第五讲

上次课

- $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B},\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ - Maxwell 方程组
- $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{H},\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$ - 本构关系

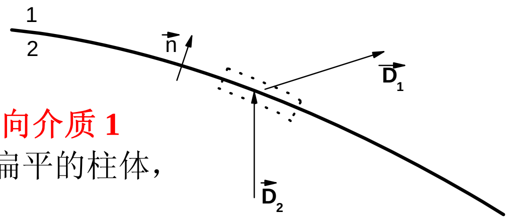
---

§1.6 麦克斯韦方程组的边界条件

Maxwell 方程组的精妙之处在于其在不同介质的交界面上“自带”边界条件，无须外设。这点是其超越其它许多方程（如流体力学方程）的地方。在界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍可使用。这一节我们就从积分形式的场方程出发导出交界面两边 Maxwell 方程的边界条件。

对应$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$的积分形式是

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int\rho_f d\tau$$



如图所示，**定义界面的方向矢量为介质 2 指向介质 1 的单位方向矢量**$\vec{n}$，横跨介质的分界面做一扁平的柱体，两个底面平行于界面，分别为$\Delta\vec{S}_1=\Delta S\vec{n}$及$\Delta\vec{S}_2=-\Delta S\vec{n}$，高度 h。为了得到场在界面两边的行为，先令 h 趋向于 0，此时显然 D 在侧表面的积分趋于 0，因此，

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\Delta\vec{S}_1\cdot\vec{D}_1+\Delta\vec{S}_2\cdot\vec{D}_2=\Delta S\cdot(\vec{n}\cdot\vec{D}_1-\vec{n}\cdot\vec{D}_2)=q_f\ ,$$

其中q_f为柱体内的**自由电荷量（不包括因为极化产生的束缚电荷!）**。在$\Delta S\to 0$时，我们进一步得到

$$\boxed{\vec{n}_1\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\sigma_f} \qquad (1.6.1)$$

$\sigma_f=q_f/\Delta S$是交界面上的**自由电荷面密度**。在一般情况下$\sigma_f=0$（没有自由电荷，或是自由电荷呈现体分布），**D 场的法向分量守恒。**

同理，对应方程$\nabla\cdot\vec{B}=0$，容易得到**B 场的法向分量连续**的结论：

$$\boxed{\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=0\Rightarrow B_{n1}=B_{n2}} \qquad (1.6.2)$$

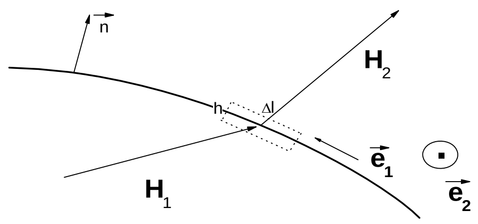
对应第 4 条公式$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$的积分形式为

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{j}_f\cdot d\vec{S}+\int \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\cdot d\vec{S}$$

假设$\vec{e}_1,\vec{e}_2$为界面上相互垂直的两个方向矢量，其与界面方向矢量$\vec{n}$呈右手螺旋：

$$\vec{n}\times\vec{e}_1=\vec{e}_2,\quad \vec{n}\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1$$

则如图所示在界面处画一个长为Δl（方向沿$\vec{e}_1$），宽为 h 的矩形。仍然先考虑$h\to 0$，则 **H** 场在 h 上的积分趋于 0。于是 **H** 场在整个环路上的积分为：



$$\vec{H}_1\cdot\Delta\vec{l}_1+\vec{H}_2\cdot\Delta\vec{l}_2=\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}=\vec{j}_f\cdot\vec{e}_2\left(h\cdot\Delta l\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(D\cdot\Delta l\cdot h\right)$$

一般情况下边界处$\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$是有限值，则在$h\to 0$时，上式右边第 2 项为零。右边第 1 项在界面存在<u>面电流分布时</u>不为 0。定义$\vec{j}_f\cdot h\xrightarrow{h\to 0}\vec{\alpha}_f$为面电流分布，我们便有

$$\vec{e}_1\cdot\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=\vec{\alpha}_f\cdot\vec{e}_2\,, \tag{1.6.3}$$

考虑面内另一个方向，可得

$$\vec{e}_2\cdot\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=-\vec{\alpha}_f\cdot\vec{e}_1 \tag{1.6.4}$$

非常容易将上（1.6.3）-（1.6.4）式改写成更一般紧凑的形式

$$\boxed{\vec{n}\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=\vec{\alpha}_f} \tag{1.6.5}$$

要证明（1.6.5）式，可将矢量$\vec{H}_1-\vec{H}_2$分解到$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$方向，再根据$\vec{n}\times\vec{e}_1=\vec{e}_2,\vec{n}\times\vec{e}_2=\vec{e}_1$。

同理，对于方程$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$，与上面的推导比较可知，相应的边界条件为

$$\boxed{\vec{n}\times\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=0}, \tag{1.6.6}$$

故电场的切向分量连续。

注：

（1）4 条边界条件怎么记？可以很容易通过将 Maxwell 方程中的 $\nabla \to \vec{n}$，再将体分布（$\rho,\vec{j}$）换成面分布 $\sigma,\vec{\alpha}$。

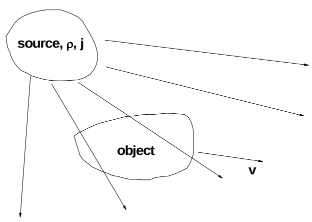
（2）在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是 E，H 场切向分量连续，D，B 法向方向连续。只有当有自由面电荷（流）分布时，才有 H 场与 D 场的不连续。而所谓面分布，其实是真实的体分布的一种简化，亦即，电荷/流分布在非常薄的一层介质里。此时，若我们不关心此薄层里的场分布，则跨越这个薄层的场当然不连续。

第二章　电磁场的守恒定律和对称性

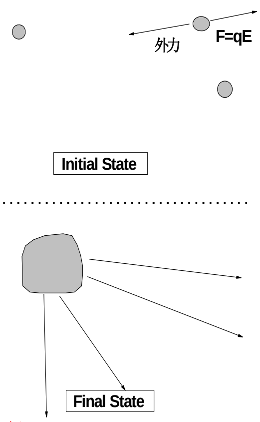
电磁场作为一种物质的存在方式，具有能量、动量以及角动量。如何得到这样一个结论呢？可以从两方面来看。

（1）　假设空间存在一电磁场 $\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$，由置于远处的源电荷（电流）激发。

在此空间中放置一带电体，则后者会受到电场的作用力而能量增加。同时带电体运动后产生电流，而电流又会受到磁场的作用力因此带电体的动量发生改变。这些机械能及机械动量的增加不是无中生有的，只能是电磁场本身具有的能量以及动量转化而来的。你可能会 Argue 说：这些能量动量可以是源电荷的机械能及机械动量贡献的！然而实验发现，即使我们将源关掉，在一段时间内，空间的电磁场不会立刻消失，仍然具有对带电体做功及改变其动量的能力，这证明带电体的能量动量不是由源电荷/电流直接提供的，而是由电磁场提供的。



（2）　另一方面，也可以考虑源电荷/电流在建立电磁场时的能量/动量变化。以电场为例，考虑产生最终电场的电荷是原本散落在无限远处的一系列点电荷组成的。为了建立这个电场分布 $\vec{E}(\vec{r},t)$，这些电荷从无限远处被准静态地一个个搬了过来。在这个“搬动”的过程中一直必须有外力来平衡电场对电荷的作用力，因此一直需要不断的外力对体系做功。最后建立完最终的电场后，外力在此过程中做的总功到哪里去了？- 全部转化成电磁场的能量！动量也是完全一样的 Argument。

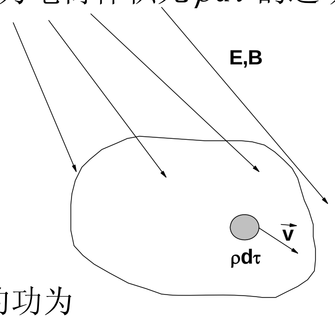


在《电磁学》的学习中，我们利用第 2 个图像计算了电容器中静电场的总能 $U_E=\dfrac{1}{2}CV^2$ 以及电感中的静磁场的总能 $U_B=\dfrac{1}{2}LI^2$。然而这样的推导不能告诉我们局域的场的能量密度 – 我们得到能量密度只能通过相当不严格的类比。下面我们将利用第一种方法来系统研究电磁

场的局域能/动量密度。

§ 2.1 真空中电磁场的能量守恒定律

先考察电磁场对处于其中的带电体所作的功．电磁场不能直接“看到”任何物质，而只能“看到”物质中的电荷/电流，场对一块物质的作用力是通过对其中的电荷/电流作用发生的。因此我们下面研究电磁场对处于其中的电荷所作的功。由于磁场作用在运动电荷的力总与速度方向垂直，磁场对电荷不作功，所以我们只需求电场对电荷所作的功即可．若空间电荷分布为ρ，则$d\tau$内的电荷为$\rho d\tau$，它在dt时间内移动的距离$d\vec{l}=\vec{v}dt$，$\vec{v}$为电荷体积元$\rho d\tau$的运动速度，于是场在dt时间内对$\rho d\tau$所做的功为



$$dR=\vec{F}\cdot d\vec{l}=\rho d\tau\vec{E}\cdot d\vec{l}=\rho d\tau\vec{E}\cdot\vec{v}dt=\vec{E}\cdot\vec{j}d\tau dt$$

单位时间内，场对空间某区域内的电荷所作的功为

$$\frac{dR}{dt}=\int\vec{E}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (2.1.1)$$

场对带电体做功增加了带电体的机械能W_m，故

$$\frac{dW_m}{dt}=\int\vec{E}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (2.1.2)$$

下面我们利用 Maxwell 方程将$\vec{j}$消除，而使得方场中仅仅留下电磁场 **E**，**B** 等。由麦克斯韦方程组中的第四式可见

$$\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

于是得到

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{E}-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \qquad (2.1.3)$$

因为所有的守恒律都满足类似电荷（流）守恒的一个公式，我们的任务是试图将（**2.1.3**）改写成对时间、空间的全微分形式,。注意到矢量运算恒等式

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)}$$

Tips *：这个公式可以通过类比矢量混合积$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$，以及注意到微分运算必须对括号内的所有量都进行，得到。*

可得

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \qquad (2.1.4)$$

上式第 1，3 项已都是全微分的形式。对第 2 项，根据 Maxwell 方程组中的第二式 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，可得

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

也成为全微分的形式。将上式代入（2.1.4）可得

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

令

$$\boxed{\vec{S}_P(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{H}} \qquad (2.1.5)$$

$$\boxed{u(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)} \qquad (2.1.6)$$

于是利用上述这些等式，(2.1.2)式可最终写成

$$\begin{aligned}\frac{dW_m}{dt}&=-\int\nabla\cdot\vec{S}_p d\tau-\frac{\partial}{\partial t}\int ud\tau\\&=-\oint\vec{S}_p\cdot d\vec{S}-\frac{\partial}{\partial t}\int ud\tau\end{aligned} \qquad (2.1.7)$$

将上式进一步改写为

$$\frac{d}{dt}\left[W_m+\int ud\tau\right]=-\oint\vec{S}_p\cdot d\vec{S} \qquad (2.1.8)$$

物理意义非常明晰 – 在一个闭合空间内物理量 $W_m+\int ud\tau$ 的增加等于从边界流入闭合空间的 $\vec{S}_p$ 的大小。对应电荷-电流守恒定律，显然前者是这个闭合空间中的总能量，而后者是能量流密度。因为 W_m 是空间里物质的机械能量，$u(\vec{r},t)$ 应当描述其他的能量形式，这里其它的能量形式只能是电磁场的能量！因此其物理意义是 r 点处 t 时刻电磁场的能量密度，$\vec{S}_P(\vec{r},t)$ 即为相应的能流密度，叫做坡印廷矢量。当考察区域是全空间时，由于电流和电荷分布在有限区域，在无穷远边界上电磁场应为零，故 $\vec{S}_p\equiv 0$。此时有

$$\frac{dW_m}{dt}=-\frac{dW_{e,m}}{dt} \qquad (2.1.9)$$

其中

$$W_{e,m}=\int_{\infty}u(\vec{r},t)d\tau$$

为空间电磁总能量。（2.1.9）式表明机械能与电磁场能量可以相互转化，但总和为守恒量。在无源空间内没有任何其他的能量形式，$W_m=0$，(2.1.8)式变为

$$\nabla\cdot\vec{S}_p(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r},t)=0 \qquad (2.1.10)$$

这与电荷守恒的连续性方程完全一样，又一次说明了电磁场是一种物质。

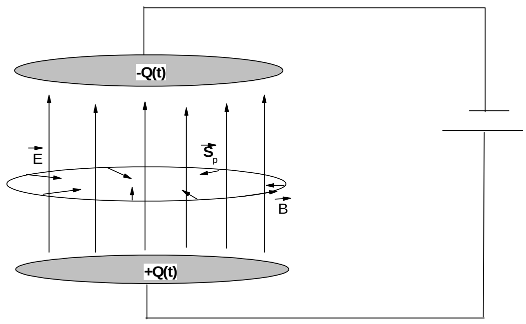
[例 1] 试考察正在缓慢充电的电容器的能流。

解：设电容器由两块圆形平板构成．它们的半径均为 r，间距为 h，其中电场为 $E(t)=\dfrac{Q(t)}{\pi r^2\varepsilon_0}$，则电容器中的总能量为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cdot\Omega$$

其中 $\Omega=\pi r^2h$ 是电容器的体系。我们来看一下能流流动的情况。在充电过程中 E 在缓慢变化，设 $\vec{E}=E(t)\vec{e}_z$，则由麦克斯韦方程组的第四式可知，变化电场会产生位移电流从而进一步产生磁场：

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$



可得电容器内磁场(选取柱坐数系 ρ,ϕ,z)为

$$\vec{B}=\frac{1}{2\pi\rho}\mu_0\varepsilon_0\pi\rho^2\frac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\rho\frac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi$$

所以能流密度矢量为

$$\vec{S}_P=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\partial E}{\partial t}\rho(-\vec{e}_\rho)$$

其方向指向电容器中心轴线。对电容器侧面积分则得流入电容器的能量为

$$\int\vec{S}_P\cdot d\vec{S}=\frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\partial E}{\partial t}r\cdot 2\pi rh=\pi r^2h\varepsilon_0E\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}W_{e,m}$$

它正好等于电容器中能量的增加率。这说明能量不是从导线中流过来的，而是从电容器外面的空间中通过电容器侧面流进电容器的。显然，通常认为能量是从导线中流过来的直觉是错误的。

注：考虑任何一个静电状态，都必须考虑对应的电荷分布是如何建立的，而考虑这个电荷建立的过程，就不可避免地引入电场的变化，从而因位移电流进一步产生磁场。这样一来，在整个建立场的过程中就有能流存在，最终的静电能正是通过这些能流一点点建立起来的。

§ 2.2 电磁场的动量守恒定律

下面要利用相似的方法考虑电磁场的动量。根据力的定义，带电体的机械动量的变化为场对带电体的作用力。带电体受电磁场的 Lorentz 力，则其机械动量的变化率为：

$$\frac{d\vec{G}_m}{dt}=\int(\rho d\tau\vec{E}+\rho d\tau\vec{v}\times\vec{B})=\int(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})d\tau=\int\vec{f}d\tau \qquad (2.2.1)$$

利用场方程把等式右边的 ρ 和 $\vec{j}$ 消去，力密度改写为

$$\vec{f}=\varepsilon_0\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\times\vec{B} \qquad (2.2.2)$$

仿照电磁能量的推导，我们希望能将上式改写成对时间、空间的全微分。先考虑时间部分，配分可得

$$-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) \qquad (2.2.3)$$

带入（2.2.2）式后，考虑所有与电场 **E** 有关的项：

$$\begin{aligned}&\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\left[\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E}\right]\\&=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla\left(\frac{1}{2}E^2\right)=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla\cdot(\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I})\end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

注：倒数第二步用到了并矢运算公式 $\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{B}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{B}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}$*。证明如下* $\partial_i(A_iB_j)\hat{e}_j=\left(\partial_iA_i\right)B_j\hat{e}_j+A_i\left(\partial_iB_j\right)\hat{e}_j$ *。倒数第一步用到了恒等式* $\nabla\varphi=\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})$ *，证明如下* $\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})=\partial_i(\varphi\overleftrightarrow{I})_{ij}\hat{e}_j=\partial_i(\varphi\delta_{ij})\hat{e}_j=\partial_i(\varphi)\hat{e}_i=\nabla\varphi$

下面考虑（2.2.2）式中与磁场相关的项 $\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}$。与电场类比，可以加上一

项恒为 0 的 $\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}$，故有与磁场相关的项为，

$$\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}+\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}=\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B})-\nabla\cdot(\frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I})$$

利用这些关系式，(2.2.2)式可写成

$$\vec{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} \qquad (2.2.5)$$

其中

$$\boxed{\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}} \qquad (2.2.6)$$

$$\boxed{\vec{g}=\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=\frac{1}{c^2}\vec{S}_P} \qquad (2.2.7)$$

根据（2.2.5-7）及（2.2.1）式，我们就得到

$$\boxed{\frac{d\vec{G}_m}{dt}=-\oint d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{d}{dt}\int\vec{g}d\tau} \qquad (2.2.8)$$

完全类似对电磁能量的讨论，上式显示 $\vec{g}$ 就是电磁场的**动量密度**，而 $\overleftrightarrow{T}$ 是**动量流密度**，是个张量（并矢），这是因为动量是个矢量，与能量不同。对每个动量分量（如 x 分量），(2.2.8)可以改写成 $\frac{dG_m^x}{dt}=-\oint d\vec{S}\cdot\vec{T}_x-\frac{d}{dt}\int g_xd\tau$，即为我们熟悉的形式。而

$$\vec{G}_{e,m}=\int_{\Delta\Omega}\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau \qquad (2.2.9)$$

就是 $\Delta\Omega$ 体积内的电磁场所携带的总动量。

注：

（1）与电磁能量不同，动量密度的存在要求必须有磁场。另外，我们注意到动量密度与能流密度相关，这里有什么物理值得我们深思呢？

（2）许多年来，人们往往被牛顿力学中的"力"、"功"、"力矩"等概念所"毒害"，其实现代科学发现早已摒弃了这些机械的概念，因为它们不本质，一般情况下难以定义。取而代之的是"动量"、"能量"，"角动量"等更本质的概念。受力可以描述为动量在改变，做供=能量发生变化；受到力矩表现为角动量发生变化。至于为什么只有这 7 个守恒量？那是因为我们所处的是 3+1 维空间，3 维空间的平移不变性给出动量守恒、各向同性给出角动量守恒，至于能量守恒是因为时间轴的均匀性决定的。

习题

P. 59， 2.1

补充：

1）仿照课件，推导出 M 场在边界的连接条件

2） 仿照课件，推导出极化强度 $\vec{P}$ 在界面上的边界条件。

<u>深入思考下面问题并作成 Note（选作）</u>

就目前来讲，大家对边界条件的认识一定是模糊的，不妨做如下课题来加深理解。考虑一个半径为 R 介质球（相对介电常数为 ε_r ），由于某种外力的原因将一些自由电荷均匀分布在球内的厚度为 δ 的一个壳层内，求此时空间的 D，E 场分布，并研究边界两边的场是否满足边界条件。当 $\delta \to 0$ 时，重复以上的讨论。问问自己：以上模型能否在实际中实现？最后，为深入理解 H，B 场的边界条件，仿照上面的讨论自己定义一个体系进行深入讨论。