



电动力学

第三章 静磁场



静磁场

- 矢势及其微分方程
- 磁标势
- 磁多极矩
- Aharonov-Bohm效应
- 超导体的电磁性质



矢势及其微分方程

第一节

矢势及其微分方程

矢势及其微分方程

1. 矢势的引入和意义

麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

数学上有：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

自然地，可以引入一个矢量 \vec{A} ，使

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

\vec{A} 称为**磁场的矢势**。考虑如下积分

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

其中L为曲面S的边界，设 S_1 和 S_2 是两个有共同边界的L的曲面，则有

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

矢势及其微分方程

这正是 \vec{B} 的无源性的表示。由此，可以看到矢势 \vec{A} 的物理意义是它沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。

2. 矢势的不唯一性

例：求均匀恒定磁场 $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ 对应的 \vec{A}

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0$$

若选择 $A_y = A_z = 0$, 则 $\vec{A} = -B_0 y \vec{e}_x$

若选择 $A_x = A_z = 0$, 则 $\vec{A} = B_0 x \vec{e}_y$

可见对于确定的磁场，矢势 \vec{A} 并不唯一。事实上，由于对于任意函数 ψ , 有

矢势及其微分方程

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0$$

则

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi)$$

这是由于只有 \vec{A} 的环量才有物理意义，而每点上的 \vec{A} 本身没有直接的物理意义。根据亥姆霍兹定理，要确定一个矢量场，需要知道它的旋度、散度和边界条件这三个条件。

为了确定 \vec{A} ，通常加一个关于其散度的辅助条件：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ —— 库仑规范}$$

选特殊的边界条件使得 $\nabla \cdot \vec{A} = u$ 中 $u = 0$ 。

静场问题中我们只讨论满足库仑规范条件的矢势 \vec{A} 。

矢势及其微分方程

3. 矢势微分方程

考虑线性均匀介质，由麦氏方程

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

代入 \vec{A} 有

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J}$$

又

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

则有

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

即 \vec{A} 的每个直角分量满足泊松方程

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

与静电势方程有相同形式。

矢势及其微分方程

对于其它坐标系上述结论不成立，如柱坐标系中有

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 \vec{A})_r \vec{e}_r + (\nabla^2 \vec{A})_\phi \vec{e}_\phi + (\nabla^2 \vec{A})_z \vec{e}_z$$

其中

$$\begin{cases} (\nabla^2 \vec{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ (\nabla^2 \vec{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \\ (\nabla^2 \vec{A})_z = \nabla^2 A_z \end{cases}$$

矢势及其微分方程

对比静电场方程的解，可以得到直角坐标下矢势方程特解

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') dV'}{r}$$

其中 \vec{x}' 是源点, \vec{x} 为场点, r 为由 \vec{x}' 到 \vec{x} 的距离, 可以证明上式满足规范条件, 对 \vec{A} 取旋度, 即可得到 \vec{B} , 有

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') dV'}{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}(\vec{x}') dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV'\end{aligned}$$

矢势及其微分方程

对于线电流情形，设 I 为导线上电流大小，做代换 $\vec{j}dV' \rightarrow Id\vec{l}$ 得

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

这就是毕奥-萨伐尔定律给出的结果。

矢势及其微分方程

4. 矢势边值关系

由第一章可知，在两介质分界面上磁场的边值关系为

$$\begin{aligned}\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{\alpha}\end{aligned}$$

则矢势边值关系为

$$\begin{aligned}\vec{e}_n \cdot (\nabla \times \vec{A}_2 - \nabla \times \vec{A}_1) &= 0 \\ \vec{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 \right) &= \vec{\alpha}\end{aligned}$$

上面第一式可以用较简单的形式代替。仿照第一章边值关系的推导，在分界面取一狭长长方形回路，有

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = (A_{2t} - A_{1t})\Delta l = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$$

矢势及其微分方程

因此

$$A_{2t} = A_{1t}$$

在分界面两侧取一柱体，有

$$0 = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = (A_{2n} - A_{1n})\Delta S$$

因此

$$A_{2n} = A_{1n}$$

上面结果合并起来得

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1$$

即在两介质分界面上，矢势 \vec{A} 连续。

矢势及其微分方程

5. 静磁场的能量

磁场的总能为

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

在静磁场中，用矢势表示有

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} dV \\ &= \frac{1}{2} \int [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] dV \\ &= \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} dV \\ &= \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} dV \end{aligned}$$

矢势及其微分方程

积分仅需遍及电流分布区域。和静电情形一样，**此式仅对总能量有意义，不能把 $\frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{j}$ 看作能量密度。**

上式中，矢势 \vec{A} 是电流分布 \vec{j} 本身激发的，如果要计算某电流分布 \vec{j} 在给定外磁场中的相互作用能量，以 \vec{A}_e 和 \vec{j}_e 分别表示外磁场的矢势和产生该外磁场的电流分布，则总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{j} + \vec{j}_e) \cdot (\vec{A} + \vec{A}_e) dV$$

减去各自单独存在时的磁能，得电流 \vec{j} 在外场中相互作用能

$$W_i = \frac{1}{2} \int (\vec{j} \cdot \vec{A}_e + \vec{j}_e \cdot \vec{A}) dV$$

矢势及其微分方程

因为

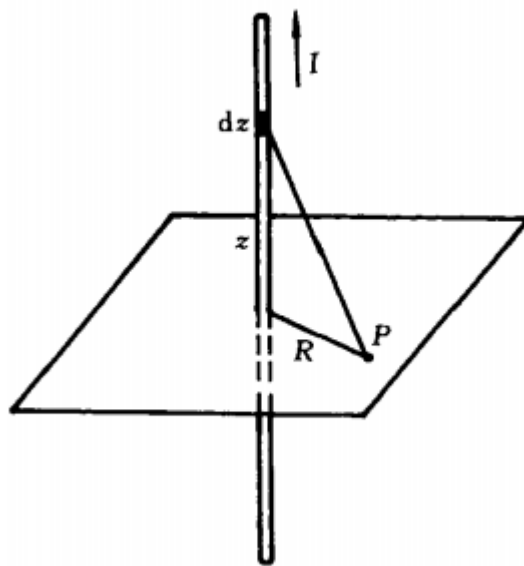
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{r}, \quad \vec{A}_e = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_e(\vec{r}') dV'}{r}$$

则相互作用能中的两项相等，因此电流 \vec{J} 在外场中的相互作用能量为

$$W_i = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e dV$$

矢势及其微分方程

例1. 无穷长直导线载电流 I ，求磁场的矢势和磁感应强度
取导线沿 z 轴，设 P 点到导线的距离为 R ，，如图所示



则有

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} \vec{e}_z$$

矢势及其微分方程

积分发散，考虑两点的矢势差，取 R_0 点的矢势值为0，

$$\vec{A} - \vec{0} = -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0}\right) \vec{e}_z$$

则磁感应强度为

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = -\nabla \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \right) \times \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_R \times \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

矢势及其微分方程

例2 半径为 a 的导线圆环载电流 I ，求矢势和磁感应强度
在柱坐标中考虑，则圆环上点的坐标为 $Q(a, \phi', 0)$ ，考虑点
 $P(\rho, \phi, z)$ 上的矢势，有

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}}{r}$$

其中 r 为 P 到 Q 的距离，为

$$r = \sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi - \phi') + z^2}$$

并且

$$d\vec{l} = a d\phi' \vec{e}_\phi$$

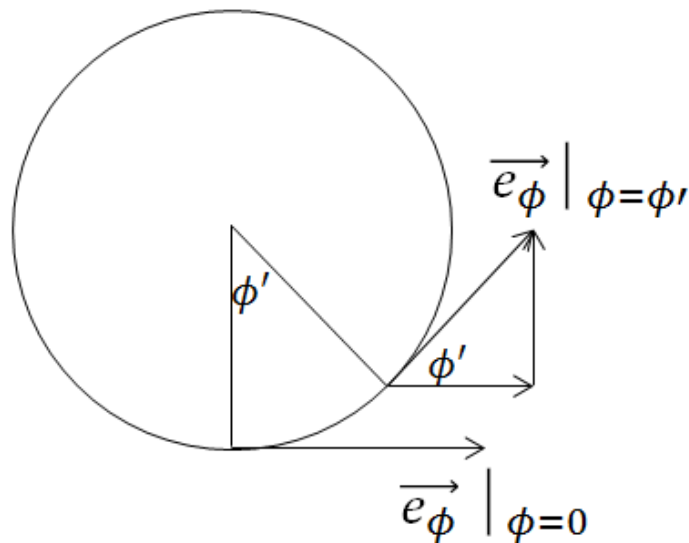
注意到 \vec{e}_ϕ 随着 ϕ' 的改变而改变，故上式不能直接积分。

可以将 \vec{e}_ϕ 用一组确定的基矢表示，不妨选取 $\phi = 0$ 时的 \vec{e}_ϕ 和
 \vec{e}_ρ 作为基矢。

矢势及其微分方程

如下图，则有

$$\vec{e}_\phi \big|_{\phi=\phi'} = \cos\phi' \vec{e}_\phi \big|_{\phi=0} - \sin\phi' \vec{e}_\rho \big|_{\phi=0}$$



则

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' d\phi' \vec{e}_{\phi_0} - \sin\phi' d\phi' \vec{e}_{\rho_0}}{\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi') + z^2}}$$

矢势及其微分方程

由对称性知, \vec{A} 的值与 ϕ 无关, 选取 $P(\rho, 0, z)$, 可以使上式中第二项为0, 即

$$A_{\phi} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \phi' + z^2}}$$

考虑

$$\rho^2 + a^2 + z^2 \gg 2\rho a \cos \phi'$$

则有

$$\begin{aligned} A_{\phi} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi \sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2}} \int d\phi' \cos \phi' \left[\frac{\rho a \cos \phi'}{\rho^2 + a^2 + z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2} \frac{\rho^3 a^3 \cos^3 \phi'}{(\rho^2 + a^2 + z^2)^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4} \left[\frac{\rho a}{(\rho^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{15}{8} \frac{\rho^3 a^3}{(\rho^2 + a^2 + z^2)^{7/2}} \right] \end{aligned}$$

矢势及其微分方程

考虑近轴场，即 $\rho \ll a$ ，展开后有

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I a^2 \rho}{4(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{15}{8} \frac{\rho^2 a^2}{(a^2 + z^2)^2} \right]$$

则可求出磁场

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{3\mu_0 I a^2 \rho z}{4(z^2 + a^2)^{5/2}} \left[1 + O\left(\frac{\rho^2}{z^2 + a^2}\right) \right]$$

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi)$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{\rho^2}{z^2 + a^2} \left(\frac{15a^2}{4(z^2 + a^2)} - 3 \right) + O\left(\left(\frac{\rho^2}{z^2 + a^2}\right)^2\right) \right]$$



磁标势

第二节

磁标势

磁标势

1. 磁标势的引入

- 描述磁场的矢势 \vec{A} 是一矢量，求解过程一般比较复杂。
- 空间中不存在自由电流时，静磁场方程与无源静电场方程相似。
- 很多实际问题中，我们不必求出整个空间中的磁场，只需求出某个局部区域的磁场。

回顾静电势的是引入，其关键在于

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

而对于静磁场，有

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

磁标势

在有电流穿过曲面 S （边界 L ）时，上面积分不为零。并且由上面可以看出，要使静磁场任意环路积分为零，则需对于 $\forall \vec{x} \in S$, 有 $\vec{j} = 0$, 上述关系应对该区域内的任意曲面成立，这样便可以引入标势来描述。

总结起来，在某区域内能够引入磁标势的条件是该区域内的任何回路都不被自由电流所链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域（空间区域 V 内任一闭曲线总可以张成一片完全属于 V 的曲面）。

磁标势

2. 磁标势方程

在 $\vec{j} = \mathbf{0}$ 的区域内，磁场满足方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \end{cases}$$

对第三式取散度可以得到

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

将分子电流看作由一对假想磁荷组成的磁偶极子，则物质磁化后会出现假想磁荷。对比 $\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p$ ，磁荷密度为

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

得到

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0}$$

磁标势

与静电场微分方程的区别在于没有自由磁荷，

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

这是由于磁荷都是由分子电流的磁偶极矩假想而来的，实验上还没有发现以磁单极子形式存在的自由磁荷。

由于区域内 $\nabla \times \vec{H} = 0$ ，可以引入磁标势 φ_m ，使得

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

仅形式上 \vec{E} 和 \vec{H} 对应。

磁标势

对比静电场公式和磁标势法公式：

静电场

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_P}{\epsilon_0}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f + \rho_P}{\epsilon_0}$$

静磁场

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0}$$

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

磁标势

考虑磁标势边值关系，边界上无传导电流时，有

$$\begin{aligned}\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0\end{aligned}$$

上面第一式类比静电势边值关系，参照P39页推导可得

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$$

对于第二式有

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_0(H_{1n} + M_{1n}) = \mu_0(H_{2n} + M_{2n})$$

类比于电极化强度矢量 \vec{P} ，可定义面磁荷密度 σ_m ，其中

$$\sigma_m = -\mu_0(M_{2n} - M_{1n})$$

则有

$$\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = -\frac{\sigma_m}{\mu_0}$$

磁标势

对于边界上存在传导电流的情况，有

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

此时，边值关系为

$$\vec{e}_n \times (\nabla \varphi_{m2} - \nabla \varphi_{m1}) = -\vec{\alpha}_f$$

$$\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = -\frac{\sigma_m}{\mu_0}$$

磁标势

例1. 证明 $\mu \rightarrow \infty$ 的磁性物质表面为等势面。

证：以角标1代表磁性物质，2代表真空，则

$$\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1$$

因为 $\mu \rightarrow \infty$ ，则

$$H_{1n} \rightarrow 0, H_{1t} \rightarrow 0$$

由磁场边值关系，有

$$H_{2t} = H_{1t} \rightarrow 0$$

即在磁性物质外， \vec{H}_2 与表面垂直，因而表面为等势面。



磁标势

例2. 求磁化矢量为 \vec{M}_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。
略

例3. 求电流线圈产生的磁标势
略



磁多极矩

第三节

磁多极矩

磁多极矩

1. 矢势的多极展开

给定电流分布在空间中激发的磁场矢势为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') dV'}{r}$$

仿照电势的多极展开有

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \right] dV' \end{aligned}$$

展开式第一项为

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V \vec{J}(\vec{x}') dV'$$

磁多极矩

由恒定电流的连续性，可以把电流分为许多闭合的流管，对一个流管来说，

$$\int_V \vec{j}(\vec{x}') dV' = \oint_L I d\vec{l} = 0$$

式中I为该流管内流过的电流，因此有

$$\vec{A}^{(0)} = 0$$

表明**磁单极不存在**，即不含与点电荷对应的项。

展开式第二项为

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left(\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \right) dV'$$

对恒定电流情况

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \left(\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \right) d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \left(\vec{x}' \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) d\vec{l}'$$

磁多极矩

由于 $d\vec{x}' = d\vec{l}'$

$$\int_L d[(\vec{x}' \cdot \vec{R}) \vec{x}'] = \int_L (\vec{x}' \cdot \vec{R}) d\vec{l}' + \int_L (d\vec{l}' \cdot \vec{R}) \vec{x}'$$

因此有

$$\begin{aligned} \int_L (\vec{x}' \cdot \vec{R}) d\vec{l}' &= \frac{1}{2} \int_L [(\vec{x}' \cdot \vec{R}) d\vec{l}' - (d\vec{l}' \cdot \vec{R}) \vec{x}'] \\ &= \frac{1}{2} \int_L (\vec{x}' \times d\vec{l}') \times \vec{R} \end{aligned}$$

则展开式第二项为

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \frac{I}{2} \int_L (\vec{x}' \times d\vec{l}') \times \vec{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

其中电流线圈的磁矩定义为

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_L \vec{x}' \times d\vec{l}' = I \Delta \vec{S}$$

磁多极矩

对于体电流分布，

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') dV'$$

这时上面的过程也可以如下证明

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left(\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \right) dV'$$

即

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} R_i \int_V \vec{j}(\vec{x}') x'_i dV'$$

磁多极矩

可改写为

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} R_i \int_V \left[\frac{1}{2} (\vec{J} x'_i + J_i \vec{x}') + \frac{1}{2} (\vec{J} x'_i - J_i \vec{x}') \right] dV'$$

又

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{J} \vec{x}) &= (\nabla \cdot \vec{J}) \vec{x} + (\vec{J} \cdot \nabla) \vec{x} = \vec{J} \\ \nabla \cdot (\vec{J} \vec{x} x_i) &= x_i \nabla \cdot (\vec{J} \vec{x}) + \nabla x_i \cdot \vec{J} \vec{x} = \vec{J} x_i + J_i \vec{x} \end{aligned}$$

则积分第一项可化为

$$\frac{1}{2} \oint_{S'} \vec{J} \vec{x}' x'_i \cdot d\vec{S}' = 0$$

这是由于 $\vec{J} \cdot d\vec{S}' = 0$ ，即边界上无电流流出。

磁多极矩

则有

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} R_i \int_V \frac{1}{2} (\vec{J} x'_i - J_i \vec{x}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \frac{1}{2} \int_V [\vec{J} (\vec{x}' \cdot \vec{R}) - \vec{x}' (\vec{J} \cdot \vec{R})] dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \frac{1}{2} \int_V (\vec{x}' \times \vec{J}) \times \vec{R} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$

其中

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x}' \times \vec{J} dV'$$

磁多极矩

对于电流线圈，有

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_V \vec{x}' \times d\vec{l}'$$

对于一个小线圈，设它所围面元为 $\Delta\vec{S}$ ，有

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x}' \times d\vec{l}'$$

因此

$$\vec{m} = I\Delta\vec{S}$$

磁多极矩

2. 磁偶极矩的场和磁标势

由磁矩矢势计算其磁场

$$\begin{aligned}\vec{B}^{(1)} &= \nabla \times A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3} \right]\end{aligned}$$

$R \neq 0$ 时有

$$\vec{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

在电流分布以外空间，磁场应该可以用标势描述，因此把上式化为梯度形式，由

$$\nabla \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \vec{m} \times \left(\nabla \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) + (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3} = (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

则

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)}$$

磁多极矩

其中

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}$$

与电偶极势相比，在形式上相似。

一个任意电流线圈可以看作由它所围的一个曲面上S上许多小电流线圈组合而成，因此它的总磁偶极矩为

$$\vec{m} = I \int_S d\vec{S}$$

由于

$$\oint_S d\vec{S} = 0$$

则磁偶极矩与曲面选取无关。

磁多极矩

3. 小区域内电流分布在外磁场中的能量

由第一节的讨论可知电流分布 \vec{j} 在外磁场中的相互作用能为

$$W = \int_V \vec{j} \cdot \vec{A}_e dV$$

对于电流线圈有

$$W = I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = I\Phi_e$$

其中 Φ_e 为外磁场对线圈L的磁通量，取坐标系原点在线圈所在区域内适当点上，若区域线度远小于磁场发生显著变化的线度，则可以把 \vec{B}_e 在原点邻域上展开：

$$\vec{B}_e(\vec{x}) = \vec{B}_e(0) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \dots$$

磁多极矩

则有

$$W \approx I \vec{B}_e(0) \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$$

对比电偶极子在外场中的能量，在形式上相差一个负号，这是否意味着磁偶极子受外磁场作用时将倾向于与外磁场反向？

答案是否定的。考虑外场由电流 I_e 的线圈 L_e 产生，则

$$W = \frac{1}{2} \left(I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l} + I_e \oint_{L_e} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right) = \frac{1}{2} (I\Phi_e + I_e\Phi)$$

则磁能改变为

$$\delta W = \frac{1}{2} (I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi)$$

但是，由于磁通改变，线圈上会产生感应电动势，电流值也会发生改变，要使电流不变，则必须由**电源提供能量**。

磁多极矩

进一步，两线圈上的感应电动势分别为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt}, \quad \varepsilon_e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

在时间 δt 内感应电动势所作的功为

$$\varepsilon I \delta t + \varepsilon_e I_e \delta t = -I \delta \Phi_e - I_e \delta \Phi$$

电源为抵抗此感应电动势必须提供能量

$$\delta W_s = I \delta \Phi_e + I_e \delta \Phi = 2\delta W$$

才能保持电流不变，在此条件下，两电流分别单独存在时的磁能不变，因此总磁场能量的改变等于相互作用磁能的改变。

设线圈移动时场对它做功为 δA ，由能量守恒有

$$\delta W_s = \delta W + \delta A$$

磁多极矩

因此，有

$$\delta A = \delta W$$

即对线圈所作功等于磁能的**增量**而不是其减小量。定义力学中的势函数 U 使做功等于势函数的减小，应有

$$U = -A = -W = -\int \vec{J} \cdot \vec{A}_e dV$$

（对于电场情况 $U = -A = W$ ）则磁偶极子在外场中的势函数为

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

这与电偶极子在外电场中的能量在形式上完全对应。

磁多极矩

磁偶极子在外磁场中所受的力为

$$F = -\nabla U = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}_e) = \vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}_e) + \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e$$

这里用了 $\nabla \times \vec{B}_e = 0$ ，这是由于外场的电流一般都不出现在磁矩 \vec{m} 所在的区域内。

磁偶极子所受力矩为

$$L = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -m B_e \sin \theta$$

记及方向得

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e$$

与电偶极子在外电场中的相应公式完全对应。