

第五章 光学系统的成像分析

光学成像系统可以看成是一种光学信息处理系统,采用频谱分析方法和线性系统理论全面研究光学系统成像的过程,已成为现代光学中的一种重要手段,并且是光学信息处理技术的重要理论基础。

前面提到,要在衍射屏后的自由空间观测夫琅禾费衍射,其条件是相当苛刻的。欲在近距离观测夫琅禾费衍射,就需借助会聚透镜来实现。在单色单位平面波垂直照射衍射屏的情况下,夫琅禾费衍射就是衍射屏函数的傅里叶变换。所以透射物体的夫琅禾费衍射就是实现傅里叶运算的物理手段。

5.1 成像系统概述

从光学的角度来看,物体是能发射或反射电磁波的任何东西。在这个意义上说,物体与光源是同义的。如果物体是自身发光,则称为初级光源;如果物体被其他光源照明,则称为次级光源。一个空间上有限的物体可以看成是由许多发出球面波的点光源(空间上无限小的)组成的,总波前的形状和性质由构成整个有限物体的所有点光源发出的球面波构造性的干涉决定。从几何光学的观点来看,需要考察的将是一个点光源发出的球面波,这个点光源可称之为“点物”,所以一个点物就是发出光线的点。人眼或光学接收器可以收集这些光线中的一部分而“看到”一个物体,这就是所谓的像。也就是说,当发自某物体的光线收敛于另一个点时就形成一个像。从波前的角度来看,成像过程是一个球面波汇聚于某“像点”。在光线汇聚于像点之后,光线仍将按各自方向继续前进。这样,离开一个像点的光线与离开一个点物的光线一样发散。所以,从光学真实性来讲,像就是物的复制,人眼完全无法区分收集到的光线是来自一个点物还是一个像点。像有两种,光线确实交汇于一点所形成的像称之为实像,光线并不交汇,但光线看起来都来自一个点形成的像称之为虚像。人眼无法区别像的虚实。实像可以用一张放在光线交汇处的屏幕进行观察。发散光线落在屏幕上,屏幕只被照亮而不会形成像。如果屏幕位于汇聚光线的交汇位置,那么屏幕上只有一个很小的亮点,这就是实像。如果离开点物的每条光线后来都汇聚于一个实像点,或看起来都发自一个虚像点,那么像是理想的或完美的。理想像是对实际情况的近似,是一种物理的抽象,就象质点、点电荷、点光源一样,它既不存在,也不可能实现。实际上,实际的像只是大部分来自点物的光线在通过成像系统后交汇在理想像点附近。光的波动本质决定了实际像与理想像偏差的最终极限。如形成实像时,光波应汇聚于一理想点,但实际的情况是,波前通过光学系统后不可能保持精确球面,一方面是由于波前在光学系统边缘由于衍射而偏折;另一方面是由于光学系统的质量的缺陷也会限制了光线交汇在像点的准确度。光线偏离理想像点的量称为像差。

对光学系统的研究,除特殊情况外,通常都要再加一个限制条件:只研究轴对称系统。轴对称性意味着系统中所有球面的球心和开孔的圆心都位于同一条直线上,这条直线称为光轴。如果画出几条被球面镜反射的光线就会看出,这些光线并不交汇在同一个像点上。不过,与平面折射面的情况类似,球面镜确实能形成清晰的像。通常,需要再一次对光线进行某种限制,最通常的方式是只研究与光轴成很小夹角、不会偏离光轴很远的光线,那么这些光线通过光学系统的路径将很贴近光轴,这样光线称为傍轴光线或近轴光线。只考虑傍轴光线将确保来自一个点物的光线将最终交汇于同一像点。这样,由于所有光线都经过同一个像点,那么只要一条离轴光线就可以确定像的位置。光轴也定义了一条光线:它离开物体后以 0° 角入射到球面镜的顶点,然后以 0° 度角反射回去。所以,离轴光线与光轴相交之处就是像所在的位置。

沿光轴把一个广延物体移动到无穷远处,对镜面来说这个物体将变成一个轴上光点。这样的物体将产生平行于光轴的光线。但如果是位于无穷远处的无穷大物体,那么可以存在轴外物点了。一个无穷远处的轴外物点发出的光线到达镜面时也是平行光线,但光线与光轴成一定夹角。只要这个角度很小,那么仍然可以保持傍轴近似,这些平行光线在反射后仍将交于一点。做出几条这样的光线就会发现,这时的像点位于一个经过焦点的平面上,称这个经过焦点的平面为焦平面。从来自无穷远的入射平行光线中选择经过镜面曲率中心的那条光线,该光线与焦平面的交点就确定了像在焦平面上的位置。

常见的简单的成像系统有反射镜、单个折射表面和薄透镜等,来自物点的光线经过这样的系统发生偏

折，从而成像。

许多光学系统的目的是在某种类型的探测器上成像。探测器可以是一张底片、一个固态探测元阵列，甚至可以是人眼视网膜。除成像之外，许多光学系统还增强所成之像，否则探测器很难看到。这种像增强可以采取多种形式，比如放大的像、高亮度的像、或大视场的像等等。

人眼具有固定的分辨率极限。所以，当一个物体移近眼睛就能看出原来无法分辨的细节。但人眼的近点(明视距离)限制了物距的继续减小。如果物体离眼距离小于近点，因无法聚焦细节反而丢失。这时需要一种能增大物体对眼所成张角的装置。这种装置能够在远点和近点之间的某个位置形成放大的像，而实现此目的最简单的光学就是一块透镜。

要形成放大的像，像距必须大于物距。对于正透镜，如果物距稍小于透镜的焦距，那么形成的像将是正立的、放大的虚像。放大镜可以和其他透镜组合起来形成更复杂的光学系统。在这样的系统中，放大镜被称为目镜，但其作用仍然是相同的。

放大镜可以让物离眼睛较近，而像仍保持在明视距离上。放大镜还可以与另一个正透镜组合在一起，让正透镜在靠近放大镜的位置形成一个实的“中间像”。这种组合称为复合型显微镜。最靠近物体的透镜称为“物镜”。物镜是一个焦距较短、在靠近眼睛的地方形成倒立中间实像的透镜。目镜只是一个简单的放大镜，它以物镜产生的中间实像为物，进而在明视距离上形成更大的虚像。

望远镜的作用是对远处的物产生放大的像。不过，此时的放大必须是角度放大，而不是线性放大。望远镜需要的是长焦距物镜。

由于一个实际的光学系统的横向尺度都是有限的，所以并不是发自某个物点的所有光线都可以通过系统参与成像的。确定哪些光线能真正通过系统是非常重要的。一方面发自物体并通过系统参与成像的那一部分光线决定了像的亮度。另一方面，在实际光学系统中，并不是所有的光线都可以当作傍轴光线来处理。非傍轴光线也许并不交汇在傍轴像点上。所以，像的质量很大程度上取决于哪些光线参与了成像。如果大量非傍轴光线参与成像，像的质量可能会严重降低。

像的质量还可能因色差而降低。一般来说，导致像差的原因，是傍轴光线应该到达的地方与真实光线实际到达的地方之间产生了差别。因为傍轴光线只是光轴附近小倾角实际光线的一种近似。色差取决于折射率随波长改变的变化，即色散。由于一个光学系统的傍轴性质，如焦距长度等，均取决于折射率，所以，即使严格的傍轴光学系统也会产生色差。

用几何光学的概念分析光学系统时，实际上是把光的波长假定为无限小，从而可以忽略。但实际光的波长总是有一定大小的，但只要在一个波长内的振幅和相位的所有变化在空间尺度远大于光的波长，几何光学的处理通常是正确的。通常如果光波的相位在与一个波长相比的空间尺度上发生大小可与 2π 弧度相比的变化时，几何光学的预言就够精确了。

从波长光学的观点来定义光线，光线可定义为穿越空间的一条轨迹或路径，它从波前上任一特定点出发，和光波一道穿过空间运动，在轨迹上的每一点都永远保持与波前垂直。因此，一旦波前确定了，光线的轨迹也就可以确定了，光线画出了各向同性介质中功率的路径。

如果一个光学系统内的二个平面，其中一个平面上的光场分布是另一个平面上的光场分布的像(通常会有放大或缩小)，这二个平面就称为共轭面。类似地，如果一个点是另一个点的像，则这二个点为共轭点。

一束沿光轴方向传播进入透镜的光线，不论是厚透镜还是薄透镜，对于傍轴光线，在光轴上存在一点，对正透镜光束将向此点会聚，对负透镜则是从此点发散的。以正透镜为例，原来的平行光束聚焦在透镜后面的一个点，称为透镜的后焦点或第二焦点。通过这一点垂直于光轴的平面叫做后焦面或第二焦面。当一束与光轴成任意角度进入透镜的傍轴平行光线将会聚焦于焦面上的一点，其位置取决于光束的初始倾角。类似地，对于正透镜前面光轴上的一个点光源。在透镜前面有一个特殊的点，如果将点光源放在这个点上，则它发出的发散光束就会以平行于光轴的平面的平行光束的形式向透镜后方射出，这个点叫做透镜的前焦点或第一焦点。通过前焦点并垂直于光轴的平面叫做透镜的前焦面或第一焦面。对于负透镜前焦点、前焦面和后焦点、后焦面的作用倒过来。这里的前焦点是一束原来平行于光轴的光，在透镜的出射方看，显得好像是从这一点发散射出。后焦点的定义为，如果一束入射的光束在通过透镜后变为一束平行或准直光束

射出，则原来光束的会聚点就叫后焦点。

5.2 透镜的结构及变换作用

透镜具有成像作用，成像作用相当于改变了波面的形状，即改变了波面的相位。如果忽略透镜的吸收和反射造成的光能量损耗，透镜的主要功能就是对波前起到相位变换作用。由于透镜这种功能，透镜能把平行的或发散的光会聚或成像，这样，利用透镜把发散的光聚焦在后焦面上，就可以观察衍射屏的夫琅禾费衍射了，这实际上意味着利用透镜实现了傅里叶变换，或者说透镜具有傅里叶变换的功能。透镜的这两项性质：成像和作为傅里叶变换器，使它成为光学成像系统以及光信息处理的最基本、最重要的元件。透镜的傅里叶变换特性是光学信息处理的基础。正是由于透镜具有傅里叶变换性质，才使傅里叶分析在信息光学中取得了有效的应用。

5.2.1 透镜的结构

最常见的透镜表面是球面的。在光学元件中，球面的应用极为广泛。球面的加工相对容易，让一片玻璃与另一片玻璃或某种工具进行无规则的摩擦就可以实现光学元件的抛光和磨削。两者之间放置磨料进行实际磨削，当两个表面以这种方式相互运动时，它们可能具有并始终保持触接的形状就是球面。平面可看成是球面的特殊情况，即曲率半径为无穷大的球面。向外弯曲的球面称为“凸”、向内弯曲的球面称为“凹”。只要球面的曲率半径相对大，球面就可以提供适当的成像质量。从解析的角度看，球面可以用很简单的数学进行处理。另外，球面是绝大多数其他光学表面(如非球面表面)很好的一级近似。

顾名思义，透镜是由透明物质制成的，通常是一块曲面玻璃，它的两个表面是凸(凹、平)形的曲面，这种曲面玻璃就称为透镜。应用光学中的符号规定：光线由左到右时，曲率中心在顶点右方的球面的曲率半径 R 为正，曲率中心在顶点左方的 R 为负。焦距 f 为正的透镜称为正透镜， f 为负的透镜称为负透镜。

常见的透镜正透镜有双凸、平凸和正弯月形[图 5.2.1(a)]负透镜有双凹、平凹和负弯月形等[5.2.1(b)]

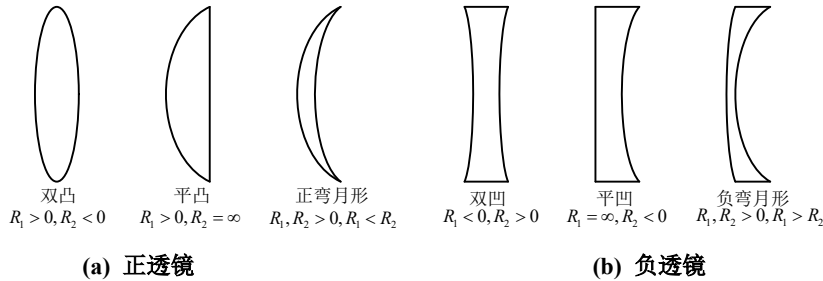


图 5.2.1 各种类型的透镜

对于表面为球面的透镜，不同表面的球面可能半径不同，通过表面的曲率中心作一直线，这条直线就称为透镜的光轴。透镜的法线是从球心到入射光线与顶平面交点的直线。透镜的基点位于光轴上，共有 6 个，分别是：第一焦点 F_1 、第二焦点 F_2 、第一主点 P_1 、第二主点 P_2 、第一节点 N_1 、第二节点 N_2 ，如图 5.2.2 所示，图中的第一主面和第二主面，是通过主点而垂直于光轴的面。

从图 5.2.2(a)可以看出，发自点 F_1 的球面波经过透镜后将以平面波从出射，即一条经过点 F_1 并射向透镜左侧的光线，将平行于光轴从右侧射出；而一束平行于光轴传播并射向透镜左侧的光线，从右侧射出，并将通过 F_2 。在前一情况下，发自 F_1 的光线在透镜的每个表面上被折射，但是如果作为入射光线和出射光线的延长线便会发现，它们在第一主面上相交。在后一情况中，入射光线和出射在第二主面相交。二个主面在光轴附近经常会非常接近平面，所以通常把他们叫作主平面。

从图 5.2.2(b)可以看出，通过透镜光中 O 点的光线，平行于入射线发出。如果作入射光线和出射光线

的延长线，它们分别交光轴于前、后节点。如果透镜两边的介质相同，则节点与主点重合。当然，任一个或两个主点可能位于透镜之外。

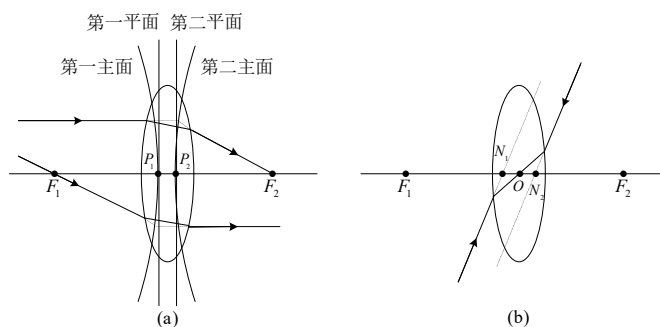


图 5.2.2 透镜的基点及主面

如果基点的位置已知，则即使不知每一表面上折射过程的详细情况，也能确定透镜的性态。因此，可以用两个焦点和两个主平面来有效地模拟一个透镜。这样，通过透镜的所有光线，其性态就好像他们直接传播到第一主面而没有在第一玻璃表面上折射，然后平行于光轴传播到第二主面，最后，直接从这一点出射而好象没有在第二个玻璃表面上折射一样。

从任一主点到相应焦点的距离，称为透镜的有效焦距 f ，或简称焦距。按光学习惯，当 F_1 位于 P_1 的左边时， f 为正，当 F_1 位于 P_1 的右边时， f 为负。当透镜置于真空或空气中时，其焦距为：

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)w_0}{nR_1R_2} \right]. \quad (5.2.1)$$

式中： n 为透镜材料的折射率； R_1 和 R_2 分别是前、后表面的曲率半径； w_0 为透镜的轴上厚度。透镜的前焦距 f_1 是从透镜前顶点到第一焦点的距离，而后焦距 f_2 是从透镜后顶点到第二焦点的距离。

对于薄透镜， w_0 很小，可以忽略，则式(5.2.1)可化为：

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (5.2.2)$$

且有 $f_1 \cong f_2 \cong f$ 。对于薄透镜，通常假定其两个主平面重合，如图 5.2.3 所示。

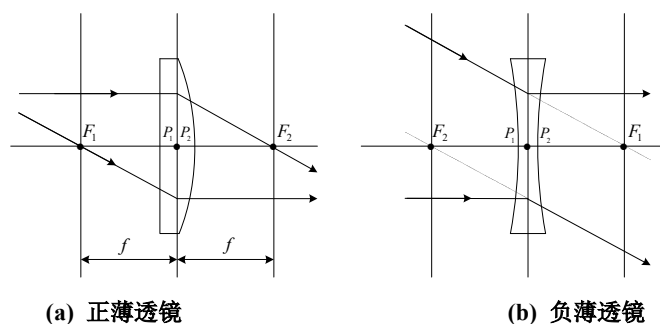
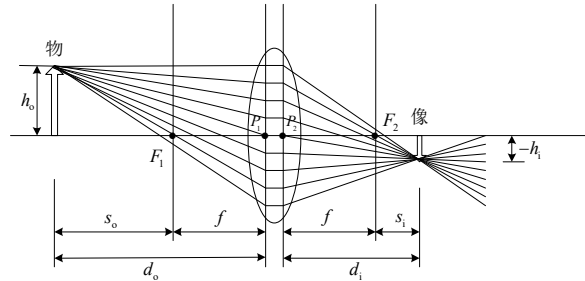


图 5.2.3 薄透镜光路的确定

5.2.2 透镜的成像

图 5.2.4 显示了单个双凸透镜的几何成像性质。假定基点已知，透镜左边的箭头表示物体。物上的每

一点都发射球面波，它们中的某些被透镜截割并聚焦在像平面上。像位置通过如下方式确定：一束发自物点并平行于光轴的光线，将从透镜出射并通过第二个焦点 F_2 ；一束通过第一焦点 F_1 的光线将由透镜出射并平行于光轴。如果两条这样的光线自物上的同一点发出，则它们在像空间的交点就决定了像平面的位置。可以证明，发自物上同一点的所有其他光线也将通过像平面上的这一点，于是，物上的每一点都被映射成像上的一点。



5.2.4 单透镜的成像

图 5.2.4 中各符号的认定如下，正负号的规定是：令各距离沿相应的箭头方向为正，否则为负。 h_o ：物高。向上为正； h_i ：像高。向上为正； d_o ：物距。从第一主面到物的距离，物在 P_1 右边时为正； d_i ：像距。从第二主面到像的距离，像在 P_2 右边时为正； s_o ：从 F_1 到物的距离，物在 F_1 的左边为正； s_i ：从 F_2 到像的距离，像在 F_2 的右边为正。

由几何光学的原则，可以证明，各参数、距离和高度之间的关系。对正焦距，即 $f > 0$ 时，有：

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}。 \quad (5.2.3)$$

上式常称为透镜定律，而满足这个表达式的物平面和像平面称为共轭平面。还有：

$$s_o s_i = f^2 \quad (5.2.4)$$

像高与物高之比称为横向放大率，它与上述各量之间的关系如下：

$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{-d_i}{d_o} = \frac{-f}{d_o - f} = \frac{f - d_i}{f} = \frac{-f}{s_o} = \frac{-s_i}{f}。 \quad (5.2.5)$$

对负焦距，即 $f < 0$ 时，有：

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{|f|}， \quad (5.2.6)$$

$$s_i = \frac{3|f| + 2s_o}{s_o/|f| + 2}， \quad (5.2.7)$$

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} = \frac{d_i + |f|}{|f|} = \frac{|f|}{d_o + |f|}。 \quad (5.2.8)$$

5.2.3 透镜的相位变换作用

正透镜使得发散球面波会聚或发散较慢，而使会聚球面波更快地会聚。而负透镜则发散球面波更快地发散，使会聚球面波发散或会聚的较慢(图 5.2.5)。这是由于透镜的折射率与周围介质的是不同的，光波通过介质时，就会产生相位延迟，也就是说透镜之所以具有对入射光波的相位变换功能是由它的几何结构及构成它的材料所具有折射率决定的。透镜能成像的原因是它能够改变光波的空间相位分布。透镜是由光密物质如玻璃构成的，玻璃的折射率约为 1.5，因此光在其中的传播速度小于光在空气中的传播速度。

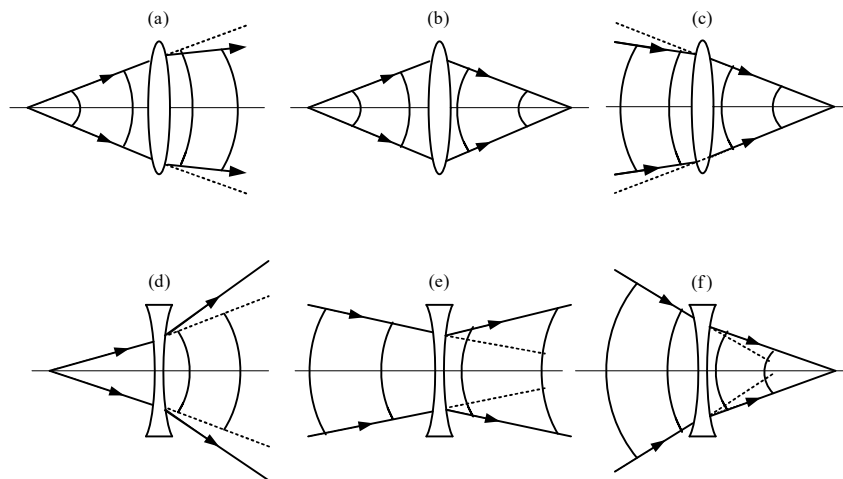


图 5.2.5 透镜对入射光波的变换作用

透镜的横向尺度是从光轴到透镜边缘、或到夹持透镜的镜框边缘的距离。根据透镜形状的不同，每个表面可以具有不同的横向尺度，此横向尺度 D 被称为表面的通光半径。通光半径是从光轴算起，一条光线可以通过该表面的最大光线高度。透镜必须比镜框边缘大一点以便夹持，不过，透镜太大将浪费玻璃，所在，在实际情况中，透镜边缘半径与镜框半径差别很小，通常不作区分，统称为“透镜边缘(len rim)”。

一个透镜的通光半径与该透镜的厚度是相关的。最大通光半径的绝对值等于该表面的曲率半径 R 。在这种情况下，透镜是一个球体或半球体。不过，通常情况下，透镜要薄得多，通光半径也相应要小。

当各个光线入射点对应的透镜厚度不同时，所形成的相位延迟也不同。但如果一条光线在透镜的一面从某个坐标点处射入，而在相对的另一面上从近似相同的坐标点处射出，也就是说，光线经过透镜后的出射点和其相对应的入射点在垂直光轴方向上产生的位移可以忽略，即光线在透镜内传播的几何路程就是该点处的透镜的厚度。所以，如果可以忽略光在透镜内的偏移，则称此透镜是一个薄透镜。于是，一个薄透镜的作用只是使入射波前受到延迟，延迟的大小正比于透镜各点的厚度。所以薄透镜就是指透镜的最大厚度(透镜两表面在其主轴上的间距)和透镜表面的曲率半径相比可以忽略时的透镜。透镜的厚度与物距和像距相比可以忽略不计的透镜在制造上并不困难。

5.2.4 薄透镜的厚度函数

正透镜的厚度包括三个部分。两个表面分别在两边产生弧拱，另外必须有一定的边缘厚度。没有边缘厚度的透镜将形成锋利的边缘，不仅使用不便，还很危险和容易崩裂。对于一个标准尺寸(25mm 通光半径)，边缘厚度至少 1mm。对很大的透镜，边缘厚度还要加大以保证透镜强度。通常决定透镜结构的参数有：球面曲率半径 R_1 和 R_2 ，中心厚度 w_0 ，材料的折射率 n 等。

下面以双凸透镜为例来推导出透镜的厚度函数。图 5.2.6(a)和(b)分别是透镜的侧面图和前视图， z 轴与透镜的主光轴重合，曲率半径分别为 R_1 和 R_2 ，中心最大厚度为 w_0 ，折射率为 n 。设在坐标 (x, y) 处的厚度为 $w(x, y)$ ，显然 w 是坐标 (x, y) 的函数，称为厚度函数。

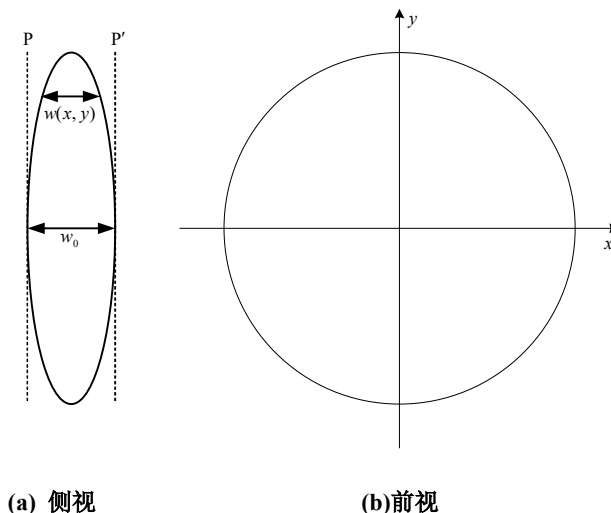


图 5.2.6 薄透镜的侧视和前视

若一条傍轴光线从透镜的一面上坐标为 (x, y) 点处入射，在薄透镜近似下，忽略光线在透镜内的偏移，光在透镜的另一面上以相同的 (x, y) 坐标出射。

如图 5.2.7 所示，在点 (x, y) 处的透镜厚度记作 $w(x, y)$ ，表示该薄透镜的厚度函数，对应于 R_1 和 R_2 上的拱高分别为 $w_1(x, y)$ 和 $w_2(x, y)$ 。对于薄透镜来说表面的曲率半径比透镜最大厚度 w_0 大得多。为了求出厚度函数 $w(x, y)$ ，将沿垂直于 z 轴的方向剖成三部分(图 5.2.7)，于是有：

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y)。 \quad (5.2.9)$$

式中： $w_1(x, y), w_2(x, y), w_3(x, y)$ 分别表示图 5.2.7 中三部分 (x, y) 坐标处的厚度。

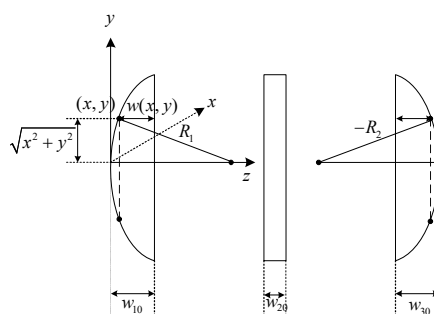


图 5.2.7 厚度函数的计算

用几何方法可以方便地得到透镜的厚度函数 $w(x, y)$ 。令光轴为 z 轴，取原点在第一球面的顶点处，这样由前面所述的符号法则有： $R_1 > 0$ ， $R_2 < 0$ 。由图 5.2.7 所示的几何关系可得：

$$w_1(x, y) = w_{10} - \left[R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)} \right], \quad (5.2.10)$$

$$w_3(x, y) = w_{30} - \left[-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)} \right]。 \quad (5.2.11)$$

对于傍轴光线有： $\sqrt{x^2 + y^2} \ll R_1$ ， $\sqrt{x^2 + y^2} \ll -R_2$ ，这样，上两式变为：

$$w_1(x, y) = w_{10} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) \approx w_{10} - \frac{x^2 + y^2}{2R_1}， \quad (5.2.12)$$

$$w_3(x, y) = w_{30} - R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) \approx w_{30} + \frac{x^2 + y^2}{2R_2}， \quad (5.2.13)$$

$$w_2(x, y) = w_{20}。 \quad (5.2.14)$$

将式(5.2.12)~式(5.2.14)代入式(5.2.9)，可得：

$$w(x, y) = w_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)。 \quad (5.2.15)$$

式中： $w_0 = w_{10} + w_{20} + w_{30}$ ，由上式可见，式中所表示的透镜厚度函数实际是用旋转抛物面来近似表示透镜的球面。

5.2.5 薄透镜的相位变换及其物理意义

见图 5.2.6(a)，设有一单色平面波沿 z 轴正向入射至薄透镜表面，若入射光波在入射平面 P 内的光场分布为 $U(x, y)$ ，紧靠透镜之后 P' 平面内的光场分布为 $U'(x, y)$ ，则有：

$$U'(x, y) = U(x, y)t(x, y)。 \quad (5.2.16)$$

式中： $t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$ ， $\phi(x, y)$ 表示光波经过透镜过的相位延迟。 $U(x, y)$ 入射波的波前在透镜上的各点都受到了一个正比于厚度 $w(x, y)$ 的相位延迟，光线通过 (x, y) 点时总的相位延迟为：

$$\phi(x, y) = knw(x, y) + kn_0[w_0 - w(x, y)]。 \quad (5.2.17)$$

上式右边的第一项是光通过透镜而产生的相位延迟；第二项表示光通过两个平面之间剩下的自由空间区域产生的相位延迟，放置在空气中的透镜， $n_0 \approx 1$ 。因此，透镜的相位变换作用可以等效地用一个形式为：

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)} = e^{ikw_0} e^{ik(n-1)w(x, y)} \quad (5.2.18)$$

的射过率函数来表示。将式(5.2.15)代入式(5.2.18)式，可得到傍轴近似下透镜的射过率函数为：

$$t(x, y) = e^{iknw_0} e^{-\frac{ik(n-1)}{2} \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}} \quad (5.2.19)$$

将式(5.2.2)代入上式，可得：

$$t(x, y) = e^{iknw_0} e^{-\frac{ik}{2f} \frac{x^2 + y^2}{2}}。 \quad (5.2.20)$$

上式即为透镜的复振幅透射率函数，表示光波通过透镜时，所受到的相位调制，式中右边的第一个指数项

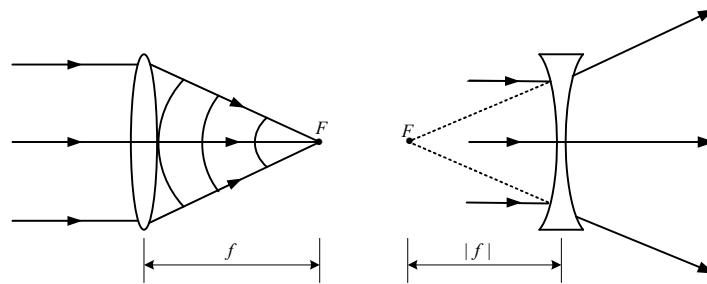
表示透镜对于入射光波的常相位延迟，并不影响相位的空间相对分布，即它不会改变光波波面的形状，故常常可略去不予考虑，式中第二个指数项表示透镜的相位因子，这表明光波通过透镜时 (x, y) 点的相位延迟与该点到透镜中心的距离的平方成反比，而且与透镜的焦距密切相关。

设有一单位振幅的单色平面波沿光轴方向垂直入射至透镜表面，则有 $U(x, y) = 1$ ，由此得到透镜后侧场的复振幅为：

$$U'(x, y) = U(x, y) e^{ikm_0} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2f}} = e^{ikm_0} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2f}} \quad (5.2.21)$$

在傍轴近似下，这是一个球面波的表达式。对于正透镜，焦距 $f > 0$ ，这是一个向透镜后方距离 f 处的焦点 F 会聚的球面波[见图 5.2.8(a)]。对于负透镜，焦距 $f < 0$ ，这是一个由透镜前方距离 $|f|$ 处的虚焦点 F

发散的球面波[见图 5.2.8(b)]。从这一结果看，由式(5.2.1)定义参数就是几何光学中所的焦距，球面透镜之所以对平行光有聚焦作用，是因为它具有式(5.2.18)式所示的相位变换作用。也就是透镜使入射波面发生了变化，即由入射平面波变换为球面波，这正是由于透镜具有 $e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2f}}$ 的相位因子，能够对入射波前施加相位调制的结果。当然，这一结果是在傍轴近似下得出的。在非傍轴条件下，即使透镜表面是理想球面，透射光也将偏离理想球面波，这时透镜将会产生波像差。



(a) 会聚透镜，会聚球面波

(b) 发散透镜，发散球面波

图 5.2.8 垂直入射平面波的效应

以上结果虽然是根据双凸透镜推导出来的，但只要按照几何光学中关于焦距正负的规则，式(5.2.21)同样适用于如图 5.2.1 所示的各种形式的透镜。在实际光学系统中，常常不是单个薄透镜，而通常会更为复杂的多镜片结构。只要这种复杂透镜具有能把一个入射球面波变换为另一个球面波或平面波的性能，就可通过分析透镜对入射波前的作用，来看到透镜所起的相位调制作用。

5.3 透镜的傅里叶变换性质

会聚透镜(正透镜)最突出和最有用的性质之一，就是它具有进行二维傅里叶变换的功能。傅里叶变换运算一般要使用复杂而昂贵的电子学频谱分析仪才能完成。这种复杂的模拟运算可采用一个简单的光学装置(如一个透镜)来实现，且运算速率非常快捷(理论上为光速)。

从第四章可知，单位振幅平面波垂直照射衍射屏的夫琅禾费衍射，恰好是衍射屏透射率函数的傅里叶变换(除一常量相位因子外)。另外，在会聚光照射下的菲涅耳衍射，通过会聚中心的观测屏上的菲涅耳衍射场分布，也是衍射屏透射率函数的傅里叶变换(除一相位因子外)。这两种途径都能用透镜比较方便地实现。第一种情况可在透镜的后焦面(无穷远照射光源的共轭面)上观测夫琅禾费衍射，第二种情况可在照射光源的共轭面上观测屏函数的夫琅禾费图样。下面先讨论透镜的一般变换特性，然后再讨论透明片(物)放在透镜之前和之后的情况。

5.3.1 透镜的一般变换特性

如图 5.3.1 所示，将一个平面透明物置于透镜前方相距 d_o 处的输入平面，即物平面 P_o ，该物体被某种光源照射后，在物平面前表面的光场复振幅为 $U_o(x_o, y_o)$ ，那么在透镜后方相距为 d_i 处的像平面 P_i 上的光场分布 $U_i(x_i, y_i)$ 为何？

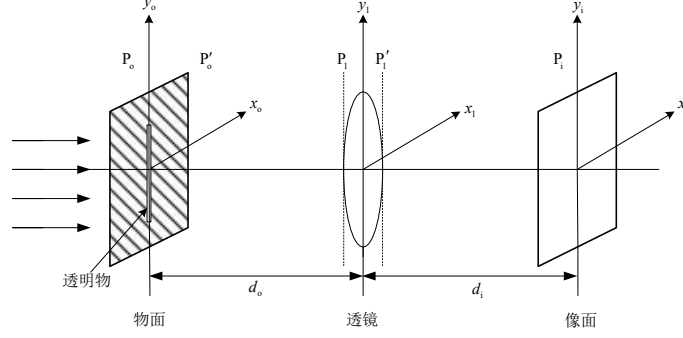


图 5.3.1 透镜的一般变换关系

物所在的物平面在物理上即为衍射屏，物平面坐标记为 $x_o - y_o$ ，衍射屏前、后表面分别记为 P_o 和 P'_o ，假定忽略物的厚度，平面 P_o 和 P'_o 在同一坐标平面 $x_o - y_o$ 上。透镜中心所在平面记为 $x_l - y_l$ ，与透镜顶点相切的两个平面记为 P_l 和 P'_l ，对薄透镜，这两个平面合二为一，同为坐标平面 $x_l - y_l$ 。像平面坐标记为 $x_i - y_i$ 。光波传播的过程如下。

第一步：由光源发出的光照射到物所在的平面上，即衍射屏前表面 P_o ，在该平面的光场的复振幅为 $U_o(x_o, y_o)$ 。

第二步：光波从衍射屏前表面透过到达衍射屏后表面，即 $P_o \Rightarrow P'_o$ 。令物的透射率函数为 $t(x_o, y_o)$ ，则衍射屏后的平面 P'_o 光场的复振幅为：

$$U'_o(x_o, y_o) = t(x_o, y_o) U_o(x_o, y_o)。 \quad (5.3.1)$$

第三步：光波从衍射屏后表面经过自由空间的传播到达透镜前表面，即 $P'_o \Rightarrow P_l$ 。这一步为光波的衍射过程，当符合菲涅耳近似条件时，由菲涅耳衍射公式(4.4.6)得到平面 P_l 上光场的复振幅为：

$$U_l(x_l, y_l) = \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_l^2 + y_l^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2 + y_o^2)} e^{-\frac{ik}{d_o}(x_l x_o + y_l y_o)} dx_o dy_o。 \quad (5.3.2)$$

第四步：光波从透镜的前表面传播到透镜的后表面，即 $P_l \Rightarrow P'_l$ 。由透镜的透射率函数式(5.2.20)，可

得平面 P'_1 上光场的复振幅为:

$$U'_1(x_1, y_1) = t_1(x_1, y_1)U_1(x_1, y_1) = e^{ikmw_0} e^{-ik\frac{x_1^2+y_1^2}{2f}} U_1(x_1, y_1)。 \quad (5.3.3)$$

透镜总是有一定的尺寸的, 圆形孔径半径为 r_0 的透镜的孔径函数即光瞳函数 $P(x_1, y_1)$ 为:

$$P(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 < r_0^2 & \text{透镜孔径内} \\ 0 & x_1^2 + y_1^2 > r_0^2 & \text{其它} \end{cases}。 \quad (5.3.4)$$

这样有:

$$U'_1(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1) e^{ikmw_0} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)} P(x_1, y_1)。 \quad (5.3.5)$$

第五步: 光波从透镜后表面经自由空间传播到观测面, 即 $P'_1 \Rightarrow P_i$ 。这是最后一步, 与第二步类似,

也是光场在空间的衍射过程, 当符合菲涅耳近似条件时, 由菲涅耳衍射公式(4.4.6)得到平面 P_i 上光场的复振幅为:

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikd_i}}{i\lambda d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_1(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2d_i}(x_1^2+y_1^2)} e^{-\frac{ik}{d_i}(x_1x_i+y_1y_i)} dx_1 dy_1。$$

将式(5.3.5)代入上式, 可得:

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikd_i}}{i\lambda d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{ikmw_0} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(x_1, y_1) P(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2d_i}(x_1^2+y_1^2)} e^{-\frac{ik}{d_i}(x_1x_i+y_1y_i)} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)} dx_1 dy_1。 \quad (5.3.6)$$

上式描述了物置于透镜前任一位置时, 物光场布与衍射光场分布之间的一般关系。其中 d_i 不一定是像距, 也不一定是焦距, 只是透镜到观察面的距离。

如果不考虑透镜孔径对入射场的影响, 就可忽略光瞳的影响, 即取光瞳函数的光瞳内的区域为 $(-\infty, \infty)$, 这里, 在整个区域内都有 $P(x_1, y_1) = 1$ 。再将式(5.3.2)代入式(5.3.6), 经整理和简化, 最后得到:

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ik(d_i+d_o+mw_0)}}{-\lambda^2 d_o d_i} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik \left[\frac{x_1^2+y_1^2}{2d_i} + \left(\frac{1}{2d_o} - \frac{1}{2f} + \frac{1}{2d_i} \right) (x_1^2+y_1^2) + \frac{x_o^2+y_o^2}{2d_o} - \frac{x_1x_o+y_1y_o}{d_o} - \frac{x_1x_i+y_1y_i}{d_i} \right]} dx_1 dy_1 dx_o dy_o。 \quad (5.3.7)$$

对上式积分号内指数部分的变量 x_i 配平方因子得:

$$\begin{aligned}
& \frac{x_i^2}{2d_i} + \left(\frac{1}{2d_o} - \frac{1}{2f} + \frac{1}{2d_i} \right) x_1^2 + \frac{x_o^2}{2d_o} - \frac{x_o x_1}{d_o} - \frac{x_1 x_i}{d_i} \\
&= \left[\sqrt{\frac{d_i(f-d_o)+d_o f}{d_o d_i f}} x_1 - \sqrt{\frac{d_o f}{d_i[(d_i(f-d_o)+d_o f)]}} x_i - \sqrt{\frac{d_i f}{d_o[d_i(f-d_o)+d_o f]}} x_o \right]^2 \\
& - \frac{f x_o x_i}{d_i(f-d_o)+d_o f} + \frac{(f-d_o)x_i^2}{2[d_i(f-d_o)+d_o f]} + \frac{(f-d_i)x_o^2}{2[d_i(f-d_o)+d_o f]}.
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

同理，变量 y_i 也可配成与上式系数相同的平方因子。因此，可应用菲涅耳积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi/a} e^{i\pi/4} \tag{5.3.9}$$

应用式(5.3.8)和式(5.3.9)，来完成式(5.3.7)中对 $x_1 - y_1$ 平面的积分，可得：

$$U_i(x_i, y_i) = C e^{\frac{ik(f-d_o)(x_i^2+y_i^2)}{2m}} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}} e^{-ik\frac{f(x_o x_i + y_o y_i)}{m}} dx_o dy_o. \tag{5.3.10}$$

式中， C 表示式中出现的复常数，

$$m = d_i(f-d_o) + d_o f \tag{5.3.11}$$

令

$$\xi = \frac{f}{m\lambda} x_i, \quad \eta = \frac{f}{m\lambda} y_i, \tag{5.3.12}$$

则式(5.3.10)可以写成：

$$U_i(\xi, \eta) = C e^{\frac{i\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}} e^{-i2\pi(\xi x_o + \eta y_o)} dx_o dy_o. \tag{5.3.13}$$

对照傅里叶变换的定义，式(5.3.13)的积分部分是对 $U'_o(x_o, y_o)$ 和 $e^{\frac{ik(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}}$ 两函数乘积的傅里叶变换，由卷积定理式(2.7.2)，可得：

$$U_i(\xi, \eta) = C e^{\frac{i\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}} F\{U'_o(x_o, y_o)\} * F\left\{e^{\frac{ik(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}}\right\}. \tag{5.3.14}$$

将式(5.3.1)代入上式，有：

$$\begin{aligned}
U_i(\xi, \eta) &= C e^{\frac{i\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}} \cdot F\{t(x_o, y_o)\} * F\{U_o(x_o, y_o)\} * F\left\{e^{\frac{ik(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}}\right\} \\
&= C e^{\frac{i\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}} T_o(\xi, \eta) * A_o(\xi, \eta) * E_o(\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

式中： $T_o(\xi, \eta), A_o(\xi, \eta), E_o(\xi, \eta)$ 分别表示 $t(x_o, y_o), U_o(x_o, y_o), e^{\frac{ik(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}}$ 以 $\xi = \frac{f}{m\lambda} x_i, \eta = \frac{f}{m\lambda} y_i$ 为

坐标的傅里叶变换， $k\frac{(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}$ 是输出面偏离所产生的附加相位， $\frac{\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}$ 是物面

偏离透镜前焦面的附加相位。式(5.3.15)是输入面 P_o 与输出面 P_i 之间光场分布的一般变换关系, $A_o(\xi, \eta)$ 可以是任意的照射光场, 具体到不同情形时, 表达式会所有不同, 下面就输入面、输出面以及照射光在几种特殊情况下输出面的光场分布进行讨论。

5.3.2 物在透镜之前

1. 轴上平行光照射

位于轴上的点光源置于透镜前无限远处时, 就是轴上平行光(即平面波)照射的情况, 设平面波的振幅为常数 A_0 , 即 $U_o(x_o, y_o) = A_0$, 其傅里叶变换为:

$$A_o(\xi, \eta) = F\{U_o(x_o, y_o)\} = F\{A_0\} = A_0\delta(\xi, \eta)。 \quad (5.3.16)$$

上式代入式(5.3.15), 并由式(2.5.6)可得:

$$U_i(\xi, \eta) = CA_0 e^{\frac{i\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}} T_o(\xi, \eta) * E_o(\xi, \eta)。 \quad (5.3.17)$$

下面是输入面和输出面位于几种特殊位置时的情形。

(1) 输出面偏离透镜后焦面。输出面偏离透镜后焦面位于 d_i 处, 由式(2.1.89), 可得:

$$E_o(\xi, \eta) = F\left\{e^{ik\frac{(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}}\right\} = i\frac{m\lambda}{f-d_i} e^{-i\frac{\pi m\lambda(\xi^2+\eta^2)}{f-d_i}}。 \quad (5.3.18)$$

上式代入式(5.3.17), 便可求的可得输出面的光场分布。

(2) 输出面位于透镜后焦面。这时, $d_i = f$, 则有, $m = f^2$, $e^{ik\frac{(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}} = 1$, 这样有:

$$E_o(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta)。 \quad (5.3.19)$$

上式代入式(5.3.17), 可得:

$$U_i(\xi, \eta) = CA_0 e^{i\pi\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)} T_o(\xi, \eta)。 \quad (5.3.20)$$

从上式可以看出, 项 $e^{i\pi\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}$ 是与空间频率 ξ, η 有关的二次曲面相位弯曲式。可见, 物体的透射率函数与输出面位于透镜后焦面内的光场分布不是准确的傅里叶变换关系, 但近似的满足傅里叶变换, 故称为准傅里叶变换。

(3) 输入面位于透镜前焦面且输出面位于透镜后焦面。这时, $d_o = f$, $d_i = f$, 显然式(5.3.20)中的附加相位为零, 这样有:

$$U_i(\xi, \eta) = CA_0 \frac{e^{ik(2f+mw_0)}}{-\lambda f^2} T_o(\xi, \eta)。 \quad (5.3.21)$$

从上式可以看出, 由于式中项 $CA_0 \frac{e^{ik(2f+mw_0)}}{-\lambda f^2}$ 与空间频率 ξ, η 无关的, 因此, 位于透镜前焦面上物的光场分布与其后焦面上的光场分布之间的关系为傅里叶变换关系。

在这种情况下，衍射物体的复振幅分布存在准确的傅里叶变换关系，并且只要照射光源和观测平面满足共轭关系，与照射光源的具体位置无关。由于 $m = f^2$ ，所以有 $\xi = \frac{x_i}{\lambda f}$ ， $\eta = \frac{y_i}{\lambda f}$ ，也就是说，不管照射光源位于何处，均不影响观察面上空间频率与位置坐标的关系。在理论分析中，这种情况是很有意义的。

(4) 输入面紧靠透镜而输出面位于后焦面。如图 5.3.2 所示，透明物体紧靠透镜前表面，这时 $d_o = 0$ ， $d_i = f$ ，这时相当于图 5.3.1 中的第三步没有，同上述过程的处理方法，可得：

$$U_i(\xi, \eta) = CA_0 e^{inf \lambda (\xi^2 + \eta^2)} T_o(\xi, \eta)。(5.3.22)$$

从上式可以看出， $e^{inf \lambda (\xi^2 + \eta^2)}$ 是与空间频率 ξ, η 有关的，因此，衍射物体的复振幅透射率与观察面上的场分布不是准确的傅里叶变换关系，有一个二相位因子 $e^{inf \lambda (\xi^2 + \eta^2)}$ 。由于 $m = fd_i$ ，因观测面上的空间坐标与空间频率的关系为 $\xi = \frac{x_i}{\lambda d_i}$ ， $\eta = \frac{y_i}{\lambda d_i}$ ，随 d_i 的值而不同。也就是说，频谱在空间尺度上能按一定比例缩放。这对光学信息处理的应用将带来一定的灵活性，并且也利于充分利用透镜孔径。

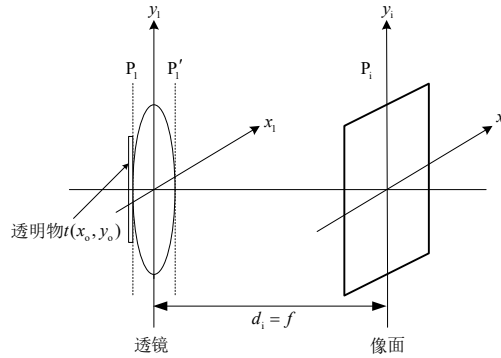


图 5.3.2 透明物体紧靠透镜

2. 轴上点光源照射

如图 5.3.3 所示为轴上点光源照射的情形，单色点源 S_o 与透镜的距离为 d_o ，图中其他标识与图 5.3.1 相同。按照信息光学中的习惯，与一般的应用光学中的符号规则不同，这里的 d_o, d_o, d_i 均为正值。如果透镜孔径很大，抽象为无穷大。

在傍轴近似下，由单色点源发出的球面波在物的前表面 P_o 上造成的场分布为：

$$U_o(x_o, y_o) = A_0 e^{\frac{ik}{2(d_o - d_o)}(x_o^2 + y_o^2)}。(5.3.23)$$

光波透过物体后，平面 P_o' 的光场分布为：

$$U_o'(x_o, y_o) = A_0 e^{\frac{ik}{2(d_o - d_o)}(x_o^2 + y_o^2)} t(x_o, y_o)。(5.3.24)$$

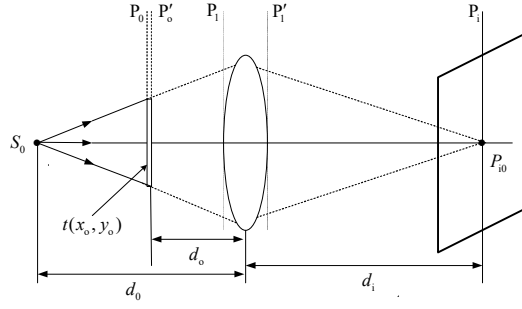


图 5.3.3 物在透镜之前的变换

这样，从输入平面 P'_0 出射的光场到达透镜前表面 P_1 的衍射过程，由菲涅耳衍射公式(4.4.4)可得其复振幅分布为：

$$U_1(x_1, y_1) = \frac{A_0 e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} \iint_{\Sigma_0} e^{\frac{ik}{2(d_0-d_0)}(x_0^2+y_0^2)} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2d_0}[(x_1-x_0)^2-(y_1-y_0)^2]} dx_0 dy_0. \quad (5.3.25)$$

式中， Σ_0 为物函数所在的范围。通过透镜后的场分布为：

$$U'_1(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1) P(x_1, y_1) e^{iknw_0} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)}. \quad (5.3.26)$$

式中： $P(x_1, y_1)$ 为(5.3.5)式所定义的光瞳函数。由透镜后表面经自由空间衍射到达输出面的光场分布为：

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ik(d_i+nw_0)}}{i\lambda d_i} \iint_{\Sigma_1} U_1(x_1, y_1) e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)} e^{\frac{ik}{2d_i}[(x_i-x_1)^2+(y_i-y_1)^2]} dx_1 dy_1$$

式中： Σ_1 为光瞳函数所确定的范围，在此范围内 $P(x_1, y_1) = 1$ 。将式(5.3.25)代入上式，可得：

$$U_i(x_i, y_i) = -\frac{A_0 e^{ik(d_0+d_i+nw_0)}}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{\Sigma_0} \iint_{\Sigma_1} t_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2(d_0-d_0)}(x_0^2+y_0^2)} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)} e^{\frac{ik}{2d_i}[(x_i-x_1)^2+(y_i-y_1)^2]} dx_0 dy_0 dx_1 dy_1. \quad (5.3.27)$$

当输出面位于点源 S_0 的共轭面上，则由共轭关系的高斯公式 $1/d_0 + 1/d_i = 1/f$ ，可对上式进行化简可得：

$$U_i(x_i, y_i) = -\frac{A_0 e^{ik(d_0+d_i+nw_0)}}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{\Sigma_0} \iint_{\Sigma_1} t(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2}(A_{x_i}+A_{y_i})} dx_0 dy_0 dx_1 dy_1. \quad (5.3.28)$$

式中：

$$\begin{aligned} A_{x_i} &= \frac{x_0^2}{d_0-d_0} + \frac{(x_1-x_0)^2}{d_0} - \frac{x_1^2}{f} + \frac{(x_i-x_1)^2}{d_i} \\ &= x_0^2 \left(\frac{1}{d_0-d_0} + \frac{1}{d_0} \right) + x_1^2 \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right) + \frac{x_i^2}{d_i} - \frac{2x_0x_1}{d_0} - \frac{2x_1x_i}{d_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{fd_i x_o^2}{d_o[d_i(f_{\text{eff}} - d_o) + f_{\text{eff}}d_o]} + \frac{x_i^2[d_i(f - d_o) + fd_o]}{d_o fd_i} + \frac{x_i^2}{d_i} - \frac{2x_o x_i}{d_o} - \frac{2x_i x_o}{d_i} \\
&= \left\{ x_o \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]}} - x_i \sqrt{\frac{d_i(f - d_o) + fd_o}{d_o fd_i}} + x_i \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]}} \right\}^2 \\
&+ \frac{(f - d_o)x_i^2}{d_i(f - d_o) + fd_o} - \frac{2fx_o x_i}{d_i(f - d_o) + fd_o},
\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{y_i} &= \left\{ y_o \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]}} - y_i \sqrt{\frac{d_i(f - d_o) + fd_o}{d_o fd_i}} + y_i \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]}} \right\}^2 \\
&+ \frac{(f - d_o)y_i^2}{d_i(f - d_o) + fd_o} - \frac{2fy_o y_i}{d_i(f - d_o) + fd_o}.
\end{aligned} \tag{5.3.30}$$

公式(5.3.28)要分别对物平面和光瞳平面积分，光瞳平面的积分为：

$$U_1 = \iint_{\Sigma_1} e^{\frac{ik}{2}(\Delta_i + \Delta_1)} dx_1 dy_1. \tag{5.3.31}$$

如果不考虑透镜的有限孔径的影响，对 Σ_1 的积分可扩展到无穷。如果令

$$\alpha = d_i(f - d_o) + fd_o,$$

$$\bar{x}_i = x_o \sqrt{\frac{fd_i}{d_o \alpha}} - x_i \sqrt{\frac{\alpha}{d_o fd_i}} + x_i \sqrt{\frac{fd_o}{d_i \alpha}}, \quad d\bar{x}_i = -\sqrt{\frac{\alpha}{d_o fd_i}} dx_i,$$

$$\bar{y}_i = y_o \sqrt{\frac{fd_i}{d_o \alpha}} - y_i \sqrt{\frac{\alpha}{d_o fd_i}} + y_i \sqrt{\frac{fd_o}{d_i \alpha}}, \quad d\bar{y}_i = -\sqrt{\frac{\alpha}{d_o fd_i}} dy_i,$$

则式(5.3.31)可转化为：

$$U_1 = \frac{d_o fd_i}{\alpha} e^{\frac{ik(f-d_o)}{2\alpha}(x_i^2 + y_i^2)} e^{-\frac{ik}{\alpha}(x_o x_i + y_o y_i)} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)} d\bar{x}_i d\bar{y}_i. \tag{5.3.32}$$

利用积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ ，可得：

$$U_1 = \frac{i\lambda fd_i d_o}{\alpha} e^{\frac{ik(f-d_o)}{2\alpha}(x_i^2 + y_i^2)} e^{-\frac{ik}{\alpha}(x_o x_i + y_o y_i)}. \tag{5.3.33}$$

将式(5.3.33)代入(5.3.28)式得：

$$U_i(x_i, y_i) = c' e^{\frac{ik(f-d_o)(x_i^2 + y_i^2)}{2[d_i(f-d_o) + fd_o]}} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{\frac{ikf(x_o x_i + y_o y_i)}{d_i(f-d_o) + fd_o}} dx_o dy_o. \tag{5.3.34}$$

这就是输入平面位于透镜前，计算光源共轭面上场分布的一般公式。由于照射光源和观察平面的位置始终保持共轭关系，因此，式(5.3.34)中的 d_i 由照明光源位置决定。当照明光源位于光轴上无穷远，即平面波垂

直照射时, $d_i = f$, 这里观测平面位于透镜后焦面上。另外, 输入平面的位置决定了 d_o 的大小。

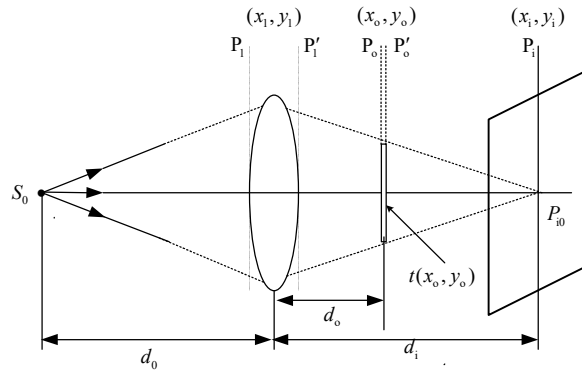
5.3.3 物在透镜后方

如图 5.3.4 所示, 物在透镜的后方, 由点光源 S_0 入射到透镜前表面 P_1 的光场分布为 $A_0 e^{\frac{ik}{2d_0}(x_1^2+y_1^2)}$, 光波经过透镜出射后到达透镜后表面 P'_1 的光场分布为 $A_0 e^{\frac{ik}{2d_0}(x_1^2+y_1^2)} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)}$, 从透镜的后表面到达物的前表面 P_o 的光场分布为:

$$U_o(x_o, y_o) = \frac{A_0}{i\lambda d_o} \iint_{\Sigma_1} e^{\frac{ik}{2d_0}(x_1^2+y_1^2)} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2+y_1^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_o-x_1)^2+(y_o-y_1)^2]} dx_1 dy_1. \quad (5.3.35)$$

通过物体后的出射光场分布为 $U'_o(x_o, y_o) = t_o(x_o, y_o) U_o(x_o, y_o)$, 这个光场传输到观察平面 P_i 上的光场分布为:

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{1}{i\lambda(d_i-d_o)} \iint_{\Sigma_o} t_o(x_o, y_o) U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2(d_i-d_o)}(x_i-x_o)^2+(y_i-y_o)^2} dx_o dy_o. \quad (5.3.36)$$



5.3.4 物在透镜之后的变换

将式(5.3.35)代入式(5.3.36)得:

$$U_i(x_i, y_i) = -\frac{A_0}{\lambda^2 d_o(d_i-d_o)} \iiint_{\Sigma_1 \Sigma_o} t(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2}(A_{x_i}+A_{y_i})} dx_1 dy_1 dx_o dy_o. \quad (5.3.37)$$

式中:

$$\begin{aligned} A_{x_i} &= \frac{x_1^2}{d_0} - \frac{x_1^2}{f_{\text{eff}}} + \frac{(x_o-x_1)^2}{d_o} + \frac{(x_i-x_o)^2}{d_i-d_o} = x_1^2 \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_o} - \frac{1}{f} \right) + x_o^2 \left(\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i-d_o} \right) \\ &+ \frac{x_i^2}{d_i-d_o} - \frac{2x_o x_1}{d_o} - \frac{2x_o x_i}{d_i-d_o} = x_1^2 \frac{d_i-d_o}{d_o d_i} + x_o^2 \frac{d_i}{d_o(d_i-d_o)} + \frac{x_i^2}{d_i-d_o} - \frac{2x_o x_1}{d_o} - \frac{2x_o x_i}{d_i-d_o} \\ &= \left[x_1 \sqrt{\frac{d_i-d_o}{d_o d_i}} - x_o \sqrt{\frac{d_i}{d_o(d_i-d_o)}} \right]^2 + \frac{x_i^2}{d_i-d_o} - \frac{2x_o x_i}{d_i-d_o}; \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

同理有:

$$\Delta_{y_i} = \left[y_1 \sqrt{\frac{d_i - d_o}{d_o d_i}} - y_o \sqrt{\frac{d_i}{d_o(d_i - d_o)}} \right]^2 + \frac{y_i^2}{d_i - d_o} - \frac{2y_o y_i}{d_i - d_o} \quad (5.3.39)$$

用前面类似推导公式(5.3.34)的方法可得：

$$U_i(x_i, y_i) = c' e^{\frac{ik(x_i^2 + y_i^2)}{2(d_i - d_o)}} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) e^{-\frac{ik(x_o x_i + y_o y_i)}{d_i - d_o}} dx_o dy_o \quad (5.3.40)$$

由式(5.3.35)和式(5.3.38)可以看出，不管衍射物体位于何种位置，只要观测面是照射光源的共轭面，则物面(输入面)和观察面(输出面)之间的关系都是傅里叶变换关系，即观察面上的衍射场都是夫琅禾费型。显然，当 $d_o = 0$ 时，由式(5.3.38)也可导出(5.3.36)式，即物从两面紧贴透镜都是等价的。

表 5.3.1 列出了上述几种情况变换光路的特点。

表 5.3.1 透镜变换光路

	输入面位置	光源位置	变换平面位置	二次相位因子	空间频率
傅里叶变换	前焦面 $d_o = f$	∞	后焦面	无	$\frac{x_i}{\lambda f}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f'}$	无	$\frac{x_i}{\lambda f}$
准傅里叶变换	透镜前 d_o 处	∞	后焦面	$\frac{k(f - d_o)(x_1^2 + y_1^2)}{2f^2}$	$\frac{x_i}{\lambda m f}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f}$	$\frac{k(f - d_o)(x_1^2 + y_1^2)}{2m}$	$\frac{x_i}{\lambda m f}$
	紧靠透镜 $d_o = 0$	∞	后焦面	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2f}$	$\frac{x_i}{\lambda f}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f'}$	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2d_i}$	$\frac{x_i}{\lambda d_i}$
	透镜后 d_i 处	∞	后焦面	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2(f - d_o)}$	$\frac{x_i}{\lambda(f - d_o)}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f'}$	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2(d_i - d_o)}$	$\frac{x_i}{\lambda(d_i - d_o)}$

5.4 透镜的空间滤波特性

从傅里叶变换的角度上来说，透镜在光学信息处理系统中的作用相当于傅里叶变换器，因此用于空间频谱分析的透镜系统可称为傅里叶变换透镜变换系统，简称为傅里叶透镜系统。它是光学信息处理系统最常用的基本系统。下面就傅里叶变换透镜作为空间滤波的功能所呈现的特性作一介绍。

以上讨论透镜的傅里叶变换性质时，都没有考虑透镜孔径的影响。然而在许多实际情况中，透镜孔

径的有限大小往往又不能忽视。透镜孔径除了限制入射光束从而影响出射光通量外，还会对形成傅里叶频谱产生影响，从而最终影响成像质量。

5.4.1 透镜的截止频率、空间带宽积和视场

根据透镜前后两个焦面互为傅里叶变换关系的理论，为了获得严格的傅里叶变换，一般都会把处理面(输入面)置于透镜的前焦面，而频谱面(滤波面)置于相应的后焦面，因此透镜的有限大小的孔径必然会限制物体衍射波中的高频成分，从而引起频谱平面上的光场分布偏离物体的准确傅里叶变换，这种偏离的除了与物体衍射波的空间频率有关外，还与透镜的相对孔径 D/f (D 为透镜的直径)的大小有关。有限大小的透镜对空间频率的限制，相当于透镜也起到空间频率滤波的作用。

如图 5.4.1 所示，设圆对称物体放置在透镜 L 的前焦面，用单色平面波垂直入射照明，物体振幅透射率函数 $t(x_o, y_o)$ 不为零的区域为直径等于 B 的圆形，并设 $D > B$ ，这样物函数被一个直径为 $B = 2h$ 的圆孔径所限制。

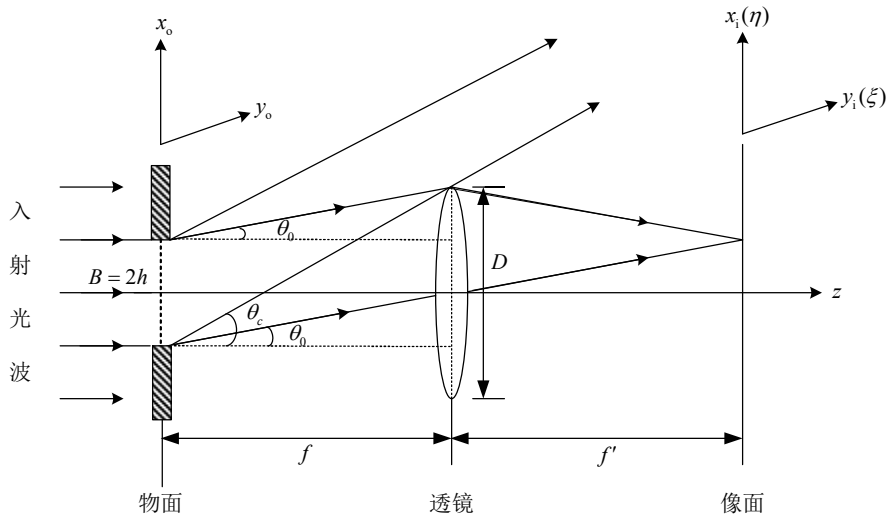


图 5.4.1 透镜对空间频率的限制作用

透镜有限孔径会限制物面频率成分的传播。仅当某一方向上的平面波分量不受阻拦地通过透镜时，在透镜的后焦面上相应会聚点测得的光场才准确代表物相应空间频率成分的频谱值。可图 5.4.1 可以看出，物体上所有点发出光线的衍射角(方向角)小于等于 θ_0 角方向传播的光线都可以传播到频谱面上某一点，因此，该点的光场可准确代表这一频率成分的频谱值，由图中几何关系可以看出，满足这一要求的平面波分量的传播方向角的最大值为：

$$\sin \theta_0 = \frac{(D/2) - (B/2)}{f} = \frac{D - B}{2f} \quad (5.4.1)$$

在小角度情况(即 $B, D \ll f$)时有： $\theta_0 \approx \sin \theta_0$ 。因透镜是圆形孔径，在圆周方向上都有相应的最大空间频率，由空间频率的定义，有：

$$\xi_0 = \frac{\sin \theta_0}{\lambda} = \frac{D - B}{2\lambda f} \quad (5.4.2)$$

当方向角大于 θ_c 时，物体上所有点发出的在该方向传播的光线完全不能进行透镜，这样在后焦面上没

有该频率成分，测得的频谱强度为零。完全不能进入透镜的平面波成分的最小衍射角 θ_c 为：

$$\sin \theta_c = \frac{(D/2) + (B/2)}{f} = \frac{D+B}{2f}。 \quad (5.4.3)$$

在小角度情况下，有 $\theta_c \approx \sin \theta_c$ 。相应的空间频率为：

$$\xi_c = \frac{\sin \theta_c}{\lambda} = \frac{D+B}{2\lambda f}。 \quad (5.4.4)$$

上式即为透镜 L 的截止频率。

当衍射角介于 θ_0 和 θ_c 之间时，物体中的部分光线通过透镜，部分不能通过，因而产生了偏离。

由上述分析，可以得到如下结论：

当 $\xi_c \leq \frac{D-B}{2\lambda f}$ 时，镜后焦面上可以得到相应的空间频率成分的物体准确的傅里叶谱。

当 $\frac{D-B}{2\lambda f} < \xi_c < \frac{D+B}{2\lambda f}$ 时，透镜后焦面上得到的并非准确的傅里叶谱，各空间频率成分受到透镜孔径

不同程度的阻拦。

当 $\xi_c \geq \frac{D+B}{2\lambda f}$ 时，虽然物可能有更高的空间频率成分，但因这些分量全部被透镜的有限孔径所阻拦，

在焦面上完全得不到物的傅里叶谱中的这些高频成分。从式(5.4.4)可以看出，当傅里叶透镜的孔径增大时，可以减小这一效应的影响。

由上分析可见，透镜除了可以改变光波的相位外，还可以对光波的空间频率进行滤波。

一个信息系统，无论是信息的记录和存储系统，还是信息的传输和处理系统，都存在一个信息容量问题。一般地说，信息容量 N 可由系统的频带宽度 $\Delta\xi$ 与单频线宽 $\delta\xi$ 之比来估算，即

$$N = \Delta\xi / \delta\xi。 \quad (5.4.5)$$

单频线宽是指由于主动的或被动的各种原因，系统记录或传输的总不可能是理想的单频信息，而是有一定线宽的准单频信息，如有限长度的准单色光、有限尺寸的正弦光栅等。对傅里叶透镜来说，它处理的是光学图像这类空间信息，由图 5.4.1 可知，衍射角在 $-\theta_0$ 到 θ_0 之间的光线可以完全通过透镜而准确成像，由式(5.4.2)可得通带宽度为：

$$\Delta\xi = 2\xi_0 = \frac{D-B}{\lambda f}。 \quad (5.4.6)$$

如果物为有限尺寸的正弦光栅，则其衍射发散角为：

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{B \cos \theta}。 \quad (5.4.7)$$

由空间频率与衍射角的关系式： $\sin \theta = \xi\lambda$ ，对该两边求微分可得： $\cos \theta \cdot d\theta = \lambda \cdot d\xi$ 。因此空域中

的发散角对应于频域中的单频线宽为：

$$d\xi = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\theta。$$

将式(5.4.7)代入上式，得：

$$d\xi = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\theta = \frac{\cos \theta}{\lambda} \frac{\lambda}{B \cos \theta} = \frac{1}{B} = \delta\xi。 \quad (5.4.8)$$

将式(5.4.6)和式(5.4.8)代入式(5.4.5)，可得到傅里叶变换透镜的信息容量为：

$$N = \frac{\Delta\xi}{\delta\xi} = \Delta\xi B = \frac{D-B}{\lambda f} B = SW。 \quad (5.4.9)$$

信息容量 N 等于带宽 $\Delta\xi$ 与图像空间 B 的乘积，这就是空间带宽积 SW ，所以傅里叶透镜的信息容量也可用空间带宽积来表示。

下面来看看傅里叶变换透镜的视场。由式(5.4.9)可得：

$$\frac{\partial N}{\partial B} = \frac{D}{\lambda f} - \frac{2B}{\lambda f}$$

当 $\frac{\partial N}{\partial B} = 0$ 时，信息容量为最大。这样可得： $B = D/2$ 。也就是说，物的线度 B (也就是待处理的图片线度，即视场)不宜过大，也不宜过小，取为透镜的一半时最佳。这时有：

$$N_m = SW_m = \frac{f}{4\lambda} \left(\frac{D}{f} \right)^2。 \quad (5.4.10)$$

式中， D/f 为傅里叶透镜的相对孔径，一般不大，在 $1/3 \sim 1/5$ 左右。例如，某傅里叶透镜的相对孔径为 $1/3$ ，焦距 $f = 200\text{mm}$ ，光波长 $\lambda = 6 \times 10^4 \text{mm}$ ，则图片线度 B 取为 35mm 为宜，空间带宽积 $SW = 9 \times 10^3$ 。

式(5.4.10)所表示的空间带宽积，可以改写成另外的形式，只要注意关系 $D/2 = B = 2h$ ，便可得：

$$SW = \frac{2}{\lambda} h \left(\frac{D/2}{f} \right)。 \quad (5.4.11)$$

上式中的 h 相当于几何光学的物高， $D/2f$ 相当于孔径角 θ ，因此，空间带宽积等价于几何光学中的拉赫不变量 $J = nh\theta$ 。 SW 大，即 J 大，从信息系统的观点来看，表示传递的信息量大；从成像系统的观点来看，表示视场大或分辨率高；从光能系统的观点来看，表示传递的光能量大。 SW 大的系统本身的设计、制造难度也高，故价格也高。

5.4.2 透镜孔径引起的渐晕效应

从几何光学的角度来看，视场光阑将限制系统的视场。如果物点离开光轴太远，那么视场光阑将挡住发自该物点的主光线。但是单靠主光线并不能控制视场的大小。即使主光线被挡住了，发自同一物点的其他光线也可能通过系统，从而视场比入射窗要大一些。只有当入射窗与物平面重合时，轴外物点发出的所有光线才能被完全挡住。这有一种更复杂的情况。当从一个轴外物外观察光学系统时，各光阑和透镜边缘

好像不再同轴了。所以，除孔径光阑和视场光阑以外的其他光阑也可能挡住一些光线。一些光线被挡住、而另一些光线可以通过将产生一种现象，即像的亮度将随着离开光轴的距离增大而逐渐降低。这种现象称为“渐晕(vignetting)”，原指相片的边缘逐渐淡出的现象。渐晕是一种复杂的现象，但可以通过绘出渐晕图来显示在光学系统中所有的透镜边缘和光阑的相对尺寸和位置，从而确定哪些透镜边缘和光阑将限制通过系统的光线。

透镜前后两个焦面互为傅里叶变换关系，为了获得严格的傅里叶变换，需要把处理面(物面)置于透镜的前焦面，而频谱面(像面)置于相应的后焦面。但由透镜的有限大小，实际上就限制了对物体各种频率成分的传播。由上一节分析可知：物体所有点所发出的光波的低频成分可以全部通过；物体所有点发出的光波的稍高频成分有些会通过，有些则不通过；物体中所有点发出的光波的高频成分完全被滤掉。这三种情况相当于透镜孔径投影孔径完全覆盖物体、部分的覆盖物体和完全落在透镜孔径投影之外，如图 5.4.2 所示。因此，物体的全部空间频率信息就不能全部传递到后焦面上，因此在后焦面就不能得到准确的傅里叶变换，使由透镜实现的傅里叶变换带来误差，频率愈高，误差愈大，从而引起频谱面上的光场分布就会偏离物体的准确傅里叶变换，这就是从傅里叶光学的角度来理解的渐晕现象，所以渐晕就是傅里叶透镜有限孔径对于物面频率成分传播的限制所引起的。显然，物体越靠近透镜或透镜孔径愈大，渐晕效应愈小。

渐晕的大小，除了与物体衍射波的空间频率有关，而且与透镜的相对孔径 D/f 的大小有关。为了减少渐晕效应，透镜的孔径应尽可能大，或物体应尽可能靠近透镜。当物面紧贴透镜时($d_o = 0$)，透镜孔径产生的渐晕效应最小。

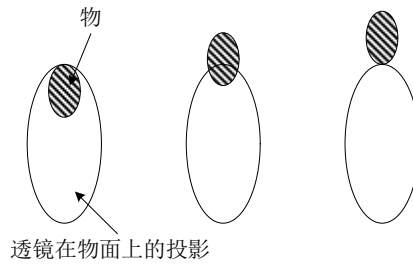


图 5.4.2 透镜的孔径效应

为了考虑透镜孔径的渐晕效应对物体频谱分布的影响，可以定义一个物平面有效光瞳函数 $P(x_o, y_o)$ 。

如图 5.4.3 所示，考虑到频谱面上 $A_1(\xi, \eta)$ 处光波复振幅只是沿主光线 OA 传播的平面被透镜孔径所截取的那一部分的扰动，因而可以沿主光线 OA 方向，将透镜孔径投射到物平面上，投身中心坐标为 $(-\xi, -\eta)$ 。

于是有效光瞳函数可表示为 $P(x_o + \xi, y_o + \eta)$ 。最后，物体的频谱分布可由有效光瞳函数所限制的那一部分物体的傅里叶变换求出。由式(5.3.22)可得：

$$U(x_i, y_i) = CF\{t(x_o, y_o) \cdot P(x_o + \xi, y_o + \eta)\} = CT(\xi, \eta) * \tilde{P}(\xi, \eta)。 \quad (5.4.11)$$

式中： \tilde{P} 为 P 的傅里叶变换。由卷积的物理意义可知，卷积的结果使物的频谱图像细节变的模糊。

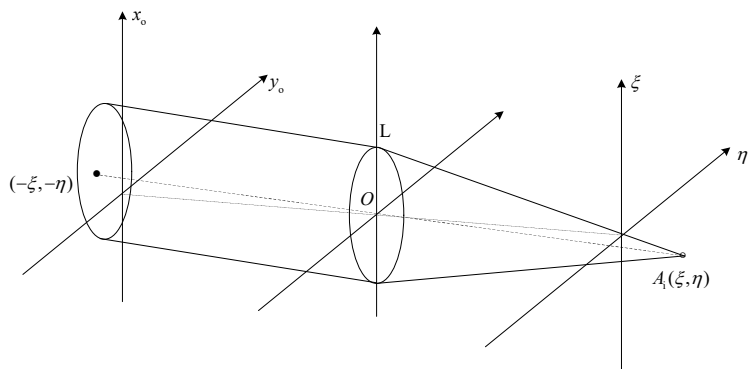


图 5.4.3 有效光瞳函数

以上，我们讨论的关于透镜变换性质，都是在几何光学傍轴近似条件下进行的。对于非傍轴情况下的傅里叶变换，必然专门设计傅里叶变换透镜才能获得比较理想的傅里叶频谱，即使消除了像差的理想成像系统，仍不能实现理想的傅里叶变换。

5.5 光学系统的一般模型

实际光学系统与理想光学系统不同，实际光学系统参与成像的光束宽度和成像范围都是有限的，其限制来自于光学元件的尺寸大小。从光学设计的角度看，如何合理地选择成像光束是必须分析的问题。光学系统不同，对参与成像的光束位置和宽度要求也不同。这一节，从空域来分析光学成像系统的一般模型。

5.5.1 孔径光阑和视场光阑

除透镜边缘之外，光线也可能被一些特别设计的、被称为“光阑”的平面挡住。通常，在光学系统中用一些中心开孔的薄金属片来合理地限制成像光束的宽度、位置和成像范围，这些限制成像光束的成像范围的中间开孔的金属薄片就是光阑。如果光学系统中安放光阑的位置与光学元件的某一面重合，则光学元件的边框就是光阑。光阑对光线的传播不产生任何影响。但开孔尺寸决定了哪些光线可以通过，哪些光线不能。如果光阑外光线高度的值大于光阑的半径，那么光线将被挡住。既然光阑对系统的焦强完全没有贡献，为什么还要在光学系统中设置光阑呢？这是因为，光阑可用来控制哪些光可以通过系统。例如，通过调整光阑的大小和在光学系统中的位置，可以一定程度上控制像差。光阑主要有两类：孔径光阑和视场光阑。

如果通过系统的光线均来自光轴上的某点，那么，对于轴对称系统，挡住最多的光线通过系统的透镜边缘或光阑，就称为“孔径光阑”。从一个复杂的光学系统中的光轴上某点向系统里望，可以看到系统的孔径光阑。可能会看到几个圈，它们是系统中的透镜边缘或光阑孔边的像。这些圈中最小的那个就是孔径光阑。看不到孔径光阑后面的透镜边缘或光阑孔边。要特别注意的是：孔径光阑可能不是限制发自轴外物点的光线的透镜边缘或光阑。另外，孔径光阑的确定将针对某个特定的物点，不同的物点可能具有不同的孔径光阑。

孔径光阑还决定了发自物体的光线中有多少能够实际通过系统参与成像。刚好可以通过的光线的倾角越大，发自物点并能通过系统的光线就越多。可以使用较小的孔径光阑来限制光线的倾角，以使得的傍轴近似更好地得到满足。这样可以提高成像质量。孔径光阑它实际上限制着系统所接收的光锥的角域，它控制着到达像面总辐射通量。它可以直接就是系统中某一透镜的边缘，或者是为了所述目的而特意加入的一个开有孔的不透明屏。如在照相机中，可变光圈的作用就是一个具有可变直径的孔径光阑。孔径光阑的作用如图 5.5.1 所示。

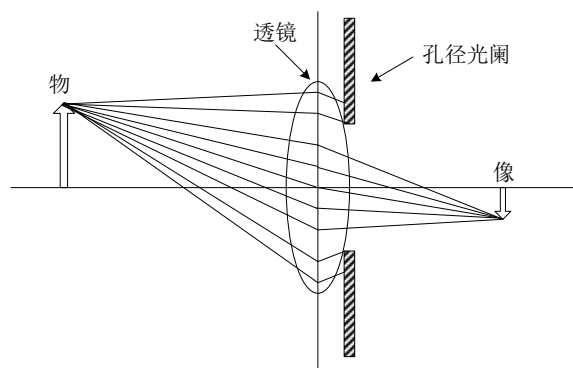


图 5.5.1 孔径光阑的作用

有几种方法可以找一个系统的孔径光阑。一个方法是追踪一系列发自物点、倾角逐渐增大的光线。最终光线倾角将大到该光线被系统中的某个表面所挡住，这个表面就孔径光阑。具有略微小一点点的倾角、刚好通过系统的光线，叫做“边缘光线”。这种方法虽然可以清晰地显示了孔径光阑的物理意义，但它需要太大的计算量。另外，光线倾角的增幅必须很小，否则就有可能越过具有最小倾角的表面、错误地将另一个具有较大倾角表面当成孔径光阑，这不是一个很好的方法。另一个方法是任意追踪一条发自轴上物点的光线，这条光线就是用来确定成像位置的那条光线，由于所有的光线追踪方程都是线性的，这条光线的倾角和光线高度可以比例缩放，这是个较好的方法。

关于孔径光阑需要注意的几个问题。

(1) 在具体的光学系统中，即使所有的光学元件位置固定不动，但如果物平面位置有了变动，那真正起限制轴上物点光束宽度作用的孔径光阑也可能发生变化。如，在图 5.5.2 中所示的系统中，当物平面位于 A 处时，限制轴上物点光束最大孔径角 θ 的是图示中的“光阑”，这时，这个光阑就是孔径光阑。而当物平面位置不在 A 处而在 B 处时，原先的“光阑”开同虚设，真正起限制轴上物点孔径角 θ 大小作用的是透镜的边框，这时透镜的边框是系统的孔径光阑。

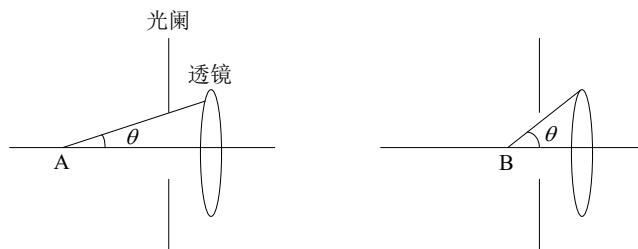


图 5.5.2 物体位置变动后孔径光阑的变化

(2) 如果几块口径一定的透镜组合在一起形成一个镜头，对于位置确定的轴上物点，有两种常用的方法找出哪个透镜的边框是孔径光阑：一是从轴上物点追迹一条傍轴光线(θ 角任意)，求出光线在每个折射面上的投影高度，然后将得到的投射高度与相应折射面的实际口径去比，比值最大的那个折射面的边框就是这个镜头的孔径光阑；二是将一块透镜经它前面的所有透镜成像并求出像的大小，在这些像中，对给定的轴上物点所张的角最小者，其相应的透镜边框为这个镜头的孔径光阑。

(3) 不同的光学系统其孔径光阑安置的位置通常是不同的。在目视系统中，系统的出射光瞳必须在目镜外的一定位置，便于人眼瞳孔与其衔接；在投影度量光学系统中，为使投影像的倍率不因物距变化而变化，要求系统的出射光瞳或入射光瞳位于无限远处；当仪器不对光阑位置提出要求时，光学设计者所确定的光阑位置应是轴外光束像差校正完善的位置，也就是把光阑位置的选择作为校正像差的一个手段；在遵循了上述原则后，光阑位置若还有余地，则应考虑如何合理地匹配光学系统各元件的口径。

在实际的光学系统中，不仅物面上每一点发出并进入系统参与成像的光束宽度是有限的，而且能够清晰成像的物面大小也是有限的。把能清晰成像的这个物面范围称为光学系统的视场，相应的像面范围称为像方视场。事实上，这个清晰成像的范围也是由光学设计者根据仪器性能要求主动限定的，限定的办法通

常是在物面上或在像面上安放一个中间开孔的光阑。光阑孔的大小就限定了物面或像面的大小，限定光学系统的成像范围。这个限定成像范围的光阑称为视场光阑。主光线在孔径光阑处具有太大的倾角，它就可能无法通过系统，限制主光线最大倾角的光阑或透镜边缘，就是视场光阑。孔径光阑确定之后，通过正向和反向追踪一条任意的通过系统的主光线，就可以确定视场光阑。如照相机中那样，胶片实际上起着视场光阑的作用。视场光阑的作用如图 5.5.3 所示。

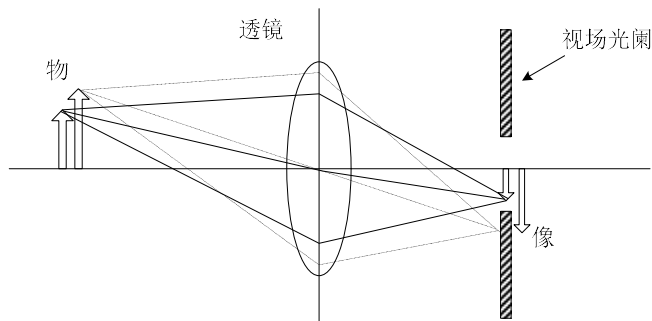


图 5.5.3 视场光阑的作用

根据孔径光阑和视场光阑的定义，这两个光阑绝对不会位于同一个平面上的，它们相互补充的，对像的质量和亮度都起着非常重要的作用。就像孔径光阑可以深埋在系统中一样，视场光阑也可能深埋在系统内。同时，与确定入瞳和出瞳一样，我们也可以找出视场光阑在像空间和物空间中的像。视场光阑的像将有助于确定经过系统后、在像空间可以看到多大的物空间。

5.5.2 入射光瞳和出射光瞳

孔径光阑一般都深深地“埋”在光学系统里。如果希望两个光学系统高效率地一起使用，即使孔径光阑的位置不方便，也要“光学地”匹配两个系统的孔径光阑。如人眼观察使用的望远镜或其他仪器。在这种情况下，眼球的瞳孔是眼球的孔径光阑。如果瞳孔与仪器的孔径光阑在光学配合不好，那么，要么仪器收集太多的光线、而又把光线浪费在眼球上，要么仪器收集的光线不够。在前一种情况中，成像质量将被不必要地降低，而在后一种情况中，像的亮度可能不够。

匹配孔径的问题可以解决，因为一个物体和它所产生的像在光学上是等效的。如果光学系统的一部分把孔径光阑作为物，那么孔径光阑的像就有可能被利用了。孔径光阑作为一个物，可以找出这个物经过部分光学系统所成的像。当两个光学系统组合成一个系统时，除了前一个系统的像即为后一个系统的物这种物像传递关系外，前后两个系统的孔径光阑关系了要匹配，即两个孔径光阑对整个系统应该成另一对物像关系。所谓光瞳，就是孔径光阑的像。孔径光阑经孔径光阑前系统所成的像，即在物空间中的像，称为“入射光瞳”(entrance pupil)，简称“入瞳”。孔径光阑经孔径光阑后系统所成的像，即投射到像空间的孔径光阑的像，称为“出射光瞳”(exit pupil)，简称“出瞳”。

由于入瞳是从物空间看来是由孔径光阑前面的全部光学元件所形成的孔径光阑的像，这通常是一个虚像，如图 5.5.4(a)所示。因此，是确定系统所接收光锥角域的一个“表观”限制元件。

出瞳是从像空间向回看所见到的由其后面的全部光学元件对孔径光阑所形成的像，如图 5.5.4(b)所示。系统像差及其分辨本领都往往与出瞳有关。理论上，对于一个点物，由出瞳投射一个球面波并会聚到(或发散自)一个理想像点。

入射光瞳、孔径光阑和出射光瞳三者是物像关系。

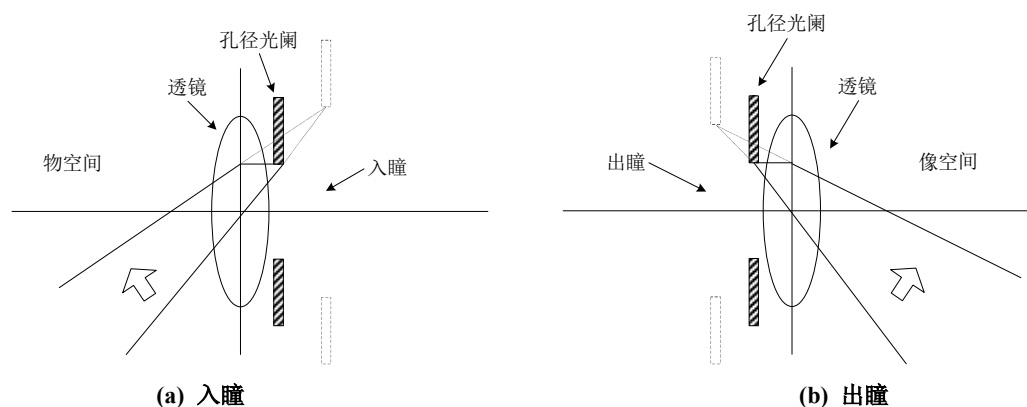


图 5.5.4 入瞳和出瞳

5.5.3 入射窗和出射窗

视场光阑经它前面的光学系统所成的像，即视场光阑在像空间中的像，称为“入射窗”(entrance window)。视场光阑被其后面的光学系统所成的像，即视场光阑在物空间中的像，称为“出射窗”(exit window)。由于像在光学上等效于物，如果入射窗位于物平面上的话，即视场光阑安放在像面上，入射窗就和物平面重合，那么视场光阑将锐利地裁剪出系统的视场，那么出射窗必定位于像平面，入射窗就是视场光阑本身，即出射窗与像平面重合。因此，入射窗、视场光阑和出射窗三者互为物像关系。

由于孔径光阑和视场光阑不可能位于同一平面，所以视窗(Windows)也不可能与光瞳(pupils)重合。有些系统中，如果在像面处无法安放视场光阑，在物面处安放视场光阑又不现实，成像范围的分析就会复杂的多。

5.5.4 黑箱模型

对衍射受限光学系统成像规律的研究可以追溯到 1873 年阿贝(Ernst Abbe)或 1896 瑞利(Lord Rayleigh)提出的理论。阿贝认为，光波通过光学系统的衍射效应是由有限大小的入射光瞳引起的，他认为一个物体所产生的衍射分量只有一部分为有限的入射光瞳所截取，未被截取的分量正是物振幅分布中高频分量部分，因而像的分辨率会下降，这是阿贝在研究显微镜相干成像时首先提出来的。从像空间看过去，瑞利认为，衍射效应来自于有限大小的出射光瞳。然而，由于入射光瞳与出射光瞳对整个光学系统来说是共轭的，它们都是实际对光线起限制作用的孔径光阑的像，出射光瞳不过是入射光瞳的几何光学像。所以，这两种看法是完全等价的。

所谓衍射受限系统，是指不考虑系统的几何像差，仅仅考虑系统的衍射限制。大多数光学系统，通常不会只有单个透镜，而是由若干个透镜(正透镜或负透镜)和其他光学元件(如棱镜、光阑等)组合成的复合系统。而且，透镜也不一定是薄的。因此，在考察光学系统对成像的影响时，必然在若干个可能对光束起限制作用的通光孔径中，找到对光束起实际限制作用的那个孔径，该孔径可能是某一透镜边框，也可能是光路中某一个特定光阑。由于，入射光瞳、孔径光阑和出射光瞳三者相互共轭。当轴上的物点确定后，孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳由系统元件参数及相对位置决定。由入射光瞳限制的物方光束必定能全部通过系统，成为被出射光瞳所限制的像方光束。

一个成像系统的外部性质可以由入射光瞳或出射光瞳来描述。因此，不管成像系统的详细结构如何，都可以将它归结为下列普遍模型：光波由物平面变换到像平面，可以分为 3 个过程，即光由物平面到入瞳面，再由入瞳面到出瞳面，最后由出瞳面到像平面(如图 5.5.5 所示)。当光波通过成像系统时，波面受到入瞳的限制，变换到空间就成为出瞳对出射波的限制。这两种限制是等价的，是同一种限制在两个空间的反映。这一结论称为光束限制的共轭原理。在考虑光波通过光学系统的衍射效应时，只需考虑其中任何一种限制，通常是考虑出瞳对光波的衍射作用。至于光波从入瞳到出瞳的传播，由于在此过程中波面已不再受到别的限制，故此段传播可以用几何光学很好地描述。有了光瞳的概念，在研究光学成像系统的性质时，

可以不去涉及系统的详细结构,而把整个系统的成像看成一个“黑箱”的作用,只需知道黑箱边端(即入瞳平面和出瞳平面)的物理性质,就可以知道像平面上合乎实际的像场分布。

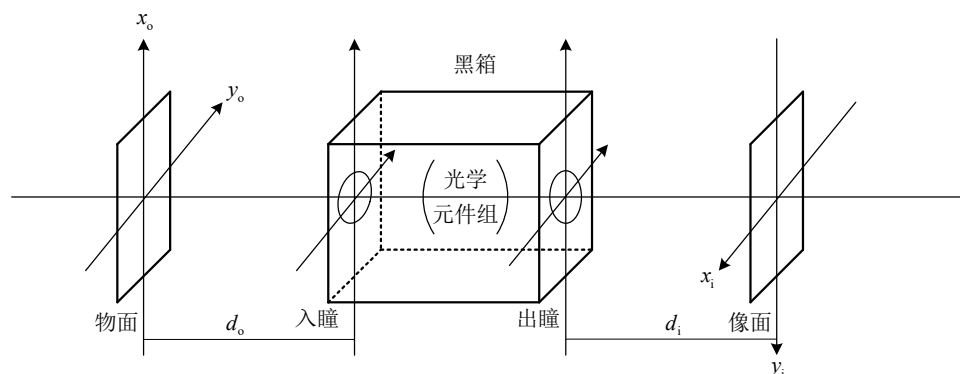


图 5.5.5 成像系统的普遍模型

为了确定系统的脉冲响应,首先需要知道这个“黑箱”对点光源发出的球面波的变换作用,即当入瞳平面上输入发散球面波时,出瞳平面透射的波场特性。对于实际光学系统,这一边端性质千差万别,但总的来说,可以分成两类,即衍射受限系统和有像差系统。

5.6 衍射受限光学系统成像的空域分析

任何一个光学系统都有各种有限尺寸的光学元件构成的。由前面的分析可知,只有位于光学元件孔径范围内的角谱才能正常透过光学系统。因此,分析衍射受限光学系统的成像规律是具有重要实际意义的。

在空域中研究光学系统的成像问题是采用点扩散函数的方法。下面,先讨论衍射光学系统的点扩散函数,然后再讨论衍射受限光学系统的成像特性。

5.6.1 衍射受限系统的点扩散函数

当像差很小或者系统的孔径和视场都不大,实际光学系统就可近似看做衍射受限系统。这时的边端性质比较简单,也就是说,从物平面上任一点源,如果从该点发出的发散球面波通过成像系统后,因该系统受限制,转换成了新的理想球面波,并且在像平面上会聚成一个理想点,则称该成像系统是衍射受限的(diffraction-limited)。因此,衍射受限系统的作用就是将投射到入瞳上的发散球面波变换成出瞳上的会聚球面波。至于有像差的系统,其边端条件是:点光源发出的发散球面波投射到入瞳上,在出瞳处的透射波场将明显偏离理想球面波,偏离程度由波像差决定。

任何物的场分布都可以看做无数小面元的组合,而每个小面元都可看做一个加权的 δ 函数。对于任何一个衍射受限的成像系统,如果能清楚地了解物平面上任一小面元的光振动通过成像系统后,在像平面上所造成的光振动分布情况,通过线性叠加,原则上就能够求得任何物面光场分布通过系统后的像面光场分布,进而求得像面强度分布,这就是相干照射下的成像过程。所以,这里问题的关键是求出任意小面元的光振动所对应的像场分布。由 3.2 节可知,当该面元的光振动为单位脉冲即 δ 函数时,对应的这个像场分布函数就是脉冲响应函数或点扩散函数 $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ 。 $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ 表示物平面上点 (x_o, y_o) 的单位脉

冲通过成像系统后在像平面上点 (x_i, y_i) 产生的光场分布,一般说来,它既是坐标 (x_o, y_o) 的函数,也是坐

标 (x_i, y_i) 的函数。物面上的任一点 (x_o, y_o) , 经过线性系统 L (黑箱), 在像面上产生脉冲响应函, 即点扩

散函数 $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ [见式(3.2.19)]。对于任意的物函数, 可以把它看成是由物平面上许多面元组成, 每

个面元具有相应的点扩散函数。由于成像系统是线性系统, 只要能够确定成像系统点扩散函数

$h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ ，就能完备描写该成像系统的性质。

假定紧靠物面后的平面 P'_o 的光场复振幅分布为 $U'_o(x_o, y_o)$ ，由于成像系统可以看成是线性系统，根据线性系统理论，可以把物函数 $U'_o(x_o, y_o)$ 分解为无数物面元 $dU'_o(x_o, y_o) = \delta(x_o, y_o)$ 之和。沿光波传播方向，面元 $dU'_o(x_o, y_o)$ 衍射传播到紧靠“黑箱”前表面，其光场面元为 $dU_1(x_1, y_1)$ ，然后“黑箱”到达“黑箱”的后表面，其光场分布面元为 $dU'_1(x_1, y_1)$ ，然后经过衍射传播到像平面，其光场分布的面元为 $dU_i(x_i, y_i)$ ，这个像平面的面元就是点扩散函数。即求出了 $dU'_o(x_o, y_o) \leftrightarrow dU_i(x_i, y_i)$ 这样的点源的输入输出关系。

设物的后表面的任意点 (x_{o0}, y_{o0}) 发出的单位脉冲为 $\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})$ ，其在的“黑箱”前表面 $P_1(x_1, y_1)$ 产生的复振幅可由菲涅耳公式(4.4.4)得到：

$$\begin{aligned} dU_1(x_1, y_1; x_{o0}, y_{o0}) &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0}) e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1 - x_{o0})^2 + (y_1 - y_{o0})^2]} dx_o dy_o \\ &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1 - x_{o0})^2 + (y_1 - y_{o0})^2]} \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

这个波面通过孔径函数为 $P(x_1, y_1)$ 的光瞳， $P(x_1, y_1)$ 是出瞳函数，也常称为光瞳函数， d_i 是光瞳平面到像面的距离，已不是通常意义下的像距。在出瞳平面 P'_1 上的复振幅为 $dU'_1(x_1, y_1; x_{o0}, y_{o0})$ ，由于点 (x_{o0}, y_{o0}) 是任意的，故可省出下标中的“0”，这样有：

$$\begin{aligned} dU'_1(x_1, y_1; x_o, y_o) &= P(x_1, y_1) dU_1(x_1, y_1; x_o, y_o) \\ &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} P(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2]} \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

由于出瞳面 P'_1 到观察面 P_i ，光场的传播满足菲涅耳衍射，于是物平面 P_o 上的单位脉冲在观测面 P_i 上引起的复振幅分布，即点扩散函数为：

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_o, y_o) &= dU_i(x_i, y_i; x_o, y_o) \\ &= \frac{e^{ikd_i}}{i\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} dU'_1(x_1, y_1; x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2d_i}[(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2]} dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

将式(5.6.3)代入上式，可得：

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_o, y_o) &= -\frac{e^{ik(d_o + d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2 + y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2 + y_o^2)} \\ &\quad \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} - \frac{1}{f}\right)(x_1^2 + y_1^2)} e^{-ik\left[\left(\frac{x_i + x_o}{d_i} + \frac{y_i + y_o}{d_o}\right)x_1 + \left(\frac{y_i + y_o}{d_i} + \frac{x_i + x_o}{d_o}\right)y_1\right]} dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

上式就是满足菲涅耳条件下衍射受限系统的点扩散函数。

如果物像的共轭关系满足高斯公式(式 5.2.3)，则上式可化为：

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-ik \left[\left(\frac{x_i+x_o}{d_i+d_o} \right) x_1 + \left(\frac{y_i+y_o}{d_i+d_o} \right) y_1 \right]} dx_1 dy_1. \quad (5.6.6)$$

令 $M = d_i / d_o$ ， M 可理解为类似透镜的横向放大率，这样有：

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i} [(x_i+Mx_o)x_1 + (y_i+My_o)y_1]} dx_1 dy_1. \quad (5.6.7)$$

令

$$x_o = -\tilde{x}_o / M, \quad y_o = -\tilde{y}_o / M, \quad (5.6.8)$$

则式(5.6.7)变为：

$$h(x_i, y_i; \tilde{x}_o, \tilde{y}_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(\tilde{x}_o^2+\tilde{y}_o^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i} [(x_i-\tilde{x}_o)x_1 + (y_i-\tilde{y}_o)y_1]} dx_1 dy_1. \quad (5.6.9)$$

令

$$C = -e^{ik(d_o+d_i)} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(\tilde{x}_o^2+\tilde{y}_o^2)} \quad (5.6.10a)$$

当透镜的孔径比较大时，能对像面上点 (x_i, y_i) 的光场产生有效贡献的，必定是物面上以几何成像所对应的以物点 (x_o, y_o) 为中心的很小的区域，这样，像点坐标与物点坐标成共轭坐标关系，即有 $x_o \approx -x_i / M$ ， $y_o \approx -y_i / M$ ，与式(5.6.8)比较有 $x_i \approx \tilde{x}_o$ ， $y_i \approx \tilde{y}_o$ ，这样，式(5.6.10a)变为：

$$C \approx -e^{ik(d_o+d_i)} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(x_i^2+y_i^2)} \quad (5.6.10b)$$

由上式可见，近似后的相位因子不再依赖物点坐标 (x_o, y_o) ，因此因子 C 不会影响像面上的强度分布。这样，式(5.6.9)变为：

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = \frac{C}{\lambda^2 d_o d_i} \int \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i} [(x_i-\tilde{x}_o)x_1 + (y_i-\tilde{y}_o)y_1]} dx_1 dy_1. \quad (5.6.11)$$

由上式可见，积分部分的值只依赖于坐标差 $(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)$ 。上式就是满足夫琅禾费衍射条件下衍射受限系统的点扩散函数，从表达式可以看出，在夫琅禾费衍射条件下衍射受限系统是线性空不变系统，这时，系统的脉冲响应就等于夫琅禾费衍射图样。

孔径的衍射作用是否显著，是由孔径线度相对于波长 λ 和像距 d_i 的比例决定的，为此，对孔径平面

上的坐标 (x_1, y_1) 作 $\xi = \frac{x_1}{\lambda d_i}$ ， $\eta = \frac{y_1}{\lambda d_i}$ 坐标变换，则式(5.6.11)变为：

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = MC \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{-i2\pi[(x_i - \tilde{x}_o)\xi + (y_i - \tilde{y}_o)\eta]} d\xi d\eta \quad (5.6.12)$$

如果孔径大小(光瞳)相对于 λd_i 足够大，则在 ξ, η 坐标中，在无限大的区域内 $P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = 1$ ，即在光瞳内其值为 1，在光瞳外其值为 0，式(5.6.12)就变为：

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = MC \iint_{\Sigma_i} e^{-i2\pi[(x_i - \tilde{x}_o)\xi + (y_i - \tilde{y}_o)\eta]} d\xi d\eta = MC \delta(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) \quad (5.6.13)$$

上式中的因子 C 是复常数，对光强没有贡献，因此上式也表示为：

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = |M| \delta(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) \quad (5.6.14)$$

这时，点物成像为一个像点，即理想成像。即当不考虑光瞳有限大小时，点脉冲 $\delta(x_o, y_o)$ 通过衍射受限成像系统后，其响应函数(即输出函数，或像点)仍是点脉冲，其位置在 $x_i = \tilde{x}_o = -Mx_o$ ， $y_i = \tilde{y}_o = -My_o$ 处，这便是几何光学中点物-像点成像的理想情况。

由物点发出的球面波，在像方得到的将是一个被出射光瞳所限制的球面波，这个球面波是以理想像点为中心的。由于出射光瞳的限制作用，在像平面上将产生以理想像点为中心的出瞳孔径的夫琅禾费衍射图样。式(5.5.12)表明，若略去积分号前面的系数，脉冲响应函数就是光瞳函数的傅里叶变换。即衍射受限系统的脉冲响应是光学系统出瞳的夫琅禾费衍射图样，其中心在几何光学的理想像点 $(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)$ 处。

5.6.2 正薄透镜的点扩散函数

图 5.6.1 所示的是在相干照射下，一个消像差的正薄透镜对透明物成像的情况。物体放在透镜前距离为 d_o 的输入平面 $x_o - y_o$ 上，观测在透镜后为 d_i 的共轭面 $x_i - y_i$ 上成像情况。由上节讨论可知，只要求出成像系统对 δ 函数的响应表达式，将它与每个物面元上的复振幅相乘后求和，就是可以得到输出面 $x_i - y_i$ 上的复振幅分布 $U_i(x_i, y_i)$ 。

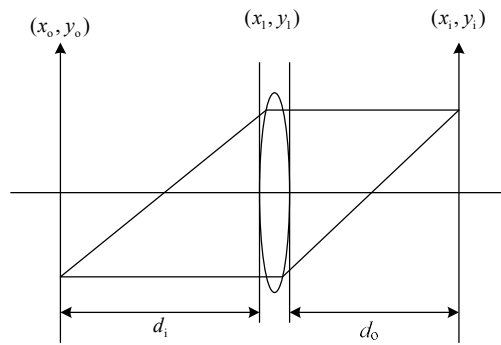


图 5.6.1 透镜点扩散函数

物面上的波面传播距离 d_o 后，波面到达焦距为 f 透镜，其孔径函数为 $P(x_l, y_l)$ 为：

$$P(x_1, y_1) = P_L(x_1, y_1) e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)} \quad (5.6.15)$$

将上式代入(5.6.7)，可得：

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2 + y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2 + y_o^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P_L(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} - \frac{1}{f}\right)(x_1^2 + y_1^2)} e^{-ik\left[\left(\frac{x_i + x_o}{d_i + d_o}\right)x_1 + \left(\frac{y_i + y_o}{d_i + d_o}\right)y_1\right]} dx_1 dy_1 \quad (5.6.16)$$

当物、像平面为共轭关系时，满足高斯公式(5.2.3)，这样，式(5.6.16)可简化为：

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2 + y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2 + y_o^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P_L(x_1, y_1) e^{-ik\left[\left(\frac{x_i + x_o}{d_i + d_o}\right)x_1 + \left(\frac{y_i + y_o}{d_i + d_o}\right)y_1\right]} dx_1 dy_1 \quad (5.6.17)$$

由式(5.6.8)的坐标关系，可得：

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2 + y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(\tilde{x}_o^2 + \tilde{y}_o^2)} \cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P_L(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i}[(x_i - \tilde{x}_o)x_1 + (y_i - \tilde{y}_o)y_1]} dx_1 dy_1 \quad (5.6.18)$$

上式与式(5.6.11)是完全相同。延用上面的分析方法，可得完全相同的结果。由此可见，衍射受限系统的成像在夫琅禾费衍射条件下，与薄透镜成像其效果是完全相同的，上节所得出的结论，也完全适用于薄透镜成系统。所以，式(5.6.11)所表达的衍射受限系统的点扩散函数，也就等同于薄透镜的点扩散函数。

同样，如果 $P_L(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = 1$ ，式(5.6.12)也成立，这就是薄透镜几何光学理想成像的情况。

5.6.3 单色光照明衍射受限系统的成像规律

给定物分布通过衍射受限系统后，如何求它在像平面上的像分布的复振幅和光强？一个确定的物分布总可以很方便地分解成无数 δ 函数的线性组合，而每个 δ 函数可由上节的方式求出点扩散函数。然而，在像平面上将这些无数个点扩散函数合成的结果是和物面照射光的特性有关的。如果物面上点脉冲与点脉冲间是相干的，那么这些点脉冲在像平面上的脉冲响应便是相干叠加；如果点脉冲与点脉冲间是非相干的，则这些点脉冲在像平面上的脉冲响应将是非相干叠加，即强度叠加。所以衍射受限系统的成像特性对于相干照射和非相干照射是不同的。下面我们讨论单色相干照明的情况。

设物的复振幅分布为 $U_o(x_o, y_o)$ ，在相干照射下，物面上的各点是完全相干的。参看 3.2 节，可以把系统输入函数，即将物分布用 δ 函数表达，这样在物体后的复振幅分布用 $U'_o(x_o, y_o)$ 表示时，由(3.2.24)可知：

$$U'_o(x_o, y_o) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_o(x_{o0}, y_{o0}) \delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0}) dx_{o0} dy_{o0} \quad (5.6.19)$$

物面上每一个脉冲通过系统后都形成一个复振幅分布，所有这些分布的相干叠加，便是物通过系统后所得的像的 $U(x_i, y_i)$ ，由式(3.2.25)可得：

$$\begin{aligned}
U_i(x_i, y_i) &= L\{U'_o(x_o, y_o)\} = L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_{o0}, y_{o0})\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})dx_{o0}dy_{o0}\right\} \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_{o0}, y_{o0})L\{\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\}dx_{o0}dy_{o0} \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_{o0}, y_{o0})h(x_i, y_i; x_{o0}, y_{o0})dx_{o0}dy_{o0}。
\end{aligned} \tag{5.6.20}$$

满足线性空不变系统时，像点的位置只是物点坐标反演的 M 倍，这样有 $h(x_i, y_i; x_o, y_o) = h(x_i - (-Mx_o), y_i - (-My_o))$ ，由于点 (x_{o0}, y_{o0}) 是任意的，可省略下标中的“0”，则上式变为：

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o)h(x_i - (-Mx_o), y_i - (-My_o))dx_o dy_o。 \tag{5.6.21}$$

作坐标变换 $x_o = -\tilde{x}_o / M$ ， $y_o = -\tilde{y}_o / M$ 处，则有：

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{1}{M^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M)h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o。 \tag{5.6.22}$$

对理想成像，上式中的 h 满足式(5.6.13)，这样可得到理想像光场分布为：

$$\begin{aligned}
U_i^g(x_i, y_i) &= \frac{C}{M} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M)\delta(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \\
&= \frac{C}{M} U'_o(-x_i / M, -y_i / M)。
\end{aligned} \tag{5.6.23}$$

式中，上标“g”表示理想成像。在理想成像的情形下，全部的物点构成的物分布 $U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M)$ 与物分布 $U'_o(x_o, y_o)$ 是一样的，只是由于 $x_o = -\tilde{x}_o / M$ ， $y_o = -\tilde{y}_o / M$ ，在理想像平面 $x_i - y_i$ 中的坐标读数比在物平面 $x_o - y_o$ 中的坐标读数放大了 M 倍，所以 $U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M)$ 在 $x_i - y_i$ 坐标中与 $U_i^g(x_i, y_i)$ 是一样的，所以式(5.6.23)表明，理想像 $U_i^g(x_i, y_i)$ 的分布形式与物 $U'_o(x_o, y_o)$ 的分布形式是一样的，只是在 x_i 和 y_i 方向放大了 M 倍。因此，把 $U_i^g(x_i, y_i)$ 叫做 $U'_o(x_o, y_o)$ 的理想像。令

$$\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = \frac{C}{M} h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)。 \tag{5.6.24}$$

将上式代入式(5.6.22)，得：

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{M} U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M)h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o。 \tag{5.6.25}$$

由于几何像与物有点对点对应关系，即对几何物点 (x_o, y_o) ，其几何像点只出现在像面 $x_i = \tilde{x}_o, y_i = \tilde{y}_o$ 的位置上，所以几何像的复振幅分布也可用像面上的坐标 x_i^g, y_i^g 为其变量，即式(5.6.24)所表达式形式，将其代入式(5.6.25)，可得：

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o = U_i^g(x_i, y_i) * \tilde{h}(x_i, y_i)。 \tag{5.6.26}$$

这是物像关系在空域中的表达式。由式(5.6.26)，便可以理解式(5.5.23)的物理意义为：物 $U'_o(x_o, y_o)$ 通过衍射受限系统后的像分布 $U_i(x_i, y_i)$ 是 $U'_o(x_o, y_o)$ 的理想像 U_i^s 和点扩散函数 \tilde{h} 的卷积。这就表明，不仅对于薄的单透镜系统，而且对于更普遍的情形，衍射受限系统也是可以看成线性空间不变系统的。

将式(5.6.12)代入式(5.6.24)，可得：

$$\begin{aligned}\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{-i2\pi[(x_i - \tilde{x}_o)\xi_1 + (y_i - \tilde{y}_o)\eta_1]} d\xi d\eta \\ &= F\{P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)\}.\end{aligned}\quad (5.6.27)$$

由此可见，在相干照射条件下，对于衍射受限成像系统，表征成像系统特征的点扩散函数 $\tilde{h}(x_i, y_i)$ 仅取决于系统的光瞳函数 P 。

由于是线性空间不变系统，可以用 $\tilde{x}_o = \tilde{y}_o = 0$ 的脉冲响应表示成像系统的特性，即有：

$$\tilde{h}(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{-i2\pi(x_i \xi + y_i \eta)} d\xi d\eta = F\{P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)\}.\quad (5.6.28)$$

5.6.4 准单色光照明衍射受限系统的成像规律

实际的照射光源都不会是理想单色的，总具有一定的频带宽度，而成为非单色光。这时，由于不同频率的光波是独立进行传播的，光振动的振幅和相位随时间发生各自的变化，而且这种变化具有统计无关的性质。当用准单色光照射时，可设物平面上光振动的分布函数为 $U_o(x_o, y_o; t)$ 。要得到 $U_o(x_o, y_o; t)$ 在像平面上的响应 $U_i(x_i, y_i; t)$ ，可先采用傅里叶分析的方法，把 $U_o(x_o, y_o; t)$ 分解成一系统单色波的线性组合，这样就可应用前面对单色光照射下获得的结果，求出一系统对每一单色波的响应，最后再把各个单色波的响应叠加起来，就得到总的响应 $U_i(x_i, y_i; t)$ 。

下面，我们先分析一下准单色光照射时，光学成像系统的物像关系。先对 $U_o(x_o, y_o; t)$ 求关系变量 t 的傅里叶变换，即：

$$\tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) = F\{U_o(x_o, y_o; t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o; t) e^{-i2\pi \nu t} dt.\quad (5.6.29)$$

$\tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu)$ 是时间频率为 ν 的单色光波在物平面上的复振幅分布函数。按照前面对单色光情况的讨论，对于衍射受限成像系统，直接由叠加积分公式便可求得频率为 ν 的单色平面波在像平面上的响应 $\tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu)$ 为：

$$\tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) h(x_i - x_o, y_i - y_o) dx_o dy_o.\quad (5.6.30)$$

$\tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu)$ 又可看成实际输出像 $U_i(x_i, y_i; t)$ 的频谱函数，从而有：

$$\begin{aligned}
U_i(x_i, y_i; t) &= F^{-1} \left\{ \tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) h(x_i - x_o, y_i - y_o; \nu) dx_o dy_o \right] e^{i2\pi\nu t} d\nu.
\end{aligned} \tag{5.6.31}$$

假设系统的性态不随时间改变，并用中心频率为 ν_0 的准单色光照射，此时， $\tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu)$ 只有在 $\nu = \nu_0$ 的窄带范围内不为零，在此范围外可视为零。故在计算式(5.6.31)时，可近似地将脉冲响应函数 h 中的 ν 用 ν_0 代替，于是式(5.6.31)可以写成：

$$\begin{aligned}
U_i(x_i, y_i; t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right] h(x_i - x_o, y_i - y_o; \nu_0) dx_o dy_o \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o; t) h(x_i - x_o, y_i - y_o; \nu_0) dx_o dy_o.
\end{aligned} \tag{5.6.32}$$

这就把单色光照明时的叠加公式推广到了准单色光情形。

通常光探测器(如肉眼、照相乳胶和光电探测器)都只能感知光的强度，且其响应频率远小于光波频率，故光探测器所感知到的像平面上的光强度为：

$$I_i(x_i, y_i) = \langle U_i(x_i, y_i; t) U_i^*(x_i, y_i; t) \rangle. \tag{5.6.33}$$

式中：尖括号表示对物理量在足够长的时间内求平均。为了求出 $I_i(x_i, y_i)$ 的具体表达式，可将式(5.6.26)代入式(5.6.33)，交换积分和求平均的次序得到：

$$\begin{aligned}
I_i(x_i, y_i) &= \left\langle \iint_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \right. \\
&\quad \cdot \left. \iint_{-\infty}^{\infty} U_i^{g*}(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o'; t) \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}_o', y_i - \tilde{y}_o'; \nu_0) d\tilde{x}_o' d\tilde{y}_o' \right\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o'; t) \rangle \\
&\quad \cdot \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}_o', y_i - \tilde{y}_o'; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o d\tilde{x}_o' d\tilde{y}_o'.
\end{aligned} \tag{5.6.34}$$

对于准单色光照射时，在物平面上的复振幅分布函数中，幅值随时间作缓慢变化，而相位部分将因光波频率很高而随时间迅速变化。因此，对于物面上的任意两点 $(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)$ 和 $(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o')$ 处的光振动可分别写成：

$$U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) = U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) e^{i\phi(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t)}, \tag{5.6.35a}$$

$$U_i^g(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o'; t) = U_i^g(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o') e^{i\phi(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o'; t)}. \tag{5.6.35b}$$

将上式代入(5.6.34)式，则有：

$$\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o'; t) \rangle = U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o') e^{i[\phi(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) - \phi(\tilde{x}_o', \tilde{y}_o'; t)]}. \tag{5.6.36}$$

随着照射方式的不同，由式(5.6.34)及式(5.6.36)会得出不同意义的结果。当用它照明物面时，物面光场可以是空间完全相干的、部分相干的和非相干的，这里只讨论相干和非相干两种情况。物面光场为空间完全相干时，称作相干照明；非相干时，称作非相干照明。

激光器发出的光波、一个普通光源通过针孔后(点光源)出射的光波等这类光源照射下,物平面上任意两点光振动之间的相位差随时间的变化是恒定的,即式(5.6.36)中的相位差的平均值为常数,不失一般性的,可令这个常数为零,由式(5.6.36)和式(5.6.34)可得:

$$\begin{aligned}
 I_i(x_i, y_i) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \\
 &\quad \cdot \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) h^*(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \\
 &= \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \\
 &\quad \cdot \left[\int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \right]^* \\
 &= |U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) * \tilde{h}(x_i, y_i)|^2 = |U_i(x_i, y_i)|^2.
 \end{aligned} \tag{5.6.37}$$

由于几何像与物相同,像面上的光场空间相干性与物面上的相同。当完全相干时有:

$$U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o, t) = \frac{U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)}{\sqrt{\langle |U_i^g(\tilde{x}_o = 0, \tilde{y}_o = 0, t)|^2 \rangle}} U_i^g(\tilde{x}_o = 0, \tilde{y}_o = 0, t). \tag{5.6.38}$$

式(5.6.38)等号右边的分式部分,代表任意一几何像点 $(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)$ 相对原点 $(0,0)$ 像点的复振幅比值:

$U_i^g(\tilde{x}_o = 0, \tilde{y}_o = 0, t)$ 表示在原点上的几何像点的光振动的大小。对 $U_i^g(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o, t)$ 也做同样处理。于是式(5.6.34)中的被积函数可分离变量,从而得到:

$$I_i(x_i, y_i) = \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \right|^2. \tag{5.6.39}$$

上式与(5.6.37)的结果是一致的。一般将相干照明的系统叫作相干成像系统。由(5.6.37)可知,相干成像系统复振幅是线性的。式(5.6.37)与式(5.6.26)相比可以发现,这二式实际上一样的,由此可见,照射方式相干照射(coherent illumination)时,准单色光波可以看成波长为中心波长的单色光波,因此相干照明成像系统的物象关系仍可用式(5.6.26)描述,不过系统和脉冲响应函数的波长应当换成准单色光波的中心波长。

在漫射光源、扩展光源等这类光源照射下,物平面上各点的光振动随时间的变化都是统计无关的,这种照射方式称为非相干照射(incoherent illumination)。这时,式(5.6.36)中的 $U_o(x_o, y_o; t) U_o^*(x'_o, y'_o; t)$ 除了在点 (x_o, y_o) 足够小的邻域内不为零外,在其余区域的值全为零。于是,对于物平面上靠得很近的两点的光振动,式(5.6.36)可写成:

$$\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t) \rangle = \begin{cases} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) & (\tilde{x}_o - \tilde{x}'_o)^2 + (\tilde{y}_o - \tilde{y}'_o)^2 \leq \varepsilon^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}. \tag{5.6.40}$$

式中: ε 为任意小的正数,上式也可写成:

$$\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t) \rangle = U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) \delta(\tilde{x}_o - \tilde{x}'_o, \tilde{y}_o - \tilde{y}'_o). \tag{5.6.41}$$

将上式代入式(5.6.34),得到非相干照射像面上的光强分布为:

$$\begin{aligned}
I_i(x_i, y_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) \\
&\cdot \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) \delta(\tilde{x}_o - \tilde{x}'_o, \tilde{y}_o - \tilde{y}'_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)|^2 |\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0)|^2 d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o = I_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) * h^l(x_i, y_i).
\end{aligned} \tag{5.6.42}$$

式中： $I_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) = |U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)|^2$ 是物平面上的强度分布；

$$h^l(x_i, y_i) = |\tilde{h}(x_i, y_i)|^2 \tag{5.6.43}$$

称为系统的强度点扩散函数。式(5.6.42)表明，在非相干照射方式下，衍射受限光学系统成像对光强度的变换是线性空不变的，对复振幅的变换则不是线性的。

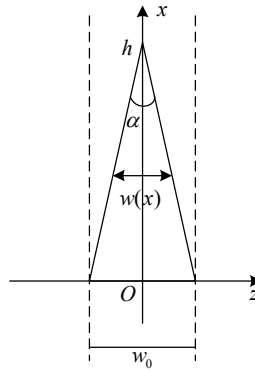
由上面的讨论可以看到，对于非相干线性空不变成像系统，在理想成像的情况下，物像关系满足下述卷积积分：

$$I_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x_g, y_g) h_l(x_i - x_g, y_i - y_g) dx_g dy_g = I_i^g(x_g, y_g) * h^l(x_i, y_i)。 \tag{5.6.44}$$

式中， I_i^g 是几何光学理想像的强度分布； h^l 为强度脉冲响应(或称为相干脉冲响应、点扩散函数)，它是点物产生的像斑的强度分布。式(5.6.44)是点物产生像斑的强度分布，它应该是复振幅点扩散函数绝对值的平方。式(6.6.37)和式(6.6.44)表示，在非相干照射下，线性空不变成像系统的像强分布是理想像的强度分布与强度点扩散函数的卷积。系统的成像特性由 $h^l(x_i, y_i)$ 表示，而 $h^l(x_i, y_i)$ 又由 $\tilde{h}(x_i, y_i)$ 决定。显然，非相干成像系统对光强度是线性的。

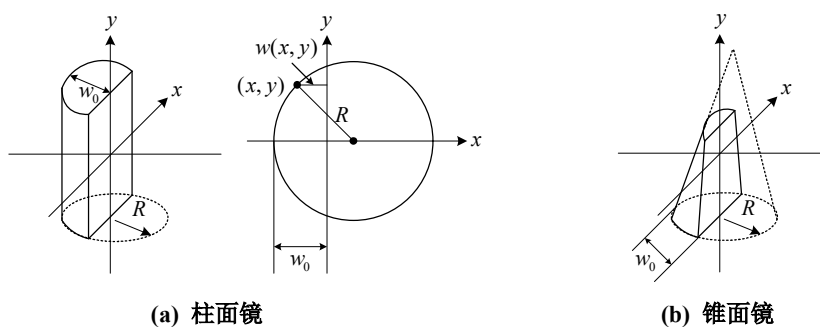
习 题 5

- 5.1 为什么双凸透镜、平凸透镜和正弯月形透镜的焦距总是正的，而双凹透镜、平凹透镜和负弯月形透镜的焦距总是负的？
- 5.2 导出如题图所示的透明薄楔形棱镜的相位变换函数和透射率函数，设楔角为 α 棱镜材料的折射率为 n 。



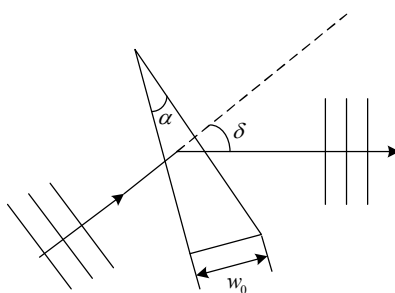
题 5.2 图

5.3 如下图所示，求由圆柱体(a)和圆锥体(b)的一部分构成的透镜所引起的相位变换的傍轴近似。



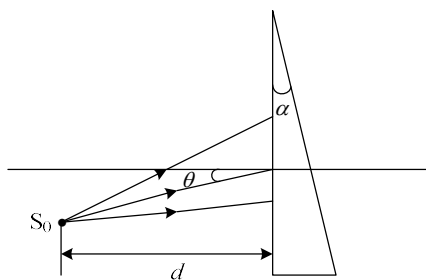
题 5.3 图

5.4 如题图所示的楔形薄透镜，楔角为 α ，折射率 n ，底边厚度为 w_0 。求其相位变换函数，并利用它来确定平行光束小角度入射时产生的偏向角 δ 。



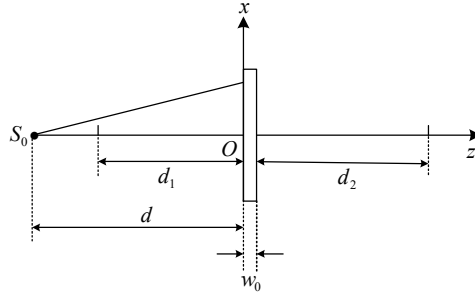
题 5.4 图

5.5 如题图所示，点光源 S_0 与楔形薄透镜距离为 d ，它发出倾角为 θ 的傍轴球面波照棱镜，棱镜楔角为 α ，折射率 n 。求透射光波的特征和 S_0 点虚像的位置。



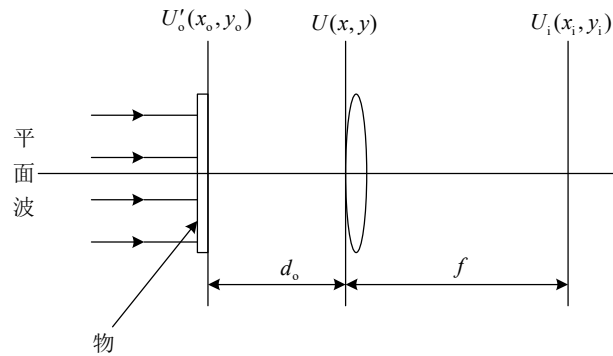
题 5.5 图

5.6 如题图所示，一单色光源置于 S_0 点，一厚度为 w_0 的薄介质层垂直于 z 轴放置， S_0 点与介质层的距离为 d ，设介质层的横向线度远小于 d 。(1) 写出 $z=0$ 面上光波复振幅的表达式；(2) 设薄介质的折射率为 $n = n_0 - n_2(x^2 + y^2)$ ，讨论球面波通过该介质后的情况。



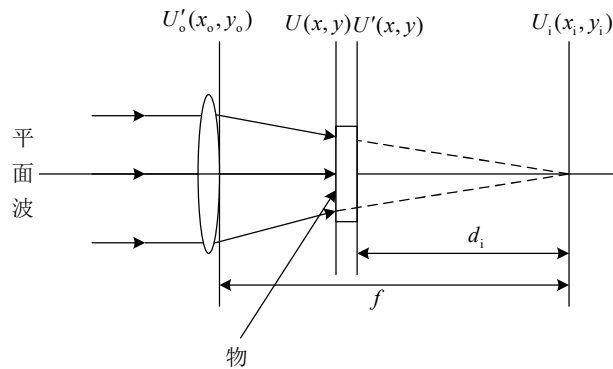
题 5.6 图

- 5.7 采用题图所示的光路对某一维物体作傅里叶分析。物所包含的最低和最高空间频率分别为 20 线/mm 和 200 线/mm。照明光的波长 λ 为 $0.6\mu\text{m}$ 。若希望谱面上最低频率成分与最高频率成分之间与最高频率之间间隔 50 线/mm，透镜的焦距应取多大？



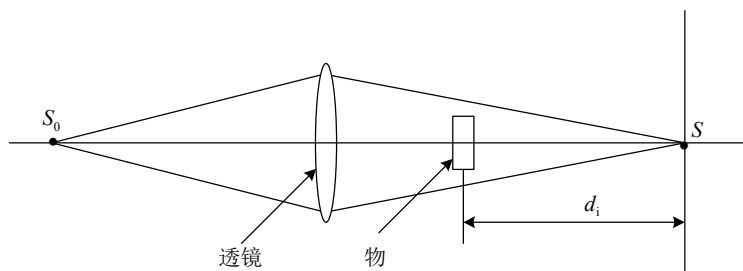
题 5.7 图

- 5.8 对如题图所示的变换光路，为了消除在物体频谱上附加的相位弯曲，可在紧靠输出平面之前放置一个透镜。问这个透镜的类型以及焦距如何选取？



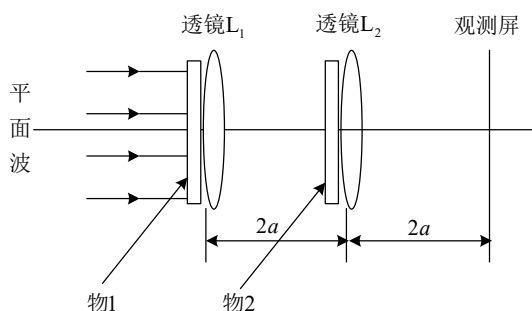
题 5.8 图

- 5.9 参看题图，单色点光源 S_0 通过一个会聚透镜成像在光轴上 S 位置。物体(透明片)位于透镜后方，相距 S' 的距离为 d_i ，波完全相同。求证物体的频谱出现在点光源的像平面上。



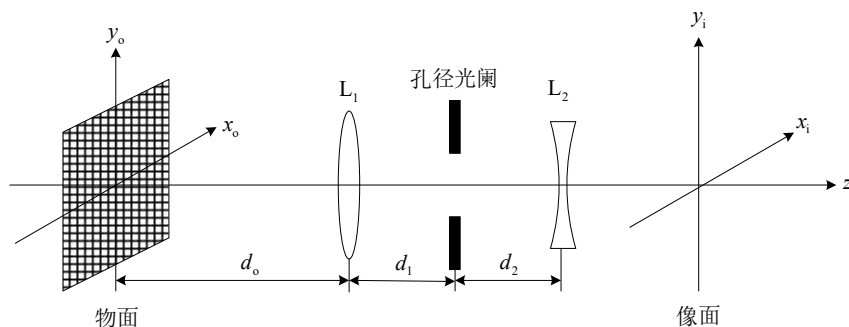
题 5.9 图

- 5.10 如题图所示，透明片 $t_1(x_{o1}, y_{o1})$ 和 $t_2(x_{o2}, y_{o2})$ 分别紧贴在焦距为 $f_1 = 2a, f_2 = a$ 的两个透镜之前。透镜 L_1, L_2 和观察屏三者间隔相等，都等于 $2a$ 。如果用单位振幅单色平面波垂直照明，求观察零上的复振幅分布。



题 5.10 图

- 5.11 一个被直径为 r_0 的圆形孔径限制的物函数 U_o ，把它放在直径为 D 的圆形会聚透镜的前焦面上，假定 $D > r_0$ ，测量透镜后焦面上的强度分布。(1) 求出所测强度准确代表物体功率谱的最大空间频率的表达式，当 $D = 6 \text{ cm}$ ， $r_0 = 2.5 \text{ cm}$ ，焦距 $f = 50 \text{ cm}$ 以及 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ 时，计算这个频率的值；(2) 尽管物体可以在更高的频率上有不为零的频率分量，但该系统在多大的频率以上测得的频谱为零？
- 5.12 将面积为 $10\text{mm} \times 10\text{mm}$ 的透明物体置于一傅里叶变换透镜的前焦面上作频谱分析。用波长 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ 的单色平面波垂直照明，要求在频谱面上测得的强度在频率 140 线/mm 以下能准确代表物体的功率谱。并要求频率为 140 线/mm 与 20 线/mm 在频谱面上的间隔 30mm，问该透镜的焦距和口径各为多少？
- 5.13 如下图所示的一双透镜非相干成像系统，由一正透镜和一负透镜构成，可用于如远处砖砌的墙远景成像。可变光阑(孔径光阑)调节到仍能在像中看到远处的物。设砖的最小周期为 8cm， $d_o = 1000\text{cm}$ ， $d_1 = 3\text{cm}$ ， $d_2 = 2\text{cm}$ ， $f_1 = 10\text{cm}$ ， $f_2 = -10\text{cm}$ ， $\lambda = 500\text{nm}$ ， $P(r) \approx \text{circ}(2r/D)$ ， D 为直径，透镜 L_1 的直径 4cm，透镜 L_2 的直径 2cm。求：(1) 像的位置和成像系统的放大率；(2) 忽略所有像差，能在像中观察到砖所允许的最小的 D ；(3) 等效的单透镜成像系统。

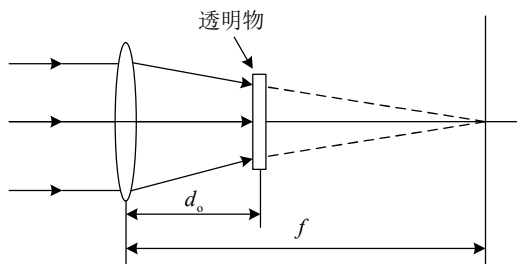


题 5.13 图

5.14 如题图所示，用 He-Ne 激光器为光源照明位于焦距为 80cm 的正透镜后透明物 $t(x_o)$ 。(1) 比较

$d_o = 8\text{cm}$ 和 $d_o = 16\text{cm}$ 时焦平面坐标所表示的空间频率的变化；(2) 若 $t(x_o) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi\xi_0 x_o)]$,

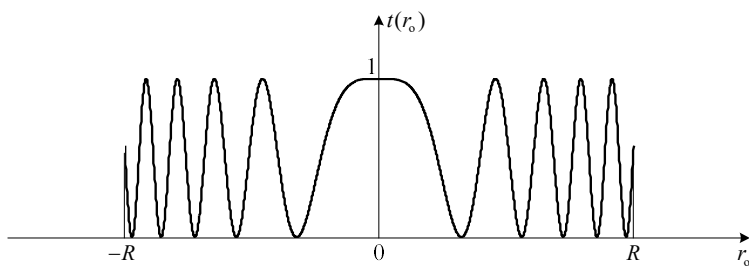
且位于 $d_o = 8\text{cm}$ 处，求频谱面上的频谱分布。



题 5.14 图

5.15 如题图所示的衍射屏透射率函数表达式为： $t(r_o) = \frac{1}{2}[1 + \cos(ar_o^2)]\text{circ}(r_o / R)$ 。(1) 这个屏的作用类

似于透镜，为什么？(2) 给出此屏的焦距表达式？(3) 这种屏作成多色物体成像的成像元件它会受到什么性质的限制？



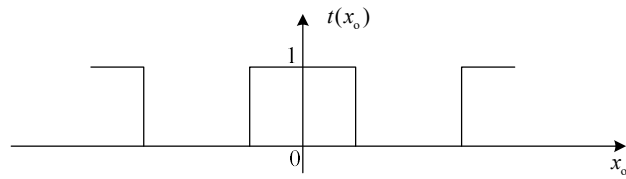
题 5.15 图

5.16 单位振幅的单色平面波垂直照射一个直径为 5cm、焦距为 80cm 的透镜。在透镜后面 20cm 的地方，以光轴为中心放置一个余弦型振幅光栅，其复振幅透射率为：

$$t(x_o, y_o) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\xi_0 x_o)\text{rect}(x_o / L)\text{rect}(y_o / L)$$

假定 $L = 1\text{cm}$, $\xi_0 = 100\text{线/mm}$ 。画出焦平面上沿 ξ_i 轴强度分布。标出各衍射分量之间距离和各个分量(第一个零点之间)的宽度的数值。

5.17 一物体的振幅透射率为如题图的所示，通过一光瞳为圆形的透镜成像。透镜的焦距为 10cm，方波基频是 1000 线/cm，物距 20cm，波长为 10^{-4} cm。问在以下两种情况下：(1) 物体用相干光照明时；(2) 物体非相干光照明时，透镜的直径最小应为多少，才会使像平面上出现强度的任何变化？



题 5.17 图