 设3阶行列式$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$中元素$a_{12}$的代数余子式$A_{12} = \underline{+7}$.

4. 设$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$有唯一解, 则参数λ的取值范围为 $\underline{\lambda \neq -10}$.

5. 设3阶矩阵A可逆，且$|A| = 1$, 则$|(2A)^*| = \underline{\cancel{8}\ 64}$.

6. 设$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A$的秩$R(A) = \underline{3}$.

7. 设A, B, C为n阶矩阵, 则$(ABC)^{\mathrm{T}} = \underline{C^T \cdot B^T \cdot A^T}$.

8. 设$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则伴随矩阵$A^* = \underline{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

9. 设矩阵A, B, C满足$AXB = C$,且A, B可逆, 则$X = \underline{A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$;

10. 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, 则$A^{-1} = \underline{\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & -18 & 8 \end{pmatrix}}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & -9 & 4 \end{pmatrix}}$

二、 计算题: (7题，共70分；注：要写出必要的计算过程)

1. (8分)求解矩阵方程：$X\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解: 设: $A=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\because\ |A| = 5\times1-3\times2=-1\neq0$

$\therefore$ A可逆, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=-\begin{pmatrix}1&-3\\-2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&-5\end{pmatrix}$

$\because\ X\cdot A=B$

$\therefore\ X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}$

2. (8分)计算$D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\2&3&-1&-1\\3&0&1&5\\1&2&3&1\end{vmatrix}$

解: $D_4 \xlongequal[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&1&-5&-7\\0&-3&-5&-4\\0&1&1&-2\end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} \begin{vmatrix}1&-5&-7\\-3&-5&-4\\1&1&-2\end{vmatrix} \xlongequal[r_2+3r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix}0&-6&-5\\0&-2&-10\\1&1&2\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第一列展开}} +\begin{vmatrix}-6&-5\\-2&-10\end{vmatrix} = +[(-6)\times(-10)-(-2)\times(-5)] = +50$

3. (8分) 设$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&-3\\3&2&-1\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$

解: $|A|=\begin{vmatrix}1&0&2\\4&3&-3\\3&2&-1\end{vmatrix} \xlongequal{c_3-2c_1} \begin{vmatrix}1&0&0\\4&+3&-11\\3&2&-7\end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix}3&-11\\2&-7\end{vmatrix} = 1\neq0$

$\therefore$ A可逆

又: $M_{11}=3$
$M_{12}=5$
$M_{13}=-1$
$M_{21}=-4$
$M_{22}=-7$
$M_{23}=2$
$M_{31}=-6$
$M_{32}=-11$
$M_{33}=3$

$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=A^{*}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}$

$=\cancel{\begin{vmatrix}3&4&-6\\-5&-7&11\\-1&-2&3\end{vmatrix}}\ \begin{pmatrix}3&4&-6\\-5&-7&11\\-1&-2&+3\end{pmatrix}$

4. (10分)求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\3&-1&2&-4\\-1&4&1&3\\6&3&7&-5\end{pmatrix}$ 的秩,并计算A的一个最高阶非零子式.

解: $A \overset{r_2-3r_1}{\underset{\substack{r_3+r_1\\r_4-6r_1}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&4&2&2\\0&3&1&1\end{bmatrix} \overset{r_2\times(-1)}{\underset{\substack{r_3-4r_2\\r_4-3r_2}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&0&-2&-2\end{bmatrix} \overset{r_4-r_3}{\underset{r_3\times(-\frac{1}{2})}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\overset{r_1-r_3}{\underset{r_2-r_3}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore R(A)=3$,选取A的前三行、前三列构成的子式 $\begin{bmatrix}1&0&1\\3&-1&2\\-1&4&1\end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&0&1\\3&-1&2\\-1&4&1\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3} \begin{vmatrix}0&0&1\\1&-1&2\\-2&4&1\end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix}1&-1\\-2&4\end{vmatrix} = 2\neq 0$ $\quad -2$

$\therefore \begin{bmatrix}1&0&1\\3&-1&2\\-1&4&1\end{bmatrix}$ 为 A的一个最高阶非零子式.

5. (12分)求解齐次线性方程组: $\begin{cases}x_1+3x_2+4x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2+4x_3-x_4=0,\\2x_1+3x_2+2x_3=0\end{cases}$

解: 由题:得到矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&3&4&-3\\3&5&4&-1\\2&3&2&0\end{bmatrix}$

$A \overset{r_2-3r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}} \begin{bmatrix}1&3&4&-3\\0&-4&-8&8\\0&-3&-6&6\end{bmatrix} \overset{r_2\times(-\frac{1}{4})}{\underset{r_3\times(-\frac{1}{3})}{\sim}} \begin{bmatrix}1&3&4&-3\\0&1&2&-2\\0&1&2&-2\end{bmatrix} \overset{r_2-r_3}{\underset{r_1-3r_2}{\sim}}$

$\begin{bmatrix}1&0&-2&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\quad\therefore$有: $x_1=2x_3-3x_4$, $x_2=-2x_3+2x_4$

得: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}$,其中$k_1$、$k_2$为任意常数

6. (12分)求解非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad\quad - 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

解：由题：得到增广矩阵：
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & -8 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \underset{\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & -7 & 8 & 11 \end{bmatrix} \underset{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3+8r_1 \\ r_4+7r_1}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{r_2+r_3}{\overset{r_4-r_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1 \\ x_2 = -x_3 + 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \quad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$
，其中k为任意常数.

7. (12分)设$AP = PB$, 其中$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求$f(A) = A^8 + 3A^7 - A^5$.

$\because |P| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \therefore P$可逆

解：$\because AP = PB$

$\therefore A = PBP^{-1}$

$\therefore f(A) = P f(B) P^{-1}$

$= P(B^8 + 3B^7 - B^5)$

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$B^8 = B^2 \cdot B^2 \cdot B^2 \cdot B^2 = E \cdot E \cdot E \cdot E = E$

$B^7 = B^2 \cdot B^2 \cdot B^2 \cdot B = E \cdot E \cdot E \cdot B = B$

$B^5 = B^2 \cdot B^2 \cdot B = E \cdot E \cdot B = B$

$\therefore f(B) = (E + 3B - B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

又：$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot P^* = P^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -24 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$