

第十六讲

上次课:

- 磁多极矩展开 - 磁偶极子:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] d\tau', \quad \vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

- 与外场“有效相互作用能” - $\tilde{U}_{\text{int}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$, 在等电流条件下推得

$$\vec{F} = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r}), \quad \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_e$$

- 准静场 - 忽略位移电流 = 忽略“**辐射效应**” = 忽略“**推迟效应**”

当某些时空条件满足时, 我们可以略去“位移电流”的影响, 这样做的后果是使得源和场之间具有瞬时关系(当然是某种近似下的后果)。忽略位移电流后, 在每一时刻, 源和场之间的关系类似于静态场的源和场的关系(尽管源和场都可以随时间变化!), 因此这种场也称作“似稳场”。对这种场, 很多我们针对静态电磁场发展的方法就可以使用, 因此“似稳场”的研究具有重要的实际意义。那么, 在什么情况下略去“位移电流”才算是合理的? 这就是下面我们要讨论的似稳条件。

- (1) 如果考察的区域是在导体内部, 其中除位移电流外还有传导电流:

$$\vec{j}_D = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{j}_c = \sigma_c \vec{E}$$

若场是谐变的, 即 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, 则

$$j_D \sim \varepsilon(-i\omega E), j_c \sim \sigma_c E$$

忽略位移电流的条件是 $j_D \ll j_c$, 即

$$\boxed{\omega \ll \omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}} \quad (6.1.1)$$

因此, 似稳场成立的第一个条件是电磁场的变化频率远小于金属的特征频率

$\omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}$ 。对于好的金属如铜, $\sigma_c \approx 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$, 其

特征频率为 $\omega_\sigma \approx 6.7 \times 10^{18} Hz$ 。可见光的波长大约处于 400-700 nm 区间, 对应的圆频率大约 $10^{15} Hz$, 比特征频率小得多。可见, 对于绝大多数金属而言, 在很大的频率范围内在金属内部将位移电流忽略都是合理的。

Tips:

1) 需要指出的是, (6.1.1) 是一个比较松的条件, 更严格的考虑将在第八章讲述金属电导率的 Drude 模型时得到。比如根据 (6.1.1), 似乎在整个可见光频率范围内, 金属中的位移电流项都可以忽略 —— 这并不正确。只有在 GHz 区域, 忽略位移电流项才是正确的。

(2) 如果考察的区域是导电介质的外部, 这时没有传导电流 j_c 可以直接做比较, 必须换一个角度思考这个问题。考察真空中 \vec{r}' 处的源 $\vec{j}(\vec{r}', t)$ 在 \vec{r} 处激发的场, 假设源是随时间谐变的, 则所有物理量均带有 $e^{-i\omega t}$ 的因子。如果不考虑“位移电流”的影响, 则根据前面的讨论, 不存在“辐射修正”以及“推迟效应”, 磁场应由源“瞬时”决定, 故

$$\vec{B}_0(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t) \times \vec{R}}{R^3} d\tau'$$

其中, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ 。然而考虑“位移电流”的影响后, 空间的场是由过去时刻的源 $[\vec{j}(\vec{r}', t - R/c) = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega(t - R/c)}]$ 激发的。在离激发源不太远的地方, 考虑“位移电流”导致的辐射效应, 磁场大致表示为

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c) \times \vec{R}}{R^3} d\tau' = \vec{B}_0(\vec{r}, t) e^{i\omega R/c},$$

(具体证明将在第十二章中给出)。假设我们要求场与源之间满足“瞬时关系”, 则必须略去这一推迟效应。将上式作泰勒展开,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}, t) \left(1 + \frac{i}{c} \omega R + \dots \right),$$

所以当条件

$$\frac{\omega}{c} R \ll 1$$

即

$$\boxed{R \ll \frac{\lambda}{2\pi}} \quad (6.1.2)$$

满足时, 可以略去推迟项 $e^{i\omega R/c}$ 的影响 (将其设为 1)。这个过程相当于我们忽略

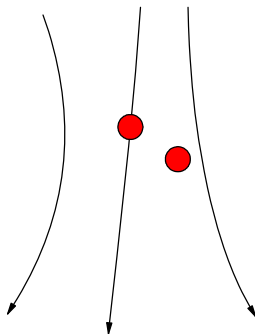
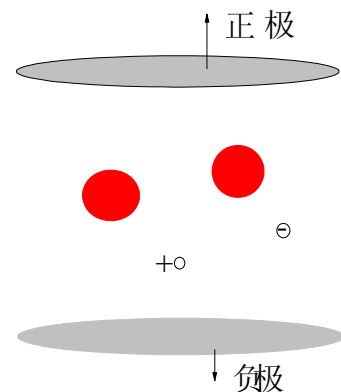
“位移电流”导致的推迟效应, 或者说是辐射修正。换句话说, 当考察点到源的距离远小于场的波长时, 略去位移电流是合理的, 这就是似稳场成立的空间条

件。例如，对于 50 Hz 的频率， $\lambda = 6000\text{km}$ ；而对于 800 kHz 的频率， $\lambda = 375\text{m}$ 。
在低频情况下，如考察区域的线度远小于波长，则此场可看成是似稳场。

(6.1.1)和(6.1.2)式就是似稳条件。Quasi-Static Field 的概念被人们广泛应用。

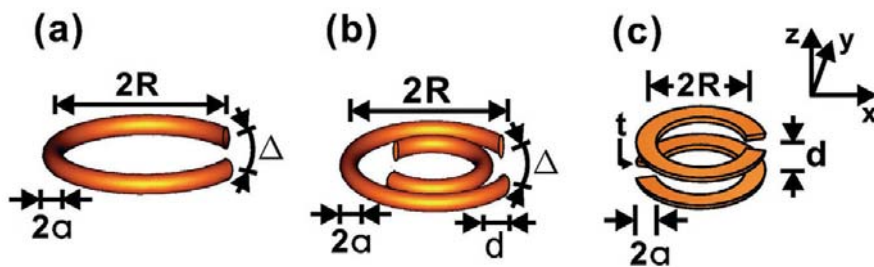
(1) 比如前面提过的“电流变液”体系，即将一些介电球体放置在一个盛有溶液的器皿里，施加电场可以在很短的时间里将体系由悬浮液状态转变成为固态。然而因为溶液里不可避免地有少量自由电荷，如果施加直流电场将使得这些电荷在电场中运动从而附着在电极上，最后的结果是使得电场被屏蔽，效率降低。为了避免这种情形，人们常用的方法是施加低频交流电，使得自由电荷不会朝一个方向运动直到极板上将电极屏蔽，而是来回运动。

一般施加的交流电频率在 1000 周以内，
对应的电磁波长为 30 公里，远远大于考虑的体系大小~1 米。此时，所有的物理量都仍然可以用静电场计算，尽管此时其实电场为交变电场！



(2) “光镊”是另外一个例子。利用激光形成一个空间上的非均匀电磁场分布，原则上这个电磁场当然是随时间剧烈震荡的。然而当**纳米尺度**的介电颗粒进入此区域时，因为光波波长为 400-700 纳米，对此颗粒来说电磁场可以认为是“似稳场”。因此纳米颗粒受到的电磁波的作用力可以假设电磁场是为静电场来计算，这样就极大简化了计算，甚至使得解析计算（尽管是近似的）变成可能。

(3) 亚波长金属结构的共振是另一个“似稳场”的杰作！考虑一个复杂的金属结构（如金属开口环，或者金属小球）在电磁波下的响应，严格的计算将非常复杂。然而**当金属结构的尺寸远小于电磁波的波长时**，问题可以在“似稳”近似下求解。忽略位移电流项之后，此时结构的许多问题，如共振模式的本征频率及电磁响应等，都可以严格求解。2006 年，我和美国 Delaware 大学的 S. T. Chui 教授合作，严格解出了金属环状结构的所有本征模式 – 求解的关键是“准静近似”。



§ 6.2 似稳场方程 --- 场的扩散

在似稳条件满足时，可以将位移电流项扔掉。此时电磁场由似稳场方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

及本构关系

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

决定。似稳场方程(6.2.1)式比静态电磁场只多一个电磁感应方程。若考查导体内部的场，则还需另加一个本构方程：

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E}.$$

在导体内部，当沿电流流动方向导线均匀时，电场（以及电流）的散度为 0，因此没有电荷堆积， $\rho = 0$ 。将(6.2.1)式改写成 E, H 的方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma_c \vec{E} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

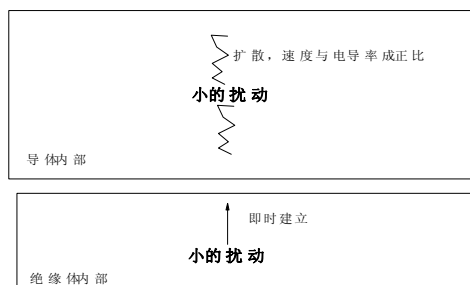
由(6.2.2)式的第二、第四式消去 \vec{E} 则得到关于 \vec{H} 的方程：

$$\boxed{\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma_c} \nabla^2 \vec{H}} \quad (6.2.3)$$

同理，由(6.2.2)式亦可得到关于 \vec{E} 的方程：

$$\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma_c} \nabla^2 \vec{E}} \quad (6.2.4)$$

(6.2.3-4) 显示似稳条件下 \vec{E} 和 \vec{H} 的方程是我们熟知的**扩散方程**， $D=1/\mu\sigma_c$ 是扩散系数。这说明导电介质中的电磁场会扩散，扩散的快慢取决于电导率 σ_c 的大小， σ_c 越大则扩散越慢。对于理想导体，扩散系数为零，而在绝缘体中，场的扩散系数为无限大。比如，在某一时刻在原点进行一下电磁扰动，比如将一个电荷搬来，在绝缘体中，电磁场瞬间被建立起来（或者说从原点扩散出去）；在导体中，这个电场却非常慢才能建立起来（扩散出去），在理想导体中，电场永远也不能被建立起来。



Tip --- 电导率越大扩散越小似乎与我们的直觉相违背：因为电导率大则电子对电场的响应大，似乎更容易来传播电磁信号才对？其实恰恰相反。可以通过如下一个简单的 Argument 来理解这件事情。在导体中做一个小的扰动，因为导体中有自由电荷，这些自由电荷会重新分布从而屏蔽这种扰动建立的电场，导体的导电性能愈好，这种阻碍效果就愈强。这就是为什么导体的电导率越大，场扩散的速度就越慢。绝缘体中没有任何自由电荷，因此电场在其中建立时没有阻碍 - 扩散速度无限大。当然，这一切都是在似稳场近似下成立。

§ 6.3 导体表面层内的场分布 趋肤效应

建立了似稳场基本方程以后，我们进一步来研究它们所描写的电磁场在导体表面层内的分布特征。变化着的磁场在导体内可以感生电场，电场又引起电流，这种电流称为**傅科电流**。为了具体说明导体表面层内场分布的特征，我们来讨论一个最简单的情况：

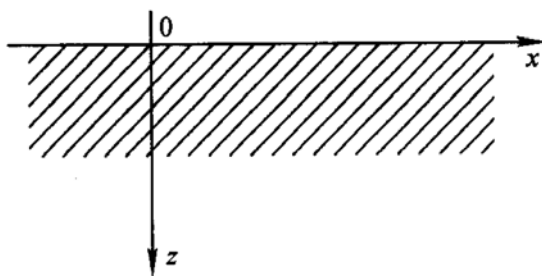


图 6.2

设导体占据 $z > 0$ 的空间，如图 6.2。电磁场以一定的频率作简谐变化，即

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t} \\ \vec{E} &= \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (6.3.1)$$

考虑电流沿着 x 方向流动，则 \vec{E} 只有一个 E_x 非 0，且只是 z 的函数。于是，扩散方程(6.2.4)现在变成

$$(\nabla^2 + i\mu\sigma_c\omega)E_x(z) = 0$$

即

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z) + i\mu\sigma_c\omega E(z) = 0 \quad (6.3.2)$$

一般线性方程的解具有 $e^{\pm pz}$ 的形式。因此，我们令（省略 x 下标）

$$E(z) = E_0 e^{-pz}$$

将其作为试解代入(6.3.2)式即有

$$p^2 = -i\omega\mu\sigma_c$$

解之可得，

$$p = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c(1-i)} = \pm\alpha(1-i),$$

式中 $\alpha = \left(\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c\right)^{1/2}$ 。所以，电场的通解为：

$$\vec{E} = \vec{e}_x \left(E_0 e^{-\alpha(1-i)z} + E'_0 e^{\alpha(1-i)z} \right) e^{-i\omega t}$$

考虑到 $z \rightarrow \infty$ 时，电场应当收敛，故有 $E'_0 = 0$ 。因此，电场的解为

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \alpha z)} \quad (6.3.3)$$

(6.3.3) 是数学意义上的解。物理的场应当取数学解的实部，可得

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z) \quad (6.3.3')$$

(此处设 E_0 为实数)。这个解显示电场随着 z 的增加一边振荡一边指数衰减, 在 $z = \frac{1}{\alpha}$ 深度处, 场强减少到导体表面 ($z = 0$) 处的 $1/e$, 我们称这个深度为**趋肤深度**, 记为 δ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}} \quad (6.3.4)$$

(6.3.4)式表明, **频率越高或电导率越大**, 则场所集中的导体的表向层越薄。理想导体时 $\sigma_c \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 场和电流全部趋向于表面。

由前面的讨论可以预料, 当频率增加时, 导体中的电流都集中到表面, 这种电流的**“趋肤”现象 (Skin effect)** 在电子工程技术中经常会碰到。作为一个例子, 我们着重讨论圆柱形导线中的电流分布, 这是一个非常具有实用价值的问题。

设导线内的电场与导线轴平行, 其场满足扩散方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \sigma_c \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (6.3.5)$$

由对称性分析, 电流和场都是柱对称的, 因此取柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 。 \vec{E} 只有 z 向分量, 且只依赖于指标 ρ 。令 $\vec{E} = \vec{e}_z E(\rho) e^{-i\omega t}$ 代入方程(6.3.5)可得

$$\frac{d^2}{d\rho^2} E(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} E(\rho) + k^2 E(\rho) = 0$$

式中 $k = \sqrt{i\omega\mu\sigma_c} = \sqrt{\omega\mu\sigma_c/2}(1+i) = \frac{1}{\delta}(1+i)$ 。这是一个标准的零阶贝塞尔方程。

由于 $\rho \rightarrow 0$ 时 $E(\rho)$ 必须有限, 故方程的解为

$$E(\rho) = E_0 J_0(k\rho)$$

这里我们这能取 $\rho \rightarrow 0$ 是收敛的通解 $J_0(k\rho)$, 而不取另一个在此极限下不收敛的通解形式。因此, 导线中的电流分布为

$$\vec{j} = \vec{e}_z \sigma_c E_0 J_0(k\rho) e^{-i\omega t}$$

常数 E_0 可由 $I_0 = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ 定出, I_0 是总电流。

对以上情况讨论如下:

(1) 若 $\delta \gg R$, 即 $k\rho \rightarrow 0$, 则 $J_0(k\rho) \rightarrow 1$, 所以

$$\vec{j} \propto \vec{e}_z \text{const.}$$

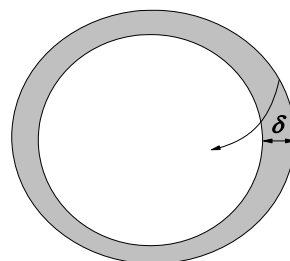
这表示电流是均匀分布的。根据 (6.3.4), $\delta \gg R$ 意味着频率很低, 或者导电率很差, 而同时导线很细。此时趋肤效应很微弱 --- 没有明显的电流趋向导体表面分布的趋势。

(2) 若 $\delta \ll R$, 则在整个考虑范围内 $k\rho \gg 1$, 此时贝塞尔函数的渐近式为

$$J_0(k\rho) \rightarrow \frac{e^{k\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot \text{const},$$

因此, 取合适的常数, 我们可以将电流改写成

$$\vec{j} = \hat{z} j_0 \frac{e^{-\frac{R-\rho}{\delta}}}{\sqrt{\rho}} \cos(\omega t - \frac{\rho}{\delta})$$

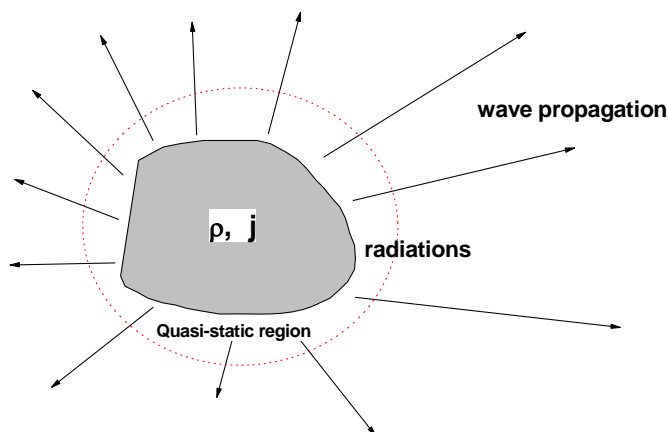


上式表明随着 $(R-\rho)$ 的增大(即从表面到柱轴线), 电流分布以指数形式衰减, 并且 ω 越大(即 δ 越小)指数衰减越快, 趋肤现象越强; 电导率 σ_c 越大, 趋肤现象也越严重。理想导体情况下 $\sigma_c \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 趋肤深度为 0, 电流只以面电流形式出现。

第八章 电磁波的传播

上一讲我们指出, 当“准静条件”满足时, 可以将“位移电流”项弃掉, 亦即将“辐射”项弃除, 此时电磁能量完全被**束缚**在电荷、电流的附近。然而一般情况下位移电流项不能忽略。当“位移电流”加上之后, 电场、磁场就不再束缚在电荷、电流的附近, 在没有电荷、电流的**自由空间**也可以因为电磁场之间的相互转化而存在 --- 这种场存在的形式就是“**电磁波**”, **Maxwell 方程最伟大的预言!** 从这一章开始, 我们将进入电磁波这一神奇的世界。虽然电磁波原则上是由电荷、电流“辐射”出来的, 但我们将“电磁辐射”这部分内容推迟到第十二

章讨论。 在本章及下一章中，我们将假设电磁场已经从“辐射源”中辐射出来了，在这个基础上我们先研究在电磁波在不同介质中是如何传播的。 这些电磁媒介包括**电介质**、**金属**中以及下一章介绍的**波导**等。



§ 8.1 电磁波在非导电介质中的传播

考虑最简单的情形 —— 在无限大的**无源非导电**的介质中的电磁波的传播行为。 此时麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \end{cases} \quad (8.1.1)$$

其中 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。假定介质均匀且暂时不考虑**色散特性**，则 ϵ, μ 均为常数（色散介质指的是 ϵ, μ 随频率变化的材料，我们随后讲述）。(8.1.1) 是电磁场耦合在一起的方程，不好求解，下面我们试图得到关于电场的方程。将第二条方程两边作用 $\nabla \times$ ，则有

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \quad (8.1.2)$$

根据第一条方程，有 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，则电场满足的方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (8.1.3)$$

式中

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \quad (8.1.4)$$

基于同样的数学，我们发现磁场满足一样的方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0 \quad (8.1.5)$$

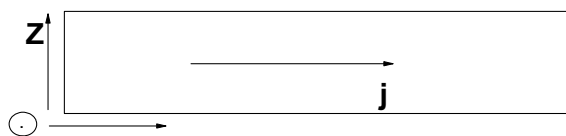
(8.1.3)和(8.1.5)式是标准的波动方程。与大家在力学中学到的绳波所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(x) = 0 \quad (8.1.6)$$

相比，这里不同是：(1) 场量是矢量，(2) 传播方向不仅仅是向 x 方向。

习题

1. 铜在室温下的电阻率为 $1.69 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ ，分别在 $f = 1\text{MHz}$ 和 $f = 1\text{GHz}$ 条件下计算铜导线的趋肤深度。
2. 如图所示的厚度为 d 的平板型导体（电导率为 σ_c ），假设沿 x 方向流有圆频率为 ω 的交流电流（沿 y 方向均匀）。设导线边界上的电流密度为 j_0 ，在准静态近似下求解电流分布，电场分布，以及磁场分布。



3. (选作) 阅读所附的论文 (PRB 74 035419 (2006)), 在准静态极限下推导出 Eq. (1) & Eq. (2).
4. (选作) 假设由几束激光干涉形成的驻波光场为 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t)$ ，其中 $\vec{E}_0(\vec{r})$ 为实场。建设在其中放置一个半径为 a 的介电常数为 ϵ 的介质小球，讨论
 - (1) 什么条件下问题满足“准静态近似”？
 - (2) 在准静近似下讨论介质小球的受力的表达式
 - (3) 能否设计出一个真实的光场，计算其对小球的“光力”？

第十七讲

上次课

- 似稳条件 $\omega \ll \omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}$, $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$
- 似稳场满足扩散方程: $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}, \vec{E}) = \frac{1}{\mu\sigma_c} \nabla^2(\vec{H}, \vec{E})$
- 趋肤效应: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}}$
- 无源均匀各向同性电磁介质中, 电磁波满足波动方程:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0, \quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

与大家在力学中学到的绳波运动所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(x) = 0 \quad (8.1.6)$$

非常类似, 但这里不同的有 2 点是: (1) 电磁场的场量是矢量, (2) 传播方向不仅仅是向 x 方向。这给我们计算带来了一些麻烦, 但设定传播方向后, 每一个场的分量都满足与绳波一样的标量方程。考虑到 (8.1.6) 的解为 $U(x) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$, 推广到电磁波的情形, 则 (8.1.3) 和 (8.1.5) 的试解可以写为

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (8.1.7)$$

其中 $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}, \omega, \varphi$ 均为常数。代入 (8.1.3) 及 (8.1.5) 后发现试解 (8.1.7) 满足方程, 但 k, ω 之间需满足关系式

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

整理可得

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow k = \pm \omega \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \quad (8.1.8)$$

(8.1.8) 式是电磁波传播的色散关系, 对波的传播性质有重要意义。

注:

[1] 对任何波动方程, 我们首先要问的是它的色散关系 (注意不要和本构关系混淆!), 亦即, 频率 ω (时域振动性质) 与波矢 k (空间域的振动性质) 之间的关系。这是波的大部分性质的基础, 若色散关系相同, 即使不同的波 (如绳波和电磁波) 也具有基本相似的性质。往大了说, 色散关系描述的其实是能量 (对应于 ω) 和动量 (对应 k) 之间的关系!

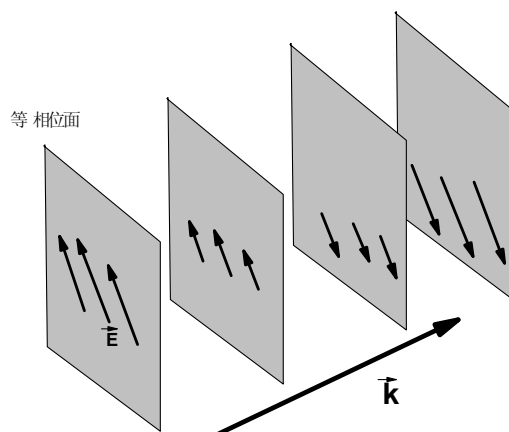
[2] (8.1.7) 式只是自由空间波动方程的一种试解, 你能想出其它形式的试解吗?

我们对得到的电磁波的解讨论如下:

(1) (8.1.7) 式中的 \vec{E}_0, \vec{B}_0 代表波动的振幅, $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$ 称为振动的相位。在给定时刻, 方程

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{常数}, \quad (8.1.9)$$

所定义的曲面上相位相等, 波场 \vec{E}, \vec{B} 也就相同, 这个曲面叫作**等相位面**。显然满足 (8.1.9) 所定义的曲面为一平面, 其垂直于 \vec{k} , 故 (8.1.7) 所描述的波称为**平面波**。还可能将试解 (8.1.7) 写成其他形式, 如球面波或者是柱面波, 分别对应的等相位面为球面或者是柱面。



(2) **波长** λ 的定义为两个相位差为 2π 的等相位面之间的距离 --- 在第 2 个等相面上, 场量经过一个周期的振动回到第 1 个等相面上的值。显然 λ 由方程

$$k \cdot \lambda = 2\pi$$

确定, 即

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8.1.10)$$

\vec{k} 被称为波矢量。

(3) **波速** 等相位面的传播速度被称为波的**相速度**。设 t 时刻等相位面在 r 处， $t + \Delta t$ 时刻该等相位面垂直于 \mathbf{k} 运动到 $r + \Delta r$ 的位置，则有

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi = \text{常数} = \vec{k} \cdot (r + \Delta r) - \omega(t + \Delta t) + \varphi,$$

故相速度为

$$v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \omega/k, \quad (8.1.11)$$

或

$$v_p = 1/\left(\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}\right), \quad (8.1.12)$$

(8.1.12) 式即是平面电磁波传播的速度，它与介质的性质有关，真空中有 $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$ ，故 $v_p = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c$ 为光速，介质中的波速 $v_p = 1/\left(\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}\right) = c/\left(\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}\right) = c/n$ ，而 $n = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}$ 被定义为材料的折射率。

注：折射率的更基本的定义应当为 $n = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}$ ，因为它对 ε, μ 分别大于、小于 0 四种情况均正确。关于 ε, μ 均小于 0 的情况我们在后面还会分析。

(4) **频率/周期** 相邻两次振动之间的时间为周期 T ，单位时间内的振动次数为频率 f 。在一个确定的位置处，场量随时间振荡， T 是两个波峰之间的时间差。容易求得： $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/\omega$ 。则振动频率为 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 。经常把 $\omega = 2\pi f$ 称为**角（圆）频率**，把 f 称为**线频率**。

(5) 为了运算方便，常常把平面波写成复数形式，即

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} \quad (8.1.13)$$

(8.1.13) 式仍然是波动方程的**数学解**，**但因为场量必须为实数**，我们应当只取其实部作为**物理解**。然而写成复数形式对许多计算要简便很多，因此在实际运算时经常采用。但应当强调指出的是：**只有实场才是有物理意义的场，复场只是为**

了计算方便！而之所以可以用复场计算是因为处理的方程（8.1.3，5）是线性方程！有时把常数因子 $e^{i\varphi}$ 并入振幅中，则

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (8.1.14)$$

注意，这时振幅 $\begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix}$ 已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁

波有相位因子。根据色散关系（8.1.8）可知， k 取正负均可。因此，

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (8.1.15)$$

也是波动方程的解。非常容易可以证明，（8.1.15）是电磁波沿反方向传播的解。

注：你会发现（8.1.15）式与 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)}$ 给出一样的实部，因而它们2个其实对应完全一样的电磁波。对波的时间变化项，在物理 Community 中，我们规定为 $e^{-i\omega t}$ ，而 IEEE 的 Community 规定为 $e^{i\omega t}$ 。

（6）因为（8.1.3）和（8.1.5）式是由麦克斯韦方程约化而来的，约化过程中方程从一阶微分变成了二阶微分，因此它对应的解未必全都是原始 Maxwell 方程的解。我们需要将所得的解（8.1.13）重新带回到原始 Maxwell 方程做检查。带回 Maxwell 方程组中的第 1，3 两条方程，我们发现场量必须满足

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (8.1.16)$$

这表明，电磁场振动的方向与传播方向 \vec{k} 相互垂直（在等相面内），亦即 - 电磁波是横波。同时带入方程

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\text{得} \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (8.1.17)$$

上式说明 \vec{E}, \vec{B} 间不独立。带入第四条方程 $\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$ 可得到

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\epsilon \omega \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\epsilon \mu \omega \vec{E}_0 \quad (8.1.18)$$

综合（8.1.17）-（8.1.18）得到结论： \vec{E}, \vec{B} 和 \vec{k} 组成右手定则，且， E, B 之间的模量满足

$$|E_0| = \omega |B_0| / k = v |B_0| = c |B_0| \quad (8.1.19)$$

后面一个等式在真空中成立。进一步，可以得到另一个很重要的关系式

$$|E_0| = v \mu |H_0| = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}} |H_0| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |H_0| = Z |H_0| \quad (8.1.20)$$

其中 $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 称为阻抗，具有电阻的量纲，是一个描述电磁介质中电磁波传播时场量比例的重要物理量。折射率和阻抗是刻画电磁介质特性的最重要的 2 个量，他们各有各自不同的物理涵义，在确定电磁波的特性方面起着不同的作用。

注：在静电、静磁条件下电磁波的电、磁特性是分开的（分别由 ϵ, μ 独立决定），但电磁波将电场、磁场耦合在一起，因此此时需要用 n, Z 两个参数确定。

(7) 平面波的能流

电磁场的能流定义为

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.1.21)$$

注意真实的场是 (8.1.7)，不能将复数场带入 (8.1.21) 式后再取实部，因为此运算是非线性运算。故 (8.17) 式中的 \vec{E}, \vec{H} 都应取实部之后再代入：

$$\vec{S}_p(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{H}) \quad (8.1.22)$$

上式表示的是能流的瞬时值。当电磁场随时间变化时，通常瞬时值没有意义，更关心的对能流的时间平均值。对能流在一个周期内做时间平均，

$$\langle \vec{S}_p \rangle = \langle \text{Re} \vec{E} \times \text{Re} \vec{H} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}_p dt \quad (8.1.23)$$

利用公式

$$\langle \text{Re} \vec{E} \times \text{Re} \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

(证明见习题 8.1)，得到

$$\langle \vec{S}_p \rangle = \frac{1}{2} Z \cdot H_0^2 \hat{k} = \frac{1}{2Z} E_0^2 \hat{k} \quad (8.1.24)$$

同理，能量密度的时间平均值为

$$\bar{u}(\vec{r}) = \langle u(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H} \right\rangle = \frac{\epsilon}{4} E_0^2 + \frac{\mu}{4} H_0^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \quad (8.1.25)$$

非常容易从 (8.1.25) 中证明 $\bar{u}_E = \frac{\epsilon}{4} E_0^2 = \frac{\mu}{4} H_0^2 = \bar{u}_B$ ，亦即，**平面电磁波电场携带的能量和磁场携带的能量相等！** 把 (8.1.25) 和 (8.1.24) 式比较，则得

$$\vec{S}_p(\vec{r}) = \hat{k} \bar{u}(\vec{r}) \frac{1}{\epsilon Z} = \hat{k} \bar{u}(\vec{r}) v = \bar{u}(\vec{r}) \vec{v} \quad (8.1.26)$$

(8.1.26) 式有着清晰的物理图像 —— 能流即为单位时间通过单位面积的能量，单位时间内电磁波传输 $l = v \times 1$ 的距离，因此单位时间内在体积为 $\Omega = l \times 1 = v \times 1 \times 1 = v$ 内的电磁波能量可以通过单位面积。故，**能流 = 能量 × 速度**。这与 **电流密度 = 电荷密度 × 速度** 的物理来源完全一致。**平面电磁波在非导电介质中传播的情况如图 8.1 所示。一个重要的特征是 E 与 B 为同相位变化的，即它们同时达到最大值，又同时达到最小值。**

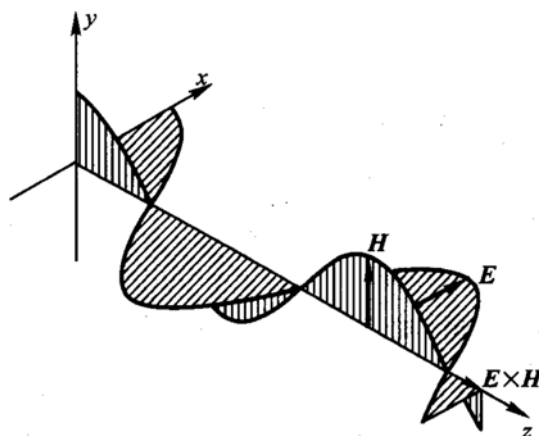


图 8.1

§ 8.2 波的偏振和偏振矢量

电磁波是矢量波，**传播和偏振**是其最重要的两个特征。上一节我们主要学习了波在线性无色散均匀媒质中的传播特性，本节中我们将重点学习波的偏振特性。让我们仔细研究横波条件 (8.1.16)。对确定的传播方向 \vec{k} ，(8.1.16) 式告诉我们电矢量 \vec{E}_0 必须在与其垂直的平面内。为确定起见，假设传播方向 $\vec{k} \parallel \hat{z}$ ，则这个平面为 xy-平面，有 2 个相互垂直的单位矢量 \vec{e}_x, \vec{e}_y （其它 \vec{k} 方向可以类似处理）。**注意，当我们取了复数场的表达式之后，原则上 \vec{E}_0 可以是一个复矢量 – 其**

每个分量均可取复数且可以由不同的相位。因此， \vec{E}_0 的最一般形式为

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{x,0} + \vec{e}_y E_{y,0} = \vec{e}_x |E_{x,0}| e^{i\phi_x} + \vec{e}_y |E_{y,0}| e^{i\phi_y} \quad (8.2.1)$$

将其带入复场表达式 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ，再取实部，我们得到

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= |E_{x,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_x) \\ E_y(z, t) &= |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_y) \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

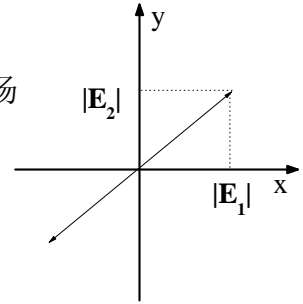
显然，场随时间的振荡行为由四个参量： $E_{x,0}$ $E_{y,0}$ ϕ_x ϕ_y 确定。由 (8.2.2) 出发，在四个参量满足不同条件时，可以得到几种典型的偏振状态。

(A) 线偏振

线偏振是最简单的情形。当 $\phi_x = \phi_y = \phi$ 时，电场随时间演化为

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= |E_{x,0}| \cos(kz - \omega t + \phi) \\ E_y(z, t) &= |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi) \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

在任意一个确定的波阵面上（如取 $z=0$ 的 xy 平面），电场只在一个方向上随时间来回振动，因此这种偏振状态称为线偏振。



(B) 椭圆偏振

在最一般情况下，即不对四个参量施加任何限制，则波的偏振状态都是椭圆偏振。考虑一个具体的例子： $\phi_x - \phi_y = \pi/2$ ， $|E_{x,0}| > |E_{y,0}|$ ，则

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= |E_{x,0}| \sin(kz - \omega t + \phi_y) \\ E_y(z, t) &= |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_y) \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

在任意一个确定的波阵面上，随着时间的演化， \vec{E} 场的端点描出一个半长轴为 $|E_{x,0}|$ ，半短轴为 $|E_{y,0}|$ 的椭圆，故这种偏振状态称为椭圆偏振。若 $\phi_x - \phi_y \neq \pi/2$ ，则椭圆的对称轴（长短轴）产生了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

(c) 圆偏振

进一步，当 $|E_{x,0}| = |E_{y,0}| = A$, $\phi_x - \phi_y = \pm\pi/2$ 时，电场分量为

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mp A \sin(kz - \omega t + \phi_y) \\ E_y(z,t) &= A \cos(kz - \omega t + \phi_y) \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

对这种波，在任一波阵面上， \vec{E} 的端点随时间的演化描出一个半径为 A 的圆，故称为**圆偏振**。进一步考虑两种情况，

(C.1) **右旋圆偏振** $\phi_x - \phi_y = \pi/2$ 时，(8.2.5) 式描述的是**电场矢量顺时针旋转**，称为**右旋圆偏振**。此时 (8.2.5) 可以重写为

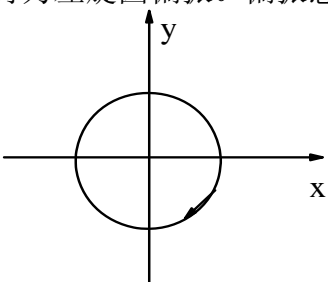
$$\vec{E}_0 = \sqrt{2} A e^{i\phi} \vec{e}_{right}$$

其中

$$\vec{e}_{right} = (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) / \sqrt{2} \quad (8.2.6)$$

就是右旋偏振的单位矢量。

(C.2) **左旋圆偏振** 同理， $\phi_x - \phi_y = -\pi/2$ 时为左旋圆偏振。偏振态的单位矢量为

$$\vec{e}_{left} = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) / \sqrt{2} \quad (8.2.7)$$


讨论：

- (1) 看上去左右旋光的定义和我们的常识正好相反，似乎以“ \mathbf{k} 的方向与 \mathbf{E} 的旋转方向成左/右手螺旋”来定义左右旋光会更容易使人习惯。这里的原因比较复杂，一个可能的解释是历史上人们根据在某一个给定的时刻看到的电场由远及近在空间 (z) 传播而来时的旋转来定义的（参考课堂上演示的偏振光动画）。
- (2) 在目前 Metamaterial 的研究中，一个热门的课题就是如何利用 Metamaterial 来调控光波的偏振状态，比如实现由线偏振到圆偏振、椭圆偏振的转化，或者是两个垂直方向的线偏振光的相互转化。有兴趣的同学参考“J. M. Hao, et. al., Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007), Wujiong Sun, et al, Opt. Lett. 36 927 (2011)”。

习题

P. 204, 8.1

补充题:

- (1) 证明 (8.1.25) 式以及平面电磁波的电场能和磁场能的时间平均值相等
- (2) 计算真空的阻抗值
- (3) 将线偏振的光波 $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)e^{i(kz - \omega t)}$ 分解成左旋光和右旋光的叠加。

思考题

- 尝试在球坐标/柱坐标下解波动方程 (8.1.3)
- 课件中的所有推导都是基于 ϵ_r, μ_r 均大于 0 的情形。在其他三种情形下 (即: $\epsilon_r > 0, \mu_r < 0$; $\epsilon_r < 0, \mu_r > 0$; $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$), 课上建立的那些结论需要改写?

第十八讲

上次课:

- 平面电磁波
$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

复场表示只是为了计算方便（只要运算是线性的）；

物理的场是复场的实部；非线性运算是应先取实部再计算！

- 色散关系

$$k = n \frac{\omega}{c}, \quad n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \text{ 为折射率 (Refraction Index)}$$

- 阻抗

$$|E_0| = Z |H_0| \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ -- 阻抗, } c\vec{B}_0 = \hat{k} \times \vec{E}_0 \text{ -- 电磁场同相位!}$$

- 偏振

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0: \text{ 横波, 但可有不同偏振 (线、圆、椭圆)}$$

§ 8.3 金属的等效介电常数 - Drude 模型

前面两节我们研究了电磁波在最简单的电磁介质（线性、均匀、局域、各向同性、无色散，本构关系为 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ）中的传播行为。下面我们将开始研究导电介质中的电磁波特性。对任何一种新的电磁介质，在研究其电磁波传播特性之前，都要首先知道这种电磁介质的“本构关系”，不然，Maxwell 方程无法求解。事实上，这个世界之所以如此“色彩缤纷”，正是因为我们有各种具有不同的“本构关系”的电磁介质！本节中，我们将仔细探讨导电介质的本构关系 – 你们会发现导电介质与一般电介质非常的不同。

1. 色散介质的本构关系

上次课我们学习了电磁波在真空以及均匀各向同性非色散的电磁介质中的行为，这两类介质的特点是 ϵ_r, μ_r 均大于 0，且不依赖于频率。从物理上讲，这种介质对电磁场的响应是“局域”以及“瞬时”的

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \mu^{-1} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (8.3.1)$$

亦即，此处、此时的电磁扰动（由 $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$ 决定）只会引发此处、此时的电

磁相响应 $\vec{P}(\vec{r}, t), \vec{M}(\vec{r}, t)$ (进一步, $\vec{D}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t)$)。然而一般来讲, 材料中的电荷运动行为非常复杂, 因此最后本构关系也非常复杂, “**局域+瞬时**”仅仅是一种理想情形, 通常只是材料的真实响应在**长波和低频下**的近似。在第 1 章中我们已经指出, 一般情况下材料的响应为 (最一般的线性响应的形式):

$$\begin{aligned} D(\vec{r}, t) &= \int \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \int \mu^{-1}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{B}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

这意味着在任何时刻 t' 任何地点 \vec{r}' 给体系一个扰动 \mathbf{E} , 体系都有可能在时刻 t (根据因果关系, $t > t'$) 地点 \vec{r} 产生一个响应 \mathbf{D} 。这当然使得我们求解 Maxwell 方程变得非常复杂。**注意, 响应函数 ε 只依赖于距离差 $\vec{r} - \vec{r}'$ 和时间差 $t - t'$ 是体系的空间和时间平移不变性的要求。**通常我们忽略“空间非局域效应”, 即假设体系的响应在空间上为**局域**的。进一步, 如果我们只考虑频率确定为 ω 的一支电磁波在此介质中运动, 设复场 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$, 代入 (8.3.1) 式可得

$$D(\vec{r}, t) = \int \varepsilon(t - t') \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t'} dt' = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (8.3.3)$$

其中,

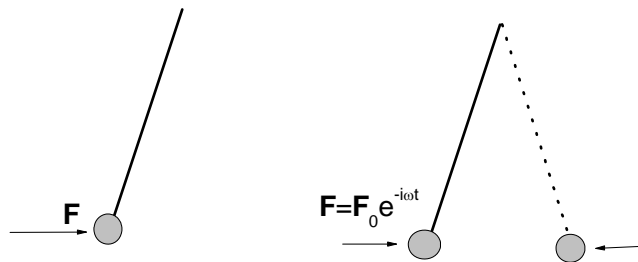
$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \int \varepsilon(t - t') e^{-i\omega(t' - t)} dt' = \int \varepsilon(\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t}} \quad (8.3.4)$$

是时域响应函数的 Fourier 变换后的频域形式。因此本构关系此时变成 (假设所有物理量均携带 $e^{-i\omega t}$ 的时间变化因子)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) &= \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}) \end{aligned}} \quad (8.3.5)$$

因此, 无论再复杂的电磁介质, 当其中的电磁波为单频时, 其本构关系变成与常规电介质一样的 (当然是在线性响应的前提下)。只不过, 此种情形下 ε , μ 的数值依赖于频率值, 这种行为我们称为“色散”, ε , μ 依赖于频率的电磁介质我们称为“色散”介质。

我们可以把这个情况类比于一个秋千。当我们对一个秋千在 t 时刻给它一个推动力, 它未必立即产生反应。但是, 当我们对秋千施加一个随时间谐变的力, 最终, 这个秋千一定会以这个频率跟随外力振动, 无论最初多么不情愿。



金属（更广义讲是导电介质）是一类电磁介质。静态时金属的本构关系就是欧姆定律 $\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$ 。当外电场随时间谐变时，即 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ，类似受迫振动，电流和电位移矢量 \vec{j}, \vec{D} 也带有时间因子 $e^{-i\omega t}$ ，即 $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ， $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ 。此时，可定义频域的电导率 $\sigma(\omega)$ 和介电函数 $\varepsilon(\omega)$

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})} \quad (8.3.6)$$

原则上讲， $\sigma(\omega), \varepsilon(\omega)$ 的严格求解应当借助于量子力学。对良导体，通常可以把体系看作电子自由地在晶格正离子组成的背景中运动 – 此既是自由电子气模型，也就是高能物理中所言的等离子体模型。在常温下，我们可以用经典理论借助等离子体模型来求解金属的 $\sigma(\omega), \varepsilon(\omega)$ 。

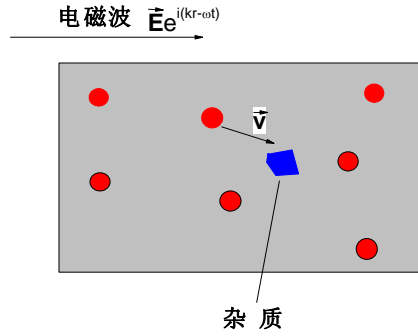
2. 金属的有效电导率

当有一束单频的电磁波施加在等离子体中时，空间将有电场 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ 存在，则电子将受到电场力 $e\vec{E}$ 。同时，电子运动时将受到其他粒子（晶格亦即声子，杂质等）的散射而丢失能量及动量。描述这种**散射力**的最简单的模型是“迟逾时间近似”，即**散射力**可写成

$$\vec{F}_{sca} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (8.3.7)$$

这个式子的物理意义是：电子平均 τ 时间受到一次“异种粒子”的散射而丢失其所有动量。因此，电子的运动方程为

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (8.3.8)$$



在长波近似下，在电子来回运动的区间内可以近似认为电场不发生显著变化： $\vec{E}(\vec{r}) \sim \vec{E}_0$ 。显然电子将在单频外场力的作用下做“受迫振动”。将电子运动的试解 $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$ 代入（8.3.8）可得

$$\vec{v}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{im(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.9)$$

因此，电子的运动速度为

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{im(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.10)$$

与之前一样，这里速度的复数形式只是为计算方便（基础是方程是线性方程！），真正有物理意义的是场量的实部。根据电流密度的定义，我们发现

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n_e e \vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + i/\tau)} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (8.3.11)$$

式中 n_e 为单位体积内的电子数目。将（8.3.11）与（8.3.6）对比，可得电导率为

$$\sigma(\omega) = -\frac{n_e e^2}{im(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.12)$$

对此做如下讨论：

（1）当 $\omega \rightarrow 0$ 时，上式应当回到直流情况下金属的电导率 σ_c 。将（8.3.12）取

$\omega \rightarrow 0$ 的极限，有 $\sigma_c = \frac{n_e e^2}{m} \tau$ 。这就是迟逾时间近似下金属直流电导率的结果，故，人们常用金属的直流电导率的实验值来反过来确定参数 τ 。

（2）复数形式电导率不能只取实部！其实部、虚部都有明确的物理意义！对场量（如 $\vec{E}, \vec{j}, \vec{v}$ ）我们才取其实部讨论，对电导率这个中间产物我们不可以这样做。事实上，Fourier 分析表明只有在复场表示下（即以 $e^{-i\omega t}$ 为基）

才可以定义响应函数（如 $\varepsilon(\omega), \mu(\omega), \sigma(\omega)$ 等，参考（8.3.3）-（8.3.5）的推导），对实场形式（ $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ ）无法得到线性正比关系，因此无法定义响应函数！将复电导率写成 $\sigma(\omega) = \text{Re}(\sigma(\omega)) + i \text{Im}(\sigma(\omega))$ ，可以证明实部对应着实际的能量耗散，但虚部并不对应能量耗散 - 这与直流电导率有着本质的不同！

(3) 对一般良导体我们发现 $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ ，因此

(A) 在 **GHz 以下的频段（微波）**， $1/\tau \gg \omega$ ，此时 $\sigma(\omega) \approx \sigma_c$ ，即有效电导率就是静态时的电导率。这里的原因是电子碰到一次散射的平均时间 τ 远小于电场发生变化的时间间隔 $T \sim 1/\omega$ ，电场还没有发生显著变化电子已经与杂质碰撞了成千上万次。因此这种条件下电导率与直流时相比并没有什么明显不同。

(B) 在**可见光频段**， $1/\tau \ll \omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ，此时 $\sigma(\omega) \approx i \frac{n_e e^2}{m\omega}$ ，亦即，复数电导率的实部（对应耗散部分）远小于虚部（非能量耗散部分）。这里的物理图像是，电子在高频电场的作用下来回运动，还没有碰到散射（需要费时 $\sim \tau$ ）就已经折返。因此，此时电子的行为与静态时极不相同，其主要行为是与电场相互交换能量（表现为电导率呈现虚部，电场不对电流做功），而不是与杂质碰撞耗散能量。

3. 金属有效介电函数

有了金属的有效电导率，我们可以进一步导出其**有效介电函数**。根据 Maxwell 方程组的第 4 条方程，在单频条件下，

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = [\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0] \vec{E} \quad (8.3.13)$$

一般在静电、静磁条件下，我们把金属中的电流作为独立于金属的“自由电流”来处理，也就是说，在 Maxwell 方程中明显地写出 \vec{j} 这一项，而把去除了“传导电流”的金属的介电响应认为和真空无异（ $\varepsilon = \varepsilon_0$ ），当然有时也会把金属中的“价带”电子（束缚电荷）的影响考虑进去，此时，可取 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 。

然而在交变条件下，电流和电场一样随着时间协变。而且所谓自由电子也不再自由，必须在交变场的作用下做“折返跑”。某这个意义上讲，传导电流也

变成了束缚在金属中响应电流。因此，通常此时将金属也看成一种电介质，把传导电流作为金属的束缚电流来考虑。对一个电介质，(8.3.13) 应当写成

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon(\omega) \vec{E} \quad (8.3.14)$$

两式比较可得金属的有效介电常数为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \Rightarrow \varepsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \quad (8.3.15)$$

将 (8.3.11) 代入上式，即得金属的有效介电常数

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \quad (8.3.16)$$

其中，

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}} \quad (8.3.17)$$

是个只与金属性质有关的常量，叫做等离子共振频率。(8.3.16) 即是著名的 **Drude** 模型，它非常好地描述了良导体从直流 ($\omega = 0$) 到紫外 ($\omega > 10^{16} \text{ Hz}$) 的整个频谱的介电行为。 ω_p 描述的是自由电子气在外场下的一个集体震荡共振行为 – 显然密度越大，质量越小，这个集体振动的频率就越大。良导体的 ω_p 大都在紫外频区。

我们讨论两种典型情况下的金属的介电行为：

(A) GHz 及以下 -

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (8.3.18)$$

此时金属的 ε_r 具有一个极大的正的虚部，以及一个负的实部（不随频率变化）。

(B) 光波段：

$$\varepsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{对金、银等良导体}), \quad (8.3.19)$$

(C) 从光波段到 GHz, $\varepsilon_r(\omega)$ 有一个由负实部主导到正的虚部主导的一个转变。

§ 8.4 电磁波在导电介质中的传播

上节中我们系统介绍了金属的有效介电函数 $\varepsilon_r(\omega)$ ，下面我们研究电磁波在导电介质中的传播。原则上，我们需要在金属中求解如下 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{cases} \quad (8.1.1)$$

针对一个特定频率 ω ，所有的场量均以 $e^{-i\omega t}$ 形式随时间谐变，

$$(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t)) = (\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}), \rho(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r})) e^{-i\omega t} \quad (8.4.1)$$

将金属中的“传导电流”吸收到电位移矢量中（参考（8.3.14）式），并利用连续性方程 $\nabla \cdot \vec{j}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0$ ，可以证明 Maxwell 方程针对时谐场的形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon(\omega) \vec{E}) = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon(\omega) \vec{E} \end{cases} \quad (8.4.2)$$

对（8.4.2）中第 2 式同时作用 $\nabla \times$ ，并利用 $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ，可得

$$-\nabla^2 \vec{H} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu_0 \vec{H} \quad (8.4.3)$$

我们立刻发现这个针对单频的“时谐”Maxwell 方程和无色散介质中磁场满足的方程（8.1.5）完全一样！只不过这时“介电常数”依赖于频率，只针对目前的所设的频率正确。（8.4.3）的解是平面波， $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ （此时只需考虑空间变化部分，时间部分总是 $e^{-i\omega t}$ ），代入可解得电磁波传播的色散关系

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_r(\omega) \quad (8.4.4)$$

这与一般介质中的色散关系全一样，除了此处 ε_r 是频率的函数，因此只要知道了 $\varepsilon_r(\omega)$ 就可以求解（8.4.4）得到电磁波传播的行为。注意，上面的讨论是一般成立的，对任何线形各向同性介质，只要体系在频域的本构关系 $\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$ 已

知，我们就可以利用 (8.4.4) 式电磁波传播的色散关系。下面考虑几个特殊情形。

1. 良导体在 GHz 及以下频段

A. 复波矢

良导体，如金银铜等，在 GHz 及以下频段的有效介电常数为

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \quad (8.4.5)$$

将 (8.4.5) 式代入 (8.4.4) 可得

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}} \frac{\omega}{c} = (1+i)\alpha \quad (8.4.6)$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0 \omega}{2}} \quad (8.4.7)$$

则

$$\vec{k} = (1+i)\alpha \cdot \vec{e} \quad (8.4.8)$$

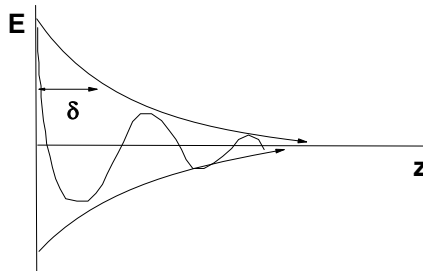
其中 \vec{e} 任意单位矢量（传播方向）。

注意很多教材上假设 $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}$ ，这其实并不完全正确。但事实上，这并不影响解的形式 – 当 $\text{Im}(\varepsilon_r) \gg \text{Re}(\varepsilon_r)$ 时，解就是 (8.4.6) 式的形式，根本与 ε_r 的实部无关！（参看右上图）。

将 (8.4.8) 带入 (8.4.1)，则电磁波在金属中的电场（假设传播方向为 z 方向）为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \quad (8.4.9)$$

当然横波条件要求 \vec{E}_0 在 xy 平面。可见，此时平面波的振幅沿传播方向指数衰减。



振幅衰减到 $r=0$ 处的 $\frac{1}{e}$ 倍的距离 $\frac{1}{\alpha}$ 称为透入深度（也叫趋肤深度），定义为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_c \mu \omega}} \quad (8.4.10)$$

因此电磁波不能渗入在导电介质的内部，而是很快在表面的一个厚度为 δ 的薄层内衰减掉。与此相对应：金属上产生的交流电流一定也只是局域在表层的这个薄层内 – 这个结论我们曾在讨论准静态近似下的电流的趋肤效应时得到过。

Tips: 这种衰减表示电磁波的能量有消耗。但对良导体， $\sigma_c \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ ，入射的电磁波几乎被100%反射回去。因此，良导体几乎不能吸收电磁波（在GHz），可以看作理想导体。

习题

补充题：

- 1) Ag 的电子密度为 $n_e = 5.88 \times 10^{28} m^{-3}$ ，静态电导率为 $\sigma_c = 6.17 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ ，计算迟逾时间 τ 和等离子共振频率 ω_p ；分别在 $f = 1GHz$ ， $\lambda = 1.5\mu m$ ， $\lambda = 550\mu m$ 三个条件下计算其相对介电常数。
- 2) 在交变条件下，计算电场对金属中的电流的做功的瞬时值及时间平均值，证明复电导率 $\sigma(\omega)$ 的虚部不对应体系的能量耗散，而只有 $\sigma(\omega)$ 的实部才对应能量耗散。
- 3) 之前我们推导出准静近似成立的频率条件是 $\omega \ll \omega_c = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0}$ (Lect-16, (6.1.1))，并指出这个条件是个过于松的条件。在 Drude 模型的框架下探讨 ω_c 的物理意义，并讨论为什么 (6.1.1) 式不严格，严格的条件又是什么？
- 4) 利用连续性方程 $\nabla \cdot \vec{j}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0$ ，证明时谐条件下电磁场满足 (8.4.2)。

思考、阅读文献，并整理成 Note

- 1) 课件上推导的是金属的“局域”的介电函数的行为。然而实际情况下，一束电磁波照过来，电磁场应当是 $\vec{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$ ，电场并非均匀场。为什么我们可以设电场为均匀场来计算 ϵ ？这样做有什么后果？另外，我们并没有考虑磁场带来的 Lorentz 力？你预期考虑了 Lorentz 力之后结论会有何不同？

- 2) 仔细讨论复电导率的实部和虚部的物理涵义。若 $\sigma(\omega)$ 的虚部不对应能量的耗散, 那么它的作用到底是什么?
- 3) 查阅参考书, 计算在可见光照射下, 金属中电子的典型“活动范围”。由此理解为什么高频下“自由电子”其实不在自由, 而我们通常把自由电子作为金属的束缚电子来处理。
- 4) 利用网络查看一些原始文献及书籍, 弄清楚实验上如何测量各种金属的电导率(介电函数)以及确定 Drude 模型中的各个参数的。

第十九讲

上次课:

- 色散介质的介电行为, 在单频谐变电场激励下, $\vec{D}_\omega = \epsilon(\omega) \cdot \vec{E}_\omega$
- 金属介电函数的 Drude 模型:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \approx \begin{cases} i \frac{\sigma_c}{\epsilon_0 \omega}, & \leq \text{GHz} \\ 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, & \text{visible} \end{cases}$$

GHz 以下-极大的**正的虚部**; 光波段-**负的实部**

- 时谐场下电磁波的色散关系: $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_r(\omega)$

GHz, 复波矢: $k = (1+i)/\delta$, $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma_c\omega}$ 趋肤深度

B. 电磁场强度之间的关系

由 (8.4.2) 式中的第 2 式可得

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{\omega\delta} (1+i) \cdot \vec{e} \times \vec{E}_0 = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0}{\omega}} \vec{e} \times \vec{E}_0 \quad (8.4.11)$$

良导体内的电磁波有如下重要特点:

- (1) 与介质中的电磁波 \vec{B} 、 \vec{E} 之间**同相位**不同, 此处 \vec{B} 、 \vec{E} 之间有 $\frac{\pi}{4}$ 的相位差,

趋向导体内部时, 2 者均以指数形式振荡衰减。

- (2) 良导体内部的电磁能量是以磁场能形式存在的:

$$U_B \sim \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 = \frac{\sigma_c}{2\omega} E_0^2 = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0 \omega} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2\right) \gg U_E \quad (8.4.12)$$

这种趋势随着频率的减小增大。当 $\omega = 0$ 时, 磁能是电能的无限大倍, 因此 \vec{E} 只能为 0 --- 此时电磁场能量只以磁能的形式出现。**这与静电时金属内部不存在静电场（但可以存在静磁场）的结果一致。** 导电介质中电磁波的传播特性如图 8.3 所示。

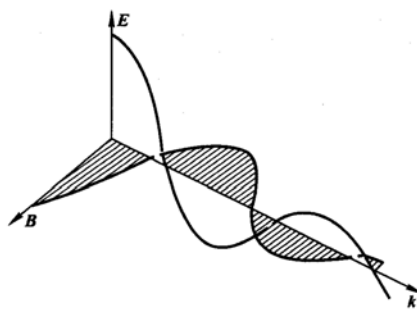


图 8.3

注意:

(1) 这里 $U_E \sim \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$ 指的是纯粹的电场的能量, 并没有把“传导电流”携带的能量(其机械能及与电磁场的相互作用能)算上。

(2) 对色散介质, 利用 $U_E \sim \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \sim \frac{1}{2} \epsilon(\omega) |E|^2$ 计算介质中电磁场的总能量是不对的, 否则你就得到负能量这个荒谬的结论。色散介质中的能量是个复杂的问题, 要得到完整的答案, 请参考 Landau 的书。

2. 良导体在光波段(等离子体中的光波)

在光波段, 金属的有效介电常数为 $\epsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, 这个模型也被广泛应用于研究其他自由电荷组成的等离子体(唯一的区别是电荷密度不同导致 ω_p^2 不同)。将其带入色散关系可得

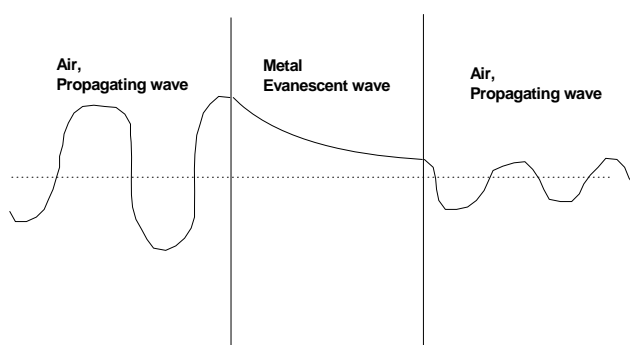
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \quad (8.4.13)$$

对此我们作如下的讨论:

(1) 当 $\omega < \omega_p$ 时, k 为一纯虚数, 可写成 $k = i/\delta$, 其中

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega^2}} \quad (8.4.14)$$

此时金属中的电磁场是纯粹的指数衰减的, $E \sim E_0 e^{ikr} = E_0 e^{-r/\delta}$, 与(8.4.9)式表示的一边衰减一边振荡(传播)略有不同。这种波称为消逝波, 或者叫消逝波, 倏逝波等 (Evanescent

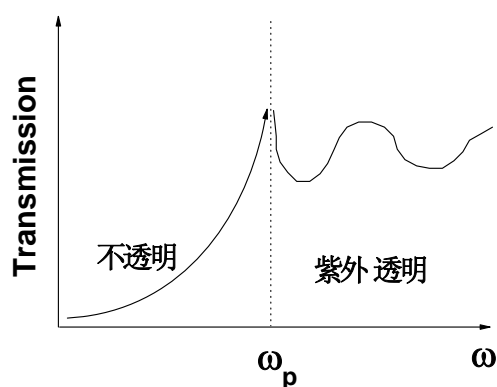


wave)。当电磁波由空气入射到金属上时，进入金属后电磁波后的透入深度为 δ 。若金属为半无限大，则电磁波完全不能通过金属，因此将被反射回去；若金属板为有限厚度，则会有衰减波隧穿过去。 δ 越大，则隧穿过去的电磁波就越多（如右图所示）。这种效应非常类似量子力学中的隧穿效应，而在这里金属（ $\epsilon_r < 0$ ）就类比于量子力学中的势垒，电介质（ $\epsilon_r > 0$ ）类比于势阱。

(2) 磁场为

$$\vec{B}(z,t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times E_0 \vec{e}_x e^{-z/\delta} e^{-i\omega t} = \frac{i}{\omega\delta} E_0 \vec{e}_y e^{-z/\delta} e^{-i\omega t} \quad (8.4.15)$$

这里磁场与电场有 $\pi/2$ 的相差，与介质、良导体在 GHz 等情形均不相同！这个相位的不同，造成了能流形式在各种介质中的不同！（参考作业题）



(3) 当 $\omega = \omega_p$ 时， $\delta \rightarrow \infty$ ，此时隧穿效应达到极值。

(4) 当 $\omega > \omega_p$ ， $0 < \epsilon_r < 1$ ， $n = \sqrt{\epsilon_r} < 1$ ，此时金属（或是等离子体）是比真空还要光疏的介质，光波可以在其中传播。但因为折射率与空气毕竟不同，所以此时一个有限厚度的

的金属板对电磁波仍然有反射，造成透射率的降低。因此， $\omega = \omega_p$ 就定义了一个由不透明到透明的等离子共振带边，实验上常利用这个现象来探测金属的等离子体共振频率。

(5) 金属在 GHz 和在光波段均可以很好的反射电磁波，但机理及表现形式完全不同。前者是靠金属的介电常数的虚部，而后者靠的是负的介电常数。

Tips: $\omega = \omega_p$ 时， $\epsilon_r \rightarrow 0, n \rightarrow 0$ ，我们发现体系具有许多奇异的特性。比如，根据(8.4.15)， $\vec{B} \rightarrow 0$ ，也就是此时体系内部只存在电场。另外，这种遂传透明现象与体系的厚度无关，这一点又与光学中法布里-帕罗效应很不相同。尽管现在研究的金属只能在紫外（ ω_p ）具有这个性质，基于 Metamaterials，任何其实可以在任意频段均实现这种奇异材料。这种材料叫 epsilon-near-zero (ENZ)或者 zero-index-material (ZIM)，是目前非常热的前沿研究课题。

3. 非良导体

对于导电性能不好的导电媒质，比如一些电介质，其既有价带电子贡献的介电性质（ ε_r ），又因为有少量掺杂的电荷或是其他原因具有很小的电导率 σ_c 。这种物质的复介电函数可以写成

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_r + i \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \quad (8.4.16)$$

因为电导率很小， $\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \ll 1$ ，(8.4.16)意味着这种物质的介电常数具有很小的虚部。

将(8.4.16)带入色散关系(8.4.4)中可得

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)} = \beta + i\alpha \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} + i \frac{\sigma_c}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (8.4.17)$$

电磁波的解为：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (8.4.18)$$

显然，电磁波在这种介质中的传播性质又与良导体的两种情况均不同，与真空中的性质相仿，只是波在传播的过程中有少量能量耗散。注意到 $\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)}$ 即是体系的有效折射率，而上面的分析显示折射率的虚部对应着电磁波在体系中的耗散 --- 这一点与电导率的实部恰好对应（注意 $\tilde{\varepsilon}$ 和 σ 的关系(8.3.15)）。

Tips: 研究电磁媒质中电磁波的特性的范式:

本构关系（微观理论） → 色散关系 → 本征态（电场、磁场关系，偏振...）

§ 8.5 旋光介质中的电磁波

之前我们研究了普通电介质和导电介质中电磁波的传播特性。这两种媒介的区别是前者通常为非色散介质，后者是色散介质；共同特性是它们都是各向同性介质。下面我们将进一步研究一种各向异性介质 - 旋光介质，并且考察其中电磁波的传播特性。

当对等离子介质施加静磁场时，这类介质就叫做旋光介质。比如地球附近的受地磁场影响的等离子体层，或者处于恒定磁场中的金属，都属于此类介质。要

研究电磁波在这种介质中的传播行为，类似研究金属中的电磁波，我们还是首先研究其[本构关系](#)，然后再求解 Maxwell 方程在其中的解。

1. 旋光介质的本构关系

考虑处于静磁场 \vec{B}_0 中的自由电子气对电场的响应时。忽略杂质的散射项，电子的运动方程为

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0 \right] \quad (8.5.1)$$

其中，设静磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ，强度远远大于电磁场中的磁场；外电场随时间谐变（ $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ ）。显然，在外场的驱动下，电子的运动速度也具有 $e^{-i\omega t}$ 因子。

设 $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$ ，则(8.5.1)式的 3 个分量形式可以写为

$$\begin{aligned} -i\omega v_{0x} &= \frac{e}{m} E_{0x} + \frac{e}{m} v_{0y} B_0 \\ -i\omega v_{0y} &= \frac{e}{m} E_{0y} - \frac{e}{m} v_{0x} B_0 \\ -i\omega v_{0z} &= \frac{e}{m} E_{0z} \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

定义 $\omega_B = \frac{|e| B_0}{m} = -\frac{e B_0}{m} > 0$ （此处我们的定义是 $e < 0$ ），物理意义是电子在垂直磁场平面（xy-平面）内做圆周运动的圆频率，代入（8.5.2）并解之可得

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\ v_{0y} &= \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{0y} - \omega_B E_{0x}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\ v_{0z} &= -\frac{e E_{0z}}{im\omega} \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

将（8.5.3）代入电流密度公式 $\vec{j} = n_e e \vec{v}$ ，可得电流密度的形式：

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{n_e e^2}{m} \frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} e^{-i\omega t} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} (i\omega E_x + \omega_B E_y) \\ j_y &= \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} (i\omega E_y - \omega_B E_x) \\ j_z &= -\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega} E_z \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

我们发现电流和电场之间的关系满足一个拓展的欧姆定律

$$j_i = \sigma_{ij} E_j, \quad \text{or}, \quad \vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (8.5.5)$$

只不过此时电导率为一个各向异性的矩阵，其具体形式为

$$\vec{\sigma}(\omega) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{(\omega^2 - \omega_B^2)} \begin{bmatrix} i\omega & \omega_B & 0 \\ -\omega_B & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\omega^2 - \omega_B^2)}{i\omega} \end{bmatrix} \quad (8.5.6)$$

有了电导率矩阵，我们可以进一步求出介质的有效介电常数。此时，Maxwell 第四条方程（时域谐变下）为 $\nabla \times \vec{H} = (\vec{\sigma}(\omega) - i\omega \varepsilon_0) \vec{E}$ ，在交变条件下将“传导电流”看成金属的束缚电流，则对此有效电介质来讲，方程应为 $\nabla \times \vec{H} = -i\omega \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E}$ 。两式对比可得

$$\vec{\varepsilon}_r(\omega) = I + i \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (8.5.7)$$

这是一个各向异性的“等效介电常数”张量，其中

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_B}{(\omega^2 - \omega_B^2)\omega}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (8.5.8)$$

注意：当 $B_0 = 0$ 时， $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ ，体系回到各向同性的等离子体。

所以磁场对等离子体的影响为：1）使得体系的有效介电函数变成各向异性，2）而且其非对角元素为纯虚数。具有类似（8.5.7）式的介电常数的体系通常叫做旋电材料，其中的电磁波的行为非常奇异。与此相对应，若磁导率矩阵 $\vec{\mu}_r(\omega)$ 具有（8.5.7）式，则体系称为“旋磁材料”。

2. 旋光介质中的电磁波本征态

下面我们研究此类材料中的电磁波特性。下面介绍的方法其实是计算各向异性电磁材料中的波的行为的一个通用方法。取平面波试解 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ ， $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ （ \vec{E}_0 ， \vec{H}_0 为常矢量），将其带入频域的 Maxwell 方程组（注意到此时 $\varepsilon_r(\omega)$ 为一张量），则有

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot (\vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu_0 \vec{H}_0 \\ \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \end{cases} \quad (8.5.8)$$

一般条件下求解 (8.5.8) 相当复杂 (参考习题)。下面做些简化, 考虑最简单的一种情况: A) 假设 $\omega > \omega_p \gg \omega_B$, 故 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 都是正实数, 且 $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$; B) $\vec{k} = k\hat{e}_z$ 。

由第一式及 $\vec{\varepsilon}_r$ 的形式, 可得 $E_{0z} = 0$, 即 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$, **因此在此条件下电磁波仍然为横波!** 由第三、四式可得

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (8.5.9)$$

整理可得 (利用 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$)

$$\boxed{k^2 \vec{E}_0 = k_0^2 \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0} \quad (8.5.10)$$

其中 $k_0 = \omega/c$ 为真空中的波矢。(8.5.10) 看上去与各向同性介质中的电磁波传播的色散关系极为类似, 唯一的区别是此处 $\vec{\varepsilon}_r$ 为一张量。但也正因为这一特征, **容易证明 $\vec{E}_0 // \vec{e}_x$ 以及 $\vec{E}_0 // \vec{e}_y$ 的线偏振光波都不是 (8.5.10) 的解。那么此时电磁波的偏振态到底应当是什么?** 考虑到 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$, 则一般情况的解为 $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$, 其中 E_{0x}, E_{0y} 一般情况下为复数。代入 (8.5.10), 写出分别沿 x 和 y 方向的分量形式, 可得 2 个方程。将这两个方程写成矩阵的形式, 有

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 k_0^2 - k^2 & i\varepsilon_2 k_0^2 \\ -i\varepsilon_2 k_0^2 & \varepsilon_1 k_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = 0 \quad (8.5.11)$$

解 (8.5.11) 式等于对角化相应的矩阵。计算得到 2 个本征值,

$$k_+ = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad k_- = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (8.5.12)$$

将本征值代入 (8.5.11) 可得相应的本征矢量。整理之后结果为

$$\begin{aligned} k_+: \quad E_{0x} = iE_{0y} &\Rightarrow \vec{E}_0^+ = E_0 (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) / \sqrt{2} = E_0 \vec{e}_{right} \\ k_-: \quad E_{0x} = -iE_{0y} &\Rightarrow \vec{E}_0^- = E_0 (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) / \sqrt{2} = E_0 \vec{e}_{left} \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

(8.5.12) - (8.5.13) 显示在这种材料中, 沿 z 轴传播的电磁波的本征态不是线偏振的, 恰恰对应着左右旋圆偏振! 且 (8.5.12) 显示这两个本征态的色散关系 (或者说传播的相速度) 不相同。对右旋光, 波的相速度为

$$v_{right} = \omega / k_+ = c / \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (8.5.14)$$

对左旋光

$$v_{left} = \omega / k_- = c / \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (8.5.15)$$

因此，在介质中沿着磁场方向传播时，**左旋光比右旋光的速度快。**

3. 法拉第效应

当一个**线偏振波**由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中时，由于线偏振波可以分解为两个等幅的**左、右旋圆偏振波**，而左旋和右旋波的波速又不相等，结果是电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转。这种效应叫法拉第旋光效应，如图 8.4 所示。

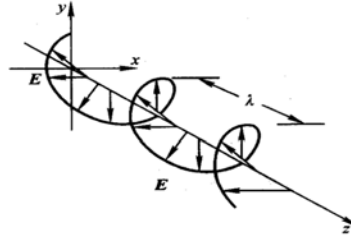


图 8.4

具体可以计算出电磁波的传播行为。设进入 Faraday 介质之前在真空中传播的线偏振电磁波为

$$\vec{e}_x E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_{right} + \vec{e}_{left}) e^{i(k_0 z - \omega t)} \quad (8.5.16)$$

进入 Faraday 介质后，假旋光体系对左右旋光的透射率一样，则电磁波变成

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{right} e^{ik_+ z} + \vec{e}_{left} e^{ik_- z}) e^{-i\omega t} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{right} e^{i\Delta k \cdot z/2} + \vec{e}_{left} e^{-i\Delta k \cdot z/2}) e^{i(\bar{k}z - \omega t)} \\ &= \frac{E_0}{2} [(e^{-i\Delta k \cdot z/2} + e^{i\Delta k \cdot z/2}) \vec{e}_x + i(e^{-i\Delta k \cdot z/2} - e^{i\Delta k \cdot z/2}) \vec{e}_y] e^{i\bar{k}z} e^{-i\omega t} \\ &= E_0 [\cos(\Delta k \cdot z/2) \vec{e}_x + \sin(\Delta k \cdot z/2) \vec{e}_y] e^{i\bar{k}z} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

其中 $\Delta k = k_+ - k_-$ ， $\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$ 。因此电磁波在旋光介质中的电矢量一边传播一边旋转（如上图所示）！假设 Faraday 介质的厚度为 d ，则从 Faraday 介质中出来时（将 $z = d$ 带入（8.5.17））重新变成线偏振，偏振方向为

$$\vec{E} \parallel \cos(\Delta k \cdot d/2) \vec{e}_x + \sin(\Delta k \cdot d/2) \vec{e}_y \quad (8.5.18)$$

与入射光比较偏振方向旋转了如下的角度

$$\Delta\phi = \Delta k \cdot d / 2 \approx k_0 d \varepsilon_2 / (2\sqrt{\varepsilon_1}) \quad (8.5.19)$$

此即是著名的 Faraday 旋光效应，后面一项在考虑 $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ 后得到。因为 $\varepsilon_2 \propto \omega_B$ ，显然这个偏振转角正比于外磁场 **B** 及旋光介质的厚度 **d**。

讨论：

1. 在各向同性的介质里，沿 x、y 方向偏振的光波的 k 矢量相同（或者说状态简并），因此这种介质中左右旋电磁波同样状态简并。我们既可以用线偏振的光波作为基把任意偏振的波展开，等价地，我们也可以用左右旋光作为基来做同样的事情。但各向异性介质中不存在这种简并，我们必须求出色散关系对应的电磁本征态作为基，此时不能随意选取线偏振或者圆偏振波作为基。

习题

P. 205, 8.3 （这里的金属指在 GHz 以下的良导体）

补充题：

- 1) 针对课件中讨论的导电介质的 3 种情形，分别写出当一支初始振幅为 $E_0 \vec{e}_x$ 的平面电磁波在 3 种介质中沿 z 方向传播时，能流密度的时间平均值 $\langle \vec{S}(z, t) \rangle$ ，以及在 z 点附近单位体积内单位时间产生的焦耳热的时间平均值 $\left\langle \frac{d}{dt} Q(z, t) \right\rangle$ 。
- 2) 利用连续性方程 $\nabla \cdot \vec{j}_f + \partial \rho_f / \partial t = 0$ ，证明时谐条件下电磁场满足 (8.5.8)。
- 3) 若 $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z$ ，当一束沿 y 方向偏振的电磁波沿 z 方向 ($\vec{k} // \vec{e}_z$) 穿过厚度为 d 的 Faraday 介质后偏振状态变成什么？

思考题（供有余力同学选作）

- 4) 利用迟逾时间近似考虑杂质散射的影响，重新推导有磁场存在时等离子体的本构关系 $(\vec{\sigma}(\omega), \vec{\varepsilon}_r(\omega))$ ，讨论当 $\omega > \omega_p$ 时体系中的电磁波色散关系，以及直流 ($\omega \rightarrow 0$) 条件下的 $\vec{\sigma}$ 的形式及其所对应的物理。
- 4) 查阅资料 (Landau 《连续介质电动力学》270 页以及《统计物理 II》第 4 章)，搞清楚一个铁磁介质的有效磁导率的形式。
- 5) 你是否可以在一般情况下，即不满足 $\omega > \omega_p \gg \omega_B$ ，也不预设 $\vec{k} // \hat{z}$ ，讨论旋光体系中

的电磁本征态？

6) 翻阅资料，结合课上学到的内容，弄清楚磁光 Kerr 效应的物理。

7) 上网翻阅资料，查找有关 ENZ 和 ZIM 的研究结果，结合课上内容，总结成 Note。

8) 根据 (8.5.8) 式，磁场下金属的有效介电常数的 xy 分量 $\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}$ 与 z 分量

$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ 有很大的不同，前者对应 Lorentz 模型，后者对应 Drude 模型。Lorentz 模型

是研究绝缘体的电磁响应的一个好的模型，而 Drude 模型是研究自由电子气的。问题是，为什么加了磁场之后横向运动变成了绝缘体行为了？这里有什么物理？你能否用动画展示电子在外场驱动下的运动行为，从而看到点端倪？

第二十讲

上次课

- **各向异性色散**介质

本构关系: $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r(\omega) \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega)$

- $k^2 \vec{E}_0 = k_0^2 \vec{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0$

本征模---色散关系; 本征矢量 --- 偏振态

§ 8.6 电磁波在介质面上的反射和折射

至今为止, 我们只学习了电磁波在一个**无限大均匀的块体材料**中传输时的行为。电磁波从一个材料进入另一个材料中会如何? 此即是本节我们要学习的内容。

0. 电磁波边界条件

光在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知。早期人们是基于牛顿的光粒子的概念用了许多假设推出光的反射和折射定律的。直到后来人们利用 Maxwell 方程以及边界条件, 不加任何其他假设, 成功推导出光的折射和反射定律时, 人们才完全接受光的波动性。这里我们从 Maxwell 方程出发讨论电磁波的反射和折射现象。在界面上电磁场要满足边值条件

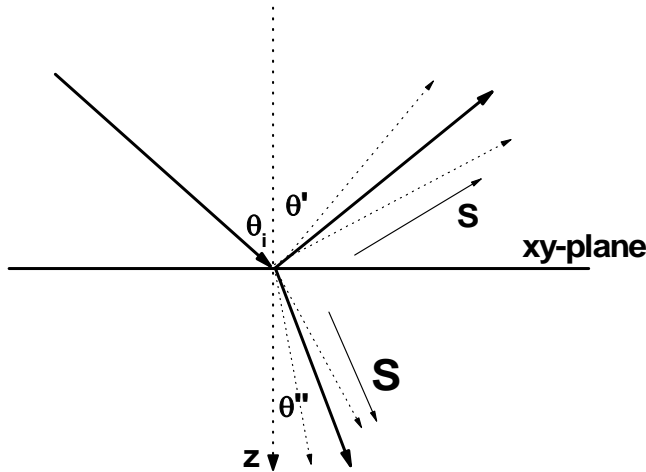
$$\vec{n} \times (\vec{E}_1(\vec{r}, t) - \vec{E}_2(\vec{r}, t)) \Big|_b = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_1(\vec{r}, t) - \vec{H}_2(\vec{r}, t)) \Big|_b = 0 \quad (8.6.1)$$

由上述边界条件, 我们可以推导出决定电磁波的界面上行为的 2 大定律。

1. 反射、折射的基本规律 – Snell's Law

首先注意到电场、磁场的切向分量在交界面内**(1) 时时 (2) 处处相等** (*我们已经把金属的传导电流在高频下作为束缚电流处理, 因此金属也可以作为电介质来处理, 无须考虑界面上的面自由电流!*) 若交界面为一平面, 我们把它取为 OXY 面。如图 8.6 所示, 考虑一单色平面波入射到交界面上, 其电场为

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (8.6.2)$$



则电场切向分量在交界面上**时时相等**要求反射波、折射波也一定携带相同的时间因子 $e^{-i\omega t}$ - **这个可以做如下理解：介质分子在外电磁波的作用下以频率 ω 做受迫振动，这种受迫振动是反射、折射波的来源，故反射、折射波一定也是以此频率振动，这其实是我们所处的世界的时间平移不变性的体现！** 假设介质 1 和 2 都是**均匀各向同性**的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以一般形式地写为所有频率为 ω 的沿不同方向传播的平面波的叠加

$$\begin{aligned} \text{反射波} \quad \vec{E}_r &= \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_0'(\vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \text{折射波} \quad \vec{E}_d &= \sum_{\vec{k}''} \vec{E}_0''(\vec{k}'') e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

其中波矢应和频率当满足色散关系

$$k' = (\omega / c) \cdot n_1, \quad k'' = (\omega / c) \cdot n_2 \quad (8.6.4)$$

其中 $n_i = \sqrt{\epsilon_{ii} \cdot \mu_{ii}}$ 为第 i 个体系的折射率。下面考虑 (8.6.1) 的第 2 个要求：电磁场在交界面上**处处相等**。这意味着反射波、折射波一定在 xy 平面内具有相同的**空间波动行为**，亦即带有相同的因子 $e^{i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$ 。**这个结论身深层次的物理其实是体系在界面上的平移不变性！考虑界面上的任意 2 点在外场激励下的震动，其唯一的不同就是外场的相位有不同，因此这两点的振动差 $e^{ik_{\parallel} \Delta r}$ ，因此响应的反射/折射波也差同样的相位。**这意味着 (8.6.3) 式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求，即

$$\vec{k}_{\parallel}' = \vec{k}_{\parallel}'' = \vec{k}_{\parallel} \quad (8.6.5)$$

由 (8.6.4) 及 (8.6.5) 可得 z 方向上的 k 矢量：

$$k_z' = \pm \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2}, \quad k_z'' = \pm \sqrt{k''^2 - k_{\parallel}^2} \quad (8.6.6)$$

如何确定 (8.6.6) 式应取正号还是负号？这里应当用到因果关系 (Causality)！

根据因果关系，反射波及折射波的能量都应当离开界面。在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向（即 Poynting 矢量 \vec{S} ）同方向 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \parallel \hat{k}$ 。故 (8.6.6) 中 k_z' 应取负根，而 k_z'' 应取正根。故反射、折射光如上图所示。由三方面的讨论：**时间平移不变性、界面空间平移不变性、因果关系**，我们可总结出反射、折射的基本规律：

- (1) 反射波、折射波的频率与入射波频率相等： $\omega' = \omega'' = \omega$
- (2) 根据 $\vec{k}_{\parallel}' = \vec{k}_{\parallel}'' = \vec{k}_{\parallel}$ ，若 $k_y = 0$ ，则必有 $k_y' = k_y'' = 0$ 。这意味着，入射线、反射线和折射线在同一平面内 - **这个由入射波 k 矢量与交界面垂直方向构成的平面定义为入射面。**
- (3) k_z' , k_z'' 的正负号由因果关系确定！
- (4) 根据 $k_x = k_x'$ ，有 $k \sin \theta = k' \sin \theta'$ ，同时因为 $k = k'$ （入射波与反射波在同一种介质中），由此得出， $\theta = \theta'$ ，即入射角等于反射角，即“镜面反射”。
- (5) 根据 $k_x = k_x''$ ，必有 $k \sin \theta = k'' \sin \theta''$ ，再根据 (8.6.4)，于是

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.6.7)$$

这就是光学中的折射定律 (Snell's Law)。因为折射定律中所涉及的物理量仅仅是 $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\epsilon_r} \cdot \sqrt{\mu_r}$ ，这正是 n 被称为介质的折射率的原因。

2. 振幅关系 – Fresnel's Law (菲涅耳定律)

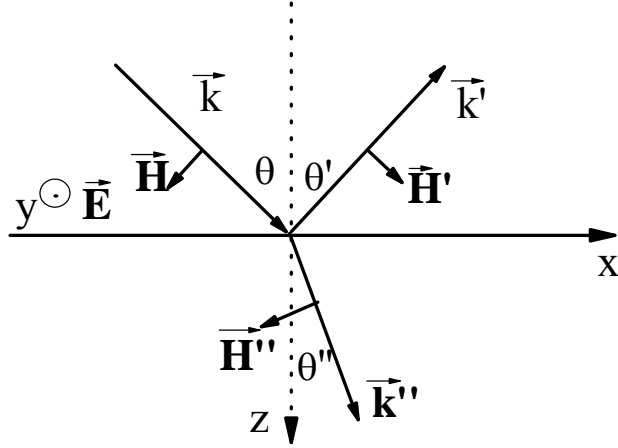
上面我们根据边值条件中的时空依赖关系推导出电磁波的传播方向所满足的要求，对折射波/反射波的振幅尚未讨论。下面我们根据 (8.6.1) 来讨论这件事情。对沿 k 方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波，**我们总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加**。因此，下面我们将分两种情形分别考虑。

A. S 波/TE (横电) 波

在这种情况下，入射波的电场垂直于入射面（躺在交界面上），如图所示。

入射、反射、以及折射波的电场可以写成

$$\begin{aligned}
\text{入射波} \quad \vec{E}_i &= \hat{y} E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
\text{反射波} \quad \vec{E}_r &= \hat{y} E'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
\text{折射波} \quad \vec{E}_t &= \hat{y} E''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)}
\end{aligned} \tag{8.6.8}$$



根据 Maxwell 方程，磁场可写成

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} (\hat{k} \times \vec{E}) \tag{8.6.9}$$

的形式，其中 $Z = \sqrt{\mu} / \sqrt{\varepsilon}$ 是介质的阻抗。因此，入射、反射以及折射波的磁场为

$$\begin{aligned}
\vec{H}_i &= \frac{E_0}{Z_1} \frac{(k_x \hat{z} - k_z \hat{x})}{k} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_r &= \frac{E'_0}{Z_1} \frac{(k_x \hat{z} + k_z \hat{x})}{k} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_t &= \frac{E''_0}{Z_2} \frac{(k_x \hat{z} - k''_z \hat{x})}{k''} e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)}
\end{aligned} \tag{8.6.10}$$

在交界面上（设 $z=0$ ）E，H 的切向值相等，则有

$$\begin{aligned}
E_0 + E'_0 &= E''_0 \\
\frac{k_z}{Z_1 k} E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k} E'_0 &= \frac{k''_z}{Z_2 k''} E''_0
\end{aligned} \tag{8.6.11}$$

注意到

$$k_z = k \cos \theta, \quad k''_z = k'' \cos \theta'' \tag{8.6.12}$$

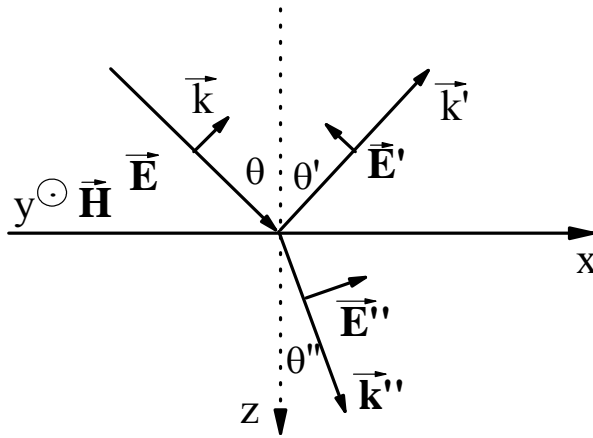
解联立方程可得

$$\begin{aligned}
E'_0 &= \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \\
E''_0 &= \frac{2Z_2 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0
\end{aligned}
\tag{8.6.13}$$

反射、折射波与入射波中的**磁场振幅关系**可由（8.6.10）求出。

B. P 波/TM 波

下面考虑另一种情况，即磁场垂直于入射面（或者说磁场躺在交界面内），此时先考虑磁场比较方便。如下图所示



$$\begin{aligned}
\text{入射波} \quad \vec{H}_i &= \hat{y} H_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
\text{反射波} \quad \vec{H}_r &= \hat{y} H'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
\text{折射波} \quad \vec{H}_t &= \hat{y} H''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)}
\end{aligned}
\tag{8.6.14}$$

根据 Maxwell 方程，电场可由

$$\vec{E} = -Z(\hat{k} \times \vec{H})
\tag{8.6.15}$$

求得。我们再次看到阻抗的重要性。因此可以根据（8.6.14-15）式写出电场 $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$ 的形式，再根据边界条件(8.6.1)得到（可与 S 波对比）

$$\begin{aligned}
H'_0 &= \frac{Z_1 \cos \theta - Z_2 \cos \theta''}{Z_1 \cos \theta + Z_2 \cos \theta''} H_0 \\
H''_0 &= \frac{2Z_1 \cos \theta}{Z_1 \cos \theta + Z_2 \cos \theta''} H_0
\end{aligned}
\tag{8.6.16}$$

(8.6.13)-(8.6.16) 式被称为菲涅耳公式，在特殊情况下（ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ）回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁

波。

讨论:

(1) 当 ϵ, μ 其中之一为负数甚至为虚数时, θ'' 失去几何意义, 此时不应当做 $\cos \theta'' = k_z'' / k''$ 的替代, 而应当直接写成 k_z'' / k'' , k_z / k 的形式; 但 Z 的形式不必改, 因为 $\vec{E} = Z(\hat{k} \times \vec{H})$ 仍然成立, 尽管此处 Z 为复数。

(2) (8.6.16) 可以通过对 (8.6.13) 进行代换 $Z \rightarrow 1/Z, E \rightarrow H$ 得到! 这反映了电磁场得对称性。电磁理论中有许多这种对称值得好好揣摩。

3. 反射率及透射率

反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为反射率 (Reflectance), 物理意义是多少入射的能量被界面反射回来。无论对 S 波还是 P 波, 反射波和入射波处于同一媒质中, 阻抗值相同, 入射角与反射角也相等。因此, 反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方:

$$R = \frac{\langle \vec{S}_r \rangle \cdot \hat{z}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{z}} = \begin{cases} \frac{|E_0'|^2 \cos \theta' / Z_1}{|E_0|^2 \cos \theta / Z_1} = \left| \frac{E_0'}{E_0} \right|^2 & S \text{ wave} \\ \frac{Z_1 |H_0'|^2 \cos \theta'}{Z_1 |H_0|^2 \cos \theta} = \left| \frac{H_0'}{H_0} \right|^2 & P \text{ wave} \end{cases} \quad (8.6.17)$$

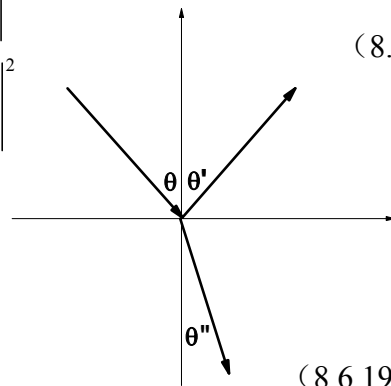
将 (8.6.13), (8.6.16) 分别带入 (8.6.17) 式即得 S, P 两种偏振情况的反射率:

$$R_S = \left| \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} \right|^2$$

$$R_P = \left| \frac{Z_2 \cos \theta'' - Z_1 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta'' + Z_1 \cos \theta} \right|^2 \quad (8.6.18)$$

同样道理, 透射率定义为

$$T = \frac{\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{z}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{z}} = \begin{cases} \frac{|E_0''|^2 \cos \theta'' / Z_2}{|E_0|^2 \cos \theta / Z_1} & S \text{ wave} \\ \frac{Z_2 |H_0''|^2 \cos \theta''}{Z_1 |H_0|^2 \cos \theta} & P \text{ wave} \end{cases} \quad (8.6.19)$$



注意: 定义反射/透射率的时候, 我们都不是直接对入(反、透)射波的能量操作, 而是将

其投影到界面的法向方向。这是因为对一个界面来讲，只有投影到其法向方向的能流分量才是“真正通过”这个界面的能流。

问题：你能否考虑一个有限大小的 Beam 在界面上的反射和折射，基于此搞清楚为什么能量守恒要乘以一个投影到法线的 $\cos \theta$ 因子？

4. 正入射条件下反射的几点讨论

(1) 正入射条件下，无论 S 波还是 P 波，反射率均为

$$R = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2$$

在光学中，我们经常利用 $R = \left| \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right|^2$ 来计算反射率，其实这不完全正确，只有当介质没有磁性时，因为 $Z_r = 1/\sqrt{\epsilon_r} = 1/n$ ，2 者等价。一般情况下正确的表达式应当由阻抗来描述。折射率完全决定了波的传播方向，然而阻抗却是决定波振幅的核心。两个物理量加在一起完全描述了一个电磁介质的所有电磁波行为。

(2) 假设 $Z_1 = Z_0$ ，则定义**相对阻抗**为 $Z = Z_2 / Z_0 = \frac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\epsilon_r}}$ 对 S 波我们可以定义反射

系数 $r_s = \frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{E'_0}{E_0}$ (P 波有同样结果)，它刻画了反射波与入射波的振幅（带

相位）的比值。我们注意到，无论对 $Z \rightarrow 0$ 的介质还是对 $Z \rightarrow \infty$ 的介质，都可以对电磁波进行强烈反射，但反射的位相却不相同。 $Z \rightarrow 0$ 的介质其实就是理想电导体（因为金属 $|\epsilon_r| \rightarrow \infty$ ，简称 Perfect electric conductor (PEC)），而 $Z \rightarrow \infty$ 的介质对应的是 $|\mu_r| \rightarrow \infty$ 的理想“磁导体”(PMC) 自然界不存在，可以通过 Metamaterial 的概念实现。通过调控电磁波介质的阻抗特性，我们可以实现对电磁波反射位相的有效调控，从而实现一系列难以置信的新的电磁波现象。

5. Brewster 角

对常规介质，在可见光频段磁导率接近于 μ_0 （光频下磁性介质中的磁矩无法跟上电磁场的变化，宏观上不显现磁性）。令 $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$ ，则此时折射系数与阻抗满足 $Z_r = 1/\sqrt{\epsilon_r} = 1/n$ 。利用折射定律

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (8.6.20)$$

针对两种偏振光，带入反射率的表达式（8.6.18）可得：

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \\ R_p &= \frac{\tan^2(\theta - \theta'')}{\tan^2(\theta + \theta'')} \end{aligned} \quad (8.6.21)$$

对 P 波反射率，注意到当

$$\theta + \theta'' = \pi/2 \quad (8.6.22)$$

条件满足时，反射率为 0：

$$R_p = 0 \quad (8.6.23)$$

亦即：当反射波与折射波相互垂直时，P 极化电磁波完全不被反射！满足（8.6.22）

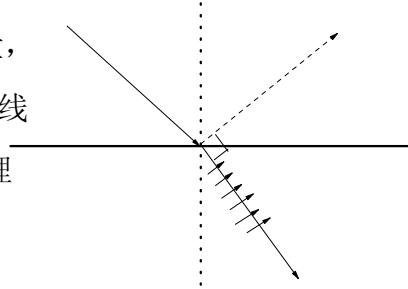
式条件的入射角称为布鲁斯特角（Brewster Angle），满足 $\theta_B = \tan^{-1}(n_2/n_1)$ 。其在

光学中有着重要的理论和实际的意义 – 如当一支没有启偏的自然光已以这个角度入射到介质表面时，反射波没有 P 偏振分量，只有 S 偏振分量，这样反射波就变成了完全的线偏振波。可以利用下面的 Argument 从物理上理

解 Brewster Angle：

当 P 偏振电磁波入射到介质表面上时，

在介质内部驱动介质分子来回振荡，这产生了如图所示的电偶极子振荡。它们的重新辐射效应产生了折射波和反射波。当入射角等于 Brewster Angle 时，反射波垂直于折射波，因为要满足横波条件，故在与反射波矢垂直方向运动的介质分子不可能辐射出反射波，故，此时介质对电磁波完全透明。注意，此结论以及几何解释只在非磁性材料中适用！对磁性介质（相对介电常数=1），结论恰恰相反！



习题:

P. 205, 8.2, 8.4

1) 从 Fresnel 公式出发, 证明在正入射的条件下, P 波和 S 波的反射率相等, 且电场的振幅比 (带相位的反射系数) 也是一样的。

2) 设有一种介质, 其 $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$, 证明

(i) 在此介质中存在传播模式的电磁波 (即 k 为实数)

(ii) 这种传播波的能量方向与波传播的方向相反, 即 $\vec{S} \parallel (-\hat{k})$

(iii) 根据这个结论, 重新讨论当电磁波由空气入射到这种介质上时所满足的 Snell 定律, 画出折射光的方向, 并重新推导折射角与入射角之间的关系。

(提示: 此处要用到因果律 – 即反射波和折射波的能量一定要离开界面!)

3) 推导 P 波的非涅耳公式 (8.6.16) 式。

4) 当电磁波从空气中入射到一个磁性介质 (相对磁导率为 $\mu_r = 4$, 相对介电常数为 1) 表面上时, 对 S、P 两种偏振情况下计算入射角为 θ 条件下的反射率的表达式。试问, S、P 哪一种偏振波有 Brewster 角效应? 对应的 Brewster 角是多少? 发生 Brewster 效应时对应的物理解释是什么?

课后 Project:

1. 根据大课上教授内容, 学习如下文献, 弄清楚如何拓展 Snell 定律?

"Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves",

Shulin Sun, Qiong He, Shiyi Xiao, Qin Xu, Xin Li & Lei Zhou,

[Nature Materials 11, 426-431 \(2012\).](#)

2. 学习如下文献, 搞清楚如何利用超薄体系的反射特性调控入射波的偏振?

"Manipulating Electromagnetic wave polarizations by anisotropic metamaterials",

Jiaming Hao, Yu Yuan, Lixin Ran, Tao Jiang, J. A. Kong, C. T. Chan, and L. Zhou,

[Phys. Rev. Lett. 99, 063908 \(2007\).](#)

第二十一讲

上次课:

- **Snell' Law:** $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1}$, $n = \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_r}$, 折射率;

能量守恒、动量守恒、因果关系

- **Fresnel's Law: S 波:**
$$\begin{cases} E'_0 = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \theta''}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \\ E''_0 = \frac{2Z_2 \cos \theta}{Z_2 \cos \theta + Z_1 \cos \theta''} E_0 \end{cases}, \quad Z = \sqrt{\mu} / \sqrt{\epsilon}, \text{ 阻抗}$$

P 波: H 场表示 (Z_2, Z_1 互换)

- **Brewster 角** $\theta + \theta'' = \pi/2$ P 波透明

§ 8.7 全 反 射

在实际应用中,人们希望能有效控制电磁波的传播方向,因此,一个好的反射镜就变得必不可少。电磁波在金属表面被近乎全反射,因而金属镜子在光学上被广泛应用。然而这种反射仍有少量的能量耗散(特别是在光波段)。另外,当频率到达紫外时(频率高于等离子共振频率 ω_p),金属都变成透明材料,无法有效反射电磁波。因此急需寻找无耗散的全反射方式。人们发现当电磁波以特定角度从光密介质入射到光疏介质中时($n_1 > n_2$),在界面上会发生无损耗的全反射。这种现象有许多实际应用,新兴的纤维光学就是由此发展出来的。当然,基于全介质的光子晶体是另外一个解决方案 --- 这里就不再展开了,而只介绍基于介质的全反射现象。

1. 全反射临界角

考虑电磁波从光密介质(折射率为 n_1)入射到光疏介质中(折射率为 $n_2 < n_1$),

由折射定律 $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1}$ 可得

$$\sin \theta'' = \sin \theta \frac{n_1}{n_2} > \sin \theta \quad (8.7.1)$$

当入射角从 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta$ 从 0 变到 1。因为 $\frac{n_1}{n_2} > 1$, $\sin \theta''$ 从 0 变到一个比 1 大的数。因此当

$$\theta = \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (8.7.2)$$

时, $\sin \theta'' = 1$ 。而当入射角 $\theta > \theta_c$ 时, 显然会出现 $\sin \theta'' > 1$ 的情况, 这时折射角将为一虚数, 它已失去几何上作为角度的直观解释, 不能直接将其带入 Fresnel 公式求解。然而, 我们可以将其写回原始的波矢之间的关系。利用 (8.6.12) 得

$$\cos \theta'' \rightarrow \frac{k_z''}{k''} = \frac{\sqrt{k''^2 - k_x^2}}{k''} = \frac{\sqrt{(k_0 n_2)^2 - (k_0 n_1 \sin \theta)^2}}{k_0 n_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c}\right)^2} \quad (8.7.3)$$

当 $\theta > \theta_c$ 时, 上式为纯虚数, 记为 $i\alpha$, 其中

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c}\right)^2 - 1} \quad (8.7.4)$$

将其代入公式(8.6.13)和 (8.3.16), 便有

$$\begin{aligned} E'_{0S} &= \frac{Z_2 \cos \theta - i\alpha Z_1}{Z_2 \cos \theta + i\alpha Z_1} E_{0S} \\ H'_{0P} &= \frac{Z_1 \cos \theta - i\alpha Z_2}{Z_1 \cos \theta + i\alpha Z_2} H_{0P} \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

可见, $R_s = R_p = 1$ (参考 (8.6.17)), 亦即电磁波发生全反射, 因此我们将 θ_c 称为**全反射临界角**。显然, S, P 两种偏振的反射波的相位未必相同。因此当一支沿任意方向线偏振的电磁波以大于临界角的入射角被介质全反射时, 其偏振图案原则上是椭圆偏振。

2. 折射波

在发生全反射时, 介质 2 中的电磁波并不为零, 这是因为, 如果介质 2 中的电磁波完全为零, 就不可能满足边值关系。考虑 S 波, 因 $k_z'' = in_2 k_0 \alpha = i\beta$, $k_x'' = k_x$, 故折射波电场为

$$\vec{E}_t = \hat{y} E_0'' \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (8.7.6)$$

上式表示折射波将沿 z 方向衰减, 沿 x 方向传播。因此, 离界面几个波长处, 场强振幅已变得很小, 可以忽略不计; 换句话说, 电场不仅沿着界面方向传播, 而

且被限制在表面附近的一个区域内，所以称这种全反射的折射波为**表面波**。

3. 折射波能流

既然存在折射波，那么在第二种介质中就有能流。考虑 S 波，则我们可以根据 (8.7.6) 式求出介质中的磁场

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}''}{\mu\omega} \times \vec{E}'' = \frac{E_0''}{\mu\omega} (k_x \hat{z} - i\beta \hat{x}) \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (8.7.7)$$

假设 E_0'' 为实数，可分别求得能流 $\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H}$ 的法向分量 S_{pz} 和切向分量 S_{px} ：

$$S_x = \frac{(E_0'')^2 k_x}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos^2(k_x x - \omega t)$$

$$S_z = -\frac{(E_0'')^2 \beta}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \sin(k_x x - \omega t) \cos(k_x x - \omega t)$$

由此可见：

- (1) 在界面的法线方向上能流以频率 2ω 作振动，在第二种介质中， S_{pz} 对时间的平均值为零，即平均来说没有能量流入介质 2 中。
- (2) 界面切线方向的能流 S_{px} 对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在 x 方向仍有能流。
- (3) 根据 S_{px} 和 S_{pz} 的表达式知道能流的大致走向如图 8.8。可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量。



图 8.8

第九章 波导和谐振腔

上一章中我们研究了电磁波在体材料内以及在不同材料界面上的反射/折射行为，其中电磁波全都是以**平面波**的形式存在的。然而要将电磁波的信号传递到远方，用平面波的方法并不经济 – 因为平面波有着无限大的波前。实际生活中我们利用波导管来有效传递电磁波，将波导管的两端密封，便进一步得到谐振腔。

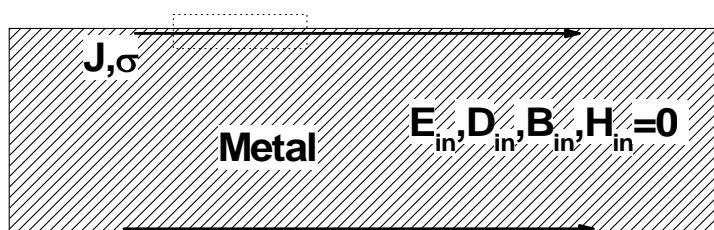
本章我们将研究波导管中的电磁波的传播行为，以及谐振腔内的电磁振荡。

§ 9.1 波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的中空金属管，其截面可以是任意形状，但通常波导管在传播方向是均匀的。电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播，这就使它与自由空间内传播的电磁波在性质上有很大的差别。

1. 边界条件

因为电磁波完全封闭在波导管内，我们首先应当解决的问题是电磁波在波导管壁（亦即导体）上满足的边界条件。金属波导管通常在微波通信波段使用。上两章中我们已经学到在通讯波段，金属对电磁波有很好的屏蔽作用 ---- 电磁波、感应电流、感应电荷都局域在金属表面的一个厚度为“趋肤深度 $\delta = \sqrt{2/\mu\omega\sigma_c}$ ”的一个薄层内，**金属体内没有波、电流、电荷**。因为良导体的 σ_c 非常大，趋肤深度非常小。我们可因此将真实导体（在微波段）简化为一个“理想导体” – **即金属体内没有电磁波，但在表面上有面电荷 σ 、面电流分布 \vec{J} ，换言之，将趋肤深度层内的电荷、电流简化成面电荷、面电流**。将 Maxwell 方程的积分形式应用到理想金属的表面，我们得到理想金属的边界条件



$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (9.1.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \sigma, \quad \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (9.1.2)$$

其中 $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ 等场量是在金属表面上（介质一侧）测到的。这里已经用了金属内部所有场量为 0 的条件。事实上 σ 和 \vec{J} 均是未知量，要根据求得的场利用 (9.1.2) 式来决定。故“理想导体”表面的场的边界条件就是 (9.1.1)。

2. 场方程

我们现在来研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都是一样的直波导管的情形。若波导管中无源，且是真空，则波导中的电磁场满足波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.3)$$

选择波导管的长度方向为 z 轴，我们感兴趣的是沿着 z 方向传播的解。但此时沿 z 方向传播的平面波一定不是波导管中的解，因为常矢量 \vec{E}_0 不可能满足理想导体边界条件(9.1.1)。注意到波导管沿 z 轴均匀，故场量对 z 的依赖关系一定为 $e^{ik_z z}$ ，同时，时间轴的均匀性保证时间依赖关系总是 $e^{-i\omega t}$ 。故设解为：

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0(x, y) \\ \vec{B}_0(x, y) \end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (9.1.4)$$

代入方程(9.1.3)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.5)$$

式中

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (9.1.6)$$

$$k_c^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (9.1.7)$$

(9.1.5)式显示电磁场的 6 个分量全部满足 Helmholtz 方程，不过分别计算电场、磁场的 6 个分量将非常复杂。其实 (9.1.5) 是从 Maxwell 方程推出的 2 次方程，不是原始的 Maxwell 方程。当我们重新检查原始 Maxwell 方程组时，我们发现不同的场分量之间并不独立（就像平面波中电场与磁场的值并不独立，比值是阻抗一样）。由 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的 x, y 两个方向上分量公式可得

$$\begin{aligned} \partial_y E_{0z} - ik_z E_{0y} &= ik_0 c B_{0x} \\ ik_z E_{0x} - \partial_x E_{0z} &= ik_0 c B_{0y} \end{aligned}$$

由方程 $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 在 x, y 两个方向上的投影可得

$$\begin{aligned} \partial_y B_{0z} - ik_z B_{0y} &= -i \frac{k_0}{c} E_{0x} \\ ik_z B_{0x} - \partial_x B_{0z} &= -i \frac{k_0}{c} E_{0y} \end{aligned}$$

利用上面四个方程可以将场的横向分量用纵向分量来表示的表达式为

$$\begin{cases} E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_y (cB_{0z}) + k_z \partial_x E_{0z}) \\ E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_x (cB_{0z}) - k_z \partial_y E_{0z}) \\ cB_{0x} = -\frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_y E_{0z} - k_z \partial_x (cB_{0z})) \\ cB_{0y} = \frac{i}{k_c^2} (k_0 \partial_x E_{0z} + k_z \partial_y (cB_{0z})) \end{cases} \quad (9.1.8)$$

(9.1.8)式告诉我们：6个场分量只有2个是独立变量，一旦场的纵向分量 B_{0z} 、 E_{0z} 知道了，则其他分量可以通过(9.1.8)式得到。另外，值得注意的是 E_{0y} 和 B_{0x} 有很好的对称性，而 E_{0x} 和 B_{0y} 也有很好的对称性。这样我们只需要在边界条件(9.1.1)下计算 B_{0z} 、 E_{0z} 所满足的方程，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \begin{pmatrix} E_{0z}(x, y) \\ B_{0z}(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad (9.1.9)$$

然后利用(9.1.8)式推出所有的场量形式。

波的模式（偏振） 从(9.1.9)式我们可以看出，当 $B_{0z} = 0$ 、 $E_{0z} = 0$ 时，我们有 $E_{0x} = E_{0y} = B_{0x} = B_{0y} = 0$ ，因此非平庸解不存在。这意味着波导管内不可能传播横电磁波(TEM波)，或者类似真空中的平面波。可见，波导中波的解 B_{0z} 和 E_{0z} 不能同时为0。接下来我们考虑两个独立的情形，

(1) $B_{0z} \neq 0$ 而 $E_{0z} = 0$ ；横电波（TE波）

(2) $B_{0z} = 0$ 但 $E_{0z} \neq 0$ ；横磁波（TM波）

事实上，这与真空中电磁波的两种偏振状态非常类似。**这是波导中电磁波的最显著特点之一。**下面我们将以矩形波导为例说明波导中电磁波的行为。

注意：我们常说电磁波是横波，但那时对真空中的平面波解才正确，在波导管内，电磁波横向受到波导壁的限制，完全的横波不可能存在。但后面我们介绍一种新的看法，大家可以明白其实波导管内没有横波和电磁波是横波这2者不矛盾。

§ 9.2 矩形波导

矩形波导是指横截面为矩形的波导，结构如图 9.1 所示。设波导管壁为理想导体，分别考虑 TE 和 TM 两种偏振方式的波的传输行为。

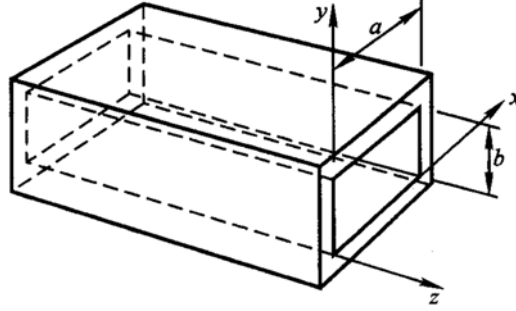


图 9.1

(1) TE 波

由上节的讨论可知，首先要求出轴向分量 B_{0z} 。在现在的情况下方程为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) B_{0z} = 0 \quad (9.2.1)$$

考虑理想导体边界条件 (9.1.1)，可得

$$B_{0x}|_{x=0,a} = B_{0y}|_{y=0,b} = E_{0x}|_{y=0,b} = E_{0y}|_{x=0,a} = 0 \quad (9.2.2)$$

但这些条件都不是对 B_{0z} 的！根据 (9.1.8)，在 TE 波的条件下 ($E_{0z} = 0$) 有

$$E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_y B_{0z}, \quad E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_x B_{0z}, \quad B_{0x} = \frac{i}{k_c^2} k_z \partial_x B_{0z}, \quad B_{0y} = \frac{i}{k_c^2} k_z \partial_y B_{0z} \quad (9.1.8')$$

因此 (9.2.2) 式可转化成对 B_{0z} 的如下边界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{0z} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} \Big|_{y=0} = 0 \quad (9.2.3)$$

根据分离变量法，(9.2.1) 的通解为 $B_{0z} = B_0 (\sin k_x x, \cos k_x x) \cdot (\sin k_y y, \cos k_y y)$ ，

其中 $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$ 。再根据边条 (9.2.3)，不难证明，满足上述方程和边界条件的解为：

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

$$k_c^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$
(9.2.4)

式中 m 、 n 为正整数或零。把(9.2.4) 代入(9.1.8')式得到 \vec{E} 、 \vec{B} 的全分量为

$$TE波 \left\{ \begin{array}{l} E_x = -i \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = i \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = 0 \\ B_x = -i \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_y = -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{array} \right. \quad (9.2.5)$$

习题

P. 205, 8.9

补充题:

- 1) 对 P 波入射, 在发生全发射情况下推导出折射波的能量表达式。
- 2) 当电磁波从空气中入射到一个磁性介质(相对磁导率为 $\mu_r = 4$, 相对介电常数为 1) 表面上时, 对 S、P 两种偏振情况下计算入射角为 θ 条件下的反射率的表达式。试问, S、P 哪一种偏振波有 Brewster 角效应? 对应的 Brewster 角是多少? 发生 Brewster 效应时对应的物理解释是什么?

课外小课题

- 1) 仔细讨论发生全反射时对应的偏振问题, 用数值计算+图形的方法讨论一个线偏振的光经全反射后偏振图案如何变化。
- 2) 考虑微波波段电磁波正入射到金属良导体的表面, 计算在金属对电磁波的吸收, 由此理解为什么良导体对电磁波几乎不吸收?

第二十二讲

上次课:

- 全反射：光密 \rightarrow 光疏，动量匹配，表面波
 - 理想金属 (PEC) 边界条件： $\vec{n} \times \vec{E} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$
(电场“站”在金属表面，磁场“躺”在金属表面，金属内场为 0)
 - 场方程： $(\nabla_{\parallel}^2 + k_c^2) \begin{pmatrix} E_{0z}(x, y) \\ B_{0z}(x, y) \end{pmatrix} = 0$, $k_c^2 = k_0^2 - k_z^2$
偏振： $TE: B_{0z}$; $TM: E_{0z}$
 - 矩形波导：TE: $B_{0z} = B_0 \cos\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{b} y\right)$, $k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$
-

讨论如下

- 色散关系

(9.2.4) 式说明 (9.2.1) 式中不是所有的 k_c^2 都可以给出符合边界条件的解，只有某些特定的值才被允许。根据 k_c^2 的定义，可计算波导管中传播模式对应的频率与波矢之间的关系（亦即我们常说的色散关系），

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{ck_c}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (9.2.6)$$

其中

$$\omega_c = ck_c \quad (9.2.7)$$

- 截止频率

(1) 当 $\omega < \omega_c$ 时， k_z 为纯虚数，波导类似一个光波段下的金属，电磁波不能在其中传播，这种模式称为消逝波，Evanescent mode;

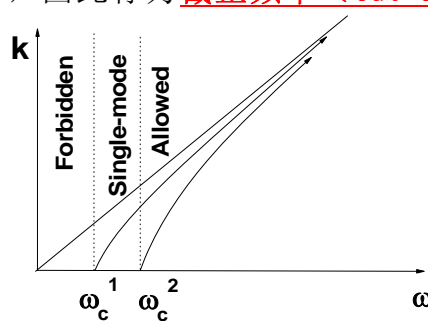
(2) 当 $\omega > \omega_c$ 时， k_z 为实数，波导类似一个常规电介质。电磁波可以传播，这种模式称为传播模式 (Propagating Mode)。有时可以根据电介质中电磁波传播的

色散关系 $k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ 定义波导的有效介电常数为 $\epsilon_r = 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$ 。

(3) ω_c 给出了电磁波能够传播的最低频率，因此称为 **截止频率 (Cut-Off Frequency)**。

● 模式

m 、 n 取不同的数值就对应了波的不同模式，因为波在波导内传播时 xy 平面的电磁场图案 (Pattern) 保持不变。通常



人们根据 ω_c 的大小来标记模式的高低。对 TE 模式来说， m, n 中不能全部为 0，因此当 $a < b$ 时，TE 模的最低阶模式为 TE_{01} （又记为 $H_{0,1}$ ，称为基模）；而当 $a > b$ 时基模为 $H_{1,0}$ 。在基模和第一高阶模的截止频率之间，波只能以一种模式存在（如图所示）。

● 物理图像

作为一个例子，考察最简单的也是最常用的波型 H_{10} 波的场分布。由(9.2.5)式得

$$\begin{cases} E_y = i \frac{ck_0}{k_c} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_x = -i \frac{k_z}{k_c} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases} \quad (9.2.8)$$

电场只有 y 方向分量，因此在 $y=0, b$ 两个边界自动满足 PEC 边条；

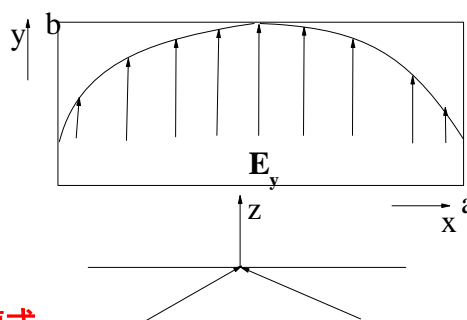
为了使得在 $x=0, a$ 出亦满足边条，

E_y 的大小必须沿 a 边正弦变化，

中间强两边弱，形成了一个波长

为 $2a$ 的驻波。可以想象，对于高阶模式，

无非是以两个界面为节点，形成有更多节点的驻波而已。



对于波导中的模式，事实上我们有另一种很有启发性的看法：**每一个模式都可以展开成几个对称的斜入射的平面波的线性叠加**。如对 TE_{10} 模式，其波场 (9.2.8) 完全等价于一支波矢为 $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$ 的平面波和另一支波矢为 $\vec{k} = -k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$ 的平

面波的叠加，即

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^+ e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \vec{E}_0^- e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (9.2.9)$$

其中

$$k_x = \pi / a \quad (9.2.10)$$

我们前面讲过在波导管中常规的正入射的平面电磁波（横波）不能传播，因为其不满足波导管中横向约束的边界条件。然而将斜入射的电磁波进行合适的线性叠加之后的波可以满足波导管的边界条件，故可以传播。这种线性叠加后的波当然不是常规意义下的横波。

● 能流

仔细观察（9.2.5）式，不难发现横向场分量（ E_x, E_y, B_x, B_y ）之间没有相位差，而与纵向场分量 B_z 之间有 $\pi/2$ 的相位差。这恰恰说明了波导中能流的时间平均值只能沿 z 轴非 0！

(2) TM 波

下面来研究波导中的另一个偏振状态 - TM 波。首先此时要求出轴向分量 E_{0z} ，其满足的方程为(9.1.9)式，对应的边界条件(9.2.2)式现在可写成

$$E_{0z} \Big|_{x=0} = 0, \quad E_{0z} \Big|_{x=a} = 0 \quad .$$

因此，容易求出满足上述边界的本征值问题的解为

$$\begin{aligned} E_{0z} &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\ k_c^2 &= \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

把(9.2.11)式代入(9.1.8)则可得横向分量。综合起来，TM 波场为

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned}
E_x &= i \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\
E_y &= i \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\
E_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\
B_x &= -i \frac{n\pi}{b} \frac{k_0}{ck_c^2} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\
B_y &= i \frac{m\pi}{a} \frac{k_0}{ck_c^2} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\
B_z &= 0
\end{aligned} \right\} \text{TM波} \quad (9.2.12)
\end{aligned}$$

我们作如下的讨论：

- (1) TM 波的色散关系、截止频率都与 TE 波类似。甚至任何一个 TM 波模式也都可以分成几支平面波的叠加，只是平面波的偏振状态与 TE 有所不同而已。
- (2) 不同的是对 TM 波， m, n 均不能为 0，否则 $E_0 \equiv 0$ ；因此对 TM 波，基模是 TM_{11} 模式。因此对同样一个波导，其 TM 波的截止频率一定高于 TE 波的截止频率。

[\(用录像展示截止频率的物理意义，以及 TE/TM 波下的波形\)](#)

§ 9.3 谐振腔

低频电磁波是利用 LC 电路组成的振荡器激发的，当频率很高时(例如微波范围)，这种振荡回路有强烈的焦耳热损耗。因此，必须用另一种振荡器——**谐振腔**来激发高频电磁波。

谐振腔是由理想导体所围成的封闭腔体，显然腔中单色场满足如下方程：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.3.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B}, \nabla \times \vec{B} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E} \quad (9.3.2)$$

在边界上电磁场满足 PEC 边界条件

$$\vec{e}_n \times \vec{E} = 0, \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.3.3)$$

从根本上来说，我们是在边界条件(9.3.3)式下求解方程(9.3.1)和(9.3.2)式。

任意形状的谐振腔中的电磁模式必须数值求解。然而对最简单的谐振腔 –

长方体谐振腔，其电磁模式可以解析求解，这对我们理解谐振腔非常有帮助。将一个尺寸为 $a \times b \times d$ 的长方体谐振腔看作一个截面为 $a \times b$ 的长度为 d 的空腔波导两端加上 PEC 端面。不加端面时，空腔中的电磁波一定为波导中的电磁本征态。取定一个模式（如 TE_{mn} 模式），则谐振腔中的电磁场的一个分量为

$$B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_z z} \right] e^{-i\omega t} \quad (9.3.4)$$

其他分量可以相应导出。加上 PEC 端面后，端面对电磁波进行反射，因此波导内的场现在由两部分叠加而成：一是沿着 z 方向传播的前进波；二是沿着 $-z$ 方向的反射波。因此一般来说，有

$$B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ik_z z} + B'_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ik_z z} \right] e^{-i\omega t} \quad (9.3.5)$$

B_0 B'_0 两个系数应由在新加上的 2 个端面上的边界条件

$$\vec{e}_n \times \vec{E} \Big|_{z=0,d} = 0, \quad \vec{e}_n \cdot \vec{B} \Big|_{z=0,d} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z \Big|_{z=0,d} = 0 \quad (9.3.6)$$

决定（其他四个界面上的边界条件已经满足）。在 $z=0$ 处的边界要求

$$B'_0 = -B_0 \quad (9.3.7)$$

而 $z=d$ 处的边界条件给出

$$B_z \Big|_{z=d} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(k_z d) e^{-i\omega t} = 0 \quad (9.3.8)$$

故有

$$\sin k_z d = 0 \quad (9.3.9)$$

因此， k_z 为

$$k_z = \frac{p\pi}{d}, \quad p=1,2,3,\dots \quad (9.3.10)$$

注意到 $E_{0x} = \frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_y B_{0z}$, $E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2} ck_0 \partial_x B_{0z}$ ，我们发现另一个边界条件 $\vec{n} \times \vec{E} = 0$

自动在 $z=0$ 和 $z=d$ 处满足。最后得到矩形谐振腔内场的空间部分为

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0x} = -2iB_0 \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{d} \frac{1}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0y} = -2iB_0 \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{d} \frac{1}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0z} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0x} = 2B_0 \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0y} = -2B_0 \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0z} = 0 \end{array} \right. \quad (9.3.11)$$

我们讨论如下：

(1) 磁场表达式和电场表达式之间相差一个因子 i ，这表明电场和磁场在时间上存在着 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差。这种形式的波与传播波 (\mathbf{E} , \mathbf{B} 同相位)，良导体中的电磁波 (\mathbf{E} , \mathbf{B} 有 $\pi/4$ 的相位差) 均不相同，与等离子体中的具有虚波矢的电磁波行为类似，因此可以预计，这里面平均没有能流。的确，电磁波在腔中形成了驻波，所有方向上都没有净的能量流动。

(2) 因为 $k_z = \frac{p\pi}{d}$ ，且 $k_z^2 = k_0^2 - k_c^2$ ，于是得

$$k_0^2 = k_c^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \quad (9.3.12)$$

所以，谐振腔允许存在的谐振频率和波长分别为

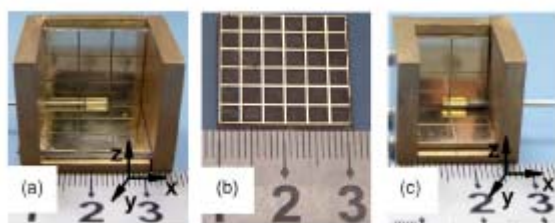
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \\ \lambda = 2 / \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \end{array} \right. \quad (9.3.13)$$

(3) 谐振腔中的场用三个脚标 m 、 n 、 p 标记，每一组 (m, n, p) 的值决定一种振荡模式。对 E 波记为 E_{mnp} ，对 H 波记为 H_{mnp} ，并且 E_{mnp} 和 H_{mnp} 中的脚标 m 、 n 、 p 可取各种组合，使得谐振频率相等，但场的分布不同，此时说 E_{mnp} 和 H_{mnp} 是简并的。另外值得指出的是，在针对某一个方向写出的 TM 模式可能是另外一个方向的 TM 模式！由 (9.3.11) 式可以看出，对 TE 模式， p 不能为 0，否则谐振腔中的电磁场全部为 0。对 TM 模式的共振腔模分析发现， p 可以为 0，但 m, n 都不能为 0。因此，综合 TE, TM 的分析结果，谐振腔中 m, n, p 三个指标中只能有

一个不是 0！故谐振腔的最低价模式为 (110)，(101) 或者 (011)。

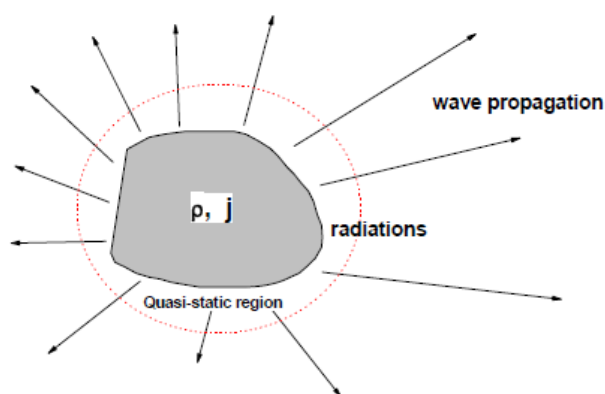
(4) 在共振腔中加一个源，激发各个频率的波。当在腔壁凿一些小孔，或是将个别腔壁换成不是完全透射的，这时电磁波就会从这些地方耦合出去（见下图）。因为共振腔中只允许分立的模式存在，发射出去的电磁波就具有很好的选频性能，且辐射强度很高。另外电磁谐振腔也可以用到其它微波系统中，做选频，放大等功能。

(5) 一个立方状的谐振腔，其能允许的最低阶的腔模式为 TE_{011} （有 3 支兼并模式），对应的波长为 $\lambda = \sqrt{2}a$ 。这就意味着，对常规的谐振腔，要想实现某一个波长的谐振功能，其尺度必须大于某一个特定的大小。若要实现一个较长波的频率，谐振腔就要做的很大，对我们实际应用不利。应用电磁特异介质改变腔壁的反射性能，我们可以改变腔的谐振条件，从而打破这一尺度限制（参考我的研究组的两篇文章 APL 86, 101101 (2005); APL 89, 104104 (2006)。可从我的主页上下载）



第十二章 电磁波的辐射

我们在第 8-9 两章中已经介绍了电磁波在不同的媒质中的传输行为，然而，我们对电磁波如何产生的却仍然不知道。这一章中，我们将详细介绍电磁波如何从源（电荷、电流分布）区产生出来的，这个过程叫做电磁辐射。



§ 12.1 势、规范、及其满足的方程

1. 势的定义

原则上讲，对确定的电荷分布 $\rho(\vec{r}, t)$ 和电流分布 $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ，我们求它的辐射电磁场就是求解 Maxwell 方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{array} \right. \quad (12.1.1)$$

可以通过上面的方程化成 \vec{E}, \vec{B} 解耦的方程从而求解，但这样做通常比较麻烦，要用到并矢格林函数的方法（参考 JA Kong 的书）。类似处理静电、静磁时的情况，我们在处理与源有关的辐射问题时解“势”的问题更加方便。与静电、静磁时相比，在一般情况下标势、矢势的定义有所不同。根据 Maxwell 方程第三式，可定义矢势 \vec{A} 为

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = \vec{B}} \quad (12.1.2)$$

将其带入 Maxwell 方程第二式，可得

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad (12.1.3)$$

因此可以定义标势，其满足

$$\boxed{\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\nabla \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \varphi} \quad (12.1.4)$$

2. 规范条件 (Gauge)

(12.1.2) 与 (12.1.4) 所定义的势并不唯一。给定任意一个标量函数 $\Lambda(\vec{r})$ ，由此定义一对新的标势和矢势：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad (12.1.5)$$

将上式代入 (12.1.2) 和 (12.1.4)，我们发现 $\{\vec{A}', \varphi'\}$ 给出与 $\{\vec{A}, \varphi\}$ 完全一样的 \vec{E}, \vec{B} 场。在经典电动力学的范畴内， \vec{E}, \vec{B} 对应着真实的物理场， $\{\vec{A}, \varphi\}$ 并不对应真实的物理场。因此对于同样的物理体系， $\{\vec{A}, \varphi\}$ 的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为规范条件。通常使用的规范是

库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (12.1.6)$$

和洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (12.1.7)$$

值得注意的是：洛伦兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

3. 势所满足的方程

将 (12.1.2) 与 (12.1.4) 带入 Maxwell 方程中的第一和第四式，我们得到对势的方程：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) &= -\rho / \epsilon_0 \\ -\nabla^2 \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \end{aligned} \quad (12.1.8)$$

这组方程是 $\{\vec{A}, \varphi\}$ 耦合在一起的，使用起来不方便。利用 Lorentz 规范条件可以将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi &= -\rho / \epsilon_0, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

因此，我们首先根据源的情况求解 (12.1.9) 得到势，然后再由势求出电磁场。

习题

P. 229, 9.1, 9.3, 9.4, 9.8

补充

- (1) 对截面为 $a \times b$ 的矩形波导，试将 TE_{01} 模及 TM_{11} 模展开成平面波的叠加。

课后 Project

- (2) (选作, 写成 Note) 首先推导出 TM_{mnp} 模式的波场; 然后详细讨论一个立方体谐振腔中每一个共振模式的简并度 (即有多少波场不同的模式对应同样一个共振频率?); 最后证明 $\{m, n, p\}$ 中只能有一个为 0。
- (3) (选作, 写成 Note) 解析讨论一个立方体谐振腔中的基模对应的场分布, 能流分布, 用动画形式展示这种模式下的能流流动情形; 尝试利用数值模拟软件模拟如何激励这种模式以及观测到其中的场/能流分布。
- (4) 考虑电磁势的规范变化究竟如何影响物理规律的? 可以分经典物理的层面和量子物理的层面分别讨论。
- (5) 这里求解谐振腔中的本征模时只是讨论了最简单的一种体系。假如腔中假如某种介质如何处理? 假如腔的壁不是 PEC 而是可见光波段下的金属 ($\epsilon < 0$) 又该如何处理? 能否将这个问题与量子力学中的束缚态联系在一起讨论? 这个情况下的 Hamiltonian 是什么? 能否考虑一个小的微扰对束缚态的频率扰动?
- (6) 我们说波导等价于一个 $\epsilon_r = 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$ 的介质, 这个 Mapping 并不完整/严格。你能否自己探讨一下严格的 Mapping 是什么?
- (7) 自己动身做课上讲的“水波导”和“海市蜃楼”的实验

第二十三讲

上次课

- 波导中的模式: $k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$
- 截止频率: $\omega_c^{mn} = c \sqrt{\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2}$ (基模: $TE_{10}(TE_{01}), TM_{11}$)
- 谐振腔 - $\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(p \frac{\pi}{d}\right)^2}$, 基模为 (110, 011, 101)

§ 12.1 势、规范、及其满足的方程

1. 势的定义

原则上讲, 对确定的电荷分布 $\rho(\vec{r}, t)$ 和电流分布 $\vec{j}(\vec{r}, t)$, 我们求它的辐射电磁场就是求解 Maxwell 方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{array} \right. \quad (12.1.1)$$

直接求解 \vec{E}, \vec{B} 场的方程通常比较麻烦, 可以使用并矢格林函数的方法 (参考 JA Kong 的书)。类似处理静电、静磁时的情况, 我们在处理与源有关的辐射问题时解“势”的问题更加方便。与静电、静磁时相比, 在一般情况下标势、矢势的定义有所不同。根据 Maxwell 方程第三式, 可定义矢势 \vec{A} 为

$$\boxed{\nabla \times \vec{A} = \vec{B}} \quad (12.1.2)$$

将其带入 Maxwell 方程第二式, 可得

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad (12.1.3)$$

因此可以定义标势, 其满足

$$\boxed{\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\nabla \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \varphi} \quad (12.1.4)$$

2. 规范条件 (Gauge)

(12.1.2) 与 (12.1.4) 所定义的势并不唯一。给定任意一个标量函数 $\Lambda(\vec{r})$ ，由此定义一对新的标势和矢势：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad (12.1.5)$$

将上式代入 (12.1.2) 和 (12.1.4)，我们发现 $\{\vec{A}', \varphi'\}$ 给出与 $\{\vec{A}, \varphi\}$ 完全一样的 \vec{E}, \vec{B} 场。在经典电动力学的范畴内， \vec{E}, \vec{B} 对应着真实的物理场， $\{\vec{A}, \varphi\}$ 并不对应真实的物理场。因此对于同样的物理体系， $\{\vec{A}, \varphi\}$ 的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为规范条件。通常使用的规范是库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (12.1.6)$$

和洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (12.1.7)$$

值得注意的是：洛伦兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

3. 势所满足的方程

将 (12.1.2) 与 (12.1.4) 带入 Maxwell 方程中的第一和第四式，我们得到对势的方程：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) &= -\rho / \epsilon_0 \\ -\nabla^2 \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \end{aligned} \quad (12.1.8)$$

这组方程是 $\{\vec{A}, \varphi\}$ 耦合在一起的，使用起来不方便。利用 Lorentz 规范条件可以将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi &= -\rho / \epsilon_0, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

因此，我们首先根据源的情况求解 (12.1.9) 得到势，然后再由势求出电磁场。

§ 12.2 推迟势

由于 \vec{A} 和 φ 满足同样的方程，因此我们只要讨论一个标量方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\vec{r}, t) = -\rho(\vec{r}, t) / \varepsilon_0 \quad (12.1.9')$$

的解。求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数，满足

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (12.2.1)$$

这个函数其实就是当 t' 时刻在 \vec{r}' 处做一个单位强度的扰动时，空间所激发的场。

定义 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $T = t - t'$ ，我们发现当格林函数已知后，对任意的电荷分布，其电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\vec{R}, T) \rho(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' \quad (12.2.2)$$

证明 (12.2.2) 式并不困难，只要对等式两端都作用一个 $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$ 算符，再

利用 (12.2.1)，则发现 (12.2.2) 是 (12.1.9') 的正确解。下面求解格林函数。

在 \mathbf{R} , \mathbf{T} 空间求解非常不方便，利用 Fourier 变换可得

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, T) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega T} d\vec{k} d\omega \\ \delta(\vec{R}, T) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega T} d\vec{k} d\omega \end{aligned} \quad (12.2.3)$$

带入 (12.2.1) 可以解得 (\vec{k}, ω) 空间的格林函数的解为

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - k_0^2} \quad (12.2.4)$$

其中，

$$k_0^2 = (\omega / c)^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \quad (12.2.5)$$

因此，将 (12.2.4) 带回 (12.2.3) 可得 (\vec{R}, T) 空间的格林函数为

$$G(\vec{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega T}}{k^2 - k_0^2} d\vec{k} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int G(\vec{R}, \omega) d\omega \quad (12.2.6)$$

求解 (12.2.6) 这个积分并不容易。先计算对 k 的积分：

$$\begin{aligned}
 G(\vec{R}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{k^2 - k_0^2} d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{ikR \cos \theta}}{k^2 - k_0^2} k^2 dk \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 iR} \int_0^\infty \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{k^2 - k_0^2} k dk = \frac{1}{2(2\pi)^2 iR} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{k}{k^2 - k_0^2} \right) \cdot (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk \\
 &= \frac{1}{4(2\pi)^2 iR} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) \cdot (e^{ikR} - e^{-ikR}) dk \quad (12.2.7) \\
 &= \frac{1}{4(2\pi)^2 iR} \times \\
 &\quad \left\{ \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) e^{ikR} dk - \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) e^{-ikR} dk \right\}
 \end{aligned}$$

上面的积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设 k_0 具有一个很小的虚部。

但这个虚数的符号应当取 + 还是取 - 呢？

选择的依据是“因果关系”！—— 在正常介质中这个虚部必须为正。

“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得能量被耗散。而 k_0 是介质中向前传播的波矢，假设 $k_0 = \text{Re}(k_0) + i\delta$ ，

则 $e^{ik_0 r} e^{-i\omega t} = e^{i\text{Re}(k_0)r} e^{-\delta r} e^{-i\omega t}$ ，因此 δ 一定为正。

Tips:

1) 这里我们考虑的就是在实轴上的全积分，不是主轴积分(P)，因此一定要选择合适的路径；

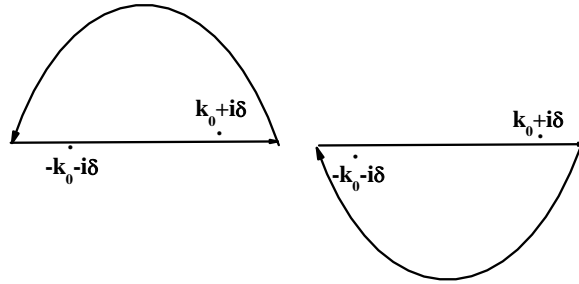
2) 由 (12.2.5) 可知，当处于一定介质中时（如空气），因为介质的 ε, μ 一定因为耗散而有虚部，则 k_0 一定带有虚部！即是真空，也会因为涨落而对电磁波有耗散。因此给 k_0 一个小的虚部不仅是数学的要求，还是物理的必然！

对上面的两个积分分别选择如下图所示的闭合回路，将被积函数解析延拓到复平面，则利用留数定理容易推出

Case 1 $\delta_k > 0$

Part 1

Part 2



$$G(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{4(2\pi)^2 iR} e^{ik_0 R} \times 2\pi i - \frac{1}{4(2\pi)^2 iR} e^{ik_0 R} \times (-2\pi i) = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \quad (12.2.8)$$

在 (12.2.8) 式中加入时间振荡因子 $e^{-i\omega T}$ ，则发现这个解对应这样一个单频波，

$\frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} e^{-i\omega T}$ ，其物理意义为一个点源的“**出射波**”--- 即从源点向**外**发射的球面波。

显然这是符合“因果关系”的解。**若选择 k_0 的虚部为负，则结果为不符合因果关系的“会聚波”。**进而将 (12.2.8) 代入 (12.2.6) 可得最终的格林函数

$$G(\vec{R}, T) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} e^{-i\omega T} d\omega = \frac{1}{4\pi R} \delta(R/c - T) \quad (12.2.9)$$

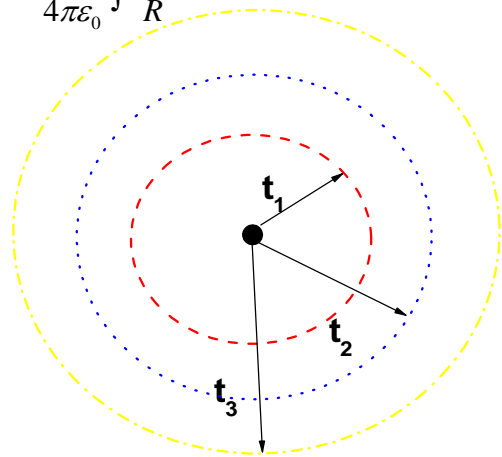
这个解的物理意义更加明晰 – 在 0 时刻作一个激发，则激励的波以球面波的形式传播出去 – 波振幅以 $1/R$ 形式衰减，且只在 $R=ct$ 处有值。将格林函数形式 (12.2.9) 带入 (12.2.4) 得到

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \delta(R/c - T) \rho(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{R} d\tau' \quad (12.2.10)$$

式中中方括号[]表示 $t' = t - \frac{R}{c}$ ，同理可得

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{R} d\tau' \quad (12.2.11)$$

我们注意到 φ, \vec{A} 的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时 t 时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需的时间。这就是**推迟势**，其物理的根据是因果关系。



§ 12.3 多极辐射

很多情况下辐射源电流、电荷分布于空间一很小区域内，而我们则关心远场的行为，此时类似静电、静磁时的处理方法，我们可以作多极展开。

1. 推迟势的多极展开

我们讨论的是远离源的场，即 $r \gg l$ （图 12.2）， l 为源的线度。被积函数是 \vec{R} 的函数，我们可以将它在 \vec{r} 处展开为级数，即

$$\frac{[\rho]}{R} = \frac{[\rho]}{R} \Big|_{R=r} + (\vec{R} - \vec{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \left(\frac{[\rho]}{R} \right) \Big|_{R=r} + \dots = \frac{[\rho]_0}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\rho]_0}{r} + \dots \quad (12.3.1)$$

式中 $[\rho]_0$ 表示 $\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)$ ，以后为简便起见，**脚标 0 不再写出**。同理可得

$$\frac{[\vec{j}]}{R} = \frac{[\vec{j}]}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} + \dots$$

故

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{[\rho]}{r} d\tau' - \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\rho]}{r} d\tau' + \dots \right]$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' + \dots$$

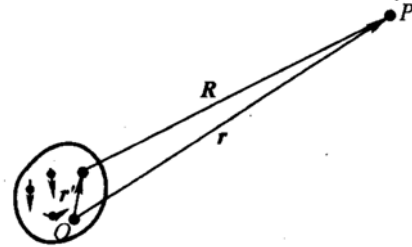


图 12.2

我们下面分别研究 \vec{A} 、 φ 展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质。

2. 电偶极辐射

φ 展开式中的第一项

$$\varphi_0 = \int \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int [\rho] d\tau' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (12.3.2)$$

Q 是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。第二项

$$\varphi_1 = - \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau' = - \nabla \cdot \frac{[\vec{p}]}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (12.3.3)$$

式中 $[\vec{p}] = \int \vec{r}' [\rho] d\tau'$ ，表示系统总的电偶极矩。

\vec{A} 展开式中的第一项：

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int [\vec{v}\rho] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\sum_i q_i \vec{v}_i \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \left[\sum_i q_i \vec{r}_i \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\dot{\vec{p}} \right]\end{aligned}\quad (12.3.4)$$

所以，电偶极矩系统所产生的 \vec{A} 和 φ 为 (12.3.3) 及 (12.3.4)。下面考虑单频的辐射源， $\rho(\vec{r}', t') = \rho(\vec{r}') e^{-i\omega t'}$ ， $\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{j}(\vec{r}') e^{-i\omega t'}$ （任意情况总可以展开成单频结果的叠加）。从联系 \vec{B} 与 \vec{A} 的公式，我们得到电偶极辐射场中的磁场部分为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\dot{\vec{p}}]}{r} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \quad (12.3.5)$$

电场当然也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地由磁场导出

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \quad (12.3.6)$$

下面仔细分析一下在 (12.3.5) 和 (12.3.6) 式中要用到的一项：

$$\nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} = (\nabla \times [\vec{p}]) \frac{1}{r} + \left(\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times [\vec{p}] \right) \quad (12.3.7)$$

考虑第一项，因为 $[\vec{p}] = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}r}$ ，则微分运算可以代换成

$$\boxed{\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r = ik \vec{e}_r} \quad (12.3.8)$$

再考虑第二项，因 $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ ，最终，(12.3.7) 变为

$$i \frac{\omega}{c} \left[\vec{e}_r \times [\vec{p}] \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r} \left[\vec{e}_r \times [\vec{p}] \frac{1}{r} \right] \quad (12.3.7')$$

因此， $\frac{\omega}{c}$ 和 $\frac{1}{r}$ 的比较决定了哪一项大，哪一项小。下面我们分三个区域来讨论。

(1) 近区： $r \ll \lambda$ ，但仍满足 $r \gg l$ 。这时公式(12.3.5)和(12.3.6)中的旋度算

子只要对分母运算即可。因为每对分母运算一次得到一个 $\frac{1}{r}$ 因子，而对分子运算得到一个 $\frac{1}{\lambda}$ 因子，显然 $\frac{1}{r}$ 比 $\frac{1}{\lambda}$ 贡献大。于是我们得到近区的场强为

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r \times [\vec{p}], \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot [\vec{p}]) - [\vec{p}])\end{aligned}\quad (12.3.9)$$

我们注意到此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间而已 – 事实上在这个条件下，“准静态”近似适用（参考第6章）。

(2) 远区：不仅要求 $r \gg l$ ，而且 $r \gg \lambda$ ， λ 为辐射场的波长，此时，公式 (12.3.7) 中第一项远大于第二项。因此在计算电磁场时，只需计算 ∇ 算子作用到 $[\vec{p}]$ 上即可，无需计算其作用到 $\frac{1}{r}$ 上。这等价于做代换 (12.3.8)。因此，远区场强的公式为

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c r} \vec{e}_r \times [\vec{p}] \\ \vec{E} &= -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{p}]),\end{aligned}\quad (12.3.10)$$

(3) 中间区域：虽然 $r \gg l$ ，但 $r \approx \lambda$ ，这时我们必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。这是因为对两者运算得到的因子 $\frac{1}{r}$ 和 $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\lambda}$ 是同数量级。

思考题：与远场区不同，在近场区电场与磁场差一个 i ，这中间有什么物理值得我们思考呢？能否联系第六章准静态的知识，对上述事实作一番讨论？

习题

P. 343, 12.1

补充

(1) 仿照课件中对真空中格林函数的解 (12.2.9) 的推导，利用因果关系，推导出一个均匀的负折射介质 ($\epsilon < 0, \mu < 0$) 中的格林函数的解，并解释所得的格林函数的物理意义。

(2) 推导 (12.3.9) 式，计算一个偶极振子在近场条件下的能流分布的时间平均值。

(3) 利用矢量运算, 根据 $\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ 直接由势推导出偶极辐射对应的 E 的表达式, 并证明其与 (12.3.6) 的一致性。

第二十四讲

- 推迟势 $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{R} d\tau'$, $[\vec{j}] = \vec{j}(\vec{r}', t - R/c)$
- 辐射场: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, 电场由 Maxwell 方程决定 $\vec{E} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \vec{B}$
- 电偶极辐射 $\vec{A}_p(\vec{r}, t) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}]}{r}$ (等效于公式 $\dot{\vec{p}} = \vec{j}$)

远场 $r \gg \lambda$: $\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ $\vec{B} = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c r} \vec{e}_r \times [\vec{p}]$, $\vec{E} = -\hat{e}_r \times (c\vec{B})$

类似平面电磁波 ($\vec{E}, \vec{B}, \vec{K}$ 满足右手法则)!

[例 1] 如图 12.3 所示, 两个金属小球分别带电荷 Q 和 $-Q$, 它们之间距离为 l , 两小球的电荷的数值和符号同步地周期性变化, 这就是所谓的赫兹振子。试分析赫兹振子辐射场的能流特点。

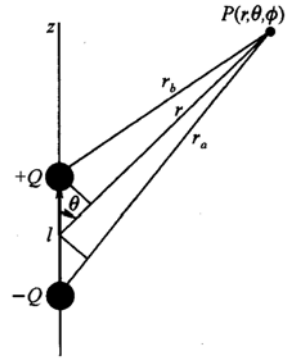


图 12.3

解 取球坐标系, $+Q$ 和 $-Q$ 处在 z 轴上, 设 $Q = Q_0 e^{-i\omega t'}$ (利用复场表示), 则体系的电偶极矩为

$$\vec{p} = lQ\vec{e}_z = lQ_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z = p_0 e^{-i\omega t'} \vec{e}_z$$

将它们代入偶极辐射的远区公式, 有

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi c r} \sin \theta e^{-i\omega(t-r/c)} (-\vec{e}_\phi) \\ \vec{E} = -\hat{e}_r \times (c\vec{B}) = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-i\omega(t-r/c)} (-\vec{e}_\theta) \end{cases} \quad (12.3.11)$$

由(12.3.11)式可以看出, 场正比于 $\frac{1}{r}$, 电场只有 \vec{e}_θ 方向分量, 磁场只有 \vec{e}_ϕ 方向分量, 且 $cB_\phi = E_\theta$ 。辐射场在偶极矩方向上为零。辐射能流的平均值为

$$\langle \vec{S}_p \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{B}^*] = \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r \quad (12.3.12)$$

对这个结果讨论如下:

- (1) 辐射能流的特点是正比于 $\frac{1}{r^2}$ ，偶极矩的平方， ω 的四次方。
- (2) 这说明辐射能力在低频时较弱，而在高频时高，这与我们第六章所讨论的“准静态近似”的适用条件一致；
- (3) 辐射能流正比于 $\frac{1}{r^2}$ 是一个稳定辐射问题的必然要求，如若不然，则必然在空间产生能量积累，从而辐射问题不稳定。也正因为如此，辐射能流在某一个特定的立体角组成的通道内保持相同。

基于此，在讨论辐射问题时，我们常用角分布的概念来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况，其定义为

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\langle \vec{S}_p \rangle \cdot d\vec{S}}{d\Omega} = \frac{\langle \vec{S}_p \rangle \cdot \vec{r}^2 d\Omega}{d\Omega} = \langle \vec{S}_p \rangle \cdot \vec{r}^2 \quad (12.3.11)$$

这表示在 θ 、 ϕ 方向单位立体角内的平均辐射能流，显然，现在

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad (12.3.12)$$

辐射角分布的情况如图 12.4 所示，在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的方向幅射最强，在 $\theta = 0$ 、 π 的方向无辐射。

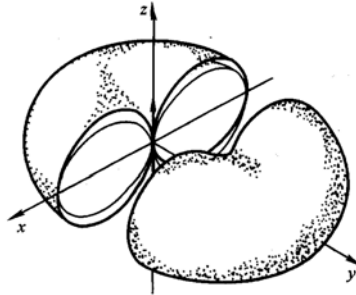


图 12.4

3. 磁偶极辐射

下面考虑磁偶极辐射，此时应当考虑 \vec{A}_2 项。在远场 ($r \gg \lambda$) 及单频条件下，

只保留 ∇ 对推迟势的作用（亦即，作代换 $\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ ），则有

$$\begin{aligned}\vec{A}_2 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{r}' \cdot \left(i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r \right) \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \cdot \int \vec{r}' [\vec{j}] d\tau' \\ &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \left\{ \int [\vec{r}\vec{j} + \vec{j}\vec{r}'] d\tau' + \int [\vec{r}\vec{j} - \vec{j}\vec{r}'] d\tau' \right\}\end{aligned}\quad (12.3.13)$$

上式{}中第一项在**静磁条件下**为0（参考第十五讲（5.5.7'）式），当电流随时间谐变时，其为电四极子的贡献（严格证明从略，但由 $\vec{j} = \dot{\vec{P}}$ 可知，此项积分正比于 $\int \vec{r}' \vec{r}' \rho d\tau' \propto \vec{D}$ ）。第二项可改写为

$$\begin{aligned}\vec{A}_m &= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \cdot [\vec{r}\vec{j} - \vec{j}\vec{r}'] d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \frac{1}{2} \int \vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{r}'] d\tau' \\ &= \frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c} \vec{r} \times [\vec{m}]\end{aligned}\quad (12.3.14)$$

正式磁偶极子的贡献。这里第二个等式用到了关系式：

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}}.$$

其它多极展开式中没有磁偶极子的贡献。因此，磁偶极辐射所对应的矢势即为（12.3.14）式，标势为0。带入势和场的关系，即可求出磁偶极子的 \vec{E} 和 \vec{B} ：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_m = i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r \times \vec{A}_m &= -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c^2 r} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{m}]) \\ \vec{E} = -\hat{e}_r \times (c\vec{B}) &= -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr} \vec{e}_r \times [\vec{m}] \end{cases}\quad (12.3.16)$$

讨论如下

- （1）我们注意到磁偶极子的辐射场（12.3.16）与电偶极子辐射场（12.3.9）非常相似。事实上，在讲解静电/静磁理论时我们已经了解到， $\mu_0 \vec{m}$ 之于 \vec{B} 场与 \vec{p}/ϵ_0 之于 \vec{E} 场完全相同。现在，我们又看到了相同的依赖关系 --- 将（12.3.9）中 \vec{E} 场中的 \vec{p}/ϵ_0 代换成 $\mu_0 \vec{m}$ ，我们就得到了磁偶极子的 \vec{B} 场！因此这两个场互为对偶场，记住一个就可以得到另一个。**更一般地**，当我们作如下代换 $\vec{p} \rightarrow \frac{\vec{m}}{c}$, $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$, $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ ，即可由电偶极子的场推出磁偶极子的场。
- （2）磁偶极辐射与电四极辐射一个量级，均比电偶极辐射小，因此对一个体系若其有磁偶极辐射，应当同时检查同一量级的电四极子是否存在。

§ 12.4 线型天线辐射

我们讨论线型天线的辐射问题。线型天线是最典型也是最常见的天线结构，它具有较强的辐射能力和较好的辐射方向性。

要解决天线辐射的问题首先要知道天线中的电流分布。我们考虑输入到天线中的信号随时间作简谐变化，则天线中的电流线密度一定也随时间作简谐变化。假设天线由理想导体组成，则电流只在导体表面且满足 $\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$ 。进一步考虑磁场，其满足波动方程 $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{H} = 0$ ，故其解一定是 $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ 的线性组合 (\vec{k} 可以取模为 $k = \omega/c$ 的所有值)。当天线很细时，可只考虑 $\vec{k} = \pm k \hat{z}$ 的两支波的贡献，故 \vec{H} 以及 \vec{J} 的形式一定只是 $e^{i(\pm kz - \omega t)}$ 的线性组合。设信号沿天线的中点输入，取此点为坐标的原点，电流对此点是对称的，在天线的两端点 ($z = \pm \frac{l}{2}$) 处电流应为零，故电流分布为

$$I(z', t') = I_0 e^{-i\omega t'} \sin\left(k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right) \quad (12.4.1)$$

知道了电流分布便可计算矢势 \vec{A} ：

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} - k|z'|\right) e^{-i\omega(t-R/c)}}{R} dz' \quad (12.4.2)$$

如图 12.6 所示，有 (图中 \vec{R}_0 记为 \vec{r})

$$R \approx r - z' \cos \theta \quad (12.4.3)$$

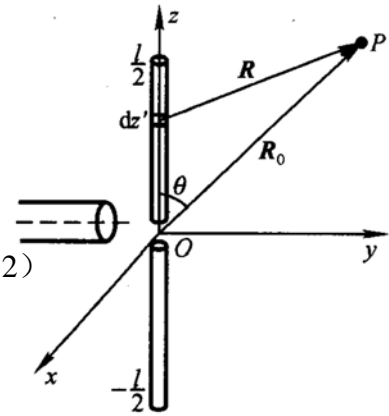


图 12.6

将 (12.4.3) 代入 (12.4.2)，在远场条件 ($r \gg z', r \gg \lambda$) 下得

$$\begin{aligned} A_z &\approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t-r/c)} \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz' \cos \theta} dz' \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k r} e^{-i\omega(t-r/c)} \left(\frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

由 \vec{A} 可由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 求得 \vec{B} 。考虑远场时作代换 $\nabla \leftrightarrow i \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ ，则

$$\vec{B} = ik\vec{e}_r \times \vec{A} = -ikA_z \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (12.4.5)$$

电场容易求得

$$\vec{E} = -\hat{k} \times (c\vec{B}) = -ickA_z \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (12.4.6)$$

由 \vec{E} 、 \vec{B} 即可求出辐射能流

$$\langle \vec{S}_P \rangle = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}^*) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \vec{e}_r$$

平均角分布为

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \left\langle \frac{\vec{S}_P \cdot d\vec{S}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \quad (12.4.7)$$

它依赖于 $\frac{kl}{2}$ 的值。讨论如下：

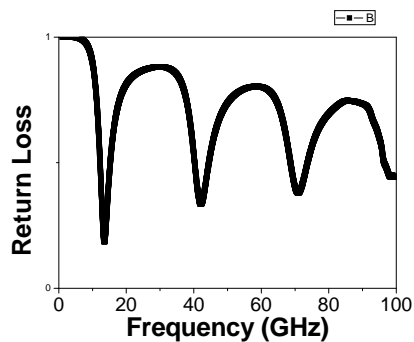
(1) 当天线长度远小于波长时， $kl \ll 1$ ，可以将上式展开得

$$\langle f(\theta, \phi) \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \frac{(kl)^4 \sin^2 \theta}{64} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} \sin^2 \theta \times \left(\frac{I_0 l^2}{4c} \right)^2 \quad (12.4.8)$$

与 (12.3.12) 对比发现，此时天线等价于一个电偶极子，强度为 $p = \frac{I_0 l^2}{4c}$ 。显然

对短天线，天线越长，辐射能力越大。

(2) 当天线再增长到 $kl \ll 1$ 条件不满足时，天线的辐射能力随 kl 做周期性振荡。通常人们将信号发生器与天线中间空隙的两端分别相连，给定一个定幅的输入信号，测量被反射回来的信号强度（称为反射损耗 – return loss, S11 等），显然这个量越小，说明辐射出去的功率越强，因此 S11 的极小值就标示着天线辐射的一个极大值。研究发现，当 $\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ 时，天线的辐射能力达到极值 – 特别是半波电线（长度 $l = \frac{\lambda}{2}$ ）辐射能力最强。



(3) 随着 $\frac{l}{\lambda}$ 的增大，辐射图案与偶极子辐射图案有了明显的区别，开始有分叉出现，并开始朝天线方向集中（书上的图形计算有误！）。真正有用的天线就是既有很好的辐射效率（S11 极小），又有很好的辐射图案的半波天线。

习题

P. 344, 12.5, 12.8, 12.10

补充题：

(1) 证明 (12.4.8)，并从偶极子的定义出发证明通有谐变电流的短天线的有效偶极矩就是

$$p = \frac{I_0 l^2}{4c}。$$

课后 Project

1) 利用数值仿真软件（COMSOL 或者 CST），计算一个偶极天线在不同频率下的辐射图案，反射损耗，以及天线上的电流分布。并与解析结果（12.4.7）做比较。

第二十五讲

上次课

- 电磁偶极辐射的对称性: $\frac{\vec{p}}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 \vec{m}, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{B}$
- 天线辐射: 短天线 --- 电偶极辐射 $\sim f(\theta, \varphi) \sim p^2 \sin^2 \theta,$

$l = \lambda / 2$ 半波天线效率最高

长天线 --- 辐射图案出现分叉, 辐射效率振荡

§ 12.5 天 线 阵

天线最重要的两个品质是辐射图案和辐射效率。虽然半波天线的辐射效率比较高, 但它在 ϕ 角上没有任何的定向性, 在 θ 角上有一定的定向性, 但不是很好。在实际应用中, 为了获得更好的辐射方向性, 我们常把一系列天线排布成天线阵, 利用干涉效应来获得较好的方向性。最常用的是把半波天线当作基元天线列阵。惯常的排布有两种: 一种是线性排列。如图 12.8, 或横向排列, 如图 12.9; 再有是 $m \times n$ 方阵, 如图 12.10。

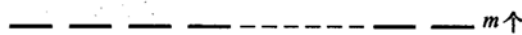


图 12.8

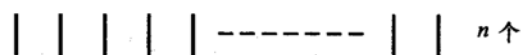


图 12.9

我们只讨论在线性排列的情况下, 它的辐射方向性同单一的半波天线有什么不同。如图 12.11, m 个半波天线线性排列, 它们所激发的场到达远处某点的路程不同, 这就使它们彼此间有相位差, 从而发生干涉使辐射具有方向性, 如图 12.11 所示。每个天线与其邻近的天线之间的路程差为 $a \cos \theta$ (a 为两天线间的距离), 若第一个天线的辐射场为

$$\vec{E}_1 = \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_1}}{R_1}$$

则第二个半波天线的辐射场为

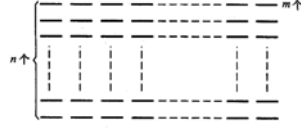


图 12.10

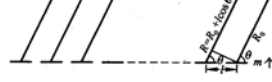


图 12.11

$$\vec{E}_2 = \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_2}}{R_2}$$

由于 $R_2 \approx R_1 + a \cos \theta$ ，在远场条件下 ($R \gg \lambda$)，有

$$\vec{E}_2 \approx \vec{C}(\theta) \frac{e^{ikR_1}}{R_1} e^{ika \cos \theta} = \vec{E}_1 e^{ika \cos \theta}$$

定义 $\alpha = ka \cos \theta$ ，则同理可得第三个半波天线的场为

$$\vec{E}_3 \approx \vec{E}_1 e^{i2\alpha}$$

依次类推，得 m 个半波天线产生的总场为

$$\vec{E}_{total} = \sum_{N=0}^{m-1} \vec{E}_1 e^{iN\alpha} = \vec{E}_1 \frac{1 - e^{im\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \quad (12.33)$$

可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子：

$$f(\alpha) = \left| \frac{1 - e^{imka \cos \theta}}{1 - e^{ika \cos \theta}} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left(\frac{m}{2} ka \cos \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} ka \cos \theta \right)}$$

因此总的辐射角分布为

$$f_{total}(\theta, \phi) = f_{single}(\theta, \phi) \cdot f(\alpha) \quad (12.34)$$

即在原有的单个天线的角分布的图案基础上加上一个干涉后的“形状因子”。可以看出：

- (1) 当 $\alpha = 0$ 时 $f(\alpha)$ 有极大值，其值为 $f(0) = m^2$ 。这说明向前传播的方向仍然是体系辐射最强的方向，而且辐射能力增强了 m^2 倍。这不奇怪，因为干涉相应使得此方向的所有天线都是相干叠加，场的振幅增强了 m 倍，功率增强 m^2 倍。

(2) 当 $\alpha = \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)2\pi}{m}$ 时有极小值，分布情况如图 12.12 所示，两个极小之间有个极大，但高阶的极大值急剧减少。

(3) 主极大在 $\alpha = 0$ 处，第一个极小在 $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ 处，即 $ka \cos \theta = \frac{2\pi}{m}$ 处。若令 $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ，则 $ka \sin \psi = \frac{2\pi}{m}$ 。 m 很大时主极大峰所处的角度范围为

$$|\psi| \leq \sin^{-1} \left(\frac{2\pi}{mka} \right) \approx \frac{\lambda}{ma}$$

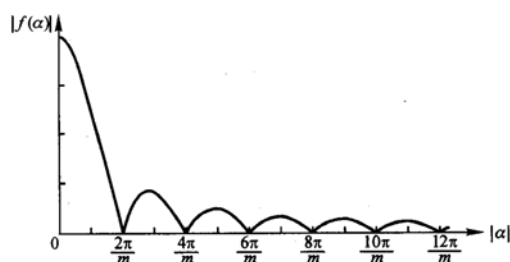


图 12.12

可见， m 大则 ψ 角度小，这表示 θ 的方向性很强。

第十一章 相对论电动力学

到现在为止，我们已经系统地研究了电磁场理论在不同条件下（静电、静磁、准静、辐射）的表现。然而，这些结果至今仍然是针对某一个特定坐标系成立的。在不同坐标系下的电磁现象之间的关联如何呢？这就是本章的研究内容。

§ 11.1 狭义相对论的时空观

要想联系不同坐标系下的物理现象，就必须建立正确的时空变换，而后者是建立在一定的时空观下的。我们在本课程中只关心惯性坐标系之间的变换。牛顿在总结其发展的力学规律时得到了如下绝对时空观。



1. 绝对时空观

A. 相对性原理

物理世界的规律是通过时间和空间坐标来描述的，而物理规律本身应当与（惯性）坐标系的选取无关，这就是说，在不同的惯性系中，物理规律表述的形式始终保持不变，这是一个重要的基本假定，称为相对性原理，思想最先由伽利略提出。

B. 力学规律

牛顿力学的基本方程是

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (11.1.1)$$

C. 伽利略变换

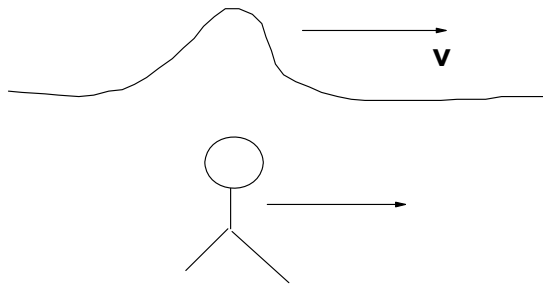
两个相对运动的惯性坐标系 S 和 S' 之间由伽利略变换联系起来，

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (11.1.2)$$

将 (11.1.2) 代入 (11.1.1) 发现力学规律在不同的坐标系中保持相同，因此，牛顿力学，伽利略变换与相对性原理和谐统一。

2. 绝对时空观的困难

但是，当人们把绝对时空观应用到电磁理论时遇到了巨大的困难，主要表现在对光的传播规律的描述上。对于经典的力学规律描述的波，如水波，当它在一个坐标系中的速度为 \vec{u} 时，在相对于这个坐标系做匀速运动的另一个坐标系中测出的速度为 $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ 。特别是，当 $\vec{u} = \vec{v}$ 时， $\vec{u}' = 0$ ，即水波不再运动。



电磁波也是一种波，有一个运动速度 c ，因此人们自然要问：究竟这个光速 c 是在哪个坐标系中测得的？假设光速为 C 的这个坐标系叫做以太系，是否可以测得地球相对于以太系的运动速度？抑或地球就是那个绝对坐标系？

迈克耳孙和莫雷设计了精妙的干涉实验测量了不同条件下测量点相对于以太系的运动速度。**然而实验测不到任何的以太漂移速度。**换言之，在任何惯性坐标系中测得的光速是同一个常数 c ，与传播方向无关，与光源运动的速度无关。这个结果是惊人的，揭示了描述电磁规律的麦克斯韦方程组，与伽利略变换以及相对性原理不和谐。



3. 爱因斯坦的选择

相对性原理、Maxwell 方程以及伽利略变换不和谐，则必须放弃（改造）其中一个使得这三者和谐。爱因斯坦选择保留前面 2 个，放弃伽利略变换。他提出如下两条基本假设：

(1) 相对性原理

自然规律在不同惯性系中的表达式相同。

(2) 光速不变原理（选择 Maxwell 方程在一切惯性系中形式不变）

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同。这事实上并非爱因斯坦的假设，而是麦-莫实验所揭示的基本实验事实。在这个基础上，Maxwell 方程组在所有坐标系下都保持不变，人们必须

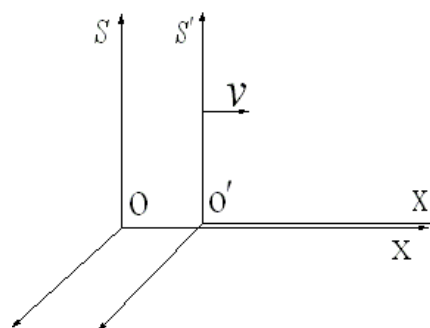
寻找新的时空变换来替代伽利略变换。

4. 洛伦兹变换

基于不同惯性系中测出的光速不变这一假设，洛伦兹提出了他的时空变换。

考虑在 $t=t'=0$ 时， S 与 S' 重合， S' 系相对于 S 系沿 x 轴以速度 v 运动。

假设此时从原点发射一束光波，光沿各方向的传播方向都是 c 。所以 t 时刻 S 系中光到达的位置满足



$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (11.1.3)$$

存在两事件： 1 发射 $(0,0,0,0)$

2 接收 (x,y,z,t)

在 S' 看来，同样的事件应该用如下时空点描述

1 发射 $(0,0,0,0)$

2 接收 (x',y',z',t')

根据光速不变原理，变换后的 (x',y',z',t') 必须满足

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (11.1.4)$$

基于变换后满足 (11.1.3-4) 这个基本约束，数学家洛伦兹提出如下（线性）时空变换：

$$\begin{cases} x' = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) / \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases} \quad (11.1.5)$$

容易证明，若两个时空点原本满足 (11.1.3)，则洛伦兹变换后的是空间一定满足 (11.1.4) - **也就是说，在 S' 系中观测事件传播的速度仍为 c ，而且是各向同性的一尽管 S' 相对 S 沿 x 轴运动，在 S' 系中看到的速度沿 x 轴与其它轴没有任何的不同！这个结果相当惊人，因为实施洛伦兹变换时貌似选择打破空间的对称**

性（选择了 v 为 x 方向），然而对测量光速来讲在这个扭曲的时空内没有任何各向异性。

引入一个虚构的由三维实空间和虚的时间轴构成的四维空间（闵可夫斯基空间），一个时空点在这个空间中的表示为

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \quad (11.1.6)$$

则 Lorentz 变换可以写成

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \quad (11.1.7)$$

变换矩阵为

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (11.1.8)$$

其中 $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 。容易证明 α 是个正交矩阵，即

$$\alpha \cdot \alpha^T = I, \quad \alpha^{-1} = \alpha^T \quad (11.1.9)$$

一个直接的结果就是

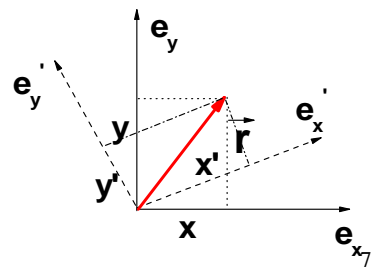
$$x_\mu = \alpha_{\nu\mu} x'_\nu \quad (11.1.7')$$

§ 11.2 物理规律协变性的数学形式

相对性原理要求物理规律在不同的惯性坐标系下保持不变，而不同惯性系之间的物理量之间的关系由洛伦兹变换给出，**这就要求描述物理规律的物理方程式的形式一定要在 Lorentz 变换下保持不变**。我们下面首先研究不同物理量在 Lorentz 变换是如何变换的。

1. 物理量按时空变换性质分类

我们首先将所遇到的各种物理量作一番分类。先考虑大家熟知的三维空间中的一个纯坐标转动变换下，比如将坐标系以 z 轴为转轴转动 θ 角度



(如图所示)。在这个变换下我们看不同的物理量具有怎样的变换关系。比如

- (1) 任意一点到原点的空间距离 $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ 在变换下保持不变，这就是一个标量。
- (2) 位置矢量 $\vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 经过坐标旋转变换后变成 $\vec{r}' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ， $\{x_1, x_2, x_3\}$ 与 $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ 两组数之间的变换关系为

$$x'_i = T_{ij} x_j \quad (11.2.1)$$

其中，转动矩阵的形式为

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.2.2)$$

容易证明，所有三维空间的矢量（ $\vec{E}, \vec{H}, \vec{F}$ 等）的三个分量都满足上面的变换关系。我们把满足（11.2.1）式变换关系的三个数组成的物理量叫做矢量。

- (3) 同样道理，2 阶张量（如电四极矩 \vec{D} ）中的 9 个元素在坐标变换下满足

$$D'_{ij} = T_{il} T_{jk} D_{lk} \quad (11.2.3)$$

将上面对 3 维坐标变换的定义推广到 4 维时空变换

(1) 标量

一个 Lorentz 变换下保持不变的物理量叫做标量。正交性质（11.1.9）显示：四维矢量的标积是个变换不变量，

$$x'_i x'_i = \alpha_{ij} \alpha_{ik} x_j x_k = x_j x_j \quad (11.2.4)$$

因此这是个“四维标量”。（11.2.4）是光速不变（11.1.3-11.1.4）的另外一种表述方式。通常将两个时空点之间的四维距离

$$\Delta s^2 = -\Delta x_\mu \Delta x_\mu = (c\Delta t)^2 - |\Delta \vec{r}|^2 \quad (11.2.5)$$

叫做间隔，它描述的是两个事件之间的**时空间隔**，是个不依赖于惯性系的“标量”。在相对论时空观中，时间空间耦合在一起，单独讨论两个事件的时间和空间间隔都没有意义（依赖于具体的参照系），但“间隔”却是有意义的物理量。

(2) 矢量（一阶张量）

定义一个由四个数量定义的集合 $\{V_x, V_y, V_z, V_4\}$ ，若这些量在 Lorentz 变换下满足与四维坐标一样的变换关系

$$V'_\mu = \alpha_{\mu\nu} V_\nu \quad (11.2.4)$$

则这样的集合称为一个四维矢量（或是一阶张量）

(3) 二阶张量

进一步，若有一物理量用 4×4 矩阵 $T_{\mu\nu}$ 表示，在坐标变换 $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$ 下，其变换关系为

$$T'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu k} \alpha_{\nu l} T_{kl} \quad (11.2.5)$$

则称此物理量为二阶张量。

(4) 几个例子

(a) $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 的变换行为为一阶张量

$$\text{因为 } x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \Rightarrow x_\nu = (\alpha^{-1})_{\nu\mu} x'_\mu = (\alpha^T)_{\nu\mu} x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\mu \quad (11.2.6)$$

$$\text{故 } \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (11.2.7)$$

上式显示 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} = \left\{ \nabla, -i \frac{\partial_t}{c} \right\}$ 就是一个四维矢量。

(b) 任意两个四维矢量的标积为四维标量

比如四维间隔就是两个（四维时空位置）矢量的标积。同理，因为 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 是一个矢量，故有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \alpha_{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square^2 \quad (11.2.8)$$

即 \square^2 算符为四维不变量。由此推知，若 A_μ 为四维矢量，则此矢量的四维散度

$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu$ 为一不变量，即

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \alpha_{\mu\beta} A_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\nu \quad (11.2.9)$$

3. 物理规律的协变性

相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在坐标变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变。**如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式。**例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu = B_\mu \quad (11.2.10)$$

式中 A_μ, B_μ 分别代表 S 系中这一物理过程的不同物理量。当把它变换到 S' 系时，由于 A_μ, B_μ 都是一阶张量(即矢量)，其变换规律分别为

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \alpha_{\mu\nu} A_\nu \\ B'_\mu &= \alpha_{\mu\nu} B_\nu \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

故

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu = B'_\mu \quad (11.2.12)$$

由此可见，要判断规律是否满足相对性原理，只要看其物理方程是否为 Lorentz 协变。反之，在我们构造任何新规律时，原则上都应当使其满足 Lorentz 协变。

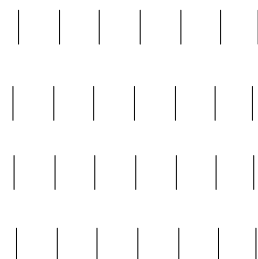
第二十五讲作业

习题

- 1) 天线的辐射图案的定向性由如下定向性指标来描述： $D = \frac{4\pi}{\Delta\Theta_1 \cdot \Delta\Theta_2}$ ，其中 $\Delta\Theta_1, \Delta\Theta_2$ 分

别为天线辐射主极大在两个相互垂直的方向上的半宽值。如图所示，由 $m \cdot n$ 个半波天线组成的天线阵列，沿 x (y) 方向的周期为 a (b)，分别计算天线阵列在 xz 面内的辐射的主极大的宽度的一半（定义为 $\Delta\Theta_1$ ）以及其在 yz 面内的辐射主极大的宽度的一半（定

义为 $\Delta\Theta_2$ ），并由此计算天线阵列的定向性指标 D 。（提示：主极大的峰宽可定义为两个相邻零点之间的角度差）



P. 297, 11.1

