电动力学 第12课

镜像法、格林函数

边值问题的解法之二——镜像法

镜像法是用一个或若干个假想的点电荷——像电荷来代替（等效）导体表面的感应电荷或介质的极化电荷对电场的贡献。

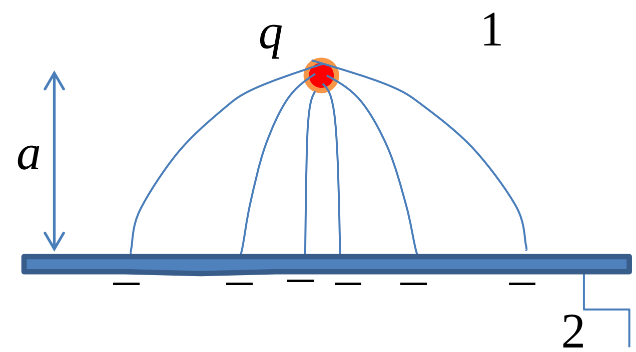
只要这些假想的电荷与原来已知电荷共同激发的电场或电势满足求解区域内的全部（定解）边界条件，那么所得到的解是唯一正确的。

用像电荷来代替感应电荷，像电荷与原电荷势点电荷，电势容易计算。

注意：　为使问题的解满足求解区域内已知的Poisson方程或Laplace方程，**像电荷必须放置在求解区域之外**。

例一：　接地的无限大导体平面附近有一点电荷 q ，求空间的电势

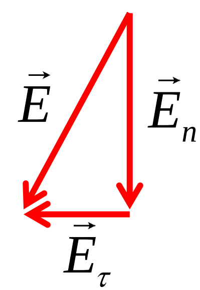
解：导体平面是等势体，求解区域为上半空间



区域1，满足 $\nabla^2\varphi=0$　　　q 点除外

区域2电势恒为零

由边界条件，导体内外的 $\vec{E}_\tau$ 连续，
但导体内部无电场，故外面也要 $\vec{E}_\tau=0$



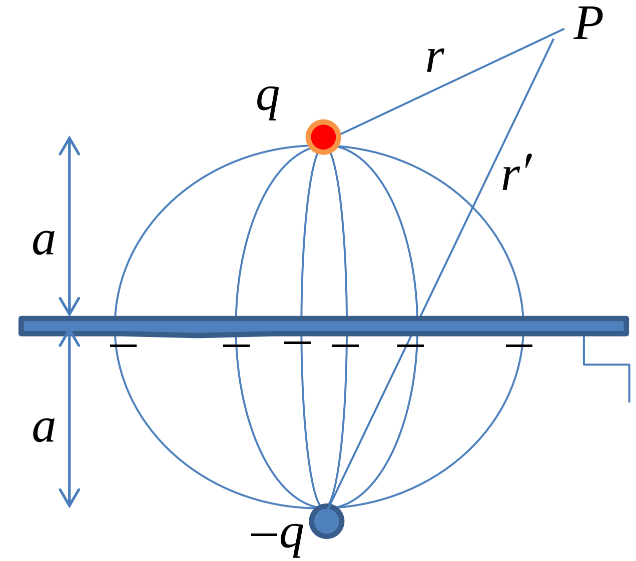
边界条件：

1） 电力线一定要垂直于导体表面！

2）　$\varphi\big|_{R\to\infty}\to 0$

怎样才能满足边界条件？

在下半平面（区域2）对称的地方放置一**假想的**点电荷 $-q$



以假想的像电荷代替分界面上真实的感应电荷

由于假想的像电荷与真实存在的点电荷关于分界面是镜像对称的，———因此这种解法也叫镜像法

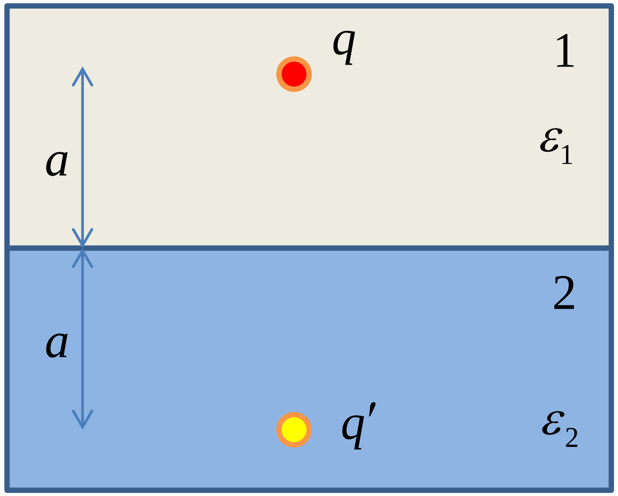
于是，上半空间的电势为： $\varphi(P)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$

推广： 上、下半空间分别充满了节点常数为 ε_1 和 ε_2 的均匀介质，在 $z=a$ 处有一点电荷，求电势分布，以及电荷受到的作用力

方程： $\nabla^2\varphi_{1,2}=0$ q 点除外

边界条件： $\varphi_1\big|_{z=0}=\varphi_2\big|_{z=0}$

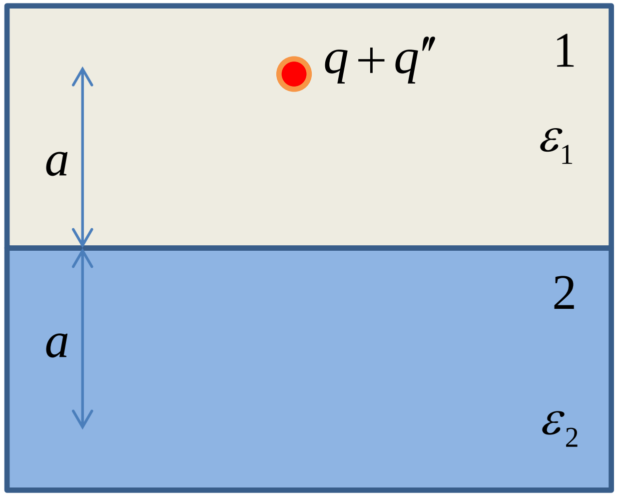
$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$



对于区域1，在区域2中 $z=-a$ 处放置一像电荷 q'

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}$$

对于区域2，在区域1中 $z=a$ 原电荷q处再放置一像电荷q''



$$\varphi_2=\frac{q+q''}{4\pi\varepsilon_2\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$$

根据边界条件：

$$\varphi_1\big|_{z=0}=\varphi_2\big|_{z=0} \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+a^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+a^2}}=\frac{q+q''}{4\pi\varepsilon_2\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

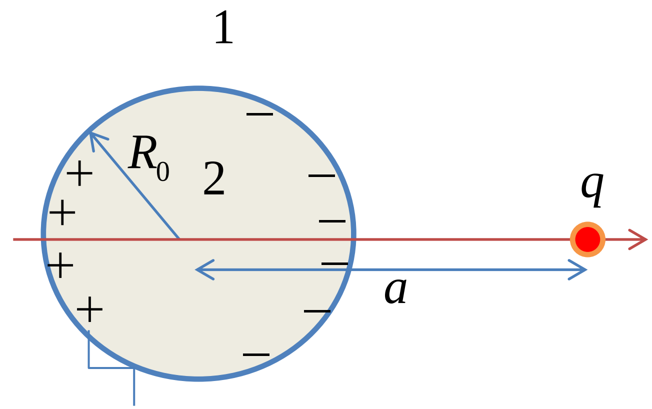
$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} \Rightarrow \frac{-aq}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}+\frac{aq'}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}=\frac{-a\left(q+q''\right)}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}$$

解出： $q'=\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$ $\qquad q''=-q'$

电荷 q 受到的作用力： $F=qE_{q'}=\dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_1(2a)^2}\vec{e}_z=\dfrac{qq(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{16\pi\varepsilon_1 a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\vec{e}_z$

例二：　半径为 R_0 的接地导体球外有一点电荷 q ，求电势

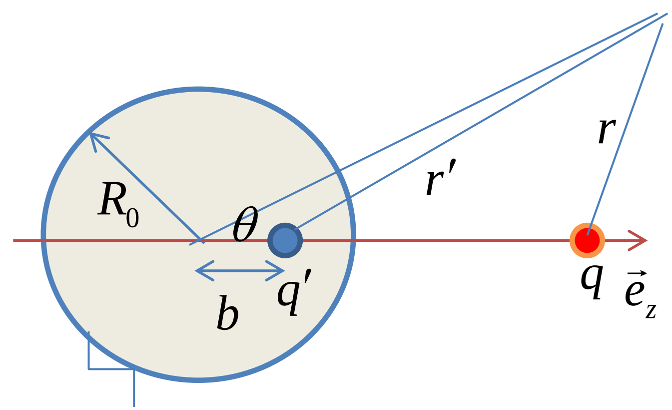
解：导体球是等势体，求解区域为球外空间



区域1，满足 $\nabla^2\varphi=0$　　　q 点除外

区域2电势恒为零

球外的电场 $=$ q 贡献的电场 $+$ 导体球面出现感应电荷的场



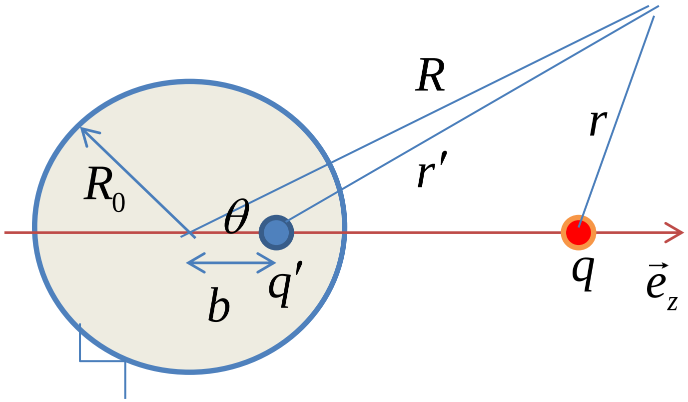
有正、有负的感应电荷，对球外的电场都有贡献，想办法找一个像电荷去顶替它们

感应电荷的场 $\overset{\text{等效}}{\Longleftrightarrow}$ 假想的像电荷 q' 产生电场

由问题的轴对称性可知，像电荷应该放在$\vec{e}_z$轴，并且必须放在球内

于是，球外空间的电势为：

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}$$



边界条件：

1）　$\varphi\big|_{R\to\infty} \to 0$　（自动满足）

2）　$\varphi\big|_{R_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{R_0} + \left.\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}\right|_{R_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{q^2}{r^2}\right|_{R_0} = \left.\frac{q'^2}{r'^2}\right|_{R_0}$

几何上可知（余弦定理）

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta$$

$$r'^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta$$

$$\frac{q^2}{R_0^2 + a^2 - 2R_0 a\cos\theta} = \frac{q'^2}{R_0^2 + b^2 - 2R_0 b\cos\theta}$$

$$q^2\left(R_0^2+b^2\right)-2R_0bq^2\cos\theta=q'^2\left(R_0^2+a^2\right)-2R_0aq'^2\cos\theta$$

对任意角度 θ 都要满足，则每项各自对应相等

$$\left.\begin{aligned} q^2\left(R_0^2+b^2\right)&=q'^2\left(R_0^2+a^2\right)\\ 2R_0bq^2&=2R_0aq'^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{b=\frac{R_0^2}{a}} \quad \boxed{q'=-\frac{R_0}{a}q}$$

（已略去另一不合理解）

球外空间的任一点电势为：

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}+\frac{-R_0q/a}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+\left(R_0^2/a\right)^2-2R_0^2\,R/a\cos\theta}}$$

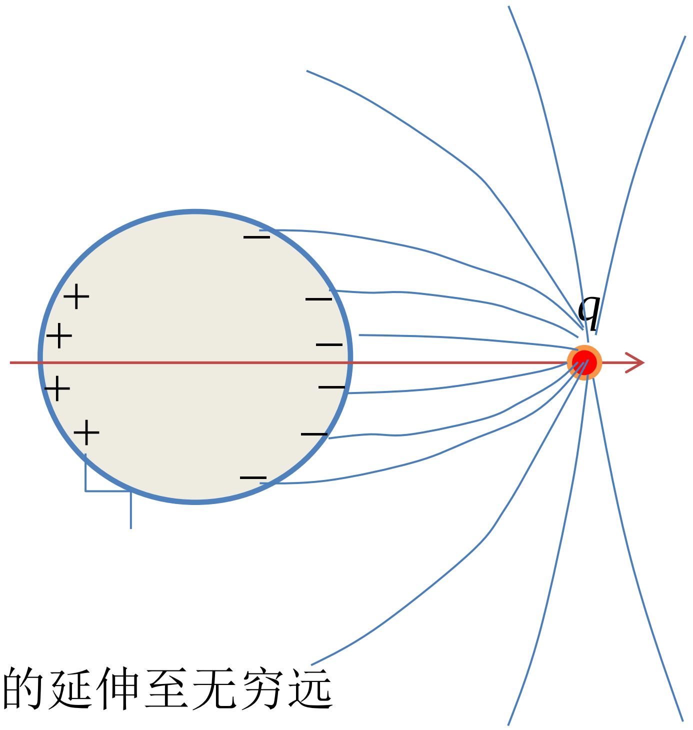
显然满足求解空间内的方程 $\nabla^2\varphi=0$ ，边界条件 $\left.\varphi\right|_{R\to\infty}\to 0$

$$\left.\varphi\right|_{R_0}=0$$

由唯一性定理，它一定是对的！

球面的感应电荷面密度：

$$\sigma_f = \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \vec{D}_2\cdot\vec{e}_r = D_{2r}\big|_{R_0} = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial R}\bigg|_{R_0}$$



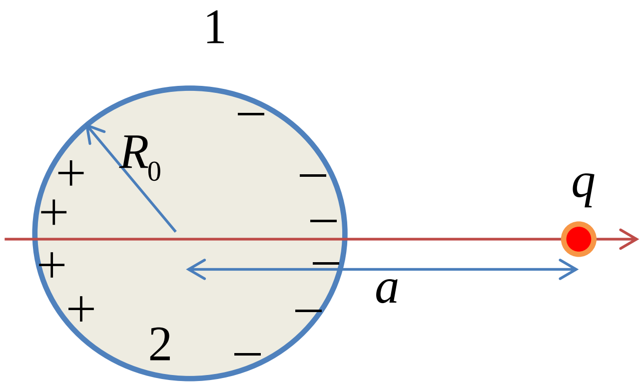
总感应电荷面密度：

$$q_i = \oiint_{surface} \sigma_f dS = -\oiint_{surface} \varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial R} dS = -\frac{R_0}{a} q$$

$$|q_i| < q$$

即由 q 出发的电力线只有一部分收敛于球面，其余的延伸至无穷远

例三：　如果导体球不接地，而是带净电荷q_0 ，求球外电势及 q 受到的作用力



解：导体球是等势体，求解区域为球外空间

区域1，满足 $\nabla^2\varphi = 0$　　q 点除外

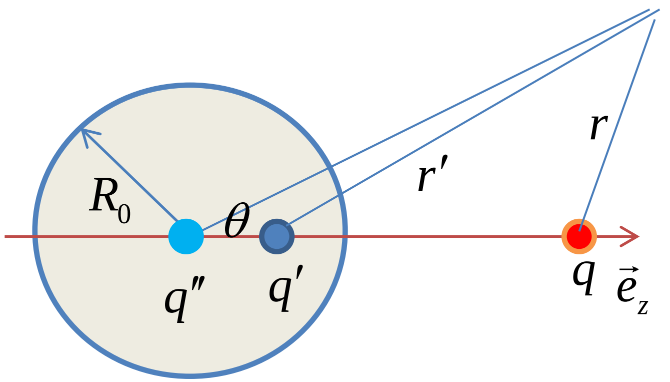
区域2电势恒为零

边界条件：

1）　$\varphi\big|_{R\to\infty} \to 0$　（自然边界条件）

2）　$\varphi\big|_{R_0} = Const$　（未知）常数

3）　$\oiint\limits_{surface} \vec{D}\cdot dS = -\oiint\limits_{surface} \varepsilon_0 \dfrac{\partial\varphi}{\partial R} dS = q_0$



相当于边界条件变了

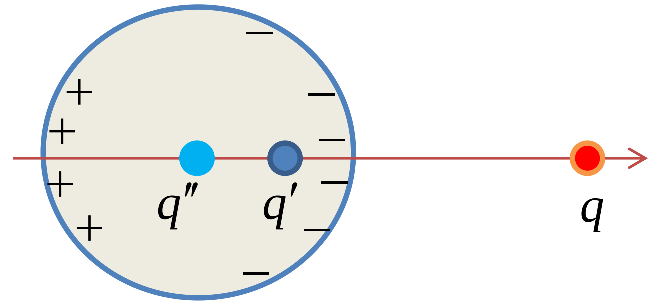
若在 $z = b$ 处放置像电荷 $q' = -R_0 q/a$ ，则球面电势为零，同时在球心处再放置另一像电荷 $q'' = q_0 - q'$ ，即能保证：

i）整个球的总电量为q_0　　Ii）球面上由不为零的电势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

能满足方程和边界条件1）、2）、3）

$$q'' = q_0 - q' = q_0 + \frac{R_0}{a}q$$



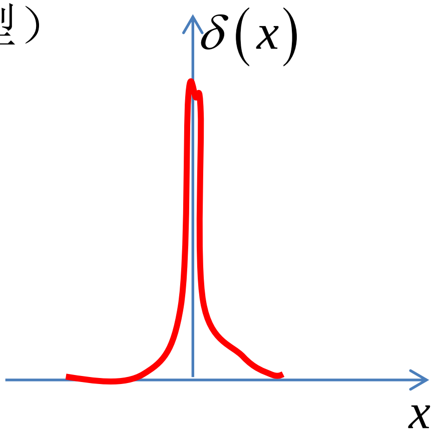
电荷 q 受到的作用力：

$$F = qE_{q'q''} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q''}{a^2} + \frac{q'}{(a-b)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{q_0 + R_0 q/a}{a^2}}_{\text{排斥力}} - \underbrace{\frac{R_0 q/a}{(a-b)^2}}_{\text{吸引力}}\right]$$

当 $a \to R_0$ 时，　　吸引力 $>$ 排斥力

即使 q 与 q_0 同号，只要 q 距离球面足够近，感应负电荷的存在，它就有可能受到一个净的吸引力（颠覆以前的想法——同号排斥）

δ 广义函数　（Dirac引入，物理学中常采用点电荷等理想模型）



带电小球 $\Delta q = \rho \Delta V$　　Δq有限　$\Delta V \to 0$

则 $\rho \to \infty$

点电荷密度 $\rho = e\delta(x)$

定义$\delta(x)$函数：

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$ 且 $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

对任意函数，均有：$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)dx = f(0)$$

推广，平移坐标轴

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0) = \begin{cases} \infty & (\vec{x} = \vec{x}_0) \\ 0 & (\vec{x} \neq \vec{x}_0) \end{cases}$$ 且 $$\int_V \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)d\vec{x} = 1 \qquad (\vec{x}_0 \in V)$$

对任意函数，均有：$$\int_V \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) f(\vec{x})d\vec{x} = f(\vec{x}_0)$$

边值问题的解法之三——格林函数法

如果非齐次偏微分方程的非齐次项是 δ 函数，
则满足边界条件的方程的定解称为Green函数解

例如： 在 $\vec{x}'$ 处的点电荷的电势满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\delta(\vec{x}-\vec{x}')}{\varepsilon}$$

且满足边界条件： $\varphi|_S = 0$ 或 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0$

则 φ 是格林函数，$\varphi = G(\vec{x},\vec{x}')$

即：
$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x}-\vec{x}') = -\delta(\vec{x}-\vec{x}')/\varepsilon \\ \underbrace{G|_S = 0}_{\text{第一类边值问题}} \quad \text{或} \quad \underbrace{\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0}_{\text{第二类边值问题}} \end{cases}$$

例： 无界空间的格林函数 $$G(\vec{x},\vec{x}')=G(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r\neq 0$ $$\nabla^2\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right]=0$$

$r=0$ $$\lim_{V\to 0}\int_V\nabla^2\frac{1}{r}dV=\int_V\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}dV=\oiint\nabla\frac{1}{r}\cdot d\vec{S}=-\oiint\frac{\vec{e}_r}{r^2}\cdot d\vec{S}=-\oiint\frac{1}{r^2}\cdot r^2 d\Omega=-4\pi$$

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(r)$$

例： 接地的无限大导体平面附近有一点电荷 q ，写出格林函数

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}$$

格林公式和边值问题的解

在求解区域 V 内有 $\varphi(\vec{x})$ 和 $\Psi(\vec{x})$

$$\nabla\cdot(\Psi\nabla\varphi)=\nabla\Psi\cdot\nabla\varphi+\Psi\nabla^2\varphi$$

$$\nabla\cdot(\varphi\nabla\Psi)=\nabla\Psi\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla^2\Psi$$

两式相减：

$$\nabla\cdot(\Psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\Psi)=\Psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\Psi$$

积分：

$$\iiint_V(\Psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\Psi)dV'=\boxed{\iiint_V\nabla\cdot(\Psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\Psi)dV'=\oiint_S(\Psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\Psi)\cdot d\vec{S}'}$$

高斯定理

取：
$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\rho(\vec{x}')/\varepsilon_0\\ \Psi=G(\vec{x},\vec{x}')\end{cases}$$

$$\nabla^2G(\vec{x},\vec{x}')=-\delta(\vec{x}-\vec{x}')/\varepsilon_0$$

$$\iiint_V \left(-G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} - \varphi(\vec{x}')\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') \right) dV' = \oiint_S \left(G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G}{\partial n} \right) \cdot d\vec{S}'$$

$$\iiint_V \left(-\varphi(\vec{x}')\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') \right) dV' = \iiint_V \varphi(\vec{x}')\frac{\delta(\vec{x}-\vec{x}')}{\varepsilon_0} dV' = \frac{\varphi(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \iiint_V G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') dV' + \varepsilon_0 \oiint_S \left(G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n} \right) \cdot d\vec{S}'}$$

格林公式

（i）对于第一类边值问题

在区域 V 内有已知 $\rho\left(\vec{x}'\right)$的分布，边界 S 上给定 $\varphi\big|_S$ ，求 $\varphi\left(\vec{x}\right)$

相应的格林函数为： $\begin{cases} \nabla^2 G\left(\vec{x},\vec{x}'\right) = -\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)/\varepsilon_0 \\ G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)\big|_S = 0 \end{cases}$

$$\varphi\left(\vec{x}\right) = \iiint\limits_V G(\vec{x},\vec{x}')\rho\left(\vec{x}'\right)dV' - \varepsilon_0 \oiint\limits_S \varphi\left(\vec{x}'\right)\frac{\partial G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)}{\partial n}\cdot d\vec{S}'$$

求出了相应的格林函数，则$\varphi\left(\vec{x}\right)$就得到解决了

例：无界空间的格林函数为$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right) = G\left(r\right) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\qquad \varphi\big|_S \to 0$

$$\varphi\left(\vec{x}\right) = \iiint\limits_V G(\vec{x},\vec{x}')\rho\left(\vec{x}'\right)dV' - \varepsilon_0 \oiint\limits_S \varphi\left(\vec{x}'\right)\frac{\partial G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)}{\partial n}\cdot d\vec{S}'$$

$$= \iiint\limits_V \frac{\rho\left(\vec{x}'\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'$$

（ii）对于第二类边值问题

在区域 V 内有已知 $\rho(\vec{x}')$ 的分布，边界 S 上给定 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$，求 $\varphi(\vec{x})$

相应的格林函数为：

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\delta(\vec{x}-\vec{x}')/\varepsilon_0 \\ \left.\dfrac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n}\right|_S = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \iiint_V G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}')dV' + \varepsilon_0 \oiint_S G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS'$$

几点说明：

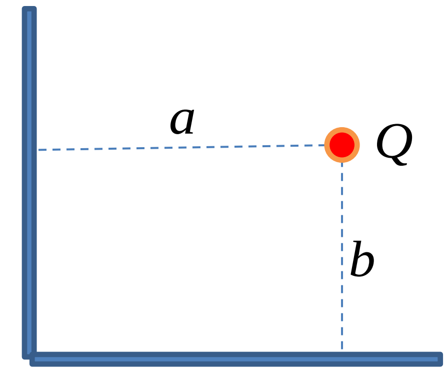
1）静电边值问题可以归结为求解格林函数。只要求出格林函数，就可以算出电势分布

2）格林函数方法具有形式解的意义，求解格林函数不是意见一件容易的事情。

3）格林函数方法有着重要意义。它描述不同边界条件下点源与场的关系，只要求出格林函数，就可以算出电势分布。它不仅适用于静电问题，也适用于静磁问题，同样适用于电磁波的问题。

作业

1。（郭书2.12题）
有一点电荷 Q 位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内，它到两个平面的距离分别为a和 b ，求空间电势。



2。（郭书2.11题）
在接地的导体平面上有一半径为a 的半球凸部，半球的球心在导体平面上，点电荷 Q 位于系统的对称轴上，并与平面相距为$b\left(b>a\right)$，求空间电势。