



# 菲涅耳公式

---

界面光学偏振讨论基础

赵福利

2008年整理



# 物理光学推导菲涅耳公式

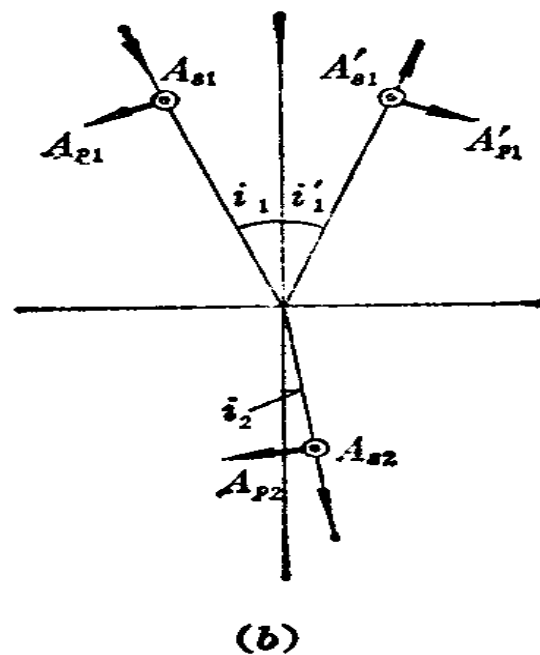
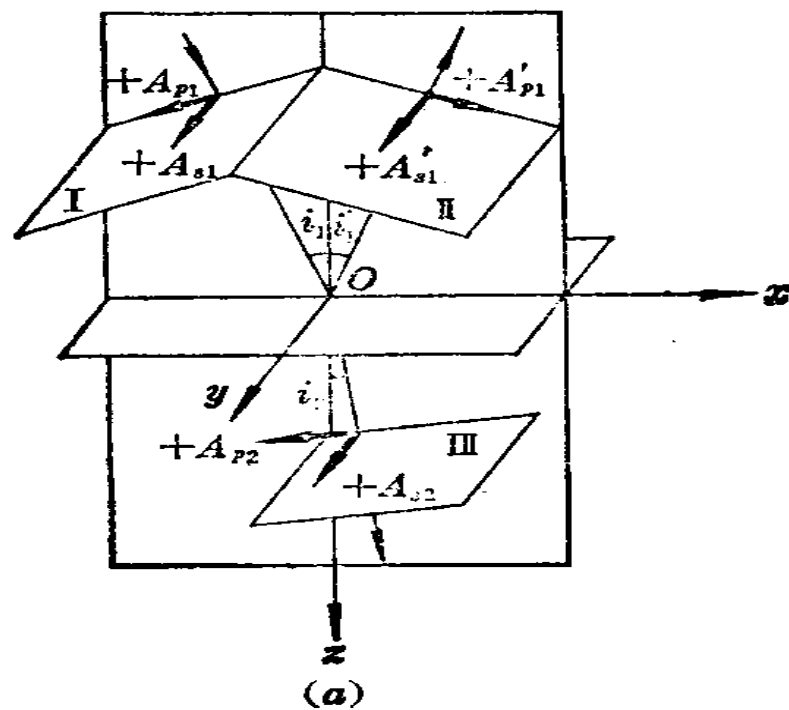
## 电磁场边界条件：

- (1) 电场强度 $E$  在界面上的平行分量连续。
- (2) 若界面上没有表面电流，即电流密度 $j_0=0$ ，  
磁场强度 $H$  在界面上的平行分量连续。
- (3) 磁感应强度 $B$  在界面上的垂直分量连续。
- (4) 界面上没有表面电荷，即电荷密度 $\rho_0=0$ ，  
电位移矢量 $D$  在界面上的垂直分量连续。

## 偏振光的定义：

光矢量在入射面内的偏振光（P光）

光矢量与入射面垂直的偏振光（S光）。



# P 光反射与折射时的电磁矢量

$$E_{t1} = E_{t2}, H_{t1} = H_{t2}$$

$$D_{n1} = D_{n2}, B_{n1} = B_{n2}$$

在入射介质中

$$E_{t1} = E_1 \cos i_1 + E_1' \cos i_1$$

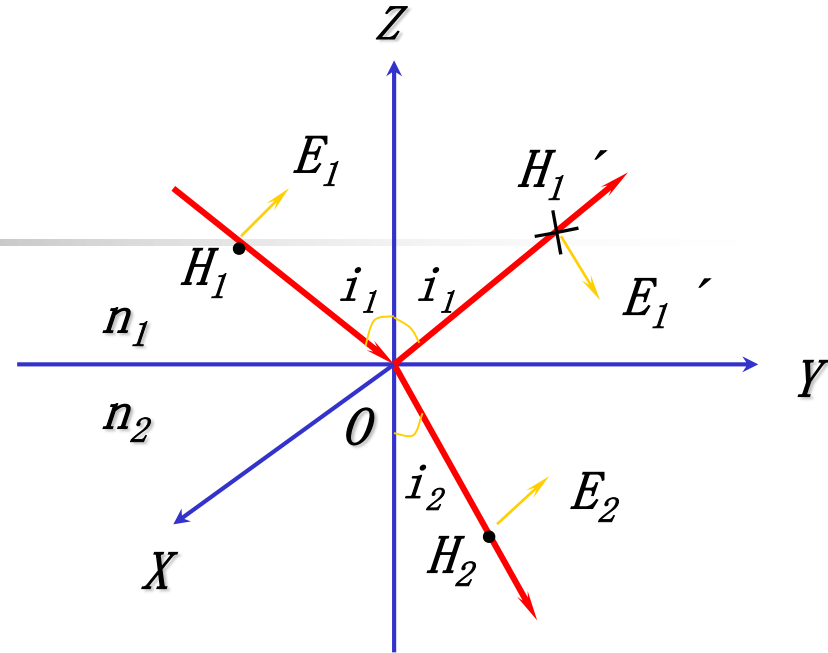
$$H_{t1} = H_1 - H_1'$$

在折射介质中

$$E_{t2} = E_2 \cos i_2$$

在非铁磁质中，

$$H \propto nE$$



$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E \quad H_{t2} = H_2$$

$$\mu_r = 1, n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\epsilon_r}$$

$$n_1 E_1 - n_1 E_1' = n_2 E_2$$



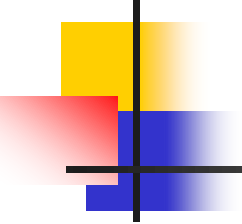
从电磁场边界条件出发，得

$$\left. \begin{array}{l} n_2 \times \\ \cos i_2 \times \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} E_1 \cos i_1 + E_1' \cos i_1 = E_2 \cos i_2 \\ n_1 E_1 - n_1 E_1' = n_2 E_2 \end{array} \right\} \quad H_1 - H_1' = H_2$$

$$E_1'(n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2) + E_1(n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2) = 0$$

P光的振幅反射 ( $r$ ) 系数

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{n_1 \sin i_1 \cos i_1 / \sin i_2 - n_1 \cos i_2}{n_1 \sin i_1 \cos i_1 / \sin i_2 + n_1 \cos i_2} \\ &= \frac{\sin i_1 \cos i_1 - \cos i_2 \sin i_2}{\sin i_1 \cos i_1 + \cos i_2 \sin i_2} = \frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)} \end{aligned}$$



---

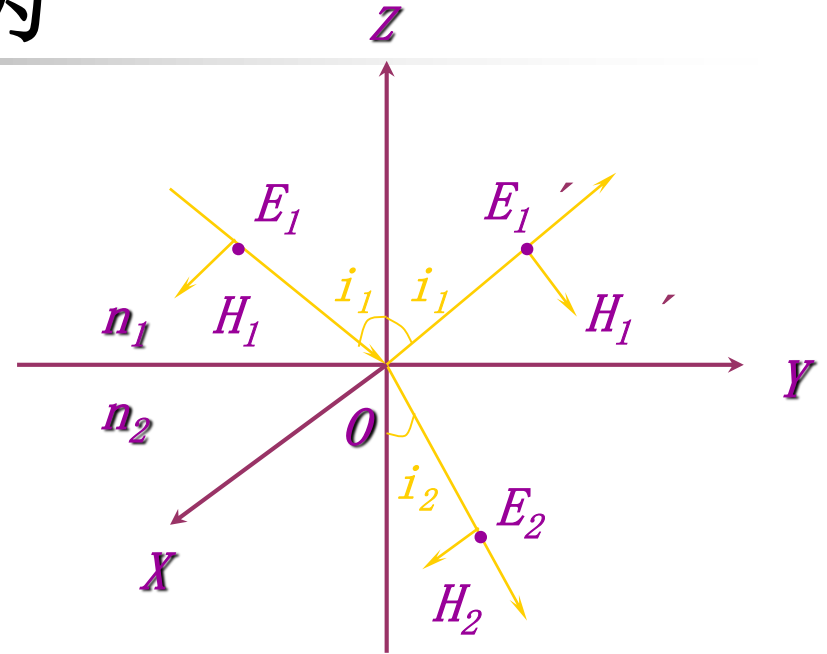
$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \cos i_1 + E'_1 \cos i_1 = E_2 \cos i_2 \\ n_1 E_1 - n_1 E'_1 = n_2 E_2 \end{array} \right\} H_1 - H'_1 = H_2$$

P光的振幅透射（ $t$ ）系数为

$$t_p = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}$$

S光的振幅反射系数为

$$r_s = \frac{E_1'}{E_1} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$$



S光的振幅透射（ $t$ ）系数

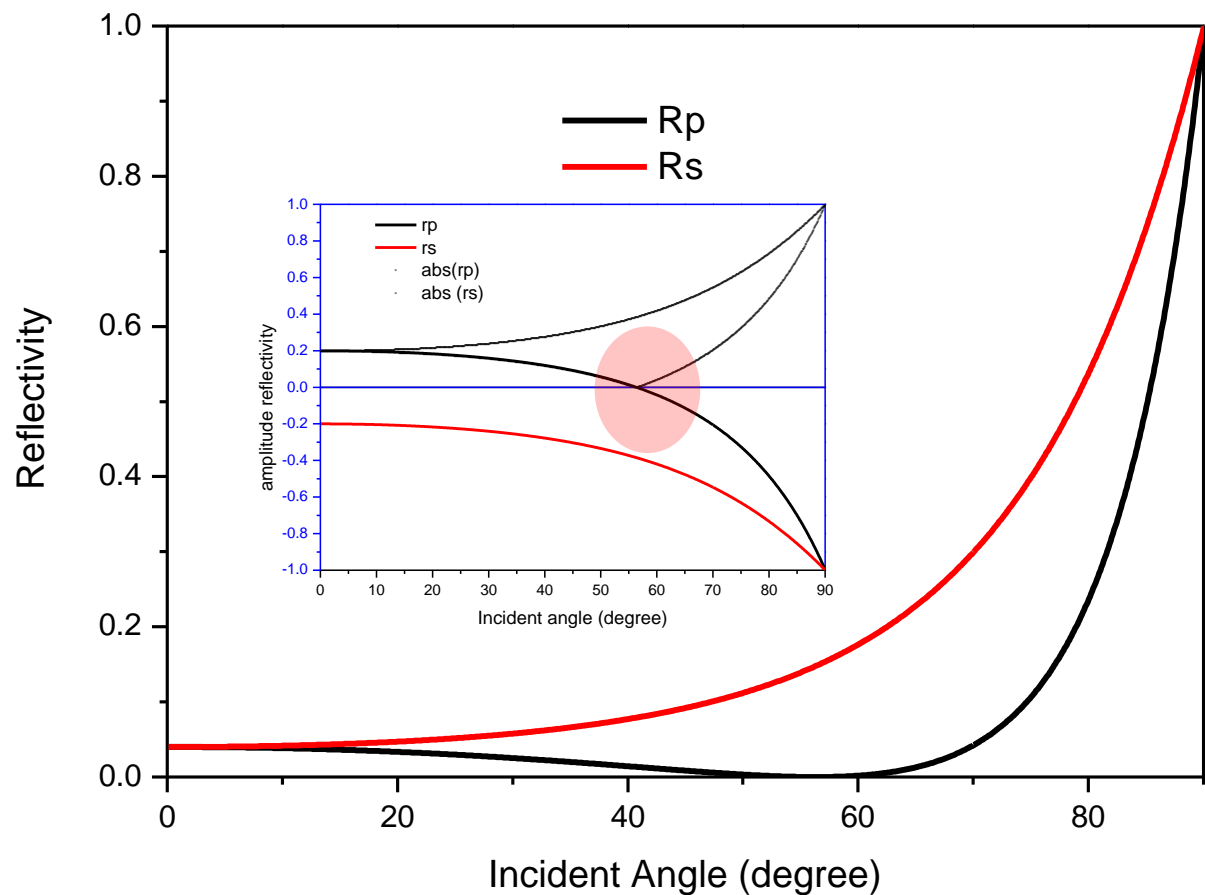
$$t_s = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}$$

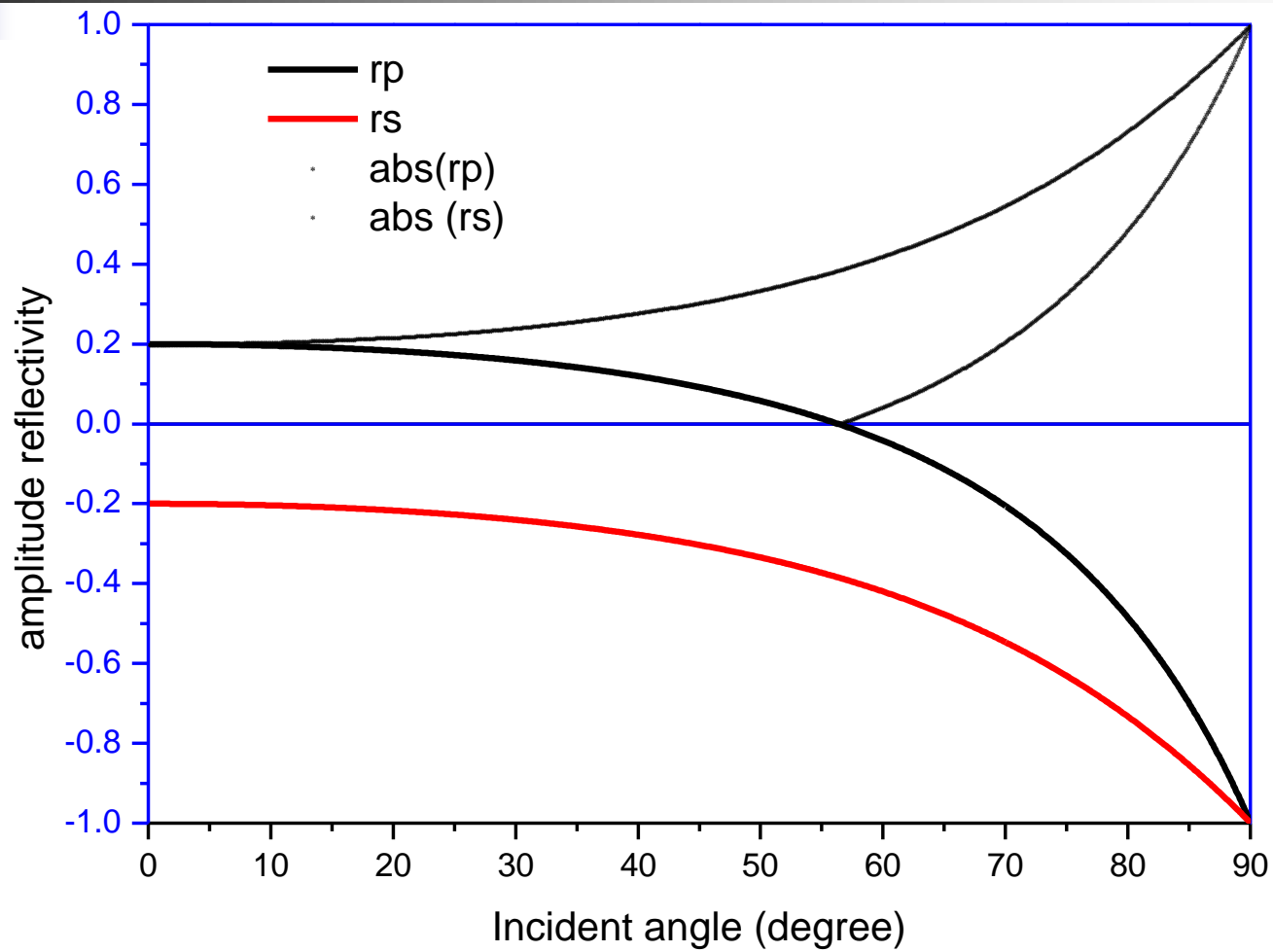
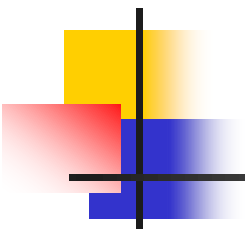
表 II-2 各种反射率和透射率的定义

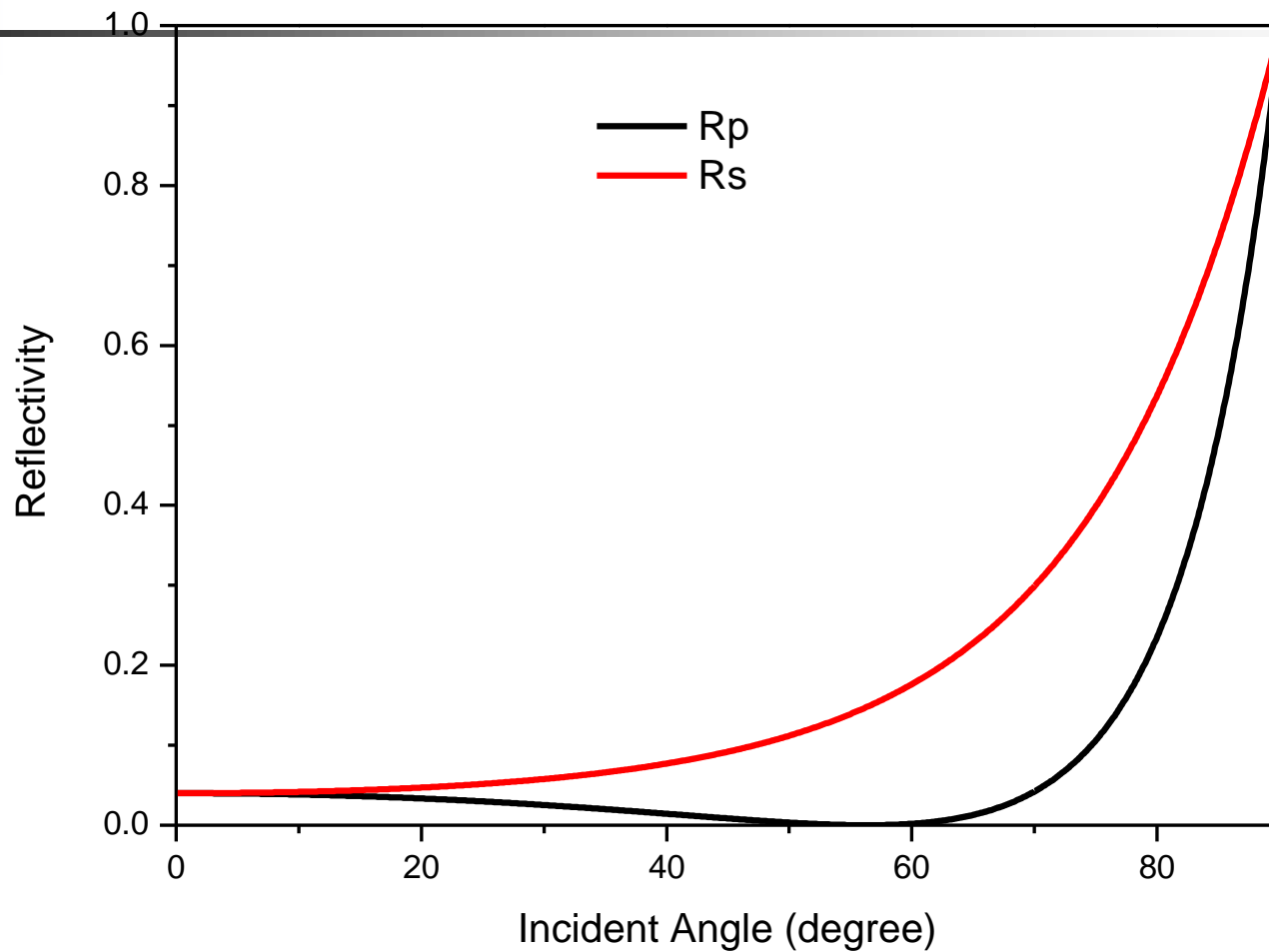
	$p$ 分 量	$s$ 分 量
振幅反射率	$r_p = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} \quad (10.5)$	$r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} \quad (10.6)$
光强反射率	$R_p = \frac{I'_{1p}}{I_{1p}} =  r_p ^2 \quad (10.7)$	$R_s = \frac{I'_{1s}}{I_{1s}} =  r_s ^2 \quad (10.8)$
能流反射率	$\mathcal{R}_p = \frac{W'_{1p}}{W_{1p}} = R_p \quad (10.9)$	$\mathcal{R}_s = \frac{W'_{1s}}{W_{1s}} = R_s \quad (10.10)$
振幅透射率	$t_p = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} \quad (10.11)$	$t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} \quad (10.12)$
光强透射率	$T_p = \frac{I_{2p}}{I_{1p}} = \frac{n_1}{n_2}  t_p ^2 \quad (10.13)$	$T_s = \frac{I_{2s}}{I_{1s}} = \frac{n_2}{n_1}  t_s ^2 \quad (10.14)$
能流透射率	$\mathcal{T}_p = \frac{W_{2p}}{W_{1p}} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_p \quad (10.15)$	$\mathcal{T}_s = \frac{W_{2s}}{W_{1s}} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_s \quad (10.16)$

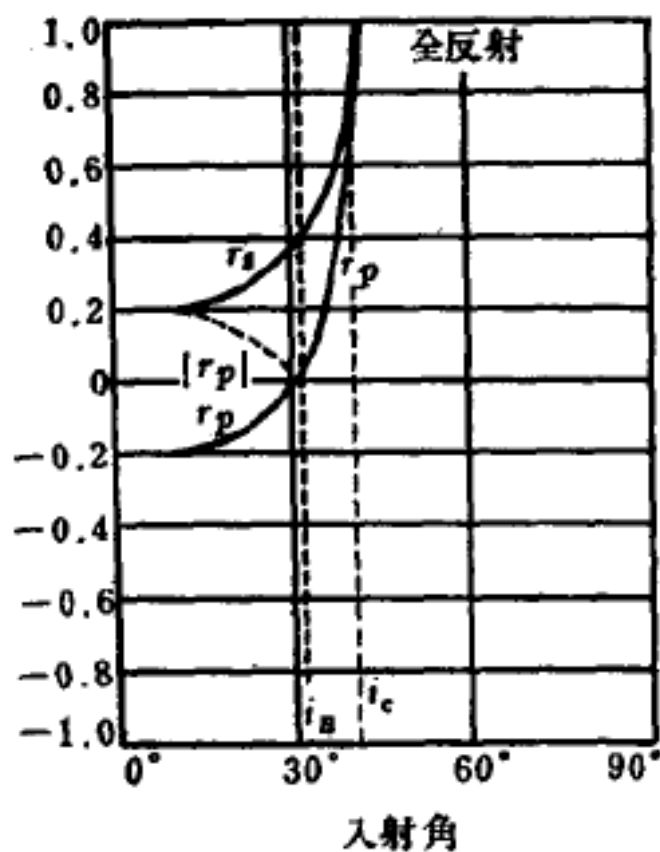


以玻璃为例，设其折射率为 $n_2 = 1.5$ ，光从空气( $n_1 = 1.0$ )正入射在玻璃表面时  $r_p = 20\%$ ， $r_s = -20\%$ ， $R_p = R_s = \mathcal{R}_p = \mathcal{R}_s = 4\%$ ， $t_p = t_s = 80\%$ ， $T_p = T_s = \mathcal{T}_p = \mathcal{T}_s = 96\%$ 。

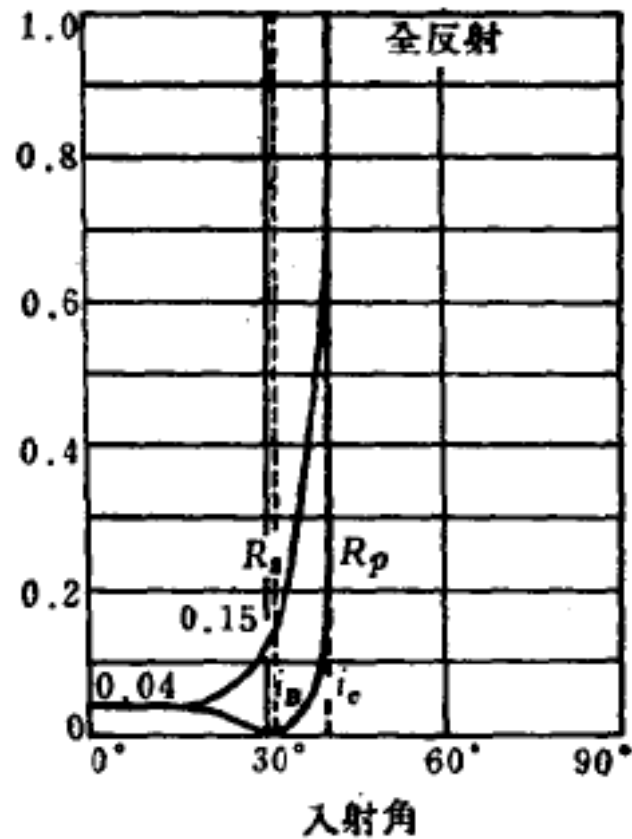








(a) 振幅反射率



(b) 光强反射率

图 10-3 玻璃( $n=1.54$ )到空气的反射率曲线

$$\begin{cases} \delta_p = 2 \tan^{-1} \frac{n_1}{n_2} \frac{\sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \\ \delta_s = 2 \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \end{cases} \quad (10.27)$$

反映它们这段变化的曲线，也参见图10-6.

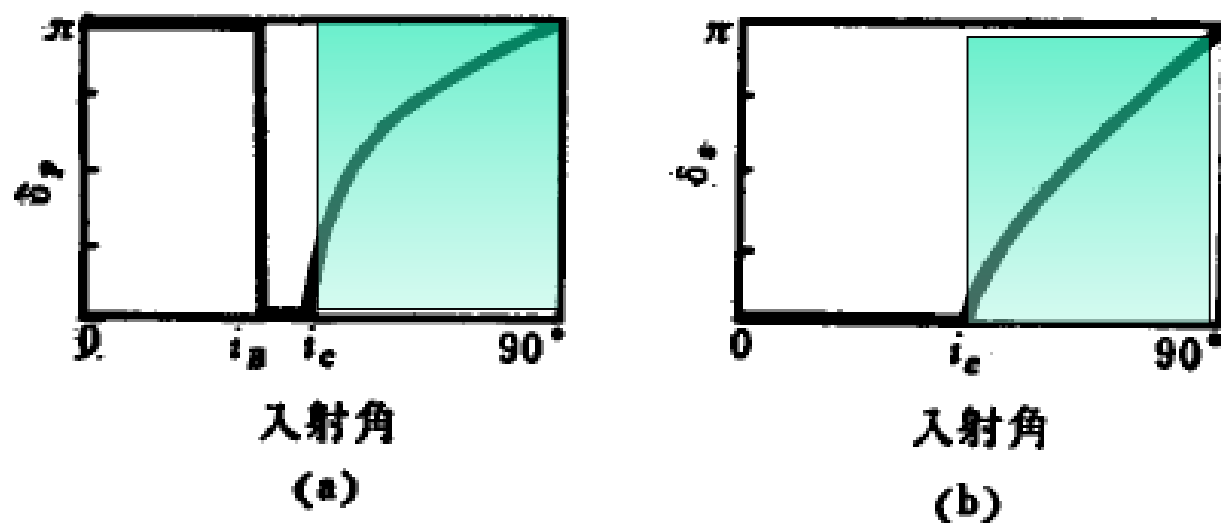


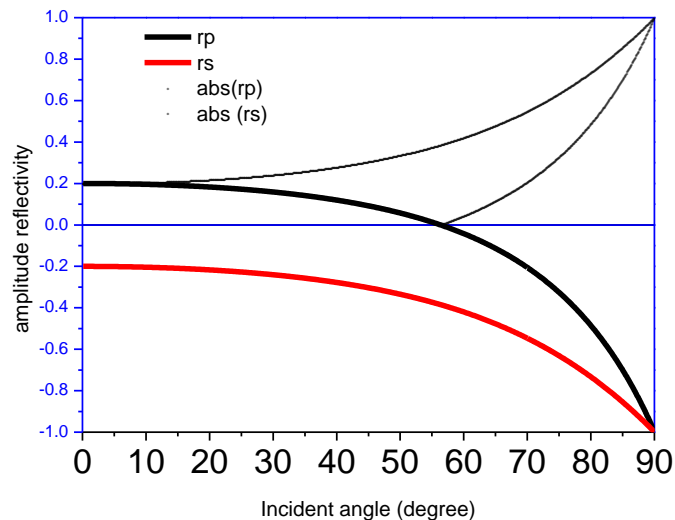
图 10-6  $n_1 > n_2$  (内反射) 时的位相改变

**例题 1** 分析正入射时电矢量  $p, s$  分量的位相改变。

**解** 根据上面的分析, 正入射( $i_1 = 0$ )时  $r_p, r_s, t_p, t_s$  的正负号见下表。

	$n_1 < n_2$	$n_1 > n_2$
$r_p$	+	-
$r_s$	-	+
$t_p$	+	+
$t_s$	+	+

① 可以看出, 这是符合斯托克斯倒逆关系  $r' = r$  的。



疏→密:

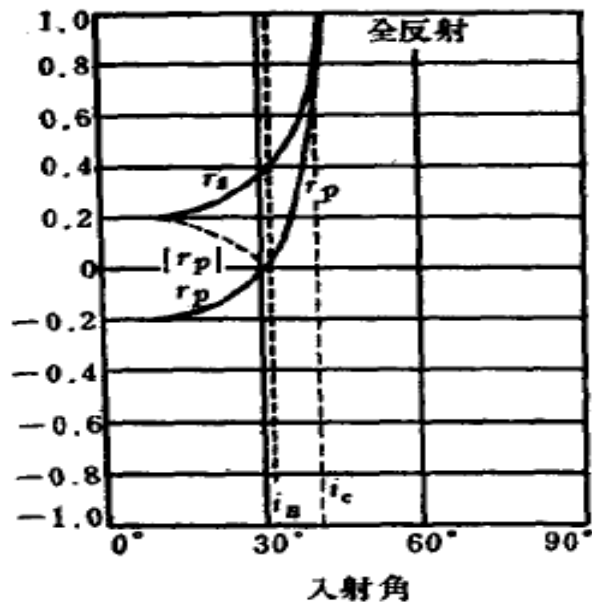
$i=0$

$r_p > 0, r_s < 0$ ; 偏振是迎着光的传播方向看过去, 因此有位相越变。

掠入射:

$r_p < 0, r_s < 0$ ; 偏振是迎着光的传播方向看过去, 因此有位相越变。

密→疏



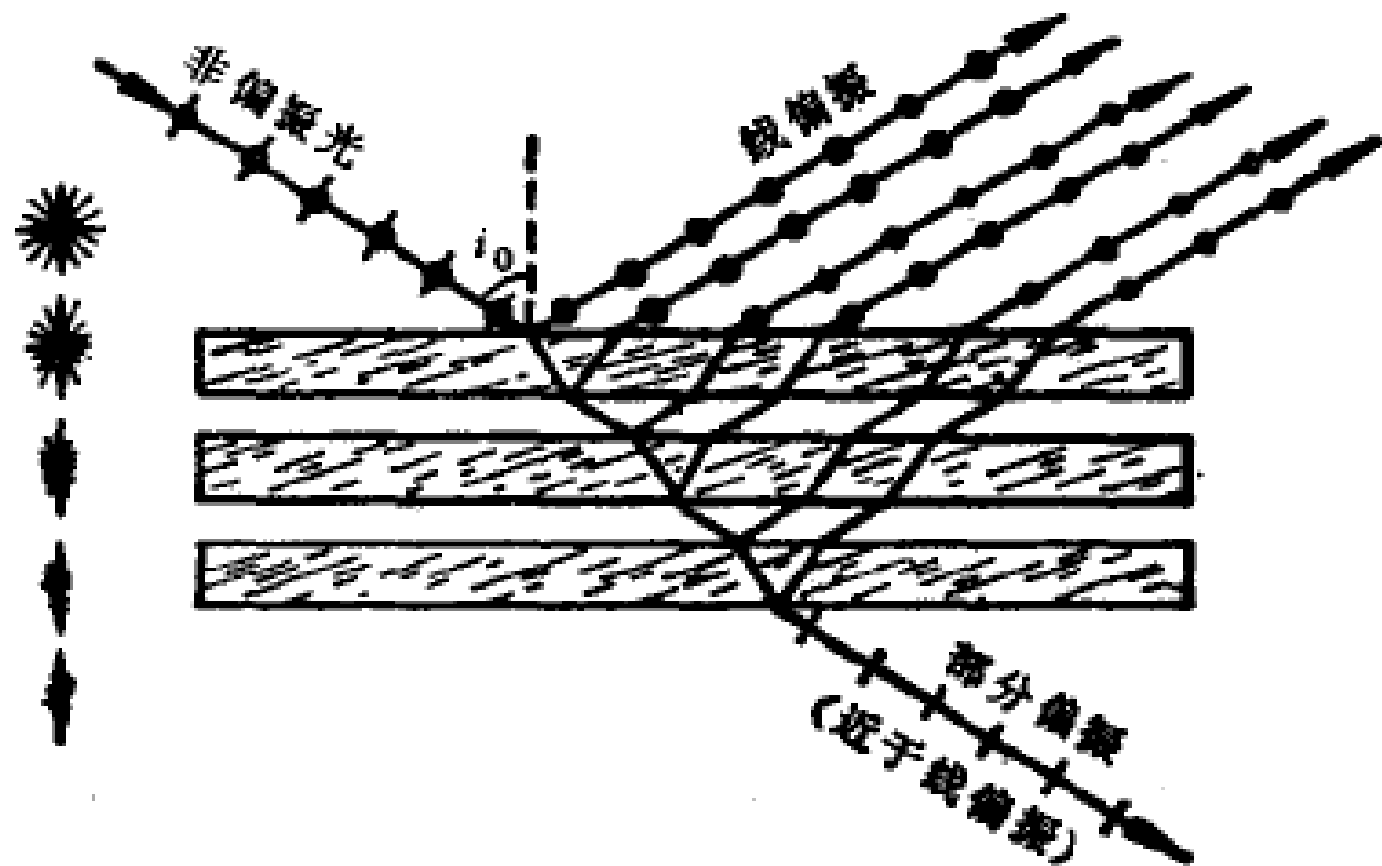


图 10-10 玻片堆偏振器



# 对菲涅耳公式应用



## 1. 布儒斯特定律

---

当  $i_2 + i_1 = \pi/2$  时,  $tg(i_2 + i_1) \rightarrow \infty$

P光的反射系数

$$r_p = \frac{tg(i_2 - i_1)}{tg(i_2 + i_1)} = 0$$

## 以布儒斯特角入射

以布儒斯特角入射时反射光为线偏振光，折射光为部分偏振光。

$$i_o + r = 90^\circ$$

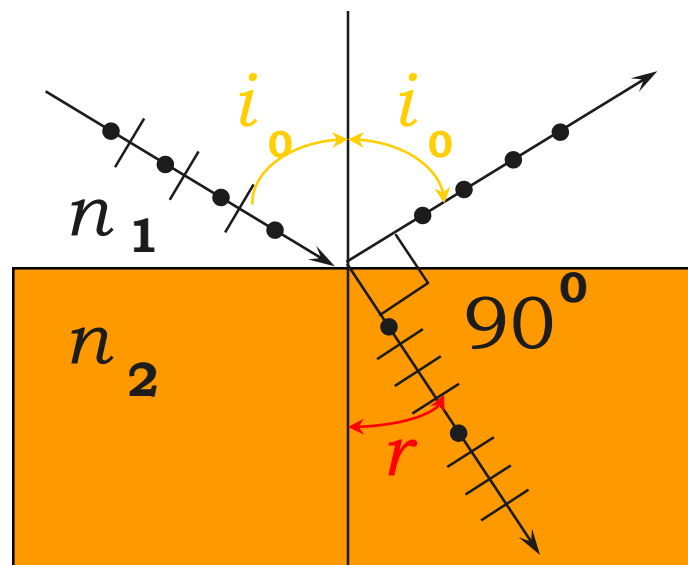
由折射定律：

$$\frac{\sin i_o}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

$$\frac{\sin i_o}{\sin r} = \frac{\sin i_o}{\sin (90^\circ - i_o)} = \operatorname{tg} i_o$$

布儒斯特定律

$$\operatorname{tg} i_o = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

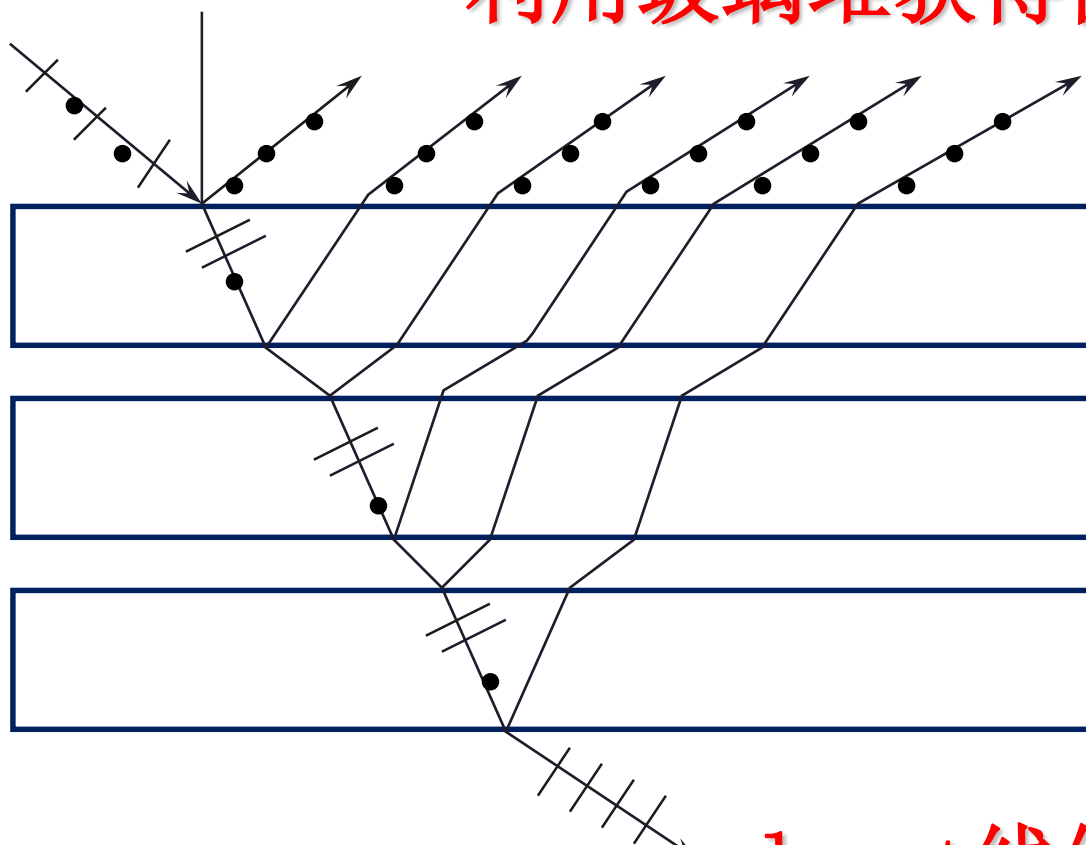


[例] 玻璃对空气的折射率为:

$$\tan i_o = 1.50 \quad \therefore i_o = 56^\circ \quad n_{21} = 1.50$$

自然光入射

利用玻璃堆获得偏振光



almost线偏振光



## 2. 反射光的相位关系\*\*\*

---

$$t_p = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} \quad t_s = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}$$

$$0 \leq i \leq \pi/2$$

$$t_p > 0$$

$$t_s > 0$$

$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(i_2 - i_1)}{\operatorname{tg}(i_2 + i_1)}$$

$$r_s = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)}$$

$r_s r_p$  可正可负。

振幅的正负号改变，即相位改变  $\pi$ 。（半波损失）

讨论:

**A**  $i_1 < i_B$   $i_1 + i_2 < \pi/2$

当  $n_1 > n_2, i_1 < i_2$  时  $r_p < 0$   $r_s > 0$

当  $n_1 < n_2, i_1 > i_2$  时  $r_p > 0$   $r_s < 0$

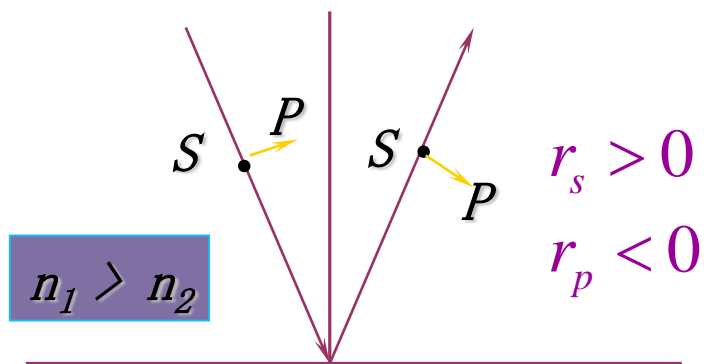
光从光疏 → 光密介质入射时，反射光发生相位突变。

**B**  $i_1 > i_B$   $i_1 + i_2 > \pi/2$

当  $n_1 > n_2, i_1 < i_2$  时  $r_p > 0$   $r_s > 0$

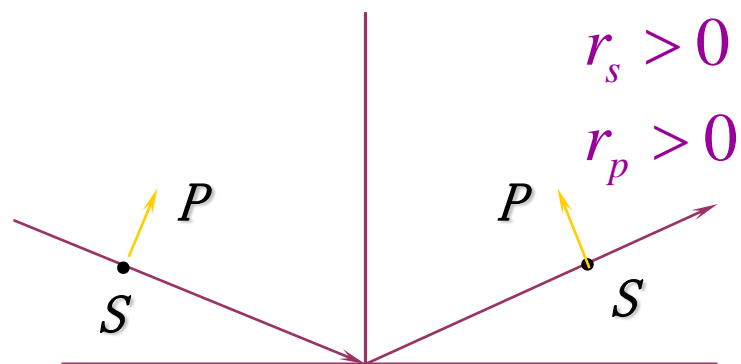
当  $n_1 < n_2, i_1 > i_2$  时  $r_p < 0$   $r_s < 0$

接近正入射 ( $i_1 < i_B$ )

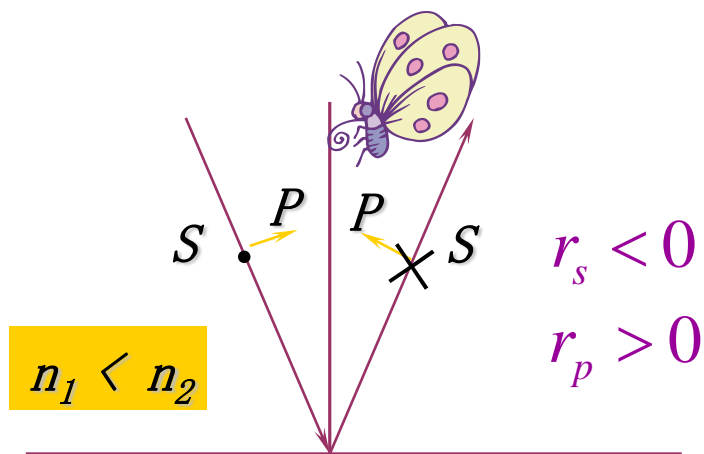


无相位突变

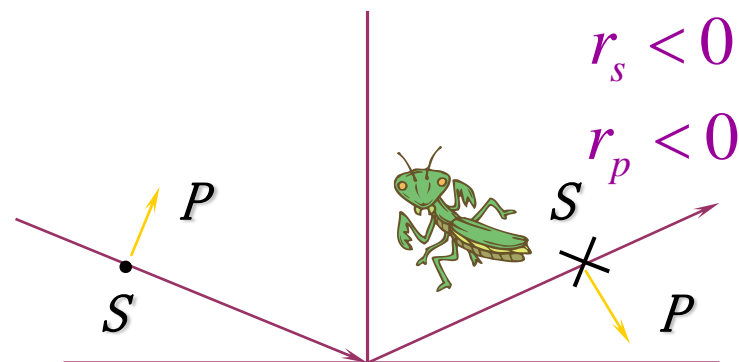
接近掠入射 ( $i_1 > i_B$ )



无相位突变

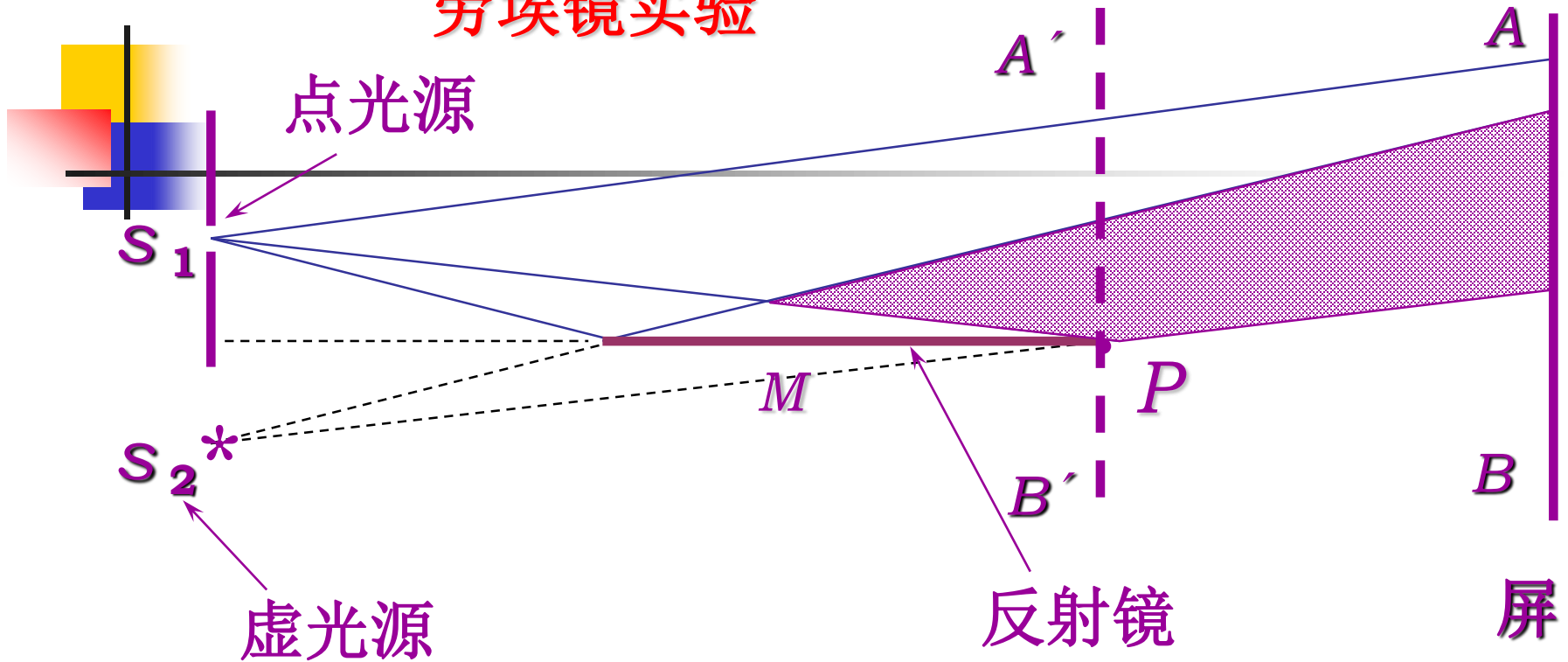


有相位突变



有相位突变

## 劳埃镜实验



当屏移到  $A'B'$  位置时，在屏上的  $P$  点应该出现暗条纹，光在镜子表面反射时有相位突变  $\pi$ 。

### 3. 反射率与透射率

$S$  代表能流密度，即单位时间内，单位面积的辐射能。

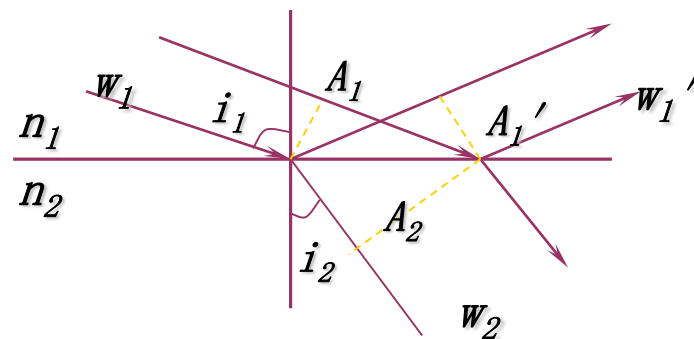
总能流  $W=SA$

入射光束的截面积  $A_1$

反射光束的截面积  $A_1' = A_1$

透射光束的截面积  $A_2 = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} A_1$

反射率  $R = \frac{W_1'}{W_1} = \frac{S_1' A_1}{S_1 A_1} = \frac{S_1'}{S_1} = \frac{n_1 E_1'^2}{n_1 E_1^2} = \left( \frac{E_1'}{E_1} \right)^2 = r^2$







透射率

$$R_p = r_p^2, R_s = r_s^2$$

$$T = \frac{W_2}{W_1} = \frac{S_2 A_2}{S_1 A_1} = \frac{n_2 E_2^2 \cos i_2}{n_1 E_1^2 \cos i_1} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t^2$$

$$T_p = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_p^2$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_s^2$$

若光从介质 $n_2$ 射向介质 $n_1$

反射率

$$R' = (r')^2 = (-r)^2 = R$$

透射率

$$T'_p = \frac{n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2} t_p^2 = t_p t'_p$$



---

$$T'_p = T_p = t_p t'_p \quad T'_s = T_s = t_s t'_s$$

对于任意两个介质的界面，正反两个方向的透射系数不等，但透射率是相等的。

$$1 - R_p = 1 - r_p^2 = t_p t'_p = T_p$$

$$1 - R_s = 1 - r_s^2 = t_s t'_s = T_s$$



## 4. 隐失波与光子隧穿效应

当光从光密介质大于临界角入射时，除反射光外，还有沿界面传播且在界面垂直方向上振幅按指数衰减的隐失波（evanescent wave）。

在全反射条件下，界面相当于一个势垒，光子在界面法线方向之动量减少，能量小于势垒。作为经典粒子是不可能穿越势垒的。但光子具有波动性，可穿越势垒，隐失波又称光子隧穿效应。

（photonic tunneling effects）



## 贯穿深度 (penetration depth)

振幅衰减至  $e^{-1}$  所对应的距离

光纤通信和集成光波导 (integrated optical waveguide) 中的光波耦合问题，必需研究光子隧穿效应；

光子显微镜利用光子隧穿效应来研究表面物理现象。