第三章 幂级数展开

§3.1 复数项级数

复数列的极限

复数列 $\{\alpha_n\}$，$\alpha_n = a_n + ib_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$，另有 $\alpha = a + ib$，

如果任意$\varepsilon>0$，存在正数$N(\varepsilon)$使得$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$在$n>N$时成立，

那么α称为复数列$\{\alpha_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$.

此时也称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α.

例： $\alpha_n = (1+ni)/(1-ni)$, 收敛 $\alpha_n = \dfrac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{0+i}{0-i} = -1, \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = -1$

$\alpha_n = n\cos in$，发散

定理　复数列 $\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots)$ 收敛于α的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

$$(\Rightarrow)\forall\varepsilon>0,\exists N,\ \text{while}\ n>N, |(a_n+\mathrm{i}b_n)-(a+\mathrm{i}b)|<\varepsilon.$$

$$\therefore |a_n-a| \le |(a_n-a)+\mathrm{i}(b_n-b)|<\varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a;\ldots$$

$$(\Leftarrow)\forall\varepsilon>0,\exists N,\ \text{while}\ n>N, |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\therefore |\alpha_n-\alpha| = |(a_n-a)+\mathrm{i}(b_n-b)| \le |a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

例：　$\alpha_n = (-1)^n + \mathrm{i}/(n+1)$　　$\mathrm{Re}(\alpha_n)=(-1)^n \to -1 \text{ or } 1, \mathrm{Im}(\alpha_n)=\dfrac{1}{n+1}\to 0,$　×

例：　$\alpha_n = \mathrm{e}^{-n\pi\mathrm{i}}$　　$\mathrm{Re}(\alpha_n)=\cos\dfrac{n\pi}{2}, \mathrm{Im}(\alpha_n)=-\sin\dfrac{n\pi}{2},$　×

级数的概念

复数列$\{\beta_n\}$，其中$\beta_n = a_n + \mathrm{i}b_n$， $(n=1,2,\cdots)$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots$称为复数项无穷级数.

前n项和 $S_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$称为级数的部分和.

若部分和复数列 $\{S_n\}$存在有限极限，则称无穷级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 收敛，而这极限值称为该级数的和, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

记作 $S = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$

若部分和复数列 $\{S_n\}$ 无有限的极限，则$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 级数发散 。

对于复数项级数，存在类似于实数项级数收敛的充要条件.

柯西收敛准则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\cdots$ 收敛的充要条件：

对于任意给定的ε>0，存在自然数N使得，当n>N时，

$|\sum_{k=n+1}^{n+p}\beta_k|<\varepsilon$，其中$p$为任意正整数.

定理 设 $\beta_n=a_n+\mathrm{i}b_n \quad (n=1,2,\cdots)$, $S=a+\mathrm{i}b$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$

收敛于S的充要条件是级数的实部 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和虚部 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b.$$

定理 如 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 也收敛，且不等式

$|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 成立。相应地，称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛;

否则称为条件收敛。

例：

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\right)$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ (\times)$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\to 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}\mathrm{i}\right]$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\to 0$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\to 0$

若已知两绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=S,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=L$，则两级数的柯西乘积绝对收敛

$$(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n)(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{(n+1)-k}=SL$$

$\{f_n(z)\},(n=0,1,2,\ldots)$ 是定义在区域D上的复变函数序列，

则称表达式 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots,$

为复变函数项级数（简称复函数项级数）.

如果对于D内某点z_0，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛，则称该点为 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 的一个收敛点，若级数在区域D内的每一点都收敛，则称该级数在区域D内收敛; 收敛点的集合称为$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 的收敛域.

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 发散，则称点z_0为级数的发散点，发散点的集合称为 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 的发散域.

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 在D内处处收敛，则其和一定是z的函数，记为$S(z)$，称为 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$在$D$内的和函数.

复数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 收敛的充要条件是区域D内的各点z对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N(z)$存在，使得对任意正整数p，当$n>N(z)$时，$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right|<\varepsilon$.

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个与z无关的自然数N，使得对于区域D内(或曲线L上)的一切z均有，当$n>N(z)$时，(p为任意正整数) $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right|<\varepsilon$，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在D内(或曲线L上)一致收敛.

如果对于某个区域B(或曲线l)上所有点z，复变项级数$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 各项的模 $|f_k(z)| \le m_k$，而正的常数项级数$\sum_{k=1}^{\infty} m_k$收敛，则复变项级数在B(或曲线l)上绝对且一致收敛。

§3.2 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

阿贝尔(Abel)定理　如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在点 $z = z_0, (z_0 \neq 0)$ 收敛，那么对满足$|z|<|z_0|$的z，级数必绝对收敛且一致收敛.

如果在点z_0处级数发散，那么对满足$|z|>|z_0|$的z，级数必发散.

例：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$ 在z_0=0处收敛，问在z=3处的敛散性?

使用正项级数的比值判别法：

引入记号：$R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$，$\to$收敛半径，收敛圆

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}|z-z_0|\Rightarrow\begin{cases} if\ |z-z_0|<R,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \text{ 绝对收敛} \\ if\ |z-z_0|>R,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \text{ 发散} \end{cases}$$

根值判别法：

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}},\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}<1 & \text{绝对收敛} \\ \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}>1 & \text{发散} \end{cases}$$

例：

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}\to R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=1$$

讨论：在收敛圆上，$|z|=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛.

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}\to R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

讨论：

在$z=0$点，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. 在$z=2$点，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

例：求幂级数$1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots$的收敛圆，$t$为复变数.

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1,$$

$$S_n=1+t+t^2+\cdots+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}=\frac{1}{1-t},(|t|<1)$$

例：求幂级数$1-z^2+z^4-z^6+\ldots$的收敛圆，z为复变数.

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1,$$

$$1-z^2+z^4-z^6+\cdots=\frac{1}{1+z^2},(|z|<1)$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \to R_1, g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n \to R_2, \text{for } |z|<R=\min(R_1,R_2)$$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$$

$$f(z)g(z)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_0 b_n)z^n, (\ |z|<R)$$

例：

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n, (0<a<1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n \to R_1=1, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n \to R_2=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n \to R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^n}{1+a^n}}{\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+a^{n+1}}{a(1+a^n)}=\frac{1}{a}>1$$

$$w(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

幂级数在收敛圆内绝对且一致收敛。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$w(\zeta)=a_0+a_1(\zeta-z_0)+a_2(\zeta-z_0)^2+\cdots+a_n(\zeta-z_0)^n+\cdots$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{a_0}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{\zeta-z}+\cdots$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_0}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为R，那么

(i)它的和函数，即 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 是收敛圆内的解析函数.

(ii)幂级数在其收敛圆内可逐项求导或逐项积分，且逐项求导或逐项积分后的新级数与原级数具有相同的收敛半径.

$$[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n]'=\sum_{n=0}^{\infty}[c_n(z-z_0)^n]'=\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$$

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z c_n(z-z_0)^n \mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

§ 3.3 泰勒级数展开

泰勒(Taylor)展开定理 设$f(z)$在以z_0为圆心的圆C_R内解析，则对圆内的任意z点，$f(z)$可展为泰勒级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

其中， $$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

C_{R1}为圆C_R内包含z且与C_R同心的圆。

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)+(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^k}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\cdots$$

例：在z_0的领域把如下函数作Tylor展开

直接法：

$$e^z, \sin z, \cos z, (1+z)^m, (z_0 = 0)$$

$$\ln z, (z_0 = 1)$$

间接法：

$$\frac{1}{(1+z)^2}, (z_0 = 0) \to \frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

$$(1+z)^\alpha, (z_0 = 0) \to f(z) = e^{\alpha \ln(1+z)}, (1+z) f'(z) = \alpha f(z)$$

§ 3.4 解析延拓

$$1-z^2+z^4-z^6+\cdots=\frac{1}{1+z^2},(|z|<1)$$

$$f(z)=1-z^2+z^4-z^6+\cdots,(|z|<1)$$

$$F(z)=\frac{1}{1+z^2},(z\neq\pm\mathrm{i})$$

解析延拓就是解析函数定义域的扩大.

原则上，解析延拓总可以利用泰勒级数进行, 具有唯一性.

$$1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots=\frac{1}{1-t},(|t|<1)$$

§3.5 洛朗级数展开

$$\cdots+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

$$a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \quad \mapsto \quad R_1 \Rightarrow |z-z_0|<R_1$$

$$a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+\cdots \xrightarrow{\zeta=\frac{1}{z-z_0}} a_{-1}\zeta+a_{-2}\zeta^2+\cdots \quad \mapsto \quad \frac{1}{R_2}$$

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<\frac{1}{R_2} \Rightarrow |z-z_0|>R_2$$

级数在环域R_2<|z-z|<R_1内绝对且一致收敛。

环域R_2<|z-z|<R_1称为级数收敛环, 如果R_2>R_1内, 级数处处发散.

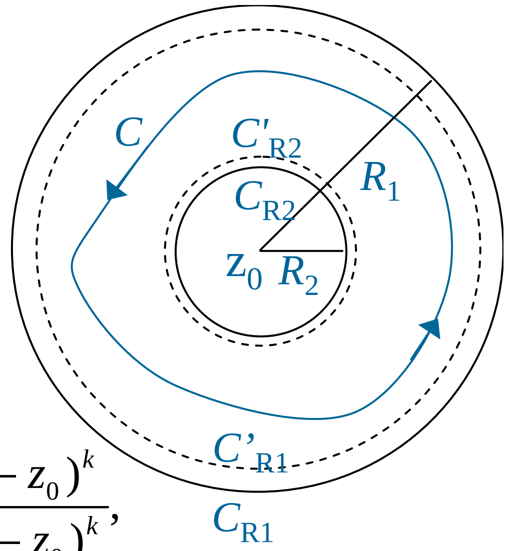
洛朗展开定理　设$f(z)$在环域$R_2<|z-z|<R_1$的内部单值解析，则对环域内上任一点z点，$f(z)$可展为幂级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

其中，
$$a_k=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

积分路径C为位于环域内按逆时针方向绕内圆一周的任一闭合曲线。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C'_{R1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C'_{R2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$



$$|z-z_0|<|\zeta-z_0|:$$

$$C'_{R1}\mapsto\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)+(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^k},$$

$$|z-z_0|>|\zeta-z_0|:$$

$$C'_{R2}\mapsto\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)+(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^k},$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C'_{R1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta-\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{-(l+1)}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C'_{R2}}(\zeta-z_0)^l f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{-(l+1)}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C'_{R2}}(\zeta-z_0)^l f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\xrightarrow[Cache]{k=-(l+1)}\sum_{k=-1}^{-\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C'_{R1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad a_k=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C_{R1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

若 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，由前一章的洛朗级数展开定理，则 $f(z)$ 在点 z_0 的去心邻域内可展成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$$

称上述级数的正幂项（含常数项）$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 点洛朗级数的**解析部分**（或**正则部分**）；而称负幂项 $\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k(z-z_0)^k$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 点洛朗级数的**主要部分**.

§3.6 孤立奇点的分类

孤立奇点　函数$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某去心邻域$0<|z-z_0|<\delta$内处处解析，称z_0为函数$f(z)$的孤立奇点。

例: $1/z$, $\exp\{1/z\}$, $f(z)=1/(\sin(1/z))$ 讨论$z_0=0$

可去奇点　如果洛朗级数中不含$z-z_0$的负幂项，那么孤立奇点z_0为$f(z)$的可去奇点。

$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$ $(0<|z-z_0|<\delta \rightarrow |z-z_0|<\delta)$

例: $\sin z/z$,讨论$z_0=0$

可去奇点的判定定理

（1）$f(z)$在奇点z_0的去心邻域内的罗朗级数中无主要部分;

（2）$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0,(a_0\neq\infty)$；

（3）$f(z)$在z_0的去心邻域内有界;

以上任何一条均可作为判别奇点是否为可去奇点的判断标准，也可作为可去奇点的定义.

极点 如果洛朗级数中只有有限多个$z-z_0$的负幂项，且其中关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$, 则称孤立奇点m级奇点。

$$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\ldots+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots\quad (0<|z-z_0|<\delta)$$

显然，$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

例: $f(z)=(z-2)/[(z^2+1)(z-1)^3]$, 讨论$z=1$, $z=\pm i$

极点的判定定理

1. $f(z)$ 在奇点 z_0 的去心邻域内的罗朗级数的主要部分为有限多项；

2. $f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内能表示为如下形式：$f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}$，$(m\geq 1)$

其中, 函数 $\lambda(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内是解析的，且 $\lambda(z_0)\neq 0$.

例: $f(z)=(e^z-1)/z^2$???

极点与零点

不恒等于零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析并且 $\varphi(z_0)\neq 0$， m 为某一正整数，那么 z_0 称为 $f(z)$ 的 m 级零点.

零点的判定定理：

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析，那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0, \qquad f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

例: $f(z)=z(z-1)^3$, $z=0$, $z=1$; $f(z)=z^3-1$???

定理： 如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，那么 z_0 就是函数 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反过来也成立.

例: $f(z)=1/\sin z$

本性奇点　　如果洛朗级数中含有无穷多个$z-z_0$的负幂项，那么孤立奇点z_0为$f(z)$的本性奇点。

$f(z)=\ldots+a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\ldots+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots \quad (0<|z-z_0|<\delta)$

有: $z\to z_0$，极限不存在

例： $\exp\{1/z\}$, 讨论 $z_0=0$， i) z 沿 z 正负实轴， ii) z 按 $i/2n\pi$ $(n=1,2,3,\ldots)$

本性奇点的判定定理

（1） $f(z)$ 在奇点 z_0 的去心邻域内的罗朗级数的主要部分为无限多项；

（2）当 $z\to z_0$ 时， $f(z)$ 既不趋向于∞，也不趋向于任何一个有限值，即 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在；

函数在无穷远点的性质

如果函数f(z)在无穷远点的去心邻域R<|z|<+∞内解析，那么称∞为函数f(z)的孤立奇点。

令t=1/z，则f(z)=f(1/t)=$\varphi(t)$，显然，$\varphi(t)$在0<|t|<1/R内解析.

规定：

如果t=0是$\varphi(t)$的可去奇点、m级极点或本性奇点，那么，

就称点z= ∞是f(z)的可去奇点、 m级极点或本性奇点。

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}z^{-k}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k \Rightarrow \varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}t^k+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k t^{-k}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta,(n=0,1,2,3,\cdots)$$

i) 不含正幂项 → i) 可去奇点

ii) 含有限多正幂项，且最高次m, → ii) m级极点

iii)含无限多正幂项 → iii)本性奇点

例：

1. $f(z)=z/(z+1)$, $(1<|z|<\infty)$

2. $f(z)=z+1/z$, $(z=\infty)$

3. $f(z)=\sin z$, $(z=\infty)$

4. $f(z)=[(z^2-1)(z-2)^3]/(\sin z\pi)^3$

定理：函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为可去奇点的充分必要条件是下列三条中的任何一条成立：

1. $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的罗朗展开式中无主要部分；

2. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b, \quad (b\neq\infty)$；

3. $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的某去心邻域内有界.

定理：函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为 m 阶极点的充分必要条件是下列两条中的任何一条成立：

1. $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的罗朗展开式中主要部分有 m 项，即

$$a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_mz^m \qquad (a_m\neq 0)$$

2. $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的某去心邻域内可表示成 $f(z)=\lambda(z)z^m$，其中 $\lambda(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内解析，且 $\lambda(\infty)\neq 0$.

由 $f(z)$ 在极点 $z=\infty$ 的主要部分表达式知 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为本性奇点的充分必要条件是下列两条中的任何一条成立：

1. $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的罗朗展开式中主要部分有无穷多项；

2. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在，即当 z 趋向于 ∞ 时，$f(z)$ 不趋向于任何（有限或无穷）极限.