

# 《通信原理》

(15 奈奎斯特1 抗噪声性能)

蔡志岗

光学与光学工程系

中山大学理工学院

[lasers@netease.com](mailto:lasers@netease.com)

**13316105077**

**光信息实验室：84110909**

中大光信息

# 第五章：数字信号的基带传输

## 5.1 引言

## 5.2 数字基带信号的码型和波形

## 5.3 数字基带信号的功率谱密度

## 5.4 数字基带信号的传输与码间串扰

## 5.5 码间串扰基带传输系统的抗噪

## 声性能分析

## 5.6 最佳基带传输系统

## 5.7 眼图

## 5.8 改善数字基带系统性能的措施

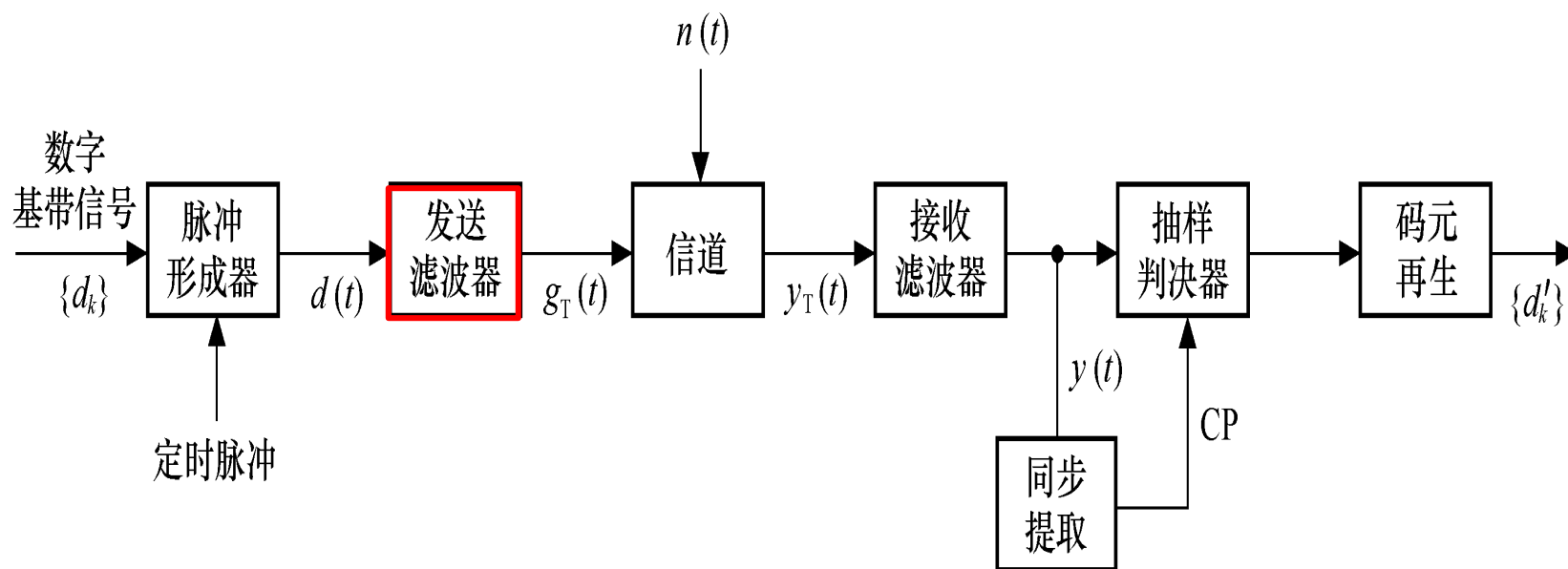
- 时域均衡
- 部分响应波形

## 5.9 位同步

## 5.2 数字基带信号的码型和波形

脉冲形成器

发送滤波器



## 5.2.2 基带波形的形成

在选择合适的码型之后，尚需考虑用什么形状的波形来表示所选择的码型。上面介绍的各种常用码型都是以矩形脉冲为基础的，我们知道矩形脉冲由于上升和下降是突变的，其低频分量和高频成分比较丰富，占用频带也比较宽。

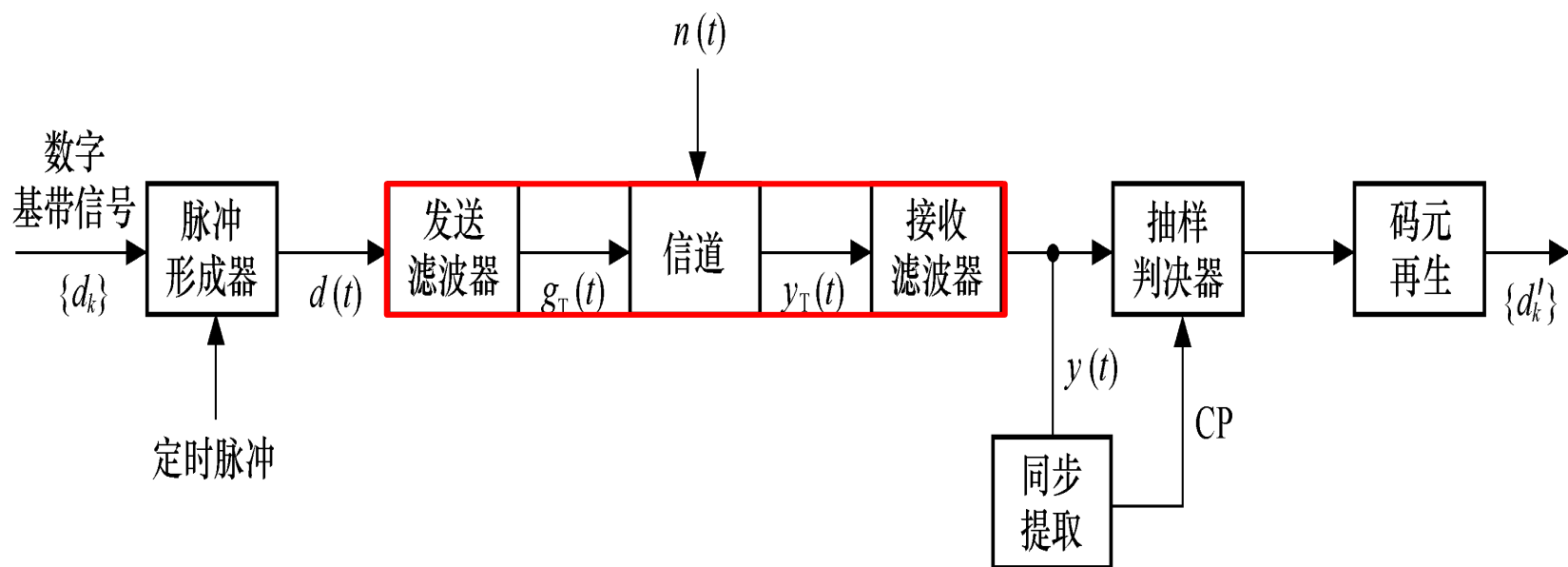
如果信道带宽有限，采用以矩形脉冲为基础的码型进行传输就不合适，而需要采用更适合于信道传输的波形，

譬如采用变化比较平滑的以升余弦脉冲为基础的脉冲波形。这样就有一个如何由矩形脉冲形成所需要的传输波形的问题。

本章后面几节将介绍的奈奎斯特准则的思想是将发送滤波器、信道、接收滤波器三者集中为一总的基带传输系统，进而对其基带传输系统的特性和接收响应的波形提出严格的要求，目的是消除在抽样判决时出现的码间干扰。

# 变化比较平滑的脉冲波形

## 发送滤波器+信道+接收滤波器



## 5.4 数字基带信号的传输与码间串扰

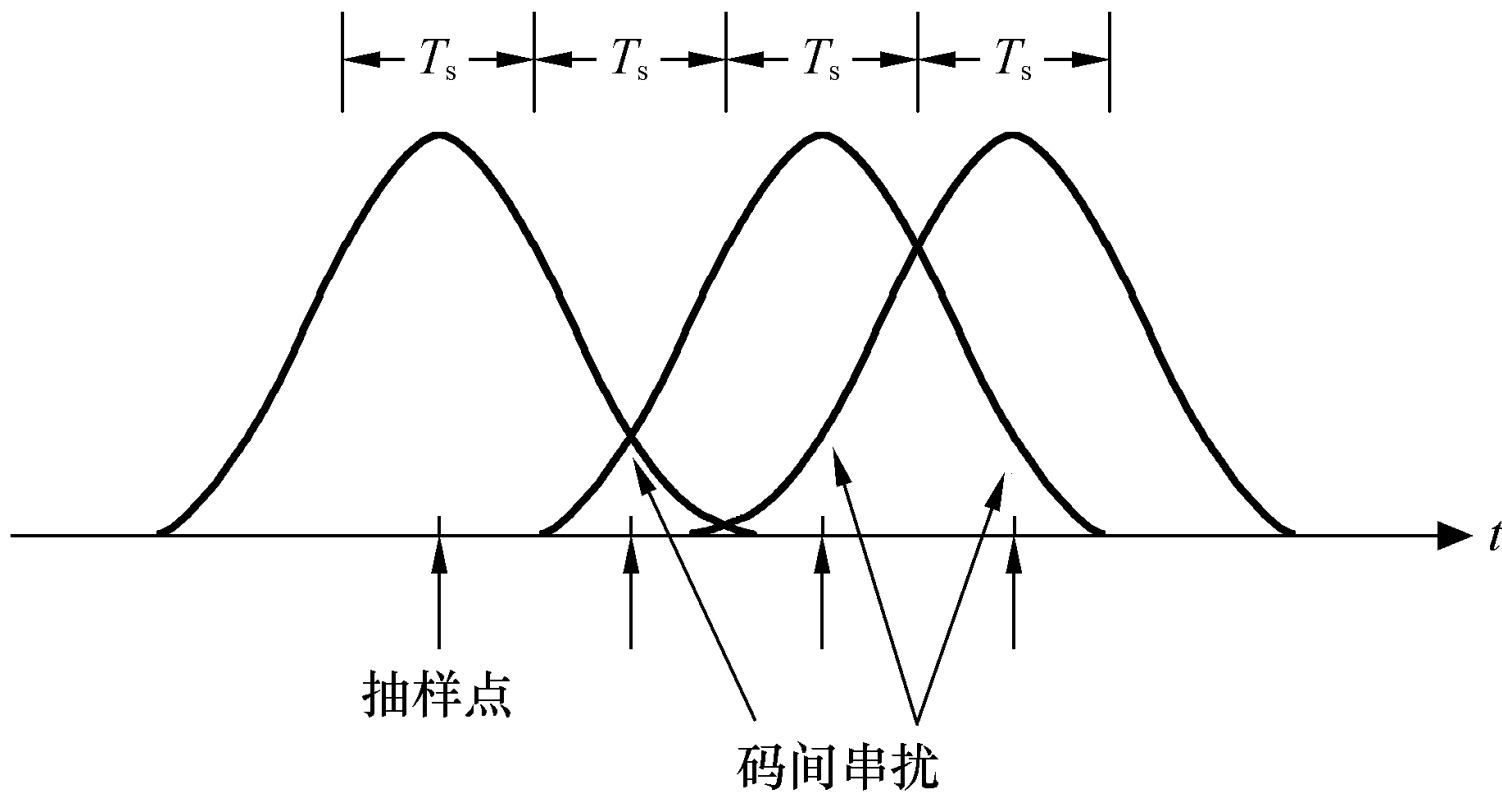
5.1节定性介绍了基带传输系统的工作原理，初步了解**码间串扰**和**噪声**是引起误码的因素。

本节我们进一步分析数字基带信号通过基带传输系统时的传输性能。



## 5.4.1 码间串扰

数字基带信号通过基带传输系统时，由于系统（主要是信道）传输特性不理想，或者由于信道中加性噪声的影响，使收端**脉冲展宽，延伸到邻近码元**中去，从而造成对邻近码元的干扰，我们将这种现象称为**码间串扰**。如图5-9所示。



**图5-9 基带传输中的码间串扰**

## 5.4.2 码间串扰的数学分析

数字基带信号的传输模型如图5-10所示。

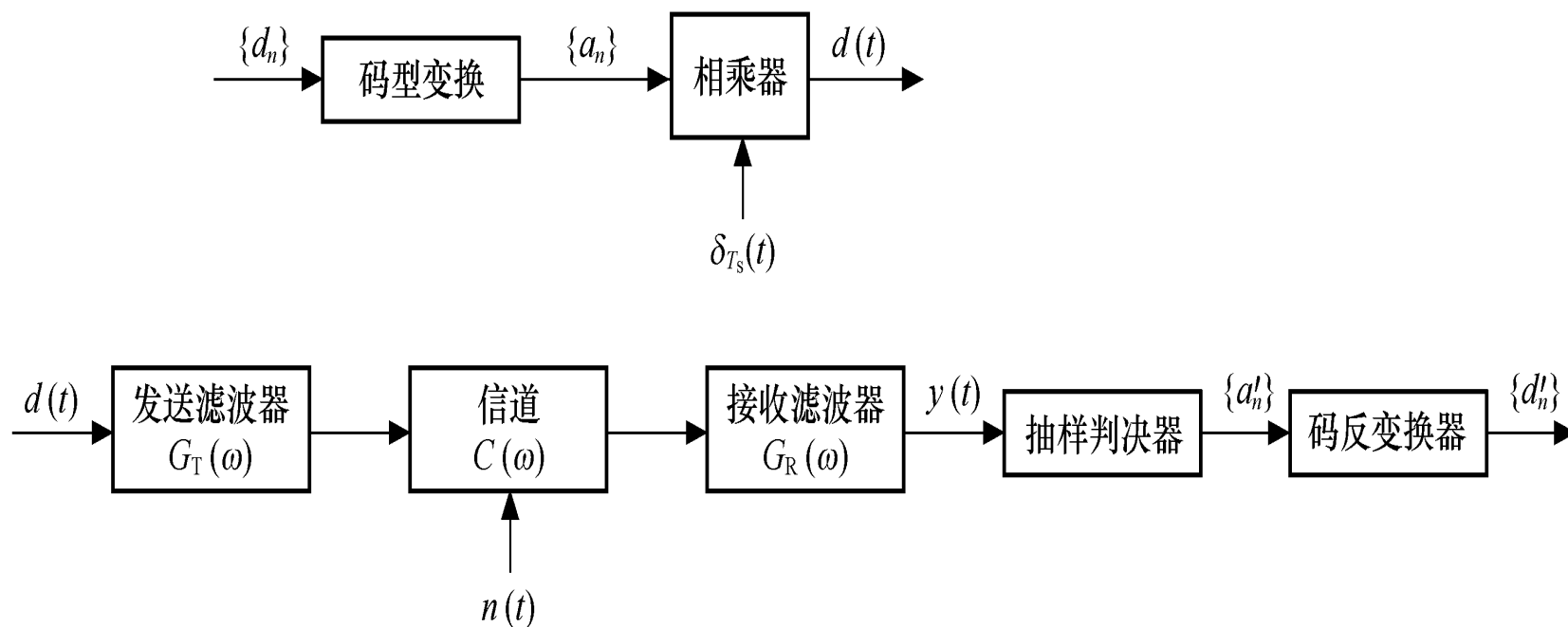


图5-10 基带传输系统模型

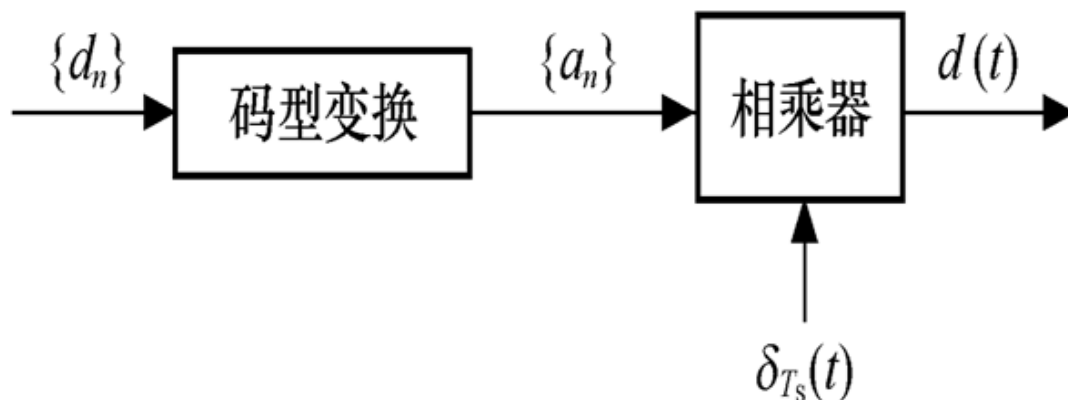
图中，输入信号  $\{d_n\}$  一般认为是**单极性**二进制矩形脉冲序列；  $\{d_n\}$  经过码型变换以后一般变换为**双极性**的码型（归零或不归零），也可能变换为**AMI 码**和**HDB<sub>3</sub>码**，但AMI 码和HDB<sub>3</sub>码与双极性码的区别在于多了一个零电平，零电平对码间串扰没有影响，如果不考虑零电平，只从研究传输性能来说，研究了**双极性码**，不难得出AMI和HDB<sub>3</sub>码的结果。

因此，一般都认为码型变换的输出为**双极性码**  $\{a_n\}$ ，其中

$$a_n = \begin{cases} a & \text{如果第}n\text{个码元是1码} \\ -a & \text{如果第}n\text{个码元是0码} \end{cases}$$

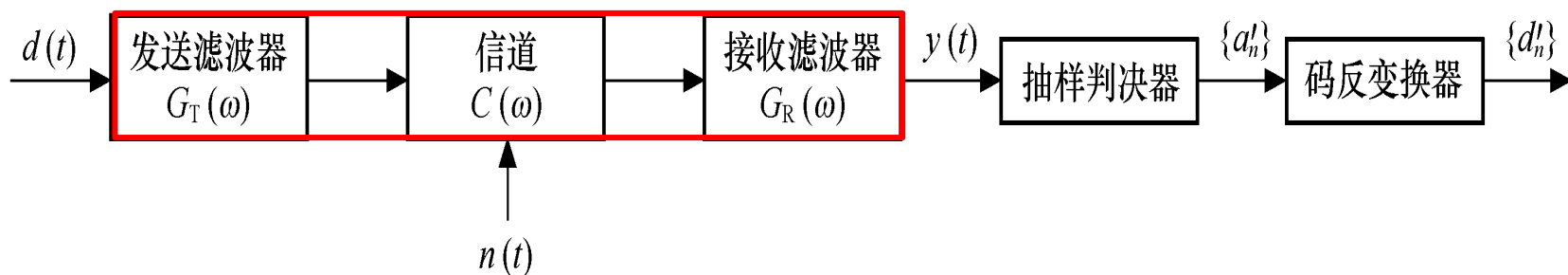
在波形形成时，通常先对  $\{a_n\}$  进行理想抽样，变成二进制冲激脉冲序列  $d(t)$ ，然后送入发送滤波器以形成所需的波形。即

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s) \quad (5.14)$$



# 基带传输系统模型

发送滤波器、信道、接收滤波器，一起来考虑：



设发送滤波器传输函数为 $G_T(\omega)$ ，信道的传输函数为 $C(\omega)$ ，接收滤波器的传输函数为 $G_R(\omega)$ ，则图5-10所示的基带传输系统的**总传输特性**为：

$$H(\omega) = G_T(\omega) C(\omega) G_R(\omega) \quad (5.15)$$

其对应的**单位冲激响应**为：

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.16)$$



则在 $d(t)$ 的作用下，接收滤波器输出信号 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = d(t) * h(t) + n_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT_s) + n_R(t) \quad (5.17)$$

式中， $n_R(t)$ 是加性噪声 $n(t)$ 经过接收滤波器后输出的窄带噪声。

**抽样判决器对 $y(t)$ 进行抽样判决。**

**设对第 $k$ 个码元进行抽样判决，抽样判决时刻应在收到第 $k$ 个码元的最大值时刻，设此时刻为 $kT_s + t_0$ （ $t_0$ 是信道和接收滤波器所造成的延迟），把 $t = kT_s + t_0$ 代入式（5.17）得**

$$\begin{aligned} y(kT_s + t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) + n_R(kT_s + t_0) \quad (5.18) \\ &= a_k h(t_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) + n_R(kT_s + t_0) \end{aligned}$$

上式中，右边第一项是第 $k$ 个码元本身产生的所需抽样值；第二项表示除第 $k$ 个码元以外的其他码元产生的不需要的串扰值，称为码间串扰。通常与第 $k$ 个码元越近的码元对它产生的串扰越大，反之，串扰小；第三项是第 $k$ 个码元抽样判决时刻噪声的瞬时值，它是一个随机变量，也要影响第 $k$ 个码元的正确判决。

从上面分析可见，数字基带信号在传输过程中是会产生**码间串扰**的。

码间串扰对基带传输的影响是：易引起判决电路的误操作，造成**误码**。所以我们要研究数字基带系统如何消除码间串扰。

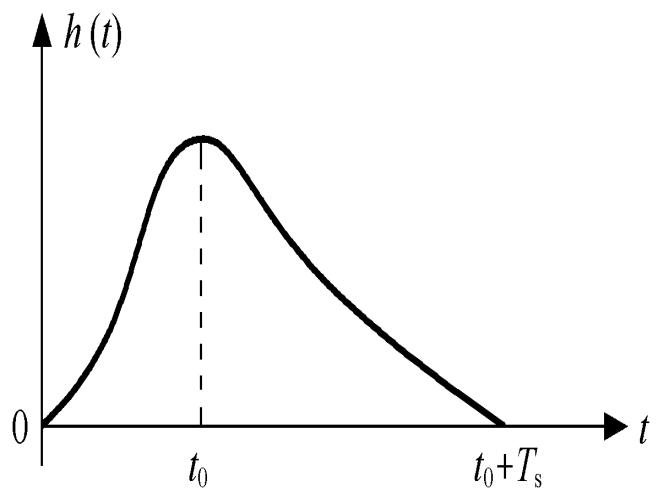
## 5.4.3 无码间串扰的基带传输特性

由式 (5.18) 可知, 若想消除码间串扰,

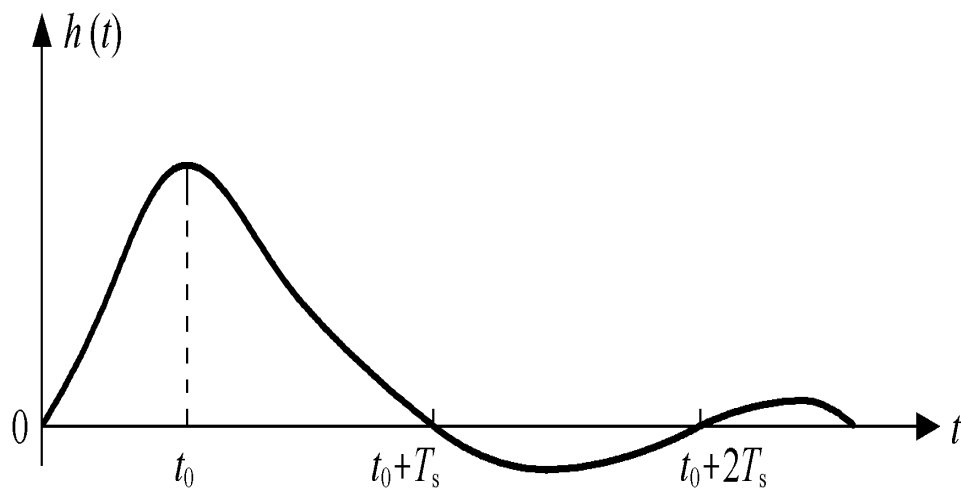
应有

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) = 0 \quad (5.19)$$

由于 $a_n$ 是随机的, 要想通过各项相互抵消使码间串扰为0是不行的, 这就需要对 $h(t)$ 的波形提出要求, **如果相邻码元的前一个码元的波形到达后一个码元抽样判决时刻时已经衰减到0**, 如图5-11 (a) 所示, 则这样的波形就能满足要求。



(a)



(b)

图5-11 消除码间串扰的原理

但这样的波形不易实现，因为实际中的 $h(t)$ 波形有**很长的“拖尾”**，也正是由于每个码元“拖尾”造成对相邻码元的串扰，但**只要让它**在 $t_0+T_s$ ， $t_0+2T_s$ 等后面码元抽样判决时刻上正好为0，就能消除码间串扰，如图5-11（b）所示。这就是消除码间串扰的基本思想。

由 $h(t)$ 与 $H(\omega)$ 的关系可知，如何形成合适的波形，实际上是如何设计特性的问题。下面，我们在不考虑噪声的条件下，研究如何设计**基带传输特性 $H(\omega)$** ，以形成在抽样时刻上无码间串扰的冲激响应波形 $h(t)$ 。



根据上面的分析，在假设信道和接收滤波器所造成的延迟 $t_0=0$ 时，无码间串扰的基带系统冲激响应满足下式：

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1(\text{或常数}), & k = 0 \\ 0, & k \text{为其它整数} \end{cases} \quad (5.20)$$

也就是说， $h(t)$ 的值除 $t=0$ 时不为零外，在其他所有抽样点均为零。

下面我们来推导符合以上条件的 $H(\omega)$ ：

因为

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad (5.21)$$

现在将上式的积分区域用角频率间隔 $2\pi/T_s$ 分割，可得

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{(2i-1)\pi/T_s}^{(2i+1)\pi/T_s} H(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad (5.22)$$

作变量代换：令  $\omega' = \omega - 2\pi i/T_s$ ，则有  
 $d\omega' = d\omega$ ，于是

$$\begin{aligned}
 h(kT_s) &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega' + \frac{2i\pi}{T_s}) e^{j\omega' kT_s} e^{j2\pi i k} d\omega' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega' + \frac{2i\pi}{T_s}) e^{j\omega' kT_s} d\omega' \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

当**上式之和一致收敛**时，求和与积分的次序可以互换，于是有

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \sum_i H(\omega + \frac{2i\pi}{T_s}) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \quad (5.24)$$

这里， 我们已把  $\omega'$  重新记为  $\omega$ 。

式 (5. 24) 中  $\sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$

的物理意义是：把  $H(\omega)$  的分割各段平移到  $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$  的区间对应叠加求和，简称为“切段叠加”。

令

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

(5. 24)

则 $H_{eq}(\omega)$ 就是 $H(\omega)$ 的“切段叠加”，称 $H_{eq}(\omega)$ 为**等效传输函数**。将其代入式（5.24）可得

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H_{eq}(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad (5.26)$$

将式（5.20）代入上式，便可得到**无码间串扰时，基带传输特性应满足的频域条件**，

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1(\text{或常数}), & k = 0 \\ 0, & k \text{为其它整数} \end{cases}$$

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H_{eq}(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} \sum_i H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) = T_s (\text{或常数}) & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

(5.27)

式 (5.27) 称为**奈奎斯特第一准则**。它为我们确定某基带系统是否存在码间串扰提供了理论依据。

$H_{eq}(\omega)$ 的物理含义如图5-12所示，从频域看，只要将该系统的传输特性 $H(\omega)$ 按 $2\pi/T_s$ 间隔分段，再搬回 $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$ 区间叠加，**叠加后若其幅度为常数，就说明此基带传输系统可以实现无码间串扰。**



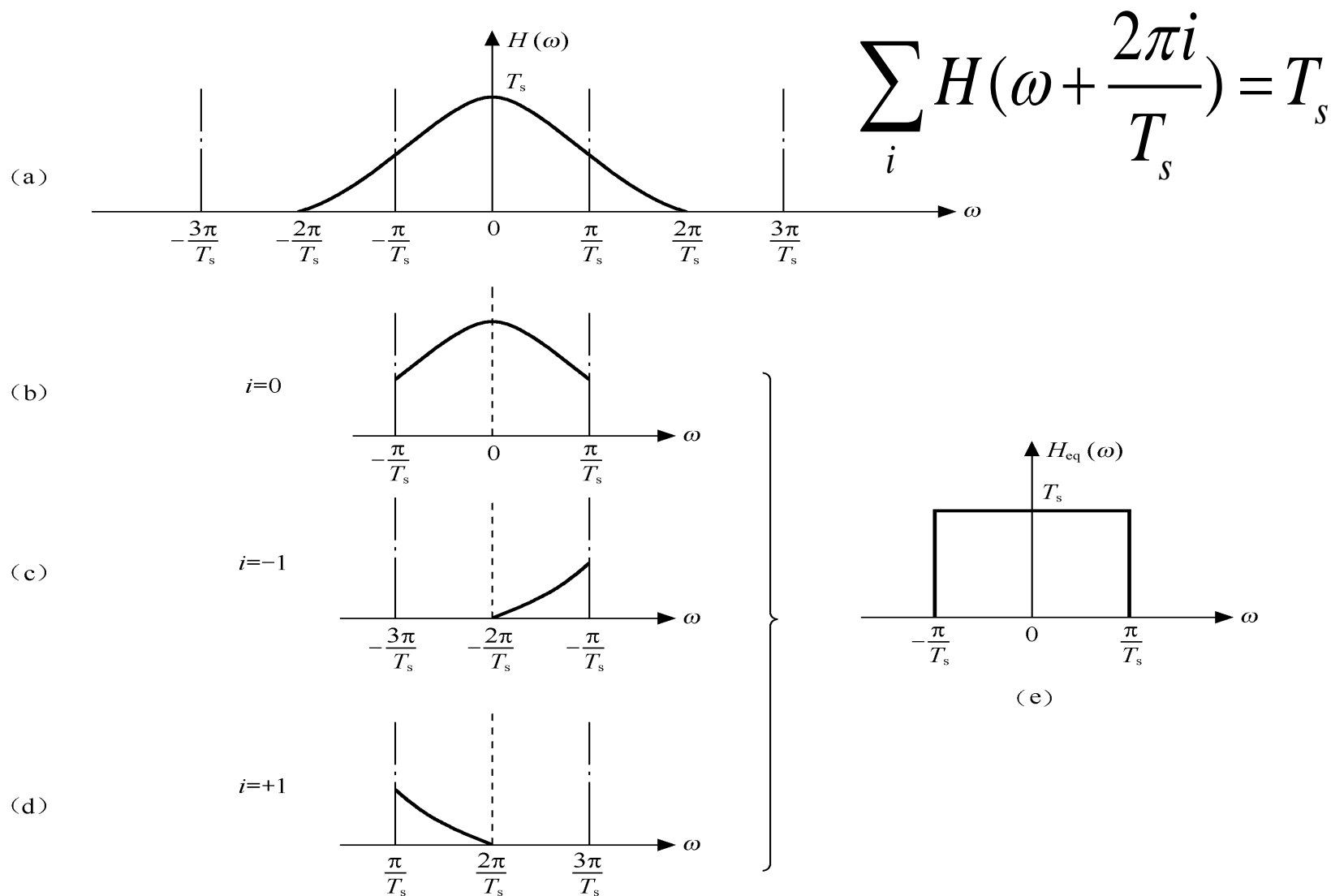


图5-12  $H_{eq}(\omega)$  的物理含义

中大光信息

$$\sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = T_s$$

显然，满足上式的系统并不是惟一的，**如何设计**或选择满足上式的是我们接下来要讨论的问题。

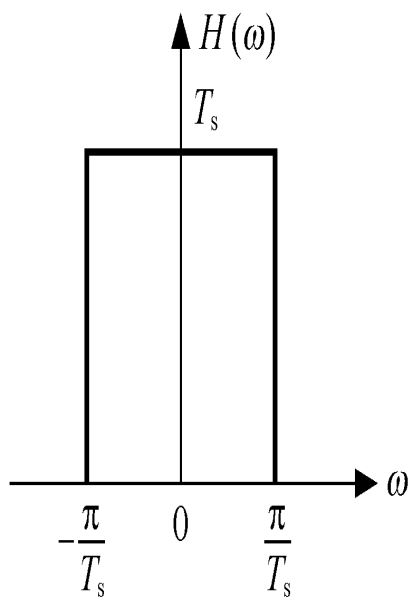
## 5.4.4 无码间串扰的理想低通滤波器

符合奈奎斯特第一准则的、最简单的传输特性是理想低通滤波器的传输特性，如图5-13所示，其传输函数为：

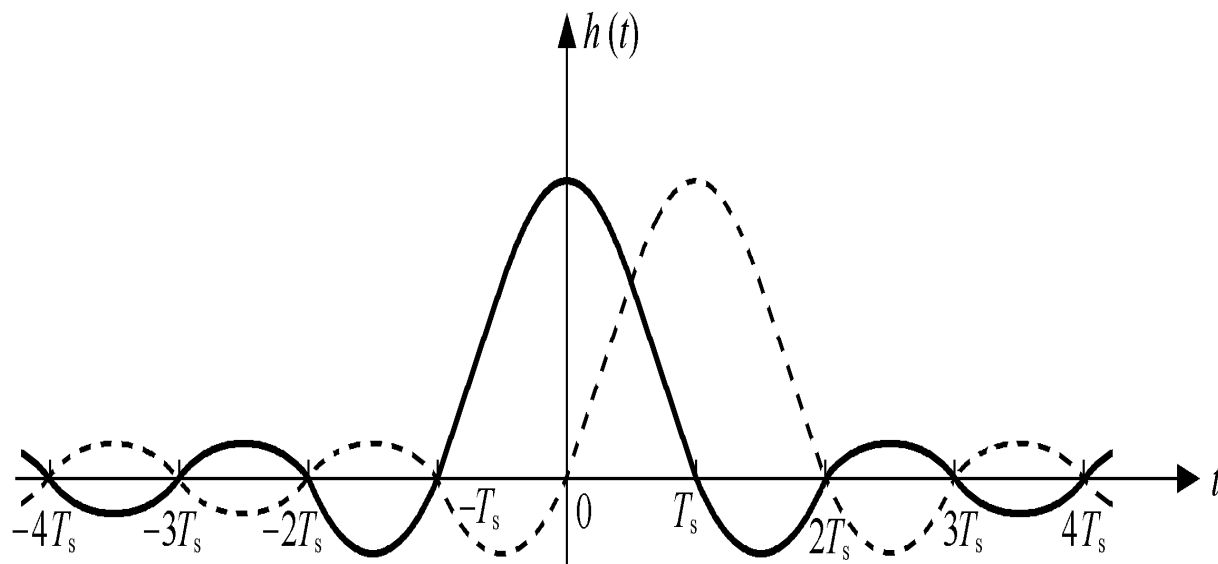
$$H(\omega) = \begin{cases} T_s (\text{或常数}) , & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases} \quad (5.28)$$

其对应的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T_s} t}{\frac{\pi}{T_s} t} = \text{Sa}(\pi t / T_s) \quad (5.29)$$



(a) 传输特性



(b) 冲激响应

$$|\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \rightarrow |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

图5-13 理想低通系统

由图5-13可见， $h(t)$ 在 $t=\pm kT_s$  ( $k \neq 0$ ) 时有周期性零点，当发送序列的间隔为 $T_s$ 时正好巧妙地利用了这些零点（见图 5 - 13 (b) 中虚线），实现了无码间串扰传输。

在图5-13所示的理想基带传输系统中，称截止频率

$$B_N = \frac{1}{2T_s} \quad (5.30)$$

为奈奎斯特带宽。

称  $T_s = 1/(2B_N)$  为系统传输无码间串扰的最小码元间隔，即奈奎斯特间隔。相应地，称  $R_B = 1/T_s = 2B_N$  为奈奎斯特速率，它是系统的最大码元传输速率

反过来说，输入序列若以  $1/T_s$  波特的速率进行传输时，所需的最小传输带宽为  $1/2T_s$  Hz。

下面再讨论频带利用率的问题。该理想基带系统的频带利用率  $\eta$  为：

$$\eta = R_B / B$$

$$\eta = R_B / B_N = 2 \text{Baud} / \text{Hz}$$

(5.30)

显然，理想低通传输函数的频带利用率为 **2Baud/Hz**。这是最大的频带利用率，因为如果系统用高于的码元速率传送信码时，将存在码间串扰。若降低传码率，则系统的频带利用率将相应降低。



从上面的讨论可知，理想低通传输特性的基带系统有最大的频带利用率。

但令人遗憾的是，理想低通系统在实际应用中存在两个问题：一是理想矩形特性的物理实现极为困难；二是理想的冲激响应 $h(t)$ 的“尾巴”很长，衰减很慢，当定时存在偏差时，可能出现严重的码间串扰。

下面，进一步讨论满足式（5.27）实用的、物理上可以实现的等效传输系统。

## 5.4.5 无码间串扰的滚降系统

考虑到理想冲激响应 $h(t)$ 的尾巴衰减慢的原因是系统的频率截止特性过于陡峭，这启发我们可以按图5-14所示的构造思想去设计 $H(\omega)$ 特性，只要图中 $Y(\omega)$ 的具有对 $B_N$ 呈奇对称的幅度特性，则 $H(\omega)$ 就能满足要求。这种设计也可看成是理想低通特性按奇对称条件进行“圆滑”的结果，上述的“圆滑”，通常被称为“滚降”。

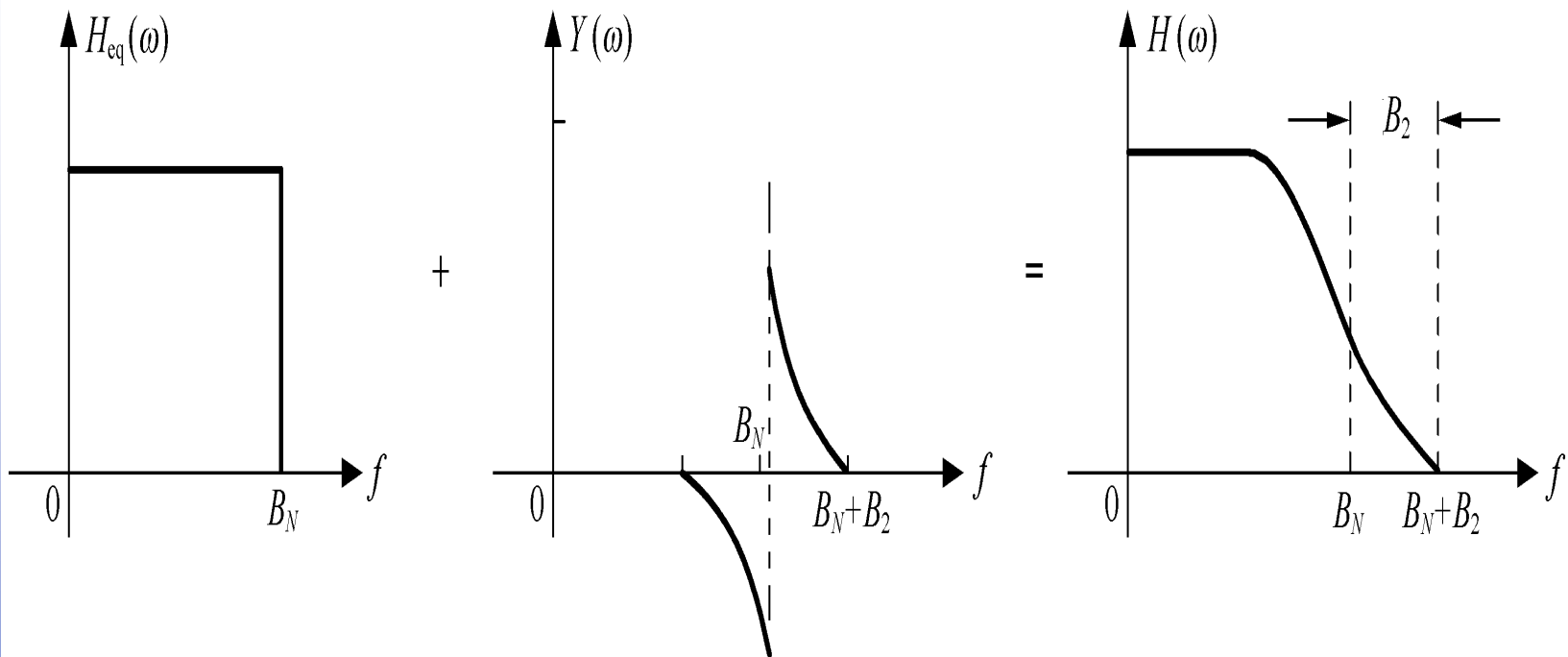


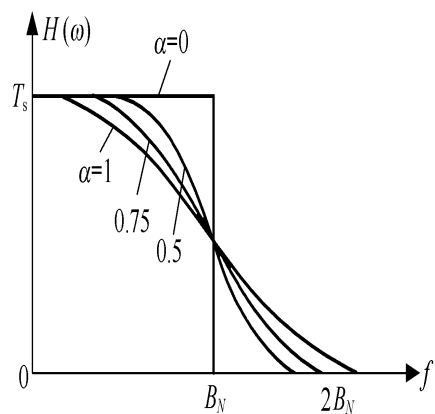
图5-14 滚降特性的构成

定义滚降系数为

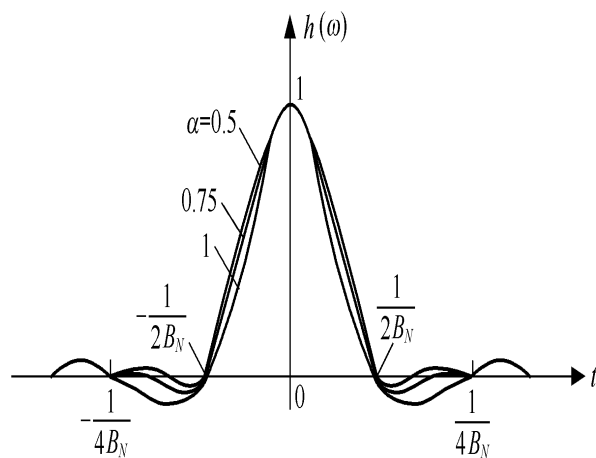
$$\alpha = \frac{B_2}{B_N} \quad (5.32)$$

其中 $B_N$ 是无滚降时的截止频率， $B_2$ 为滚降部分的截止频率。显然， $0 \leq \alpha \leq 1$

**不同的 $\alpha$ 有不同的滚降特性。** 图5-15画出了按余弦滚降的几种滚降特性和冲激响应。



(a) 不同  $\alpha$  的传输特性



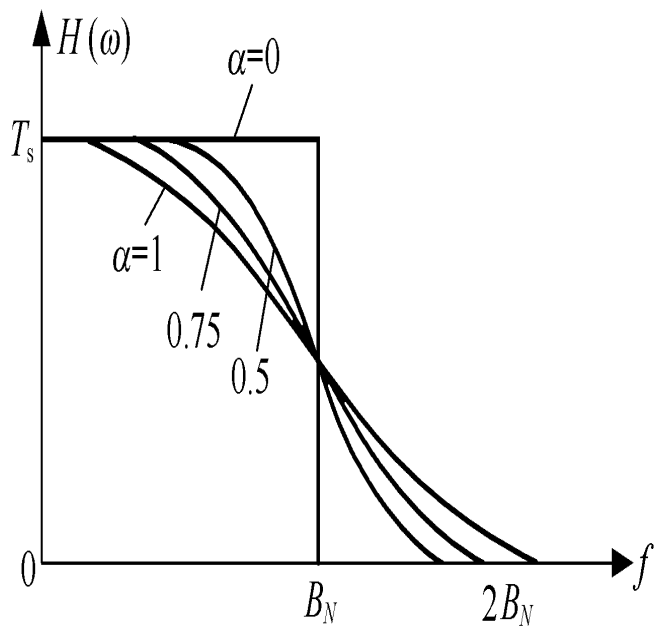
(b) 不同  $\alpha$  的冲激响应

具有滚降系数  $\alpha$  的余弦滚降特性  $H(\omega)$  可表示成：

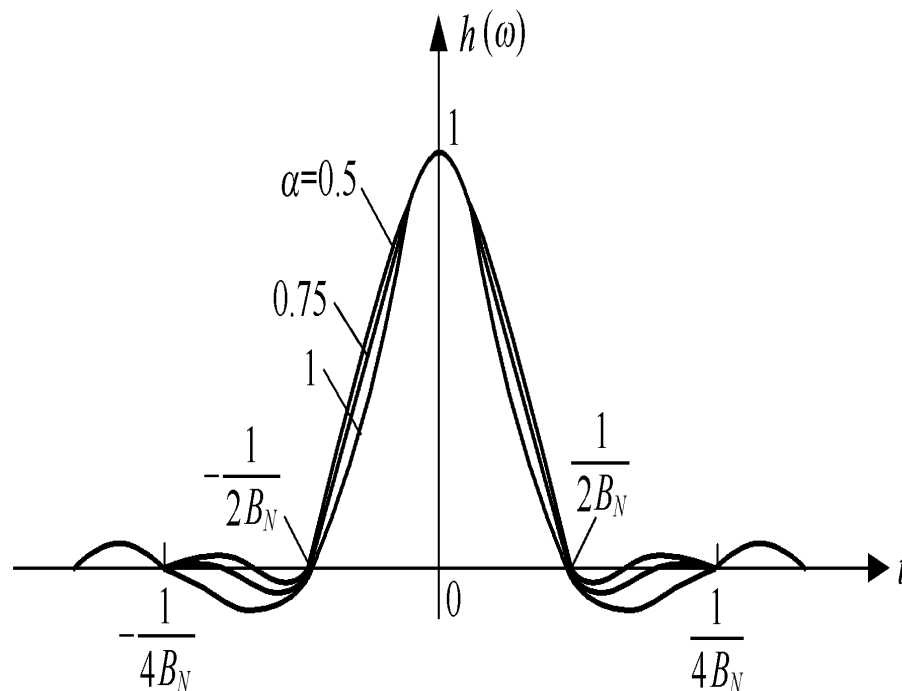
$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & , & 0 \leq |\omega| \leq \frac{(1-\alpha)\pi}{T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[ 1 + \sin \frac{T_s}{2\alpha} \left( \frac{\pi}{T_s} - \omega \right) \right] & , & \frac{(1-\alpha)\pi}{T_s} \leq |\omega| \leq \frac{(1+\alpha)\pi}{T_s} \\ 0 & , & |\omega| \geq \frac{(1+\alpha)\pi}{T_s} \end{cases} \quad (5.33)$$

而相应的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s} \cdot \frac{\cos(\alpha \pi t / T_s)}{1 - (2\alpha t / T_s)^2} \quad (5.34)$$



(a) 不同  $\alpha$  的传输特性



(b) 不同  $\alpha$  的冲激响应

**图5-15 余弦滚降系统**

由图5-15可见， $\alpha=0$ 对应的图形正好是理想低通滤波器， $\alpha$ 越大抽样函数的拖尾振荡起伏越小、衰减越快。 $\alpha=1$ 时，是实际中常采用的完全余弦频谱特性，它的波形最瘦，拖尾按速率 $t^{-3}$ 衰减，抑制码间串扰的效果最好，但与理想低通滤波器相比，它付出的代价是带宽增大了一倍。



# 完全余弦滚降频谱特性

此时系统的频带利用率为**1 Baud/Hz**，比理想低通滤波器的频带利用率降低了一倍

当  $\alpha=1$  时，  $H(\omega)$  可表示成

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} (1 + \cos \frac{\omega T_s}{2}), & |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_s} \\ 0, & |\omega| > \frac{2\pi}{T_s} \end{cases}$$

而 $h(t)$ 可表示为

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s} \cdot \frac{\cos(\pi t / T_s)}{1 - (2t / T_s)^2}$$

(5.36)

引入滚降系数  $\alpha$  后，系统的最高传码率不变，但是此时系统的带宽扩展为：

$$B = (1 + \alpha) B_N$$

$$R_B = 1/T_s$$

带宽  $B = (1 + \alpha)B_N$  (5. 37)

系统的**频带利用率**为

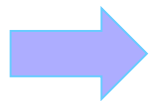
$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{(1 + \alpha)} \quad (Baud / Hz)$$

(5. 38)

余弦滚降特性的实现比理想低通容易得多，因此广泛应用于频带利用率不高，但允许定时系统和传输特性有较大偏差的场合。

$$B = (1 + \alpha) B_N$$

$$R_B = \frac{1}{T_S}$$



$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{(1 + \alpha)}$$

$$R_B = \frac{2}{(1 + \alpha)} B = \eta B = \frac{1}{T_S}$$

$$T_S = \frac{1}{\eta B}$$

$$\alpha = 0$$

$$T_S = \frac{1}{2B} \quad (B = B_N)$$

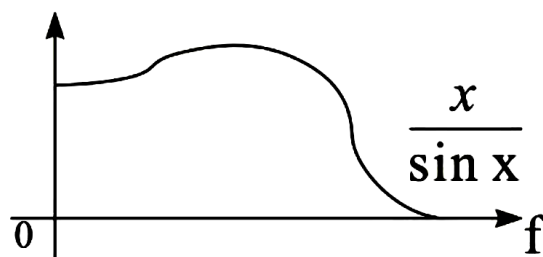
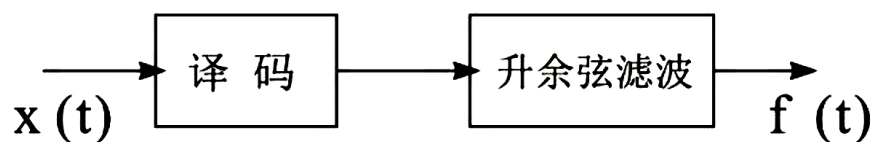
$$\alpha = 1$$

$$T_S = \frac{1}{B} \quad (B = 2B_N)$$

# 关于升余弦滚降滤波器

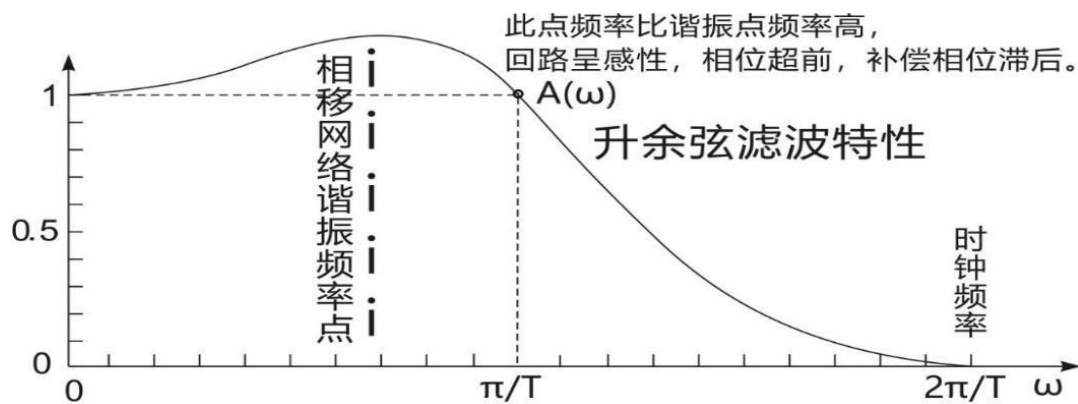
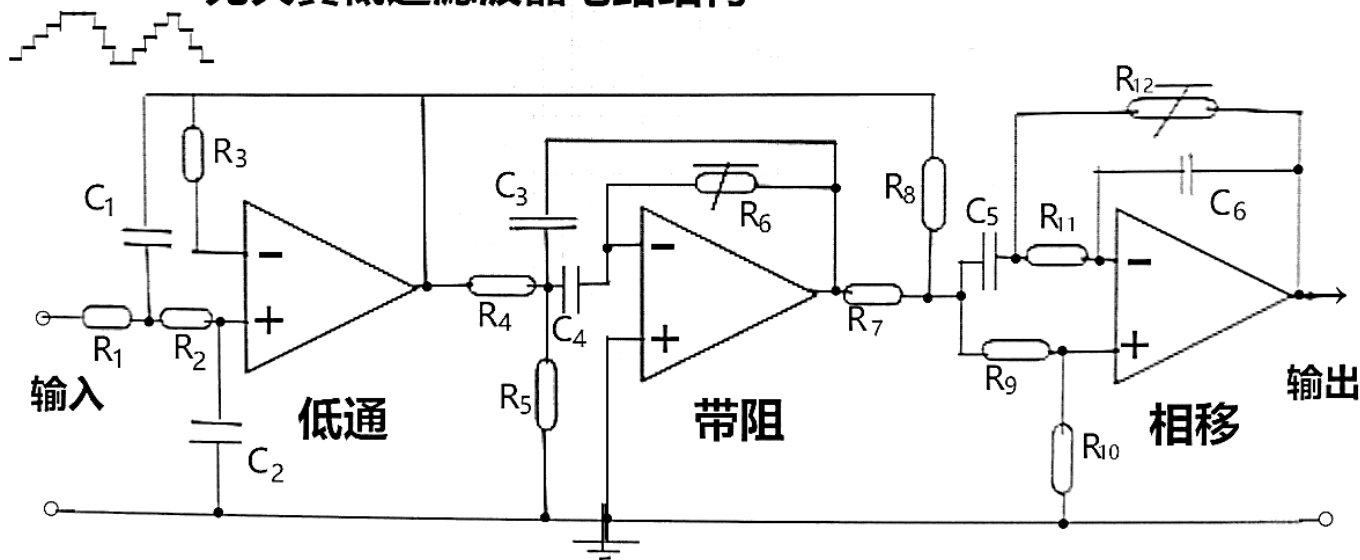
1.  $\alpha=1$ ，是完全余弦滚降系统，不是升余弦滚降滤波器

2. “升余弦”是与平顶采样直接相关的！



# 升余弦滤波器的实现

无失真低通滤波器电路结构



# 两个重要规则的不同应用对象

## 奈奎斯特抽样定理 (抽样定理)

讨论连续信号与抽样值的关系，为了用抽样值来表示一个带限 $f_m$  赫连续信号而不丢信息，对信号的取样频率必须大于或等于 $2f_m$  赫，而且可以上述范围任意取值。

例如PCM 的 $f_m=3.4\text{kHz}$ ，取样频率选 $8\text{kHz}$ ，也可以选 $8.1\text{kHz}$ 、 $10\text{kHz}$ 、 $8.05\text{kHz}$ 。

## 奈奎斯特第一准则

讨论波形传输问题，为了不产生码间干扰，对于 $f_m$  赫理想带宽，码元速率只能小于或等于 $2f_m$  波特，而且不能任意取值，用低速率

( $2f_m/n$  速率)， $n$  为大于零整数时可得无码间干扰， $n$  不为整数时则有码间干扰。

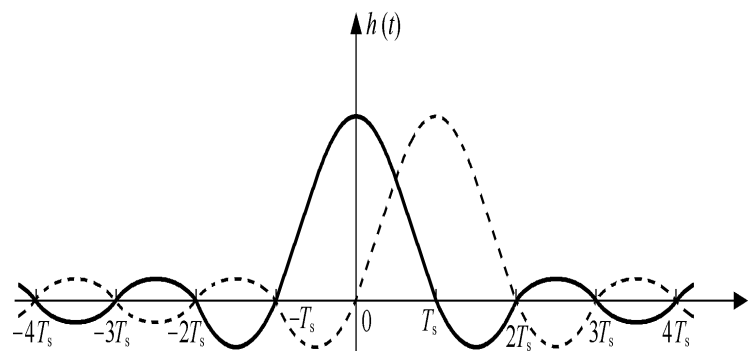
# 奈奎斯特第一准则: $R_B \leq 2B$

一.  $R_B = 2B$ , 理想低通

$$B = B_N$$

$$R_B = 2B_N$$

$$T_s = \frac{1}{2B_N}$$

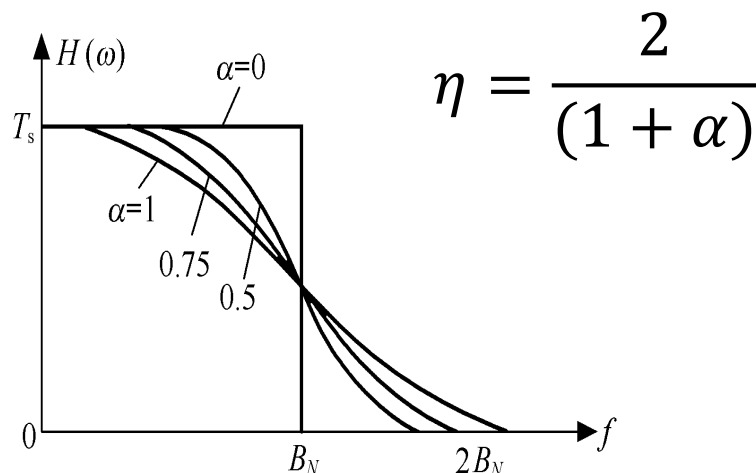


二.  $R_B < 2B$ , 滚降系统

$$B = (1 + \alpha)B_N$$

$$R_B = \eta B = \frac{2B}{1 + \alpha} < 2B$$

$$T_s = \frac{1}{2B_N} = \frac{1}{\eta B}$$





**[例5.4] 设某数字基带传输系统的传输特性 $H(\omega)$ 如图5-16所示。其中  $\alpha$  为某个常数 ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )。**

**(1) 试检验该系统能否实现无码间串扰传输？**

**(2) 试求该系统的最大码元传输速率为多少？这时的系统频带利用率为多大？**

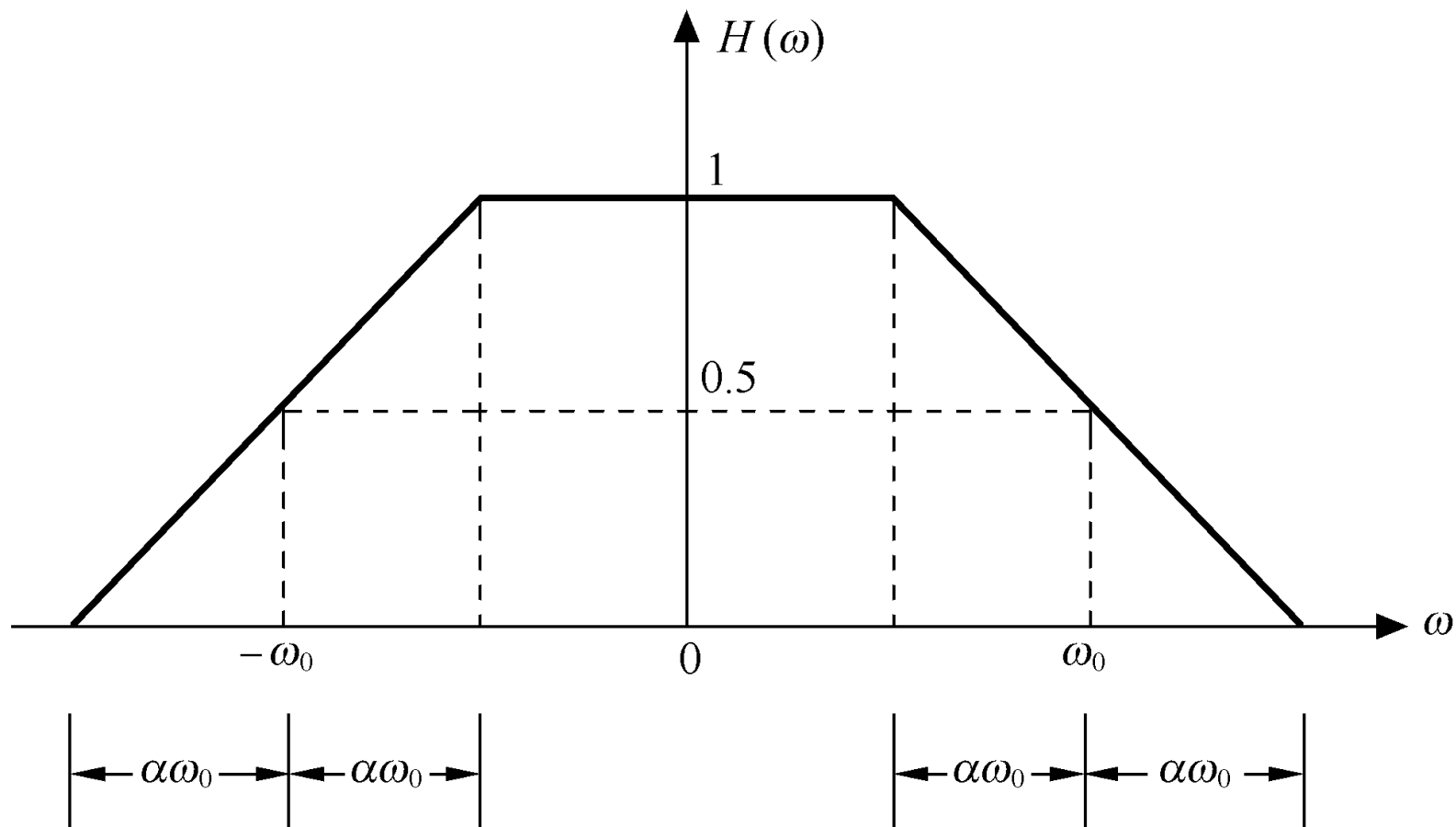


图5-16

**解：（1）由于该系统可构成等效矩形系统**

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

**所以该系统能够实现无码间串扰传输**

**（2）该系统的最大码元传输速率 $R_{\max}$ ，即满足 $H_{eq}(\omega)$ 的最大码元传输速率 $R_B$ ，容易得到：**

$$R_{\max} = 2B_N = 2 \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\pi} \quad (\text{Baud})$$

所以系统的频带利用率

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{1 + \alpha} \quad (\text{Baud} / \text{Hz})$$

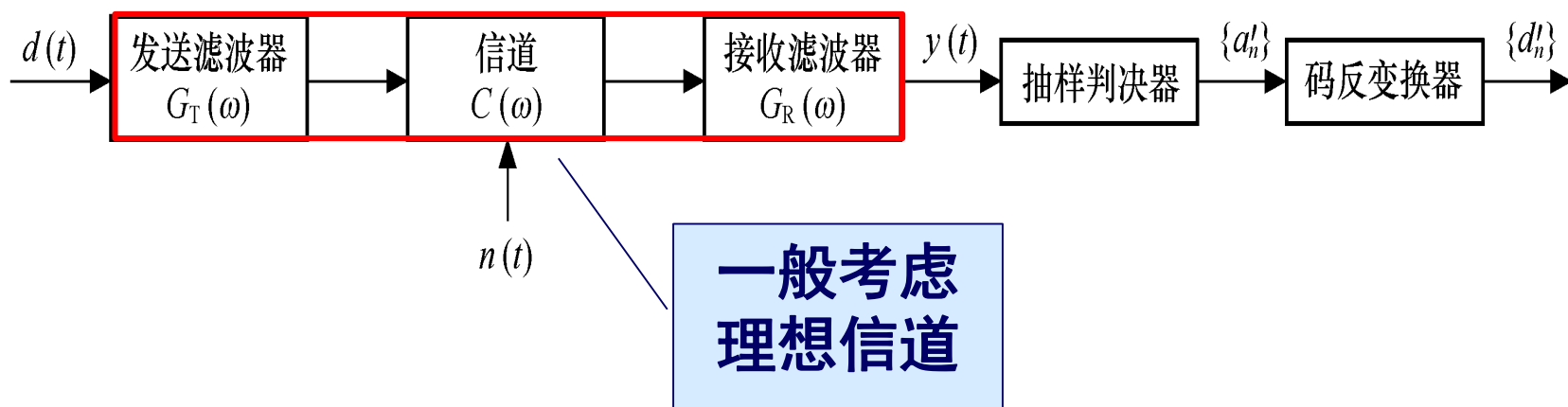
# 基带传输系统模型

发送滤波器、信道、接收滤波器，一并

来考虑：

最佳分配设计

$$G_R(\omega) = G_T(\omega) = \sqrt{H_{eq}(\omega)}$$



$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) = 0$$

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1(\text{或常数}), & k = 0 \\ 0, & k \text{ 为其它整数} \end{cases}$$

**作业**

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

# 小复习

## 数字基带的码型与波形

- 波形——适合于信道的传输
- 码间串扰的问题
- 发送滤波器+信道+接收滤波器的总传输特性
  - 满足什么条件可以避免码间串扰?
  - 奈奎斯特第一准则  $2B$  Baud
- 理想低通滤波器  $\eta = R_B / B_N = 2Baud / Hz$
- 滚降滤波器  $B = (1 + \alpha)B_N$

**2Baud/Hz** 是最大的频带利用率

$$\eta = R_B / B_N = 2 \text{Baud} / \text{Hz}$$

**$R_B=2B$  (*Baud*)** 还可以理解为：“带

宽为B赫的系统最多能传送2B

个脉冲”



# 关于香农公式的证明

$$C_t = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad (b/s)$$

设信号的带宽为**B**赫，受高斯白噪声干扰，噪声功率为**N**瓦，信号功率为**S**瓦。

则，接收端的信号电压为 $\sqrt{S + N}$ 伏。噪声电压 $\sqrt{N}$ 伏。

为了接收端能够从噪声中辨别出信号，辨别电平间隔为 $\sqrt{N}$ 伏。接收端能够无误辨别的不同电平数为

$$M = \frac{\sqrt{S + N}}{\sqrt{N}} = \sqrt{1 + \frac{S}{N}}$$

## 证明（续）

**M**个电平相当于**M**进制数，每个波形能够传送的最大信息量为

$$I = \log_2 M = \log_2 \left( \sqrt{1 + \frac{S}{N}} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

又因为根据奈奎斯特准则，带宽为**B**赫的系统最多能传送**2B**个脉冲。因此，最大信息速率为  $C = (2B)I = 2B \cdot \left[ \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \right]$

$$R_{\max} = C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

#

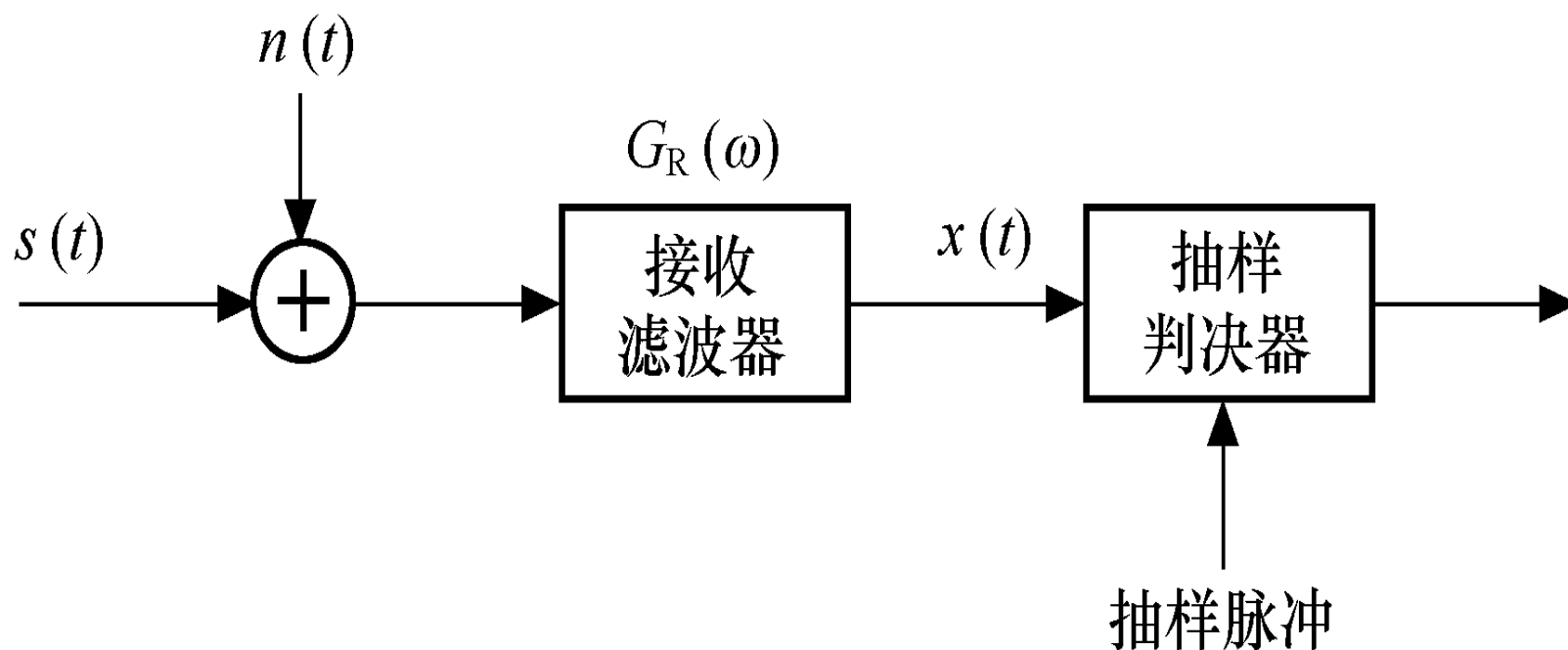
## 5.5 无码间串扰基带传输系统的抗噪声性能分析

通常用**误码率**来度量系统抗加性噪声的能力。误码是由**码间干扰**和**噪声**两方面引起的，如果同时计入码间串扰和噪声来计算误码率，将使计算非常复杂。为了简化起见，通常都是**在无码间串扰的条件下**计算由噪声引起的误码率。

$$x(t) = s(t) + n_R(t) \quad (5.39)$$

一般认为信道噪声只对接收端产生影响，则可建立抗噪声性能分析模型如图5-17所示。图中，设二进制接收波形为 $s(t)$ ，信道噪声是均值为零、双边功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声，它经过接收滤波器后变为高斯带限噪声 $n_R(t)$ ，则接收滤波器的输出是信号加噪声的合成波形，记为 $x(t)$ ，即

$$x(t) = s(t) + n_R(t)$$



**图5-17 抗噪声性能分析模型**

## 抽样判决

前面已经提到，发送端发出的数字基带信号是 $s(t)$ 经过信道和接收滤波器以后，在无码间串扰条件下，对“1”码抽样判决时刻信号有正的最大值，我们用 $A$ 表示；对“0”码抽样判决时刻信号有负的最大值（对双极性码），用 $-A$ 表示，或是为0值（对单极性码）。

由于我们只关心抽样时刻的值，因此我们把收到“1”码的信号在整个码元区间内用 $A$ 表示，“0”码的信号用 $-A$ （或者0）表示，也是可以的。

这样在性能分析时，双极性基带信号可近似表示为

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{发送“1”时} \\ -A & \text{发送“0”时} \end{cases} \quad (5.40)$$

同理，单极性基带信号可近似表示为

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{发送“1”时} \\ 0 & \text{发送“0”时} \end{cases} \quad (5.41)$$

## 一、传单极性基带信号时，接收端的误码率 $P_e$

设高斯带限噪声  $n_R(t)$  的均值为零，方差为  $\sigma_n^2$ ，则其一维概率分布密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5.42)$$

其中， 
$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(\omega)|^2 \frac{n_0}{2} d\omega$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$



对传输的单极性基带信号，设它在抽样时刻的电平取值为+A或0（分别对应于信码“1”或“0”），则 $x(t)$ 在抽样时刻的取值为

$$x(kT_s) = \begin{cases} A + n_R(kT_s), & \text{发“1”码} \\ 0 + n_R(kT_s), & \text{发“0”码} \end{cases} \quad (5.43)$$

设判决电路的判决门限为 $V_d$ ，判决规则

$x(kT_s) > V_d$ ，判为“1”码

$x(kT_s) < V_d$ ，判为“0”码

实际中**噪声干扰**会使接收端出现两种**可能的错误**：发“1”码时，在抽样时刻噪声呈现一个大的负值与信号抵消使收端判为“0”码；

发“0”码时，在抽样时刻噪声幅度超过判决门限使收端判为“1”码。

下面我们来求这两种情况下码元**判错的概率**。

1、发“0”错判为“1”的条件概率 $P_{e0}$

发“0”码时， $x(t)=n_R(t)$ ，由于 $n_R(t)$ 是高斯过程，则 $x(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5.44)$$

此时，当 $x(t)$ 的抽样电平大于判决门限时 $V_d$ ，就会发生误码。

所以，发“0”错判为“1”的条件概率为：

$$P_{e0} = P(x > V_d) = \int_{V_d}^{\infty} f_0(x) dx = \int_{V_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right] dx$$

(5.45)

对应于图5-18中 $V_d$ 右边阴影部分的面积。

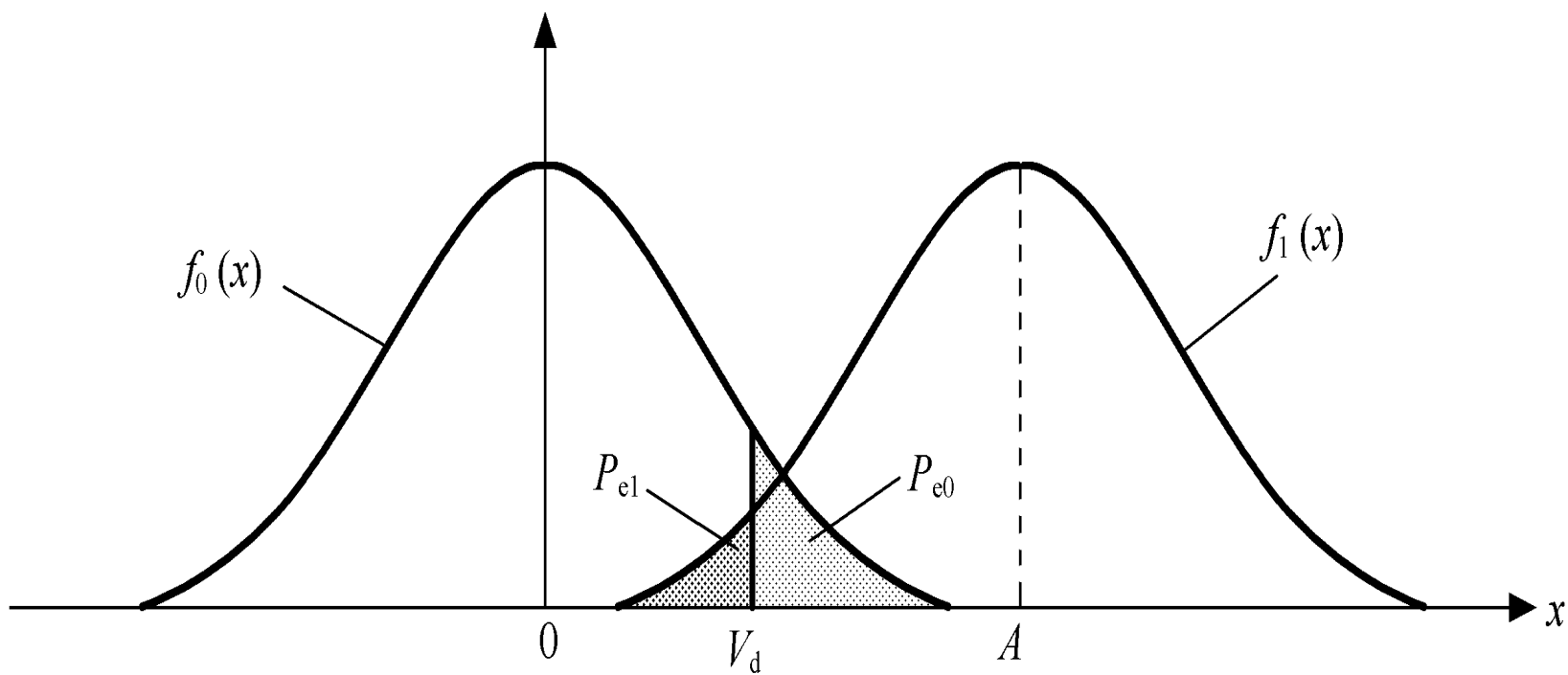


图5-18  $x(t)$  的概率密度分布曲线

## 2、发“1”错判为“0”的条件概率 $P_{e1}$

当发送“1”时， $x(t)=A+n_R(t)$ ，此时 $x(t)$ 的概率密度分布仍为高斯分布，但均值为 $A$ 。

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5.46)$$

此时，当 $x(t)$ 的抽样电平小于判决门限时 $V_d$ ，就会发生误码。

所以，发“1”错判为“0”的条件概率为：

$$P_{e1} = P(x < V_d) = \int_{-\infty}^{V_d} f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] dx$$

(5.47)

对应于图5-18中 $V_d$ 左边阴影部分的面积。

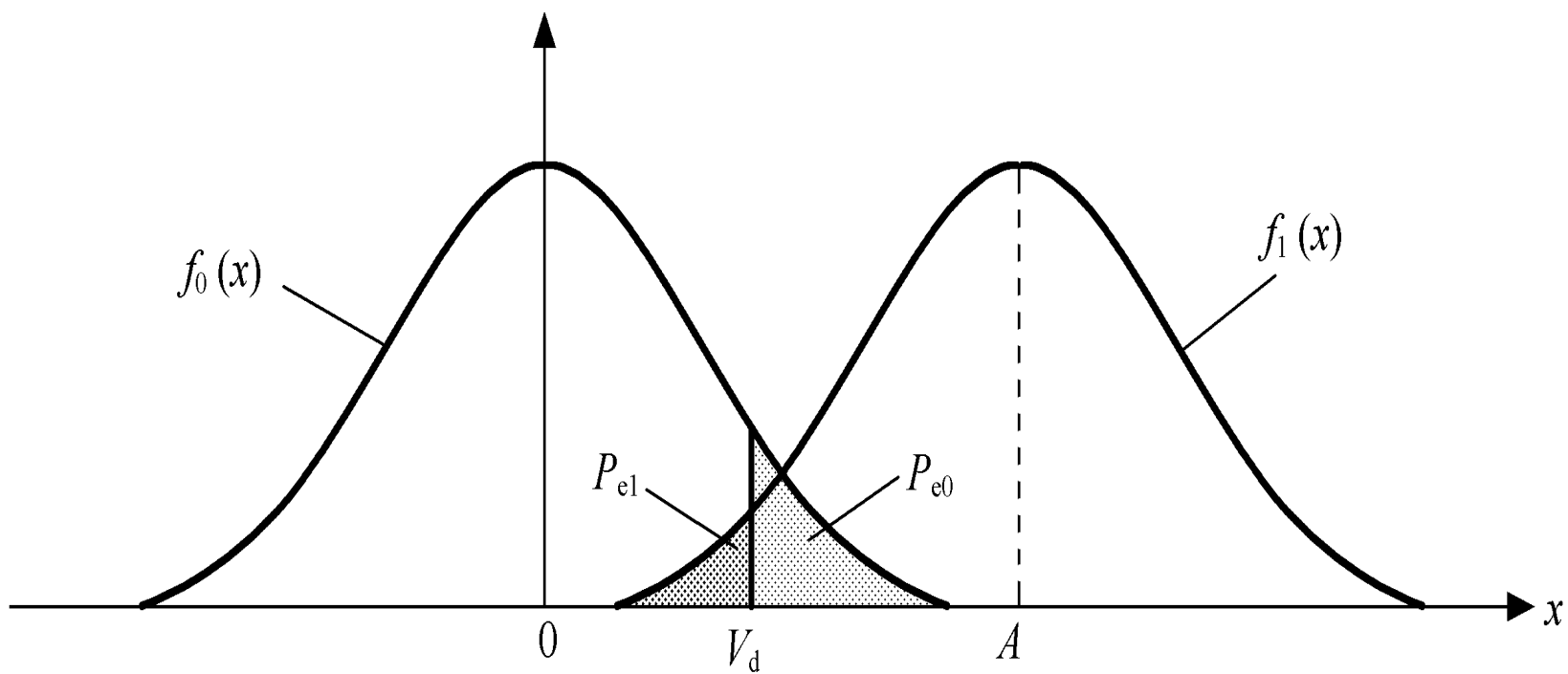


图5-18  $x(t)$  的概率密度分布曲线



### 3、传输系统总的**误码率** $P_e$

$$P_e = P(0)P_{e0} + P(1)P_{e1} \quad (5.48)$$

由式 (5.45)、式 (5.47) 和式 (5.48) 可以看出，基带传输系统的总误码率与判决门限电平有关。可以计算，

当  $P(0)=P(1)=1/2$  时，最佳判决门限为  $V_d=A/2$ 。

当发“1”和发“0”等概率时，且在最佳判决门限电平的条件下，基带传输系统的总误码率为：

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

下面我们讨论**误码率 $P_e$** 和**信噪比**之间的关系

由于信号平均功率 $S$ 与信号的波形和大小有关，前面我们已经提到，即使接收到的信号波形不是矩形脉冲，但由于我们只关心抽样判决时刻的值，因此一般我们都以矩形脉冲为基础的二进制码元来计算信号平均功率 $S$ 。

对单极性基带信号，在发“1”和发“0”等概率时，其信号的平均功率为  $S = A^2 / 2$ ，噪声功率为  $\sigma_n^2$ ，则其信噪比为：

$$r_{\text{单}} = \frac{A^2}{2} / \sigma_n^2 = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} = r \quad (5.50)$$

将式 (5.50) 代入式 (5.49) 可得

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right) \quad (5.51)$$

## 二、传双极性基带信号时，接收端的误码率 $P_e$ 。

对于双极性二进制基带信号，设它在抽样时刻的电平取值为 $+A$ 或 $-A$ （分别对应于信码“1”或“0”），当发“1”码和发“0”码等概率，并同时满足最佳判决门限电平 $V_d=0$ 的条件时，基带传输系统的总误码率为：

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right) \right] \quad (5.52)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right)$$

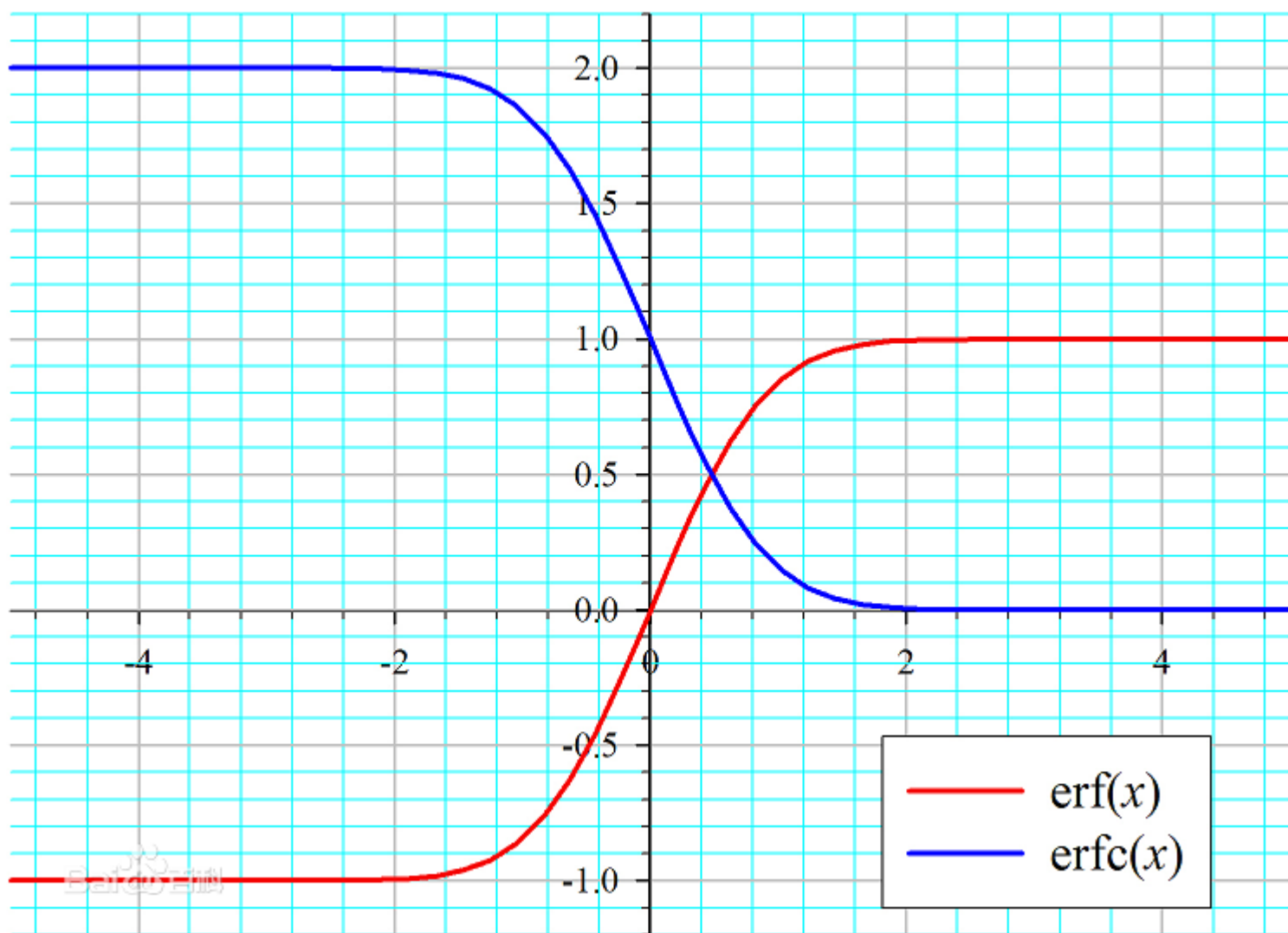
对双极性基带信号，在发“1”和发“0”等概率时，其信号的平均功率为  $S = A^2$ ，噪声功率为  $\sigma_n^2$ ，则其信噪比为：

$$r_{\text{双}} = \frac{A^2}{\sigma_n^2} = 2r_{\text{单}} \quad (5.53)$$

将式 (5.53) 代入式 (5.52) 可得

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r_{\text{双}}}/2) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r}) \quad (5.54)$$

其中,  $r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$  为信噪比。





比较式 (5.51) 和 (5.54) 可见：

第一，基带传输系统的误码率只与信噪比 $r$ 有关。

第二，在单极性与双极性基带信号抽样时刻的电平取值 $A$ 相等、噪声功率 $\sigma_n^2$ 相同的条件下，单极性基带系统的抗噪声性能不如双极性基带系统。

第三，在等概率条件下，单极性的最佳判决门限电平为 $A/2$ ，当信道特性发生变化时，信号幅度 $A$ 将随着变化，

故判决门限电平也随之改变，而不能保持最佳状态，从而导致误码率增大。

而双极性的最佳判决门限电平为0，与信号幅度无关，因而不随信道特性变化而改变，故能保持最佳状态。因此，数字基带系统多采用双极性信号进行传输。

## 小复习

$$P_{e,\text{单}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right)$$

$$P_{e,\text{双}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$

注：互补误差函数是自变量的递减函数

$$r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$$