

---

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{2}{x}} - 1 \right);$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1.  $\int \frac{2x^2 + 1}{x^2(1 + x^2)} dx;$

---

2.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}};$

3.  $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx;$

4. 求证:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx$ , 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1. 设  $u(x, y) = \ln \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ , 求  $du|_{(1,2)}$ .

2. 已知  $f(x, y, z) = 2xy - z^2$  及点  $A(2, -1, 1), B(3, 1, -1)$ , 求函数  $f(x, y, z)$  在点  $A$  处沿由  $A$  到  $B$  方向的方向导数, 并求此函数在点  $A$  处方向导数的最大值.

---

3. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $z^3 - 3xyz = 1$  给出, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1. 已知点  $A(2, 2, 2), B(4, 4, 2), C(4, 2, 4)$ , 求向量  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  的夹角.

2. 求经过直线  $L_1: \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y - z - 2 = 0, \end{cases}$  且平行于直线  $L_2: x = y = z$  的平面方程.

---

五.(7 分)求函数  $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$  的极值.

六.(12 分)设函数  $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$ , 求(1)函数的单调区间与极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

---

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$

2.设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0,1]$  上连续,在开区间  $(0,1)$  内可导,且  $f(0)=0, f(1)=1$ , 求证:

(1)存在  $\alpha\in(0,1)$ ,使得  $f(\alpha)=1-\alpha$ ;

(2)存在两个不同的点  $\xi\in(0,1), \eta\in(0,1)$ ,满足  $f'(\xi)f'(\eta)=1$ .