东校区 2011 学年第一学期 11 级《高等数学一》期末试题 A 卷

学院 ＿＿＿＿＿ 专业 ＿＿＿＿＿ 学号 ＿＿＿＿＿ 姓名 ＿＿＿＿＿ 评分＿＿＿＿＿

教师签名 ＿＿＿＿＿

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

一． 单项选择题（每小题 2 分，共计 12 分）

1．$f(x)=x^2$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理，则定理中的 $\xi=$（ B ）．

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $-\frac{1}{2}$

2．若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值，且 $f'(x_0)$ 存在，则必有（ A ）．

(A) $f'(x_0)=0$　(B) $f'(x_0)>0$　(C) $f''(x_0)>0$　(D) $f'(x_0)$ 的值不确定

3．下列平面中通过坐标原点的平面是（C）

（A）$x=1$　（B）$x+2y+3z+4=0$　(C) $3(x-1)-y+(z+3)=0$　(D) $x+y+z=1$

4．下列极限存在的是（D）

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x}{x+y}$　(B) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{x+y}$　(C) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2}{x^2+y}$　(D) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\sin(\frac{1}{x+y})$

5．函数 $f(x,y)$ 在点 P 处可微的充分条件是（C）

(A) $f(x,y)$ 的全部一阶偏导数在点 P 处均存在。

(B) $f(x,y)$ 在点 P 处连续。

(C) $f(x,y)$ 的全部一阶偏导数在点 P 处连续。

(D) $f(x,y)$ 在点 P 处连续且全部一阶偏导数在点 P 处均存在 。

6．设 $x=3t^2$，$y=4t^3$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$（ A ）。

(A) $\frac{1}{3t}$　　(B) $3t$　　(C) 2　　(D) $-\frac{1}{2t^2}$

二． 填空题（每空 2 分，共计 8 分）

1．设 $F(x),G(x)$ 是 $f(x)$ 的两个原函数，则 $F'(x)=G'(x)=$ $\underline{f(x)}$，$[F(x)-G(x)]'=$ $\underline{0}$。

2．若两平面 $kx+y+z-k=0$ 与 $kx+y-2z=0$ 互相垂直，则 $k=$ $\underline{\pm 1}$。

3．一直线与三坐标轴间的夹角分别为 α、β、γ，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$ $\underline{2}$。

三． 解答下列各题（1-10 题每小题 7 分，11-12 题每小题 5 分）

1．求函数 $f(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2+2$ 在点 $P_0(3,1)$ 处沿从 P_0 到 $P(6,5)$ 方向的方向导数及在 P_0 点的梯度。

解：$f_x=3x^2-6xy+3y^2$，$f_y=-3x^2+6xy$，$f_x(P_0)=27-18+3=12$，$f_y(P_0)=-27+18=-9$

$\vec{r}=\overrightarrow{P_0P}=(3,4)$，$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{|\overrightarrow{P_0P}|}=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{P_0}=f_x(P_0)\cdot\cos\alpha+f_y(P_0)\cdot\cos\beta=12\times\frac{3}{5}-9\times\frac{4}{5}=0$

$\mathrm{grad}\, f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0))=(12,-9)$.

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt}{x^2}$。$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2-x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot 2x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2)\cdot e^{-x^2}=2.$

3．求函数 $y=xe^{-5x}$ 的凹凸区间、拐点和渐近线。

解：$y'=1\cdot e^{-5x}+x\cdot e^{-5x}\cdot(-5)=e^{-5x}\cdot(1-5x)$

$y''=-5e^{-5x}\cdot(1-5x)+e^{-5x}\cdot(-5)=-5e^{-5x}(2-5x)$.

令 $y''=0$ 得 $x=\frac{5}{2}$.

	$(-\infty,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
$y=xe^{-5x}$	$\cap$	拐点	$\cup$

① 凸区间 $(-\infty,\frac{2}{5}]$，凹区间 $(\frac{2}{5},+\infty)$ ②，拐点 $(\frac{2}{5},\frac{2}{5}e^{-2})$

因 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{5x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{5e^{5x}}=0$

③ 故 $y=0$ 是其水平渐近线。

4. 计算不定积分 $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

令 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$dx=6t^5dt$

$\sqrt[3]{x}=t^2$，$\sqrt{x}=t^3$

$=\int\frac{6t^5dt}{(1+t^2)\cdot t^3}$

$=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt$

$=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt$

$=6\left[\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$.

5. 计算定积分 $\int_0^{\pi}x\sin xdx$. $=-\int_0^{\pi}x\,d\cos x$

$=-[x\cdot\cos x\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\,dx]$

$=-(\pi\cdot\cos\pi-\sin x\big|_0^{\pi})$

$=-\pi\cdot(-1)=\pi$.

6. 设$u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2), f\in C^2$, 求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot 2x=f_1'+2x\cdot f_2'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+f_{12}''\cdot 2x+2\cdot f_2'+2x[f_{21}''+f_{22}''\cdot 2x]$$

$$=f_{11}''+2f_2'+2x(f_{12}''+f_{21}'')+4x^2f_{22}''$$

7. 求函数 $y=\dfrac{2}{2-x}$在点 $x=0$处的 n阶泰勒公式。

$$y=\frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+o(x^n)$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^3}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}x^n+o(x^n)$$

8. 已知直线$L_1:\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+z-2=0\end{cases}$和$L_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$,

证明L_1和L_2平行，并求过这两条直线的平面方程。

① 先把L_1化成对称式: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$, $\vec{s_1}=(-1,2,3)$

$\vec{s_1}=\vec{s_2}$, 即 $L_1 \parallel L_2$

② L_1上点$P_1(1,-1,1)$, L_2上点 $P_2(1,-1,2)$, $\overrightarrow{P_1P_2}=(0,0,3)$

③ 所求平面法方向 $\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{s_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&3\\-1&2&3\end{vmatrix}=3(-2\vec{i}-\vec{j}+0\cdot\vec{k})$

④ 所求平面为: $-2(x-1)+(-1)\cdot(y+1)+0\cdot(z-2)=0$

即: $2x+y-1=0$

9. 求曲线 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$ 在点 M_0（1,−2,1)）处的切线方程。

解：$\begin{cases} dx+dy=-dz \\ xdx+ydy+zdz=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx+dy=-dz \\ xdx+ydy=-zdz \end{cases}$

点 $M_0(1,-2,1)$ 对应 $\begin{cases} dx+dy=-dz \\ dx-2dy=-dz \end{cases} \Longrightarrow dy=0,\ dz=-dx.$

过 $M_0(1,-2,1)$ 之切向量 $\vec{T}_{tn}(M_0)=(dx,dy,dz)=(dx,0,-dx)$ 或 $(1,0,-1)$

切线：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

10. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

证：① $0<|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\le\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\le|y|$.

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$. 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$ 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续

证明：*f(x,y)* 在（0, 0）处连续，且在（0, 0）处两个一阶偏导数均存在，但 *f(x,y)* 在(0, 0) 处不可微。

证：② $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\frac{\Delta x\cdot0}{\sqrt{\Delta x^2+0}}-0}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{\frac{0\cdot\Delta y}{\sqrt{0^2+\Delta y^2}}-0}{\Delta y}=0$

③ 由 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}\ \overset{\text{沿}y=kx}{=\!=}\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}\neq0$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

11. 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}$ $(x>0,y>0,z>0,r>0)$ 下的极小值。

解：设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{r})$

则
$$\begin{cases} F_x=yz-\frac{\lambda}{x^2}\overset{令}{=}0 \\ F_y=xz-\frac{\lambda}{y^2}\overset{令}{=}0 \\ F_z=xy-\frac{\lambda}{z^2}\overset{令}{=}0 \\ F_\lambda=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{r}\overset{令}{=}0 \end{cases}$$

得 $x^2yz=xy^2z=xyz^2=\lambda$

即 $x=y=z$ 代入 $F_\lambda=0$

得 $\frac{3}{x}=\frac{3}{y}=\frac{3}{z}=\frac{1}{r}$

$x=y=z=3r$

极小值点 $(3r,3r,3r)$，极小值为 $f(3r,3r,3r)=27r^3$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。

证明： (1) 存在一点 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(c)=c$；

(2) 存在一点 $d\in(0,c)$，使得 $f'(d)=1$。

证：令 $\varphi(x)=f(x)-x$

(1) 由 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，从而 $\varphi(x)$ 也在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续.

且 $\varphi(1)=f(1)-1=0-1<0$

$\varphi(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

由连续函数的零点定理，至少存在一点 $C\in[\frac{1}{2},1]$，使 $\varphi(C)=0$，即 $f(c)=C$.

(2) 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，$C\in[\frac{1}{2},1]$

从而 $\varphi(x)$ 在 $[0,C]$ 上连续，在 $(0,C)$ 内可导.

又 $\varphi(0)=f(0)-0=0-0=0$

$\varphi(C)=f(C)-C=0$

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,C)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，

即 $f'(\xi)-\xi=0$

$f'(\xi)=\xi$，$\xi\in(0,C)$