《电动力学》

中山大学学院
2020年5月9日

李志兵

第五章 电磁波的辐射

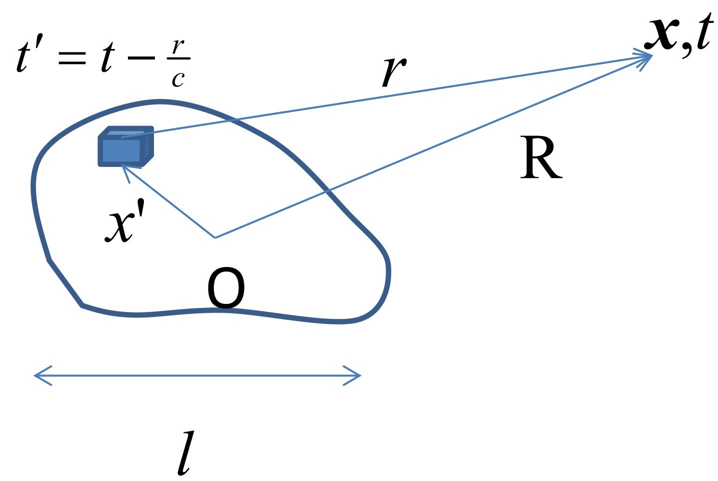
讨论给定电荷运动如何辐射电磁场

第3节 电偶极辐射

考虑电荷系统的线度远小于波长的情形.

电偶辐射是最常用的近似.

3.1 计算辐射的一般公式



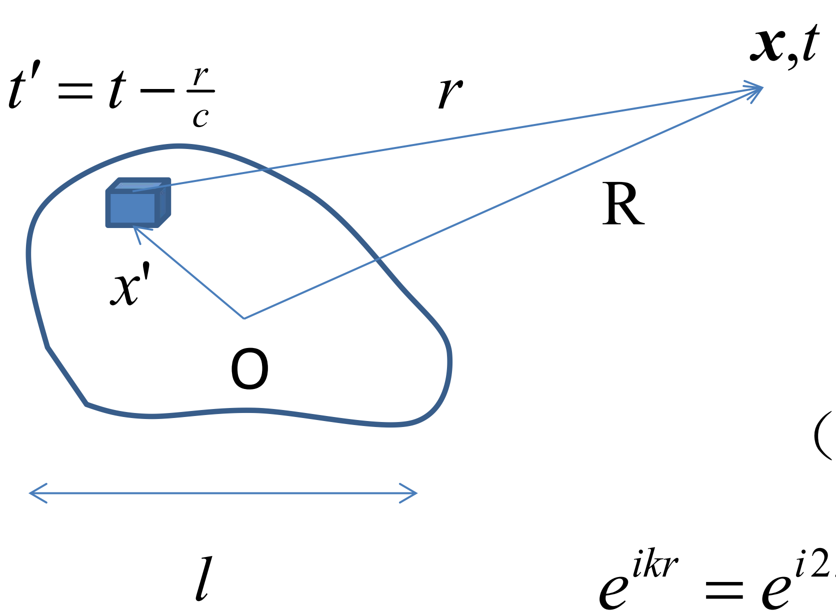
$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t - \frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r} dV' \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

这一对$\boldsymbol{A}$和φ刚好**满足洛仑兹规范条件.**

考虑交变电流的辐射，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}$ 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} e^{ikr} dV' \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

3.2 矢势展开



三个尺度: $l, r, \quad \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

我们只考虑

$$l << r, \qquad l \le \lambda$$

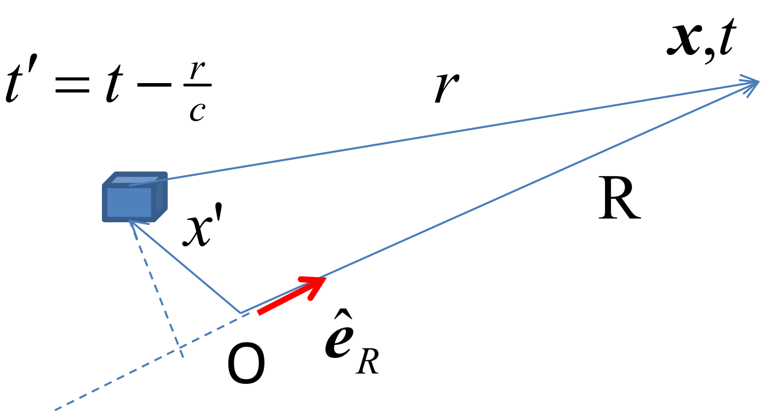
（1）近区　$r << \lambda$

$$e^{ikr} = e^{i2\pi r/\lambda} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'$$

形式上稳恒电流情形一样.

（2）感应区　$r \sim \lambda$　比较复杂.

（3）远区（辐射区）$r >> \lambda \geq l$



$$r = \sqrt{R^2 + x'^2 - 2\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{x}'} = R\sqrt{1 + \left(\frac{x'}{R}\right)^2 - 2\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'}{R}}$$

$$\approx R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{R}\right)^2 - \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'}{R}\right]$$

$$r \approx R - \hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')e^{ik(R-\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}')}}{R - \hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'}dV'$$

其中

$$\frac{1}{R - \hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'} \approx \frac{1}{R} + \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'}{R^2} \approx \frac{1}{R} \qquad e^{-ik\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'} \approx 1 - \underbrace{ik\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}'}_{O(l/\lambda)} + \cdots$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{R}\left(1 - ik\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\boldsymbol{x}' + \cdots\right)dV'$$

3.3 电偶极辐射

领头项

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')dV'$$

积分等于电荷系统的电偶极的时间变化率. 证明如下.

$$\dot{p}_i=\frac{d}{dt}\int x_i'\rho(\boldsymbol{x}',t)dV'=\int x_i'\dot{\rho}(\boldsymbol{x}',t)dV'$$

应用电荷连续性方程

$$\dot{p}_i=-\sum_{j=1}^{3}\int x_i'\frac{\partial}{\partial x_j'}J_j(\boldsymbol{x}',t)dV'=-\sum_{j=1}^{3}\int\frac{\partial}{\partial x_j'}\left[x_i'J_j(\boldsymbol{x}',t)\right]dV'+\sum_{j=1}^{3}\int\delta_{ij}J_j(\boldsymbol{x}',t)dV'$$

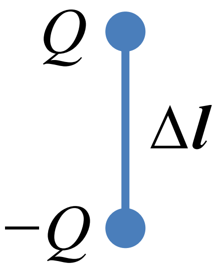
$$=-\oint x_i'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)\cdot d\boldsymbol{s}'+\int J_i(\boldsymbol{x}',t)dV'=\int J_i(\boldsymbol{x}',t)dV'$$

因此

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\int\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)dV'$$

偶极辐射 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}}=\dfrac{\mu_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}}$ $\qquad \boldsymbol{k}=k\hat{\boldsymbol{e}}_R$

例



$\dot{\boldsymbol{p}}=\dot{Q}\Delta\boldsymbol{l} \qquad \dot{Q}=I=\boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{s}$

$\dot{\boldsymbol{p}}=(\boldsymbol{J}\cdot\Delta s)\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}\Delta s\Delta l=\int \boldsymbol{J}dV'$ 与一般公式一致

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}I\Delta\boldsymbol{l}$$

磁感应强度

（略去$1/R^2$ 项）

$\nabla \sim i\boldsymbol{k}=ik\hat{\boldsymbol{e}}_R$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\approx\frac{\mu_0}{4\pi R}\left(\nabla e^{ikR}\right)\times\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}ik\hat{\boldsymbol{e}}_R\times\dot{\boldsymbol{p}}$$

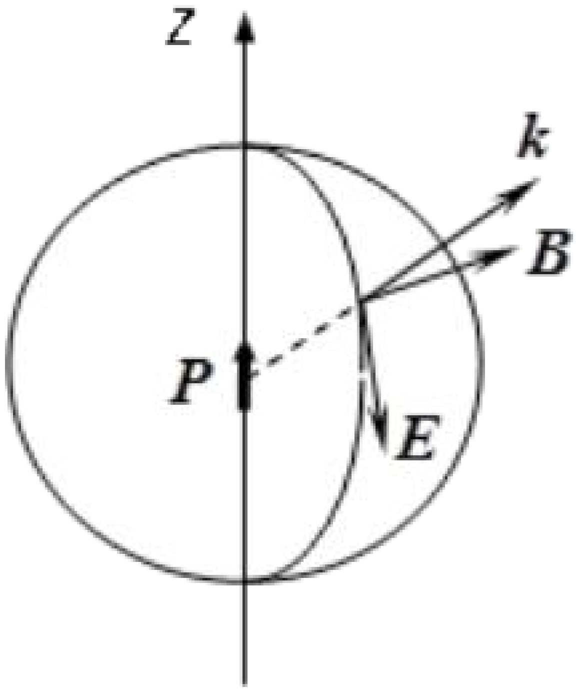
$$=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\frac{ik}{(-i\omega)}\hat{\boldsymbol{e}}_R\times\ddot{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^{ikR}}{R}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R$$ 横场

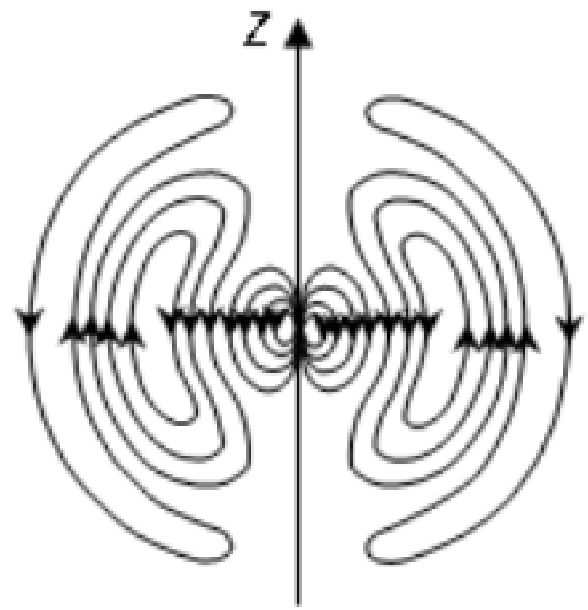
电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\left(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R\right)\times\hat{\boldsymbol{e}}_R$$ 横场

$$\boldsymbol{B} \approx \frac{\ddot{p}}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^{ikR}}{R}\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \qquad \boldsymbol{E} \approx \frac{\ddot{p}}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikR}}{R}\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

（正确的电场如右下图，电场线闭合，从而必须在某处有纵场成分。而电偶极辐射电场是横场，在南、北极附近显然不正确）





电场

辐射区：电磁场 ~ $1/R$；能流密度 ~ $1/R^2$

3.4 辐射能流 角分布 辐射功率

平均能流密度

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}^{*}\times\boldsymbol{H}\right)=\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^{2}}{32\pi^{2}\varepsilon_{0}c^{3}R^{2}}\sin^{2}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{R}$$

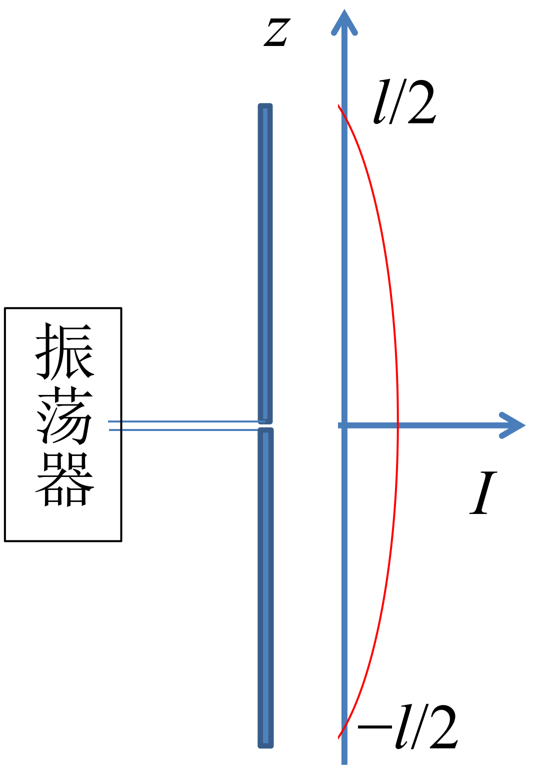
角分布见p166，图5-5

总辐射功率

$$P=\oint|\overline{\boldsymbol{S}}|R^{2}d\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^{2}}{3c^{3}}$$

若$\boldsymbol{p}$振幅不变， $P\sim\omega^{4}|\boldsymbol{p}|$ （ $\frac{\partial}{\partial t}\sim-i\omega$ ）

3.5 短天线的辐射 辐射电阻



因为 $\left|\frac{l}{\lambda}\right| << 1$ ，电流振幅沿上下天线分别为z的单调函数，我们把它近似为线性函数

$$I(z) = I_0\left(1 - \frac{2}{l}|z|\right)$$

$$\dot{p} = \int J dV' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z)dz = \frac{1}{2}I_0 l \qquad \ddot{p} = -i\frac{\omega}{2}I_0 l$$

总辐射功率 $$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{p}|^2}{3c^3} = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}I_0^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \equiv \frac{1}{2}R_r I_0^2$$

对振荡电路等效于辐射电阻 $$R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.7\Omega$$

第4节 磁偶极辐射和电四极辐射

最低阶磁辐射和电四辐射同级.

4.1 高频电流分布的磁偶极矩和电四极矩

多极矩展开

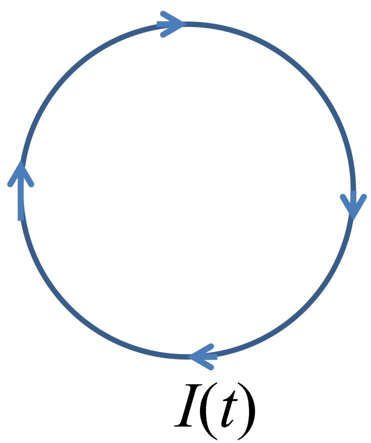
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{R} \left(1 - ik\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \boldsymbol{x}' + \cdots\right) dV'$$

磁偶极和电偶极矩的矢势（$\boldsymbol{p}=0$ 时此贡献为主）

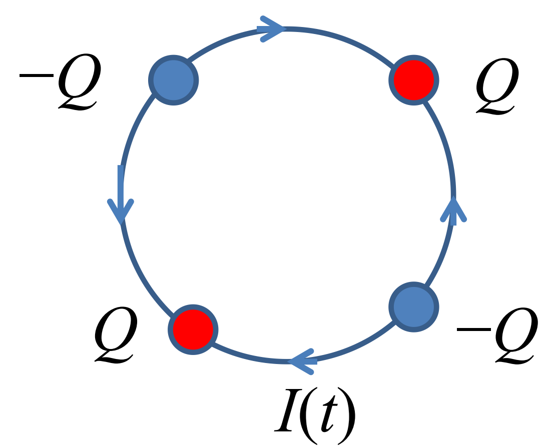
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -ik \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \boldsymbol{x}') dV'$$

对交变电流不能把电流分布看着封闭电流线的的集合，电荷分布一般也是振荡的，因此往往同时存在磁辐射和电辐射.

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$



纯磁偶极辐射



电四极矩辐射（忽略细线的电流）

记 $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$. 辐射矢势积分中的被积函数写成

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \boldsymbol{x}') = \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}'\right) \qquad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}' = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}' + \boldsymbol{J}'\boldsymbol{x}'\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}' - \boldsymbol{J}'\boldsymbol{x}'\right)$$

矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的并矢张量 $\mathcal{T} = \boldsymbol{AB}$ 按定义具有分量

$$T_{ij} = A_i B_j$$

$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}'$的反对称部分 $\quad (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}' - \boldsymbol{J}'\boldsymbol{x}')$

$$\int_V \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_a dV' = \frac{1}{2}\int_V [(\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \boldsymbol{x}')\boldsymbol{J}' - (\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \boldsymbol{J}')\boldsymbol{x}']dV'$$

$$= -\frac{1}{2}\int_V \hat{\boldsymbol{e}}_R \times (\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}')dV' = -\hat{\boldsymbol{e}}_R \times \boldsymbol{m}$$

其中磁偶极矩 $\quad \boldsymbol{m} = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}'\right)dV'$

磁偶极辐射的矢势为

$$\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}) = -ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_a dV' = ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_R \times \boldsymbol{m}$$

$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}'$的对称部分 $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_s = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}' + \boldsymbol{J}'\boldsymbol{x}'\right)$

$$\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{x}) = -ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_s \, dV'$$

电四极矩（张量）：

$$\mathcal{D} = \iiint_V (3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' - x'^2\mathcal{I})\rho(\boldsymbol{x}', t)dV' \qquad \text{其中}\mathcal{I}\text{ 为单位张量}$$

$$\dot{D}_{ij} = \iiint_V (3x_i'x_j' - x'^2\delta_{ij})\dot{\rho}(\boldsymbol{x}', t)dV' = -\iiint_V (3x_i'x_j' - x'^2\delta_{ij})\nabla'\cdot\boldsymbol{J}'dV'$$

$$= \cancel{-\iiint_V \nabla'\cdot[(3x_i'x_j' - x'^2\delta_{ij})\boldsymbol{J}']dV'} + \iiint_V \boldsymbol{J}'\cdot\nabla'[(3x_i'x_j' - x'^2\delta_{ij})]dV'$$

$$= \iiint_V [3(J_i'x_j' + x_i'J_j') - 2\boldsymbol{J}'\cdot\boldsymbol{x}'\delta_{ij})]dV' = \iiint_V [6(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_{s,ij} - 2\boldsymbol{J}'\cdot\boldsymbol{x}'\delta_{ij})]dV'$$

$$\dot{\mathcal{D}} = 6\iiint_V (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_s \, dV' - 2\mathcal{I}\iiint_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{x}'dV'$$

从而

$$\int_V \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_s dV' = \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \int_V (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_s dV' = \frac{1}{6}\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}} + \frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_R \int_V \boldsymbol{J}' \cdot \boldsymbol{x}' dV'$$

对称部分辐射的矢势$\boldsymbol{A}_s$为

$$-ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{J}')_s dV' = -ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{6}\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}} - ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_R \int_V \boldsymbol{J}' \cdot \boldsymbol{x}' dV'$$

第二项是径向矢量，对辐射场无贡献. 准到$1/R$阶第二项为

$$-\nabla\left(\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{3}\int_V \boldsymbol{J}' \cdot \boldsymbol{x}' dV'\right)$$

因此可以通过规范变换把他去掉.

电四极矩辐射的矢势为

$$\boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{x}) = -ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{6}\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}$$

从而，(l/λ)级辐射的矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{x}) = -ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\left(-\hat{\boldsymbol{e}}_R \times \boldsymbol{m} + \frac{1}{6}\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\right)$$

电四极矩张量的两种等价表达式（物理结果一样）：

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \iiint_V (3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' - x'^2 \boldsymbol{\mathcal{I}})\rho(\boldsymbol{x}', t)dV'$$ 其中$\boldsymbol{\mathcal{I}}$为单位张量

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \iiint_V (3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}', t)dV'$$

4.2 磁偶极矩辐射

磁偶极辐射矢势 $$\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}) = ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_R \times \boldsymbol{m}$$

辐射区磁场 $$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R)\times\hat{\boldsymbol{e}}_R$$

辐射区电场 $$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R)$$

磁偶极辐射的结果可以从电偶极辐射结果中通过下面变换得到：

$$\boldsymbol{p}\to\frac{\boldsymbol{m}}{c},\quad \boldsymbol{E}\to c\boldsymbol{B},\quad c\boldsymbol{B}\to -\boldsymbol{E}$$

电磁对偶对称性： 没有电荷（可以有电多极矩）情形，真空麦克斯韦方程隐含的对称性.

磁偶极辐射的平均能流密度

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \frac{|\ddot{\boldsymbol{m}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^5 R^2}\sin^2\theta\hat{\boldsymbol{e}}_R$$

磁偶极辐射的总辐射功率

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\boldsymbol{m}}|^2}{3c^5}$$

例：半径为a的圆形细导线上有交变电流 $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ ，求磁偶极辐射.

解：$$m = I_0 \pi a^2 e^{-i\omega t}$$

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\boldsymbol{m}}|^2}{3c^5} = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\boldsymbol{m}|^2}{3c^5} = \frac{4\pi^3}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2$$

4.3 电四极矩辐射

电四极矩辐射矢势 $\boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{x}) = -ik\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{6}\hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}$

定义 $\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{e}}_R\cdot\dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}$

辐射区磁场 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}_q(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^4 R}\dddot{\boldsymbol{D}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R$

辐射区电场 $\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R = \frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 c^3 R}(\dddot{\boldsymbol{D}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R)\times\hat{\boldsymbol{e}}_R$

辐射平均能流密度

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{288\pi c^5 R^2}|\dddot{\boldsymbol{D}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_R|^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_R$$

第5节 天线辐射

电流分布尺度与波长可以比拟的情形.

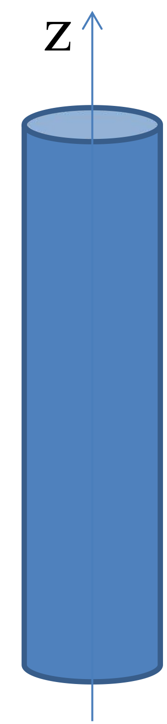
5.1 天线上的电流分布

因$l \sim \lambda$，不能用展开式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{R} \left(1 - ik\hat{\boldsymbol{e}}_R \cdot \boldsymbol{x}' + \cdots\right) dV'$

周期振荡，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} e^{ikr} dV'$$

一般要考虑场对电流的制约，联立求解$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{J}$.



考虑长直细天线，$\boldsymbol{J} = J\hat{\boldsymbol{e}}_z$

因此$\boldsymbol{A}$也沿z方向. 洛仑兹规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

电场 $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$

从而 $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$$

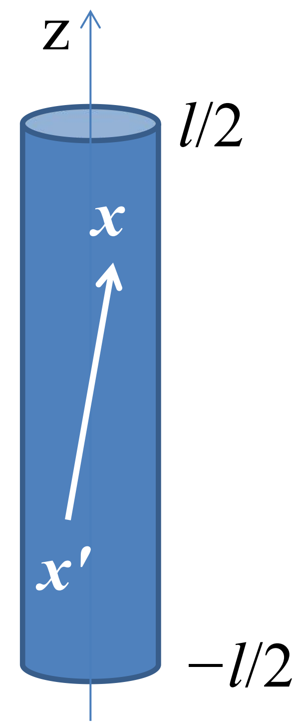
在导体表面$E_\mathrm{z} = 0$，得波动方程 $$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0$$

矢势与电流密度的制约关系， $$A_z(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(\boldsymbol{x}')}{r} e^{ikr} dV'$$

高频振荡电流主要集中在表面，而细天线可以忽略电流沿径向的变化. 两种情况都只需考虑表面的电流密度$J(z')$. 对给定$A_\mathrm{z}(\mathrm{z})$在天线表面的函数形式，上式是关于$J(z)$的积分方程，加上端点电流为零的条件可以确定$J(z)$.

5.2 半波天线

对细天线，表面两点$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{x}$‘的z坐标差很小时，他们的距离r也很小.



$$A_z(z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(\boldsymbol{x}')}{r}e^{ikr}dV'$$

当$z'\to z$时，$r\to 0$，所以$A_z(z)$主要由$J(z)$决定，$A_z(z)$和$J(z)$具有近似相同的函数形式.

所以$J(z)$也近似满足波动方程，

$$\frac{\partial^2 J(z)}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 J(z)}{\partial t^2}=0$$

加上边值条件$J(l/2)=J(l/2)=0$，得电流驻波模(仅适用细天线).

中央馈电细天线的电流驻波分布

$$I(z)=\begin{cases} I_0\sin k\left(\dfrac{l}{2}-z\right), & 0\le z\le \dfrac{l}{2} \\ I_0\sin k\left(\dfrac{l}{2}+z\right), & -\dfrac{l}{2}\le z\le 0 \end{cases}$$

若$l=\lambda/2$ 则 $kl/2=\pi/2$， $I(z)=I_0\cos kz$, $|z|\le\dfrac{l}{2}$

矢势 $$A_z(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{e^{ikr}}{r}I_0\cos kz dz$$

远场 $r=R-z\cos\theta$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\approx\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\mu_0 I_0 e^{-ikR}}{4\pi R}\int_{-l/2}^{l/2}e^{-ikz\cos\theta}\cos kz dz$$

$$=\frac{\mu_0 I_0 e^{ikR}}{2\pi kR}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

半波天线（$l=\lambda/2$ ）的辐射特性

辐射区磁场 $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=-i\frac{\mu_0 I_0 e^{ikR}}{2\pi R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\varepsilon$$

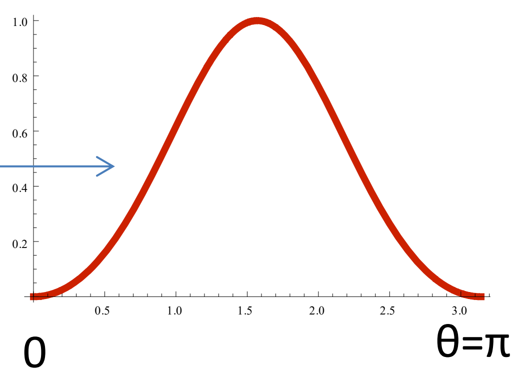
辐射区电场 $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=-i\frac{\mu_0 c I_0 e^{ikR}}{2\pi R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

平均辐射能流密度

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E^*\times\boldsymbol{H}\right)=\frac{\mu_0 c I_0}{8\pi^2 R^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_R$$

辐射总功率

$$P=2.44\frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi}$$



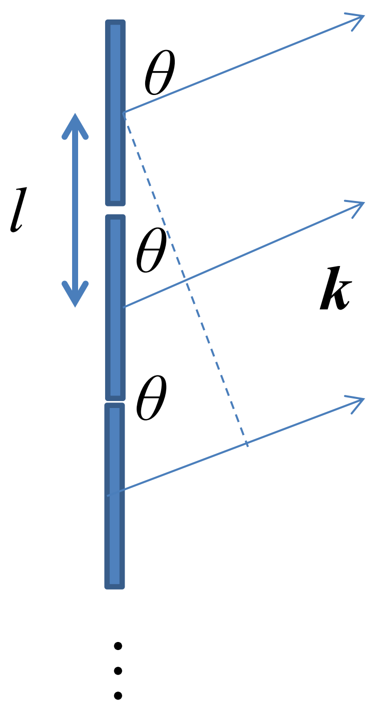
辐射电阻

$$R_r=2.44\frac{\mu_0 c}{4\pi}=73.2\Omega$$

5.3 天线阵

半波天线辐射能流密度与方位角φ无关，对极角θ有一定的方向性. 为了得到高度定性的辐射，可用天线阵列.

例：纵向半波天线阵列. 共N条天线，相邻距离l，电流同相.



设最上端天线辐射的电场为 $\boldsymbol{E}_0(R,\theta)$

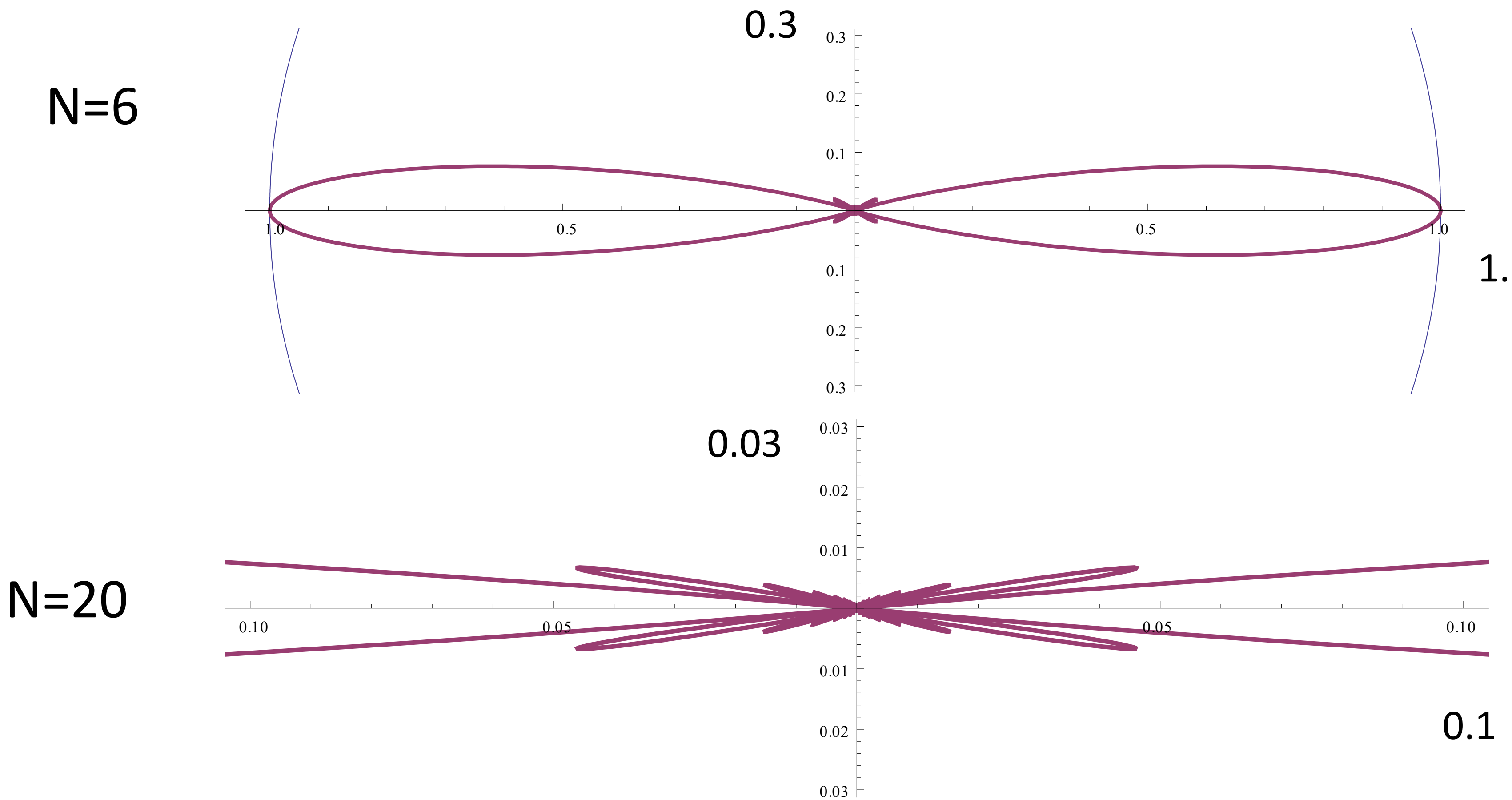
从上往下第m条天线辐射的电场

$$\boldsymbol{E}_m(R,\theta)=\boldsymbol{E}_0(R,\theta)e^{imkl\cos\theta}$$

极角θ方向的总电场为

$$\boldsymbol{E}(R,\theta)=\sum_{m=0}^{N-1}\boldsymbol{E}_m(R,\theta)=\frac{1-e^{iNkl\cos\theta}}{1-e^{ikl\cos\theta}}\boldsymbol{E}_0(R,\theta)$$

平均能流密度 $$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{\mu_0 c I_0}{8\pi^2 R^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\pi\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)} \hat{\boldsymbol{e}}_R$$



辐射极角分布图

半波天线（$l=\lambda/2$ ）的辐射特性

辐射区磁场 $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=-i\frac{\mu_0 I_0 e^{ikR}}{2\pi R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\varepsilon}$$

辐射区电场 $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=-i\frac{\mu_0 c I_0 e^{ikR}}{2\pi R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$$

平均辐射能流密度

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E^*\times\boldsymbol{H}\right)=\frac{\mu_0 c I_0}{8\pi^2 R^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_R$$

辐射总功率

$$P=2.44\frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi}$$

辐射电阻

$$R_r=2.44\frac{\mu_0 c}{4\pi}=73.2\Omega$$

第十四次作业：

1. 阅读p171例题.
2. 电四极矩如p66图2-13的D_{12}，设电荷绝对值以角频率ω振荡.
   计算辐射平均能流密度.
3. P186习题10.