电动力学习题课(六)

Dec. 31, 2012

1 部分作业习题解答:

习题20.8.4:
一个具有场强为$E=3\times10^{10}V/m$的电磁波从真空垂直入射到一个绝缘介质平面上, 介质的介电常数为$\epsilon_r=1.44\epsilon_0$, 试计算电磁波在介质表面上所产生的压力.
解: 根据Fresnel公式:
反射率为:

$$r=\frac{E_1^-}{E_1^+}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=-\frac{1}{11}\tag{1}$$

透射率为:

$$t=\frac{E_2^+}{E_1^+}=\frac{2Z_2}{Z_2+Z_1}=\frac{10}{11}\tag{2}$$

其中, $E_i^{\pm}$表示第i层介质中的向前向后传播的电场分布, Z_i表示第i层介质的阻抗. 通过Maxwell张量$\overleftrightarrow{T}$计算介质表面受到的电磁力密度$\vec{f}_n$[1]:

$$\begin{aligned}\vec{f}_n&=-\hat{n}\cdot\left\langle\overleftrightarrow{T}\right\rangle=-\hat{n}\cdot\left\langle\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}\right\rangle=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2\hat{n}\\&=-\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_1^+\right|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_1^-\right|^2-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_2^+\right|^2\right)\hat{n}\\&=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_1^+\right|^2\left(1+|r|^2-|t|^2\right)\hat{n}\\&=-\left(7.24\times10^8N\right)\hat{n}\end{aligned}\tag{3}$$

习题23.1:
仿照课件中对真空中格林函数解的推导, 利用因果关系, 推导均匀的负折射介质$\epsilon<0,\mu<0$中的格林函数解, 并且解释所得的格林函数解的物理意义.
解: 在Lorentz规范下, 真空中的电磁场$A^\mu(\vec{r},t)$波动方程如下:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A^\mu(\vec{r},t)=-j^\mu(\vec{r},t)\tag{4}$$

因此, 真空中自由传播格林函数可以定义如下(按照课件):

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G\left(\vec{r}-\vec{r}',t-t'\right)=-\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\delta\left(t-t'\right)\tag{5}$$

---

[1]注: $\frac{\partial\vec{p}}{\partial t}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$

对上式作傅立叶变换[2]:

$$G\left(\vec{R},\vec{T}\right)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G\left(\vec{k},\omega\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}-i\omega T}d\vec{k}d\omega \tag{6}$$

解得:

$$G\left(\vec{k},\omega\right)=\frac{1}{\vec{k}^2-\vec{k}_0^2} \tag{7}$$

先对$\vec{k}$作逆傅立叶变换:

$$G\left(\vec{R},\omega\right)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\vec{k}^2-\vec{k}_0^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}d^3\vec{k}=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{iR}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{k^2-k_0^2}e^{ikR}dk \tag{8}$$

求解前, 先考察介质中平面波的能流$\vec{S}$沿z轴正方向传播, 并且在波矢$\vec{k}$中引入一个很小的虚部ε, 这意味着能量在传播过程中衰减:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}^*\times\vec{H}\right)=\frac{1}{2\omega\mu}\left|E_0\right|^2e^{-2\varepsilon z}\mathrm{Re}\vec{k} \tag{9}$$

对于正常介质$\epsilon>0,\mu>0$, 则Re$\vec{k}$为$+\hat{z}$方向, 推迟, 自由格林函数为:

$$\begin{aligned}G\left(\vec{R},\omega\right)&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{iR}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{k^2-(k_0+i\varepsilon)^2}e^{ikR}dk=\frac{1}{4\pi R}e^{ik_0R}\\G\left(\vec{R},T\right)&=\frac{1}{2\pi}\int G\left(\vec{R},\omega\right)e^{-i\omega T}d\omega=\frac{1}{4\pi R}\delta\left(T-\frac{R}{c}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

对于负折射介质$\epsilon<0,\mu<0$, 则Re$\vec{k}$为$-\hat{z}$方向, 推迟, 自由格林函数为:

$$\begin{aligned}G\left(\vec{R},\omega\right)&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{iR}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{k^2-(-k_0+i\varepsilon)^2}e^{ikR}dk=\frac{1}{4\pi R}e^{-ik_0R}\\G\left(\vec{R},T\right)&=\frac{1}{2\pi}\int G\left(\vec{R},\omega\right)e^{-i\omega T}d\omega\end{aligned} \tag{11}$$

讨论:

- 对于负折射介质, 其能流$\vec{S}$方向和波矢$\vec{k}$方向相反, 意味着从点源辐射出来的"汇聚"球面波(从波矢$\vec{k}$的角度), 能量是往外辐射的. 因此, 仍然满足因果关系.

- 通过推迟, 自由格林函数计算负折射介质中的辐射场. 提示:

$$A^\mu(r,t)=\int G\left(r-r',t-t'\right)j^\mu\left(r',t'\right)dr'dt' \tag{12}$$

- Eqs. (10, 11) 关于时间的逆变换, 仅仅适用于无色散的情况. 对于正常介质, 譬如真空, 无色散条件可以严格满足, 但是真实世界中并不存在负折射"真空", 即对于负折射介质来说, 不可能是无色散的, 负折射介质的介电常数ϵ和磁导率μ只能在某一个频率(或某一段频率)同时为负, 其他的频段可能为正.

  对于色散关系$\epsilon=\epsilon(\omega),\mu=\mu(\omega)$未知的介质, 只能计算到频域格林函数解为止, 即单频下的格林函数解$G\left(\vec{r}-\vec{r}',\omega\right)$, 要求解时域格林函数解$G\left(\vec{r}-\vec{r}',\vec{t}-\vec{t}'\right)$, 还必须知道具体的色散关系.

---

[2]注: $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$, $\vec{T}=t-t'$.

2 Example 1

如Fig. 2所示, 一对半径为r_1和r_2的同轴导体构成了一个波导, 其中$\rho \in (r_1, r_2)$的区域, $z < 0$的部分是真空, $z > 0$的部分是相对介电常数为ϵ_r的电介质, 试求:

(a) 此波导中的TEM波模:

(b) 假如有一束TEM模电磁波从$-z$方向入射, 求体系的反射系数和透射系数.

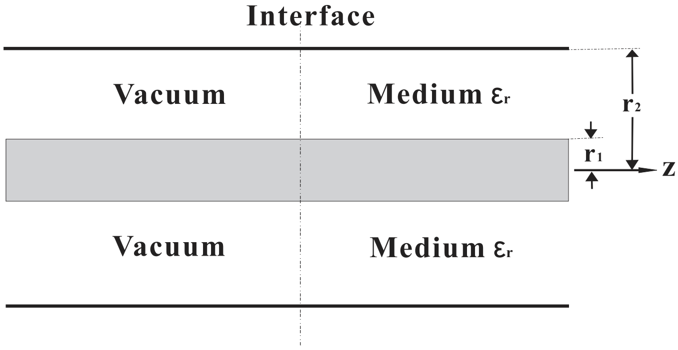

Figure 1: *例一示意图*

解: **(a)** 先讨论$z > 0$的区域, 由于考虑的是TEM模, 即$E_z = B_z = 0$, 故可设:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_\perp(x, y) \exp\{ik_{2z}z - \omega t\} \tag{13}$$
$$\vec{H}_2(\vec{r}, \omega) = \vec{H}_\perp(x, y) \exp\{ik_{2z}z - \omega t\} \tag{14}$$

其中$\vec{E}_\perp, \vec{B}_\perp$表示电场和磁场在xy平面内,

$$k_{2z}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_r \tag{15}$$

那么[3]

$$\nabla \cdot \vec{E}_2(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\perp \cdot \vec{E}_{2\perp}(x, y) = 0 \tag{16}$$
$$\nabla \times \vec{E}_2(\vec{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \vec{H}_2(\vec{r}, \omega) \quad \Rightarrow \quad \nabla_\perp \times \vec{E}_{2\perp}(x, y) = 0 \tag{17}$$

由Eq. (17)知, 可以引入一标量函数φ, 有

$$\vec{E}_{2\perp} = -\nabla_\perp \varphi \tag{18}$$

联立Eqs. (18, 16)得:

$$\nabla_\perp^2 \varphi = 0 \tag{19}$$

[3]柱坐标(ρ, ϕ, z)下,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \vec{A} &= \hat{e}_\rho \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\Big) + \hat{e}_\phi\Big(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\Big) + \hat{e}_z \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\Big) \\
\nabla \psi &= \hat{e}_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \hat{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}$$

Eq. (19)是泊松方程, 其解为:

$$\varphi = C_0' \ln \rho + D_0' + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(C_m' \rho^m + D_m' \rho^{-m} \right) e^{im\phi} \tag{20}$$

根据Eq. (17), 并且代入PEC边界条件, 解得:

$$\vec{E}_{2\perp}^{+} = \hat{e}_\rho \frac{C_2^+}{\rho} \exp\{ik_{2z}z - \omega t\} \tag{21}$$

其中$C_2^+ = -C_0'$, 进而

$$\vec{H}_{2\perp}^{+} = \frac{k_{2z}}{\omega\mu_0} \hat{e}_z \times \vec{E}_2 = \hat{e}_\phi \frac{C_2^+ \sqrt{\epsilon_r}}{Z_0 \rho} \exp\{ik_2 z - \omega t\} \tag{22}$$

其中C_2^+是一常数, Z_0是真空阻抗. Eqs. (21, 22)就是此波导$z > 0$区域的TEM模式的电磁场, 类似可求出波导$z < 0$区域的TEM模式的电磁场:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp}^{+} &= \hat{e}_\rho \frac{C_1^+}{r} \exp\{ik_{1z}z - \omega t\} & (23) \\ \vec{H}_{1\perp}^{+} &= \hat{e}_\phi \frac{C_1^+}{Z_0 \rho} \exp\{ik_{1z}z - \omega t\} & (24) \end{aligned}$$

其中C_1^+是一常数, $k_{1z} = \omega / c$.
(b) 现有一束TEM模式的电磁波从真空入射到交界面$z = 0$, 不妨假设反射波和透射波还是TEM模式, 那么入射波用Eqs. (23, 24)来表示, 透射波用Eqs. (21, 22)来表示, 反射波记为:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp}^{-} &= \hat{e}_\rho \frac{\mathrm{C}_1^-}{r} \exp\{-ik_{1z}z - \omega t\} & (25) \\ \vec{H}_{1\perp}^{-} &= -\hat{e}_\phi \frac{\mathrm{C}_1^-}{Z_0 \rho} \exp\{-ik_{1z}z - \omega t\} & (26) \end{aligned}$$

然后根据$\vec{E}, \vec{H}$场的切向分量连续, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{C_1^+}{\rho} + \frac{C_1^-}{\rho} &= \frac{C_2^+}{\rho} & (27) \\ \frac{C_1^+}{Z_0\rho} - \frac{C_1^-}{Z_0\rho} &= \frac{C_2^+ \sqrt{\epsilon_r}}{Z_0 \rho} & (28) \end{aligned}$$

解Eqs. (27, 28)可得:

$$\begin{aligned} C_2^+ &= \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} C_1^+ & (29) \\ C_1^- &= \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} C_1^+ & (30) \end{aligned}$$

那么反射系数R和透射系数T为:

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{C_1^-}{C_1^+} \right|^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \right)^2 & (31) \\ T &= \left| \frac{C_2^+}{C_1^+} \right|^2 \sqrt{\epsilon_r} = \frac{4\sqrt{\epsilon_r}}{(1 + \sqrt{\epsilon_r})^2} & (32) \end{aligned}$$

讨论:

- 题(b) 的解答中假定了反射波和透射波都是TEM波, 能否证明？

- 一般的圆柱形, 矩形波导都是不支持TEM模的, 而此题的同轴电缆支持TEM模, 实际上可以证明: 金属封闭单连通截面波导不支持TEM模式的电磁波, 试证明之并思考物理上的理解.

3 Example 2

如Fig. 3所示, 空间有一无穷长带电导线, 电荷线密度为λ, 原来静止, 后突然以恒定速率v沿着z轴正向运动, 求空间P点$(x_0,0,0)$的磁场.

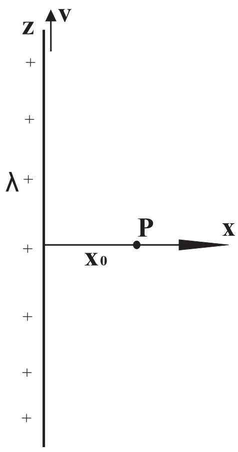

Figure 2: *例二示意图*

解: 根据题意, 电流分布为:

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\lambda v\delta(x)\delta(y)\theta(t)\hat{z} \tag{33}$$

其中$\theta(t)$为阶跃函数. 那么空间任意点$\vec{r}=(r,\theta,z)$的失势$\vec{A}$为

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\vec{r}\,' &(34)\\ &= \hat{e}_z\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\lambda v\delta(x')\delta(y')\theta(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \\ &= \hat{e}_z\frac{\mu_0\lambda v}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(t-\frac{1}{c}\sqrt{\rho^2+(z-z')^2})}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}z' &(35)\end{aligned}$$

进一步, 该点的磁场为:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r},t) &\equiv \nabla\times\vec{A}=-\hat{e}_\phi\Big(\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\Big) &(36)\\ &= \hat{e}_\phi\,\frac{\mu_0\lambda v\rho}{4\pi}\int\frac{\frac{1}{c}\delta(\xi)+\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\theta(\xi)}{\rho^2+(z-z')^2}\mathrm{d}z' &(37)\end{aligned}$$

$$\text{其中}\quad \xi\equiv t-\frac{1}{c}\sqrt{\rho^2+(z-z')^2} \tag{38}$$

那么P点$(x_0,0,0)$的磁场可得:

$$\vec{B}_P=\hat{\phi}\,\frac{\mu_0\lambda v x_0}{4\pi}\int\frac{\frac{1}{c}\delta\Big(t-\frac{1}{c}\sqrt{x_0^2+z'^2}\Big)+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+z'^2}}\theta\Big(t-\frac{1}{c}\sqrt{x_0^2+z'^2}\Big)}{x_0^2+z'^2}\mathrm{d}z' \tag{39}$$

a) 如果$t < x_0/c$, 则

$$\vec{B}_P = 0 \tag{40}$$

b) 如果$t > x_0/c$, 则[4]

$$\vec{B}_P = \hat{e}_\phi \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \frac{1}{x_0\sqrt{1-(\frac{x_0}{ct})^2}} \tag{41}$$

根据Eq. (40, 41)可得到Fig. 3:

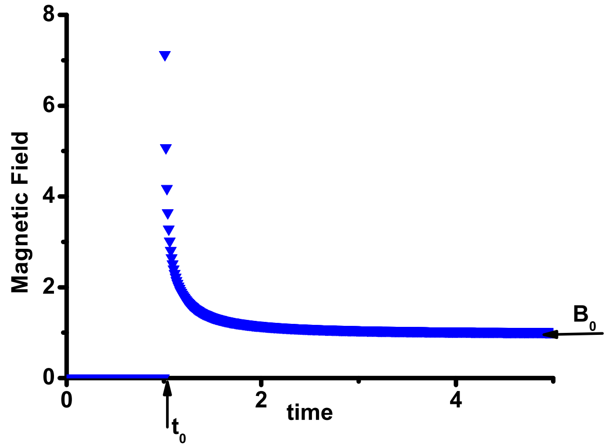

Figure 3: *P点磁场随时间变化的关系图, 其中*$t_0 \equiv x_0/c$, $B_0 \equiv \frac{\mu_0\lambda v}{2\pi x_0}$.

很明显, 上图有三个区间:

- $t < t_0$, 磁场为0, 存在一定的推迟时间:
- $t \approx t_0$, 磁场发散, 思考为什么?
- $t \gg t_0$, 磁场近似为静磁场:

$$\vec{B}_P \to \hat{e}_\phi \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi x_0} \equiv \vec{B}_0 \tag{42}$$

  和安培定律的结果一致.

讨论:

- 思考开关时间的物理意义, 可参考Phys. Rev. B **74**, 045123 (2006).

- 试计算P点的电场强度$\vec{E}$和能流密度$\vec{S}$, 进而算出辐射出去的能量, 思考此能量的来源.

[4]应用类似于下列积分公式, 求解Eq. (39):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x}$$

4 Example 3

简答题6:
对一个截面为3mm × 7mm的波导, 计算其基模的截止频率, 计算在什么频率范围内, 波导的传播模式只有一个模式.

解: 波导的截止频率:

$$\omega_{nm} = c\sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2} \quad ----(2') \tag{43}$$

其中$a = 3\text{mm}, b = 7\text{mm}$. 那么基模$\text{TE}_{01}$的角频率为:

$$\omega_{01} = 1.35 \times 10^{11}(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}) \quad ----(2') \tag{44}$$

第二阶模TE_{02}的截止频率为:

$$\omega_{02} = 2.69 \times 10^{11}(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}) \tag{45}$$

那么当$\omega \in (\omega_{01}, \omega_{02})$时, 波导内的传播模式只有一种, 为$\text{TE}_{01}$. $\quad ----\ (2')$

5 Example 4

解答题14:
如Fig. 5所示, 在xy平面圆心处放置一个半径为R的金属圆环, 金属线的半径可以忽略, 金属圆环在$\phi = 0$处断开了一个非常小的缝隙, 其宽度可以忽略不计, 这个结构就是著名的开口谐振环, 是形成负折射介质的结构单元. 假设在结构中流着频率为ω的交变电流, 其分布为$\text{I}(\phi) = \text{I}_0(1 - \cos\phi)e^{-i\omega t}$, 求这个共振结构所携带的电偶极矩$\vec{p}$和磁偶极矩$\vec{m}$, 并且在远场条件下, 计算该电偶极矩$\vec{p}$和磁偶极矩$\vec{m}$对$\vec{r} = x\hat{e}_x$处的辐射场$\vec{E}$和$\vec{H}$的贡献.

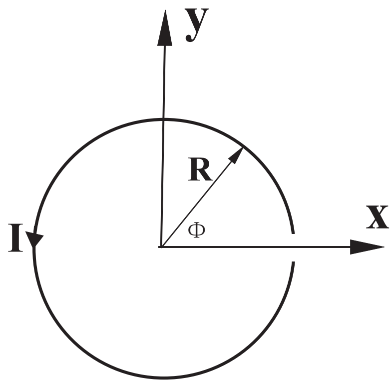

Figure 4: *示意图*

解: 根据题意, 电流分布为:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \text{I}_0(1 - \cos\phi)e^{-i\omega t}\hat{e}_\phi \tag{46}$$

其中,

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{e}_x + \cos\phi\hat{e}_y \tag{47}$$

那么磁偶极矩为:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,', t)\mathrm{d}\vec{r}\,' \quad ---- \quad (1') &(48)\\ &= \frac{1}{2}\int (R\hat{r}) \times [\mathrm{I}_0(1-\cos\phi')e^{-i\omega t}\hat{e}_\phi]R\mathrm{d}\phi' \\ &= \hat{e}_z\frac{\mathrm{I}_0R^2}{2}e^{-i\omega t}\int_0^{2\pi}(1-\cos\phi')\mathrm{d}\phi' \\ &= \hat{e}_z\pi R^2\mathrm{I}_0e^{-i\omega t} \quad ---- \quad (2') &(49)\end{aligned}$$

根据电荷守恒:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \tag{50}$$

$$\Rightarrow \quad -i\omega\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \tag{51}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{i\omega}\nabla\cdot\vec{j} \quad ---- \quad (2') \tag{52}$$

那么电偶极矩为:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\mathrm{d}\vec{r}\,' \quad ---- \quad (1') &(53)\\ &= \frac{1}{i\omega}\int(\nabla'\cdot\vec{j})\vec{r}\,'\mathrm{d}\vec{r}\,' &(54)\\ &= \frac{1}{i\omega}\int(\frac{\mathrm{I}_0e^{i\omega t}}{R}\sin\phi')R(\cos\phi'\hat{e}_x+\sin\phi'\hat{e}_y)R\mathrm{d}\phi' \\ &= \hat{e}_y\frac{\pi R\mathrm{I}_0e^{-i\omega t}}{i\omega} \quad ---- \quad (2') &(55)\end{aligned}$$

考虑远区辐射, 先来计算$\vec{r} = x\hat{e}_x$处电偶极矩辐射场:

$$\begin{aligned}\vec{E}_p &= -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0c^2r}\,\hat{e}_r\times(\hat{e}_r\times[\,\vec{p}\,]) &(56)\\ &= \hat{e}_y\,\frac{\omega^2R\mathrm{I}_0}{4\epsilon_0c^2x}\,\frac{\exp\{-i\omega(t-\frac{x}{c})\}}{i\omega} \quad ---- \quad (1') &(57)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_p &= \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr}\,\hat{e}_r\times[\,\vec{p}\,] &(58)\\ &= \hat{e}_z\,\frac{\mu_0\omega^2R\mathrm{I}_0}{4cx}\,\frac{\exp\{-i\omega(t-\frac{x}{c})\}}{i\omega} \quad ---- \quad (1') &(59)\end{aligned}$$

类似可算出$\vec{r} = x\hat{e}_x$处磁偶极矩辐射场:

$$\begin{aligned}\vec{E}_m &= -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0c^3r}\,\hat{e}_r\times[\,\vec{m}\,] &(60)\\ &= \hat{e}_y\,\frac{\omega^2\mathrm{I}_0R^2}{4\epsilon_0c^3x}\,\exp\{-i\omega(t-\frac{x}{c})\} \quad ---- \quad (1') &(61)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_m &= -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c^2r}\hat{e}_r\times(\hat{e}_r\times[\,\vec{m}\,]) &(62)\\ &= \hat{e}_z\,\frac{\mu_0\omega^2\mathrm{I}_0R^2}{4c^2x}\exp\{-i\omega(t-\frac{x}{c})\} \quad ---- \quad (1') &(63)\end{aligned}$$

所以$\vec{r}=x\hat{e}_x$处总辐射场为:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\rm total} &= \hat{e}_y\frac{\omega^2 \mathrm{I}_0 R}{4\epsilon_0 c^2 x}\Big(\frac{R}{c}+\frac{1}{i\omega}\Big)\exp\{-i\omega(t-\frac{x}{c})\} \quad ---- \quad (1') \qquad (64)\\
\vec{B}_{\rm total} &= \hat{e}_z\frac{\mu_0\omega^2 \mathrm{I}_0 R}{4cx}\Big(\frac{R}{c}+\frac{1}{i\omega}\Big)\exp\{-i\omega(t-\frac{x}{c})\} \quad ---- \quad (1') \qquad (65)
\end{aligned}$$

讨论:
关于此结构的一般本征模解法可参考:

- PRB **74**, 035419 (2006);
- APL **90**, 041903 (2007);
- PRB **77**, 235105 (2008);
- JAP **104**, 034305 (2008).

6 Example 5

(a) 请证明$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$和$\vec{E}\cdot\vec{B}$分别是Lorentz不变量, 并且说明其物理意义.
解: 定义$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$, 则自由电磁场的拉氏密度为$L=-\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, 显然它是一个Lorentz不变量. 应用欧氏空间1234记号:

$$\begin{gathered}
F^{k4}=-\frac{i}{c}E^k\\
F^{ij}=\varepsilon_{ijk}B^k
\end{gathered} \qquad (66)$$

代入拉氏密度L:

$$L=-\frac{1}{4\mu_0}\left(2F^{4k}F_{4k}+F^{ij}F_{ij}\right)=-\frac{1}{4\mu_0}\left\{2\left(-\frac{i}{c}E^k\right)^2+\varepsilon_{ijk}B^k\varepsilon_{ijl}B^l\right\}=\frac{1}{2\mu_0c^2}\left(\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2\right) \qquad (67)$$

$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$是Lorentz不变量得证.
引入另一个Lorentz不变量$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}=4\varepsilon_{ijk4}F^{ij}F^{k4}=4\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}B^l\left(-\frac{i}{c}E^k\right)=-\frac{8i}{c}\vec{E}\cdot\vec{B} \qquad (68)$$

$\vec{E}\cdot\vec{B}$是Lorentz不变量得证.
讨论:

- $\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$为Lorentz不变量, 意味着当$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2>0$时, 可以通过Lorentz变换, 找到一个惯性系其中只有电场$\vec{E}$, 没有磁场$\vec{B}$, 但是不可以通过Lorentz变换, 找到一个惯性系其中只有磁场$\vec{B}$, 没有电场$\vec{E}$. 同理当$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2<0$时, 有类似结果.
- 如果在某一个惯性系中电磁$\vec{E}$和磁场$\vec{B}$相互垂直, 即$\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, 则变换到其它惯性系中电磁$\vec{E}'$和磁场$\vec{B}'$仍然保持相互垂直, 因为$\vec{E}'\cdot\vec{B}'=\vec{E}\cdot\vec{B}=0$. 意味着平面波在任何惯性系中观察仍然为平面波.

(b) 通过Lorentz变换, 证明相对论多普勒效应和光行差公式, 由此计算立体角相应的Lorentz变换公式. 分别讨论$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi$三种特殊观察角度下的多普勒效应和立体角Lorentz变换.
解: 平面波的相位因子$k^\mu x_\mu$是Lorentz不变量, 意味着波矢k^μ也是一个四维矢量. 假设惯性系S'相对于惯性系S以速度v沿x轴匀速运动:

$$\begin{bmatrix} k_x' \\ k_y' \\ k_z' \\ \frac{i}{c}\omega' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & & & i\beta\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -i\beta\gamma & & & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \frac{i}{c}\omega \end{bmatrix} \tag{69}$$

只考虑第一个和第四个方程:

$$\begin{aligned} k_x' &= \gamma k_x + i\beta\gamma\frac{i}{c}\omega \\ \frac{i}{c}\omega' &= -i\beta\gamma k_x + \gamma\frac{i}{c}\omega \end{aligned} \tag{70}$$

结合$k_x=\frac{\omega}{c}\cos\theta, k_x'=\frac{\omega'}{c}\cos\theta'$解得:

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma\omega\left(1-\beta\cos\theta\right) \\ \cos\theta' &= \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta} \end{aligned} \tag{71}$$

假设发射源静止于惯性系S', 则惯性系S的观察结果为:

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma\left(1-\beta\cos\theta\right)} \tag{72}$$

当$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi$时, 相应观察结果为$\omega=\omega'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},\omega'\sqrt{1-\beta^2},\omega'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$.
按照立体角的定义$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}\Omega' = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta\cos\theta\right)^2}\mathrm{d}\Omega \tag{73}$$

当$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi$时, $\mathrm{d}\Omega'=\frac{1+\beta}{1-\beta}\mathrm{d}\Omega,\left(1-\beta^2\right)\mathrm{d}\Omega,\frac{1-\beta}{1+\beta}\mathrm{d}\Omega$.