

# 数学物理方法作业集

潘逸文<sup>\*</sup>, 余钊焕<sup>†</sup>

中国广州中山大学物理学院

December 16, 2019

## 简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文件也会每周更新, 可在 QQ 群文件, 或 <https://panyw5.github.io/courses/mmp.html> 以及 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

---

<sup>\*</sup>Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

<sup>†</sup>Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

## 1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{e}, \quad (b) 2 + \sqrt{2}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (d) \sqrt{3} + i \text{ 的所有 } 7 \text{ 次方根} \quad (1.1)$$

2. 定义点集  $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0, R)\}$ , 其中  $R > 0, N = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}_{>0}$ . 讨论  $S_N$  与  $S_{N+1}$  之间谁是谁的子集, 是否真子集, 写明推理。

3. 设点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ , 其中  $R > 0$ . 求解最大的  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对于任意  $S$  的内点  $z$ ,  $z^N$  都还是内点。写明推理。

4. 考虑点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$ , 其中  $R > 0$ .  $S$  是否区域? 是否单连通? 写明推理。

## 2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. (若上周没做这道题) 考虑点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$ , 其中  $R > 0$ .  $S$  是否区域? 是否单连通? 写明推理。

1. 用代数式 (即  $x + iy$  的形式) 表达以下复数, 其中  $a, b \in \mathbb{R}, i$  是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设  $u(x, y) = e^x \sin y, v(x, y) = -e^x \cos y$ , 并考虑复变函数  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ . 验证  $w$  是  $\mathbb{C}$  上解析函数。

3. 设  $f$  为区域  $D$  内解析函数, 同时, 其值域是  $\mathbb{R}$  的子集。求证  $f$  是常数函数。

4. 设解析函数  $f(z)$  的实部  $u(x, y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$ , 求其虚部, 并把  $f$  的表达式改写为只含  $z$  的表达式。

## 3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算  $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$  和  $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$ , 其中  $C_1$  和  $C_2$  分别是上半圆周 (半径  $R > 0$ , 逆时针方向) 和下半圆周 (半径  $R > 0$ , 逆时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数  $f$  在单连通区域  $D$  内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续,  $G \subset D$  是其单连通子区域并有  $G \cup \partial G \subset D$ . 证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元  $d\bar{z}dz = 2idxdy$ 。

## 4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (4.1)$$

1. 计算围道积分, 其中  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\oint_C \left(z + \frac{\lambda}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.2)$$

2. 计算围道积分,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.3)$$

## 5 第五周 (10 月 8 日交; 作为一次考察)

1. 设函数  $f(z)$  在  $\overline{N(0, R)}$  上解析。计算积分

$$\oint_C f(z) \bar{z}^{n+1} dz, \quad C = \partial N(0, R). \quad (5.1)$$

其中  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R > 0$ 。

2. 考虑级数  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$ , 其中  $r_k = (-1)^{k^2}$ ,  $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$ 。分情况  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  讨论级数是否收敛, 是否绝对收敛, 给出简要说明。

3. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n. \quad (5.2)$$

4. 设  $f(z)$  是  $N(0, 1)$  内的解析函数。计算  $(1-z)^{-1}f(z)$  以原点  $a = 0$  为中心的泰勒展开 (给出泰勒级数通项, 用  $f$  的各阶导数表达)。

5. 考虑 3 个互异复数  $a_i, i = 1, 2, 3$ 。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} dz, \quad (5.3)$$

其中  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$ 。化简最后结果。

## 6 第七周 (10 月 15 日交)

$$u(x, y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} . \quad (6.1)$$

设  $u(x, y)$  是在某区域内解析的复变函数  $f(z = x + iy)$  的实部。

- (1) 用共轭调和函数方法求  $f(z)$  的虚部  $v(x, y)$ , 并写出函数  $f(z)$  关于  $z = x + iy$  的表达式;
- (2) 指出  $f(z)$  的奇点以及所属分类;
- (3) 分别以  $z = 0, z = 1, z = -1$  为展开中心, 作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1}, \quad n \in \mathbb{N} . \quad (6.2)$$

- (1) 列举  $f(z)$  以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域;
- (2) 以原点为展开中心, 在上述每一个解析区域内写出  $f(z)$  的 Laurent 或 Taylor 展开  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k z^k$ , 并比较展开系数  $\lambda_{k \geq 0}$  与  $f^{(k)}(0)/k!$  是否相等 (可为一般  $n$  和  $k$  计算通项然后比较, 也可取  $n = 2, k = 1, 2, 3$  然后比较)。

## 7 第八周 (10 月 22 日交)

1. 计算下面函数在  $z = 0$  的留数

$$(a) \frac{\cos z}{z^3}, \quad (b) \frac{e^z}{z^3} . \quad (7.1)$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a) \frac{1}{\sinh \pi z}, \quad z = ni, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (b) \frac{e^z}{z^2 - 1}, \quad z = 1 . \quad (7.2)$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a) \oint_{|z|=\rho>1} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz, \quad (b) \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n}} dz, \quad n = 1, 2, \dots . \quad (7.3)$$

4. 利用留数定理计算积分

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)} dx, \quad m \in \mathbb{Z}_+, a > 0 \quad (7.4)$$

## 8 第九周 (11 月 5 日交; 作为期中考察)

1. 列出以下函数的 (除无穷远点外) 的所有孤立奇点及其类型。

$$(a) \frac{z}{(\sin z)^3}, \quad (b) \frac{1}{z^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (c) \cosh \frac{1}{z}. \quad (8.1)$$

2. 考虑互异有限复数  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ , 且  $m > n$ , 定义函数

$$f(z) \equiv \frac{(z - a_1) \dots (z - a_n)}{(z - b_1) \dots (z - b_m)}. \quad (8.2)$$

(a) 记  $D$  为  $f(z)$  的解析区。则  $b_j$  和  $a_i$  为  $D$  的什么点 (内点、聚点、边界点)?  $D$  是单连通还是复连通?

(b) 说明  $a_i$  和  $b_j$  分别是  $f(z)$  的什么特殊点, 指出分类。

(c) 求  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ , 指出  $\infty$  的奇点分类, 并计算  $\text{Res}_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 。

3. 考虑双边幂级数

$$\Theta(\zeta; q) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n^2}{2}} \zeta^n, \quad |q| < 1. \quad (8.3)$$

(a) 求该  $\zeta$ -双边级数的收敛环。

(b) 求积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\Theta(\zeta; q)}{\zeta^n} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.4)$$

(c) 定义  $\vartheta(z|\tau) \equiv \Theta(e^{2\pi i z}; e^{2\pi i \tau})$ ,  $\text{Im } \tau > 0$ 。证明  $\vartheta(x|it)$  是某热扩散方程

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \quad (8.5)$$

的一个解, 并确定参数  $a^2$  的值。

4. 深受广大人民群众喜爱的  $\Gamma$  函数是自然数的阶乘函数的一种解析延拓。当  $\text{Re } z > 0$ , 定义

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx. \quad (8.6)$$

(a) 证明当  $\text{Re } z > 0$ , 有  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 。

(b) 求  $\Gamma(1)$ , 并推出  $\Gamma(n+1) = n!$ 。

(c)  $\Gamma(z)$  可以解析延拓到几乎整个复平面。证明  $0, -1, -2, \dots$  等非正整数为延拓后  $\Gamma(z)$  的单极点。

(d) 求  $\text{Res}_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)$ 。

5. 弦在阻尼介质中横向振动,  $t$  时刻  $x$  处单位长度所受阻力 (与振动方向相反) 为

$$F(x, t) = -R \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (8.7)$$

其中  $R$  称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

## 9 第十一周 (11 月 12 日交)

1. 长为  $l$  的均匀导热细杆, 热导率为  $k$ , 侧面绝热。  $x = 0$  端的温度保持为 0 度,  $x = l$  端有恒定热流进入, 强度为  $q$ 。已知杆的初始温度分布为  $x(l - x)$ , 写出杆内任意时刻温度分布的定解问题。

2. 长为  $l$  的弹性细杆, 上端固定在电梯天花板, 杆身竖直, 下端自由。杆随电梯匀速下降, 速度为  $v_0$ , 杆上各点处于平衡位置。  $t = 0$  时电梯突然停止, 求解  $t > 0$  时杆的纵振动。不考虑重力作用。

(1) 写出关于位移  $u(x, t)$  的定解问题。

(2) 利用分离变量法, 寻找  $u(x, t) = X(x)T(t)$  形式的特解, 推出  $T(t)$  满足的常微分方程和  $X(x)$  满足的本征值问题。

(3) 求解关于  $X(x)$  的本征值问题, 得出相应的本征值和本征函数。

(4) 求解  $T(t)$ , 写出一组解  $u(x, t)$ 。

(5) 根据初始条件求出一组解的系数, 写下定解问题的解。

## 10 第十二周 (11 月 19 日交)

1. 矩形薄板, 板面绝热,  $x = 0, l$  两边保持恒定温度零度,  $y = 0, d$  两边绝热, 初始温度分布为  $f(x, y) = u_0 x/l$ , 其中  $u_0$  为常数, 求以后的温度分布, 并讨论  $t \rightarrow \infty$  的极限。

2. 长为  $l$  的柱形管,  $x = 0$  端开放,  $x = l$  端封闭。管外空气中含有某种杂质气体, 浓度为  $u_0 e^{-\alpha^2 t}$ , 其中  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq \mu_n a$ , 而  $\mu_n = (2n - 1)\pi/2l$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ 。杂质向管内扩散。设初始时管内没有该种杂质, 求以后时刻该杂质在管内的浓度分布  $u(x, t)$ 。

## 11 第十三周 (11 月 26 日交)

1. 半圆形薄板, 半径为  $a$ , 用坐标描述即  $\rho \leq a$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ 。板面绝热, 直边保持温度为 0 度, 弧边保持温度为常数  $u_0$ , 求稳定状态下板面上的温度分布。

2. 计算下列函数  $f(x)$  的 Fourier 变换  $F(k)$ 。

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{l}, & |x| < l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases} \quad (2) f(x) = e^{-a|x|}, \text{ 其中 } a > 0.$$

## 12 第十四周 (12 月 3 日交)

1. 用 Fourier 变换法求解如下定解问题,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad y > 0), \quad (12.1)$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=+\infty} = 0, \quad (12.2)$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0. \quad (12.3)$$

并在下列两种情形下计算解  $u(x, y)$  的具体形式。

$$(1) \varphi(x) = \delta(x). \quad (2) \varphi(x) = \theta(x), \text{ 其中阶跃函数 } \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos ax \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad b > 0. \quad (12.4)$$

$$2. \text{ 证明 } \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \text{ 其中 } a \neq 0.$$

$$3. \text{ 计算函数 } f(x) = \cos ax \text{ 的 Fourier 变换 } F(k).$$

## 13 第十五周 (12 月 10 日交)

1. 试在平面极坐标系中对二维齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0 \quad (13.1)$$

分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

2. 在量子力学中，氢原子定态问题的 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 u - \frac{e^2}{r} u = Eu, \quad (13.2)$$

其中  $u(r, \theta, \phi)$  是波函数， $\mu$  是电子质量， $e$  是单位电荷量， $E$  是能量， $\hbar$  是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对方程分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

## 14 第十六周 (12 月 17 日交)

1. 根据递推关系

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2 k}, \quad k \in \mathbb{N}^+, \quad (14.1)$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \quad (14.2)$$

2. 在  $x_0 = 0$  的邻域上求解 Hermite 方程

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0. \quad (14.3)$$

(1) 当  $\lambda$  取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数, 可以使多项式解的最高次幂项具有  $(2x)^n$  形式, 这些多项式称为 Hermite 多项式, 记作  $H_n(x)$ 。求出 Hermite 多项式的显式。

(3) 写出前 6 个 Hermite 多项式的具体形式。

## 15 第十七周 (12 月 24 日交)

1. 在  $x_0 = 0$  的邻域上求解 Laguerre 方程

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0. \quad (15.1)$$

(1) 当  $\lambda$  取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数, 可以使多项式解的最高次幂项具有  $(-x)^n$  形式, 这些多项式称为 Laguerre 多项式, 记作  $L_n(x)$ 。求出 Laguerre 多项式的显式。

(3) 写出前 4 个 Laguerre 多项式的具体形式。

2. 长为  $l$  的均匀细杆, 侧面绝热, 左端保持恒定温度零度, 右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量, 即右端边界条件为

$$\left(u + h \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big|_{x=l} = 0, \quad h > 0. \quad (15.2)$$

已知  $u|_{t=0} = \varphi(x)$ , 求杆上温度的变化规律。