

《高等数学》第八章习题解答

习题8.1

1. 求 $\int_L (xy+yz+zx)ds$, 其中 L 为过四点 $O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,1)$ 的折线.

解. $I = \int_0^1 0dz + \int_0^1 ydy + \int_0^1 (x+1+x)dx = \frac{5}{2}$.

2. 求 $\oint_L xyds$, 其中 L 是正方形 $|x| + |y| = a$ ($a > 0$).

解. 被积函数是关于 x 的奇函数, 积分曲线 L 关于 y 轴对称, 因此积分为 0.

3. 求 $\int_L (1+y^2)ds$, 其中 L 为摆线段: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

解. $I = \int_0^{2\pi} (1 + 4a^2 \sin^4 \frac{t}{2}) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a + \frac{256}{15} a^3$.

4. 求 $\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, 其中 L 为螺旋线段: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

解. $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2+b^2t^2} \sqrt{a^2+b^2} dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \arctan \frac{2\pi b}{a}$.

5. 求 $\oint_C (x+y)ds$, 其中 C 为双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 的右面的一瓣.

解. 曲线 C 的参数方程: $x = a\sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta$, $y = a\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta$, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$. 于是 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta} (\cos \theta + \sin \theta) \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \sqrt{2}a^2$.

6. 求 $\int_L xyds$, 其中 L 是椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 位于第一象限中的那部分.

解. L 的参数方程: $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos \theta \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{ab(a^3-b^3)}{a^2-b^2}$.

7. 求 $\int_L \sqrt{x^2+y^2} ds$, 其中 L 为曲线段 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解. $x^2+y^2 = a^2(1+t^2)$, $x'^2+y'^2 = a^2t^2$, $I = \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{1+t^2} t dt = \frac{(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1}{3} a^2$.

8. 求 $\int_L (x + \sqrt{y} - z^5) ds$, 其中 L 由曲线段 L_1, L_2 组成, L_1 与 L_2 的方程分别为 L_1 :

$$\begin{cases} y = x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ z = 0, & \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = 1, & 0 \leq z \leq 1. \\ y = 1, & \end{cases}$$

解. $I = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2} dx + \int_0^1 (2-z^5) dz = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + \frac{11}{6} = \frac{5\sqrt{5}+10}{6}$.

9. 若椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任一点 (x, y) 处的线密度为 $|y|$, 求椭圆周的质量 ($0 < b < a$).

解. 记椭圆为 L , $m = \int_L |y| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = 2b^2 + \frac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

习题8.2

1. 求 $\int_L 2xydx - x^2dy$ 的值, 其中 L 沿下列不同路径从原点 $O(0,0)$ 到终点 $A(2,1)$:

(1) 直线段 \overline{OA} ; (2) 以 Oy 轴为对称轴的抛物线段; (3) 折线 OBA ; (4) 折线 OCA .

解. (1) $I = \int_0^1 2(2y)y d(2y) - (2y)^2 dy = \frac{4}{3}$.

$$(2) I = \int_0^2 2x \frac{x^2}{2} dx - x^2 d\frac{x^2}{2} = 0.$$

$$(3) I = \int_0^2 0 dx - \int_0^1 4 dy = -4.$$

$$(4) I = -\int_0^1 0 dy + \int_0^2 2x dx = 4.$$

2. 求 $\int_L \mathbf{F} d\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{F} = (x^2 + y, x + y^2)$, L 沿下列各路径从点 $A(1, 0)$ 到点 $B(-1, 0)$:

(1) 半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$; (2) 直线段 \overline{AB} ; (3) 折线段 ACB , 其中 C 点坐标为 $(0, -1)$.

解. (1) 曲线 $L: x = \cos t, y = \sin t, t$ 从 0 至 $-\pi$. $I = \int_0^{-\pi} (\cos^2 t + \sin t)(-\sin t dt) + (\cos t + \sin^2 t) \cos t dt = -\frac{2}{3}$.

$$(2) \text{ 曲线 } L: y = 0, x \text{ 从 } 1 \text{ 至 } -1. I = \int_1^{-1} (x^2 + 0)(-dx) = -\frac{2}{3}.$$

$$(3) I = \int_1^0 (x^2 + x - 1) dx + (x + (x - 1)^2) dx + \int_0^{-1} (x^2 - x - 1) dx + (x + (-x - 1)^2)(-dx) = -\frac{2}{3}.$$

3. 求 $\oint x^2 dy - y^2 dx$, 其中积分路径为椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 按逆时针方向.

解. $L: x = a \cos t, y = b \sin t, t$ 从 0 至 2π . $I = \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t b \cos t - \sin^2 t (-a \sin t) dt = 0$.

4. $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 为: (1) 曲线 $y = x^4$ 上由点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段; (2) 由点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的直线段.

$$\text{解. (1) } I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2xx^4) dx + (x^8 - 2xx^4) dx^4 = -\frac{10}{9}.$$

$$(2) I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx = \frac{2}{3}.$$

5. 求 $\int_L y dx + z dy + x dz$, 其中 L 为螺旋线段: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

$$\text{解. } I = \int_0^{2\pi} a \sin t (-a \sin t) dt + bta \cos t dt + a \cos t b dt = -\pi a^2 + 0 + 0 = -\pi a^2.$$

6. 求 $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y) dy$, 其中 L 是曲线 $y = |x|$ 上从点 $(-1, 1)$ 到 $(2, 2)$ 的一段.

$$\text{解. } I = \int_{-1}^0 (x^2 + x^2) dx + (x^2 + x)(-dx) + \int_0^2 (x^2 + x^2) dx + (x^2 - x) dx = \frac{41}{6}.$$

7. 求 $\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中 L 是以 $A(2, 0), B(0, 2), C(-2, 0), D(0, -2)$ 为顶点的正向正方形闭路.

解. 被积向量函数 $(\frac{1}{|x|+|y|}, \frac{1}{|x|+|y|})$ 和积分曲线都关于原点对称, 因此积分为 0 .

8. 求 $\int_L (x^4 - z^2) dx + 2xy^2 dy - y dz$, 其中 L 为依参数 t 增加方向的曲线: $x = t, y = t^2, z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

$$\text{解. } I = \int_0^1 (t^4 - t^6) dt + 2t t^4 dt^2 - t^2 dt^3 = \frac{1}{35}.$$

9. 求 $\oint_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限的边界, 方向由 $A(1, 0, 0)$ 到 $B(0, 1, 0)$ 到 $C(0, 0, 1)$ 再回到 A .

$$\text{解. 由对称性 } I = 3 \int_{AB} (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz \\ = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - \sin^2 t)(-\sin t dt) + (\cos^2 t - 0) \cos t dt + 0 = 4.$$

14. 求 $\oint_L \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) 的右面的一瓣, 沿逆时针方向.

解. 曲线 $L: x = a\sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, y = a\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.
 $ydx - xdy = -a^2 \cos 2\theta d\theta, I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -a^2 \cos 2\theta \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$.

习题8.3

1. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{L^+} (xy^2 + y^3)dy - (x^3 + x^2y)dx$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解. $I = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 r dr = \frac{\pi}{2} a^4$.

(2) $\oint_L y^2 dx + x^2 dy$, 其中 L 为以 $O(0,0), B(1,0), C(0,1)$ 为顶点的三角形 OBC 的正向边界线.

解. $I = \iint_{\triangle OBC} (2y - 2x) dxdy$, 由对称性 $I = 0$.

(4) $\oint_{L^+} (x + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy$, 其中 L 是双纽线 $r^2 = \cos 2\theta$ 的右半支.

解. 设 D 为 L 所围区域. $I = \iint_D (1 + e^x \cos y - e^x \cos y) dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr = \frac{1}{2}$.

(5) $\oint_{L^+} (e^x \sin y + \sin x - 8y)dx + (e^x \cos y - \sin y)dy$, 其中 L 为上半圆 $0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}$ ($0 \leq x \leq a$) 的边界.

解. 设 D 为 L 所围区域. $I = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 8) dxdy = \pi a^2$.

2. 利用曲线积分计算下列闭曲线所围图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解. 记星形线为 L , 所围区域为 D . $S = \iint_D dxdy = \oint_{L^+} x dy = \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2$.

(2) 心脏线 $x = a(1 - \cos t) \cos t, y = a(1 - \cos t) \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解. 记心脏线为 L . $S = \frac{1}{2} \oint_{L^+} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \frac{3}{2} \pi a^2$.

3. 证明 $\oint_{L^+} f(xy)(ydx + xdy) = 0$, 其中 $f(u)$ 有连续的一阶导数, L 为光滑曲线.

证. $f(xy)(ydx + xdy) = f(xy)d(xy)$ 为全微分, 因此它的曲线积分与路径无关. 由于 L 的起点和终点重合, 因此 $\oint_{L^+} f(xy)(ydx + xdy) = 0$.

4. 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值.

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)dx + (x-y)dy$. $\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关.
 $(x+y)dx + (x-y)dy = d(\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2), I = (\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2)|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1$.

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$. $\frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial y} = \frac{\partial(-e^x \sin y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $e^x \cos y dx - e^x \sin y dy = d(e^x \cos y), I = e^x \cos y|_{(0,0)}^{(a,b)} = e^a \cos b - 1$.

5. 求 $\int_{AB} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ 的值, 其中 $A(-2, -1), B(3, 0)$, AB 为任意路径.

解. $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy = d(\frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5)$,
 $I = (\frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5)|_{(-2, -1)}^{(3, 0)} = 62$.

7. 求常数 a, b , 使 $\frac{(y^2 + 2xy + ax^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求 $u(x, y)$.

解. 记 $P = \frac{y^2 + 2xy + ax^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $Q = -\frac{x^2 + 2xy + by^2}{(x^2 + y^2)^2}$. 解 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 得 $a = b = -1$.

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, 得 $u = \frac{x-y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$. 求导得 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y)$, 代入 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, 得 $\varphi(y) = C$. 因此 $u = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C$.

8. 求 $\int_{(0,1)}^{(1,1)} (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y)dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x)dy$.

解. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y)dx + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x)dy = d(\sqrt{x^2+y^2} + xy)$.

因此 $I = (\sqrt{x^2+y^2} + xy)|_{(0,1)}^{(1,1)} = \sqrt{2}$.

9. 求 $\int_{AB} (x^2 + y)dx + (x - y^2)dy$, 其中 AB 是由 $A(0, 0)$ 至 $B(1, 1)$ 的曲线段 $y^3 = x^2$.

解. $(x^2 + y)dx + (x - y^2)dy = d(\frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3)$, $I = (\frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3)|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1$.

10. 设 D 是平面有界闭区域, 其边界线 L 逐段光滑, 函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数. 证明: $\oint_{L+} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)]ds = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$, 其中 $\cos(n, x), \cos(n, y)$ 为曲线 L 的外法向量的方向余弦.

证. $\oint_{L+} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)]ds = \oint_{L+} Pdy - Qdx = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$.

11. 求曲线积分 $\oint_{L+} [x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})]ds$, 其中 L 为一简单封闭曲线, \mathbf{n} 为 L 的外法线方向的单位向量.

解. 设 L 所围区域为 D . $I = \oint_{L+} xdy - ydx = \iint_D 2d\sigma = 2 \times D$ 的面积,

12. 设函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的二阶偏导数, L 为 D 的边界, 分段光滑. 证明:

(1) $\iint_D v \Delta u d\sigma = \oint_{L+} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds - \iint_D (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y})d\sigma$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 为 u 沿 L 的外法线方向的方向导数.

(2) $\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma = \oint_{L+} (u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}) ds$.

证. $\iint_D v \Delta u d\sigma + \iint_D (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y})d\sigma = \iint_D (v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y})d\sigma = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(v \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(v \frac{\partial u}{\partial y}))d\sigma$, 由格林公式, 该式 $= \oint_{L+} v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx$, 由于 $dy = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})ds$, $dx = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})ds$, 该式 $= \oint_{L+} v \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})ds + v \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})ds = \oint_{L+} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$. (1)得证. (2)是(1)的直接推论.

13. 设 $u(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的调和函数, 即 $u(x, y)$ 有连续的二阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 证明:

(1) $\oint_{L^+} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] d\sigma$, 其中 L 为 D 的边界, \mathbf{n} 为 L 的外法线方向.

(2) 若 $u(x, y)$ 在 L 上处处为零, 则 $u(x, y)$ 在 D 上也恒为零.

证. (1) 在 12(1) 题中取 $v = u$, 并利用 $\Delta u = 0$, 即得所要等式.

(2) 一方面由 (1) 的结论 $\iint_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] d\sigma = 0$, 另一方面 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$ 为 D 上非负连续函数, 因此 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 在 D 内恒为零, 因此 u 在 D 上恒为零.