第4节 介质的电磁性质

（随时间变化情形）

边值关系把界面两侧的电磁场联系起来，代价是不能描写宏观小、微观大厚度为h的界面层内的电磁场和电荷电流细节。

总电荷密度包括束缚电荷密度ρ_P和额外电荷（自由电荷）密度ρ_f.

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_P + \rho_f = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_f$$

电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

则有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

对线性各向同性介质

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

其中χ_e称为极化率

则有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

其中

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

称ε为电容率, ε_r为相对电容率.

总电流密度

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_f + \boldsymbol{J}_P + \boldsymbol{J}_M$$

右三项分别为：自由电流、极化电流、磁化电流

$$\boldsymbol{J}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M}$$

磁感应强度的旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_f + \boldsymbol{J}_P + \boldsymbol{J}_M + \boldsymbol{J}_D \right)$$

其中

$$\boldsymbol{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

又因 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

引入**磁场强度**

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$$

则

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

各向同性非铁磁介质模型

$$\boldsymbol{M} = \chi_M \boldsymbol{H}$$

称χ_M为磁化率.

定义

$$\mu = \mu_r \mu_0, \qquad \mu_r = 1 + \chi_M$$

则

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$是电磁场的基本物理量，$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$是两个辅助场. 介质的电磁物性由ε (ε_r 或 χ_{e})和μ (μ_r 或 χ_{M}) 描述.

介质中的麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} + \frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \rho d^3 x$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

以后，如不特别声明，$\boldsymbol{J}$指自由电流密度，ρ指自由电荷密度.

各项同性非铁磁介质的电磁性质方程： $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$

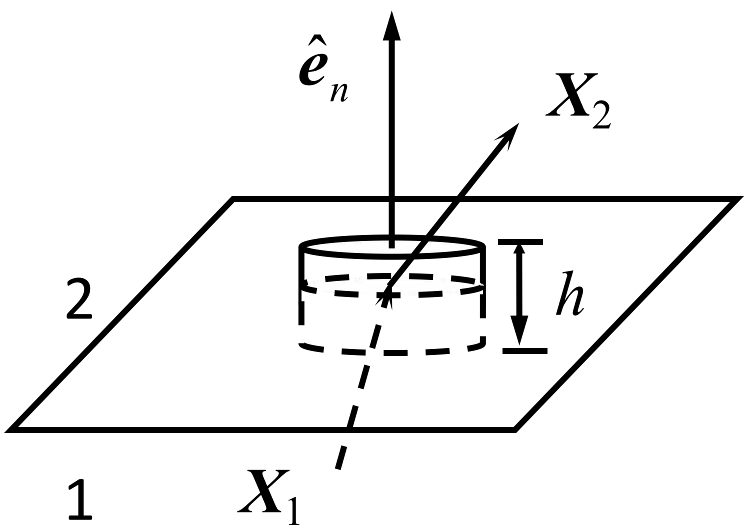
导体：

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

第5节 电磁场边值关系

（随时间变化情形）

5.1 法向分量的跃变



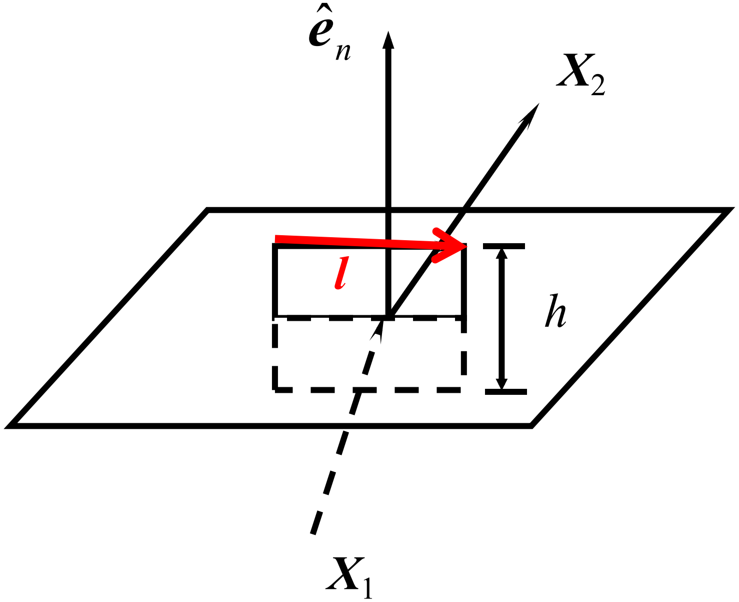
$\boldsymbol{X}$代表$\boldsymbol{D}$或$\boldsymbol{B}$

跨界面小圆柱体的h先趋向零. 柱内自由电荷与柱底面之比为面电荷密度σ. 由麦氏方程组的两个散度关系的面积分易得,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

5.2 切向分量的跃变



X代表E或H

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}, \quad \oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{s}$$

取 $h<<l$，可忽略垂直方向的积分.

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{lh}{2}\frac{\partial}{\partial t}[(\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_1)\cdot \hat{\boldsymbol{n}}]$$

$$(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\cdot \boldsymbol{l} = I + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = I + \frac{lh}{2}\frac{\partial}{\partial t}[(\boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{D}_1)\cdot \hat{\boldsymbol{n}}]$$

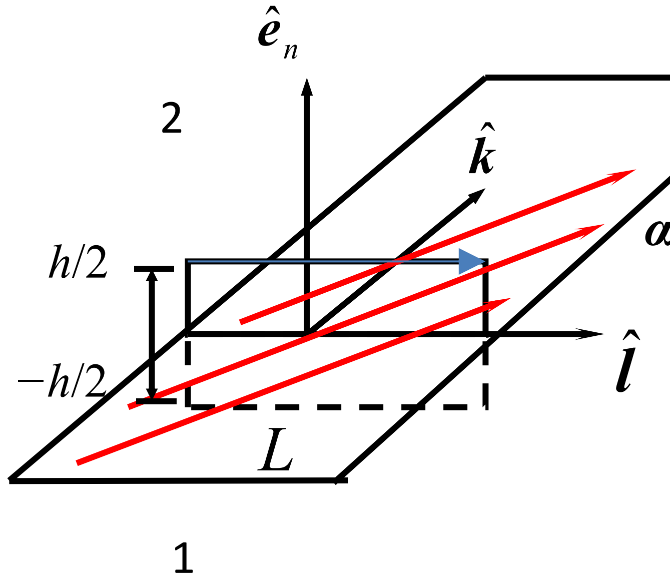
（场的变化率有限）

因而

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{l} = 0, \qquad (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\cdot \boldsymbol{l} = I$$

由$\boldsymbol{l}$的任意性，从第一式马上得到

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$



定义界面束缚电流线密度

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{J}_M^{//} dh$$

它与界面平行， $\boldsymbol{\alpha}_M \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n = 0$

据此可把 $(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{l} = I$ 写成

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}$$

（参考第二次习题系统解答）

小结

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma$$

界面自由面电荷密度

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}$$

界面自由线电流密度

补充：对导体，$\boldsymbol{J}=\sigma_{\text{cond}}\boldsymbol{E}$. 对良导体（金属）电导率$\sigma_{\text{cond}}$趋于无穷大，而电流密度有限，故$\boldsymbol{E}=0$. 在金属表面的介质电场满足

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot \boldsymbol{D} = \sigma, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_n \times \boldsymbol{E} = 0$$

第6节 电磁场的能量和能流

（随时间变化情形）

6.1 场和电荷系统的能量守恒定律的一般形式

在电磁介质系统中包含有自由电荷、介质和电磁场. 在dt时间内电磁场对单位体积内自由荷所作功为

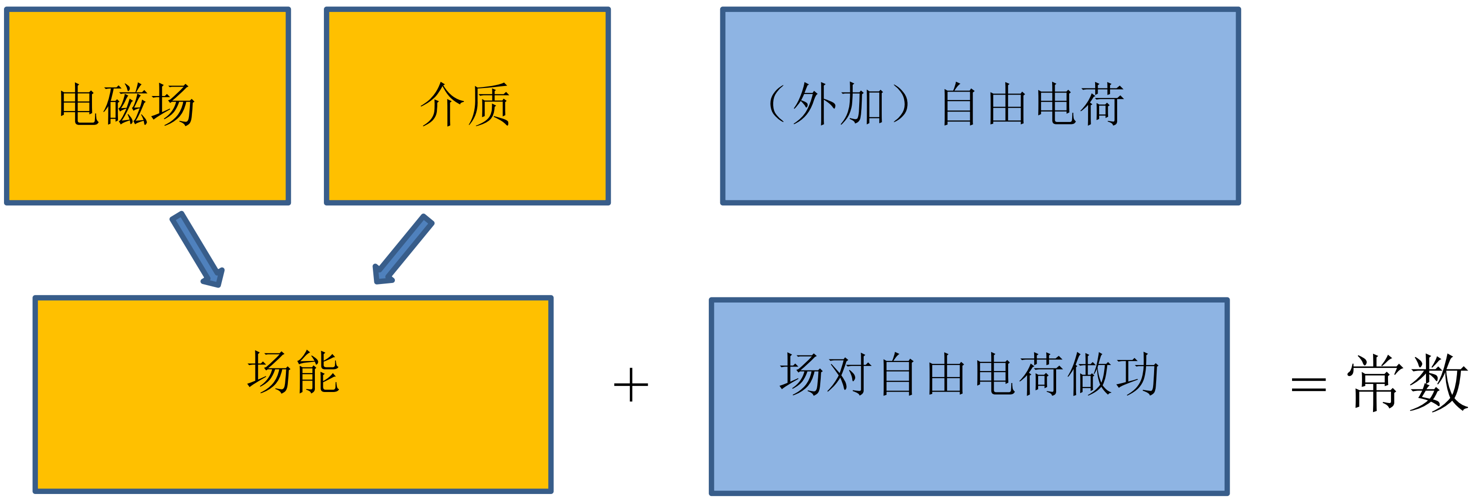
$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}dt$$

它变成自由电荷的动能或焦耳热或对系统外其他物质做功. 电磁场对介质（束缚电荷）作所的功则变成极化能或磁化能储存在介质中, 或者转化为热运动的能量.

以下讨论介质没有耗散（即极化和磁化能没有转化为热）也不对外做功的情形. 即假设每一时刻介质都处于平衡态. 因此$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$分别是$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的单值函数，即极化和磁化能完全由场决定，从而可以把极化和磁化能归入场能. 电磁场能、极化和磁化能、以及场对自由电荷做的功加起来守恒.

场和电荷系统

场能的增量等于场对自由电荷做的负功。



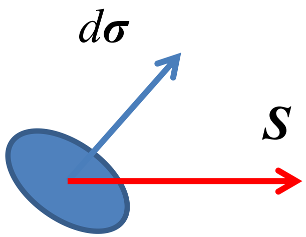
不适应情形：

- 铁磁体，磁化强度$\boldsymbol{M}$不是磁感应强度$\boldsymbol{B}$的单值函数，其关系称为磁滞回线. 原因是铁磁介质可以处于亚稳态而不是真正的平衡态.
- 快速变化的电磁场，在所考虑的时间尺度内介质来不及响应或极化和磁化来不及弛豫回平衡值.

场能量密度 $w(\boldsymbol{x},t)$

场能流密度 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)$

它的方向沿能量传输方向，数值为单位时间内流过单位横截面的场能.



单位时间流过面元$d\boldsymbol{\sigma}$的场能： $\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$

单位时间场对单位体积自由电荷做的功：$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$

能量守恒关系

对固定V,

$$-\oint\!\!\!\!\oint_{\partial V}\boldsymbol{S}\delta t\cdot d\boldsymbol{\sigma}+\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\delta t dV+\delta\iiint_V w dV$$

$$-\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{S})\delta t dV=\iiint_V(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})\delta t dV+\iiint_V \delta w dV$$

因而

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{S})\delta t+\delta w=-(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})\delta t$$

6.2 电磁场能量密度和能流密度

应用洛伦兹力公式，可改写场对单位自由电荷做功的功率

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=\left(\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$$

根据 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}-\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 得

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

应用公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})$

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

根据 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 将功率写成

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

和能量守恒定律比较

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{S})\delta t+\delta w=-(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})\delta t$$

得 $$\delta t \nabla \cdot \boldsymbol{S} + \delta w = \delta t \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \delta t + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \delta t$$

玻印亭矢量（猜想）：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

$$\delta w = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \delta t + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \delta t$$

从而

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

即

$$\delta w = \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D}$$

注意，$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$是宏观场. 所以在介质中上式的$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$也要理解为对微观电磁场作了平均的宏观电磁场.

左边两项分别与电磁场作功有关，一般依赖与变化的过程，因此分别是不可积的（加起来才可积）.

（1）真空

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B},$$

故

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)$$

这个方程是可积的，积分得

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

真空没有耗散，也没有亚稳态，所以上两式在真空中普遍成立，对任何不需要考虑电磁场量子效应的尺度适用，对变化任意快慢的电磁场也适用.

（2）介质（准静态）

选择$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{B}$为独立场. 设场能密度w是$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{B}$的函数并且仅通过他们依赖于t：

$$w = w(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t))$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\delta w}{\delta \boldsymbol{B}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{\delta w}{\delta \boldsymbol{D}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{比较} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

得 $\dfrac{\delta w}{\delta \boldsymbol{D}} = \boldsymbol{E}, \qquad \dfrac{\delta w}{\delta \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{H}.$ 而 $\delta w = \dfrac{\delta w}{\delta \boldsymbol{D}} \cdot \delta \boldsymbol{D} + \dfrac{\delta w}{\delta \boldsymbol{B}} \cdot \delta \boldsymbol{B}$ 故

$$\delta w = \boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B}$$

对**线性介质**

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

在准静态过程ε和μ近似与t无关，

$$w = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}\right)$$

作业

用边值关系证明：在绝缘介质与导体的分界面上，在静电情况下，导体外表面的电场线总是垂直于导体表面；在恒定电流情况下，导体内表面电场线总是平行于导体表面.