

4-5 章复习题

一. 求下列函数的极限.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt}{x^2 \ln(1+x)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{\tan^4 2x}.$$

二. 将下列函数在 $x=0$ 处展开为带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

$$1. f(x) = x^2 \ln(3+x)$$

$$2. f(x) = \frac{7x^3}{x-5}$$

三. 1. 求曲线 $y = 3e^{-x^2}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

$$2. \text{ 设 } y = \frac{(x-3)^2}{x-1},$$

(1). 求该函数的单调区间和极值。

(2). 求该函数所确定曲线的上、下凸区间。

四. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 满足

$$f(x) + f(-x) = A \quad (A \text{ 为常数}),$$

证明:

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$$

并利用该等式计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$ 的值.

五. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在区间 $(0,1)$ 可导, 且 $f(1) = 0$, 证明

: $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) + \frac{1}{\xi} f(\xi) = 0$.

六. 求过点 $M(1, -3, 2)$ 且与直线 $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + 3z + 10 = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

七. 求椭圆面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线上的点到坐标原点的最大距离与最小距离.

八. 求曲线 $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} (a > 0)$ 在点 $P(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程.