东校区 2007 学年度第二学期 07 级《高等数学一》期中考试题

学院/专业______________学号____________姓名__________评分______

评卷教师签名：____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

注：本考卷共 4 页，9 大题。

一、讨论函数 $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 在（0，0）的全面极限（重极限）与累次极限。

$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to0}1=1$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}0=0$

考虑 (x,y) 沿 $y=mx\to(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^2}{1+m^2}=\dfrac{m^2}{1+m^2}$ 随 m 变化，重极限不存在

二、函数 $z=\arctan(xy)$, 其中 $y=e^x$，求 $\dfrac{dz}{dx}$。

$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x+xe^x}{1+x^2y^2}$ 或 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x+xe^x}{1+x^2e^{2x}}$

三、 求 $u=xyz$ 在点 $P_0(5,1,2)$ 处沿与各坐标轴正向成等角的方向的方向导数。

方向余弦：$(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$

$u_x(P_0)=y\cdot z=2$

$u_y(P_0)=x\cdot z=10$

$u_z(P_0)=x\cdot y=5$

$\dfrac{2}{\sqrt3}+\dfrac{10}{\sqrt3}+\dfrac{5}{\sqrt3}=\dfrac{17}{\sqrt3}$

四、求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$的一个切平面，使它平行于$x+4y+6z=0$。

$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21=0$

(1) $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$， $\frac{\partial F}{\partial y}=4y$， $\frac{\partial F}{\partial z}=6z$

过(x_0,y_0,z_0)的切平面方程： $2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$

$2x_0x+4y_0y+6z_0z=2x_0^2+4y_0^2+6z_0^2$

$x_0=\frac{1}{2}k$，$y_0=k$，$z_0=k$

(x_0,y_0,z_0)代入 F： $\frac{k^2}{4}+2k^2+3k^2-21=0$，$\frac{21}{4}k^2=21$，$k=2$ $\Rightarrow (x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$

$\cancel{2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0}$

$2x+8y+12z=2+16+24=42$

$x+4y+6z=21$

五、 证明：表面积一定，设为S，而体积最大的长方体是正立方体。

设 $a.b.c.$

$2ab+2bc+2ac=S$

$\max(abc)$

$L=abc+\lambda(2ab+2bc+2ac-S)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial a}=bc+2\lambda(b+c)=0\\ \frac{\partial L}{\partial b}=ac+2\lambda(a+c)=0\\ \frac{\partial L}{\partial c}=ab+2\lambda(a+b)=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=2ab+2bc+2ac-S=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}abc+\lambda(2ab+2ac)=0\\ abc+\lambda(2ab+2bc)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2abc+\lambda S+2\lambda ab=0\\ \left.\begin{array}{l}abc+\lambda(2ab+2bc)=0\\ abc+\lambda(2ac+2bc)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2abc+\lambda S+2\lambda bc=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=c$$

类似方法得 $b=c$ $\Rightarrow$ 体积最大的是正方体

六、求 $I=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$.

$\pi\le r\le 2\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}(-\cos r+r\sin r)dr$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\,(-r\cos r)\Big|_\pi^{2\pi}=2\pi\cdot(-2\pi-\pi)=-6\pi^2$

七、求 $I=\iiint\limits_V z^2dxdydz$，其中 V 是由 $x^2+y^2+z^2\le r^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 2rz$ 围成的体积。

用柱坐标：投影：$\theta\in[0,2\pi]$，$s\in[0,\frac{\sqrt3}{2}r]$，$z\in[r-\sqrt{r^2-s^2},\sqrt{r^2-s^2}]$

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}r}ds\int_{r-\sqrt{r^2-s^2}}^{\sqrt{r^2-s^2}} sz^2dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}r}\left(s\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_{r-\sqrt{r^2-s^2}}^{\sqrt{r^2-s^2}}\right)ds$ 不易计算.

用球坐标：$\begin{cases}x=s\sin\varphi\cos\theta\\ y=s\sin\varphi\sin\theta\\ z=s\cos\varphi\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$，$s\in[0,\frac{\sqrt3}{2}r]$

分两块计算：$z\ge\frac{r}{2}$：$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^r s^2\cos^2\varphi\cdot s^2\sin\varphi\,ds=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^r s^4ds$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\cdot\frac{r^5}{5}=2\pi\cdot\frac{r^2}{5}\cdot\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=2\pi\cdot\frac{r^2}{5}\cdot\frac{7}{24}=\frac{7\pi r^2}{60}$

$z\le\frac{r}{2}$：$\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}s^2\cos^2\varphi\cdot s^2\sin\varphi\,ds=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}s^4ds$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot\frac{32r^5\cos^5\varphi}{5}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\frac{32}{5}r^5\cdot\left(-\frac{\cos^8\varphi}{8}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=2\pi\cdot\frac{32}{5}r^5\cdot\frac{1}{2^{11}}$

$=\frac{\pi r^2}{160}$

$I=\frac{7}{60}\pi r^2+\frac{\pi r^2}{160}=\frac{59}{480}\pi r^2$

八. 求解下列微分方程

（1）$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$，

$u=\frac{y}{x}$，$h(u)=e^u+u$

$u'=\frac{h(u)-u}{x}=\frac{e^u}{x}$. $e^{-u}du=\frac{1}{x}dx$，$-e^{-u}=\ln|x|+C$

$e^{-u}+\ln|x|+C=0\Rightarrow e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|+C=0$

（2）$ydx - xdy = (x^2 + y^2)dx$。

$$\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = dx$$

$$d(\arctan\frac{x}{y}) = dx$$

$$\arctan\frac{x}{y} = x + C$$

九、对于微分方程 $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$（9.1），

（1）求方程（9.1）对应的齐次方程的通解。

（2）求出方程（9.1）的通解。

(1) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

令 $t = \ln x$．$x = e^t$．$y_x'' = \frac{1}{x^2}(y_t'' - y_t')$．$y_x' = \frac{1}{x}y_t'$

$y_t'' - 2y_t' + 2y = 0$．$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$．$\lambda = 1 \pm i$．

$y = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t = C_1 x \cos(\ln x) + C_2 x \sin(\ln x)$

(2) $y_t'' - 2y_t' + 2y = \cancel{t\ln t}\ t e^t$　　$P_n(x)e^{\alpha t}$．$\alpha = 1$ 不是特征根．

特解形如 $y = (at+b)e^t$

$y_t' = ae^t + (at+b)e^t = (a+b+at)e^t$

$y_t'' = ae^t + (a+b+at)e^t = (2a+b+at)e^t$

代入：$e^t(2a+b+at-2a-2b-2at+2at+2b) = e^t(b+at) = e^t \cdot t$

$b=0$．$a=1$．

特解：$y = te^t = x\ln x$

通解：$y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x + \ln x)$