# 第十二讲

**上次课：**

- 介质球/柱在均匀电场中的行为

  *（1）被外场极化，均匀外场只包含$l=1$阶项*

  *（2）极化电荷在球外的贡献为偶极子*

  *（3）在球内的贡献为均匀电场 – 退极场 （depolarization field）*

- 多极矩展开

  $$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots$$

---

因此，电势可以展开为：

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots$$

$$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0},\qquad \mathrm{Q}=\int\rho(\vec{r}\,')d\tau' \tag{4.5.4}$$

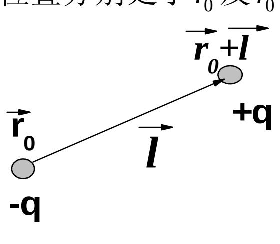
$$\varphi_1=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r},\qquad \vec{p}=\int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'d\tau' \tag{4.5.5}$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\vec{r}\,'d\tau':\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\vec{\vec{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r},\qquad \vec{\vec{D}}=3\int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\vec{r}\,'d\tau' \tag{4.5.6}$$

各项的物理意义如下：

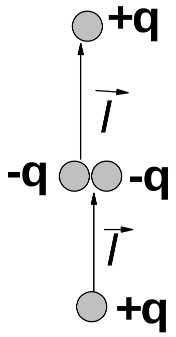
第一项是一个点电荷的势，相当于$V$内电荷都集中在坐标原点时在$P$点所产生的势；第二项是偶极子的势，$\varphi_1=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，体系相应的偶极矩为$\vec{p}=\int\rho\vec{r}'d\tau'$。为便于理解，考虑由一正一负两个点电荷组成体系，电荷位置分别处于$\vec{r}_0$及$\vec{r}_0+\vec{l}$处，经过简单计算可得

$$Q=0,\qquad \vec{p}=q\vec{l} \tag{4.5.7}$$




此即我们熟悉的电偶极距。（4.5.5）是电偶极矩在一般情况下的定义，相当于（4.5.7）式的推广。

第三项称为体系的四极矩的势，$\boxed{\vec{D}=3\int\rho\vec{r}'\vec{r}'d\tau'}$ 为体系的四极矩。就像偶极矩可以看做两个大小相等负号相反的电荷（单极矩）靠近组成的体系一样，四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统，最简单的情况如下图所示。此时，容易证明，$\vec{D}$ 中唯一不为 0 的分量是




$$D_{zz}=6l^2q$$

一般的电荷分布情况下，电四极矩的定义是（4.5.6）式。$\vec{D}$ 是一个并矢，或者说是个 3 x 3 矩阵，共有九个分量，由于它是对称的，所以只有六个独立分量。$\vec{D}$ 中还有一个隐含的不独立分量，注意到在 $\vec{r}\neq 0$ 处总有 $\nabla^2\dfrac{1}{r}=0$（空间无电荷分布），亦即：

$$\nabla^2\frac{1}{r}=\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij}=\vec{I}:\nabla\nabla\frac{1}{r}=0 \qquad (4.5.8)$$

上式显示对任意一个常数 C，均有

$$C\vec{I}:\nabla\nabla\frac{1}{r}\equiv 0 \qquad (4.5.9)$$

若选择此常数正比于 $\vec{D}$ 矩阵的迹，

$$C\propto \mathrm{Tr}\{\vec{D}\}/3=\left(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}\right)/3 \qquad (4.5.10)$$

根据（4.5.6）和(4.5.9)式，我们发现 $\varphi_2$ 可改写为

$$\begin{aligned}\varphi_2&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left(\vec{D}-\frac{Tr\{\vec{D}\}}{3}\vec{I}\right):\nabla\nabla\frac{1}{r}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\tilde{\vec{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}\end{aligned} \qquad (4.5.11)$$

其中

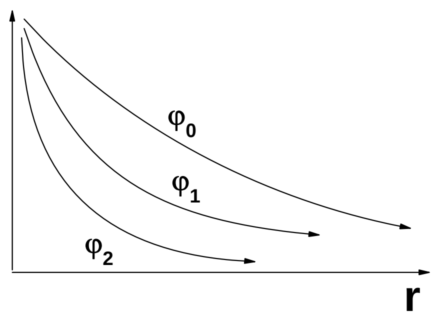
$$\boxed{\tilde{\vec{D}}=\int\left(3\vec{r}'\vec{r}'-\vec{r}'^2\vec{I}\right)\rho d\tau'} \qquad (4.5.12)$$

$\tilde{\vec{D}}$ 称为约化四极矩，显然它是对称的无迹张量，即

$$\tilde{D}_{ij}=D_{ji},\ \tilde{D}_{11}+\tilde{D}_{22}+\tilde{D}_{33}=0 \qquad (4.5.13)$$

只有 5 个独立分量。

*根据（4.5.4-6）可以看出，随着多极矩级数的增加，其对远处的势的贡献更快地减小* $\varphi_0>>\varphi_1>>\varphi_2$ *。换言之，*



*随着距离的推进，我们逐渐感知到电荷体的电荷、偶极子、*
*四极子、…的贡献。*

************************ 以下为选读内容

*直角坐标系中的多极距表达式比较容易被人理解，但科研中更常用的是球坐标系中的多极距展开。在球坐标下对* $\varphi(\vec r)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\dfrac{\rho(\vec r\,')d\tau'}{R}$ 作 Tayler *展开。根据恒等式*

$\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}=\sum\limits_{l,m}\dfrac{4\pi}{(2l+1)}\dfrac{r'^{l}}{r^{(l+1)}}Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi),\quad r>r'$，*电势为*

$$\varphi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}\qquad(4.5.14)$$

$q_{lm}=\int r'^{l}\,Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')\rho(\vec r\,')d\tau'$ *称为多极矩，它实质上是笛卡儿坐标系中的多极矩在球坐标系中的表示。非常容易理解* $l=0,1,2,\ldots$ *分别对应于点电荷、偶极距、电四极距、… 的贡献，而他们分别具有* $2l+1$ *个独立分量（不同的* m *值），而这些矩所对应的“波函数---*$\varphi$*”类似原子物理中* $s,p,d,f\ldots$ *轨道电子的波函数。。其实，我们可以这样来进一步理解多级矩。在无源区 Laplace 的通解（假设* $r\to\infty$ *时收敛）为*

$$\varphi(\vec r)=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^{m}(\theta,\phi)=\sum_l\frac{\tilde B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\qquad(4.5.15)$$

*其中第二个表达式为轴对称条件下的形式。对比（4.5.14）和（4.5.14），我们理解多极距展开不过是把无源区势函数展开成本征函数的形式，而展开系数由外界条件（进一步由源区的电荷分布）唯一确定！*


$$\varphi(\vec r)=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^{m}(\theta,\phi)=\sum_l\frac{\tilde B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

*思考题:*

*比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同 l 子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以 l=1 为例）。*

********************************

[例] 利用多极距展开法计算一个长度为 $L$ 的带电棒（线电荷密度为 $\lambda$）的电势（展开到电四极距）

解：设棒的中心在坐标原点，则

$$Q = L\lambda$$

$$\vec{p} = \int \lambda z dz = 0$$

$$D_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} 3\lambda z^2 dz = \frac{\lambda L^3}{4}$$


因此，电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{1}{6}D_{zz}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda L}{r} + \frac{\lambda L^3}{24}\frac{(3z^2 - r^2)}{r^5}\right] + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\lambda\left(\frac{L}{r}\right) + \frac{\lambda}{24}\left(\frac{L}{r}\right)^3(3\cos^2\theta - 1)\right] + \ldots$$

你也可以选择直接积分求出电势，然后按照(**L/r**)的幂次展开，结果应当一致。***这里我们可以清晰地看出多极矩展开其实是将电势作幂次展开，展开的特征小量是（尺度/距离）***。

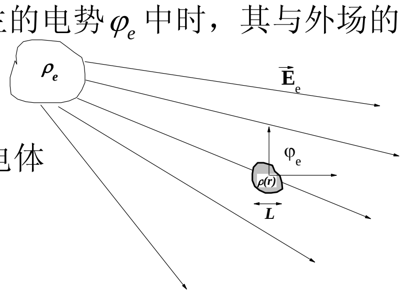
*Tips:*

（1） *从物理上讲，电偶极距考量的是体系是否破缺镜面反射对称性（x 与-x，y 与-y，z 与-z）；电四极距考量的是体系的更细节的东西：x, y, z 之间的对称性否被破坏 – 若破坏，则必有电四极距出现。*

（2） *函数形式* $(3\cos^2\theta - 1)$ *似曾相识，事实上它就是* $P_2 = (3x^2 - 1)/2$ *，也可以认为就是 l=2, m=0 的波函数* $Y_{2,0}$ *（这里有轴对称）。*

## § 4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论一块电荷集中在小区域内体系的多极矩，不仅可以容易地得到其在远处产生的电场，还可以容易地计算出一个任意的带电体系与外场的相互作用。尽管这两类问题看上去很不相同，但使用的方法非常类似。上一章中我们知道当一个点电荷在放置在远处的带电体（电荷密度 $\rho_e$）产生的电势 $\varphi_e$ 中时，其与外场的相互作用能为 $q\varphi_e(\vec{r})$。现考虑处于 $\varphi_e$ 中的连续带电体（电荷密度为 $\rho$，处在坐标原点附近），则带电体



与外场的相互作用能为

$$U_i=\int\rho\left(\vec{r}\right)\varphi_e(\vec{r})d\tau \qquad (4.6.1)$$

*应当注意我们得到这个结论的前提是体系与源相距甚远，以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。*因为$V$很小，所以可将$\varphi_e$在参考点附近（即原点）作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{r})=\varphi_e(0)+\vec{r}\cdot\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\frac{1}{2!}\vec{r}\vec{r}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\cdots \qquad (4.6.2)$$

代入(4.6.1)式得

$$U_i=U_i^{(0)}+U_i^{(1)}+U_i^{(2)}+\cdots$$

其中

$$U_i^{(0)}=Q\varphi_e(0) \qquad (4.6.3)$$

$$U_i^{(1)}=\vec{p}\cdot\nabla\varphi_e\big|_0=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e\left(\vec{r}=0\right) \qquad (4.6.4)$$

$$U_i^{(2)}=\frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \qquad (4.6.5)$$

因为$\left(\nabla^2\varphi_e\right)_0=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{e0}$，而作为外源的$\rho_{e0}$一般分布在离$V$很远处，故在$V$区域内$\rho_e=0$，因此有$C\bar{\bar{I}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0=C\nabla^2\varphi_e\big|_0=0$。再一次，若我们选择常数 $C$ 满足$C\propto \mathrm{Tr}\{\vec{D}\}/3$，则有

$$U_i^{(2)}=\frac{1}{6}\bar{\bar{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0=\frac{1}{6}\left[\vec{D}-\frac{1}{3}Tr\{\vec{D}\}\bar{I}\right]:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0=\frac{1}{6}\ddot{\bar{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0=-\frac{1}{6}\ddot{\bar{D}}:\nabla\vec{E} \qquad (4.6.6)$$

$U_i^{(0)},U_i^{(1)}$和$U_i^{(2)}$分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。

*我们发现，电荷感知到外场的积分效应，电偶极子感知到电场，而电四极子感受到电场的微分效应 --- 因此，多极矩随着级数的增加，愈加能感知到外场细微的变化，因为其本身就是结构的细微不对称给出的。*

下面，我们将根据电偶极矩与外场的相互作用能$U_i^{(1)}=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$，来求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩。

## （A）电偶极矩在外场中受的力

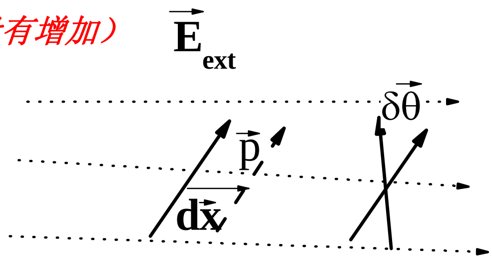
设电偶极子在电场 $\vec{E}_e$ 中受到电场的作用力 $\vec{F}_e$，方向大小未知。假设施加外力 $\vec{F}'=-\vec{F}_e$，则偶极子达到平衡，静止不动。现在在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力 $\delta\vec{F}'\to 0$，使得偶极子***无限缓慢地***平移 $\delta\vec{r}$。将偶极子与外场看成一个体系，则在这个过程中，外力对体系（偶极子+外场）做的功为

$$\delta W'=\left(\vec{F}'+\delta\vec{F}'\right)\cdot\delta\vec{r}=\vec{F}'\cdot\delta\vec{r}=-\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r} \qquad (4.6.7)$$

整个体系（电偶极子+外场）的能量增加为

$$\delta U=-\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}+\delta\vec{r})+\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})=-\delta\vec{r}\cdot\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \qquad (4.6.8)$$

***（注：因为偶极子运动无限缓慢，故动能没有增加）***




根据能量守恒上面 2 式应相等，因此电场对偶极子的作用力为

$$\vec{F}_e=\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}+\vec{p}\times(\nabla\times\vec{E})$$

利用静电场 $\nabla\times\vec{E}=0$，得

$$\boxed{\vec{F}_e=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}} \qquad (4.6.9)$$

一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有电场非均匀时才受到电场的作用力！

## （B）电偶极矩在外场中受的力矩

完全类比于力的处理，设电场对偶极子的力矩为 $\vec{M}_e$，则施加外力矩 $\vec{M}'=-\vec{M}_e$ 将偶极矩**准静态地**转动一个 $\delta\vec{\theta}$，外力矩作的功为 $\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta}=-\vec{M}\cdot\delta\vec{\theta}$，体系（偶极子+外场）的能量增加为 $\delta\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$，故根据能量守恒有

$$-\vec{M}_e\cdot\delta\theta=-\delta\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)=-\delta\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (4.6.10)$$

因为 $\vec{p}$ 的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\vec{p}=\delta\vec{\theta}\times\vec{p} \qquad (4.6.11)$$

这样

$$\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta}=\left(\delta\vec{\theta}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E}=\left(\vec{p}\times\vec{E}\right)\cdot\delta\vec{\theta} \qquad (4.6.12)$$

即

$$\boxed{\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}} \qquad (4.6.13)$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，则其就会受到一个力矩的作用使其平行于电场！

# 第五章　静 磁 场

本章中我们将学习静磁场的处理。静磁场是由**稳恒电流**产生的不随时间变化的场。电流是由电场驱动电荷运动而产生的。因为电流在流动过程中一定有能量耗散（将动能交给杂质，以热能形式给环境），静电场本身产生的电流一定不能稳恒！必须有外加的非静电来源的场（电动势）一直给体系提供能量才能保持电流稳恒！因为课程的时间限制，这里我们将略去对稳恒电流的来源及其满足的规律的讨论，而只假设我们得到某种一定分布的稳恒电流 $\vec{j}$，讨论由其产生的静磁场的基本行为。

## §5.1　磁场的矢势方程和边值关系

静磁场的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

本构关系（假设为线性、各向同性介质）为 $\vec{B}=\mu\vec{H}$。在两个磁介质的交界面上相应的边值关系为

$$\begin{cases} \vec{e}_n\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0 \\ \vec{e}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{\alpha} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式。利用 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，可得

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{j} \tag{5.1.3}$$

静磁场满足 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ [此结论可由 Biot-Sarvert 定律推出（见第 1 章）]，上式变成

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{j} \tag{5.1.4}$$

(5.1.4)式即为我们熟知的泊松方程，只不过现在其表现成矢量得方程 – 亦即每一个 A 的分量场都满足泊松方程。所以矢势 $\vec{A}$ 和标势 $\varphi$ 在静场时满足同一形式

的方程。

**习题：P. 115， 4.9， 4. 11， 4.14**

补充题：证明（**4.6.6**）式（补齐课件中省略的所有数学运算步骤）

选做题

*1）比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同 1 子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以 1=1 为例）。*

***2）对课件中的例题，利用直接积分法求出电势，然后按照(L/r)的幂次展开，将最后结果与多级矩展开法比较。***