



§ 4.4 多光束干涉

一. 光栅 (grating)

光栅是现代科技中常用的重要光学元件。

光通过光栅衍射可以产生明亮尖锐的亮纹，复色光入射可产生光谱，用以进行光谱分析。

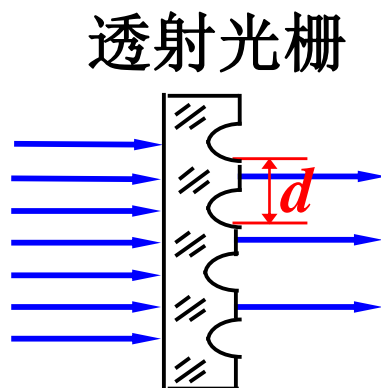
1. 光栅的概念

光栅是由大量的等宽等间距的平行狭缝（或反射面）构成的光学元件。

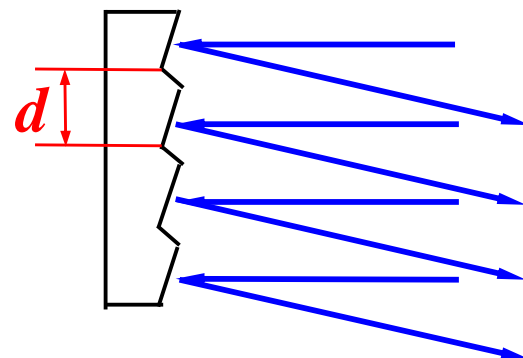
从广义上理解，任何具有空间周期性的衍射屏都可叫作光栅。

2. 光栅的种类:

光栅最早由 Rittenhouse 发明，此后夫琅禾费又在 1819 年独立制成。



反射光栅



闪耀光栅

3. 光栅常数

光栅常数是光栅空间周期性的表示。

设： a 是透光（或反光）部分的宽度， b 是不透光（或不反光）部分的宽度，则： $d = a + b$ — 光栅常数

普通光栅刻线为数十条/mm — 数千条/mm，
用电子束刻制可达数万条/mm ($d \sim 10^{-1} \mu\text{m}$)。

二. 光栅的夫琅禾费衍射

1. 光栅各缝衍射光的叠加

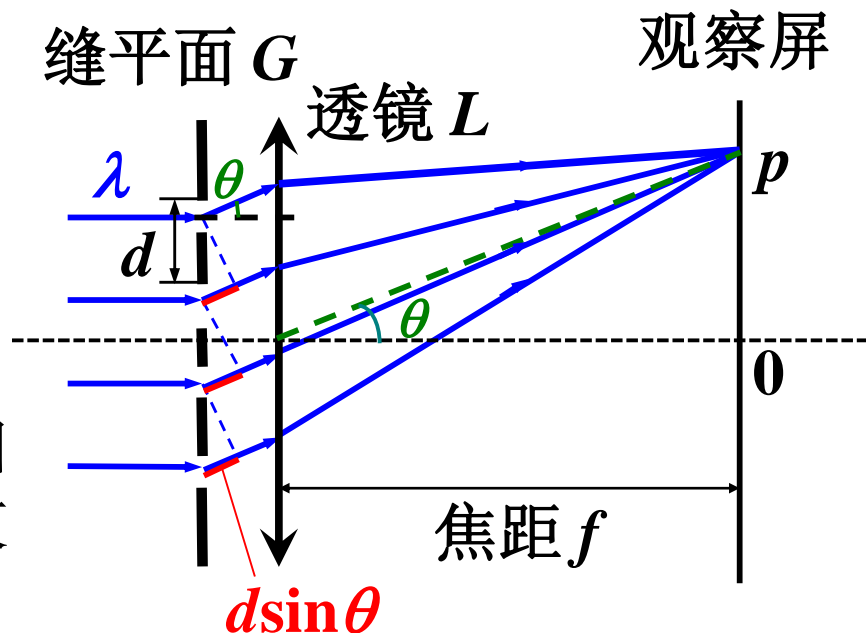
衍射角相同的光线，
会聚在接收屏的相同
位置上。

衍
射

每个缝衍射在衍射角相
同的地方有相同的条纹

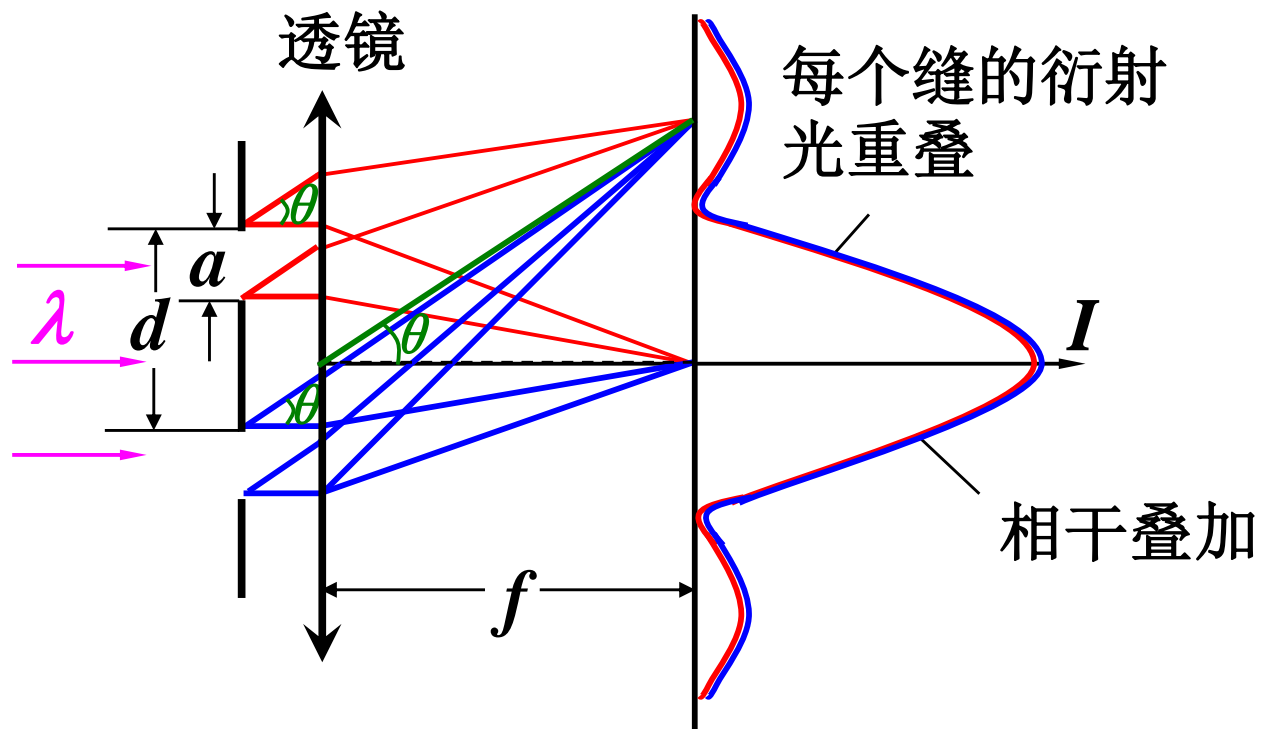
干
涉

缝与缝之间将产生干涉，
这是一种多缝干涉



以双缝的夫琅和费衍射光的叠加为例来分析：

干涉条纹各级主极大的**强度**将不再相等，而是**受到了衍射的调制**。但是各个干涉主极大的位置仍由 d 决定，而没有变化。



2. 多光束干涉 (multiple-beam interference)

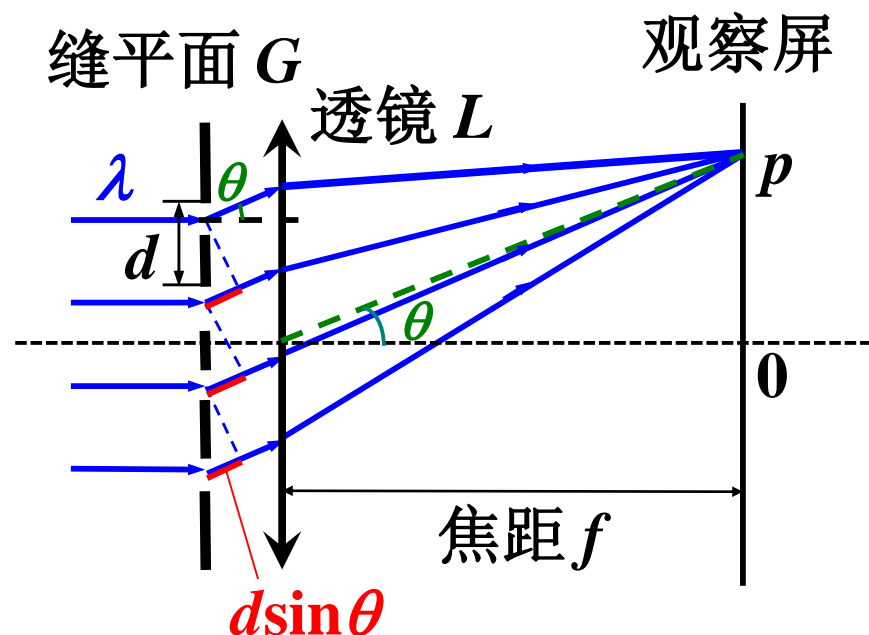
先不考虑衍射对光强的影响

明纹（主极大）条件：

$$d \sin \theta = \pm k \lambda$$

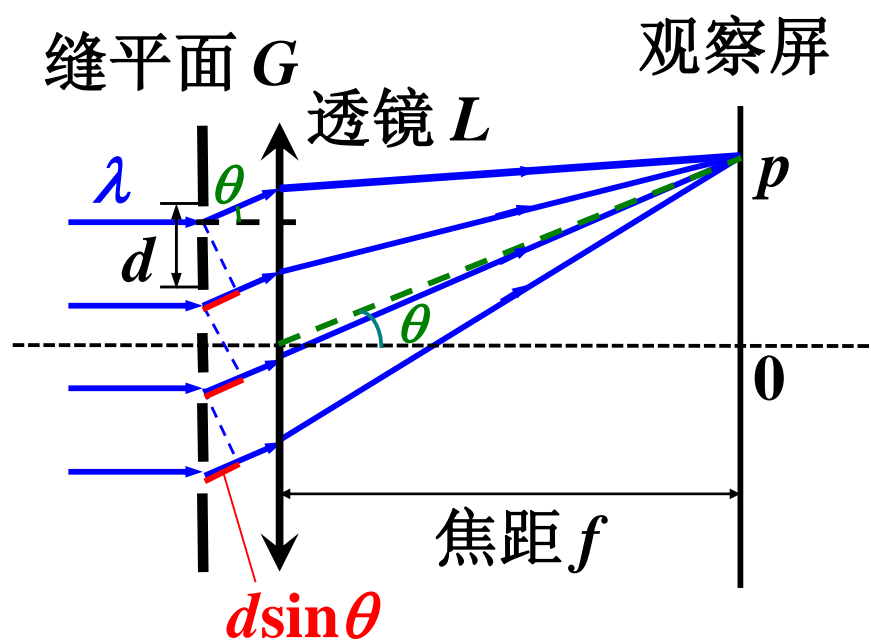
($k = 0, 1, 2, \dots$)

—正入射光栅方程



光栅方程是光栅的基本方程

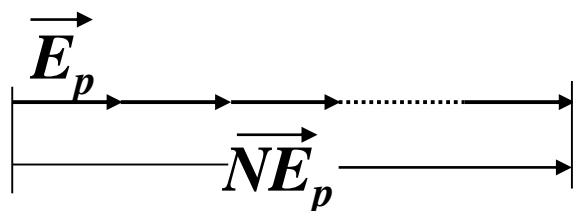
§ 4.4 多光束干涉



设有 N 个缝，每个缝发的光在对应衍射角 θ 方向的 p 点的光振动的振幅为 E_p ，相邻缝发的光在 p 点的相位差为 $\Delta\varphi$ 。

p 点为干涉主极大时，

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$$



$$I_p \propto N^2 E_p^2$$

§ 4.4 多光束干涉

暗纹条件:

各振幅矢量构成闭合多边形, 多边形外角和:

$$N\Delta\varphi = \pm 2k'\pi \quad (1)$$

$$k' = 1, 2, \dots \neq Nk$$

$$\Delta\varphi = \frac{d \cdot \sin \theta}{\lambda} \cdot 2\pi \quad (2)$$

由(1), (2)得 $d \cdot \sin \theta = \frac{\pm k'}{N} \lambda$ ($k' \neq Nk, k' \neq 0$) (3)

由(3)和 $d \sin \theta = \pm k\lambda \Rightarrow$ 暗纹间距 = $\frac{\text{主极大间距}}{N}$

相邻主极大间有 $N-1$ 个暗纹和 $N-2$ 个次极大。

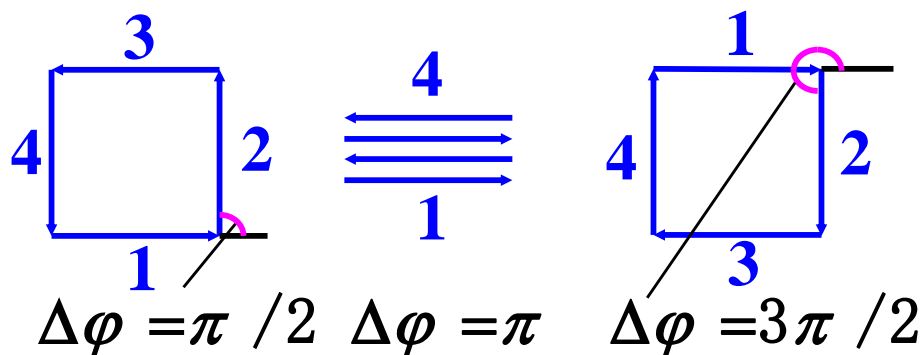
§ 4.4 多光束干涉

例如 $N = 4$ ，在 0 级和 1 级亮纹之间 k' 可取 1、2、3，即有三个极小：

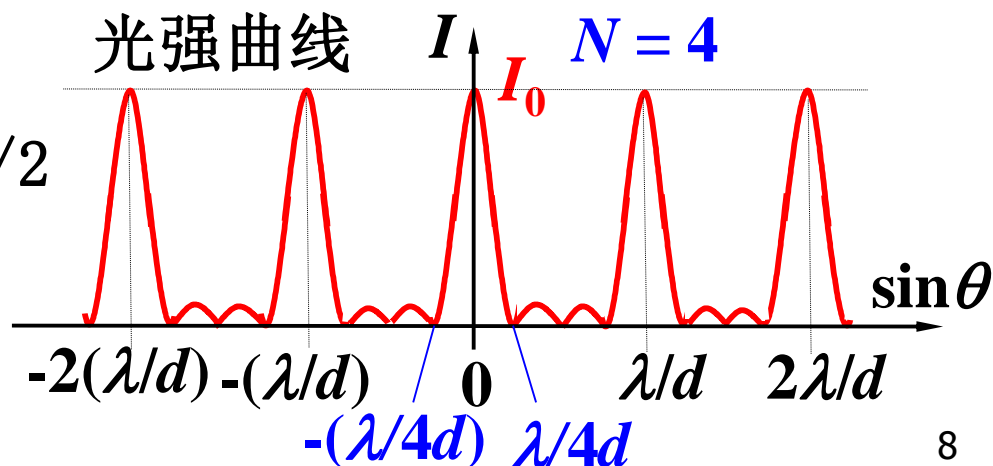
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \frac{2}{4} \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{\lambda}{d}$$

($k' = 1$), ($k' = 2$), ($k' = 3$)

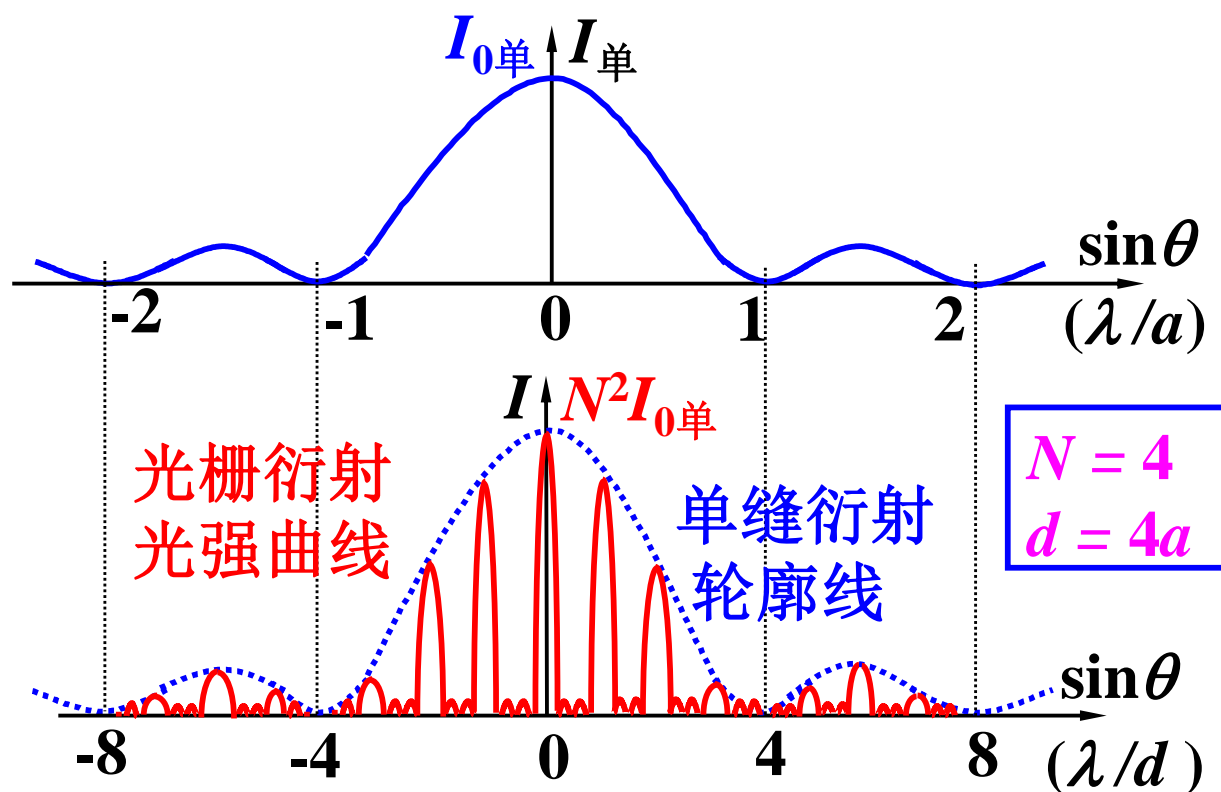


N 大时光强向主极大集中，使条纹亮而窄。



3. 光栅衍射 (grating diffraction)

(1) 各干涉主极大受到单缝衍射的调制。

主极大缺
 $\pm 4, \pm 8 \dots$ 级



§ 4.4 多光束干涉

主极大的半角宽: $\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{d \cos \theta_k N}$

$$d \cdot \sin \theta = \frac{\pm k'}{N} \lambda$$

缝数N越多，条纹越细锐。

相邻主极大明条纹的角间距:

$$\Delta\theta_k = \left(\frac{\Delta k \cdot \lambda}{d \cos \theta_k} \right)_{\Delta k=1} = \frac{\lambda}{d \cos \theta_k}$$

$$d \sin \theta = \pm k \lambda$$

光栅常数越小，条纹分布就越稀疏；反之越密。

(2) d/a 为整数比时, 会出现缺级。

明纹缺级现象的分析:

干涉明纹位置: $d \sin \theta = \pm k \lambda, k = 0, 1, 2, \dots$

衍射暗纹位置: $a \sin \theta' = \pm k' \lambda, k' = 1, 2, 3, \dots$

$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}$ 时, $\theta = \theta'$, 此时在应该干涉加强的位置上没有衍射光到达, 从而出现缺级。

干涉明纹缺级级次

$$k = \frac{d}{a} k'$$

例如 $d = 4a$, 则缺 ± 4 级, ± 8 级...

(3) d 、 a 对条纹的影响:

d/a 决定衍射中央明纹范围内的干涉条纹数。

这是因为 $\frac{\lambda}{a}$ 决定衍射中央明纹的宽度,

而 $\frac{\lambda}{d}$ 决定干涉主极大的间距。

▲ 若 a 不变 \Rightarrow 单缝衍射的轮廓线不变;

d 减小 \Rightarrow 主极大间距变稀, 单缝中央亮纹范围内的主极大个数减少, 如果出现缺级的话, 则缺级的级次变低。

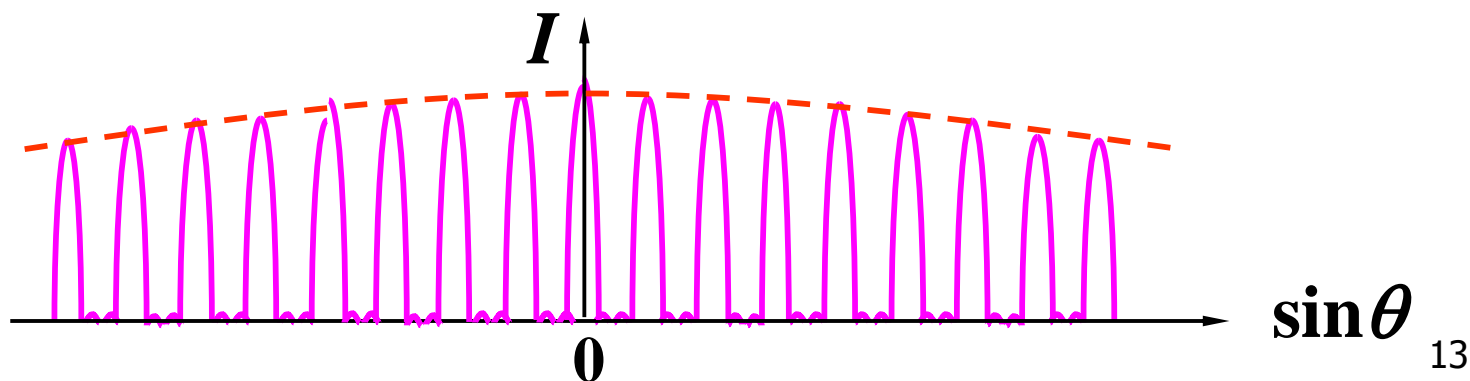
▲ 若 d 不变 \Rightarrow 各主极大位置不变;

a 减小 \Rightarrow 单缝衍射的轮廓线变宽, 单缝中央明纹范围内的主极大个数增加, 缺级的级次变高。

极端情形:

当 $a \rightarrow \lambda$ 时, 单缝衍射的轮廓线变为很平坦, 第一暗纹在距中心 ∞ 处, 此时各主极大光强几乎相同。

多缝衍射图样 \rightarrow 多光束干涉图样:



4. 光栅夫琅禾费衍射的光强公式

每个单缝在 p 点（对应衍射角 θ ）均有

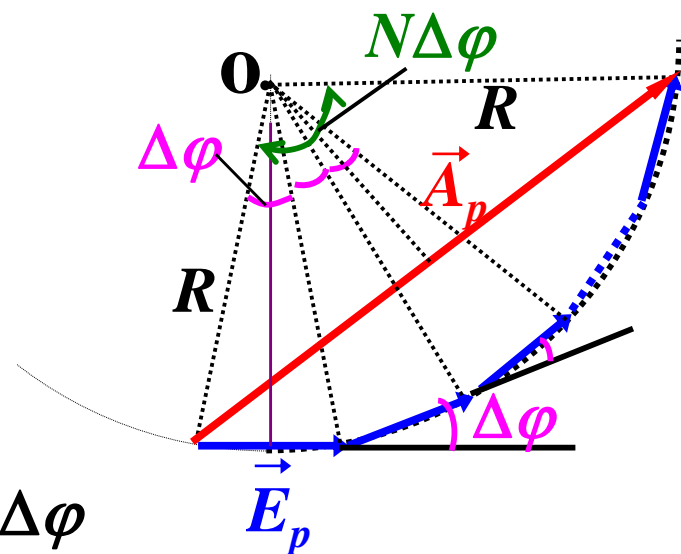
$$E_p = E_{0\text{单}} \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

相邻缝在 p 点的相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta$$

p 点合振幅为

$$A_p = 2R \sin \frac{N\Delta\varphi}{2}, \quad E_p = 2R \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$



§ 4.4 多光束干涉

$$\therefore A_p = E_p \cdot \frac{\sin N \frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} = E_{0\text{单}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$$

$$I_p = I_{0\text{单}} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 \quad \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \cdot \sin \theta$$

$I_{0\text{单}}$

——单缝中央主极大光强

$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$

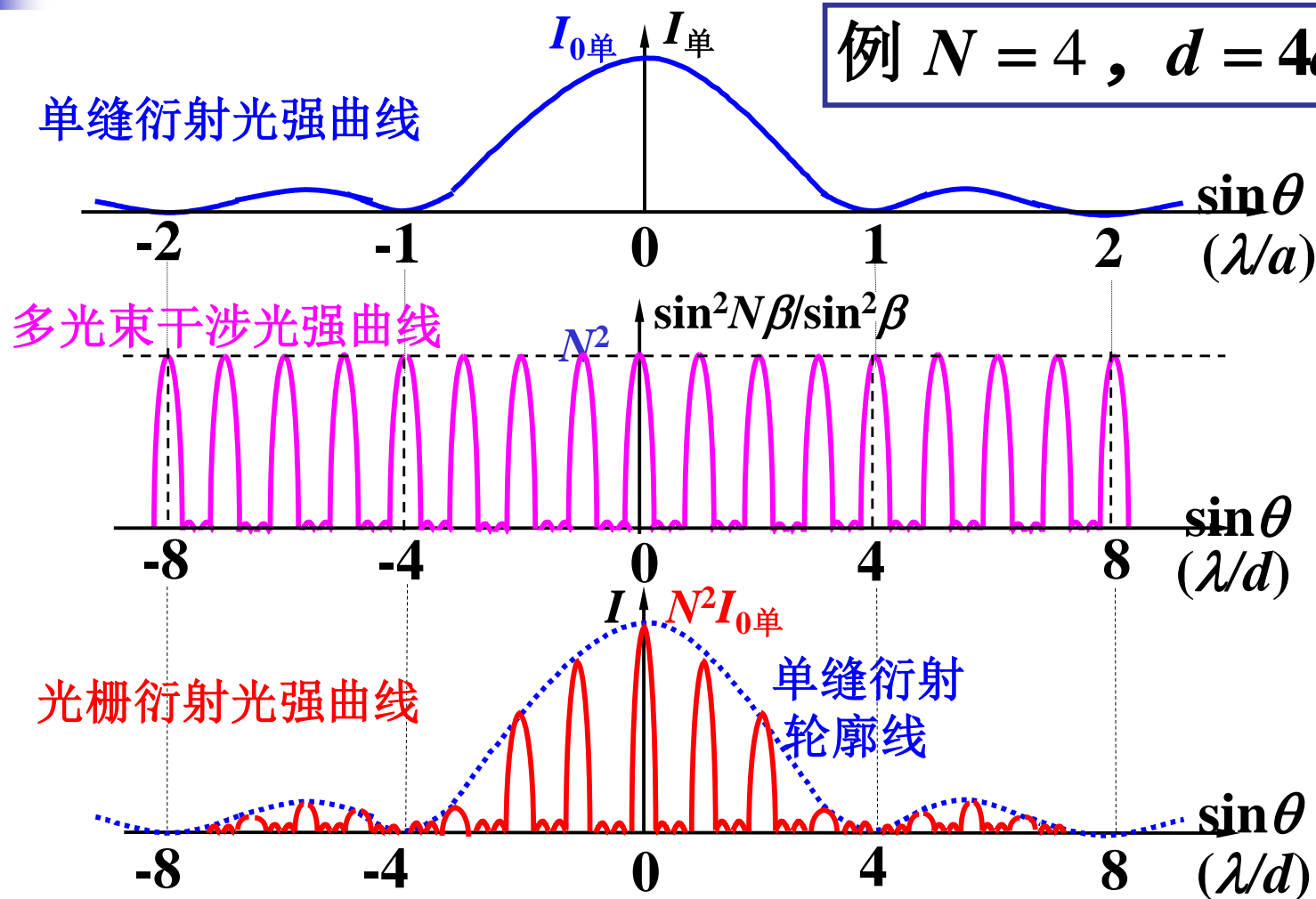
——单缝衍射因子

$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$

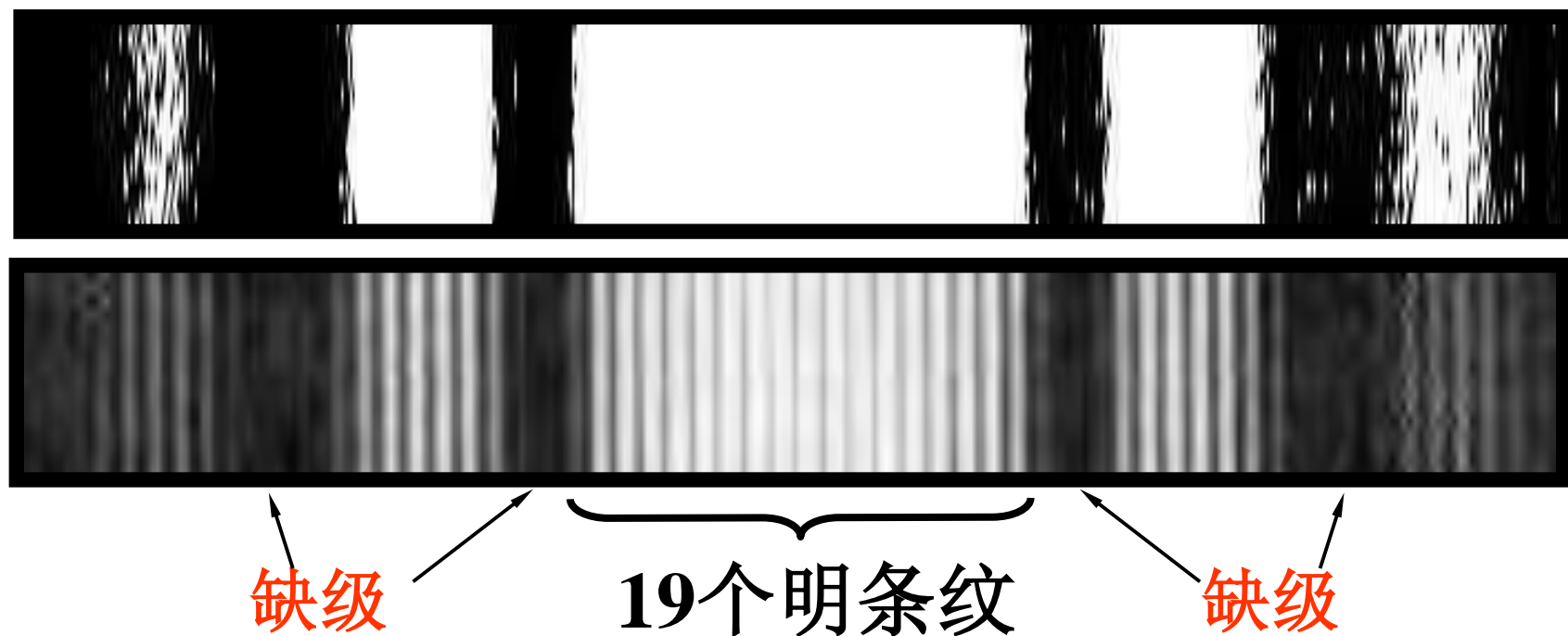
——多光束干涉因子

§ 4.4 多光束干涉

例 $N = 4$, $d = 4a$



§ 4.4 多光束干涉



单缝衍射和多缝衍射干涉的对比 ($d=10a$)

三. 斜入射的光栅方程、相控阵雷达

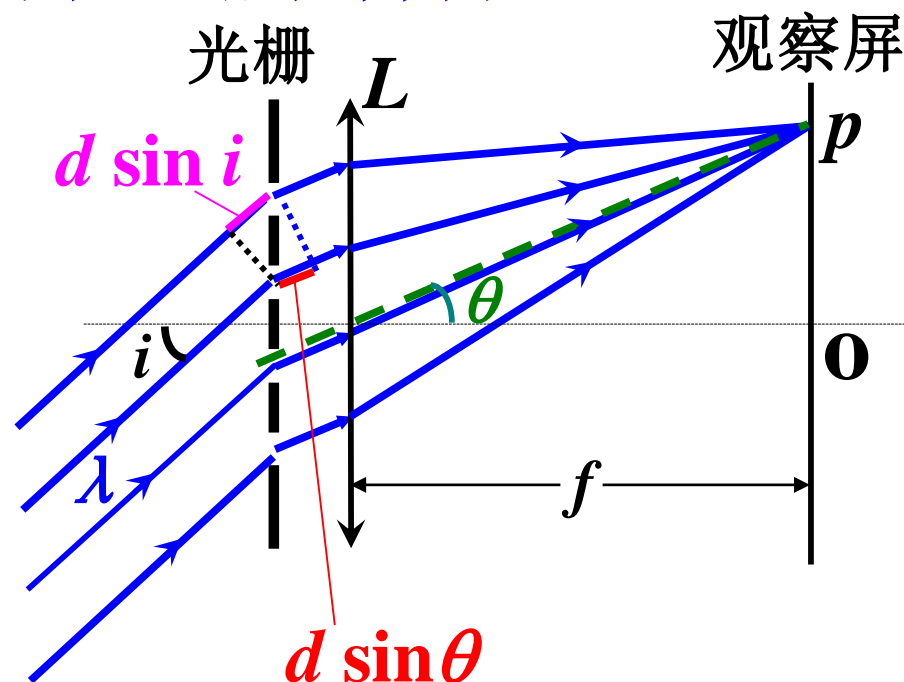
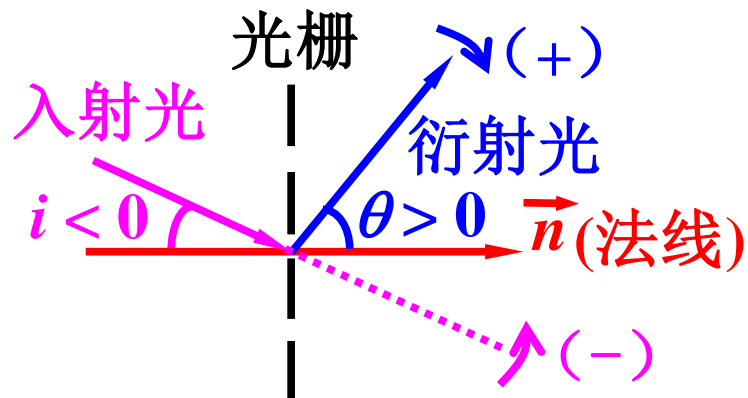
1. 光线斜入射时的光栅方程

$$\Delta L = d(\sin \theta - \sin i)$$

$$d(\sin \theta - \sin i) = \pm k\lambda$$

—斜入射的光栅方程

i 和 θ 的符号规定：



斜入射可以获得更高级次的条纹（分辨率高）。

k 确定时，调节 i ，则 θ 相应改变。

例如，令 $k = 0$ ，则 $d \cdot \sin \theta = d \cdot \sin i$

相邻入射光的相位差：

$$\Delta\varphi = \frac{d \cdot \sin i}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{d \cdot \sin \theta}{\lambda} \cdot 2\pi \rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda}{2\pi d} \cdot \Delta\varphi$$

改变 $\Delta\varphi$ ，即可改变 0 级衍射光的方向。

2. 相控阵雷达

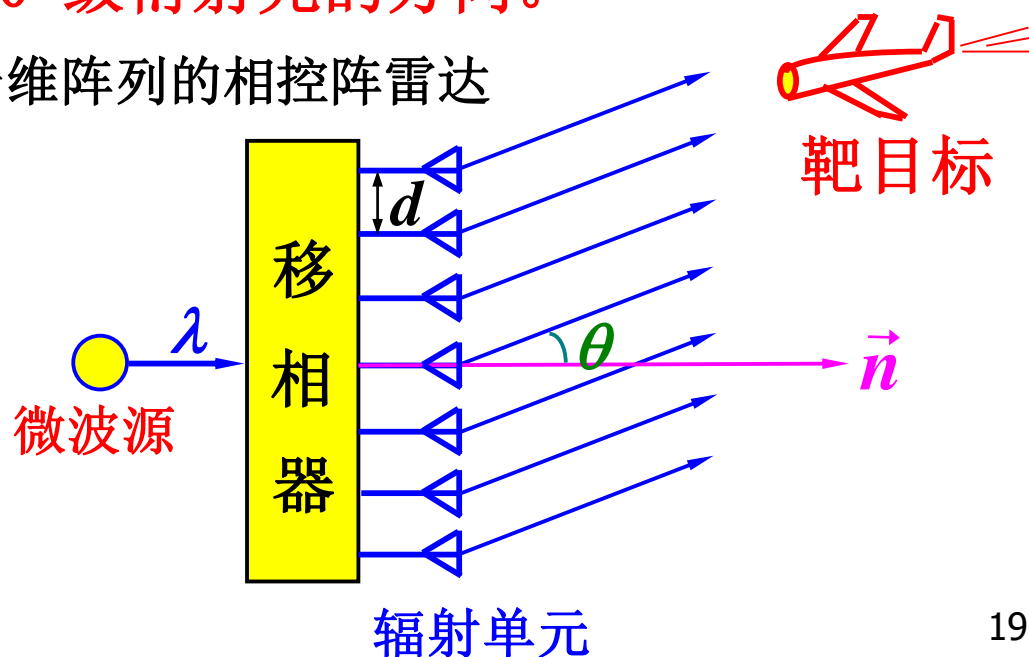
(1) 扫描方式

- 相位控制扫描
- 频率控制扫描

(2) 回波接收

通过同样的天线阵列接收。

一维阵列的相控阵雷达



(3) 相控阵雷达的优点

- ▲ 无机械惯性，可高速扫描。
一次全程扫描仅需几微秒
- ▲ 由计算机控制可形成多种波束。

能同时搜索、跟踪多个目标

- ▲ 不转动、天线孔径可做得很大。

辐射功率强、作用距离远、分辨率高...

相控阵雷达除军事应用外，还可民用：

如地形测绘、气象监测、导航、

测速（反射波的多普勒频移）...



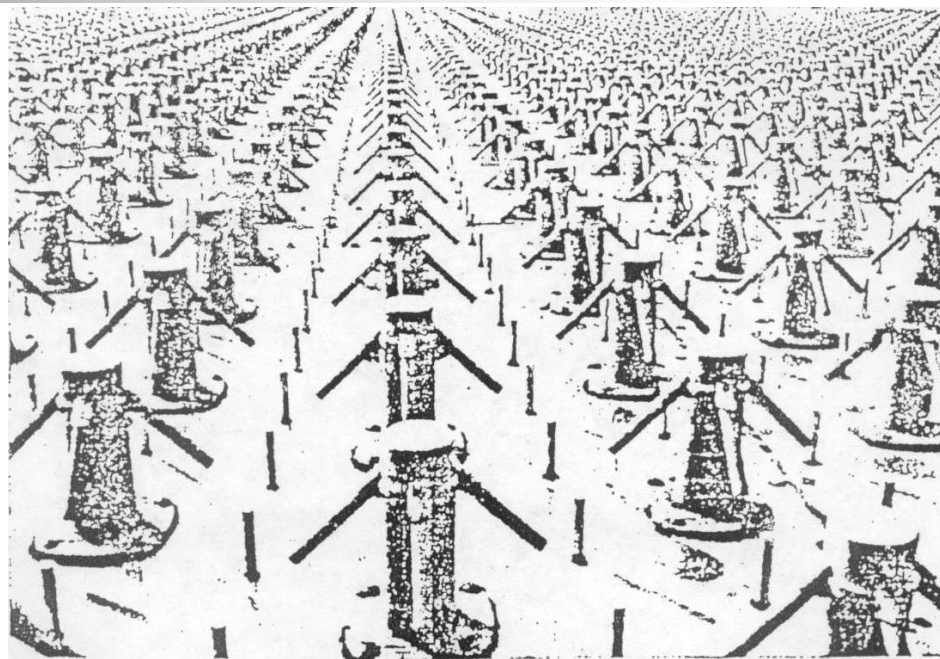
A close-up view of a phased array radar on a Navy AEGIS destroyer

§ 4.4 多光束干涉



设在澳大利亚**Sydney**大学的一维射电望远镜阵列，

($N=32$, $\lambda=21\text{cm}$, $a=2\text{m}$,
 $d=21\text{m}$, 阵列长213m)



设在美国鳕角 (**Cape cod**) 的相控阵雷达照片，阵列宽31m，有1792个辐射单元，覆盖 240° 视野。能探测到5500公里范围内的 10m^2 大小的物体。

四. 光栅光谱, 光栅的色散本领、分辨本领

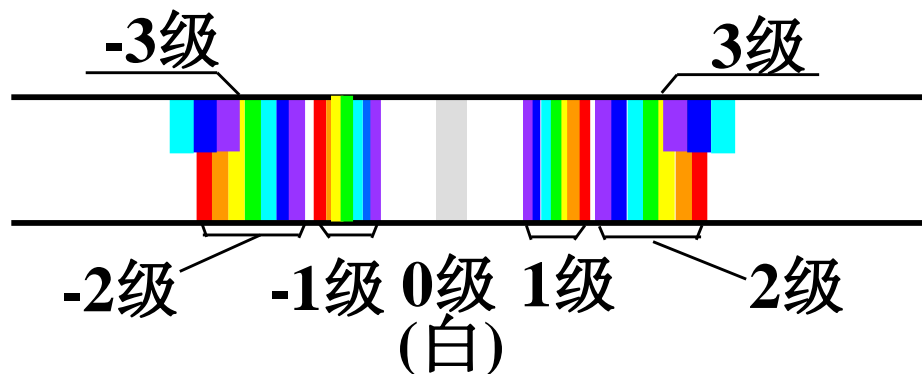
1. 光栅光谱

$$d \sin \theta = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

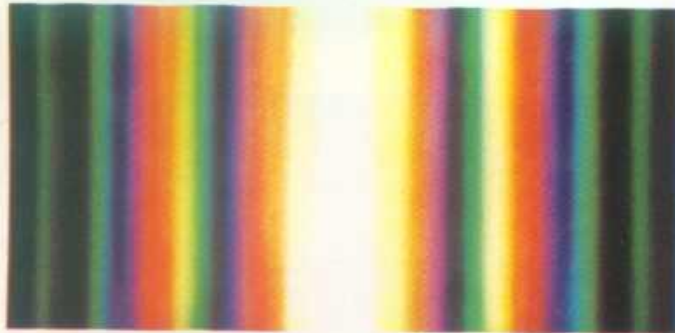
k 一定时, $\lambda \uparrow \theta \uparrow$, 不同颜色的主极大位置不同, 形成光谱。

光栅光谱有多级, 且是正比光谱。

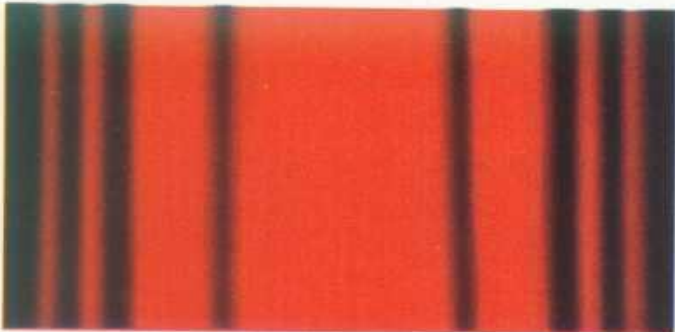
白光(350~770nm)的光栅光谱 (连续) :



§ 4.4 多光束干涉

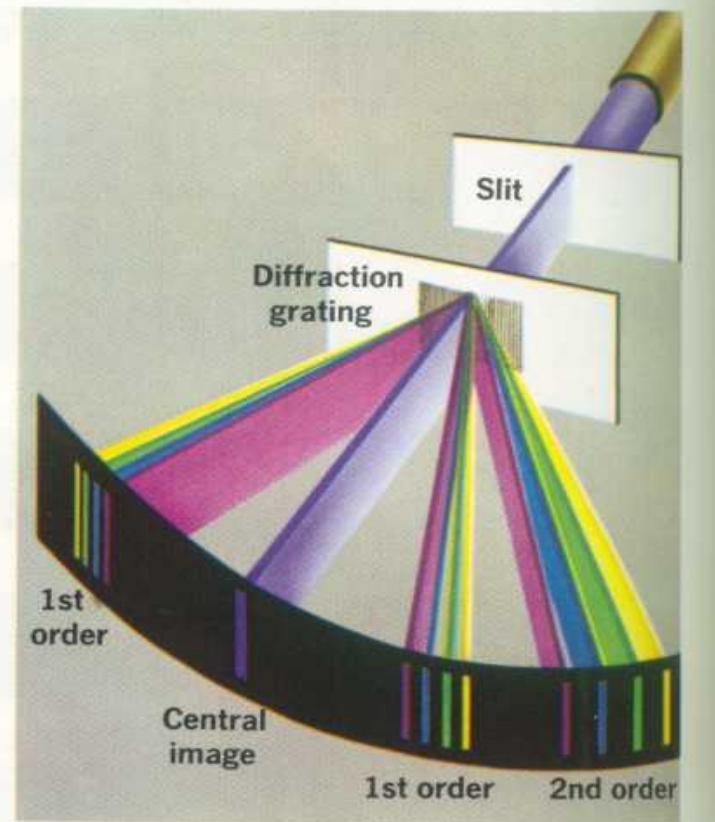


B. Passing white light through a single slit produces this diffraction pattern.



Red light passed through the same slit produces this pattern.

单缝衍射



C. Mercury light through a diffraction grating.

光栅光谱

2. 光栅的色散本领

色散本领：把不同波长的光在谱线上分开的能力

波长为 λ 的谱线，衍射角为 θ ，位置为 x ；

波长 $\lambda+\delta\lambda$ 的谱线，衍射角 $\theta+\delta\theta$ ，位置 $x+\delta x$

角色散本领

$$D_{\theta} \equiv \frac{\delta \theta}{\delta \lambda}$$

线色散本领

$$D_l \equiv \frac{\delta x}{\delta \lambda}$$

$$D_l = f \cdot D_{\theta}$$

f — 光栅后的透镜焦距

由 $\sin \theta - \sin i = k \frac{\lambda}{d}, \rightarrow \cos \theta \cdot \delta \theta = k \frac{\delta \lambda}{d},$

有

$$D_{\theta} = \frac{k}{d \cdot \cos \theta}$$

和

$$D_l = \frac{k \cdot f}{d \cdot \cos \theta}$$

与光栅缝数 N 无关

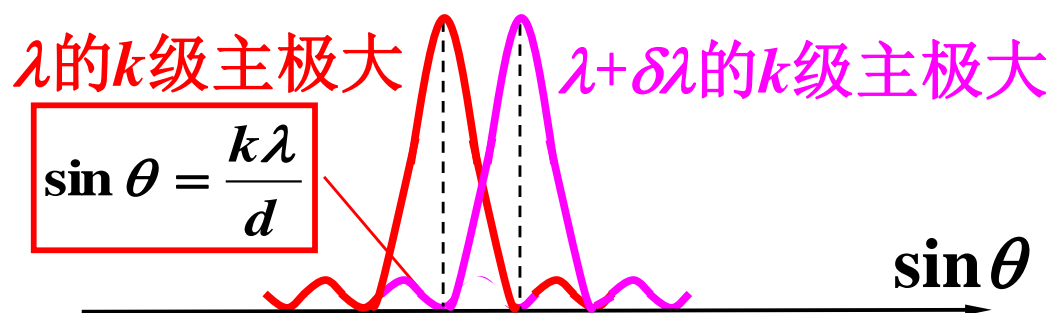
3. 光栅的色分辨本领 (resolving power of grating)

设入射波长为 λ 和 $\lambda + \delta\lambda$ 时, 两谱线刚能分辨。

定义: 光栅分辨本领

$$R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

按瑞利判据:



对应 $k' = Nk - 1$ 的 $(\lambda + \delta\lambda)$ 的暗纹, $\sin \theta = \frac{k'(\lambda + \delta\lambda)}{Nd}$

§ 4.4 多光束干涉

由图，有：
$$\frac{k}{d} \cdot \lambda = \frac{Nk - 1}{Nd} \cdot (\lambda + \delta\lambda)$$

得
$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk - 1 \approx Nk, (k \neq 0) \quad \therefore \left. \begin{array}{l} \uparrow N \\ \uparrow k \end{array} \right\} \rightarrow \uparrow R$$

$(N \gg 1)$

例如，对波长靠得很近的Na双线：**589 nm, 589.6nm**

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{589}{0.6} \approx 982 = Nk$$

若 $k = 2$ ，则 $N = 491$

若 $k = 3$ ，则 $N = 327$

} 都可分辨出Na双线

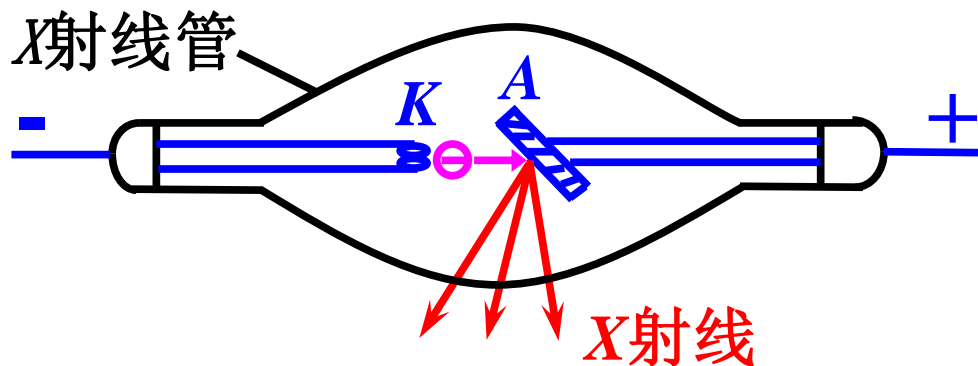
§ 4.5 X射线的衍射

一. X射线的产生

1895年德国人伦琴 (Röntgen) 发现了高速电子撞击固体可产生一种能使胶片感光、空气电离、荧光质发光…的中性射线，称为X射线。

1901年伦琴获首届诺贝尔物理奖

原子内壳层电子跃迁产生的一种高能电磁辐射



K — 阴极, A — 阳极
 $A-K$ 间加几万伏高压,
加速阴极发射的热电子

特点：# 在电磁场中不发生偏转。

穿透力强

波长较短的电磁波，范围在0.001nm~10nm之间。

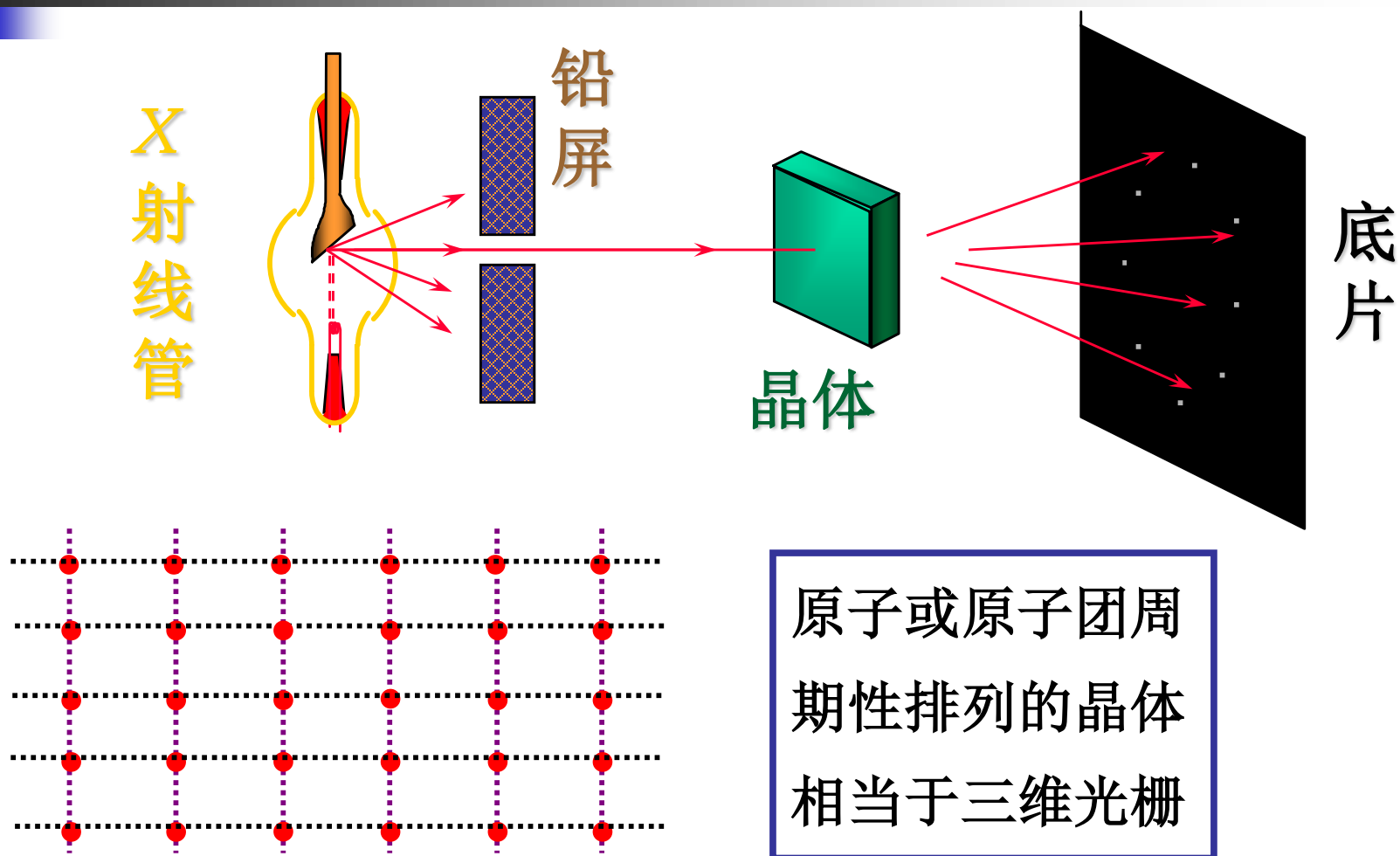
二. X射线在晶体上的衍射

1. 一般分析 **X射线波长极短，一般光栅**，因此用一般光栅看不到**X射线**的衍射。

1912年，**劳厄（Laue）**猜想：**X射线**波长和晶体内原子的间距差不多，能否用晶体产生**X射线**的衍射呢？

实验果然看到了衍射现象

§ 4.5 X射线的衍射

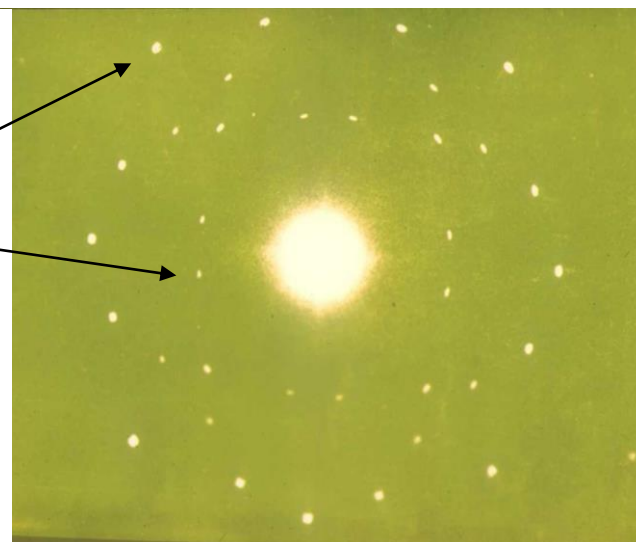


§ 4.5 X射线的衍射

让连续 λ 的X光射到单晶体上，则屏上产生了一些强度不同的斑点。称劳厄斑。

根据劳厄斑点的分布可算出晶面间距，掌握晶体点阵结构。

劳厄斑点



这证明了两件事：

- (1) X射线是波长极短的电磁波。
- (2) 晶体中原子的排列很整齐，原子间距是 N 个 \AA 的量级。

1913年布喇格父子 (Bragg) 提出了研究 x 射线衍射更简单的方法，得出了x射线在晶体上衍射主极大的公式。

■ 2. 衍射分析

- 晶体中每个格点将成为一个散射中心
- 各散射光是相干的，它们将在空间发生干涉
- 与光栅衍射的对比
 - * 晶体中每一个原子相当光栅的一条缝
 - * 晶格常数相当于光栅常数
- 衍射的分析方法
 - * 先考虑同一晶面上各原子间的干涉——点间干涉
 - * 再考虑不同晶面之间的干涉——面间干涉
- 我们只关心主极大的位置

(1) 点间干涉

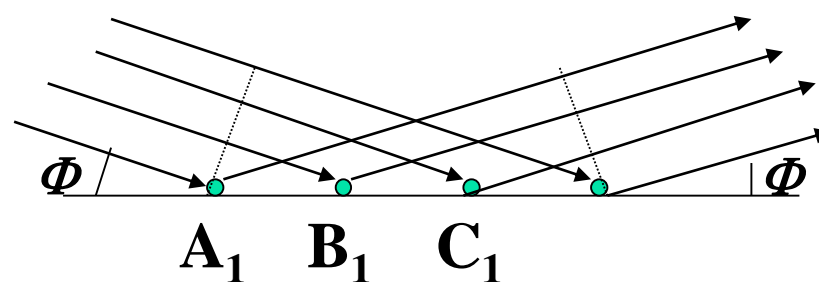
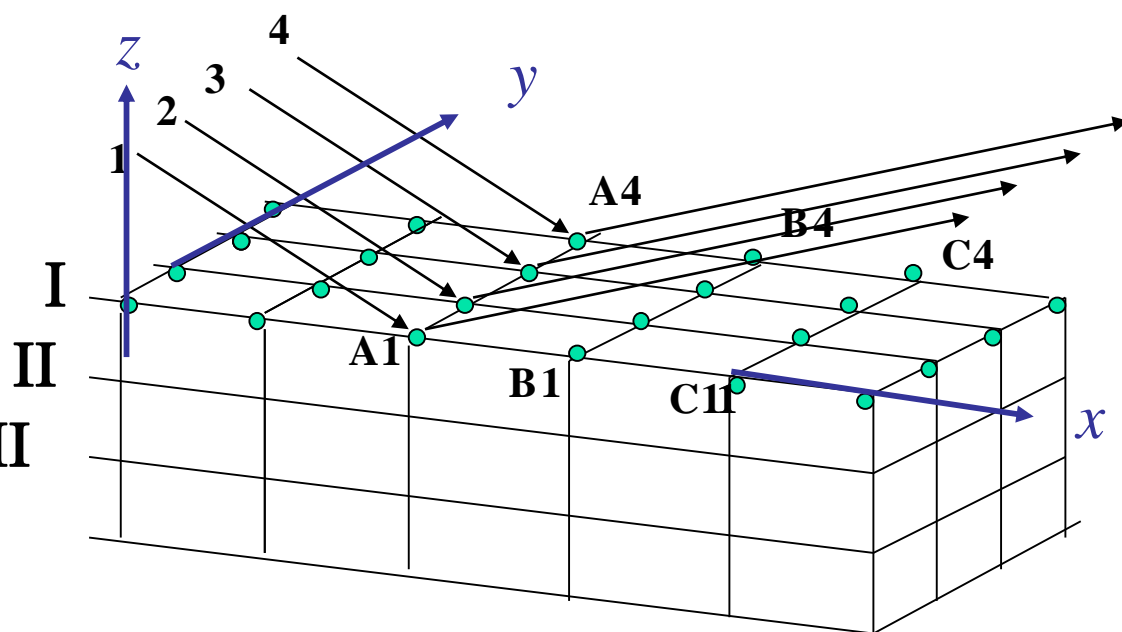
属于二维光栅，考虑平行入射光垂直 y 轴入射。

i° y 方向各点：

入射光光程差为零，同平面出射光光程差也为零，总的光程差为零。

ii° x 方向各点：

入射光已有光程差，出射光也有光程差，只有满足反射定律的光其光程差为零。



§ 4.5 X射线的衍射

在同一层晶面上散射的光，只有服从反射定律的，光程差才为零，才是零级主极大。

(2) 面间干涉

相邻晶面散射光 1 和 2 的光程差为

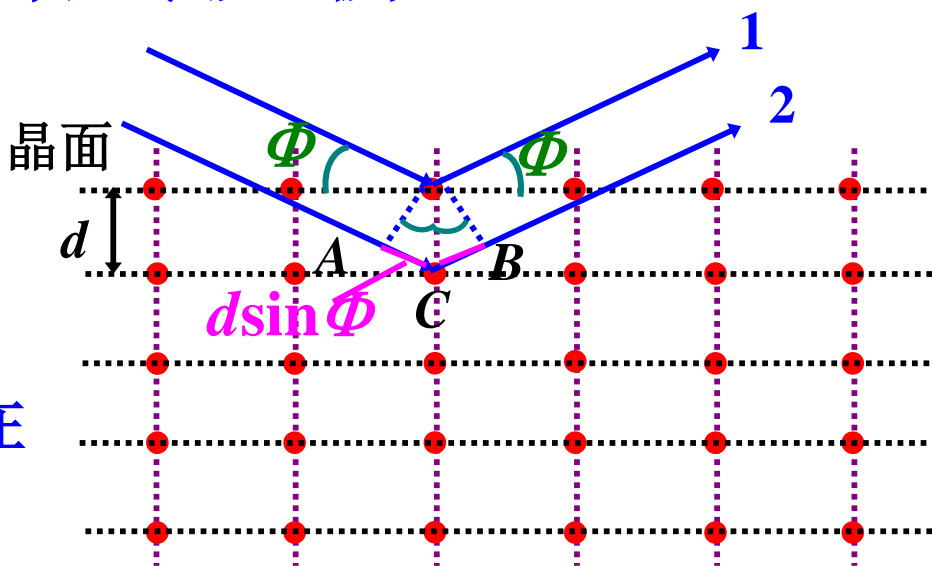
$$\Delta L = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cdot \sin \Phi$$

是不是随便什么 Φ 角，都能在反射的方向干涉加强？

各层散射光干涉加强的条件：

$$2d \cdot \sin \Phi = k\lambda \quad (k=1,2,3\dots)$$

——布喇格公式



d : 晶面间距
(晶格常数)

Φ : 掠射角

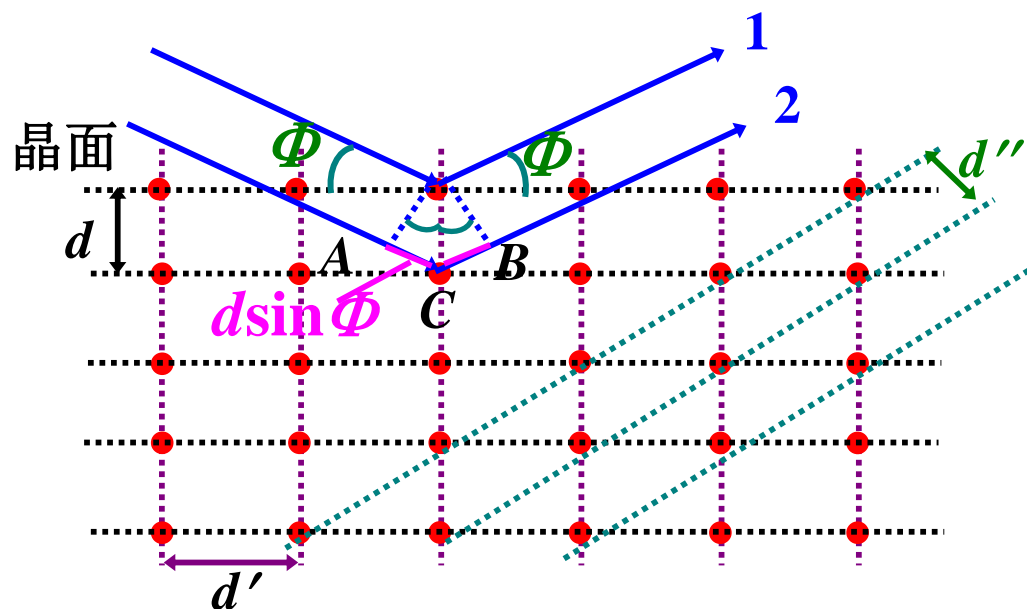
例, NaCl:
 $d = 2.8\text{\AA}$

§ 4.5 X射线的衍射

对于 d , λ 一定时, 只有特定的 Φ 才满足布喇格公式, 才能在反射的方向获得干涉相长。

实际情况比较复杂, 一块晶体可以有許多方法来划分晶面族. $d, d', d'' \dots$

当某一个晶面族满足布喇格公式时, 就能得到相应的 x 射线衍射的主极大。



三. X射线衍射与普通光栅衍射的区别

▲ X射线衍射有一系列的布喇格条件。

晶体内有許多晶面族，入射方向和 λ 一定时，对第 i 个晶面族有：

$$2d_i \cdot \sin \Phi_i = k_i \lambda, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

一维光栅只有一个干涉加强条件：

$$d(\sin \theta - \sin i) = \pm k \lambda \quad \text{—光栅方程。}$$

▲ 晶体在 d_i 、 Φ_i 、 λ 都确定时，不一定能满足布喇格公式的关系。

一维光栅在 λ 和入射方向角 i 确定后，总能有衍射角 θ 满足光栅方程。

§ 4.5 X射线的衍射

$$2d \cdot \sin \Phi = k\lambda$$

应用：

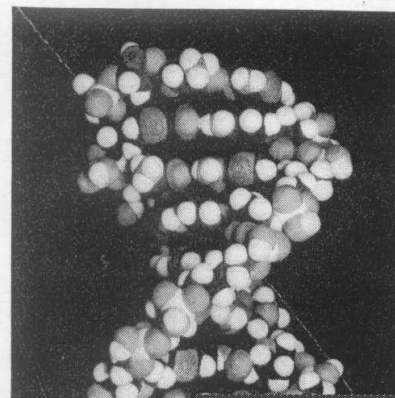
1. 已知 Φ , λ 可测 d ——X射线晶体结构分析。

研究晶体结构、材料性质。

2. 已知 Φ , d 可测 λ ——X射线光谱分析。

研究原子结构。

1953年英国的威尔金斯、沃森和克里克利用X射线的结构分析得到了遗传基因脱氧核糖核酸（**DNA**）的双螺旋结构，荣获了**1962**年度诺贝尔生物和医学奖。

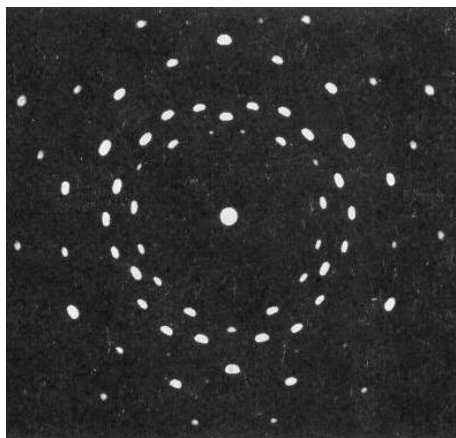


X-ray diffraction photographs such as this one led to the discovery of the double-helix form of the DNA molecule. A model of a small part of a DNA molecule is shown. A human DNA molecule, which is normally coiled and folded into a microscopic package called a chromosome, would be a meter or so long if stretched out. The development and functioning of every living organism

四. 实际观察X射线衍射的作法

1. 劳厄法:

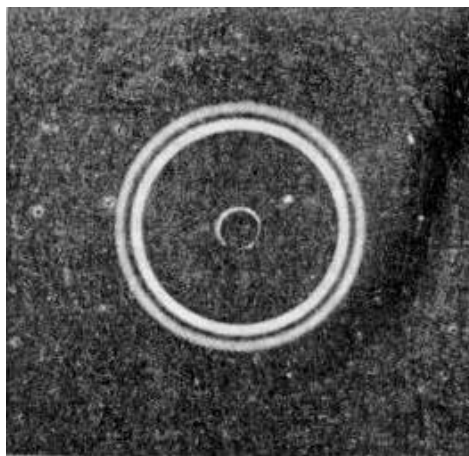
使用波长连续的X射线照射晶体，得到所有晶面族反射的主极大。每个主极大对应一个亮斑。



可定晶
轴方向

SiO₂ 的劳厄相

2. 粉末法:



可定晶
格常数

粉末铝的德拜相

用确定波长的 **X射线** 入射到多晶粉末上。大量无规的晶面取向，总可使布拉格条件满足。这样得到的衍射图叫 **德拜相**。

例：已知一波长为 2.96\AA 的 X 射线投射到一晶体上，所产生的第一级反射极大偏离原射线方向为 31.7° 。求相应于此极大的原子平面之间的距离。

解：由题意可知折射角 $\varphi = \frac{31.7^\circ}{2} = 15.85^\circ$

$$\text{又 } \because 2d\sin\varphi = \lambda$$

$$\therefore d = \frac{\lambda}{2\sin\varphi} = \frac{2.96}{2\sin 15.85^\circ} = 5.42 \text{ \AA} .$$



§ 4.6 全息照相

- 伽伯(D.Gabor) 1948年在提高电子显微镜的分辨率时提出，激光出现后很快发展

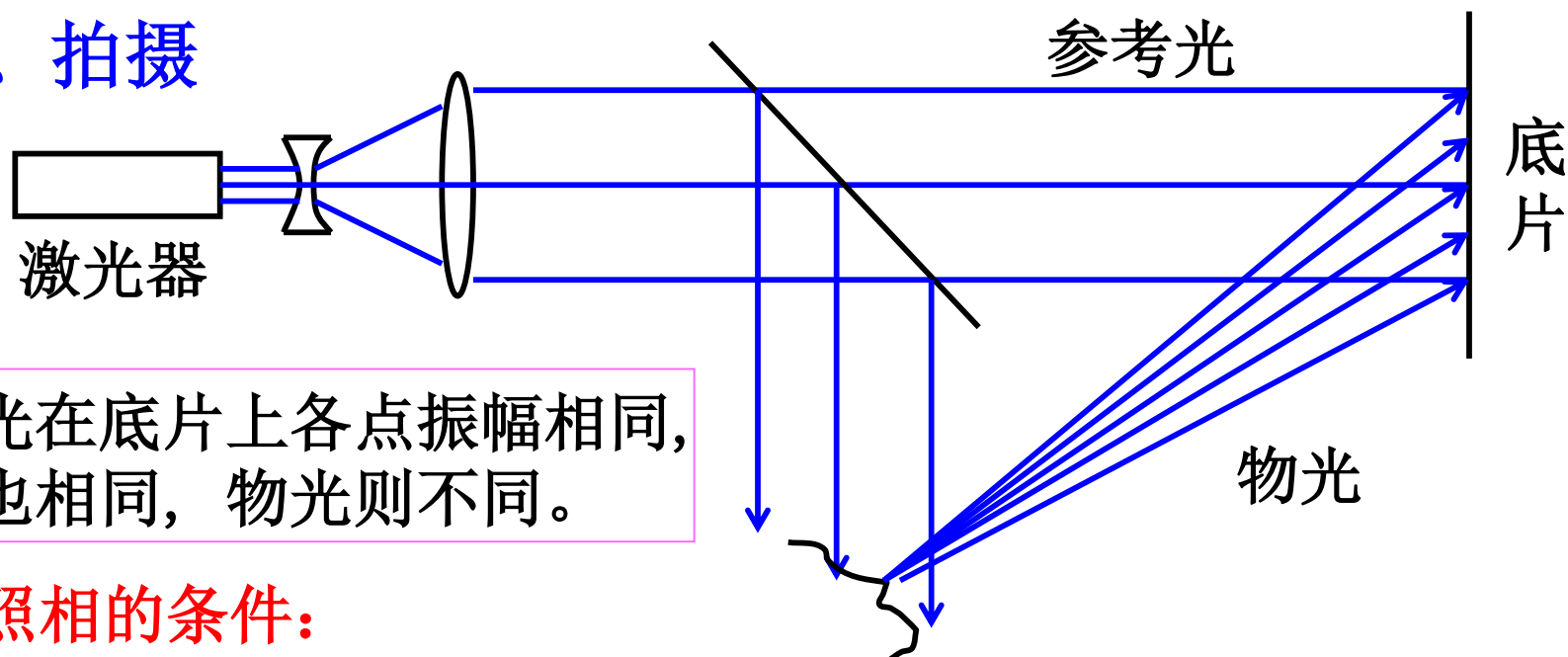
1、特点

	普通照相	全息照相
记录内容	振幅频率	振幅频率相位(全部信息)
理论	几何光学	波动光学(相干光源)
再现图像	平面	立体

全息照相的特征:

- (1) 丰富的立体（三维）像。相位记录
- (2) 可重复曝光。不同的参考光可记录不同的信息
- (3) 镜碎像全。任意部分均记录有全息干涉条纹

2、拍摄



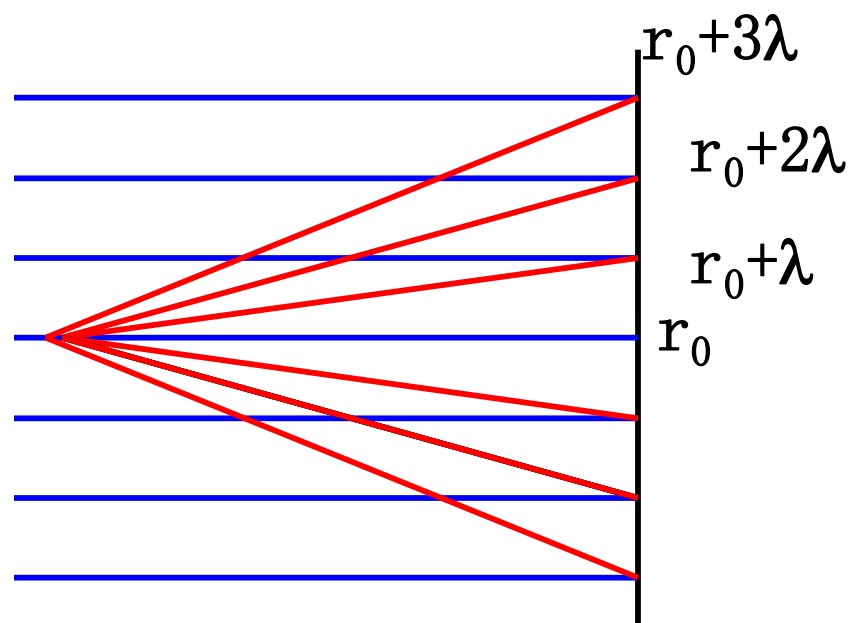
全息照相的条件：

- (1) 相干光源。通常采用相干长度极佳的激光光源
- (2) 防震。微小的相对运动均有可能改变光程差
- (3) 高分辨记忆材料。由于记录的是细致的干涉条纹，因而感光材料的分辨率必需足够高

分析一个点的物光

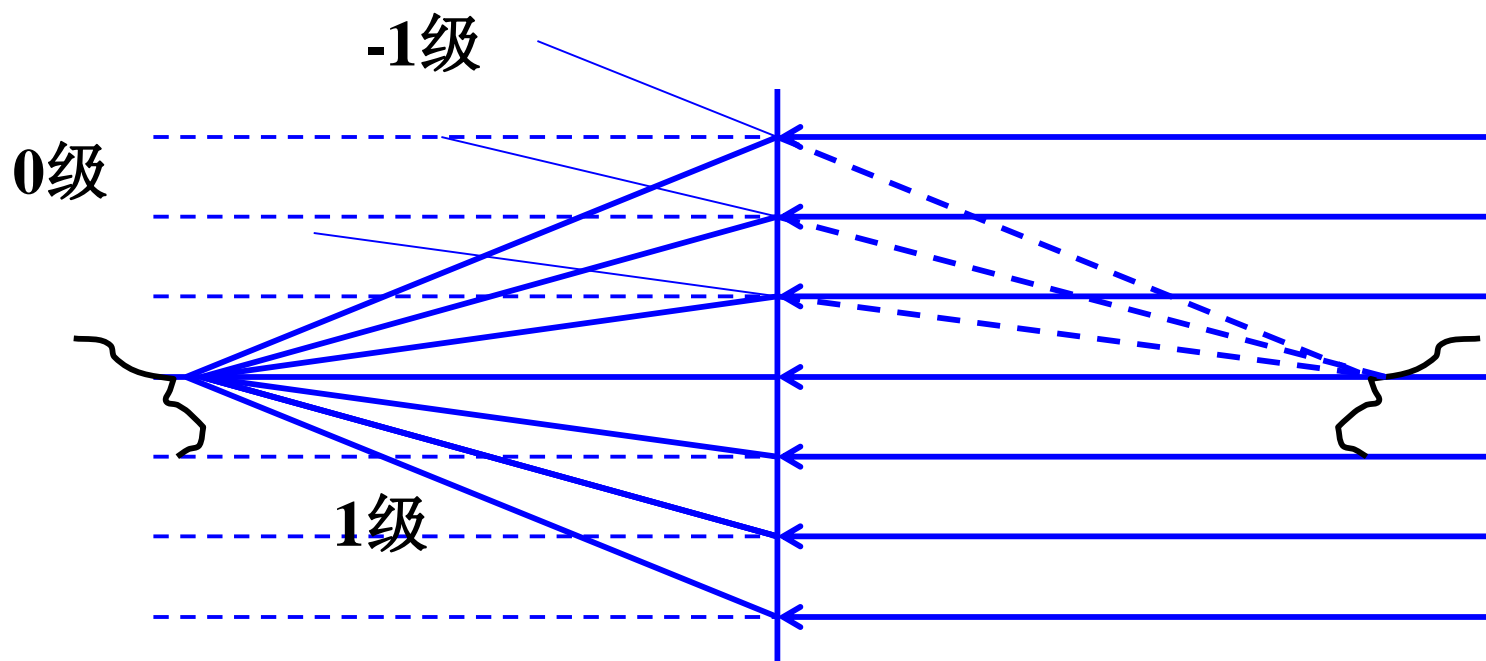
产生环状干涉条纹

对应卤化银干板，经显影和定影后，干涉极大处为暗环，制成正片后为亮环
全息照片为无数套环状条纹的叠加



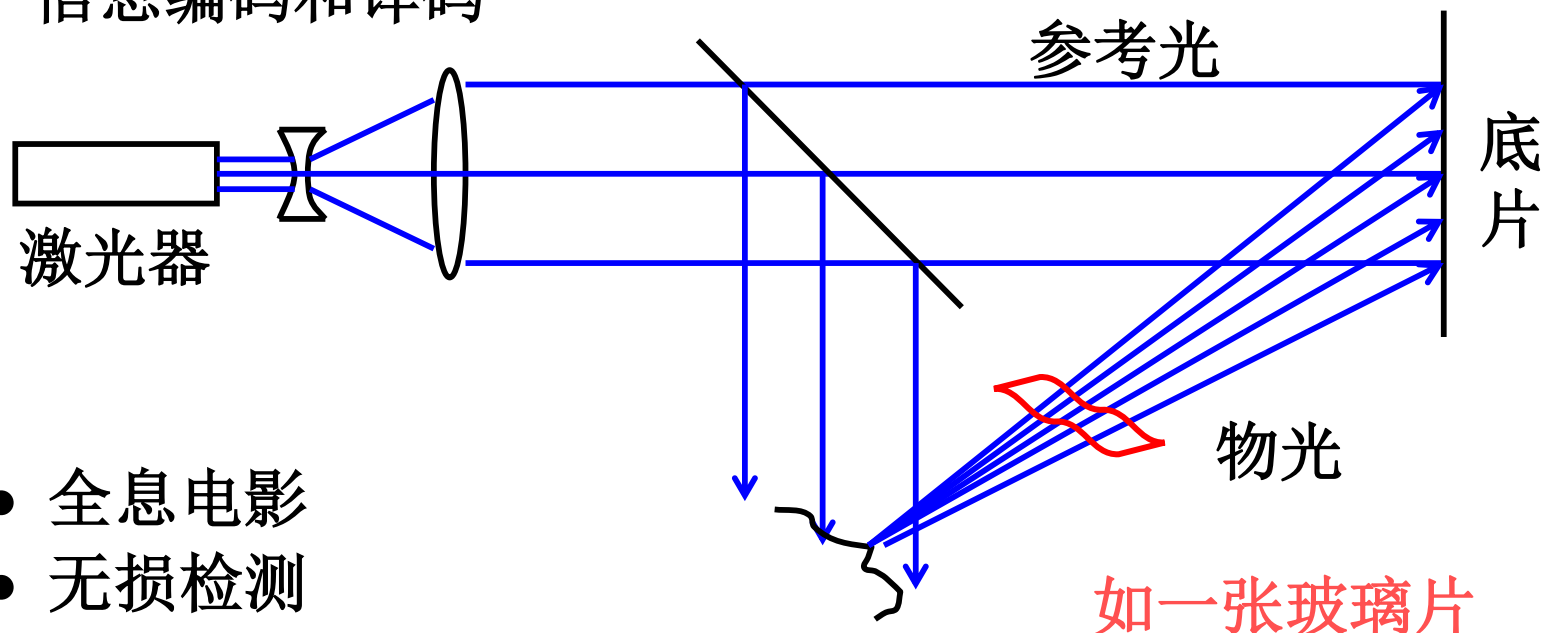
3、再现

用原波长的参考光照射，理论分析可知：全息底片构成的衍射光栅，透射光场主要有三部分，平行透射光（称为0级波）和 ± 1 级衍射光（称为 ± 1 级波）



4、应用

- 信息贮存 $10^6 - 10^9 \text{ bit/mm}^2$
- 信息编码和译码



- 全息电影
- 无损检测



衍射小结

1. 一个原理

惠更斯——菲涅耳原理

2. 两种方法

半波带法 振幅矢量法

3. 三类问题

单缝、圆孔衍射——单纯衍射

光栅、全息——衍射和干涉的综合

X光衍射——空间光栅，总体是衍射，
具体处理是多光束干涉

4. 四点结论

(1) 无论孔、缝，衍射都出现光的扩展

$a \gg \lambda$, $D \gg \lambda \rightarrow$ 几何光学

(2) 任何光学仪器都存在分辨率的问题

透镜:

$$R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda} \quad (\text{角})$$

光栅:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk \quad (\text{色})$$

(3) 光栅方程

$$d(\sin \theta - \sin i) = \pm k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

i : 入射角

θ : 衍射角

(4) 布喇格公式

$$2d \cdot \sin \Phi = k\lambda \quad k = 1, 2, \dots$$

Φ : 掠射角



Wilhelm Konrad Roentgen



22 Dec 1895



**Roentgen's X-Ray Tube
1895**

**Born: 27 March 1845 in Lennep, Prussia
(now Remscheid, Germany)**

Died: 10 Feb 1923 in Munich, Germany

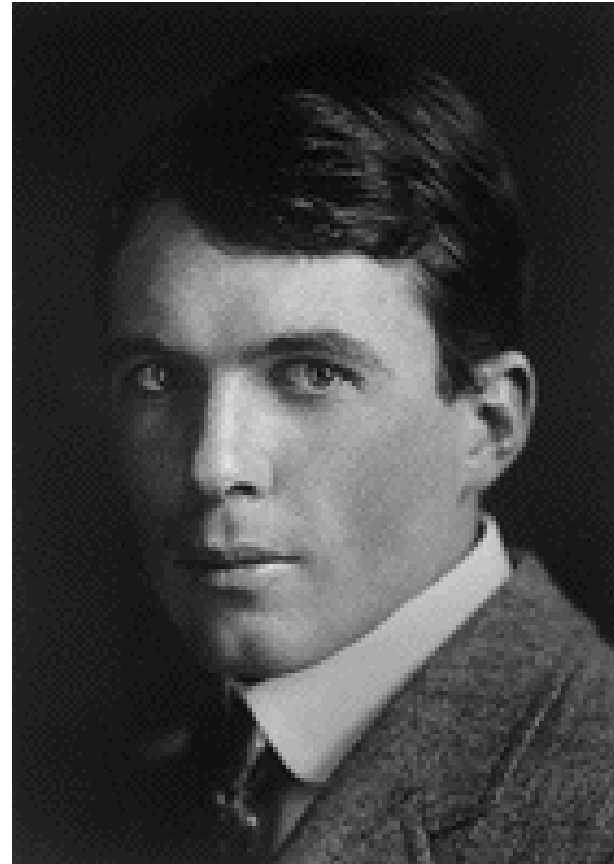
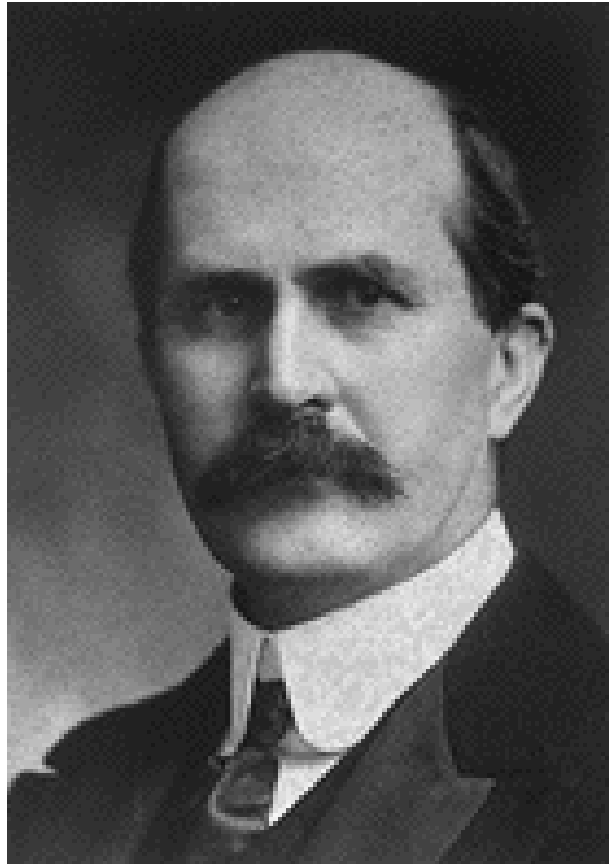
Max von Laue



awarded
the
Nobel
Prize for
Physics
in 1914

Born: 9 Oct, 1879 in Pfaffendorf, Germany
Died: 23 April, 1960 in Berlin, Germany

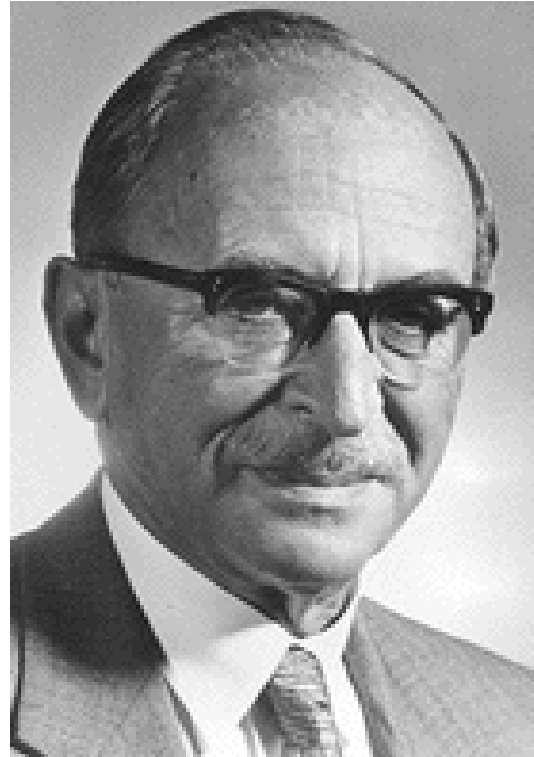
William Henry Bragg and William Lawrence Bragg



awarded the Nobel Prize for Physics in 1915₅₀



Dennis Gabor



Nobel Prize in
1971 for his
investigation
and
development
of holography

Born: June 5, 1900 in Budapest, Hungary
Died: February 9, 1979 in London

Dennis Gabor



"Train and Bird" is the first hologram ever made with a laser. This pioneer image was produced in 1964 by Emmett Leith and Juris Upatnieks at the University of Michigan only four years after the invention of the laser



This is the first full color hologram, a 4 x 5" full color one step white light transmission hologram by Dr. Stephen A. Benton, Herbert Mingace, Jr. and William R. Walter, The Polaroid Corporation, in 1979. (Photo by S.A. Benton, Collection of MIT Museum, Cambridge, MA)