中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学（一） I》（A 卷）

学年学期：2014 学年第 2 学期　　姓　　名：________________

学 院/系：数计学院　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　学　　院：________________

考试时长：120 分钟　　年级专业：________________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

——————以下为试题区域，共 2 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答——————

一、计算下列各题，并写出必要的步骤。（共10 小题，每小题 8 分，共80 分）

1. 设 $a_n = n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\dots+\frac{1}{n^2+n\pi})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x^3}}$.

3. 计算积分 $\int e^x \arctan(e^{-x})dx$.

4. 计算积分 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

5. 求双曲抛物面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$ 与平面 $x+y+z=6$ 的交线在 $P(4,0,2)$处的切线方程.

6. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$，
   求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

7. 将给定的正数 12 分成三个非负数 $x, 2y, 3z$ 之和，使得 xy^2z^3 最大。

8. 设 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x-1}$，求该函数(1)的单调区间和极值;(2)所确定曲线的凸凹区间;
   (3)所确定曲线的渐近线.

9. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在 $x=3$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式，并写出 $f^{(n)}(3)$ 的值.

10. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x\sin y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在(0,0)处的连续性, 偏导数的存在性及可微性.

二、按要求解答下列各题，并写出必要的步骤。（共4 小题，每小题5 分，共20 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

12. 若方程 $e^z=xyz$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 求经过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 且平行于直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ 的平面方程.

14. 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$上连续,在 (a,b)内有二阶导数,且有 $f(a)=f(b)=0, f(c)>0$, $(a<c<b)$,证明：在 (a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)<0$.