第七讲

上次课：

- $\vec{F} = -\oint_S d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}$　　Maxwell 张量，电磁（光）力
- $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$　　附加动量---带电运动粒子与磁场的相互作用
- $\vec{S}_P = (\vec{E} \times \vec{H}),\quad u = \dfrac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$　　电磁介质中的能流密度、能量密度

第三章 静电学 I – 导体静电学

第一二两章给出了电磁场的基本规律及守恒定律。从本章开始，我们将由简入深介绍这些电磁规律在不同的具体情况下的应用。第三、四两章将介绍最简单的情况 – 静电学。我们将分成两个部分来介绍静电学，本章主要研究与导体相关的静电学，而下一章主要关注与介质相关的静电问题。但是这种划分并不是严格的，其实两类问题满足相同的方程，只不过解决问题的方法和侧重点有所不同而已。

§3.1 静电问题

1. 静电基本方程

静电现象（eletrostatics）研究的是电磁学中这样的一类问题：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量})=0 \quad \text{和} \quad \vec{j}=0$$

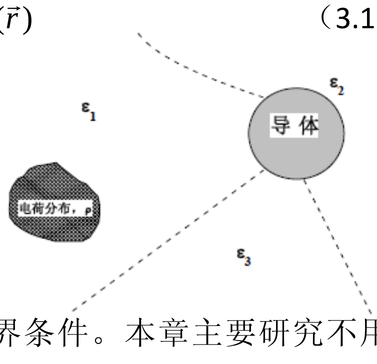
即所有物理量都不随时间改变（指“静”），且电荷静止不动（指“电”）。把静电条件代入麦克斯韦方程中，显然空间不会激发磁场（即没有电流，也没有变化电场），故只有静电场，满足

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

根据$\nabla \times \vec{E} = 0$，可以引入标势$\vec{E} = -\nabla \varphi$，进一步带入（3.1.1）中第一式，有

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon(\vec{r}) \nabla \varphi(\vec{r})\right) = -\rho(\vec{r}) \qquad (3.1.2)$$

一个标准的静电问题如右下图所示。



在一块均匀介质的内部有$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon$，

则上式转化成标准的 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) / \varepsilon \qquad (3.1.3)$$

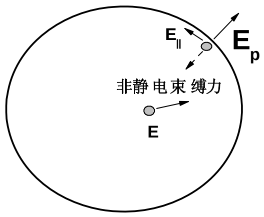
在不同物质交界面上场及势要满足相应的边界条件。本章主要研究不用求解

Poisson 方程的前提下，有关导体的静电状态我们到底能知道多少。要解微分方程，必须知道边界条件。下面我们将讲述导体与介质的交界面上的边界条件。

2. 静电条件下导体的边界条件

所谓导体即是能导电的介质，当它内部存在电场时就会引起传导电流。在导体中有关系式 $\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$，可见在静电学(即 $\vec{j}=0$)的前提下，**导体内的电场强度必须处处为零**，否则必定引起电流。根据 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=0$ 的关系知 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho=0$，**即导体内部不可能有电荷分布**。所以对导体来讲，**电荷只能分布在表面上**。进一步分析导体表面的电荷是如何分布的：若导体表面上切向电场不为 0，则表面电荷必然在电场的作用下在表面上运动，引起表面电流，这与静电条件不符。因此，**静电条件下导体表面的电场的切向分量为 0，亦即，导体表面的标势处处相等**。导体表面电场的**法向分量可以不为 0**，这与切向电场很不相同 --- 导体电荷在表面处受到非静电来源的束缚能-即“功函数”，自由电荷受到垂直电场的作用不会飞出导体。**根据 Gauss 定理，垂直电场与此处的表面电荷面密度成正比**（$D_{\perp}=\sigma\Rightarrow E_{\perp}=\sigma/\varepsilon$）。总结下来，与导体相关的电场行为满足

$$\begin{cases} \vec{E}_{in}=0,\rho_{in}=0 \\ \vec{E}_{\parallel}^{surface}=0 \\ \vec{E}_{\perp}^{surface}=\sigma/\varepsilon,\ \text{both are unknowns!!!} \end{cases} \tag{3.1.4}$$



需要强调指出的是：导体表面上的电荷分布和表面垂直电场均是未知量！进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$\begin{cases} \varphi\big|_{\text{Boudary}}=\text{Constant}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{Boudary}}=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon},\quad Q=-\varepsilon\oint\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件（3.1.5）下求解（3.1.3）。这里可能有两类问题，

（1） <u>等势问题</u> – 假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡，$\varphi=const.$ （注意：此时导体上的总电荷不能预先设定）

（2） <u>孤立导体问题</u> – 假设导体孤立，则 Q 已知，但此时 φ 不能预先设定。

某种意义上讲，Q,φ 是一对共轭量，不可能同时预先设定。

§3.2 格林互易定理

在讨论具体问题之前，先介绍一个一般的定理 – 格林互易定理，其在导体静电学中相当有用。它的表述如下：

“当 m 个导体上的电荷为 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 时，它们的电势等于 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$；当导体上的电荷为 $q_1',q_2',\cdots,q_m'$ 时，它们的电势等于 $\phi_1',\phi_2',\cdots,\phi_m'$，那么有关系式

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^{m} q'_i \phi_i \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

证明：

证明 Green 互易定理之前，我们先证明一个**数学恒等式**。取任意的一个闭合曲面 S，假设 Φ, Ψ 是 S 包围的体积 V 内的 2 个连续可微的函数，则由高斯定理可得

$$\int_V \nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi)d\tau = \oint_S \Phi\nabla\Psi\cdot d\vec{S}$$

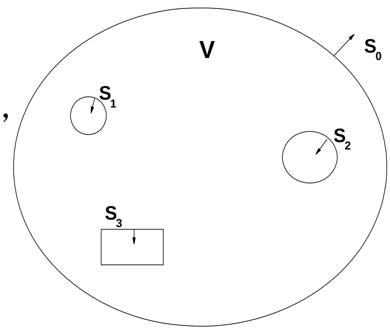
将 Φ, Ψ 位置互换，有

$$\int_V \nabla\cdot(\Psi\nabla\Phi)d\tau = \oint_S \Psi\nabla\Phi\cdot d\vec{S}$$

两式相减，我们就得到

$$\boxed{\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi\right)d\tau = \oint_S (\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi)\cdot d\vec{S}} \qquad (3.2.2)$$

此式即是格林定理，它的重要性是*将任意两个标量函数的空间的性质转化为边界处的行为*。下面我们进一步利用格林定理证明格林互易定理。



对包含 m 个导体的空间，取无限远处为封闭曲面 $\vec{S}_0$，然后再在其中挖掉所有 m 个导体，因此产生 m 个封闭曲面 $\vec{S}_i$。剩余的空间，体积为 V，是一个多连通的闭合区域，其边界由 $\vec{S}_0$ 及 $\vec{S}_i$ 共同确定，记为 S.

考虑两个状态，其中导体上分别带有电荷 $\{q_i\}$ 和 $\{q'_i\}$，此时对应的电势分布分别为 $\varphi(\vec{r}), \varphi'(\vec{r})$。由于电荷都分布在导体表面上．所以在体积 V 内 $\nabla^2\varphi=0$，$\nabla^2\varphi'=0$。我们现在令 $\psi = \varphi, \Phi = \varphi'$，代入（3.2.2）式，则（3.2.2）左边=0。取 $\vec{S}_0$ 在无限远处，因（3.2.2）中右边项以 r^{-3} 在无穷远处趋向于 0，则易知其对 $\vec{S}_0$ 的积分=0。故有

$$\sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} (\varphi\nabla\varphi' - \varphi'\nabla\varphi)\cdot d\vec{S}_i = 0 = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\cdot dS_i \qquad (3.2.3)$$

对每个导体表面的积分，注意导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{S_i}, \quad \sigma'_i = \varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\bigg|_{S_i}$$

（这里取+号是因为 $\vec{S}_i$ 的方向定义为垂直表面向导体内部），以及导体表面是等势体

$$\phi_i = \varphi|_{S_i}, \quad \phi'_i = \varphi'|_{S_i}$$

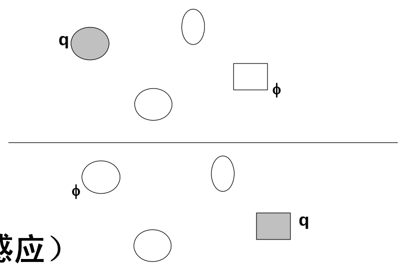
将他们代入（3.2.3）式得

$$\sum_i \left[\oint_{S_i} \phi_i \sigma'_i dS_i - \oint_{S_i} \phi'_i \sigma_i dS_i\right] = 0$$

积分可得格林互易定理：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} q'_i \phi_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \phi'_i}$$

由格林互易定理，我们可以马上得到一个重要的结果。令 $q'_1 = q'_3 = q'_4 = \cdots = q'_n = 0$, $q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 0$，则有



$$q'_2 \phi_2 = q_1 \phi'_1$$

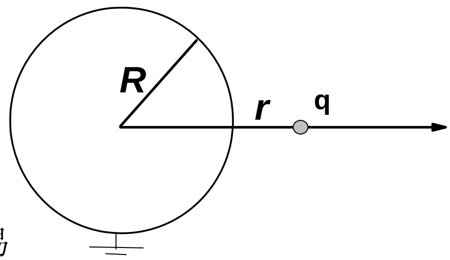
再令 $q_1 = q'_2$，则得

$$\phi'_1 = \phi_2 .$$

这就是说，带电 q 的导体 B 在不带电的导体 A 上（感应）产生的电势等于带电 q 的导体 A 在不带电的导体 B 上（感应）产生的电势.

注：你可能 Argue 说这没什么啊，比如一个点电荷产生的势为 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，只与观察点与源的距离相关，显然有上述互易性质。但注意上面的定理显示这种互易关系在任意导体形状下、任意的其他导体分布情况下均成立。这并不显然，因为场会引发导体上的电荷的再分布（即使总体不带电），使得问题变得非常复杂。格林互易定理在处理导体相关问题上很有优势。格林互易定理从本质上讲述的是源-观察点之间的对称关系。

例1， 在一个接地导体球（半径为 R）外距球心距离为 r 的地方放置一个带电量为 q 的点电荷，求在导体球上的感应电荷。



解：对这个由两个导体组成的导体系，对应电荷分布 $\{q, q_R\}$，电势分布为 $\{\varphi_q, 0\}$，其中 q_R 为导体球上的感应电荷，φ_q 为点电荷所在地的电势，均未知。现制备另外一个电荷分布 $\{0, q'_R\}$，则非常容易求出空间的电场为 $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{r}$，故，两个导体上的电势分别为 $\dfrac{q'_R}{4\pi\varepsilon_0}\{\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{R}\}$，因此，根据格林互易定理，可得

$$q\frac{1}{r} + q_R\frac{1}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_R = -\frac{R}{r}q$$

因此导体球上的感应电荷为 $-\dfrac{R}{r}q$。

Tips：有同学会被“导体球接地”这个条件所迷惑，当设计第二个状态时仍然把导体球接地，这样就无法改变球的电势状态从而达到利用格林定理的目的。“接地”只是把导体球的电势设为 0 而已，并不意味着我需要一直连一根导线到地。

§ 3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

1．利用静电标势来表示静电能量

静电场能量可以用电势φ来表述。假设一系列导体放置在介电常数为ε的线性电介质背景中，则体系的静电总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)d\tau \qquad (3.3.1)$$

利用$\vec{E}=-\nabla\varphi$，上式可写成

$$\begin{aligned}W&=-\frac{1}{2}\int(\nabla\varphi)\cdot\vec{D}d\tau=-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi\nabla\cdot\vec{D}d\tau\\&=-\frac{1}{2}\oint\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}+\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau\end{aligned}$$

其中用到了$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$。若我们考察的是体系的总能量，则(3.3.1)式的体积分是对全空间进行的，因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行．对电荷体系分布在有限区域内的情况，$\varphi\vec{D}$以r^{-3}形式在无穷远处趋向 0，因此面积分的值为零。另一方面，导体上的电荷分布全部集中在导体的表面，而导体表面上的势为常数。因此，能量的表达式变为

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau=\frac{1}{2}\sum_i\phi_iQ_i} \qquad （3.3.2）$$

其中ϕ_i,Q_i为第 i 个导体的势和总电荷。

注：

（1） *上式虽然只与自由电荷相关，却是包含了极化能的电磁总能量。从物理上讲，静电总能可以被理解成建立这样一个导体体系，外界做的总功。因此（**3.3.2**）也可这样推出：假设电荷从处于无限远处一点点搬来的，将这些电荷一点点搬来做的功的总和即是（**3.3.2**）。试着推导一下，并解释为什么有 **1/2** 因子？*

（2） *从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式，一种是$W=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}d\tau$，这表示静电能量是以密度$u=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$的形式在介质空间连续分布，场强的地方能量也大。另一种表达式是$W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau$，它表示能量只与存在着电荷分布的空间有关．以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效，而当讨论空间某一有限范围内的*

电磁能量时两者不再等效，因为面积分在有限范围内的值一般不会为零，我们只能应用第一种表达式。第二种表达式并不意味着$\frac{1}{2}\varphi\rho$是电场的能量密度-没有电荷就没有能量的看法是错误的！

2. 电容

一个有多个导体组成的体系，每个导体都是等势体，其电势为$\{\phi_i\}$，同时每个导体上带有不同的电量$\{Q_i\}$。这个导体体系的状态既可以用$\{\phi_i\}$来刻画，也可以用$\{Q_i\}$来刻画。那么，$\{\phi_i\}$与$\{Q_i\}$之间是什么关系呢？

利用线性叠加原理可以证明：任意一个导体上的电势ϕ_i是各个导体上的电量的线性函数。用数学表述为：$\{\phi_i\}$一定可以表示为$\{Q_i\}$的线性函数

$$\phi_i = \sum_j C^{-1}{}_{ij} Q_j \tag{3.3.3}$$

式中的比例系数$C^{-1}{}_{ij}$与导体的形状和相对位置有关，其量纲是长度量纲的负一次方。反之亦然：

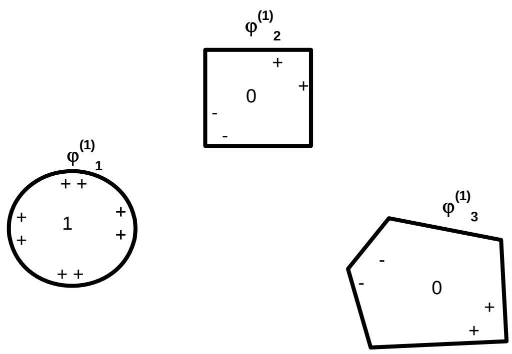
$$Q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j \tag{3.3.4}$$

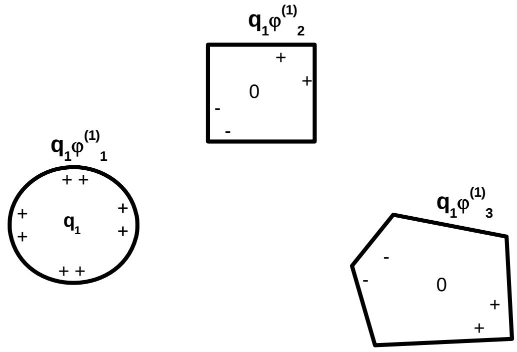
这里的C_{ij}是$C^{-1}{}_{ij}$的逆阵元素。

证明上式并不容易，因为所有的带电体均可呈现任意形状，任何一个带电体上的电荷增减都会影响到其它带电体上的电荷分布，从而影响到整个体系的电势分布！但仔细考虑静电平衡和线性叠加原理发现问题可以得到证明。

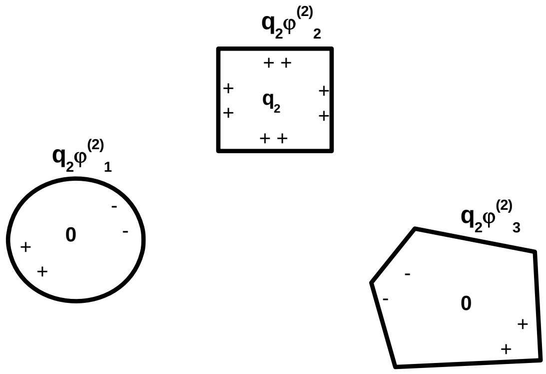
分 3 步考虑

（1）如左下图所示，只第 1 个导体上放置单位电量的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为$\{1,\ldots,0,\ldots\}$。当此体系达到静电平衡时，对应的电势分布为$\{\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},\ldots\varphi_j^{(1)},\ldots\}$，同时记下所有导体上的面电荷分布$\{\sigma_1,\ldots,\sigma_j,\ldots\}$，注意此时其它导体上虽不带净电荷，电荷分布却未必为 0！

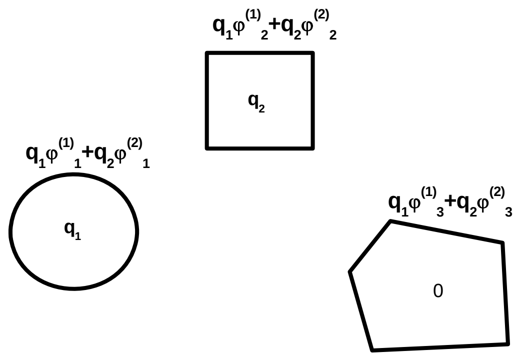




（2）当第 1 个导体上的电荷线性增加q_1倍时（如右上图），即分布为$\{q_1,0,...,...\}$时，达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为$\{q_1\sigma_1,...,q_1\sigma_j,...\}$，根据线性叠加原理，对应的电势分布一定为$\{q_1\varphi_1^{(1)},q_1\varphi_2^{(1)},...,q_1\varphi_j^{(1)},...\}$。



（3）换第二个带电体，在其上充电q_2（其它带电体上不充电），则得到电势分布$\{q_2\varphi_1^{(2)},q_2\varphi_2^{(2)},...,q_2\varphi_j^{(2)},...\}$，如左上图所示。将这个状态与（2）中的状态线性叠加，得到的电荷分布状态状态一定也是静电平衡态，其对应电荷分布为$\{q_1,q_2,...,...\}$的状态。将这样的过程循环往复，我们发现对应于$\{q_1,q_2,...,q_j,...\}$的状态，第 i 个带电体上的电势为$\phi_i=\sum_j q_j\varphi_i^{(j)}$，对比（3.3.3）发现问题得证，而$C^{-1}{}_{ij}=\varphi_i^{(j)}$，物理意义为：只在第 j 个带电体上充单位电量时在第 i 的带电体上诱导的电势。



将导体系能量的用电势或电荷表示：

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{ij}C_{ij}\varphi_i\varphi_j=\frac{1}{2}\sum_{ij}C^{-1}{}_{ij}Q_iQ_j} \tag{3.3.7}$$

为了看清C_{ij}的物理含义，设只有一个导体，则

$$Q_1=C_{11}\varphi_1$$

注意到对一个半径为 R 的金属球，$Q=4\pi\varepsilon_0R\varphi$。显然，这里的$C_{11}=4\pi\varepsilon_0R$是导体的电容，几何的意义就是电荷之间的“有效距离”，物理上具有长度量纲（除去不重要的常数ε_0）。这个距离越大，当然体系就可以“装下”更多的电荷，因

此电容也就越大.

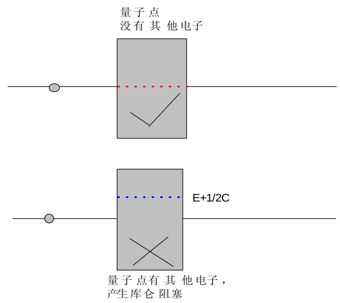
****

这里电容完全是个经典的概念。在量子力学世界中，电荷不再是经典的粒子，而是由一个几率函数描述的物质波。这里有许多有趣的新问题值得研究

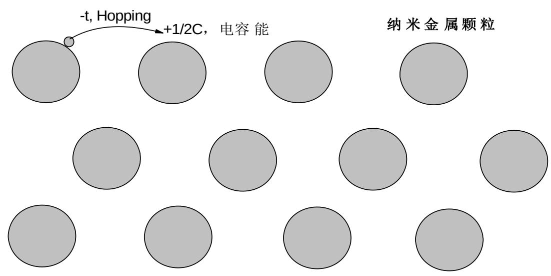
1）此时电容如何定义？如何计算？（加拿大 MaGill 大学的郭鸿教授做了许多这方面的研究）;

2）电容能的本质是“库仑相互作用”，对一个量子点，其静电能可写成 $U=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$。*设量子点内部只有一个电子填充时的能级为* E_n*；当量子点中已有一个电子填充的时候，此时在向里面填充一个电子就要付出* $\dfrac{1}{2C}$ *的能量，因此此时电子的能级为* $E_n+\dfrac{1}{2C}$。

考虑如图所示的隧穿机制，设外部环境中的电子能级与 E_n *匹配的时候，电子可以通过跃迁到量子点中的此能级而穿过量子点；然而当量子点中已有一个电子存在的时候，能级发生了改变，电子不能进行共振隧穿。这种现象叫做“库仑阻塞”--- 由于库仑力阻塞了电子的运动*



3） *“Mott 相变”等问题的研究根据量子的能带理论，当能带没有被填满时，固体中的电子可以自由流动从而固体表现为金属。然而在 50-60 年代，英国物理学家 Mott 指出对半填充的固体存在一种新的绝缘体-金属相变机制。固体中的电子在两个原子之间跃迁时，能量上可以降低 t（hopping 常数）。然而当能带半满时，每个原子上已经存在一个电子，此时当电子从一个原子跳到另一个原子上时，会和那上面的电子有静电相互作用，使得能量上升。这两个因素（t 以及静电相互作用能 U）互相制约。当原子之间远离时，t 很小因此电子不喜欢跳跃，此时体系表现为绝缘体。当给晶格施加压力使得原子之间的间距变短提高 t 的时候，有可能使得 t 大到可以克服 U 将绝缘体变成一个导体。然而自然的 Mott 相变得例子极少。随着科技的发展，人们可以人工合成一些由纳米金属颗粒排成的人工晶格，利用这种体系来研究 Mott 相变。此时作为最低级近似，对体系的静电能部分的描述就是经典的电容能* $U=Q^2/2C$。*定量描述这个问题就需要知道体系的电容系数。*



[例 2] 《电磁学》中，两个带 $\pm Q$ 电荷的导体的互电容定义为 $C=\dfrac{Q}{\varphi_2-\varphi_1}$。 在《电

动力学》中，我们更多地会使用电容系数，试用电容系数表示互电容。

解 ：这个两导体的体系当电荷分布为$\{Q_1=-Q, Q_2=+Q\}$时，电势分布为$\{\varphi_1,\varphi_2\}$。根据电容系数的定义，

$$\varphi_1 = C^{-1}{}_{11}Q_1 + C^{-1}{}_{12}Q_2 = C^{-1}{}_{11}(-Q) + C^{-1}{}_{12}(+Q)$$
$$\varphi_2 = C^{-1}{}_{22}Q_2 + C^{-1}{}_{21}Q_1 = C^{-1}{}_{22}(+Q) + C^{-1}{}_{21}(-Q)$$

因此

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Q\left[C^{-1}{}_{11} - 2C^{-1}{}_{12} + C^{-1}{}_{22}\right]$$

与互电容的定义$\varphi_2 - \varphi_1 = C^{-1}Q$比较可知

$$\frac{1}{C} = C^{-1}{}_{11} - 2C^{-1}{}_{12} + C^{-1}{}_{22}$$

习题

P. 84,　3.3, 3.4, 3.6

数值计算 Project

假设半径为 **R** 的金属球排成一个晶格常数为 ***a*** 的 **2** 维三角晶格，计算中心一个金属球对其它金属球的电容系数。你可以利用 **COMSOL** 计算不同的$\{Q_i\}$对应的的$\{\phi_i\}$，或者相反，这样就可以得到电容系数。