第八讲

上次课：

- 导体静电边界条件：$\varphi|_{Surface} = const.;\quad E_\perp = \sigma/\varepsilon_0, \leftrightarrow -\varepsilon\oint dS\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{Surface} = Q$
- Green 及 Green 互易定理：$\sum_{i=1}^{m} q'_i\phi_i = \sum_{i=1}^{m} q_i\phi'_i$
- 静电导体系的电场总能：$W = \frac{1}{2}\sum_i \phi_i Q_i$；电容系数：$Q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j$

---

3. 固有能和相互作用能

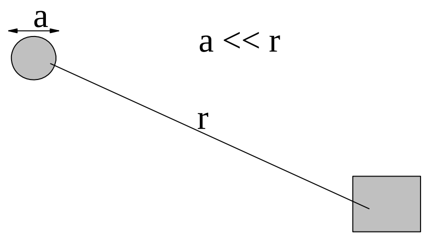
设有两个带电体 1 和 2，他们各自独立存在时在空间激发的电场分别为 $\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$。将它们放在一起，当如下条件之一存在时

（1）两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时，
（2）一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸，

两个带电体上的电荷分布不因两个它们之间的相对构型的改变而产生显著变化。则空间总的电场可近似写为 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$。 因此，体系的总能量

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int \vec{E}^2 d\tau = \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int E_1^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int E_2^2 d\tau}_{W_1+W_2} + \underbrace{\varepsilon\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 d\tau}_{W_{\rm int}} \qquad (3.3.9)$$

由上式可以看出，系统的总能量由两部分组成。在这个条件下，上式右方第一和第二项表示 1 或 2 带电体单独存在时的能量 W_1和W_2，称为固有能；上式右方的第三项表示两个体系合起来之后与原来单独存在时的能量差，称为相互作用能，可写成



$$W_{\rm int} = \varepsilon\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 d\tau = \varepsilon\int \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2 d\tau$$

其中 φ_1, φ_2 为两个带电体单独存在时的空间的电势分布，分别满足

$$\nabla^2\varphi_1 = -\rho_1/\varepsilon,\quad \nabla^2\varphi_2 = -\rho_2/\varepsilon$$

其中 ρ_1,ρ_2 为两个带电体的电荷分布。可以利用分部积分将上式进一步简化：

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int}}=\varepsilon\int\nabla\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2)d\tau-\varepsilon\int\varphi_1\nabla^2\varphi_2 d\tau=\int\varphi_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r})d\tau$$

在许多情况下带电体的自身的尺寸远小于它们之间的间距，φ_1 在带电体 2 的所处的区间内近似为一常数，则

$$\mathrm{W}_{12}\approx\varphi_1\int_v\rho_2 d\tau=\varphi_1 q_2 \tag{3.3.10}$$

此即是相互作用能的表达式。显然（3.3.10）可以应用于小的电荷体系（如点电荷）在大的电荷体系产生的电场中（满足条件（2）），以及点电荷之间的相互作用能（满足条件（1））。

点电荷在外电场中

对一个点电荷 q 放置于外电场中，设点电荷所在的位置处外电场的电势为 $\varphi_{ext}(\vec{r})$，则这个体系的相互作用能为

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int}}=q\varphi_{ext}(\vec{r}) \tag{3.3.11}$$

注意：这个相互作用能是点电荷和外场共有的，不是点电荷自身的。可以与运动粒子在静磁场中的附加动量 $\Delta\vec{\mathrm{P}}=q\vec{A}_{ext}(\vec{r})$ 相比较，均为带电体与外场共有的"相互作用能（动）量。

电荷系的相互作用能

现在考虑由一系列点电荷组成的体系的相互作用能。首先考虑相距为 R 的两个点电荷 q_1和q_2 的相互作用能

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int},12}=q_1\varphi_2=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

其中 φ_2 是电荷 q_2 在电荷 q_1 处的势. 同理我们也可以把 $\mathrm{W}_{\mathrm{int},12}$ 表示为 $q_2\varphi_1$，其中 φ_2 为电荷 q_1 在电荷 q_2 处产生的势，所以相互作用能可以写为

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int},12}=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2)$$

因此，将上式推广到 n 个电荷组成的体系，相互作用能可表示为

$$W_{\mathrm{int}}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{n}q_\alpha\phi_\alpha \tag{3.3.11}$$

其中 ϕ_α 为***除电荷 q_α 之外***所有其余电荷在电荷 q_α 处的势之和

注意此处（3.3.13）的形式虽然与 W 的形式很类似，但 ϕ_α 的含义与总能中 φ_α 的含义不同 – 前者刨去了自己对自己的贡献，也就是能量中的固有能。相互作用能可正可负，但总能量

严格为正。

§3.4 静电体系的稳定性问题

我们前面研究了当导体位置确定时的静电问题。然而有几个问题并没有得到回答 --- 1）静电体系处在给定的构型下是否稳定？2）稳定时体系中电荷分布及导体的构型应满足什么条件？要回答这些问题，我们需要研究体系的能量，因为体系的稳定状态对应于能量取极小值时的状态。一个荷电导体系的总静电能为

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\int \rho(\vec r)\varphi(\vec r)d\tau \tag{3.4.1}$$

一个体系的状态可以由电荷分布 $\rho(\vec r)$ 描述，也可以由电势分布 $\varphi(\vec r)$ 唯一描述，这两个量一一对应。对应于不同的电荷分布 $\rho(\vec r)$（假设可以给定，无论其稳定与否），体系具有不同的能量。因此能量 W 是 $\rho(\vec r)$ 或 $\varphi(\vec r)$ 的泛函：$W=W[\rho(\vec r)]$。现在的问题即时：

对应怎样的电荷分布（或电势分布），体系的能量为极小值？

问题进一步转化成：对给定的 $\rho(\vec r)$ 做一个虚变动 $\rho(\vec r)\to\rho(\vec r)+\delta\rho(\vec r)$，则要求

$$\frac{\delta W}{\delta\rho}=0 \tag{3.4.2}$$

下面就根据（3.4.2）的要求讨论静电体系的平衡问题。电荷分布的变动 $\delta\rho(\vec r)$ 有 2 类 ---- 一种是导体位置不动，电荷在导体上的再分布；另一种是由导电体的位置变动引起的（当然严格来说这个情况下会同时引起单个导体上的电荷再分布）。我们下面分别研究这两种情况，这两个问题的解答分部给出两个重要定理。

1. 汤姆孙定理

先考虑一种相对简单的情况：假设每个导体都是不动的，但电荷在导体上可以自由再分布。显然，这种扰动必须满足如下约束条件：

$$\int \delta\rho_i d\tau=\delta Q_i=0 \tag{3.4.3}$$

让我们考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量的变化

$$\delta W=W[\rho+\delta\rho]-W[\rho]=\varepsilon\int \vec E\cdot\delta\vec E d\tau=-\varepsilon\int\nabla\varphi\cdot\delta\vec E d\tau \tag{3.4.4}$$

其中 $\delta\vec E$ 为 $\delta\rho$ 所产生的电场，满足

$$\nabla\cdot\delta\vec E=\delta\rho/\varepsilon$$

对（3.4.4）进行分步积分可得

$$\delta W=-\varepsilon\int\nabla\cdot(\varphi\delta\vec{E})d\tau+\varepsilon\int\varphi\nabla\cdot\delta\vec{E}d\tau=\int\varphi\delta\rho d\tau=\sum_i\int\varphi\delta\rho_i d\tau \qquad (3.4.5)$$

上式第一项可利用高斯定理变为面积分，其结果为零。由于约束（3.4.3）的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子λ_i，可得

$$\begin{aligned}0=\delta W-\sum_i\lambda_i\delta Q_i&=\sum_i\int\varphi(\vec{r}_i)\delta\rho_i d\tau_i-\sum_i\lambda_i\int\delta\rho_i d\tau_i\\&=\sum_i\int[\varphi(\vec{r}_i)-\lambda_i]\delta\rho_i(\vec{r})d\tau_i\end{aligned} \qquad (3.4.6)$$

因为$\delta\rho_i(\vec{r})$相互独立，上式导致

$$\varphi(\vec{r}_i)=\lambda_i \qquad (3.4.7)$$

因此，若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，能量到达极小值，体系处于平衡状态。*（思考：严格来说还需证明$\frac{\delta^2 W}{\delta\rho^2}>0$，你能否证明？*。这就是**汤姆孙定理**。我们在前面讨论讲导体静电平衡条件时曾通过物理的 Argument 得到过这个结论，这里根据能量在约束条件下达到极小这一平衡判据对这个结论给出了数学上的严格证明。但得到这样的静电平衡状态有两个条件：

1）导体上的电荷不会离开导体；

2）每个导体的位置保持不变。

对条件 1）我们已经知道有非静电来源的表面束缚能（功函数）阻止电荷脱离导体。如果我们将条件 2）放松，使得导体的位置可以发生变化，那么这种导体构型的变动必然导致电荷密度的再分布进一步改变体系的总能量。

下面的问题是：什么样的构型是体系的稳定状态呢？

2．恩肖定理

在讨论由于导体构型的变化而产生的能量改变时，我们做如下假设

1）“绝热近似”- 即带电体的运动速度很慢使得每个时刻上面的电荷分布都有足够的时间达到平衡（即称为等势体）。

2）带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

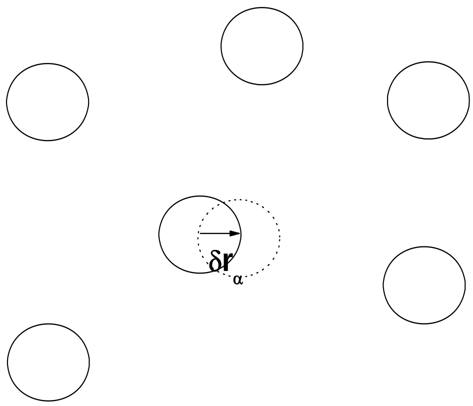
在此近似下，我们可以不考虑体系的固有能（因为在构型发生改变时固有能不变），而只考虑相互作用能：

$$W_{\text{int}}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}q_\alpha\phi_\alpha \qquad (3.4.8)$$

W_{int} 是各个导体位置$\{\vec{r}_\alpha\}$的函数：$W_{\text{int}}(\{\vec{r}_\alpha\})$，其具有极小值的充要条件是：$W_{\text{int}}$ 对所有电荷的坐标的一阶微商必须为零，而二阶微商必须恒大于零．简单起见，这里我们只考虑其中一个导体的位置发生了变化$\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + \delta\vec{r}_\alpha$，则变分后第一个条件要求

$$\nabla_\alpha W_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\phi_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_\alpha = 0 \qquad (3.4.9)$$

亦即，在每个导体所在处，由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为 **0**。



这一条件依赖于具体的导体构型。假设这一个条件能够实现，我们进一步考察这种状态的稳定性问题。让我们检查 W 在某一个“平衡位置”附近对其中一个导体位置做相应扰动$\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha$，保留到 2 阶，有

$$\delta^2 W = \frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j = \frac{q_\alpha}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j = \sum_{i,j=x,y,z} B_{i,j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j \qquad (3.4.9)$$

其中$B_{i,j} = \dfrac{q_\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}$为一个对称矩阵。*(这里少了一个 1/2，原因是我们计算$\vec{r}_\alpha$的变化时，不仅考虑其它导体对第α个导体的电势变化，还要考虑第α个导体在其它带电体处的电势变化，根据对称性，这两项贡献相等)*。要使得体系稳定，$\delta^2 W$ 应当针对任意的变动恒为正！单独从（3.4.9）式中得不出任何结论，因为不同的方向上的虚位移耦合在一起。可以将 B 矩阵对角化，得到一系列本征值b_i，则有，

$$\delta^2 W = \sum_{i=1,2,3} b_i \left(d\tilde{r}_\alpha^i\right)^2 \qquad (3.4.9')$$

其中$d\tilde{r}_\alpha^i$对应这一本征值的本征矢量，可以理解为这些扰动的“简正”模式。要得到稳定状态，则要求所有可能的扰动均导致能量上升，从（3.4.9’）中可以看出我们要所有的本征值均大于 0：

$$\boxed{b_i > 0, \quad i = 1,2,3} \qquad (3.4.10)$$

另一方面，考虑ϕ_α是除q_α之外所有其他电荷在第α个电荷处产生的势，故根据 Poission 方程（因为$\vec{r}_\alpha$处没有电荷）

$$\nabla_\alpha{}^2\phi_\alpha = \sum_i \frac{\partial^2\phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^i} = 0 \qquad (3.4.11)$$

所以，根据$B_{i,j}$矩阵的定义，我们有

$$\boxed{2\sum_{i=1,2,3} b_i = 2Tr[B_{i,j}] = q_\alpha \nabla_\alpha^2 \phi_\alpha = 0} \qquad (3.4.12)$$

很显然，（3.4.12）与（3.4.10）相互矛盾！故W_{int}不可能有极小值，只可能存在“鞍点”类型的极值点（某些方向为极小，某些方向为极大值）。***因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态，任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与.*** 如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在. 为此，在静电学中我们总是假定存在着某种非静电的约束力.

注意：这里所有的讨论都是针对“静电力”，也就是满足$\nabla\times\vec{E}=0$的力。当电场随时间变化时，此时的力不再受这个定理的约束。另外，量子力学中可能存在其他来源复杂的力（如交换耦合力），也不受这个定理的约束。

习题：

P85， 3.5， 3.8，3.9

小课题（供有兴趣的同学选作）

1） 计算几个典型的静电体系（比如两个点电荷，两个偶极子等）的能量随位置的变化关系，用图形画出它们的依赖关系，体会“静电体系没有约束就没有平衡态”这一结论。
2） 阅读文献”**Wen WJ, *et. al*, Phys. Rev. Lett. 85 5464 （2000）”,** 搞明白他们是怎样引入非静电力来形成静电稳定体系的。