



电动力学 第四章

导体中的电磁波

真空中的Maxwell方程组:

$$\rho = 0$$

$$\vec{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \cancel{\frac{\rho_f}{\epsilon_0}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{J}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

数学上: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$= 0$$

波动方程

同理:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

表明电场和磁场是以c的速度传播的

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

定态电磁波——单一频率成分的简谐波

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

空间部分

时间部分

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) &= i\omega \vec{B}(\vec{x}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) &= 0 \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) &= -i\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x})\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{x})) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x})) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{x}) = -(i\omega)(i\omega \mu_0 \varepsilon_0) \vec{E}(\vec{x})$$

Helmholtz方程

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}) + k^2 \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

其中 $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \omega/c$
且要求 $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}(\vec{x})$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{x}) + k^2 \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

其中 $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \omega/c$
且要求 $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{i}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \nabla \times \vec{B}(\vec{x})$$

无界空间最简单的解——平面波解

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

于是 $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

色散关系 $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega / c$

验证:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{x}) &= \nabla \cdot \nabla \vec{E}(\vec{x}) = \nabla \cdot \nabla (\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) = \nabla \cdot \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} (\nabla \vec{E}_0) + (\nabla e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \vec{E}_0 \right] \\ &= \nabla \cdot \left[\frac{de^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{d(i\vec{k} \cdot \vec{x})} \nabla (i\vec{k} \cdot \vec{x}) \vec{E}_0 \right] = \nabla \cdot \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} i\vec{k} \vec{E}_0 \right] \\ &= (\nabla e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \cdot (i\vec{k} \vec{E}_0) + e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \nabla \cdot (i\vec{k} \vec{E}_0) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} (i\vec{k}) \cdot (i\vec{k} \vec{E}_0) = -k^2 \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = -k^2 \vec{E}(\vec{x}) \end{aligned}$$

并矢

= 0

还应满足条件:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \nabla \cdot [\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}] = \nabla e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \cdot \vec{E}_0 + e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} (\nabla \cdot \vec{E}_0)$$

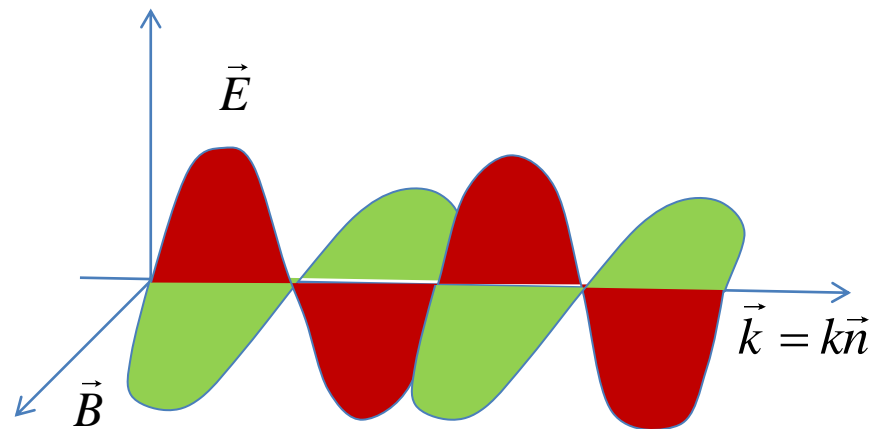
$$= e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \nabla (i\vec{k} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{E}_0 = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} (i\vec{k}) \cdot \vec{E}_0 = i\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

电磁波是横波!

总结:

- (i) 平面电磁波是横波, \vec{E} 、 \vec{B} 、 \vec{k} 三者互相垂直, 且 $\vec{E} \times \vec{B}$ 沿 \vec{k} 方向



(ii)
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

电场和磁场的相位相同

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

- (iii) 在均匀介质中

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{|\vec{E}|}{|\sqrt{\mu\epsilon}\vec{n} \times \vec{E}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v$$

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c \quad (\text{真空})$$

(iv) 介质中电磁波的相速度:

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c} n \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{n} \quad \leftarrow \text{折射率}$$

(v) 电场的振动方向——电磁波的偏振

(vi) 电磁波的能量与能流

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad \epsilon |\vec{E}|^2 = \frac{1}{\mu} |\vec{B}|^2 \quad \text{电场蕴藏的能量与磁场的相等}$$

能量密度的瞬时值:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 = \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 = \epsilon \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

能流密度的瞬时值:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[\vec{E}^2 \vec{n} - \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E}}_{=0} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}^2 \vec{n} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \vec{n} = w v_g \vec{n} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

电磁波的射线速度——描述能量的传输方向与速度：

$$\vec{v}_g = \frac{\vec{S}}{w} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \vec{n} \quad \text{注意与相速度的区别}$$

在均匀理想介质中，平面电磁波的射线速度等于相速度 $v_p = v_g$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

电磁波的动量密度：

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{w}{c} \vec{n}$$

能量密度的平均值：

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}_0^2$$

能流密度的平均值：

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \vec{n} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{n}$$

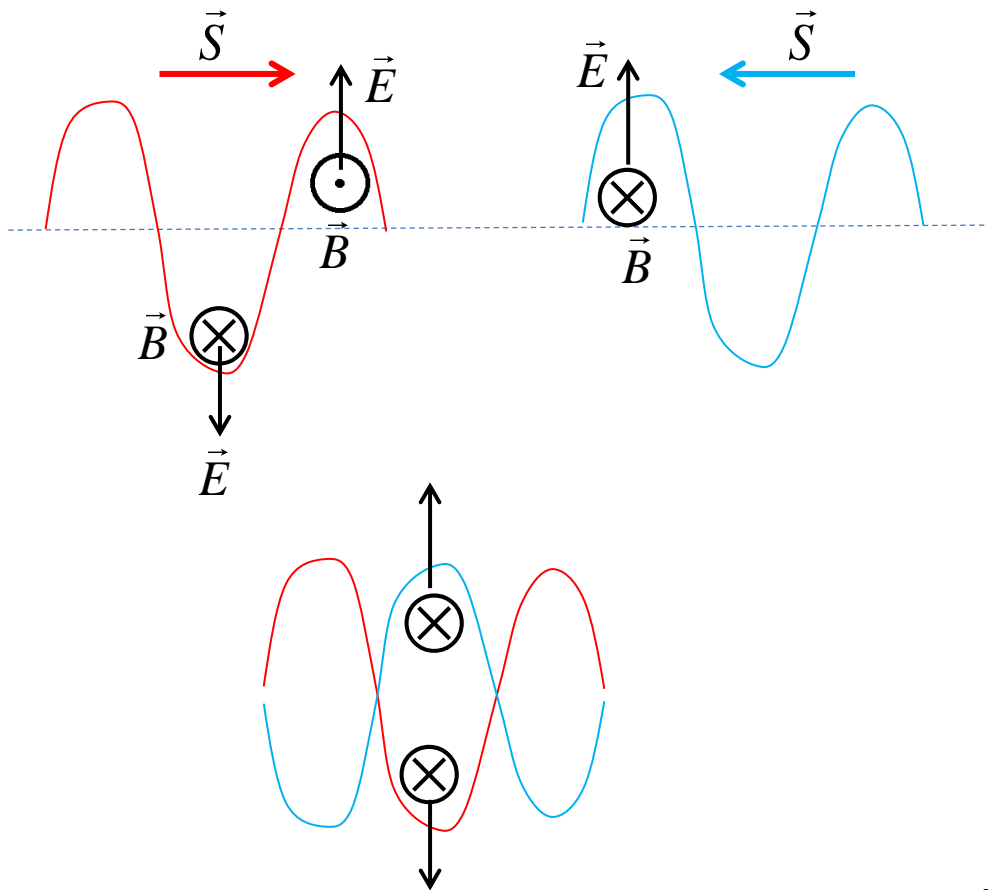
数学上

$$\begin{aligned}\langle f(t)g(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T f_0 \cos \omega t \cdot g_0 \cos(\omega t - \theta) dt \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g)\end{aligned}$$

因此

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) dt = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \operatorname{Re}|\vec{E}|^2 \vec{n}$$

例：两列频率、强度、偏振都一样的平面电磁波相向而行，求总的电磁波能量密度

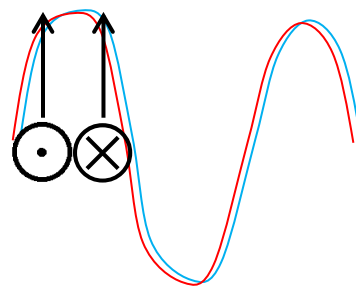


在彼此的波峰和波谷重叠的一刹那，电场方向相反而相互抵消，磁场方向相同而相互叠加，电场能全部转化为磁能

$$w = \frac{(2\vec{B})^2}{2\mu_0} = 2\varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

$$w = 2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = 2\varepsilon_0 \vec{E}^2$$

$$= 2\varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$



在彼此的波峰与波峰重叠的一刹那，磁场方向相反而相互抵消，电场方向相同而相互叠加，磁场能全部转化为电场能

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (2\vec{E})^2 = 2\varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

(一) 导体中的自由电荷

Gauss定理:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Ohm定理:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

电荷守恒定律:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} = -\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\sigma \frac{\rho}{\varepsilon}$$

解为: $\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$

当 $\rho(t)$ 衰减到 $\rho(0)$ 的 $\frac{1}{e}$ 时, 时间为 $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ 特征时间 (电荷少掉大半所需的时间)

若电磁波振动周期 $T \gg \tau$, 即电磁波还没振完一周期, 电荷就快没了

可认为导体内自由电荷为零 $\rho = 0$

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

即

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$$

良导体条件

例：对铜材料 $\sigma \sim 5.7 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ $\varepsilon \sim \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 / Nm^2$

只要 $\omega \ll 10^{17} Hz$ 则 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$ 可见光都满足

典型材料的电导率：

铜： $\sigma \sim 5.7 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$

饱和盐水： $\sigma \sim 2.3 \times 10 (\Omega \cdot m)^{-1}$

硅： $\sigma \sim 4 \times 10^{-4} (\Omega \cdot m)^{-1}$

纯净水： $\sigma \sim 4 \times 10^{-6} (\Omega \cdot m)^{-1}$

玻璃： $\sigma : 10^{-10} \sim 10^{-14} (\Omega \cdot m)^{-1}$

当中相差22个数量级之巨!!!

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 绝缘体中 $\sigma \rightarrow 0$ 不管 \vec{E} 如何大，电流为零 $\vec{J} \rightarrow 0$

超导体中 $\sigma \rightarrow \infty$ 即使 $\vec{E} \rightarrow 0$ ，仍有电流

(二) 导体中的平面电磁波

什么是导体？**传导电流项不可忽略**的材料就可看成是导体

$$\rho = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \underline{\mu \vec{J}} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

假设导体中的仍然有平面电磁波传播 $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{B} = i \frac{\mu \sigma}{\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{若： 第一项} \gg \text{第二项} \quad \left| i \frac{\mu \sigma}{\omega} \right| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \gg \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{即：} \quad \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1$$

良导体条件

$$\nabla \times \vec{B} = i \frac{\mu\sigma}{\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\epsilon' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

导体中传导电流的存在，相当于使得介电常数变成了复数

$$\epsilon' = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$

实数部分代表位移电流的贡献，它不引起电磁波功率的损耗

虚数部分是传导电流的贡献，由于 $\sigma \neq 0$ ，则 $\vec{J}_f = \sigma \vec{E} \neq 0$ ，传导电流引起热效应，它损耗的平均功率为：

$$p = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J}_f \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2$$

Helmholtz方程

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}) + k^2 \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

$$\text{其中} \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'}$$

$$\text{且要求} \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = -\frac{i}{\omega} \nabla \times (\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) = -\frac{i}{\omega} \left[(\nabla \times \vec{E}_0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \nabla e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \times \vec{E}_0 \right]$$

$$= -\frac{i}{\omega} (i\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \times \vec{E}_0) = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'} \vec{n} \times \vec{E}}{\omega} = \sqrt{\mu_0 \epsilon'} \vec{n} \times \vec{E}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} = \omega \sqrt{\mu (\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega})}$$

$$\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$$

复矢量

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

表明：随着电磁波的深入导体，振幅指数衰减！

当进入厚度为 $\frac{1}{\alpha}$ 时，已衰减到 $\frac{1}{e}$

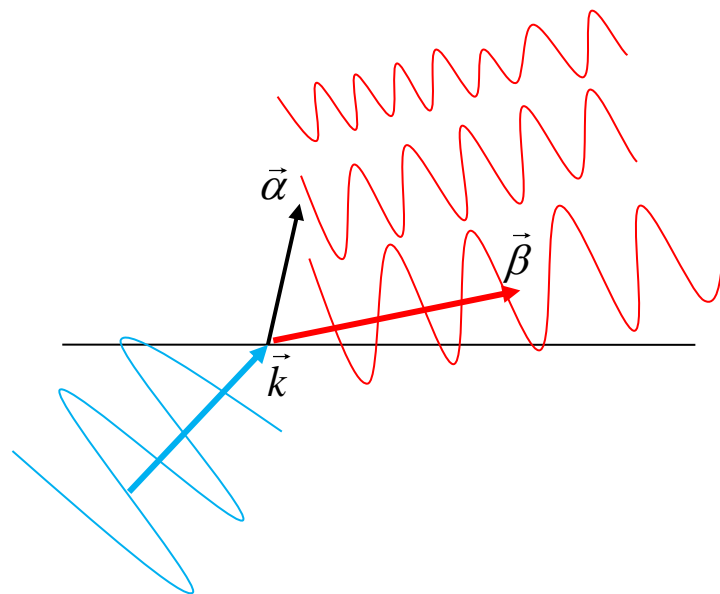
电磁波的不能在导体中传播

$\delta = \frac{1}{\alpha}$ 称为穿透深度

$\vec{\beta}$ 的意义：刻画导体内平面波的传播，原来的波矢。其方向是波的等相面传播的方向

$$\phi = \vec{\beta} \cdot \vec{x} - \omega t \quad \vec{\beta} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$$

$\vec{\alpha}$ 的意义：衰减强度，其方向是能量衰减的方向



$\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 一般不同方向

(三) 穿透深度

$$\begin{aligned}\vec{k}^2 &= \omega^2 \epsilon' \mu = \omega^2 \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) = (\vec{\beta} + i \vec{\alpha})^2 \\ &= \beta^2 - \alpha^2 + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})i\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned}\omega^2 \mu \epsilon &= \beta^2 - \alpha^2 \\ \omega \mu \sigma &= 2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\end{aligned}$$

设：电磁波垂直入射到导体 $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \parallel \vec{k}$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha\beta$

解得：

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

对良导体 $\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} \pm 1 \approx \frac{\sigma}{\epsilon \omega}$ $\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad \text{若 } \sigma \text{ 越大, 或 } \omega \text{ 越高, 则 } \delta \text{ 越小, 趋肤效应}$$

对于理想导体 $\sigma \rightarrow \infty$, 有 $\delta \rightarrow 0$, 理想导体内的电磁场为零

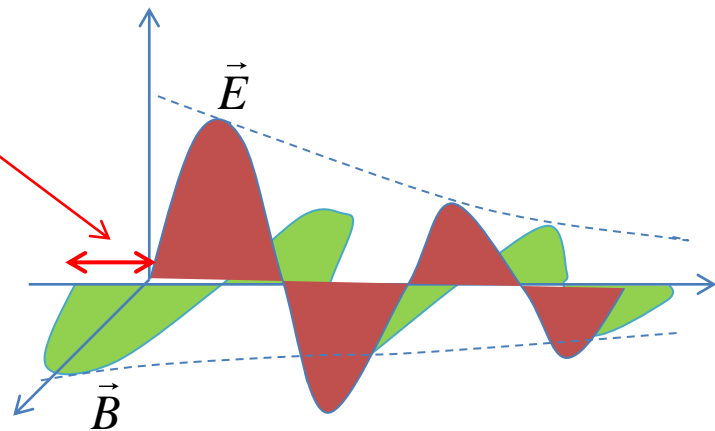
(四) 导体中平面电磁波的磁场

在垂直入射情况下

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \sqrt{\mu\epsilon'} \cdot \vec{n} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon})} \cdot \vec{n} \times \vec{E}$$

$$\approx \sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \cdot \vec{n} \times \vec{E} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\omega}} \cdot \vec{n} \times \vec{E}$$

相位差 $\pi/4$



表明：良导体内，磁场 \vec{B} （或 \vec{H} ）的相位滞后于电场 \vec{E} 的相位 $\pi/4$ ，意味着电磁能流不是一直往前流深入进去，而是作前后振荡，变成焦耳热损耗掉

其相速度远小于c

并且 $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left| \frac{\vec{H}}{\vec{E}} \right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} \gg 1$

良导体内电磁波的能量主要是磁场的能量

对比：真空 $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left| \frac{\vec{H}}{\vec{E}} \right| = 1$

(五) 良导体表面的反射

在垂直入射情况下，且电场平行于入射面

边值关系

$$\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau} \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau} \end{aligned}$$

即

$$E + E' = E''$$

$$H - H' = H''$$

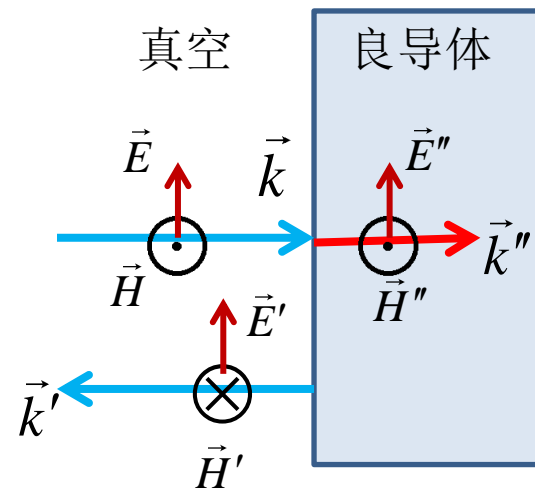
由 $H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ $H' = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E'$

$$H'' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu_0}} (1+i) E''$$

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} (1+i) E''$$

解出：

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma} + i}}{1 + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma} + i}}$$



于是，反射系数为：

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \frac{E' \cdot E'^*}{E \cdot E^*} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \right)^2 + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}$$

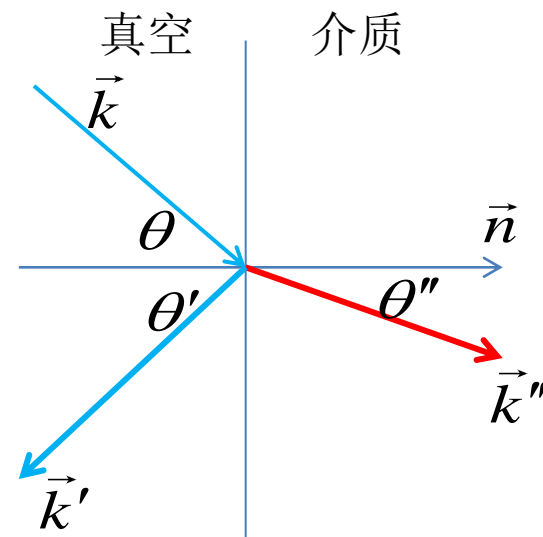
Taylor展开

对于理想导体， $\sigma \rightarrow \infty$ $R \rightarrow 1$ 理想导体表面电磁波被全部反射

反射系数： 反射波法向能流密度与入射波法向能流密度之比

透射系数： 透射波法向能流密度与入射波法向能流密度之比

$$R = \left| \frac{\langle \vec{S}' \rangle \cdot \vec{n}}{\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n}} \right|^2 \quad T = \left| \frac{\langle \vec{S}'' \rangle \cdot \vec{n}}{\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n}} \right|^2 \quad R + T = 1$$



$$\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0^2 \cos \theta$$

$$\langle \vec{S}' \rangle \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0'^2 \cos \theta'$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \text{ 波阻抗}$$

例：平面电磁波垂直入射到导体表面，证明：透射进入导体内部的电磁波能量全部变为焦耳热

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

电磁波能流密度瞬时值：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} E_0^2 e^{-2\alpha z} \left[\cos 2(\omega t - \beta z) + \cos \frac{\pi}{4} \right] \vec{n}$$

在入口处（ $z=0$ ）能流密度平均值：

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E}^* \times \left(\frac{\vec{k}}{\omega \mu} \times \vec{E} \right) \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{k}{\omega \mu} |\vec{E}_0|^2 \right) \vec{n} = \frac{\beta}{2\omega \mu} |\vec{E}_0|^2 \vec{n}$$

单位体积内消耗的平均焦耳热：

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J}) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot \sigma \vec{E}) = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_0|^2 e^{-2\alpha z}$$

单位面积的无穷场柱体内消耗的焦耳热：

$$\int_0^\infty \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_0|^2 e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma}{4\alpha} |\vec{E}_0|^2 = \frac{\beta}{2\omega \mu} |\vec{E}_0|^2 \quad \left(\alpha \beta = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \right)$$



例：厚度为 d 的介质薄层夹在介质1和介质2之间，现在要使从介质1垂直入射到介质薄层的平面电磁波的能量全部输送到介质2中去，求所需条件。

介质1:

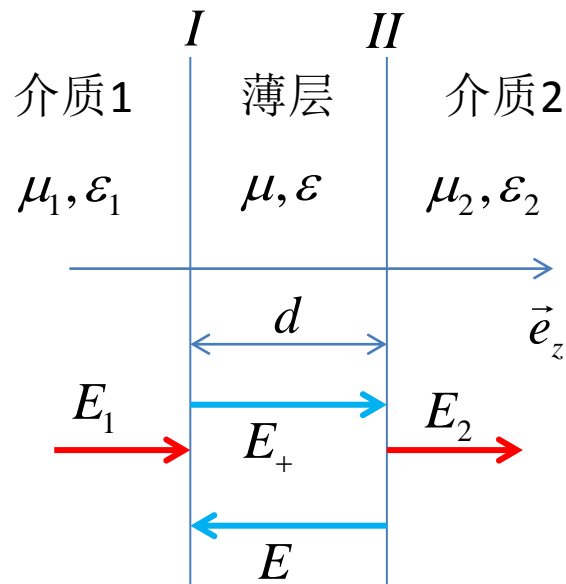
$$\vec{E}_1 = E_{10} e^{i(k_1 z - \omega t)} \vec{e}_x \quad \vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} e^{i(k_1 z - \omega t)} \vec{e}_y$$

薄层:

$$\begin{aligned} \vec{E}_+ &= E_{+0} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x & \vec{E}_- &= E_{-0} e^{i(-kz - \omega t)} \vec{e}_x \\ \vec{H}_+ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{+0} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_y & \vec{H}_- &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{-0} e^{i(-kz - \omega t)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

介质2:

$$\vec{E}_2 = E_{20} e^{i(k_2 z - \omega t)} \vec{e}_x \quad \vec{H}_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{20} e^{i(k_2 z - \omega t)} \vec{e}_y$$



在连接处，电场和磁场的切向分量连续

$$\begin{aligned} E_{10} &= E_{+0} + E_{-0} \\ \text{在连接I处: } \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{10} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_{+0} - E_{-0}) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} E_{+0} &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu \epsilon_1}{\epsilon \mu_1}} \right) E_{10} \\ E_{-0} &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu \epsilon_1}{\epsilon \mu_1}} \right) E_{10} \end{aligned}$$

在连接II处: $E_{+0}e^{ikd} + E_{-0}e^{-ikd} = E_{20}e^{ik_2d}$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(E_{+0}e^{ikd} - E_{-0}e^{-ikd}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{10}e^{ik_2d}$$

解得: $\left(1 + \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon\mu_1}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon}{\varepsilon_2\mu}}\right)e^{2ikd} + \left(1 - \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon\mu_1}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon}{\varepsilon_2\mu}}\right) = 0$

虚部为零: $\left(1 + \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon\mu_1}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon}{\varepsilon_2\mu}}\right)\sin 2kd = 0 \quad \longrightarrow \quad 2kd = n\pi \quad \longrightarrow \quad d = \frac{n\lambda}{4}$

实部为零: $\pm\left(1 + \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon\mu_1}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon}{\varepsilon_2\mu}}\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_1}{\varepsilon\mu_1}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon}{\varepsilon_2\mu}}\right) = 0$

n 取偶数时, 取 +号, 其解为: $\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}$ (雷达天线罩设计准则)

n 取奇数时, 取 -号, 其解为: $\frac{\mu}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$ (光学透镜镀膜设计)

作业

1。

各向异性晶体介质中，若 \vec{D} 、 \vec{E} 、 \vec{H} 、 \vec{B} 仍按 $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ 变化，但 \vec{D} 、 \vec{E} 不再平行，

(i) 证明 $\vec{k}\cdot\vec{B}=\vec{k}\cdot\vec{D}=\vec{D}\cdot\vec{B}=\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ ，但一般 $\vec{k}\cdot\vec{E}\neq 0$

(ii) 证明 $\vec{D}=\frac{1}{\omega^2\mu}\left[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}\right]$

(iii) 证明 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 的方向不在 \vec{k} 方向上。

2。

频率为 ω 的平面电磁波垂直入射到电导率 σ 的良导体表面，在导体内，

(i) 证明电磁波的磁场能量密度平均值远大于电场能量密度平均值；

(ii) 证明电磁波能量密度平均值约为 $\frac{\beta^2}{2\mu\omega^2}E_0^2e^{-2\alpha z}$

(iii) 求电磁波相速度，证明它远小于 c

(iv) 求电磁波能流密度瞬时值，并说明它不是一直往前流。

作业

3。

频率为 ω 的平面电磁波垂直入射到电导率 σ 的良导体表面，在导体内，

(i) 证明电磁波的磁场能量密度平均值远大于电场能量密度平均值；

(ii) 证明电磁波能量密度平均值约为 $\frac{\beta^2}{2\mu\omega^2} E_0^2 e^{-2\alpha z}$

(iii) 求电磁波相速度，证明它远小于 c

(iv) 求电磁波能流密度瞬时值，并说明它不是一直往前流。

4。

(i) 球面电磁波的电场 $\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kr)} / r$ ，磁场 $c\vec{B} = \vec{e}_r \times \vec{E}$ ，其中 r 为球心到观察点的径向距离，且 $\vec{k} = k\vec{e}_r$ ， $\vec{E} \perp \vec{e}_r$ ，讨论 \vec{E} 、 \vec{B} 、 \vec{k} 三者关系，计算能流密度、能量密度，证明球面总能流与 r 无关；

(ii) 对于偶极辐射， $\vec{E}_0 = A \sin \theta \vec{e}_\theta$ ，计算能流密度，在什么方向上辐射最强？什么方向上辐射最弱？总能流是多少？其中立体角 $d\Omega$ 对应的面元为

$$d\sigma = r^2 d\Omega = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

