中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

电动力学 第四章

谐振腔与等离子体

谐振腔与波导管——有限空间中的电磁波传播

被（理想）导体面限制在有限空间中传播的电磁波

出发点：

Helmholtz方程

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=0$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$

约束条件 $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0$

$$\vec{B}(\vec{x})=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}(\vec{x})$$

✚

边界条件

（一）理想导体的边界条件

对定态波： $\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

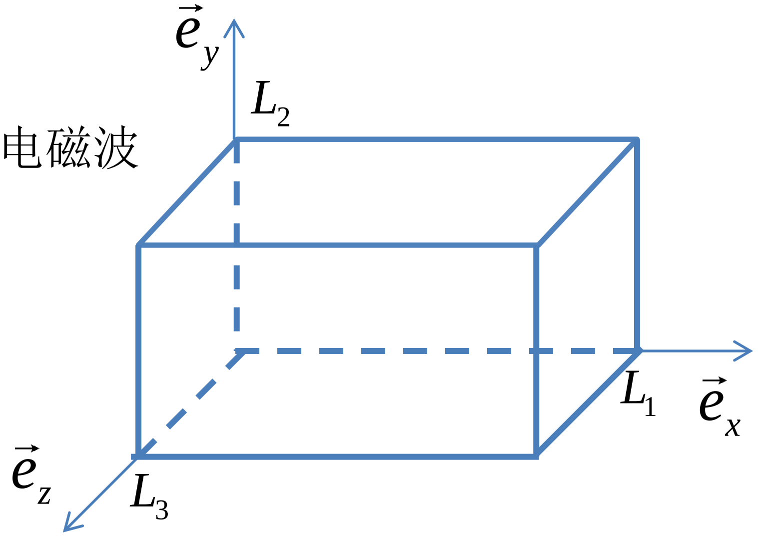
只需考虑两边界条件：

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)&=0\\ \vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)&=\vec{\alpha}_f\end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{n}\times\vec{E}&=0\\ \vec{n}\times\vec{H}&=\vec{\alpha}_f\end{aligned}}$$

电场只有法向分量！

导体内部 $\vec{E}=0$ $\vec{H}=0$

（二）谐振腔



考虑长方型 $L_1 \times L_2 \times L_3$ 理想导体盒子中传播的电磁波

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

$$u = E_i \qquad (i = x, y, z)$$

电场的每一个分量都会振荡

$$u = u(x, y, z) e^{i\omega t}$$ 其中 $\omega = kc$

电场的每一个分量都满足Helmholtz方程：

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0$$

把波矢分解为： $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ 即： $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

令：$\boxed{u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)}$ 分离变量法

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \qquad \frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0$$

$$C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x \qquad C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y \qquad C_3\cos k_z z+D_3\sin k_z z$$

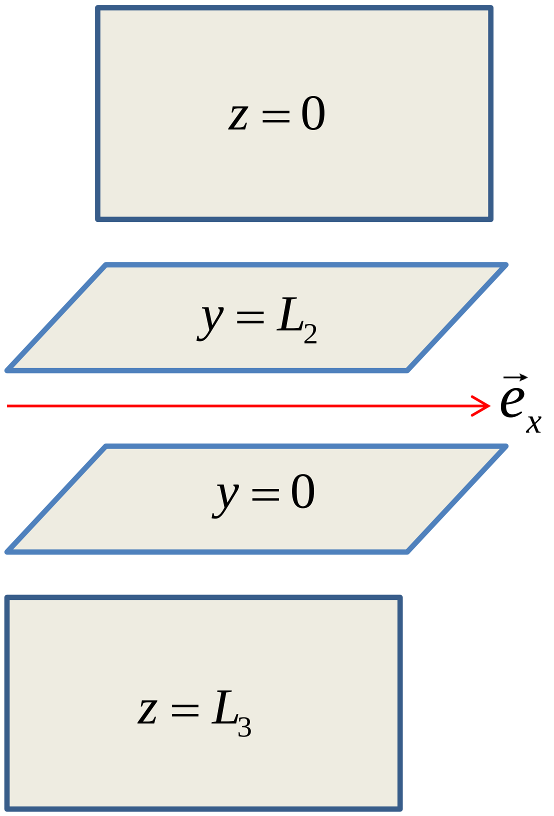
$$u(x,y,z)=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)(C_3\cos k_z z+D_3\sin k_z z)$$

当中的六个常数 C_i 和 D_i 就要由约束条件和边界条件来决定

以 $u=E_x$ 为例：

切向边界条件 $\vec{n}\times\vec{E}=0$ $\left(\vec{E}_\tau=0\right)$

相当于：



$$E_x(y=0,z=0)=0 \Downarrow \quad C_2=0 \quad C_3=0$$

$$E_x(y=L_2,z=L_3)=0 \Downarrow \quad \sin k_yL_2=0 \quad \sin k_zL_3=0$$

$$\Downarrow \quad k_yL_2=n\pi \qquad k_zL_3=p\pi$$

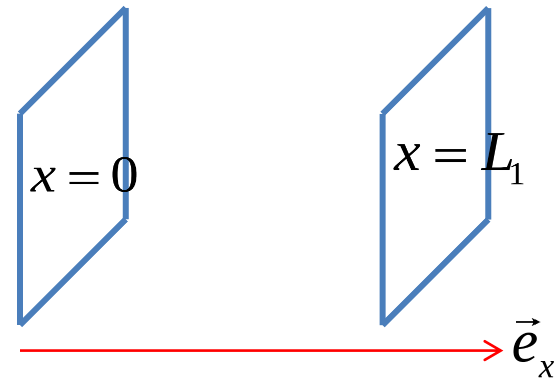
m,n 为整数

$$u(x,y,z)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(\cancel{C_2}\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(\cancel{C_3}\cos k_zz+D_3\sin k_zz)$$

$$\Downarrow$$

$$E_x=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)\sin k_yy\sin k_zz\cdot e^{-i\omega t}$$

约束条件 $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$



在 $x=0$ 和 $x=L_1$ 面上，已经有 $E_y=0$，$E_z=0$

相当于： $\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=0}=0$　　$\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=L_1}=0$

$$D_1=0 \qquad \sin k_x L_1=0$$

$$k_x L_1=m\pi \quad\Longrightarrow\quad k_x=\frac{m\pi}{L_1}$$

总结：

$$\boxed{\begin{aligned}E_x&=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z\cdot e^{-i\omega t}\\ E_y&=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z\cdot e^{-i\omega t}\\ E_z&=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z\cdot e^{-i\omega t}\end{aligned}}$$

同理：

不再是横波，
三个方向都有

驻波！

波矢要满足： $k_x=\dfrac{m\pi}{L_1}$ $k_y=\dfrac{n\pi}{L_2}$ $k_z=\dfrac{p\pi}{L_3}$ $(m,n,p=0,\pm1,\pm2,....)$

选定了某一组(m,n,p)，称为选定了一种电磁场的振荡模式

本征频率： $$\omega_{m,n,p}=kc=c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}=c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{L_3}\right)^2}$$

(m,n,p) 不能有两个同时为零（否则会导致三个同时为零）

假设 $L_1>L_2>L_3$ ，则最低频率为： $$\omega_{1,1,0}=c\sqrt{\left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2+\left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2}$$

约束条件 $$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \Longrightarrow A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0$$

电场三分量的振幅 A_1 、A_2 、A_3 当中只有两个是独立的

磁场：

$$\vec{B} = \frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}$$

$$B_x = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \frac{i}{\omega}\left(A_3 k_y - A_2 k_z \right) \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{i}{\omega}\left(A_1 k_z - A_3 k_x \right) \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \frac{i}{\omega}\left(A_2 k_x - A_1 k_y \right) \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

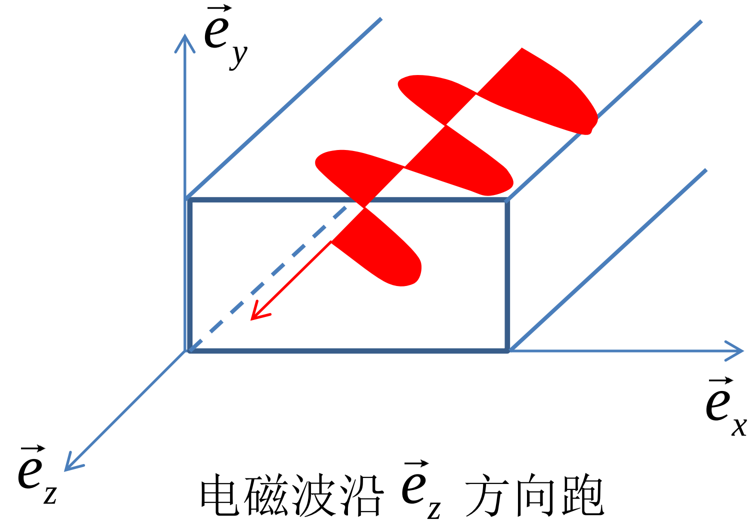
腔内电场能量密度平均值为：

$$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \mathrm{Re}\left(\left| \vec{E}_x \right|^2 + \left| \vec{E}_y \right|^2 + \left| \vec{E}_z \right|^2 \right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4}\left[A_1^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_2^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_3^2 \sin^2 k_x x \sin^2 k_y y \cos^2 k_z z \right]$$

（三）波导

与谐振腔的情况相比，微分方程和约束条件不变，相差的只是边界条件稍有不同，但方程的解的意义就有很大的区别了



电磁波沿 $\vec{e}_z$ 方向跑

出发点仍然不变

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=0 \\ \text{其中}\quad k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c \\ \text{约束条件}\quad \nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0 \end{array}}$$

把波矢分解为：$\vec{k}=k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z$　　即：$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$

电场分解为：$\vec{E}=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z$

令：$u=E_i \quad (i=x,y,z)$　　$\nabla^2 u+k^2 u=0$

电磁波有行波解：$u=u(x,y,z)=u(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$　　其中 $\omega=kc$

$$-k_x^2 u+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)u=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(k_y^2+k_z^2\right)u=0$$

令： $\boxed{u(x,y)=X(x)Y(y)}$ 分离变量法

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0$$

$$u(t,x,y,z)=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

当中的四个常数 C_i 和 D_i 就要由约束条件和边界条件来决定

约束条件和边界条件：

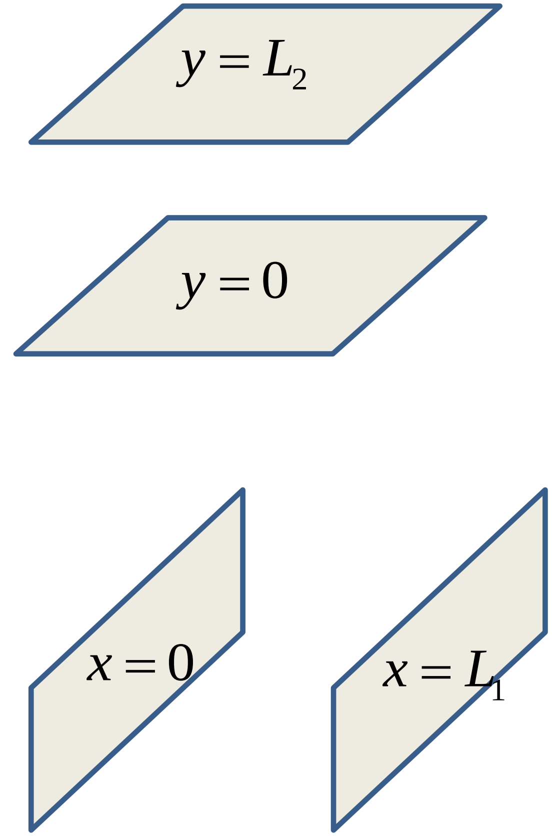
（i）对 $x=0$ 面和 $x=L_1$ 面：

$$\vec{n}\times\vec{E}=0 \Rightarrow E_y=0 \qquad E_z=0$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

（ii）对 $y=0$ 面和 $y=L_2$ 面：

$$E_x=E_z=0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y}=0$$



解出：

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= A_1\cos k_x x\sin k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y &= A_2\sin k_x x\cos k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z &= A_3\sin k_x x\sin k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)} \end{aligned}}$$

不再是横波，
三个方向都有

电磁波不再是横波！

磁场：$\vec{B}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$

$$B_x=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=\frac{i}{\omega}\left(A_3k_y-iA_2k_z\right)\sin k_xx\cos k_yy\cdot e^{i\left(k_zz-\omega t\right)}$$

$$B_y=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=\frac{i}{\omega}\left(iA_1k_z-A_3k_x\right)\cos k_xx\sin k_yy\cdot e^{i\left(k_zz-\omega t\right)}$$

$$B_z=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=\frac{i}{\omega}\left(A_2k_x-A_1k_y\right)\cos k_xx\cos k_yy\cdot e^{i\left(k_zz-\omega t\right)}$$

特点：

（i） 场的纵向分量E_z、B_z 决定了整个场的分布

（ii） 不能传播 $E_z=B_z=0$ 的横电磁波（TEM波）

（iii）可以传播 $E_z=0$ 、$B_z\neq 0$ 的横电型电磁波（TE波）

和 $E_z\neq 0$ 、$B_z=0$ 的横磁型电磁波（TM波）

波矢要满足： $k_x = \dfrac{m\pi}{L_1}$ $k_y = \dfrac{n\pi}{L_2}$ $(m, n = 0, \pm1, \pm2, ...)$ k_z 可连续变化

选定了某一组 (m,n) ，称为选定了一种电磁场的振荡模式

(m,n) 不能有两个同时为零

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 + k_z^2$$

若 (m,n) 取某些值，使得：

$$k^2 < k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2$$

则有 $,k_z^2 < 0$ ，k_z 为虚数，电磁波不能传播

最低频率（截止频率）： $\omega_{cutoff} = kc = c\sqrt{\left(\dfrac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{L_2}\right)^2}$

只有频率大于截止频率的电磁波才能在波导内通行

作业

1。
一对无限大的平行理想导体板，相距为b，电磁波沿平行于板面的z方向传播，证明：

$$E_x = D_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \qquad E_y = D_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$E_z = D_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

是可能传播的波模，且：

$$k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad \frac{n\pi}{b} D_2 = i k_z D_3$$