§2.4 单球面成像与单薄透镜成像(2.1, 2.2, 2.3)

* 我们将会学到：

1. 关于成像的一系列概念和符号规则
2. 单一折射球面的傍轴成像公式
3. 单一薄透镜的傍轴成像公式
4. 作图法成像

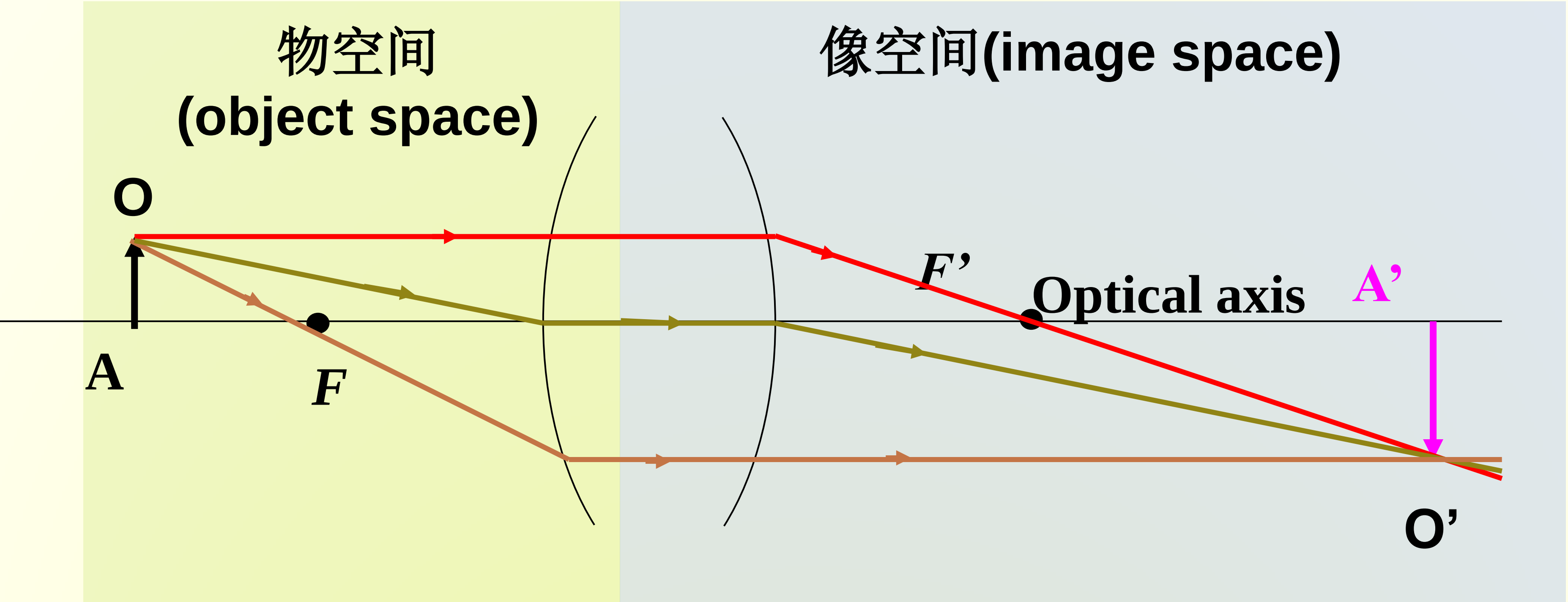
#3月23日上午3-4节 9:50-11:30 #　调整到

#3月28日下午第10-11节 16:15-17:55 地点：艺308 #

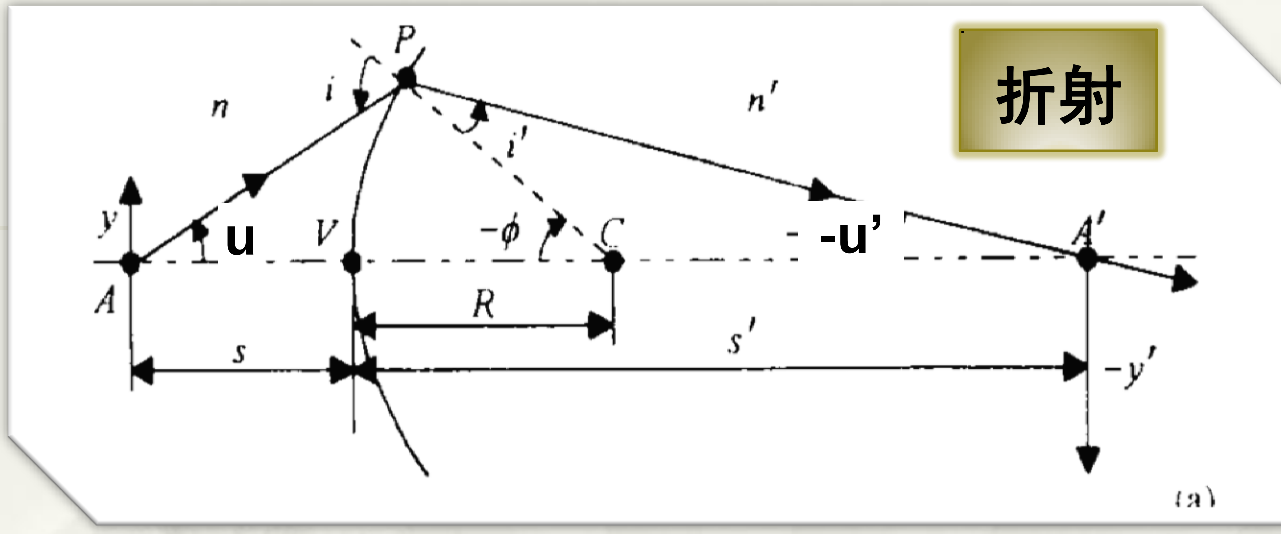
§2.4 单球面成像与单薄透镜成像(2.1, 2.2, 2.3)

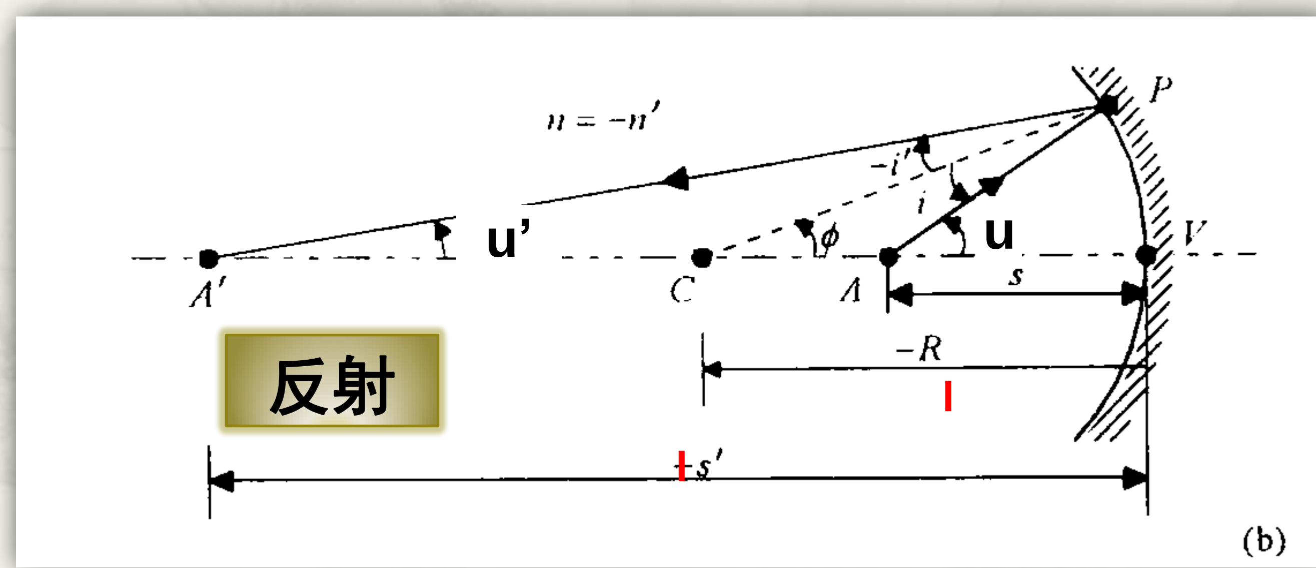
有关成像的基本概念 P36

- 光束：光线的集中表现
  - 同心光束：光束中各光线本身或其延长线交于同一点。例如：点光源（球面波），平行光线（交于无穷远）等。
  - 但是，一般光线系统均不具同心性（象散光束，例子：教材P8例题1）。以后谈到的光线系统成像均是有条件的近似。平面镜成像是严格成像的例子。
- 实(虚)物点：O是发散(会聚)光束的交点；
- 实(虚)像点：O’是会聚(发散)光束的交点；
- 虚、实像均能被人眼看到，但只有实像能用屏幕接收。
- 相对光线系统，物点组成的空间叫物方（物空间）；像点组成的空间叫像方（像空间）。
- 物点与像点互称为共轭点
  - 根据光路可逆性，若把物点O移至像点O′处，则通过光线系统，用反向光入射，O′将成像于O处。



- 物(像)平面:OA (O′A′) 所在之平面。物、像平面互为共轭平面。
- 光轴(Optical axis):球心的连线，一般是系统对称轴。
- 旁(近)轴光线(paraxial rays)：在光轴附近、与之夹角较小(<5°)的光线。





符号规则 P90

本ppt中，图中字母代表绝对值；公式中字母有正负之分即代表真实值。这与书本P45一致。

符号规则 P90

符号规则(sign conventions):

1) 光线自左向右入射,定为 $+z$ 方向.

2) 球面的曲率半径:球心在球面顶点的右方为正,反之为负. 左负右正

3) 物距:自物点量到参考点(球面顶点、**薄透镜光心**(optical center)、**组合透镜主点**(principal point)(其定义见§2-4,§2-5)),沿 $+z$ 方向为正,反之为负.

4) 像距:自参考点(球面顶点、薄透镜光心、组合透镜主点)量到像点,沿 $+z$ 方向为正,反之为负.

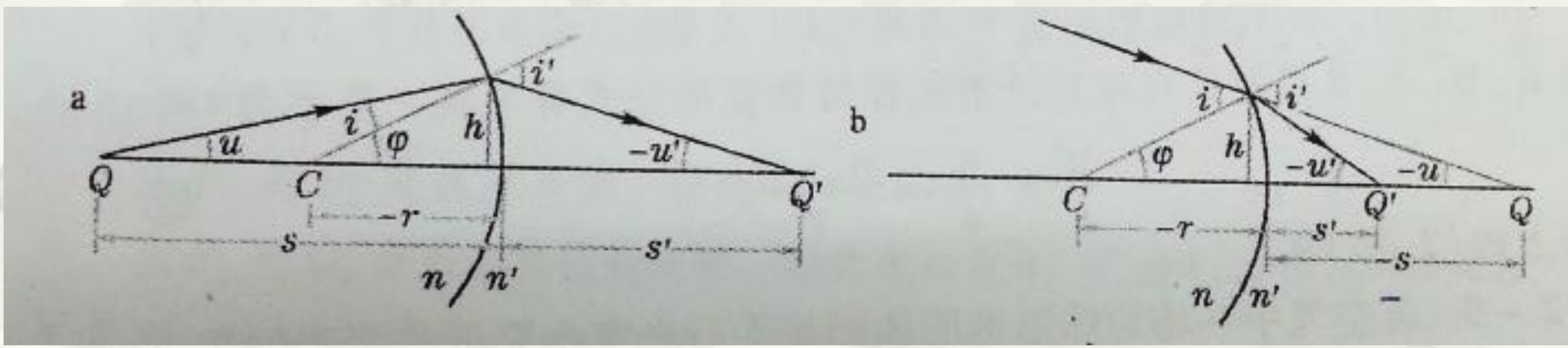
5) 物高和像高:物高、像高垂直于光轴,向上为正,向下为负. 上正下负

6) 角度:以光轴或界面法线为始边旋转到该光线,取锐角,反时针为正,顺时针为负(法线与光轴的夹角,以光轴为始边). 逆正顺负

下页图中标明了球面折射及球面反射的各量的绝对值.冠有负号的量,例如,图中的 $-y'$,表示 y' 本身是负值.而没有冠以负号的量,又如,图中的 s, s' 等,表示 s, s' 本身是正值.

课堂练习

2－7. 按已约定的正负号法则（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）、（Ⅳ）、（Ⅴ）等，标示出本题各图中的物距 s、像距 s'、曲率半径 r、光线倾角 u、u' 的绝对值。比较各图中折射率 n、n' 的大小，指明各图中物像的虚实。



图a：实物，实像，n>n’ **图b：虚物，实像，n>n’**

§2.4 单球面成像与单薄透镜成像(2.1, 2.2, 2.3)

单球面成像（2.1, 2.2）

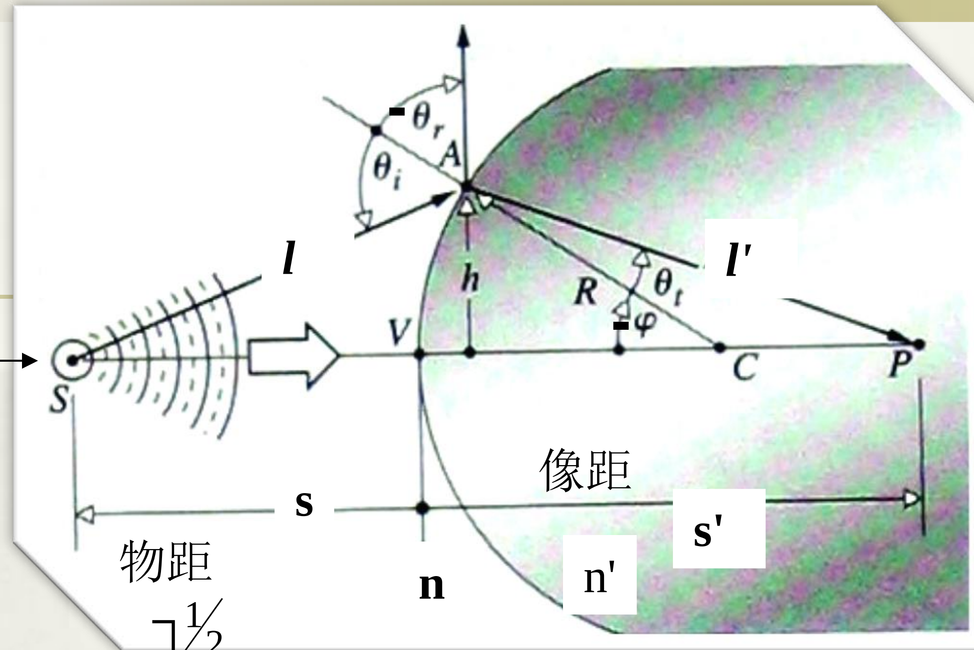
* 对于绝大多数光学系统，都是由一系列球形折射或反射面组成，大多数是在傍轴条件下成近似的像。
* 教材P8例题2，单一球面的折射光作图法
* 教材P40~43，利用折射定律证明此公式。
* 下面，我们将利用费马原理和推论“物象间的等光程性”，推导单球面的傍轴成像公式。

单球面镜

Use Fermat's Principle

$\Delta = nl + n'l'$

光轴



Law of cosines for $\triangle SAC$ and $\triangle ACP$:

$$l = \left[R^2 + (s+R)^2 - 2R(s+R)\cos\varphi\right]^{1/2}$$

$$l' = \left[R^2 + (s'-R)^2 + 2R(s'-R)\cos\varphi\right]^{1/2} \longleftarrow \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$$

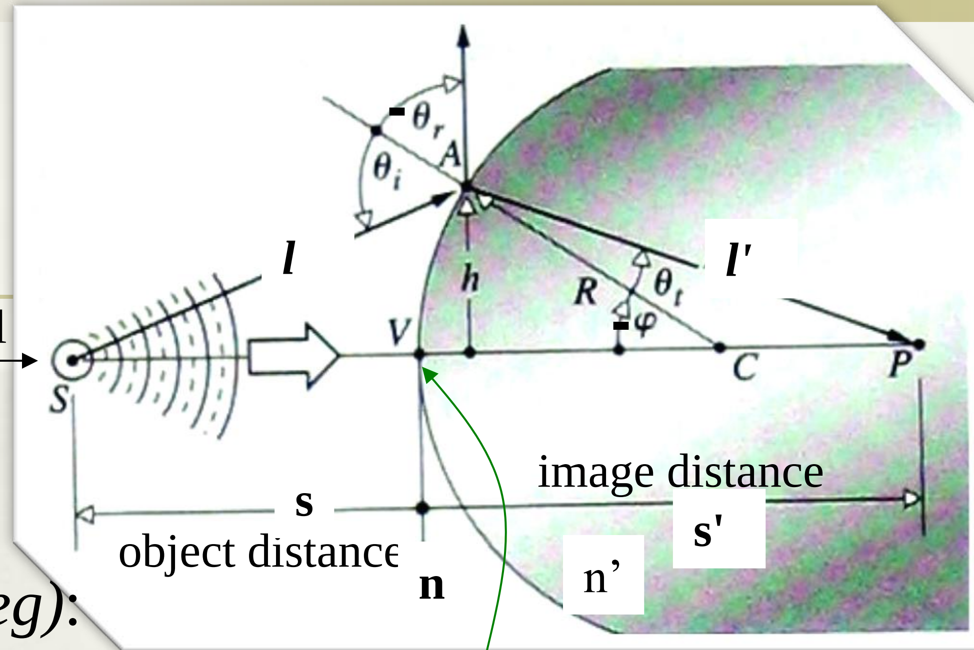
$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \frac{nR(s+R)\sin\varphi}{l} - \frac{n'R(s'-R)\sin\varphi}{l'} = 0$$

Note: 这里只对φ求微分，是因为引起路径变化的只有φ，这时变分退化到全微分。

$$\boxed{\frac{n}{l} + \frac{n'}{l'} = \frac{1}{R}\left(\frac{n's'}{l'} - \frac{ns}{l}\right)} \longleftarrow$$

对于不同的φ，l, l'不同,导致P点不同，说明了光束的非同心性。

单球面镜



$$\frac{n}{l}+\frac{n'}{l'}=\frac{1}{R}\left(\frac{n's'}{l'}-\frac{ns}{l}\right)$$

傍轴近似: 对于小角度$\varphi\,(<5deg)$:

$\cos\varphi\approx 1$ $\quad l\approx s$

$\sin\varphi\approx\varphi$ $\quad l'\approx s'$

$$\boxed{\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{R}=P}$$

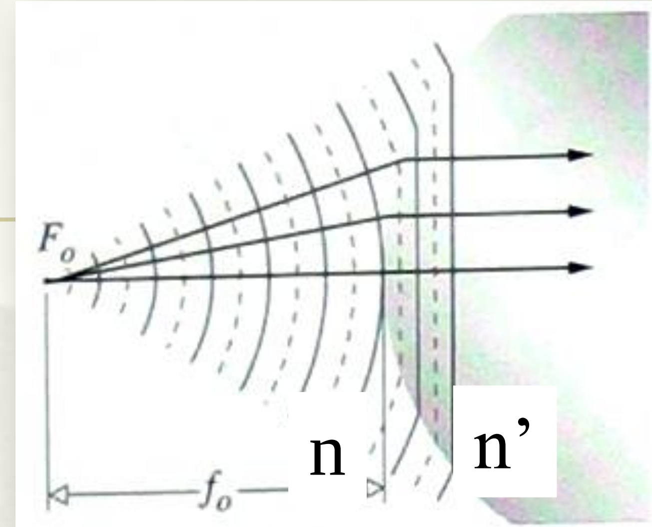
P——光焦度

- P点位置不再依赖于折射线，S点能成像于P点。
- s和s’分别成为物距和像距

单球面镜: 焦距

$$\boxed{\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{R}}$$

物焦点



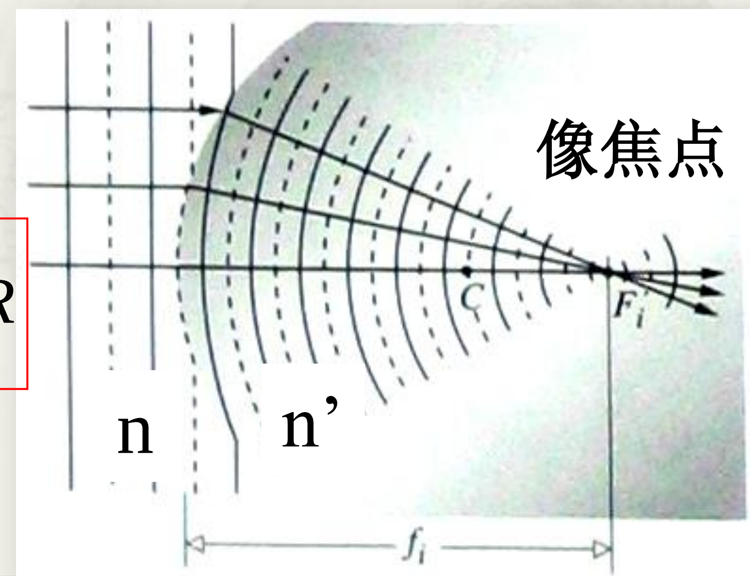
物焦点F_0 : $s' = \infty$

$$\frac{n}{f}+0=\frac{n'-n}{R}$$

物方（第一）焦距

$$\boxed{f=\frac{n}{n'-n}R}$$

像焦点:



像方（第二）焦距

$$\boxed{f'=\frac{n'}{n'-n}R}$$

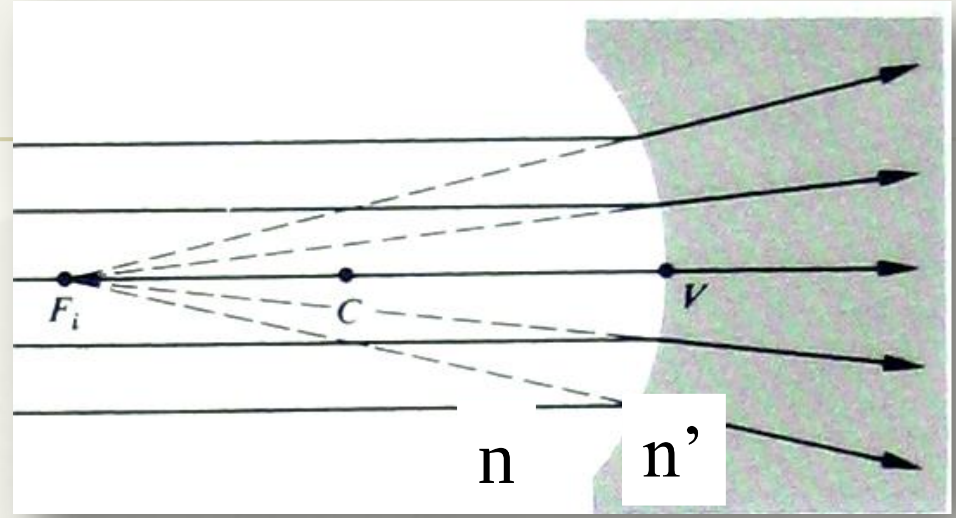
$R > 0, n' > n \rightarrow f > 0$ – 会聚

单球面镜: 焦距

What if R is negative?

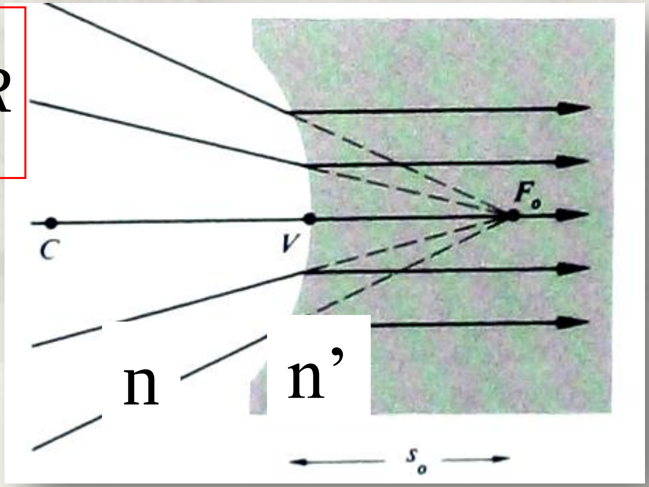
$$f' = \frac{n'}{n'-n} R$$

虚像； $f' < 0$



$$f = \frac{n}{n'-n} R$$

虚物；
$f < 0$



凹球面反射镜焦距公式：

1. **R < 0**
2. **n’ = -n**
3. **s’需要添负号(因传播方向反向)**

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{-1}{-s'} = \frac{-1-1}{R}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{-2}{R}, \text{where } R < 0$$

课堂练习

* 凹球面反射镜的半径为40cm，当物体置于凹面镜前30cm和10cm时，成像在哪里？

按题意，以$R=-40cm, s=30cm$代入

$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=-\frac{2}{R}$,我们有$\frac{1}{30}+\frac{1}{s'}=-\frac{2}{-40}$，求得$s'=60cm$

说明成像在凹球面反射镜的左方60cm处，为实像。

按题意，以$R=-40cm, s=10cm$代入

$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=-\frac{2}{R}$,我们有$\frac{1}{10}+\frac{1}{s'}=-\frac{2}{-40}$，求得$s'=-20cm$

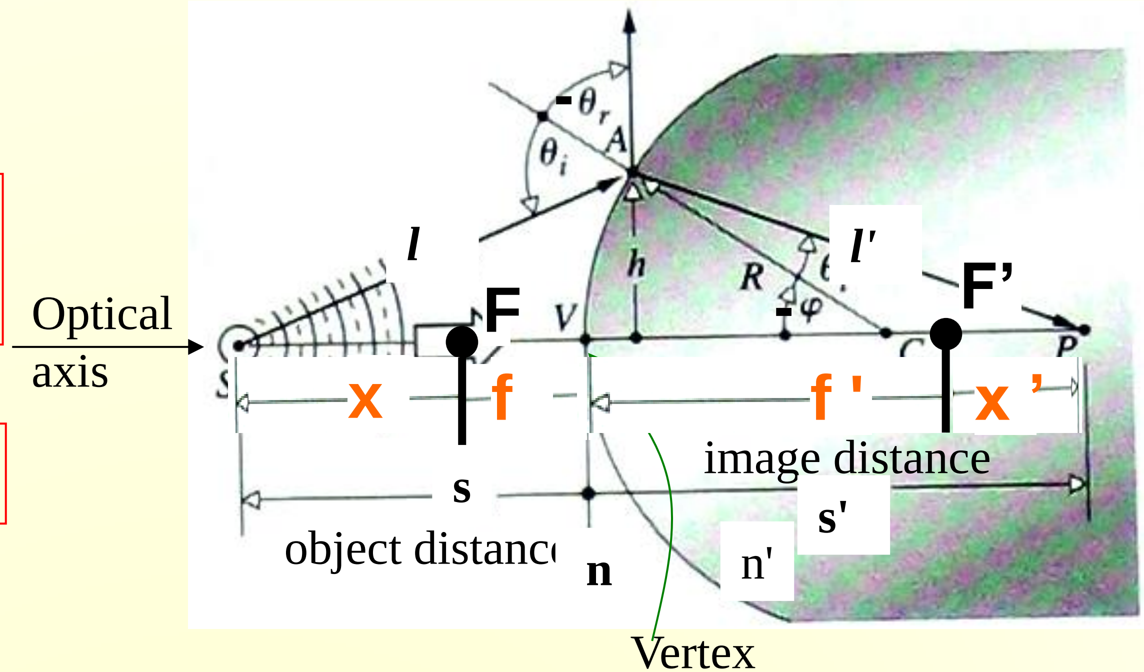
说明成像在凹球面反射镜的右方20cm处，为虚像。

单球面镜公式汇总

$$\boxed{\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{R}}$$

高斯型P43: $\boxed{\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1}$

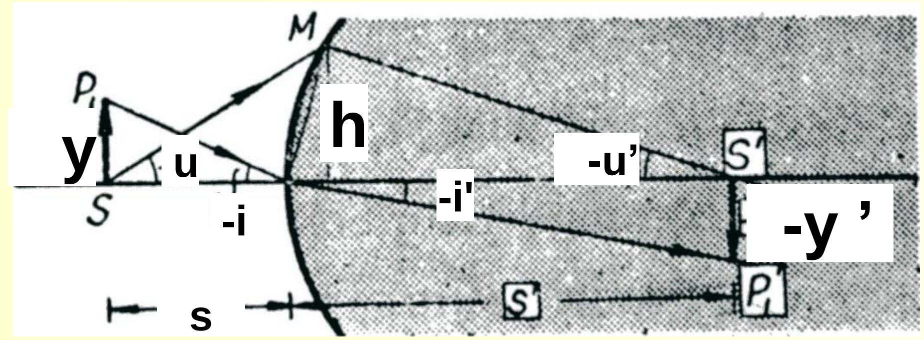
牛顿型: $\boxed{x\,x'=f\,f'}$



横向放大率 P45

$$\boxed{V=\frac{y'}{y}=-\frac{n\,s'}{n'\,s}=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}}$$

拉-亥不变量 P46 $\boxed{nuy=n'u'y'}$



逐次成像

* 对于多个球面镜的成像问题，可以采用**逐次成像法**求出所有的物象关系P45

如图 3-11 所示，由 K 个折射球面组成一共轴球面系统，物体 SQ 经过这个光学系统所成的象为 S_KQ_K.

先对第一个单球面 Σ_1 使用单球面的折射公式或高斯公式找到其对应的象 S_1Q_1，此时假定其他的球面不存在，然后将由第一球面得出的象作为第二个球面 Σ_2 的物，求出其对应的象 S_2Q_2……这样逐个地找出每个球面对应的象的位

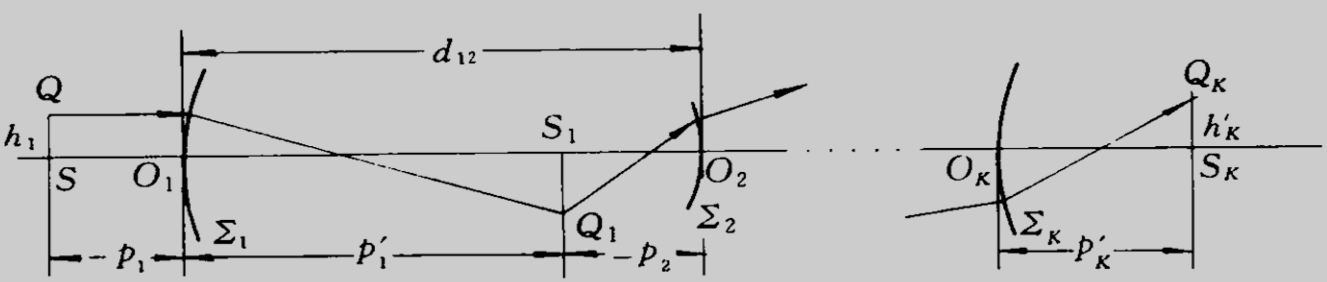


图 3-11　共轴球面系统的逐次成象

置及象的大小、正倒等情况，直至最后一个球面的象 S_KQ_K，这便是整个球面系统的象.

对应 K 个球面，可得 K 个物象距公式，

$$\frac{n_1'}{p_1'}-\frac{n_1}{p_1}=\frac{n_1'-n_1}{r_1},$$

$$\frac{n_2'}{p_2'}-\frac{n_2}{p_2}=\frac{n_2'-n_2}{r_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{n_K'}{p_K'}-\frac{n_K}{p_K}=\frac{n_K'-n_K}{r_K}.$$

两相邻球面顶点的距离为

$$d_{12}=p_1'-p_2,\quad d_{23}=p_2'-p_3,\quad \cdots,\quad d_{K-1,K}=p_{K-1}'-p_K.$$

当系统给定时，各球面的曲率半径 r 及其两边的介质折射率均为已知，且两相邻球面顶点的距离也给定，用上两组方程式可解出最后一个象距 p'_K. 对于给出的物高 h_1，垂轴放大率为

$$\beta=h_K'/h_1.$$

因为

$$h_1'=h_2,\ h_2'=h_3,$$

故

$$\boxed{\beta=\frac{h_K'}{h_1}=\frac{h_1'}{h_1}\frac{h_2'}{h_2}\frac{h_3'}{h_3}\cdots\frac{h_K'}{h_K}=\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_K.} \tag{3-35}$$

即系统总的垂轴放大率为各单球面的垂轴放大率之乘积. 相应的拉格朗日－亥姆霍兹恒等式为

$$\boxed{n_1h_1\mu_1=n_1'h_1'\mu_1'=n_2h_2\mu_2=\cdots=n_K'h_K'\mu_K'.} \tag{3-36}$$

Homework 3 (due date Mar 16)

- 教材
- P94 习题 2-1，2-4, 2-9