《电动力学》

中山大学物理学院

2020年5月13日

李志兵

第五章 电磁波的辐射

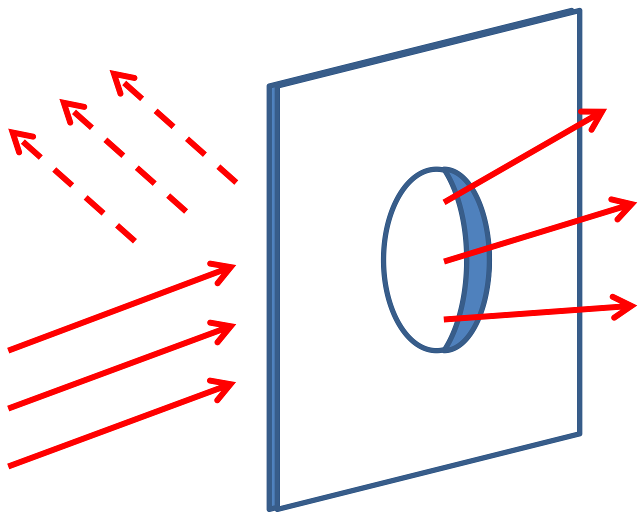
讨论给定电荷运动如何辐射电磁场

第6节 电磁波的衍射

衍射是波的一个标志性行为.

6.1 衍射问题

电磁波通过障碍物后，能流密度在障碍物边缘发生改变.



原则上可以结合障碍物边界条件解出电磁波. 但实际上常作近似：假设入射波（小孔和屏幕左侧的场）不是干扰.

惠更斯原理: 光波面上每一点为光源发射子波，所有子波叠加形成向前传播的下一时刻的光波.

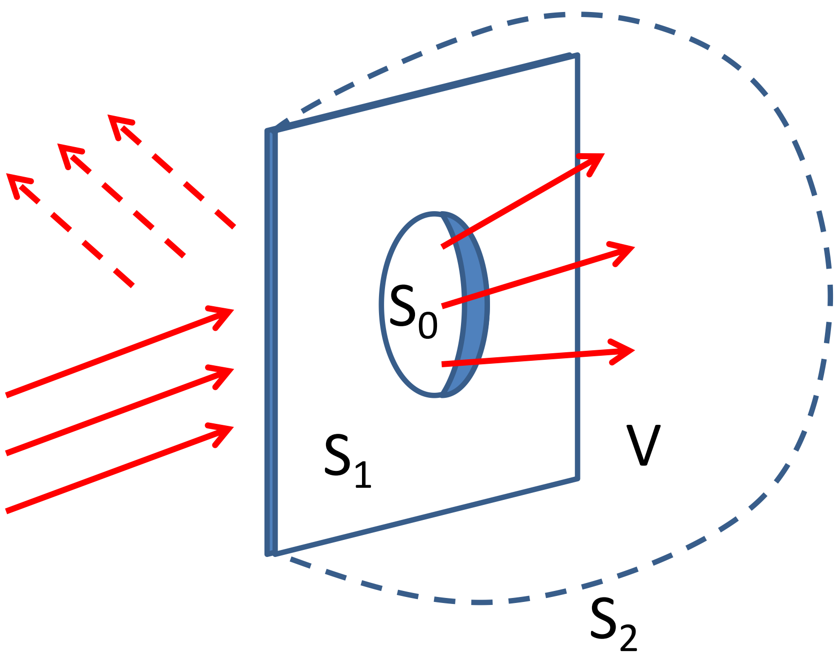
6.2 基尔霍夫公式

时谐标势或$\boldsymbol{A}$的任意直角分量记为ψ，它在真空满足亥姆霍兹方程，

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

标量衍射理论忽略其它分量对ψ影响（例如洛伦兹条件），

用边界上的ψ和$\partial\psi/\partial n$给出右边区域的场ψ.



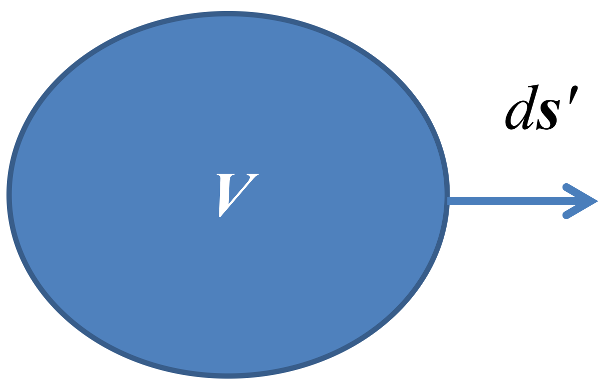
格林公式和格林函数可以把区域V内的$\psi(\boldsymbol{x})$和边界条件联系起来.

小孔面记为S_0；屏幕右表面记为S_1；虚线表示屏幕右边一个足够大的曲面，记为S_2；以S_0、S_1和S_2构成封闭曲面$S=S_0+S_1+S_2$，为V的边界∂V.

(5.3 复习） 格林公式和边值问题

格林公式：设V内有两个函数$\psi(\boldsymbol{x})$和$\varphi(\boldsymbol{x})$, 则

$$\int_V \left(\psi\nabla'^2\varphi - \varphi\nabla'^2\psi\right)dV' = \oint_{S=\partial V}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n'}\right)ds'$$



我们将取φ为亥姆霍兹方程的格林函数.

亥姆霍兹方程的格林函数

$$\left(\nabla^2+k^2\right)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

傅里叶变换，$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\int\frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}G(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{x}')e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}$， $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\int\frac{d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$

$$\left(k'^2-k^2\right)G(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}')=4\pi e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'}$$

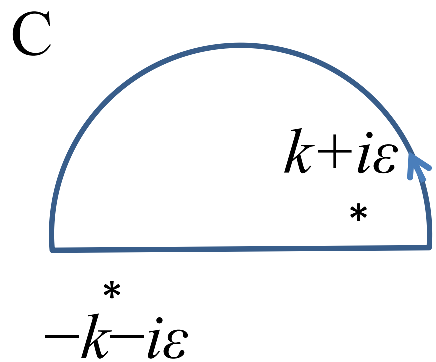
格林函数形式解

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\int\frac{2d\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{k'^2-k^2}=\int_0^\infty\int_0^\pi\frac{k'^2dk'\sin\theta' d\theta'}{\pi}\frac{e^{ik'r\cos\theta'}}{k'^2-k^2}=\frac{1}{4\pi ir}\left(I_1-I_2\right)$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}dk'e^{ik'r}\left(\frac{1}{k'-k}+\frac{1}{k'+k}\right)\qquad I_2=\int_{-\infty}^{\infty}dk'e^{-ik'r}\left(\frac{1}{k'-k}+\frac{1}{k'+k}\right)$$

因为分母会等于零，所以I_1和I_2不确定. 需要考虑边界条件才能完全确定G.

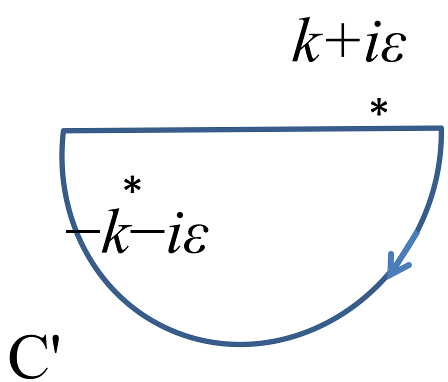
让G满足出射条件：$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \xrightarrow{r\to\infty} \dfrac{e^{ikr}}{r}$ 引入 $\varepsilon \to +0$



$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'r}\left(\frac{1}{k'-k-i\varepsilon}+\frac{1}{k'+k+i\varepsilon}\right)$$

$$= \oint_C dk' e^{ik'r}\left(\frac{1}{k'-k-i\varepsilon}+\cancel{\frac{1}{k'+k+i\varepsilon}}\right) = 2\pi i e^{ikr-\varepsilon r}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-ik'r}\left(\frac{1}{k'-k-i\varepsilon}+\frac{1}{k'+k+i\varepsilon}\right)$$



$$= \oint_{C'} dk' e^{-ik'r}\left(\cancel{\frac{1}{k'-k-i\varepsilon}}+\frac{1}{k'+k+i\varepsilon}\right) = -2\pi i e^{ikr-\varepsilon r}$$

最后得到：

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{e^{ikr}}{r}$$

把$G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$代入格林公式

$$\int_V \left(\psi\nabla'^2\varphi-\varphi\nabla'^2\psi\right)dV'=\oint_{S=\partial V}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n'}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n'}\right)ds'$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}')=G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$$

$$\int_V \left(\psi\nabla'^2 G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})-G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\nabla'^2\psi\right)dV'=\oint_{S=\partial V}\left(\psi\frac{\partial G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})}{\partial n'}-G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi}{\partial n'}\right)ds'$$

$$\left(\nabla'^2+k^2\right)G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$\nabla'^2\psi+k^2\psi=0$$

$$-4\pi\psi(\boldsymbol{x})=\oint_{S=\partial V}\left(\psi\frac{\partial G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})}{\partial n'}-G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi}{\partial n'}\right)ds'$$

形式解:

$$G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})=\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\psi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\oint_{S=\partial V}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\boldsymbol{e}}'_n\cdot\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')-\psi(\boldsymbol{x}')\hat{\boldsymbol{e}}'_n\cdot\nabla'\frac{e^{ikr}}{r}\right]ds'$$

令指向V内的表面法线方向矢量为$\hat{\boldsymbol{e}}_n = -\hat{\boldsymbol{e}}_n'$

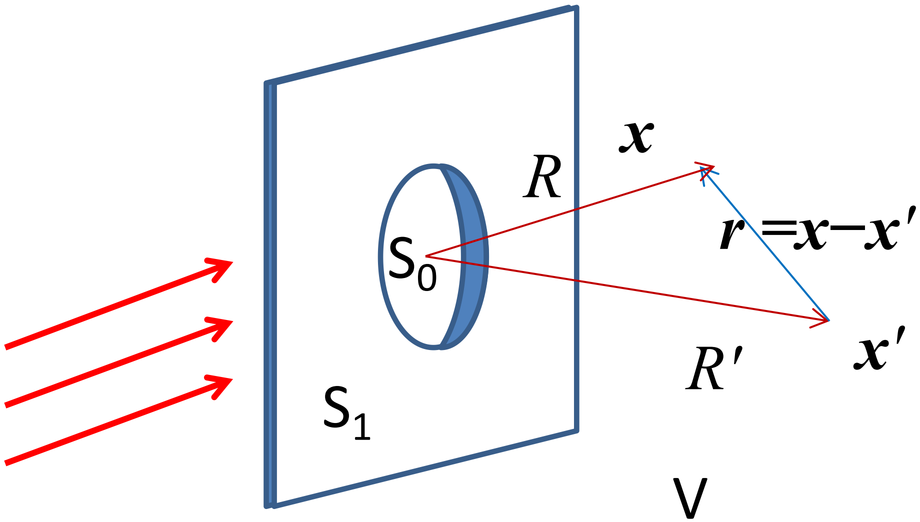
<u>**基尔霍夫公式**</u>，

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S=\partial V}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot\left[\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')+\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\psi(\boldsymbol{x}')\right]ds'$$

其中 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$

如果知道边界S上的ψ和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$，则可由基尔霍夫公式计算出V中的ψ. 一般来说S上的ψ和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$不能随意设定，它们受到其他地方的场的制约. 但在一些重要情形，可以先获得S上的ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$的合理近似值，从而基尔霍夫公式成为很有力的工具。这就是惠更斯原理的理论基础.

6.3 小孔衍射



设$R' >> R >> a$.　近似：

(1) 在S_0，ψ和$\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$等于入射波的值.

(2) 在S_1, $\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = 0$

在表面S_2上，因为$R'\to\infty$

$$\nabla'^2\psi(\boldsymbol{x}')+k^2\psi(\boldsymbol{x}')=0$$

小孔半径$a >> \lambda$. 图中$\boldsymbol{x}$为场点，

$\boldsymbol{x}'$为无穷远处表面S_2上一点.

采用以S_0中心为原点的球坐标，

$$\left(\frac{1}{R'^2}\frac{\partial}{\partial R'}R'^2\frac{\partial}{\partial R'}+\frac{1}{R'^2\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\sin\theta'\frac{\partial}{\partial\theta'}+\frac{1}{R'^2\sin^2\theta'}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}+k^2\right)\psi(\boldsymbol{x}')=0$$

变换：

$$\psi=\frac{u(R',\theta',\phi')}{R'}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial R'^2}+\frac{1}{R'^2\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\sin\theta'\frac{\partial}{\partial\theta'}+\frac{1}{R'^2\sin^2\theta'}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}+k^2\right)u(\boldsymbol{x}')=0$$

在表面S_2上，因为$R'\to\infty$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R'^2}+\frac{1}{R'^2\sin\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\sin\theta'\frac{\partial}{\partial\theta'}+\frac{1}{R'^2\sin^2\theta'}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}+k^2\right)u(\boldsymbol{x}')=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial R'^2}+k^2\right)u(\boldsymbol{x}')=0$$

出射波解：

$$u=f(\theta',\phi')e^{ikR'} \quad \Rightarrow \quad \psi(\boldsymbol{x}')=f(\theta',\phi')\frac{e^{ikR'}}{R'}$$

取表面S_2为半球面，法向矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_n'=\dfrac{\boldsymbol{x}'}{R'}$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')=-\hat{\boldsymbol{e}}_n'\cdot\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')=-\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x}')}{\partial R'}=-ik\psi(\boldsymbol{x}')+O(R'^{-2})$$

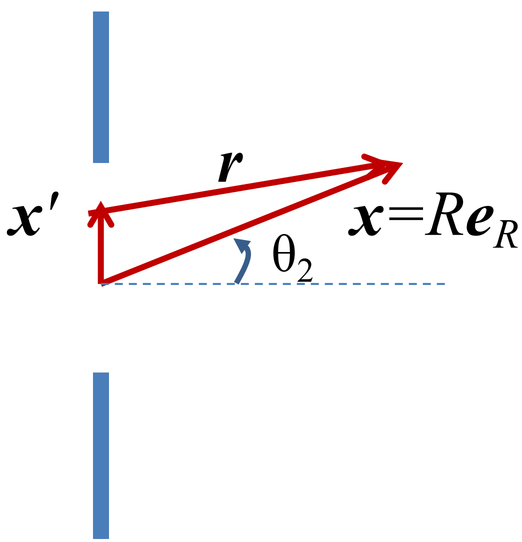
此外，因为$R'>>R\to\infty$， 从而 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\approx R'\hat{\boldsymbol{e}}_n$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot\left[\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')+\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\psi(\boldsymbol{x}')\right]=O(R'^{-2})$$

因此基尔霍夫公式中在表面S_2上的积分可以忽略.

综上近似，
$$\psi(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_n\cdot\left[\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')+\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\psi(\boldsymbol{x}')\right]ds'$$

对入射平面波情形，在S_0: $\psi_1(\boldsymbol{x}')=\psi_0 e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}'}$， $\nabla'\psi_1(\boldsymbol{x}')=i\boldsymbol{k}_1\psi_1(\boldsymbol{x}')$



夫琅禾费衍射：在右方接收近轴波（小θ_2）.

记出射方向为$\boldsymbol{e}_R$， $\boldsymbol{k}_2=k\hat{\boldsymbol{e}}_R$

$$r\approx R-\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}' \qquad \frac{k\boldsymbol{r}}{r}\approx k\hat{\boldsymbol{e}}_R=\boldsymbol{k}_2$$

准致1/R，

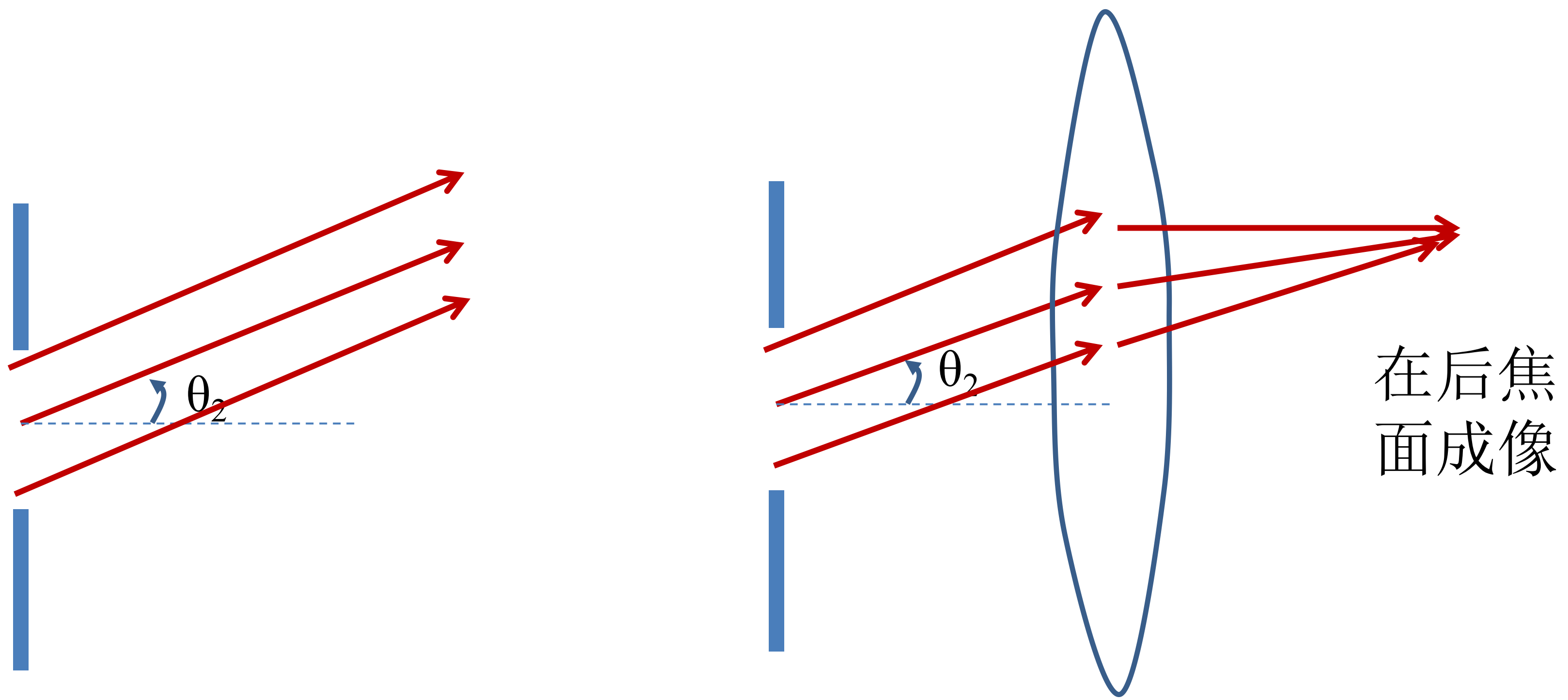
$$\psi(\boldsymbol{x})=-\frac{i\psi_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_0}e^{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_n ds'$$

$$=-\frac{ik\psi_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_0}e^{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}'}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)ds'$$

倾斜因子

光的亮度正比于能流密度，而后者正比于$|\psi|^2$

因为在衍射条件下光亮度在中心亮斑以外随θ_2增加而振荡减弱，在远处只能看到近轴光. 用透镜可把平行的光线聚焦在后焦面一点上.

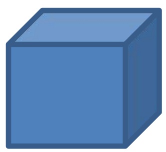


第7节 电磁场的动量

电磁场物质属性的一种体现.

7.1 电磁场的动量密度和动量流密度

电磁场和电荷系统总动量守恒.



dV

在电磁场作用下，微体元dV内带电物质的动量变化率等于作用其上的电磁力.

$$\boldsymbol{f}dV = \left(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\right)dV$$

根据动量守恒，上式等于单位时间内流入dV的电磁动量减去dV内电磁动量的增量. 可把右边用电磁场表示出来.

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{f}dV = \left[\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}\right]dV$$

利用另两条麦克斯韦方程，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$

把dV内电荷的动量变化率写成

$$\boldsymbol{f}dV=\left[-\nabla\cdot\mathscr{T}-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\right]dV \qquad (\#)$$

其中对称张量，

$$\mathscr{T}=-\varepsilon_0\boldsymbol{EE}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB}+\frac{1}{2}\mathscr{I}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

上式$\boldsymbol{EE}$和$\boldsymbol{BB}$是并矢，$\mathscr{I}$是单位张量. 其直角分量为

$$T_{ij}=-\varepsilon_0E_iE_j-\frac{1}{\mu_0}B_iB_j+\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

$$\nabla\cdot\mathscr{T}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

（#）的积分形式 $\int_V \boldsymbol{f} dV = \int_V \left[-\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \right] dV$

$$\int_V \boldsymbol{f} dV + \frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_0 (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) dV = -\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} dV = -\oint_{\partial V} \boldsymbol{\mathcal{T}} \cdot d\boldsymbol{s}$$

动量守恒让我们猜测：

左边第一项：单位时间电磁力使得V内电荷增加的动量

左边第二项：单位时间V内增加的电磁动量

右边：单位时间流进V的电磁动量

电磁动量密度（矢量） $\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$

电磁动量流密度（张量） $\boldsymbol{\mathcal{T}}$

麦克斯韦应力张量，stress tensor，$\mathcal{T}_M = -\mathcal{T}$

电磁能量密度（坡印亭矢量）

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

动量密度和能量密度关系：

$$\boxed{\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}}$$

对平面波， $\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{e}}_k\times\boldsymbol{E}$

平均电磁能量密度为 $\overline{w}=\frac{\varepsilon_0}{2}|E_0|^2$

平均电磁能量流密度为 $\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}\right)=\overline{w}c\hat{\boldsymbol{e}}_k$

平均电磁动量密度为

$$\overline{\boldsymbol{g}}=\frac{\varepsilon_0}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B}\right)=\frac{\varepsilon_0}{2c}|E_0|^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_k=\frac{\overline{w}}{c}\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

在量子理论中，光波由光子构成. 每个角频率为ω的光子具有能量 $\hbar\omega$ ，与波矢为$\boldsymbol{k}$的平面波对应的光子具有动量$\hbar\boldsymbol{k}$.

设单位体积内这种光子的平均数为 $\overline{n}$，则

$$\overline{w}_q = \overline{n}\hbar\omega$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}_q = \overline{n}\hbar\omega c\hat{\boldsymbol{e}}_k = \overline{w}_q c\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

$$\overline{\boldsymbol{g}}_q = \overline{n}\hbar\boldsymbol{k} = \frac{\overline{w}_q}{c}\hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{1}{c^2}\hat{\boldsymbol{S}}_q$$

用直角坐标单位方向矢量的并矢表示动量流密度张量

$$\mathscr{T}=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$\mathscr{T}$ 的ij分量T_{ij}是单位时间流过j方向单位截面的电磁动量的i分量. 留意，$T_{ij}=T_{ji}$，即$\mathscr{T}$为对称张量. $-T_{ij}$是作用在j方向单位面积的i方向的电磁力.

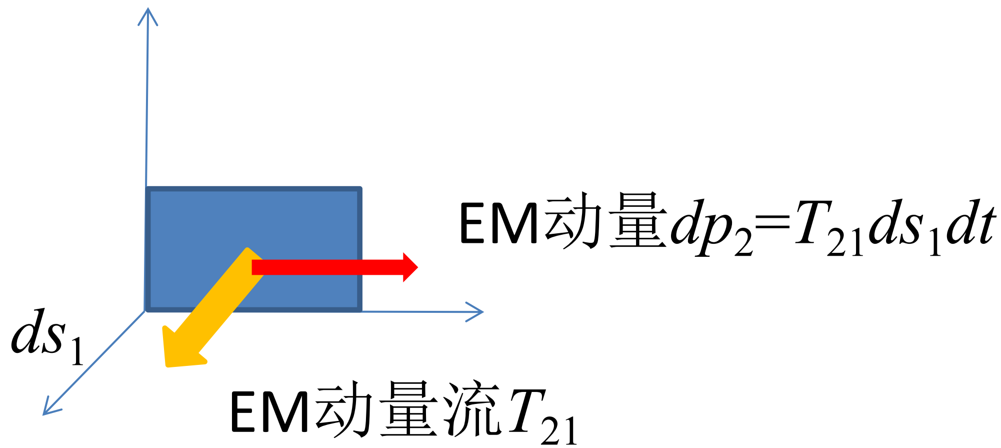
面元

$$d\boldsymbol{s}=\hat{\boldsymbol{e}}_1ds_1+\hat{\boldsymbol{e}}_2ds_2+\hat{\boldsymbol{e}}_3ds_3=\left(n_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+n_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+n_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)ds$$

其中n_1, n_2, n_3是面元单位法向方向矢量三个直角方向的分量.

在dt时间通过$d\boldsymbol{s}$的电磁动量为.

$$d\boldsymbol{p}=\mathscr{T}\cdot d\boldsymbol{s}dt=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_in_jdsdt$$



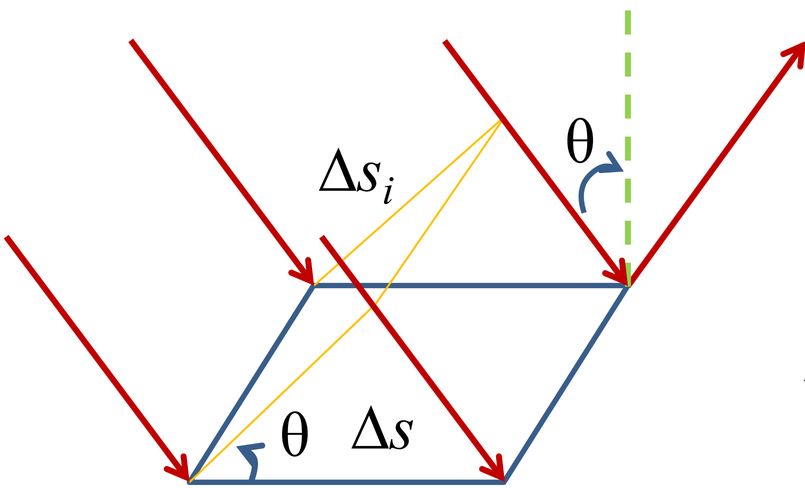
对平面波，

$$\mathscr{T} = w\hat{\boldsymbol{e}}_k\hat{\boldsymbol{e}}_k = cg\hat{\boldsymbol{e}}_k\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

其中 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 为波矢方向矢量.

7.2 辐射压力

P184例2　　考虑光入射到理想金属，发生全反射.



在Δt通过横截面Δs_i的入射光动量为

$$\overline{g}c\Delta t\Delta s_i = \overline{w}_i\Delta t\Delta s_i$$

反射使其垂直金属表面的分量改变两倍，

$$\Delta p = 2\overline{g}c\cos\theta\Delta t\Delta s_i = 2\overline{w}_i\cos\theta\Delta t\Delta s_i$$

此动量改变使得金属表面受到光压力 $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 2\overline{w}_i\cos\theta\Delta s_i$

承受此光力的金属表面面积为$\Delta s = \Delta s_i/\cos\theta$，从而**光压强**为

$$P = 2\overline{w}_i\cos^2\theta$$

在金属外部，总电场等于入射电场加发射电场，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r$$

时间周期平均后的能量密度为

$$\overline{w} = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathrm{Re}[(\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r)^* \cdot (\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r)]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[|E_i|^2 + |E_r|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_i^* \cdot \boldsymbol{E}_r)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[|E_i|^2 + |E_r|^2 + 2\boldsymbol{E}_{0i} \cdot \boldsymbol{E}_{0r}\cos\left((\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_r)\cdot\boldsymbol{x} + \phi_0\right)\right]$$

空间波长平均后最后一项为零，从而 $\langle\overline{w}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\left[|E_i|^2 + |E_r|^2\right]$

全发射情形，$\langle\overline{w}\rangle = 2\overline{w}_i$ ，从而光压强为

$$P = \langle\overline{w}\rangle\cos^2\theta$$

若各个方向的入射光强度一样，对方向平均后得 $P = \dfrac{1}{3}\langle\overline{w}\rangle$

作业：

1. 阅读p173中(5.9)的推导和p174关于辐射总功率的推导.
2. 阅读p179例题，计算圆形小孔的衍射。
3. 估计太阳内部的光辐射压力（选做题）.