东校区 2012 学年度第二学期 12 级《高等数学一》期末试题 A 卷答案

学院 ________ 专业 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 评分 ________

教师签名 ________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一、填空（每空 2 分，共 16 分）

1. 第二型曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 化为第一型曲线积分是 $\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$，其中 α, β, γ 是有向曲线弧 L 在点 (x, y, z) 处的 切向量 的方向角。

2. 第二型曲面积分 $\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ 化为第一型曲面积分是 $\iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$，其中 α, β, γ 是有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的 法向量 的方向角。

3. 若 $y_1(x)$ 是方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的解，$y_0(x)$ 是方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 的解，则 $y_1(x) + y_0(x)$ 是方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的解。

4. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是非齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的两个解，则 $y_1(x) - y_2(x)$ 是方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 的解。

5. 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f_1(x)$ 与 $y'' + py' + qy = f_2(x)$ 的解，则函数 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 必是方程 $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ 的解。

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

二、解答下列各题，并写出必要的过程。（1-10 题每小题 8 分，第 11 题 4 分）

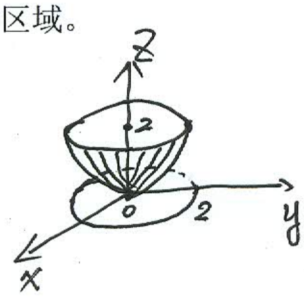
1. 计算积分 $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$ ------ 4分

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\pi^{2\pi} r\cdot\sin r\,dr = 2\pi\int_\pi^{2\pi} -r\,d(\cos r)$$

$$= 2\pi\left(-r\cos r\Big|_\pi^{2\pi} + \sin r\Big|_\pi^{2\pi}\right)$$

$$= 2\pi(-2\pi-\pi) = -6\pi^2$$ ------- 8分

2. 计算积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$，其中$V$是由曲面$x^2+y^2=2z, z=2$所界的区域。



$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^2\cdot r\,dz$$ ---4分

$$= 2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{12}r^6\right)\Big|_0^2$$

$$= 2\pi\left(8 - \frac{1}{12}\times 4\times 16\right)$$

$$= \frac{16}{3}\pi$$ ------ 8分

3. 计算积分 $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，其中$S$为球$x^2+y^2+z^2=a^2$的外表面。

$$\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2}(3x^2+3y^2+3z^2)\,dxdydz$$ ---- 3分

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a 3\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$ ------- 6分

$$= 2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi\cdot\frac{3}{5}\rho^5\Big|_0^a$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5$$ ------- 8分

4. 求微分方程 $2\frac{dy}{dx}+y-xy^3=0$ 的通解。

令 $z=y^{-2}$，则 $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$，即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}y^3\frac{dz}{dx}$，代入原方程得

$2\cdot(-\frac{1}{2}y^3\frac{dz}{dx})+y-xy^3=0 \Rightarrow \frac{dz}{dx}-z=-x$ (①) --- 3分

解齐次方程 $\frac{dz}{dx}-z=0$ 得 $z=ce^x$. ------ 5分

令 $z=c(x)e^x$ 是①的解，代入①得 $c'(x)=-xe^{-x}$.

$c(x)=\int -xe^{-x}dx=\int x\,d(e^{-x})=xe^{-x}-e^{-x}+c$

方程通解为 $y^{-2}=ce^x+x+1$ ------- 8分

5. 证明 $I(t)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$ 在 $[a,+\infty)$（其中 $a>0$）上一致收敛。

$\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\to 0$，故 $\frac{1}{x}\rightrightarrows 0\ (x\to+\infty)$ --- 4分

$\left|\int_1^A \sin tx\,dx\right|=\left|-\frac{1}{t}\cos tx\Big|_1^A\right|=\left|\frac{1}{t}(\cos t-\cos At)\right|\le\frac{2}{a}$，一致有界 $(t\in[a,+\infty))$ $\forall t\in[a,+\infty)$

由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛 --- 8分

6. 判定积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{5}{4}}}dx$ 的敛散性.

$\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x^{\frac{5}{4}}}=\infty$，故 $x=0$ 是瑕点. --- 2分 $\frac{\sin x}{x^{\frac{5}{4}}}>0,\ x\in(0,1]$

$$\frac{\frac{\sin x}{x^{\frac{5}{4}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}}=\frac{\sin x}{x}\to 1\ (x\to 0+0).$$ --- 6分

而 $\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$ 收敛，故积分收敛。

--- 8分

7. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛域及和函数。

令 $u_n(x)=n(x-1)^n$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\right| \to |x-1|$

当 $0<x<2$ 时，级数收敛.

当 $x=0,2$ 时、级数发散. 收敛域为 $(0,2)$. - - - 3分

$S(x)=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$

$\int_1^x \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^x n(x-1)^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{1-x+1}=\frac{x-1}{2-x}=\frac{1}{2-x}-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}=\left(\frac{x-1}{2-x}\right)'=\frac{1}{(2-x)^2}$

$S(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2}$ ，$x\in(0,2)$. - - - - - - - 8分

8. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[100]{n}}-\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}=0$.

且 $\left\{\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\right\}$, $\left\{\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}\right\}$ 单调减 .

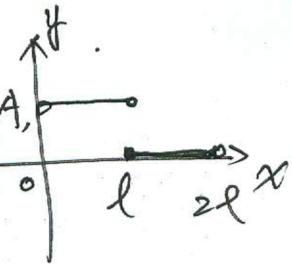
由莱布尼兹判别法知交错级数收敛。- - - 4分

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ 发散. - - - - 8分

原级数条件收敛.

9. 在区间$(0,2l)$内求 $f(x)=\begin{cases}A & 0<x<l\\ 0 & l\le x<2l\end{cases}$（其中$A$为常数 $A\neq 0$,）的傅里叶级数，并写出傅里叶级数在$(0,2l)$内的和函数.



$f(x)$在$x=l$处不连续. $f(l+0)=0$, $f(l-0)=A$,

故$f(x)$在$(0,2l)$分段单调，分段连续.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\,dx=A \quad ---- 1分$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{Al}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l=0 \quad ---- 2分$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{-Al}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l=\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$n=1,2,\cdots$ ---- 5分

$$f(x)\sim\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi}{l}x=\begin{cases}A & 0<x<l\\ A/2 & x=l\\ 0 & l<x<2l\end{cases}$$

---- 8分

10. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}, x\in R$, 可逐项微分。

令$u_n(x)=\arctan\frac{x}{n^2}$，则$u_n'(x)=\frac{n^2}{n^4+x^2}$. ---- 2分

$u_n(x)$, $u_n'(x)$在R上均连续.

而$\left|\arctan\frac{x}{n^2}\right|\le\left|\frac{x}{n^2}\right|$，对$\forall x\in R$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2}$均收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$点点收敛

$\frac{n^2}{n^4+x^2}\le\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$R$上一致收敛. 5分

故级数可逐项微分。 ---- 8分

11. 设正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_{n+1}}(x_{n+1}-x_n)$

因为$\{x_n\}$单调上升且有界，故$\lim_{n\to\infty}x_n$存在．设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$．

又$\{x_n\}$为正项数列，且单调上升．故$a>0$．

所以$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$，从而$\{\frac{1}{x_n}\}$有界．设$|\frac{1}{x_n}|\le M$．

由$\{x_n\}$单调上升．可知$\{\frac{1}{x_n}\}$单调下降． — — —2分

令$S_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+x_{n+1}-x_n=x_{n+1}-x_1$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=a-x_1$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛．

由阿贝尔判别法知级数收敛． — — —4分