电动力学 第六章
狭义相对论

相对论本不是什么一时冲动产生的头脑中的智力玩具，而是植根于自然的朴素产物，**它是电磁理论对时空的一种要求和规范，**只不过由于（以Galileo变换为特征）旧的绝对时空观理念一直以来在人们头脑里已经根深蒂固，习以为常，使得我们认为时间、空间分离是理所当然，而（以Lorentz变换为特征的）新的时空观则颠覆了传统的习以为常的观念，认为时间与空间不能截然分开，并且时间、空间的测量是与观测者自身的运动状态有关，由此引起了一系列广泛而深刻的物理变革。

我们从Maxwell方程组出发，基于物理学上的两个基本原理：**相对性原理**和**相位差不变性**，由此演绎出狭义相对论，而光速不变原理作为一个推论而自然得到。

20世纪理论物理学的三个主旋律：量子化、对称、相位因子

电磁理论中的规范不变性（对称性）与相位因子有着密切关系。

归纳一下，我们的生活经验：

在不同的惯性参照系（地面、匀速火车、.....），时间的流逝是一样快慢的（绝对的）

在不同的惯性参照系（地面、匀速火车、.....），尺子长度标准都是一样的（绝对的）

我们把它视为金科玉律，理所当然，从不怀疑。

Galileo 变换和力学相对性原理：

- 绝对时空观：

  在牛顿力学中,空间和时间不仅被看成为同物质一样独立存在,并且具有绝对的意义(与物体的运动无关). 一切物体的运动都可用空间和时间坐标来表示——称为参照系，并且存在一种地位优越的参照系——惯性系.

- 力学相对性原理(Galileo,1632年)

(a) 一切力学规律对一切惯性系都是等价的,不存在一个优越的绝对惯性系;

(b) 力学规律在所有做相互匀速运动的惯性系都具有相同形式;

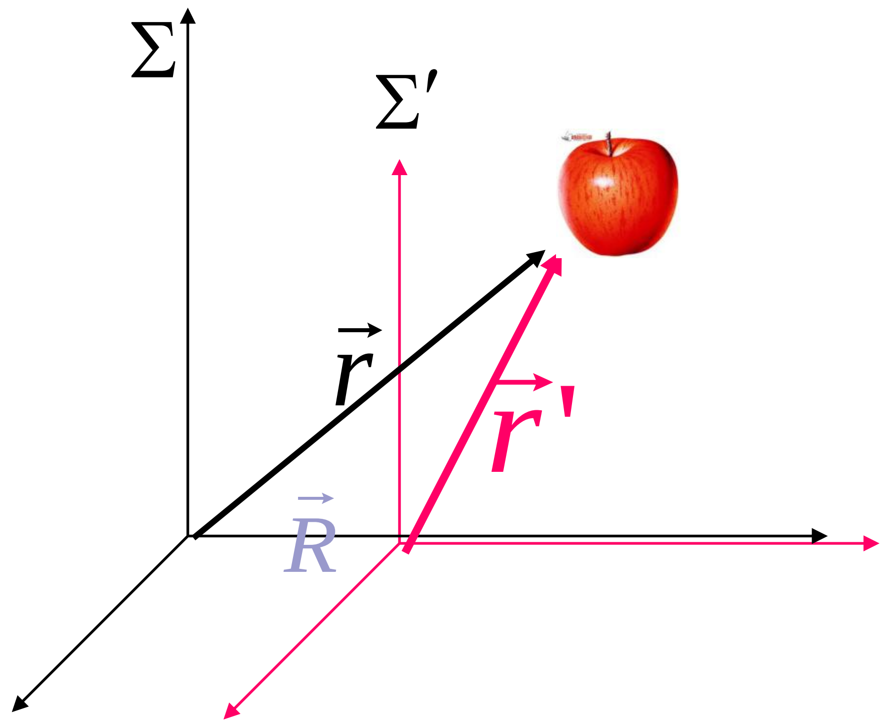
- 根据绝对时空观,

(i) 两个参考系的时间

(时间坐标是绝对的)

(ii) 在不同参照系中,长度是绝对的(共用一把尺)

- 设Σ 和Σ'互为惯性系,两个观察者分别这两个系中观察同一物体运动.



两个惯性系之间时空的变换_____Galileo变换

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$t = t'$$

$$x = R + x'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

经典速度合成公式: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}\,'$

且加速度满足: $\vec{a} = \vec{a}\,'$

经典力学认为，无论两个惯性系的相对速度$\vec{V}$ 如何,均有:

$$m = m' = const$$
$$l = l'$$
$$t = t'$$

即质量、长度和时间的测量与运动无关

因此经典力学的基本定律———牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

对任意惯性系都有相同的形式———牛顿定律在Galileo 变换下具有协变性。

协变性———物理定律的数学形式保持不变

但是这个结论不能推广到电磁领域中，在Galileo变换下，电磁规律的形式走样了，（电磁规律在Galileo 变换下不具有协变性）。

旧时空观与电磁学的矛盾

Maxwell方程组

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

电磁波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$
$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 km/s$$

电磁波的传播速度是一个常数，与惯性系的选择无关

结论：电磁波的速度不满足经典速度合成公式!!!

当一列波的相位变化了 2π ，相当于波完成一个循环振动，通俗来说就是波经历了一次大起大落，因此相位变化代表的是波动周期的计数，是一个客观反映波动状态循环的一个数。

不管观察者是面对静止波源来观察，还是迎向波源运动来观察，只要他接收到波的一次潮起潮落，他就能说观察到波的相位变化了 2π ，即不同的惯性系上的观察者都应该观测到这列波**相同**的相位变化，相位变化不应该随观测者所处参照系的不同而不同。

相位差不变性：

当波的传播经历若干个周期后，不同的参照系理应观测到相同的相位变化，它是一种物理对称性的体现，是物理学上的一个基本的理念。

以平面电磁波为例

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

色散关系： $\omega = kc$

在Galileo变换下，相位从一个惯性系变换到另一个惯性系

$$\phi = kx - \omega t = k\left(x' + vt'\right) - \omega t' = kx' - \omega t' + kvt' \neq kx' - \omega t' = \phi'$$

不能同时满足相位不变性和色散关系

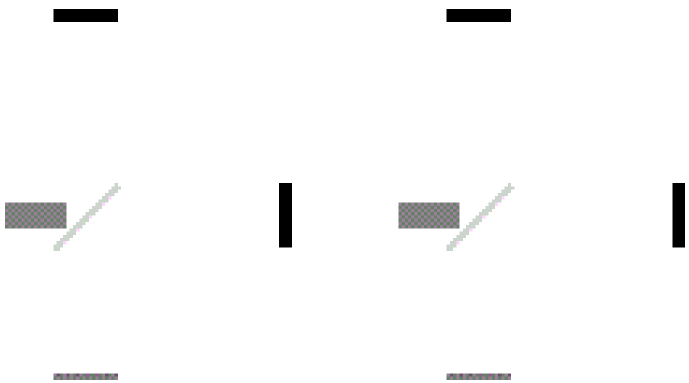
有三种可能（解决的途径）：

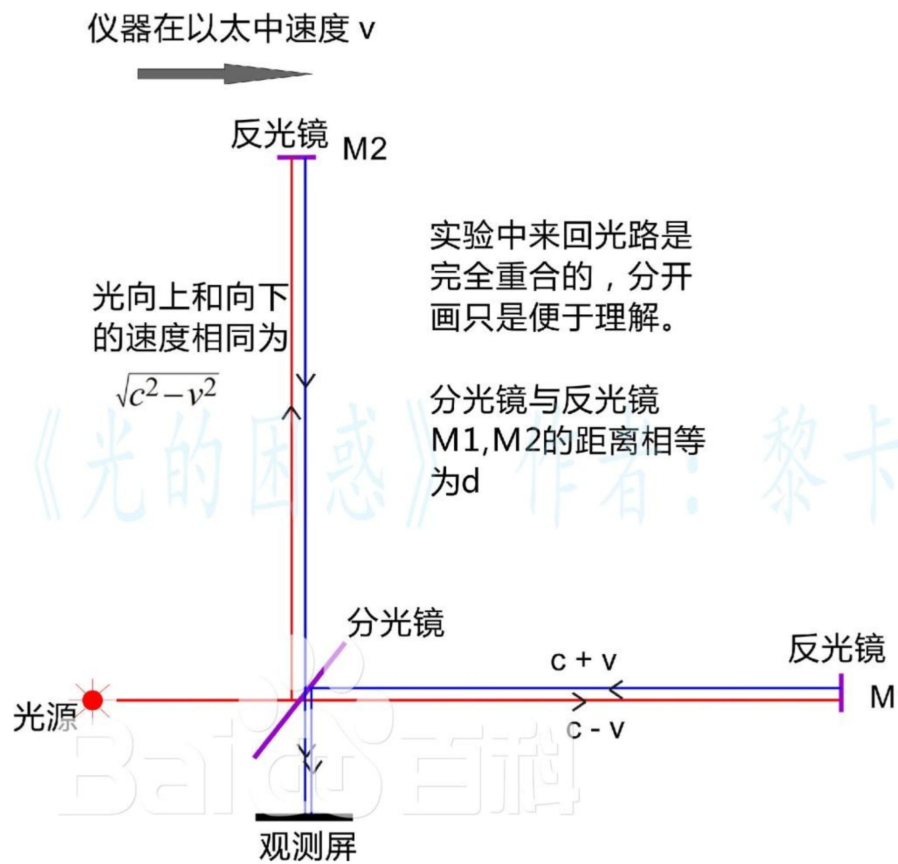
（1）Galileo变换是对的，Maxwell方程组是错的，真正的电磁学理论在Galileo变换下是不变的；

（2）Galilieo变换是对的，Maxwell方程组也是对的，但电磁学只使用于某个特殊参照系（称为以太参照系），亦即Maxwell方程组并不反映电磁现象的普遍规律；

（3）Maxwell方程组是对的，反映了电磁现象的普遍规律，Galileo变换是错的，存在一种既适用于经典力学又适用于电磁学的相对性原理；

Michelson-Morley实验原理





传统Lorentz变换的推导

相对性原理：

所有的物理定律在一切的惯性系中都具有相同的形式；

没有任何实验能够在不同的惯性系之间做作出本质的区分，这是强加于物理定律之上的约束，源自于高于物理定律的对称性要求。

光速不变性：

在任意的惯性系中光速都是相同的，并与惯性系的速度无关；

Lorentz变换的另一种推导

对称性要求

相位差不变性　　相对性原理

物理规律

Maxwell方程组

Lorentz变换

光速不变原理作为一个推论而自然得到

对称性要求 → 相位差不变性、相对性原理

物理规律 → Maxwell方程组

两惯性系观察到的波的相位差一定是相同的

两惯性系的时空变换一定是线性变换

波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = -\frac{\omega'^2}{c^2} + k'^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi &= kx - \omega t \\ \phi' &= k'x' - \omega' t' \\ \phi &= \phi' \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Lorentz 变换——满足相对性原理两假设的时空变换

（一）变换应满足惯性系概念的要求(时空是均匀的)——变换应是线性的

$$x' = a_{11}x + a_{14}t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = a_{41}x + a_{44}t$$

在垂直于相对运动的方向上，空间变换是平庸的（长度没有变化）

假若变换是非线性的，设 $x' = x^2$

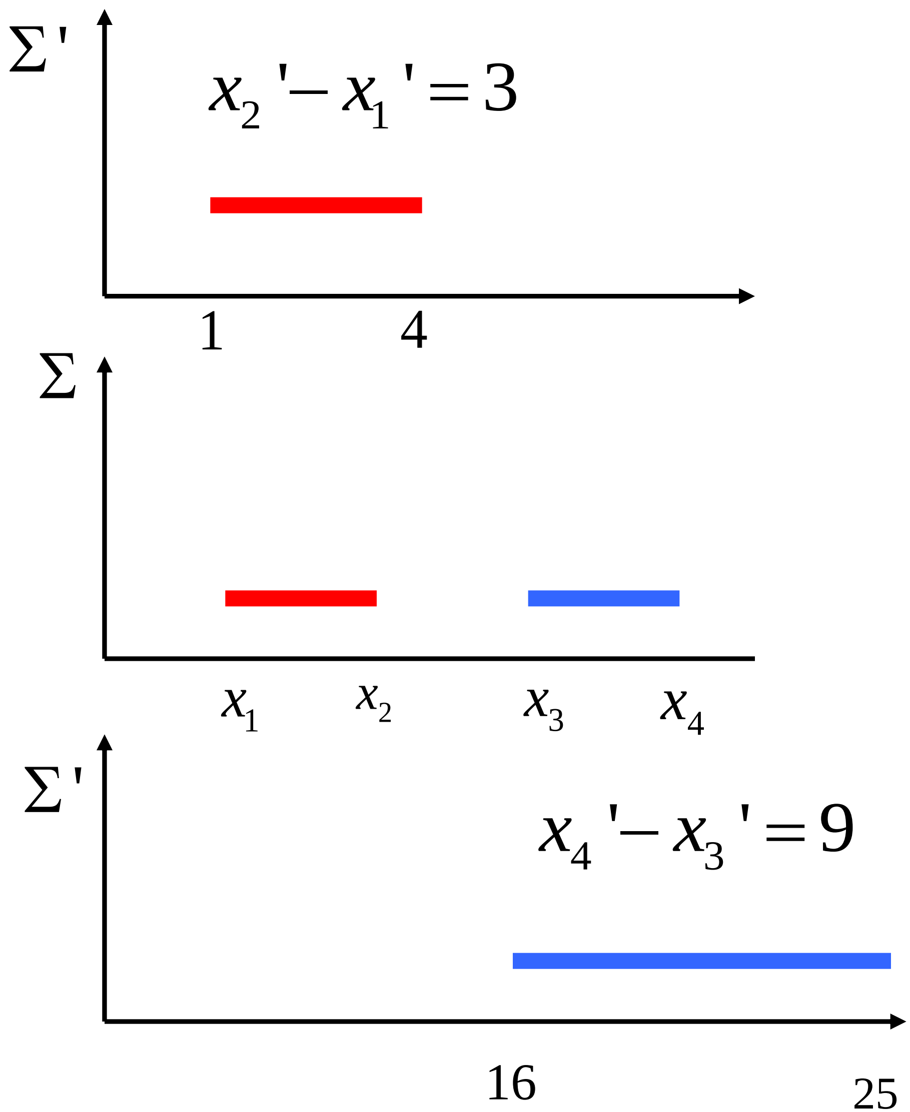
有一单位尺

- 若在 Σ 中端点放在 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

  则在Σ'中，有 $\begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = 4 \end{cases}$

- 若在 Σ 中端点放在 $\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$

  则在Σ'中，有 $\begin{cases} x_3' = 16 \\ x_4' = 25 \end{cases}$



结论：测得的尺长与位置有关，即Σ'的空间结构不均匀

考虑一列沿 $\vec{k}$ 方向传播的平面电磁波

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

波矢可分解为： $\vec{k}=\vec{k}_x+\vec{k}_y+\vec{k}_z$ 我们生活的空间是三维的，因此波矢有三个分量

波的相位

$$\phi'=\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega' t'=k_x' x'+k_y' y'+k_z' z'-\omega' t'$$

变换到另一惯性系

$$\phi'=k_x'(a_{11}x+a_{14}t)+k_y' y+k_z' z-\omega'(a_{41}x+a_{44}t)=(k_x' a_{11}-\omega' a_{41})x+k_y' y+k_z' z-(a_{44}\omega'-k_x' a_{14})t$$

由相位不变性，于是得到在两套惯性系下频率和波矢的变换关系：

$$k_x=k_x' a_{11}-\omega' a_{41}$$

$$k_y=k_y'$$

$$k_z=k_z'$$

$$\omega=a_{44}\omega'-k_x' a_{14}$$

由波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}=\vec{E}_0\nabla^2\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)-\frac{\vec{E}_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)=-\vec{k}^2\vec{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}=0$$

即是要求 $-\vec{k}^2+\dfrac{\omega^2}{c^2}=0$

在 惯性系也有同样的要求

$$\nabla^2\vec{E}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial^2 t}=-\vec{k}'^2\vec{E}'+\frac{\omega'^2}{c^2}\vec{E}'=0 \qquad -\vec{k}'^2+\frac{\omega'^2}{c^2}=0$$

综合起来 $-\dfrac{\omega^2}{c^2}+k^2=-\dfrac{\omega'^2}{c^2}+k'^2$

$$-\frac{\left(a_{44}\omega'-k_x'a_{14}\right)^2}{c^2}+\left(k_x'a_{11}-\omega'a_{41}\right)^2+\cancel{k_y'^2+k_z'^2}=-\frac{\omega'^2}{c^2}+k_x'^2+\cancel{k_y'^2+k_z'^2}$$

比较各项系数

$$a_{11}^2-\frac{a_{14}^2}{c^2}=1 \qquad a_{44}^2-c^2a_{41}^2=1 \qquad \frac{1}{c^2}a_{14}a_{44}-a_{11}a_{41}=0$$

四个待定常数满足三条方程，从中解得：

$$a_{14}=\pm c^2a_{41}$$

$$a_{11}=\pm a_{44}$$

考虑相对速度为 $\vec{v}$ 的两个惯性系，对某事件，$x=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}x'&=a_{14}t\\ t'&=a_{44}t\\ x'&=vt'\end{aligned}}$ $\Rightarrow$ $a_{14}=va_{44}$

解得：

$$a_{11}=\gamma \qquad a_{14}=\gamma v \qquad a_{41}=\gamma\frac{v}{c^2} \qquad a_{44}=\gamma \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

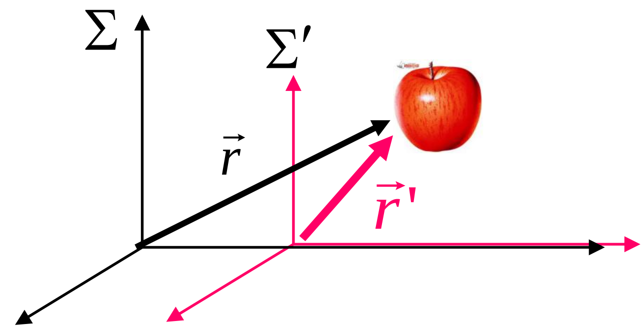
Lorentz变换：

$$\boxed{\begin{aligned}x&=\gamma x'+\gamma vt'\\ y&=y'\\ z&=z'\\ t&=\gamma\frac{v}{c^2}x'+\gamma t'\end{aligned}}$$

逆变换：

$$\boxed{\begin{aligned}x'&=\gamma x-\gamma vt\\ y'&=y\\ z'&=z\\ t'&=-\gamma\frac{v}{c^2}x+\gamma t\end{aligned}}$$

相对论速度变换



Σ 系：$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ $\qquad u_x=\dfrac{dx}{dt} \qquad u_y=\dfrac{dx}{dt} \qquad u_z=\dfrac{dx}{dt}$

Σ' 系：$\vec{u}\,'=(u_x',u_y',u_z')$ $\qquad u_x'=\dfrac{dx'}{dt'} \qquad u_y'=\dfrac{dy'}{dt'} \qquad u_z'=\dfrac{dz'}{dt'}$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=\gamma x'+\gamma vt' \\ y&=y' \\ z&=z' \\ t&=\gamma\frac{v}{c^2}x'+\gamma t' \end{aligned}} \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad \boxed{\begin{aligned} dx&=\gamma dx'+\gamma v dt' \\ dy&=dy' \\ dz&=dz' \\ dt&=\gamma\frac{v}{c^2}dx'+\gamma dt' \end{aligned}}$$

$$u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma dx'+\gamma v dt'}{\gamma\frac{v}{c^2}dx'+\gamma dt'}=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}=\frac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$$

$$u_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{\gamma dt'\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{u_y'}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)}$$

$$u_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{\gamma dt'\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{u_z'}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)}$$

总结：

非相对论近似 $v \ll c$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u_x'\right)}$$

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u_x'\right)}$$

逆变换：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \longrightarrow u'_x = u_x - v$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \longrightarrow u'_y = u_y$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \longrightarrow u'_z = u_z$$

容易验证：

若：$\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} = c$ 则：$\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = c$ 光速不变性

作业

1。 （i）用相对论速度变换公式证明光速不变性，即：

如果 $\sqrt{u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z}=c$ ，则有：$\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}=c$

（ii）证明

$$\gamma_u=\gamma\cdot\gamma_{u'}\left(1+\frac{v}{c^2}u_z'\right)$$

$$\gamma_u u_x=\gamma_{u'}\cdot u_x'$$

$$\gamma_u u_z=\gamma\left(\gamma_{u'}\cdot u_z'+\gamma_{u'}v\right)$$

其中：$\gamma_u=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$