珠海校区2008学年度第一学期08级
《高等数学二》期末考试题A答案

学院:__________ 专业:__________ 学号:___________ 姓名:___________ 评分:_____

阅卷老师签名:_________

警示 **《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”**

一、(本题共五小题，共31分)

1、(本小题5分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,且$f(1)=2$, 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^{x^2}f(t)dt$.

解: 由于$f(x)$连续,则$\displaystyle\int_1^{x^2}f(t)dt$可导. 由洛必达法则知,

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to1}2xf(x^2)=2f(1)=4.$$

2、(本小题5分) 设$f(0)=1, f(1)=2, f'(1)=5$, 求$\displaystyle\int_0^1 xf''(x)dx$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf''(x)dx &= \int_0^1 xdf'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)dx\\ &= f'(1)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-[f(1)-f(0)]=5-(2-1)=4.\end{aligned}$$

3、(本小题6分) 设函数$f(x)=x-2\sin x$, 求$f(x)$在$[0,\pi]$的最值.
解: 显然$f(x)$在$[0,\pi]$上连续可导, 且$f'(x)=1-2\cos x$. 由$f'(x)=0$解得在$[0,\pi]$中唯一的驻点$x=\dfrac{\pi}{3}$. 计算得

$$f(0)=0,\qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},\qquad f(\pi)=\pi.$$

从而有$f(\pi)>f(0)>f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. 故$f(x)$在$[0,\pi]$的最大值是$\pi$, 最小值是$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$.

4、(本小题7分) 设参数方程$\begin{cases}x=\displaystyle\int_t^0 u^3\sin(u^2)du,\\ y=\displaystyle\int_1^{t^2}u^2\sin u\,du\end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: 计算得

$$\frac{dx}{dt}=-t^3\sin(t^2),\qquad \frac{dy}{dt}=(t^2)^2\sin(t^2)\cdot(2t)=2t^5\sin(t^2).$$

从而有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2t^5\sin(t^2)}{-t^3\sin(t^2)}=-2t^2.$$

又由于

$$\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}=-4t,$$

因此

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-4t}{-t^3\sin(t^2)}=\frac{4}{t^2\sin(t^2)}.$$

5、(本小题8分) 求微分方程$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$的通解.
解: 用分离变量法解微分方程$y'+y\cos x=0$得到通解$y=Ce^{-\sin x}$, 其中C为任意实数. 再利用常数变易法, 可设所求微分方程$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$的通解为$y=C(x)e^{-\sin x}$. 则代入方程并化简得

$$C'(x)e^{-\sin x}=e^{-\sin x},$$

即$C'(x)=1$. 从而$C(x)=\int dx=x+C_1$, 其中C_1为任意实数. 故所求的通解为

$$y=(x+C_1)e^{-\sin x}.$$

二、求下列不定积分(共三小题，每小题6分，共18分)

1、 $\int \sin^3 x\cos x\,dx$; 2、$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}dx$; 3、$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.

解:

1、

$$原式=\int \sin^3 x d\sin x=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

2、 令$u=\sqrt{x-1}$, 则$x=u^2+1$, 从而$dx=2udu$. 故

$$\begin{aligned}原式 &= \int\frac{2u}{u+1}du=2\int\left[1-\frac{1}{u+1}\right]du=2\left(u-\ln|1+u|\right)+C\\ &= 2[\sqrt{x-1}-\ln(1+\sqrt{x-1})]+C.\end{aligned}$$

3、

$$\begin{aligned}原式 &= \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-5}{x-2}+\frac{5}{x-3}\right)dx\\ &= \ln|x-1|-5\ln|x-2|+5\ln|x-3|+C.\end{aligned}$$

三、求下列积分(共四小题，前三小题各6分，第四小题8分，共26分)

1、$\int_{-1}^{1}|x|(\sin^3 x+1)dx$; 2、$\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$; 3、$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

4、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$ 求$\int_{-1}^{2}f(x-1)dx$.

解：

1、 由于$|x|\sin^3 x$是奇函数,$|x|$是偶函数, 因此

$$原式=\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_0^1 xdx=x^2\Big|_0^1=1.$$

2、

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec u\,d\tan u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 u\,du.$$

记$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 u\,du$. 故

$$\begin{aligned}I &= \sec u\tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan u d\sec u=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 u\sec u du\\ &= \sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 u-1)\sec u du=\sqrt{2}-I+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec u du\\ &= \sqrt{2}-I+\ln|\sec u+\tan u|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-I+\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

因此, 原式 $=I=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

3、 $x=0$和$x=1$都是瑕点. 当$0<x<1$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

由于$\arcsin\sqrt{x}$在$[0,1]$上连续，因此

$$原式=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_0^1=2\times\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi.$$

4、

$$\int_{-1}^{2}f(x-1)dx=\int_{-2}^{1}f(t)dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{-2}^{0}\frac{1}{1+e^t}dt.$$

由于

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\frac{1}{1+e^t}dt &= \int_{2}^{0}\frac{1}{1+e^{-u}}d(-u)=\int_0^2\frac{e^u}{e^u+1}du\\ &= \ln(e^u+1)\Big|_0^2=\ln(e^2+1)-\ln 2,\end{aligned}$$

因此原式 $=\dfrac{\pi}{4}+\ln(e^2+1)-\ln 2.$

四、 (本题10分) 先求曲线$y=\sqrt{x}$与直线$y=x$所围成的平面图形的面积, 再求该图形绕x轴旋转而形成的旋转体的体积.

解: 由$\sqrt{x}=x$解得$x_1=0, x_2=1$. 则该平面图形的面积为

$$A=\int_0^1|\sqrt{x}-x|dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

而所得的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1\left[(\sqrt{x})^2-x^2\right]dx=\pi\int_0^1(x-x^2)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

五、(本题15分)求微分方程$y''-2y'+y=\sin x+xe^x$的通解.

解：由齐次方程$y''-2y'+y=0$所对应的特征方程为$\lambda^2-2\lambda+1=0$, 解得$\lambda=1$. 故齐次方程$y''-2y'+y=0$的通解为$y=C_1e^x+C_2xe^x$, 其中C_1, C_2为任意实数. 由叠加原理知,微分方程$y''-2y'+y=\sin x+xe^x$有一个特解

$$y^*=d_1\sin x+d_2\cos x+(d_3x+d_4)x^2e^x,$$

其中d_1, d_2, d_3, d_4为待定常数. 将y^*代入方程并解得

$$d_1=0,\qquad d_2=\frac{1}{2},\qquad d_3=\frac{1}{6},\qquad d_4=0.$$

故特解$y^*=\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{6}x^3e^x$. 从而所求微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$