《高等数学》第六章习题解答

习题6.1

3. 设$E \subset \mathbb{R}^2$为任意一个集合, ∂E为E的边界点集合. 试证明$\bar{E} = E \cup \partial E$是一个闭集合.

证. 设$P \notin \bar{E}$. 则P必为E的一个外点. 因此存在正数r, 使得P的r邻域$U_r(P)$与E不相交. 进一步地, $U_r(P)$中的任意一点都为E的外点, 因为$U_r(P)$中任意一点都可以找到一个包含在$U_r(P)$中的邻域, 该邻域显然与E不相交. 于是$U_r(P) \cap \partial E = \emptyset$. 因此$P$为$\bar{E}$的外点. 于是$\bar{E}$包含它的所有边界点, 即$\bar{E}$为一个闭集合.

习题6.2

3. 讨论当$(x, y) \to (0, 0)$时, 下列函数是否有极限, 若有极限, 求出其值.

(1) $f(x, y) = (x+2y)\ln(x^2+y^2)$. $\frac{x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$是有界量, 且$\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) \to 0$. 所以$f$的极限为$0$.

(2) $f(x, y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$. $\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$的极限为$\frac{1}{2}$, 而$\frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$无极限. 所以$f$的极限不存在.

(3) $f(x, y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$. 类似于第(1)题, $\ln(x^2+y^2)^{x^2y^2} = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$的极限为$0$, 所以$f$的极限为$0$.

(4) $f(x, y) = \frac{P_n(x,y)}{\rho^{n-1}}$, 其中$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $P_n(x, y)$为x, y的n次齐次多项式. 因为$\frac{x^{n-1}}{\rho^{n-1}}$为有界量, 所以$\frac{x^n}{\rho^{n-1}}$的极限为$0$. 同理$\frac{x^m y^{n-m}}{\rho^{n-1}}$的极限都为$0$, $0 \le m \le n$. 所以f的极限为0.

习题6.3

2. 设$\bar{D}$是Oxy平面上的有界闭区域, $P_0(x_0, y_0)$是D的外点. 证明: 在$\bar{D}$内一定存在与P_0的距离最长的点, 也存在与P_0距离最短的点.

证. 设$f(x, y) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 则$f$在$\bar{D}$上连续. 因此$f$在$\bar{D}$内一点处达到最大值, 该点即为$\bar{D}$内与$P_0$的距离最长的点. 同理可证存在与$P_0$距离最短的点.

3. 设函数$f(x, y)$在区域D内连续, 又点$(x_i, y_i) \in D$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 证明: 在D内存在点(ξ, η), 使$f(\xi, \eta) = \frac{1}{n}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + \cdots + f(x_n, y_n)]$.

证. 选取一个位于D内, 包含点$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$的有界闭区域$E$. 则$f$在$E$上连续. 设$f$在$E$上的最大, 最小值分别为$M, m$. 则$m \le \frac{1}{n}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + \cdots + f(x_n, y_n)] \le M$. 根据介值定理, 存在$(\xi, \eta) \in E$, 使得$f(\xi, \eta) = \frac{1}{n}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + \cdots + f(x_n, y_n)]$.

习题6.4

3. 证明函数$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点$(0, 0)$处连续, 但$f'_x(0, 0)$不存在.

证. 当$(x,y)\to(0,0)$时, 因为$\frac{x}{|x|+|y|}$是有界量, 而x是无穷小量, 因此$\frac{x^2}{|x|+|y|}\to 0$. 同理$\frac{y^2}{|x|+|y|}\to 0$. 于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, $f(x,y)$在$(0,0)$点连续. 但函数$f(x,0)=|x|$在$x=0$处不可导, 因此$f'_x(0,0)$不存在.

4. 设$z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$. 证明: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

证. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\sqrt{x}(-\frac{y}{x^2})\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}$. 代入方程即可.

5. 求下列函数的二阶混合偏导数f''_{xy}.

(1) $f(x,y)=\ln(2x+3y)$. $f'_x=\frac{2}{2x+3y}$, $f''_{xy}=-\frac{6}{(2x+3y)^2}$.

(2) $f(x,y)=y\sin x+e^x$. $f'_y=\sin x$, $f''_{xy}=\cos x$.

(3) $f(x,y)=x+xy^2+4x^3-\ln(x^2+1)$. $f'_y=2xy$, $f''_{xy}=2y$.

(4) $f(x,y)=x\ln(xy)$. $f'_y=\frac{x}{y}$, $f''_{xy}=\frac{1}{y}$.

9. 已知函数$z(x,y)$满足$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}$ 以及$z(0,y)=2\sin y+y^2$. 试求$z(x,y)$的表达式.

解. $z=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\varphi(y)$. 代入初值条件, 得$\varphi(y)=2\sin y+y^2$. 所以$z=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+2\sin y+y^2$.

10. 求下列函数的全微分.

(1) $z=e^{\frac{y}{x}}$. $dz=e^{\frac{y}{x}}d\frac{y}{x}=e^{\frac{y}{x}}\frac{xdy-ydx}{x^2}$.

(2) $z=\frac{x+y}{x-y}$. $dz=\frac{(x-y)d(x+y)-(x+y)d(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{2xdy-2ydx}{(x-y)^2}$.

(3) $z=\arctan\frac{y}{x}+\arctan\frac{y}{x}$. $z=\frac{\pi}{2}$, $dz=0$.

(4) $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $dz=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

12. 设$z(x,y)$的全微分为$dz=(x-\frac{y}{x^2+y^2})dx+(y+\frac{x}{x^2+y^2})dy$, 求$z(x,y)$的表达式.

解. 凑微分得$dz=\frac{1}{2}dx^2+\frac{1}{2}dy^2+d\arctan\frac{y}{x}$. 因此$z(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\arctan\frac{y}{x}+C$.

14. 证明函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处连续, $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$存在, 但$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

证. $f(x,y)$为初等函数, 因此在$(0,0)$点处连续. 又$f(x,0)=f(0,y)=0$, 因此$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.
若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微, 则$f(x,y)$在$(0,0)$处的方向导数都为$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)$的线性组合, 因此都为0. 但$f(x,y)$沿向量$(1,1)$的方向导数为$\frac{d}{dt}f(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}})|_{t=0+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 得出矛盾.

16. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(1) 计算$f'_x(0,y)$ $(y\neq 0)$;
(2) 根据偏导数定义证明$f'_x(0,0)=0$;

(3) 在上述结果的基础上, 证明$f''_{xy}(0,0) = -1$;
(4) 重复上述步骤与$f'_y(x,0)$, 并证明$f''_{yx}(0,0) = 1$.

解. (1) $f'_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$, 因此$f'_x(0,y) = -y$ $(y \neq 0)$.
(2) $f(x,0) = 0$, 因此$f'_x(0,0) = 0$.
(3) 综上所述$f'_x(0,y) = -y$, 因此$f''_{xy}(0,0) = -1$.
(4) 同理可证$f'_y(x,0) = x$, 因此$f''_{yx}(0,0) = 1$.

17. 设$z = x\ln(xy)$, 求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解. $z = x\ln x + x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \ln x + \ln y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$.

习题6.5

2. 设$u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$, 求$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

解. 设$s = x+y+z$, $t = x^2+y^2+z^2$. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} + 2x\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + 2\frac{\partial f}{\partial t} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. 同理计算$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 所以$\Delta u = 3\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2(x+y+z)(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}) + 6\frac{\partial f}{\partial t} + 4(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

8. 若$f(x,y,z)$满足关系式$f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z)$, 其中$t$为任意实数, 则称$f(x,y,z)$为$n$次齐次函数. 证明: 任意一个可微的$n$次齐次函数均满足下列方程: $xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf$.

证. 将等式$f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z)$两边看做$x,y,z,t$的函数, 对$t$求偏导数, 得$xf'_x(tx,ty,tz) + yf'_y(tx,ty,tz) + zf'_z(tx,ty,tz) = nt^{n-1}f(x,y,z)$. 然后令$t = 1$, 得$xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf$.

10. 设$z = f(x,y)$在全平面有定义, 且有连续的一阶偏导数, 满足方程$xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = 0$. 证明: 存在一个函数$F(\theta)$, 使得$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(\theta)$, $r > 0$.

证. 做变量替换$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$, $\theta \in (-\infty, +\infty)$. 则$z'_r = f'_x \cos\theta + f'_y \sin\theta = \frac{1}{r}(xf'_x + yf'_y) = 0$. 由第9题结论, z可表为变量θ的函数. 即存在一个函数$F(\theta)$, 使得$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(\theta)$.

习题6.6

9. 证明函数$f(x,y) = \frac{y}{x^2}$在椭圆周$x^2 + 2y^2 = 1$ 上任一点处沿椭圆周法方向的方向导数等于0.

证. $f'_x = \frac{-2y}{x^3}$, $f'_y = \frac{1}{x^2}$. 由隐函数求导得$2x + 4yy' = 0$, 因此椭圆在点(x,y)处的法向量为$\mathbf{n} = (2x, 4y)$. 函数f沿$\mathbf{n}$的方向导数为$\frac{-2y}{x^3}\frac{2x}{|\mathbf{n}|} + \frac{1}{x^2}\frac{4y}{|\mathbf{n}|} = 0$.

习题6.7

1. 求函数$f(x,y) = xy - y$在$(1,1)$点的二阶泰勒多项式.

解. $f(1+\Delta x, 1+\Delta y) = (1+\Delta x)(1+\Delta y) - (1+\Delta y) = \Delta x + \Delta x \Delta y$. 因此$f$在$(1,1)$点的二阶泰勒多项式为$\Delta x + \Delta x \Delta y$.

2. 在点$(0,0)$的邻域内, 将下列函数按带皮亚诺型余项展开成泰勒公式(到二阶).

(1) $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$.

解. $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $x\to 0$. $\cos y=1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$, 故$\frac{1}{\cos y}=1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)$, $y\to 0$. 因此$f(x,y)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

(2) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解. $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$, $u\to 0$. 因此$f(x,y)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+o((x+y)^2)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解. $\sqrt{1-u}=1-\frac{1}{2}u+o(u)$, $u\to 0$. 因此$f(x,y)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

(4) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

解. $f(x,y)=(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)=(x^2+y^2)+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$.

3. 在点$(0,0)$的邻域内, 将函数$f(x,y)=\ln(1+x+y)$按拉格朗日型余项展开成泰勒公式(到一阶).

解. $f'_x=f'_y=\frac{1}{1+x+y}$, $f''_{xx}=f''_{yy}=f''_{xy}=-\frac{1}{(1+x+y)^2}$. 因此$f(x,y)=x+y-\frac{1}{2}\frac{x^2+2xy+y^2}{(1+\theta x+\theta y)^2}$, $0<\theta<1$.

5. 设D是单位圆, 即$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$, 又设函数$f(x,y)$在$D$内有连续的偏导数且满足: $xf'_x(x,y)+f'_y(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in D$. 证明: $f(x,y)$在D内是一常数.

证. 由点$(0,0)$及点(x,y)的拉格朗日中值定理, 得$f(x,y)=f(0,0)+xf'_x(\theta x,\theta y)+yf'_y(\theta x,\theta y)$, $0<\theta<1$. 由题设条件, $\theta xf'_x(\theta x,\theta y)+\theta yf'_y(\theta x,\theta y)=0$, 因此$f(x,y)=f(0,0)$, 即$f(x,y)$为一常数.

习题6.8

2. 设由方程$f(xy^2,x+y)=0$确定的隐函数为$y=y(x)$, 求$\frac{dy}{dx}$.

解. $f'_1\cdot(y^2+2xyy')+f'_2\cdot(1+y')=0$. 因此$y'=-\frac{y^2f'_1+f'_2}{2xyf'_1+f'_2}$.

3. 设$z+\cos xy=e^z$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解. $z'_x-y\sin xy=e^z z'_x$, 因此$z'_x=\frac{y\sin xy}{1-e^z}$, $z''_{xx}=\frac{(1-e^z)y^2\cos xy+e^z z'_x y\sin xy}{(1-e^z)^2}=\frac{(1-e^z)^2y^2\cos xy+e^z y^2\sin^2 xy}{(1-e^z)^3}$.

习题6.9

1. 求下列函数$z=z(x,y)$的极值.

(1) $z=x^2(x-1)^2+y^2$. $z'_x=2x(x-1)(2x-1)$, $z'_y=2y$. 得稳定点$(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(1,0)$. $z''_{xx}=12x^2-12x+2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=2$. 因此$(0,0),(1,0)$为极小值点, $(\frac{1}{2},0)$不是极值点.

4. 已知三角形的周长为$2p$, 问怎样的三角形绕自己的一边旋转一周所得的体积最大.

解. 设三角形三边长为x,y,z, $x+y+z=2p$. 则三角形面积为$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$. 三角形到长为$x$的边的高为$h=\frac{2S}{x}$, 因此绕长为$x$的边旋转所得的体积为$V(x,y,z)=\frac{1}{3}\pi h^2 x=\frac{4\pi p(p-x)(p-y)(p-z)}{3x}$. 求条件极值, 得稳定点$(p,p,0)$, $(p,0,p)$, $(\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4})$. 因此三角形三边长为$\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4}$时, 绕长为$\frac{p}{2}$的边旋转所得体积最大.

6. 求椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$与平面$x+y+z=0$的交线上的点到坐标原点的最大距离与最小距离.

解. 令$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1)+\mu(x+y+z)$. 解$F$的稳定点, 得$(x,y,z)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}})$. 因此最大距离为$\sqrt{2}$, 最小距离为1.

8. 当n个正数$x_1,\ldots,x_n$的和等于常数l时, 求它们的乘积的最大值. 并证明: n个正数$a_1,\ldots,a_n$的几何平均值小于算术平均值, 即$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

解. 求函数$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1\cdots x_n$在条件$x_1+\cdots+x_n=l$下的极值.
令$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=x_1\cdots x_n+\lambda(x_1+\cdots+x_n-l)$, $x_i\neq 0$, 解F的稳定点, 得$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{l}{n}$. 因此当$n$个正数全等时, 其乘积最大, 最大值为$(\frac{l}{n})^n$.
设$a_1+\cdots+a_n=l$, 由前一结论, $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\frac{l}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

9. 在椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上哪些点处, 其切线与坐标轴构成的三角形的面积最小.

解. 设$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$. 椭圆周的切向量为$(x',y')=(-a\sin\theta,b\cos\theta)$, 切线方程为$b\cos\theta(x-a\cos\theta)+a\sin\theta(y-b\sin\theta)=0$, 即$b\cos\theta x+a\sin\theta y=ab$. 因此与$x,y$轴的截距为$\frac{a}{\cos\theta},\frac{b}{\sin\theta}$, 三角形面积为$\frac{ab}{2|\sin\theta\cos\theta|}=\frac{ab}{|\sin 2\theta|}$. 因此$\theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$时, 即$|x|=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $|y|=\frac{b}{\sqrt{2}}$时, 三角形面积最小.

习题6.10

1. 在指定的点求出曲面的切平面.

(2) $z=x^2-y^2$在$(2,1,3)$点.

解. 令$\vec{r}(x,y)=(x,y,x^2-y^2)$. $\vec{r}'_x(2,1)=(1,0,4)$, $\vec{r}'_y(2,1)=(0,1,-2)$. 因此所求切平面法向量为$(4,-2,-1)$, 方程为$4(x-2)-2(y-1)-(z-3)=0$.

(3) $x=\operatorname{ch}\rho\cos\theta$, $y=\operatorname{ch}\rho\sin\theta$, $x=\rho$, 在$\rho=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$对应的点.

解. 令$\vec{r}(\rho,\theta)=(\operatorname{ch}\rho\cos\theta,\operatorname{ch}\rho\sin\theta,\rho)$. $\vec{r}(1,\frac{\pi}{2})=(0,\operatorname{ch}1,1)$,
$\vec{r}'_\rho(1,\frac{\pi}{2})=(\operatorname{sh}\rho\cos\theta,\operatorname{sh}\rho\sin\theta,1)|_{(1,\frac{\pi}{2})}=(0,\operatorname{sh}1,1)$,
$\vec{r}'_\theta(1,\frac{\pi}{2})=(-\operatorname{ch}\rho\sin\theta,\operatorname{ch}\rho\cos\theta,0)|_{(1,\frac{\pi}{2})}=(-\operatorname{ch}1,0,0)$.
因此所求切平面方程为$\begin{vmatrix} x & y-\operatorname{ch}1 & z-1\\ 0 & \operatorname{sh}1 & 1\\ -\operatorname{ch}1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$,
即$(y-\operatorname{ch}1)-\operatorname{sh}1(z-1)=0$.

(4) $e^z-2z+xy=3$, 在$(2,1,0)$点.

解. 函数$F(x,y,z)=e^z-2z+xy-3$在$(2,1,0)$点的梯度向量为$(y,x,e^z-2)|_{(2,1,0)}=(1,2,-1)$. 因此所求切平面方程为$(x-2)+2(y-1)-z=0$.

第六章总练习题

1. 若$f(\frac{y}{x})=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, 求$f(x)$.

解. 令$x=1$, 得$f(y)=\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}}$. 因此$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

3. 若已知当$x\neq 0$且$x+y\neq 0$时, $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$, 求$f(x,y)$.

解. 设$u=x+y, v=\frac{y}{x}$, 则$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$. 因此$f(u,v)=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$. 所以$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$, $(x\neq 0, y\neq -1)$.

6. 求下列函数的不连续点集合.

(1) $f(x,y)=[y]\operatorname{sgn}x$, 其中$[y]$表示$y$的整数部分.

解. (a) 当$x\neq 0$且$y\notin\mathbb{Z}$时, $f(x,y)$为局部常值函数, 显然连续.
(b) 当$0<y<1$时, $f(x,y)=0$, 显然连续.
(c) 当(x_0,y_0)位于其它点时, (x,y)沿直线$y-y_0=x-x_0$趋于(x_0,y_0)时函数f无极限, 因此$f(x,y)$在(x_0,y_0)不连续.
综上所述, f的不连续点的集合为$\{(x,y)\mid x\neq 0,\ y\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,y)\mid y\leq 0$或$y\geq 1\}$.

(2) $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x^2-y)$.

解. 当$y>x^2$或$y<x^2$时, $f(x,y)$为常数函数, 因此连续. 设$y_0=x_0^2$. 由于$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y>x^2}}f(x,y)=-1$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y<x^2}}f(x,y)=1$, 函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$不连续. 所以$f$的不连续点的集合是抛物线$y=x^2$.

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan(xy)}{xy}$, 其中$xy\neq 0$. 令$z(x,y)=xy$, 则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}z(x,y)=0$, 所以原式$=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\arctan z}{z}=1$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$, 其中$xy\neq 0$. 令$z=\sqrt{|xy|}$, 原式$=\lim\limits_{z\to 0}\frac{4-4\cos z}{z^2}=2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(2x^2-y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$. 当$(x,y)\to(0,0)$时, $2x^2-y^2\to 0$, 而$\sin\frac{1}{x^2+y^2}$是有界量. 所以所求极限为0.

12. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明: (1) 在$(0,0)$的邻域内, $f'_x(x,y)$与$f'_y(x,y)$存在, 但这两个偏导数在$(0,0)$处不连续; (2) $f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

证. (1) 计算得$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x[\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}], & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
因此$f'_x(x,y)$处处存在. 但当(x,y)沿x轴趋于$(0,0)$时, $f'_x(x,y)=2x[\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}]$没有极限, 因此$f'_x(x,y)$在$(0,0)$不连续. 对$f'_y(x,y)$同理可证.
(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0$, 其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.
因此$f(x,y)=o(\rho)$, $\rho\to 0$. 因此f在$(0,0)$可微.

16. 设$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 求雅可比行列式$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}$.

解. $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r.$

17. 设$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\varphi$, 求雅可比行列式$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}$.

解. $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$. 按第三行展开行列式, 得$\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\cos\varphi+\rho\sin\varphi\cdot\rho\sin^2\varphi=\rho^2\sin\varphi$.

21. 设函数$f(x,y)$在$(2,3)$处沿$\mathbf{i}+\mathbf{j}$方向的方向导数为$2\sqrt{2}$, 沿$-2\mathbf{j}$的方向导数为-3, 其中$\mathbf{i},\mathbf{j}$为单位坐标向量. 求$f(x,y)$在$(2,3)$处沿$2\mathbf{i}+\mathbf{j}$的方向导数.

解. 设$\operatorname{grad} f|_{(2,3)}=(a,b)$. 则$\frac{1}{|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}(1,1)\cdot(a,b)=2\sqrt{2}$, $\frac{1}{|-2\mathbf{j}|}(0,-2)\cdot(a,b)=-3$. 解得$(a,b)=(1,3)$. 因此沿$2\mathbf{i}+\mathbf{j}$的方向导数为$\frac{1}{|2\mathbf{i}+\mathbf{j}|}(2,1)\cdot(1,3)=\sqrt{5}$.

23. 设函数$z=f(x,y)$可微. 又已知$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2+y$, 且当$y=x$时, 有$f(x,x)=x^2$, 求$f(x,y)$的表达式.

解. 求不定积分, 得$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+xy+\varphi(y)$. 代入$f(x,x)=x^2$, 得$\frac{1}{3}x^3+x^2+\varphi(x)=x^2$, 因此$\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3$, $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3$.

27. 在图6.22所示的并联电路中, 总电阻R由下式确定: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$, 求$\frac{\partial R}{\partial R_1}$在$R_1=30, R_1=45, R_1=90$时的值.

解. 等式$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$两边求关于$R_1$的偏导数, 得$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_1}=-\frac{1}{R_1^2}$. 代入$R_1=30, R_1=45, R_1=90$, 得$R=15$, $\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{1}{4}$.

29. 设函数$z=z(x,y)$由方程$ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$所确定, 其中$F(u)$为可微函数, a,b,c为常数. 证明: $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

证. 方程两边求关于x,y的偏导数, 得$a+cz'_x=F'(x^2+y^2+z^2)(2x+2zz'_x)$, $b+cz'_y=F'(x^2+y^2+z^2)(2y+2zz'_y)$. 因此$\frac{a+cz'_x}{2x+2zz'_x}=\frac{b+cz'_y}{2y+2zz'_y}$. 整理, 得$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

31. 求函数$f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$在矩形域$0\le x\le 5, -3\le y\le 0$ 上的最大值与最小值.

解. $f'_x=2x+y-6$, $f'_y=x+2y$, 得f的稳定点$(4,-2)$. $f(4,-2)=-10$.
$f(0,y)=y^2+2$, 因此在矩形域的左边f的最值为$0, 11$.
$f(5,y)=y^2+5y-3$, 因此在矩形域的右边f的最值为$-9,-3$.
$f(x,-3)=x^2-9x+11$, 因此在矩形域的下边f的最值为$-\frac{37}{4}, 11$.
$f(x,0)=x^2-6x+2$, 因此在矩形域的上边f的最值为$-7, 2$.
因此函数的最大值为11, 最小值为-10.

33. 利用条件极值求椭圆周$5x^2+8xy+5y^2=9$的长, 短半轴之长.

解. 令$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2+8xy+5y^2-9)$. 解$F$的稳定点, 得$(x,y)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3,-3)$. 所以长半轴为3, 短半轴为1.