珠海校区2011学年度第一学期11级《高等数学二》期末考试题B

学院:__________ 专业:__________ 姓名:__________ 学号:__________ 评分:________

阅卷老师签名:_______________

警 示 **《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者，不授予学士学位。"**

一. （10分, 每小题5分）计算下列极限.

（1） $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+5)^2(e^{2x}-7)^5}{(e^{3x}+9)^4}$; （2） $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^{x^2}\cos t^2\,dt}{x}$.

解： (1) 原式$=1$.

(2) 原式$=\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{2x\cos x^4-\cos x^2}{1}=-1$.

二. （10分）设$f(x)=e^x\sin x,\ x\in[0,2\pi]$. 求单调区间, 拐点以及最大最小值.

解： $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$.

单调递增区间是$[0,3\pi/4]$, $[7\pi/4,2\pi]$; 单调递减区间是$[3\pi/4,7\pi/4]$.

$f''(x)=2e^x\cos x$; 拐点是$x=\pi/2,3\pi/2$.

$f(0)=0$, $f(3\pi/4)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$, $f(7\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi/4}$, $f(2\pi)=0$; 所以最大值是$f(3\pi/4)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$, 最小值是$f(7\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi/4}$.

三. （10分）函数$y=y(x)$由$ye^x+\ln y=1$确定. 求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：两边对x求导, 有$y'e^x+ye^x+y'/y=0$.

两边再对x求导, 有$y''e^x+2y'e^x+ye^x+y''/y-y'^2/y^2=0$, 得

$y''=\dfrac{y'^2/y^2-2y'e^x-ye^x}{e^x+\dfrac{1}{y}}$.

得$y'=-\dfrac{ye^x}{e^x+\dfrac{1}{y}}$.再把$y'$代入即得$y''$.

四.（20分, 每小题5分）计算下列不定积分.

（1）$\displaystyle\int\frac{x}{1+x^4}\,dx$;　　　　（2）$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$;

解：(1) 原式$=\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^4}\,dx^2=\frac{1}{2}\arctan x^2+C$.

(2) 令$x=\tan t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 有

$$\text{原式}=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

（3）$\displaystyle\int x^4\ln x\,dx$;　　　　（4）$\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$.

解：(3)

$$\text{原式}=\frac{1}{5}\int\ln x\,dx^5=\frac{1}{5}x^5\ln x-\frac{1}{5}\int x^4\,dx=\frac{1}{5}x^5\ln x-\frac{1}{25}x^5+C.$$

(4)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}\,dx+2\int\frac{1}{(x+2)}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x+3)}\,dx\\&=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.\end{aligned}$$

五.（20分, 每小题5分）计算下列定积分和反常积分.

（1）$\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$;　　　（2）$\displaystyle\int_{-1}^1 x^4(\tan^3 x+\sin^5 x)\,dx$;

解：(1)令$t=\sqrt{x}$.

$$原式 = \int_0^2 \frac{2t^2}{t+1}\,dt = 2\int_0^2 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\,dt$$
$$= 2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)|_0^2 = 2\ln 3.$$

(2) 由被积函数的奇偶性, 有, 原式$=0$.

（3）$\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(2x+10)|\,dx$;　　　（4）$\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

解：(3) 原式$=4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = 4.$

(4) 原式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx^2 = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}.$

六.（10分）求曲线$y=\sqrt{x}$, 和直线$x=0$, $y=1$所围成的图形的面积以及该图形绕x轴旋转形成的旋转体体积.

解：面积$=\displaystyle\int_0^1 1-\sqrt{x}\,dx = \left(x-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)|_0^1 = \frac{1}{3}.$

$$体积 = \int_0^1 \pi\,(1-x)\;dy = \pi\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

七.（5分）求曲线$\rho = 2(1+\cos\theta)$ 的长度.

解：$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta = 4\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 16.$

八.（5分）求微分方程$(2+x^2)y'+y+1=0$的通解.

解：分离变量得$\frac{1}{y+1}dy = -\frac{1}{2+x^2}dx.$

积分得通解$\ln|y+1| = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

九.（10分）求解初值问题：$xy'+y = x^5+x,\ y|_{x=1} = 1.$

解：有一阶线性微分方程: $y'+\frac{1}{x}y = x^4+1.$

解相应的齐次方程有$y = \frac{C}{x}.$

用常数变异法有通解$y = \frac{1}{6}x^5+\frac{1}{2}x+\frac{C}{x}.$

又由初值条件$y(1)=1$得$C = \frac{1}{3}.$

所以$y = \frac{1}{6}x^5+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3x}.$