数学物理方法作业集

潘逸文*, 余钊焕†
中国广州中山大学物理学院

December 30, 2019

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 QQ 群文件，或 **https://panyw5.github.io/courses/mmp.html** 以及 **http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html** 找到。

*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn
†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{e}, \qquad (b)\ 2+\sqrt{2}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \qquad (d)\ \sqrt{3}+i \text{ 的所有 7 次方根} \tag{1.1}$$

2. 定义点集 $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0,R)\}$, 其中 $R>0$, $N=1,2,\ldots \in \mathbb{N}_{>0}$。讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集，是否真子集，写明推理。

3. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$，其中 $R>0$。求解最大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

4. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|+|z+1| < R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. (若上周没做这道题) 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|+|z+1| < R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

1. 用代数式 (即 $x+iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a,b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a>0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

2. 设 $u(x,y)=e^x \sin y$, $v(x,y)=-e^x \cos y$，并考虑复变函数 $w=u(x,y)+iv(x,y)$。验证 w 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=e^x x\cos y - e^x y \sin y$，求其虚部，并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1)=\int_{C_1} \bar{z}dz$ 和 $I(C_2)=\int_{C_2} \bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R>0$，逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R>0$，逆时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz\ . \tag{3.1}$$

3. 设复变函数 f 在单连通区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其单连通子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z,\bar{z}) d\bar{z}dz\ , \tag{3.2}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz \ . \tag{4.1}$$

1. 计算围道积分，其中 $n \in \mathbb{N}$，$\lambda \in \mathbb{C}$，

$$\oint_C \left(z + \frac{\lambda}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1 \ \}. \tag{4.2}$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z} \ , \qquad C = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1 \ \} \ . \tag{4.3}$$

5 第五周 (10 月 8 日交；作为一次考察)

1. 设函数 $f(z)$ 在 $\overline{N(0,R)}$ 上解析。计算积分

$$\oint_C f(z) \bar{z}^{n+1} dz, \qquad C = \partial N(0,R) \ . \tag{5.1}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$，$R > 0$。

2. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k = (-1)^{k^2}$, $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$。分情况 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 讨论级数是否收敛，是否绝对收敛，给出简要说明。

3. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n \ , \qquad (2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n \ . \tag{5.2}$$

4. 设 $f(z)$ 是 $N(0,1)$ 内的解析函数。计算 $(1-z)^{-1} f(z)$ 以原点 $a = 0$ 为中心的泰勒展开（给出泰勒级数通项，用 f 的各阶导数表达)。

5. 考虑 3 个互异复数 $a_i, i = 1, 2, 3$。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} dz, \tag{5.3}$$

其中 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$。化简最后结果。

6 第七周 (10 月 15 日交)

$$u(x,y) \equiv \frac{x^2-y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} \ . \tag{6.1}$$

设 $u(x,y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z=x+iy)$ 的实部。

(1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$，并写出函数 $f(z)$ 关于 $z=x+iy$ 的表达式；

(2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类；

(3) 分别以 $z=0$, $z=1$, $z=-1$ 为展开中心，作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ . \tag{6.2}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域；

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$ 然后比较)。

7 第八周 (10 月 22 日交)

1. 计算下面函数在 $z=0$ 的留数

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3} \ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^3} \ . \tag{7.1}$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a)\ \frac{1}{\sinh \pi z}, \quad z = ni,\ n\in\mathbb{Z} \ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^2-1}, \quad z=1 \ . \tag{7.2}$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \oint_{|z|=\rho>1} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz \ , \qquad (b)\ \oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n}}dz \ , n=1,2,\ldots \ . \tag{7.3}$$

4. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ a>0 \ , \qquad (b)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx \ , \quad m\in\mathbb{Z}_+, a>0 \tag{7.4}$$

8 第九周 (11 月 5 日交；作为期中考察)

1. 列出以下函数的 (除无穷远点外) 的所有孤立奇点及其类型。

$$(a)\ \frac{z}{(\sin z)^3}, \qquad (b)\ \frac{1}{z^2+a^2},\ a\in\mathbb{R}, \qquad (c)\ \cosh\frac{1}{z}\ . \tag{8.1}$$

2. 考虑互异有限复数 $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m$, 且 $m>n$，定义函数

$$f(z)\equiv\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}{(z-b_1)\ldots(z-b_m)}\ . \tag{8.2}$$

(a) 记 D 为 $f(z)$ 的解析区。则 b_j 和 a_i 为 D 的什么点 (内点、聚点、边界点)? D 是单连通还是复连通?

(b) 说明 a_i 和 b_j 分别是 $f(z)$ 的什么特殊点，指出分类。

(c) 求 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$, 指出 ∞ 的奇点分类，并计算 $\operatorname{Res}_{z\to\infty}f(z)$。

3. 考虑双边幂级数

$$\Theta(\zeta;q)\equiv\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{\frac{n^2}{2}}\zeta^n\ , \qquad |q|<1. \tag{8.3}$$

(a) 求该 ζ-双边级数的收敛环。

(b) 求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\Theta(\zeta;q)}{\zeta^n}d\zeta\ , \qquad n\in\mathbb{Z}\ . \tag{8.4}$$

(c) 定义 $\vartheta(z|\tau)\equiv\Theta(e^{2\pi iz};e^{2\pi i\tau})$, $\operatorname{Im}\tau>0$。证明 $\vartheta(x|it)$ 是某热扩散方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=0 \tag{8.5}$$

的一个解，并确定参数 a^2 的值。

4. 深受广大人民群众喜爱的 Γ 函数是自然数的阶乘函数的一种解析延拓。当 $\operatorname{Re}z>0$，定义

$$\Gamma(z)\equiv\int_0^{+\infty}x^{z-1}e^{-x}dx\ . \tag{8.6}$$

(a) 证明当 $\operatorname{Re}z>0$，有 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$。

(b) 求 $\Gamma(1)$，并推出 $\Gamma(n+1)=n!$。

(c) $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到几乎整个复平面。证明 $0,-1,-2,\ldots$ 等非正整数为延拓后 $\Gamma(z)$ 的单极点。

(d) 求 $\operatorname{Res}_{z\to-n}\Gamma(z)$。

5. 弦在阻尼介质中横向振动，t 时刻 x 处单位长度所受阻力 (与振动方向相反) 为

$$F(x,t) = -R\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{8.7}$$

其中 R 称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

9 第十一周（11 月 12 日交）

1. 长为 l 的均匀导热细杆，热导率为 k，侧面绝热。$x=0$ 端的温度保持为 0 度，$x=l$ 端有恒定热流进入，强度为 q。已知杆的初始温度分布为 $x(l-x)$，写出杆内任意时刻温度分布的定解问题。

2. 长为 l 的弹性细杆，上端固定在电梯天花板，杆身竖直，下端自由。杆随电梯匀速下降，速度为 v_0，杆上各点处于平衡位置。$t=0$ 时电梯突然停止，求解 $t>0$ 时杆的纵振动。不考虑重力作用。

(1) 写出关于位移 $u(x,t)$ 的定解问题。

(2) 利用分离变量法，寻找 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 形式的特解，推出 $T(t)$ 满足的常微分方程和 $X(x)$ 满足的本征值问题。

(3) 求解关于 $X(x)$ 的本征值问题，得出相应的本征值和本征函数。

(4) 求解 $T(t)$，写出一般解 $u(x,t)$。

(5) 根据初始条件求出一般解的系数，写下定解问题的解。

10 第十二周（11 月 19 日交）

1. 矩形薄板，板面绝热，$x=0,l$ 两边保持恒定温度零度，$y=0,d$ 两边绝热，初始温度分布为 $f(x,y)=u_0x/l$，其中 u_0 为常数，求以后的温度分布，并讨论 $t\to\infty$ 的极限。

2. 长为 l 的柱形管，$x=0$ 端开放，$x=l$ 端封闭。管外空气中含有某种杂质气体，浓度为 $u_0e^{-\alpha^2 t}$，其中 $\alpha>0$，$\alpha\neq\mu_n a$，而 $\mu_n=(2n-1)\pi/2l$，$n\in\mathbb{N}^+$。杂质向管内扩散。设初始时管内没有该种杂质，求以后时刻该杂质在管内的浓度分布 $u(x,t)$。

11 第十三周（11 月 26 日交）

1. 半圆形薄板，半径为 a，用坐标描述即 $\rho\le a,\ 0\le\phi\le\pi$。板面绝热，直边保持温度为 0 度，弧边保持温度为常数 u_0，求稳定状态下板面上的温度分布。

2. 计算下列函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$。

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{l}, & |x|<l,\\ 0, & |x|>l.\end{cases}$　　(2) $f(x)=e^{-a|x|}$，其中 $a>0$。

12　第十四周（12 月 3 日交）

1. 用 Fourier 变换法求解如下定解问题，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<+\infty,\quad y>0), \tag{12.1}$$

$$u\big|_{y=0}=\varphi(x), \qquad u\big|_{y=+\infty}=0, \tag{12.2}$$

$$u\big|_{x=\pm\infty}=0. \tag{12.3}$$

并在下列两种情形下计算解 $u(x,y)$ 的具体形式。

(1) $\varphi(x)=\delta(x)$.　　(2) $\varphi(x)=\theta(x)$，其中阶跃函数 $\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^\infty e^{-bx}\cos ax\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}, \quad b>0. \tag{12.4}$$

2. 证明 $\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{|a|}$，其中 $a\neq 0$。

3. 计算函数 $f(x)=\cos ax$ 的 Fourier 变换 $F(k)$。

13　第十五周（12 月 10 日交）

1. 试在平面极坐标系中对二维齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=0 \tag{13.1}$$

分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

2. 在量子力学中，氢原子定态问题的 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 u-\frac{e^2}{r}u=Eu, \tag{13.2}$$

其中 $u(r,\theta,\phi)$ 是波函数，μ 是电子质量，e 是单位电荷量，E 是能量，$\hbar$ 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对该方程分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

14　第十六周（12 月 17 日交）

1. 根据递推关系

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2k},\quad k\in\mathbb{N}^+,\tag{14.1}$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k}=\frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r},\quad k\in\mathbb{N}^+.\tag{14.2}$$

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 Hermite 方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0.\tag{14.3}$$

(1) 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式解的最高次幂项具有 $(2x)^n$ 形式，这些多项式称为 Hermite 多项式，记作 $\mathrm{H}_n(x)$。求出 Hermite 多项式的显式。

(3) 写出前 6 个 Hermite 多项式的具体形式。

15　第十七周（12 月 24 日交）

1. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 Laguerre 方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0.\tag{15.1}$$

(1) 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，这些多项式称为 Laguerre 多项式，记作 $\mathrm{L}_n(x)$。求出 Laguerre 多项式的显式。

(3) 写出前 4 个 Laguerre 多项式的具体形式。

2. 长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，左端保持恒定温度零度，右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量，即右端边界条件为

$$\left.\left(u+h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0,\quad h>0.\tag{15.2}$$

已知 $u|_{t=0}=\varphi(x)$，求杆上温度的变化规律。

16　第十八周（12 月 31 日交；作为一次考查）

1. 两个同心的球面，内球面半径为 r_1，具有电势 u_0，外球面半径为 r_2，具有电势 $u_1\cos^2\theta$，其中 u_0 和 u_1 均为常数，区域 $r_1<r<r_2$ 之中无电荷，求该区域中的电势分布。

2. 已知半径为 a 的球面上的电势为 $u|_{r=a}=2\sin^2\theta\,(\sin 2\phi+1)$，球内外均没有电荷，将电势零点取在无穷远处，求空间各处的电势分布。

17　第十九周（不用交）

1. 考虑 Poisson 方程第三边值问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}),\quad \mathbf{r}\in D, \tag{17.1}$$

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\mathbf{r}\in S} = \varphi(\mathbf{r}),\quad \alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0. \tag{17.2}$$

其中 S 是区域 D 的边界面。定义相应的 Green 函数，并给出解的积分公式。

2. 考虑三维半无界空间的定解问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad 0<z<+\infty, \tag{17.3}$$

$$u(\mathbf{r})|_{z=0} = \varphi(x,y). \tag{17.4}$$

(1) 写出相应的 Green 函数的定解问题。

(2) 求出这个 Green 函数。

(3) 求出 $u(\mathbf{r})$ 的积分公式，即用 Green 函数和定解条件表示出 $u(\mathbf{r})$。