数学物理方法

17世纪；分裂；有机结合。

数学物理方法：

构建数学物理模型，研究解决方法。

数学和物理的有机结合。

1. 复变函数篇

2. 数学物理方程篇

第一篇 复变函数论

第一章、复变函数
第二章、复变函数的积分
第三章、幂级数展开
第四章、留数定理
第五章、傅里叶变换
第六章、拉普拉斯变换

§1.1 复数与复数运算

十九世纪的三位代表性人物：

柯西(Cauchy，1789－1857)

维尔斯特拉斯(Weierstrass,1815-1897)

黎曼(Rieman，1826－1866)

柯西和维尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数，黎曼研究复变函数的映像性质。建立了系统的复变函数论。

实数领域中不能解释的问题：实变函数→复变函数

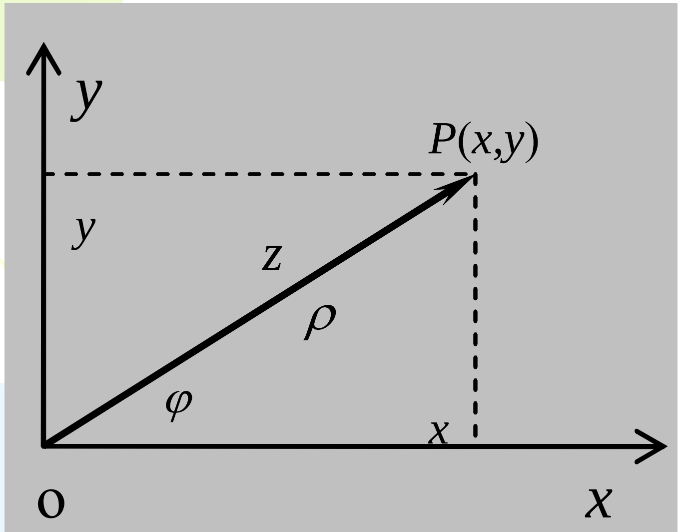
负数不能开偶数次方，负数没有对数，指数函数无周期性，正弦、余弦函数的绝对值不能超过1，……

$x^2=-1$无实数解，引入$i^2=-1$，i称为虚数单位

复数：$z=x+iy$，实部x，记Rez；虚部y，记Imz。

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2$$

$$z = x + \mathrm{i}y \leftrightarrow (x, y)$$



复数的几何表示-复平面

极坐标：

指数式、三角式：

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \mathrm{arctg}(y/x) \end{cases}; \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

模：ρ 记 $|z|$ 辐角：$\varphi = \mathrm{Arg}\, z,$

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

$$0 \le \arg z < 2\pi,$$

共轭复数： $z^* = x - \mathrm{i}y = \rho e^{-\mathrm{i}\varphi} = \rho(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$

注：零；复球面；$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

复数的四则运算满足交换律、结合律和分配律：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] = \rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

$$z^n = e^{in\theta} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = (\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}e^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})],$$

$$(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

二项式定理：$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k \ ,(n = 1,2,\cdots),$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,\ (k = 0,1,2,\cdots,n).$$

例：求下列方程所表示的曲线：

1) |z+i|=2; 2) |z-2i|=|z+2|; 3) Im(i+z*)=4.

例：$(1+\mathrm{i})^{1/4} = ?$

讨论：$-1 = \mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$

§1.2 复变函数

邻域：以复数z_0为圆心，任意小正实数ε为半径作圆：$|z-z_0|<\varepsilon$，则圆内所有点的集合称为z_0的邻域。

去心邻域： $0<|z-z_0|<\varepsilon$所确定的点集。

内点：若z_0及其邻域均属于平面点集E，则称z_0为该点集的内点.

外点：若z_0及其邻域均不属于点集E，则称z_0为该点集的外点.

境界点：若在z_0的每个邻域内，既有属于E的点，又有不属于E的点，则称z_0为点集E的境界点，它既不是内点也不是外点，其全体称为境界线。

区域：指同时满足下列两个条件的点集：

(1) 全由内点组成；

(2) 具有连通性，即点集中的任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线的点全都属于该点集。

闭区域：区域及其境界线所组成的点集称为闭区域。

注：与闭区域相比较，把不含边界的区域B称为开区域．而且若无特殊声明所谓的区域均指开区域.闭区域需明确指出。有界和无界。

平面曲线：$z(t)=x(t)+iy(t)$; 光滑；按段光滑；重点

简单曲线：没有重点的连续曲线.

简单闭曲线：两个端点重合的简单曲线.

单连通域：复平面上的一个区域B，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于B，就称为单连通区域，简称为单连通域，或单通区域.

复连通域：若一个区域不是单连通域，就称为复连通域，或复连通区域，简称复通域。

单连通区域和复连通区域的一个重要区别：

在单连通区域中，任一闭合曲线总可通过连续变形收缩成一点.

复变函数定义：

设G是一个复数$z=x+\mathrm{i}y$的集合，若有一个确定的法则存在，使得对于集合G中的每个复数z，有一个或几个复数$w=u+\mathrm{i}v$与之对应，则称复变量w为复变数z的函数，记$w=f(z)$，

其中，

G称为函数的定义域，z称为函数的自变量、因变量。

函数值的全体所构成的集合称为函数的值域。

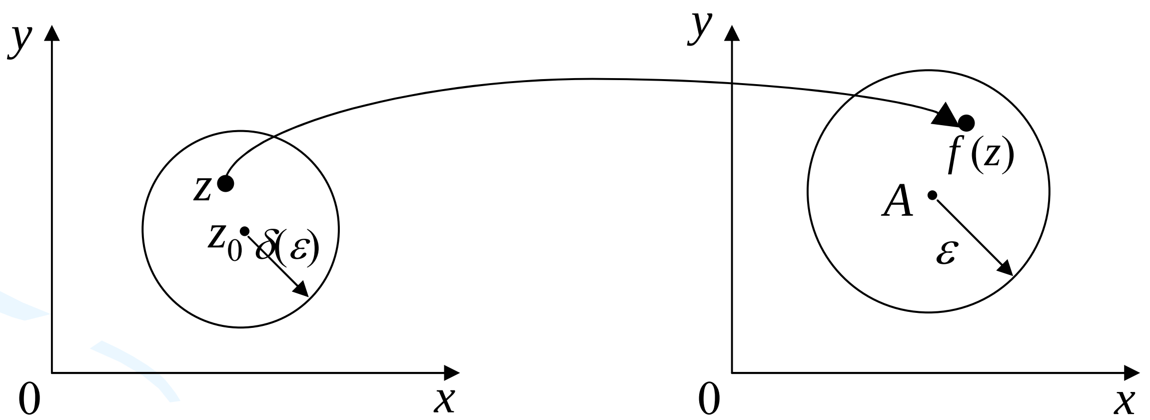
单值函数: 一个$z \rightarrow$ 一个w

多值函数: 一个$z \rightarrow$ 多个w

例:讨论$w=z^2$所构成的映射.

复变函数的极限

设函数$w=f(z)$定义在z_0的去心邻域$0<|z-z_0|<\rho$内，如有确定的数A存在，对任意给定的$\varepsilon>0$，相应地必有一正数$\delta(\varepsilon)$，$(0<\delta\leqslant\rho)$，使得当$0<|z-z_0|<\delta$ 时有$|f(z)-A|<\varepsilon$，那么称A为$f(z)$当z趋于z_0的极限，即 $z\to z_0$时，$f(z)\to A$，记 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.



定理 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, $A=u_0+\mathrm{i}v_0$, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,
那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

定理 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 那么

1. $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$
2. $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=A\cdot B$
3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$, $(B\neq 0)$

例：证明函数$f(z)=\mathrm{Re}(z)/|z|$当$z\to 0$时极限不存在.

函数的连续性

复变函数$f(z)$在点z_0的处连续，如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

如果$f(z)$在区域D内处处连续，说$f(z)$在D内连续。

定理　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，$f(z)$在$z_0$处连续的充要条件是$u(x,y)$和$v(x,y)$在$(x_0,y_0)$处连续.

定理 1)在z_0连续的两个函数$f(z)$与g(x)的和、差、积、商(分母不为零)在z_0处连续；2)函数$h=g(z)$在z_0连续，函数$w=f(h)$在$h_0=g(z_0)$连续，那么复合函数$w=f[g(z)]$在z_0处连续。

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n}, (m, n = 1, 2, 3, \cdots);$$

$$\sqrt{z - a};$$

$$z^s = e^{s \ln z};$$

$$e^z;$$

$$\ln z = \ln(|z| e^{\mathrm{iArg}z}) = \ln|z| + \mathrm{iArg}z;$$

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right); \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right);$$

$$\mathrm{sh}z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right); \mathrm{ch}z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right).$$

§1.3 导数

复变函数导数的定义

函数$w=f(z)$定义于区域D，z_0为D内一点，点$z_0+\Delta z\in D$，如果极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$存在，则称函数$f(z)$在点$z_0$可导，此极限值称为$f(z)$在点$z_0$的导数，记

$$f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

如果$f(z)$在区域D内处处可导，称$f(z)$在D内可导。

连续不一定可导；可导必定连续。

函数$w=f(z)$在z_0处可导与可微是等价的，$\mathrm{d}w=f'(z_0)\mathrm{d}z$

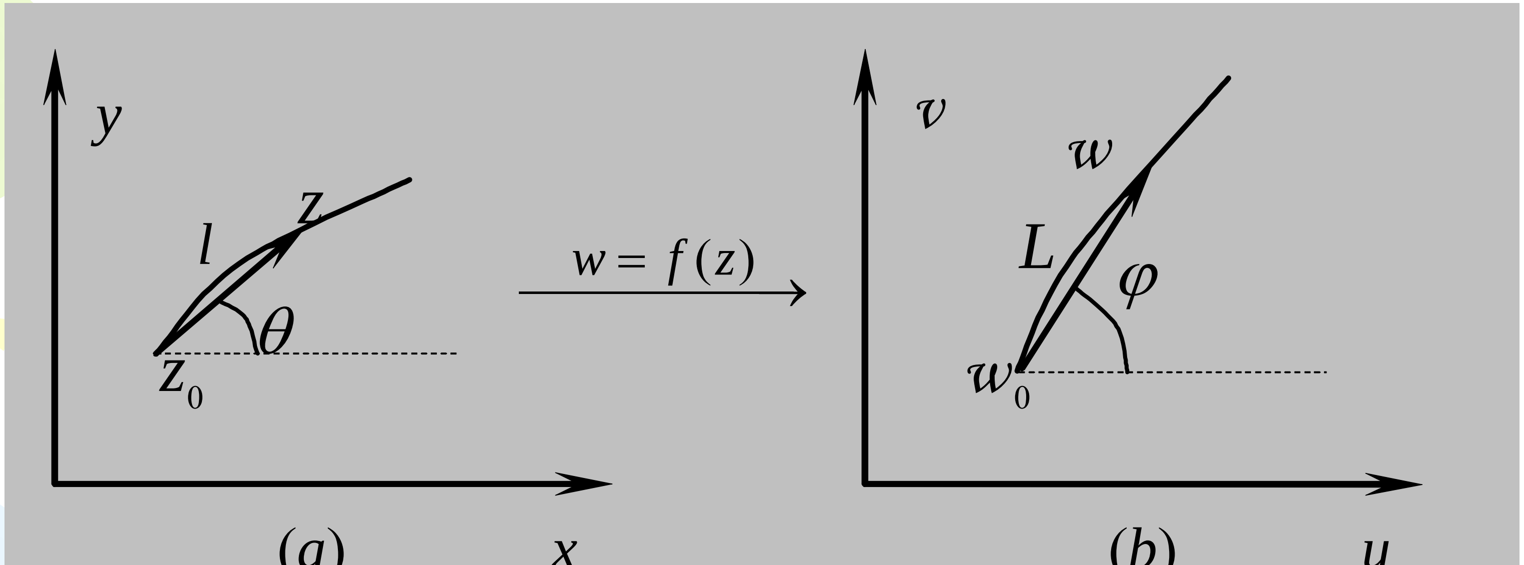


图 2.1

$$\Delta z = z - z_0 = |\Delta z| e^{i\theta} \qquad \Delta w = w - w_0 = |\Delta w| e^{i\varphi}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| e^{i(\varphi - \theta)} \right)$$

导数的模 $|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ 伸缩率

导数的幅角 $\arg f'(z_0) = \varphi - \theta$ 旋转角

例：讨论函数*f(z)*=*z**在复平面上的可导性.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)-\mathrm{i}(y+\Delta y)\right]-\left[x-\mathrm{i}y\right]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

沿平行于实轴的方向趋于零 $\Delta y=0,\Delta z=\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

沿平行于虚轴的方向趋于零 $\Delta x=0,\Delta z=\Delta y\to 0$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\mathrm{i}\Delta y}{\mathrm{i}\Delta y}=-1$$

因此导数不存在，原函数在复平面上处处不可导。

例：求$f(z)=z^2$的导数？$f(z)=x+2y\mathrm{i}$是否可导？

求导法则:

(1) $[f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z);$

(2) $[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$

(3) $[\dfrac{f(z)}{g(z)}]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z)\neq 0;$

(4) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z), \quad w=g(z);$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \varphi'(w) = \dfrac{1}{f'[\varphi(w)]};$ 若$z=\varphi(w)$是函数$w=f(z)$的反函数，且$f'(z)\neq 0$

(6) $(c)'=0; \quad (z^n)' = nz^{n-1};$

(7) $[e^z]' = e^z; \quad \ln z = \dfrac{1}{z}, \quad (z\neq 0);$

(8) $[\sin z]' = \cos z; \quad [\cos z]' = -\sin z; \quad [\tan z]' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$

(9) $[\mathrm{sh}\, z]' = \mathrm{ch}\, z; \quad [\mathrm{ch}\, z]' = \mathrm{sh}\, z.$

直角坐标形式的柯西—黎曼条件(C-R):可导的必要条件

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

$$=\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

沿平行于实轴的方向趋于零 $\Delta y=0,\Delta z=\Delta x\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]+\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

沿平行于虚轴的方向趋于零 $\Delta x=0,\Delta z=\Delta y\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)]+\mathrm{i}[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

两式相等，可得柯西—黎曼条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=u_x-\mathrm{i}u_y=v_y+\mathrm{i}v_x$$

例：利用柯西—黎曼条件讨论函数$f(z)=z^*$的可导性.

$\because u=x,\ \ v=-y$

$\therefore u_x=1,\ v_y=-1,\ u_y=0,\ v_x=0$

$\therefore u_x\neq v_y$ 不满足柯西—黎曼条件，所以不可导.

例：利用C-R条件讨论函数在$z_0=0$处的可导性 $f(z)=\sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$

$$f(z)=\sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}=\sqrt{2|xy|}=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

$$u(x,y)=\sqrt{2|xy|};\quad v(x,y)=0$$

$$\left.\begin{aligned} u_x(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0)\\ u_y(0,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0)\end{aligned}\right\}$$ 满足柯西—黎曼条件

$$\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\cdot\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\xrightarrow{y=kx}\frac{\sqrt{2|k|}}{1+ik}\cdot\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\sqrt{\frac{2|k|}{1+ik}}$$

故原函数在$z_0=0$处不可导

函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$定义在区域D内，则$f(z)$在D内一点$z=x+\mathrm{i}y$可导的充分必要条件是：$u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x,y)可微，并且在该点满足柯西—黎曼条件。

极坐标形式的柯西—黎曼条件

若用r和θ分别表示z的模和辐角，若函数$f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$可导，则$u(r,\theta)$与$v(r,\theta)$满足极坐标形式的柯西—黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

且导数可写成

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

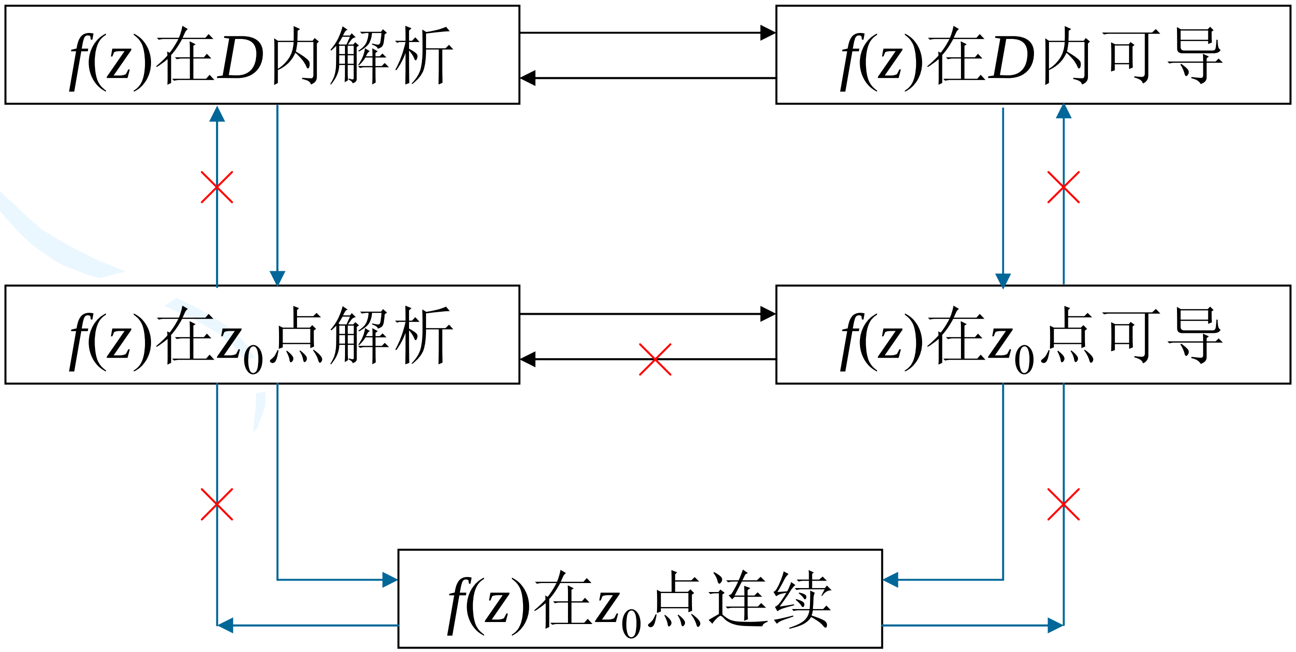
§1.4 解析函数

如果函数$f(z)$在z_0及其邻域内处处可导，那么称$f(z)$在z_0点处解析。如果$f(z)$在区域D内每一点解析，那么称$f(z)$在D内解析，或称$f(z)$是D内的一个解析函数（又称为全纯函数或正则函数）。

解析函数这一重要概念是与区域密切联系的.

函数$f(z)$在某点z_0解析，是指$f(z)$在z_0点及其邻域内可导.

如果$f(z)$在z_0点不解析，那么称z_0点为$f(z)$的奇点。



例：讨论下列函数在复平面的可导与解析性：

$$f(z)=z^2,\ f(z)=x+2yi,\ f(z)=|z|^2,\ f(z)=\frac{1}{z}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)\overline{(z_0+\Delta z)}-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z_0}\Delta z+z_0\overline{\Delta z}+\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\overline{z_0}+z_0\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}$$

$$\xrightarrow{y=kx}\overline{z_0}+z_0\frac{1-ik}{1+ik}$$

$$\xrightarrow{z_0=0}0$$

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{d(1/z)}{dz}=-\frac{1}{z^2},\qquad (z\neq 0)$$

定理：函数$f(z)=u+iv$在其定义域D内解析的充分必要条件是：$u(x,y)$和$v(x,y)$在D内可微，并且满足柯西—黎曼条件$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$。

课堂练习：讨论下列函数在复平面的可导与解析性：

$$f(z)=\overline{z},\ f(z)=e^x(\cos y+i\sin y),\ f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$$

定理：

1)在区域D内解析的两个函数$f(z)$与$g(x)$的和、差、积、商(除去分母为零的点)在D内解析；

2)函数$h=g(z)$在z平面上的区域D内解析，函数$w=f(h)$在h平面上的区域G内解析。如果对D内的每个点z，函数$g(z)$的对应值h都属于G，那么复合函数$w=f[g(z)]$在区域D内解析。

性质：

1)若函数$f(z)=u+iv$在区域B上解析，则$u(x,y)=c_1$，$v(x,y)=c_2$是B上的两正交组曲线族，其中c_1，c_2为常数. 例：$f(z)=z^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow \nabla u \bullet \nabla v=0$$

2)若函数$f(z)=u+iv$在区域B上解析，则$u(x,y)$，$v(x,y)$是B上的调和函数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

讨论：

1) 任何在区域D内解析的函数，其实部和虚部都是D内的调和函数,并且虚部v为实部u的共轭调和函数。

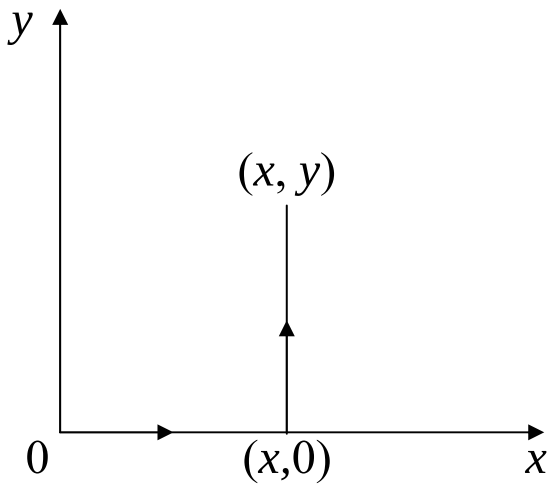
2) 如果在区域内任选两个调和函数u和v，则函数$f(z)=u+iv$在区域内不一定是解析函数。只有当u和v还满足相应的C-R条件，对应函数$f(z)= u+iv$在区域内才解析（而$v+iu$却不一定解析）。

3) 由此提供了构成一个解析函数的方法，即由一个调和函数，利用柯西—黎曼条件可求出另一个与之共轭的调和函数，再由这一对共轭调和函数构建出一个解析函数.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \Rightarrow v(x,y) = \int dv$$

构成一个解析函数的具体方法如下：
(1)曲线积分法；(2)凑全微分法；(3)不定积分法。

例： 已知解析函数$f(z)$的实部$u(x,y)=x^2-y^2$, 求虚部和这个解析函数。



几个初等解析函数

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

复平面内处处单值且解析

$$(e^z)'=e^z$$

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

$$e^{z+2\pi i}=e^z$$

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\mathrm{Arg}z})=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$$

除原点及正实轴外复平面解析

$$\ln(z_1z_2)=\ln(z_1)+\ln(z_2);$$

$$\ln(\frac{z_1}{z_2})=\ln(z_1)-\ln(z_2);$$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{d\ln z}{dz}=1/\frac{de^w}{dw}=\frac{1}{z}$$

$$a^b=e^{b\ln a}\to a^n;a^{1/n};z^b;z^n;z^{1/n}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$(\cos z)'=-\sin z;(\sin z)'=\cos z$$

$$\sin(-z)=-\sin z;\cos(-z)=\cos z$$

$$\sin(z+2\pi)=\sin z;\cos(z+2\pi)=\cos z$$

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z;\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2};\mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z;(\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z$$

$$\mathrm{sh}(-z)=-\mathrm{sh}z;\mathrm{ch}(-z)=\mathrm{ch}z$$

$$\mathrm{sh}(z+2\pi i)=\mathrm{sh}z;\mathrm{ch}(z+2\pi i)=\mathrm{ch}z$$

$$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=1$$

$$\mathrm{sh}(z_1\pm z_2)=\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2\pm\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2$$

$$\mathrm{ch}(z_1\pm z_2)=\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2\pm\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$$

$$\mathrm{Arc}\sin z=-i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$\mathrm{Arc}\cos z=-i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Ar}\,\mathrm{sh}\,z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$$

$$\mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Arth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$