

第六章 光学成像系统的传递函数

6.1 光学成像系统像质评价概述

6.2 光学传递函数的概述

6.3 衍射受限相干成像系统的传递函数

6.4 衍射受限系统非相干成像 的传递函数

6.5 线扩散函数和刃边扩散函数

6.6 相干与非相干成像系统的比较

光学成像系统是用来传递物的结构、灰度和色彩等信息的传递系统。从物面到像面的质量完全取决于光学系统的传递特性。其传递能力可以用来评价成像质量的好坏，通常称之为像质评价。

检验光学系统的成像质量，传统的方法通常是采用鉴别率板法和星点检验法。

以上两种方法都是在空域中检验像质。随着空间频谱分析方法和线性系统理论应用于分析光学系统成像，就产生了光学传递函数理论，把输入信息分解成各种空间频率分量，然后考察这些空间频率分量在通过系统传递过程中的丢失、衰减、相位移动等的变化，也就是研究系统空间频率的传递特性即传递函数的性质。这显然是一种全面评价光学系统成像质量的方法。传递函数可由光学系统的设计数据计算得出。虽然计算传递函数的步骤比较麻烦，检验传递函数的仪器也比较复杂，但是随着计算机和高精度光电探测技术的发展，光学传递函数的计算和测量方法日趋完善，并已实用化，成为像质评价的依据。

6.1 光学成像系统像质评价概述

6.1.1 星点检验法

6.1.2 图像分辨率板法

从成像角度来看，设成像质量无疑是设计和评价一个光系统或一台光学仪器的品质一个重要指标。在设计光学仪器时，一般是根据仪器的使用需要，再考虑加工的可能性的仪器的成本，从而确实出仪器的像差容限，也就这台仪器允许多大的残余像差。对此，一般采用瑞利判据：实际波面和理想球面之间的最大波像差小于 λ 时，此波面可看作无缺陷。在实际的情况中，可根据具体的要求提高或降低此标准。瑞利判据的定量标准是S.D值。

对于已制成的实际光学系统或光学仪器，一般以用星点法、分辨率板法、光学传递函数法来作像质评价。

$$S.D = \frac{|U(w \neq 0)|^2}{|U(w = 0)|^2}$$

表 6.1.1 S.D 值和波像差的关系

波像差	艾里中心班能量	S.D 值
0	84%	1.0
$1/16\lambda$	86%	0.99
$1/8\lambda$	80%	0.95
$1/4\lambda$	68%	0.81

6.1.1 星点检验法

由第3章线性系统的理论可知，对线性光系统而言，非相干照射物体或自发物体成像，可以把任意的物分布看成是无数个具有不同强度的、独立的发光物点的集合。即对非相干照明物体或自发光物体，成像光学系统的作用是把物面上的光强分布转换为像面上的光强分布。

每一个发光物点发出的光，通过光学系统后，由于衍射、像差和其他因素如光学元件加工工艺上的疵病等的影响，物像分布不可能完全一致，通常这样的实际光学系统而成的像，在像平面上所得到的像点就不是一个理想的几何点，而是一个弥散光斑，称之为星点像，每个星点像与一个物点相对应，正如一个完整的物可以分解成无数个物点一些，一个完整的像也就可以由相应的无数个星点像合成。因此，星点像的光强分布函数就决定了该系统的成像质量。

另外星点像的光强分布比较易于描述，所以星点检验法是检验成像光学系统质量时最基本、最简单的一种方法。显然，星点像的光强分布规律就决定了光学系统成像的优劣程度。星点检验就是基于这样的原理，通常考察光学系统对一个物点的成像质量就可以了解和评价光学系统对任意物分布的成像质量。为了评定系统的成像质量，并为改善像质提供必要的信息，通常选用星点(发光点)作为代表性的物体，通过描述它的像的全部特征来反映系统的像质。

传统的星点检测方法是：光源通过聚光镜照亮位于平行光管焦面的星点板小孔，从平行光管出射的平行光经待测物镜，在其焦面上成像，然后用目镜(测量显微镜)对所成的像进行观察。随着CCD和计算机技术的发展，光学图像数字化已成为必然的趋势。用计算机采集星点图像，不但能够减轻人眼观察的疲劳，而且可以同时再现焦前、焦面和焦后的星点图像，便于比较、判断像差的性质和大小，也有利于全面理解和掌握像差理论。

在做星点检验时，星孔直径、观察显微镜的数值孔径和放大率等的参数是要特别注意的。

在一般情况下使用白光光源，当需要检查单色像差时，只要配用相应的滤光片。星点检测通过观测光学系统对点目标的成像特性，可以检测出镜头的多种像差和缺陷。可利用光电扫描法可定量测定星点像的光强分布曲线或曲面，以点扩散函数表示测量结果。也可利用照相技术测量出光强灰度分布值，以点扩展函数表示测量结果。比较星点像与理想成像系统的星点像(艾里斑)，根据它们的大小、形状和光强分布的差异来评定成像系统的成像质量。

6.1.2 图像分辨率板法

星点检验法是基于几何光学的成像理论。而分辨率法是基于光的在光学系统设计中，常对极限分辨率提出要求。像点不是绝对的几何“点”，而是小光斑，这样相互靠近的两个像点就会有所重叠。通常用分辨率(resolution)来定量的分析成像系统的。光学成像系统的分辨本领是指能把系统两个靠近的点物或物体细节分辨开的能力，分辨率是评价光学系统成像质量的一个重要指标。我们知道，对一个无像差的理想光学成像系统，从几何光学的观点来看，每个像点都是一个抽象的几何点，两个点物不管离的多近，像点都可以分辨开来，显然，这样的成像系统的分辨本领是无限的，分辨率是无限大的。由5.6节可知，真实的光学成像系统对点物所成的“像”总会由于孔径光阑的限制会产生衍射效应，从而会使像点产生重叠而不能分辨开来。因此，对实际的光学系统来的，就需要有一个量来表征系统的像的清晰程度，由于圆形光孔是光学系统中最常用的元件，所以，通常就用圆孔的夫琅禾费衍射特性来定义光学系统的分辨率，即用艾里斑的大小。

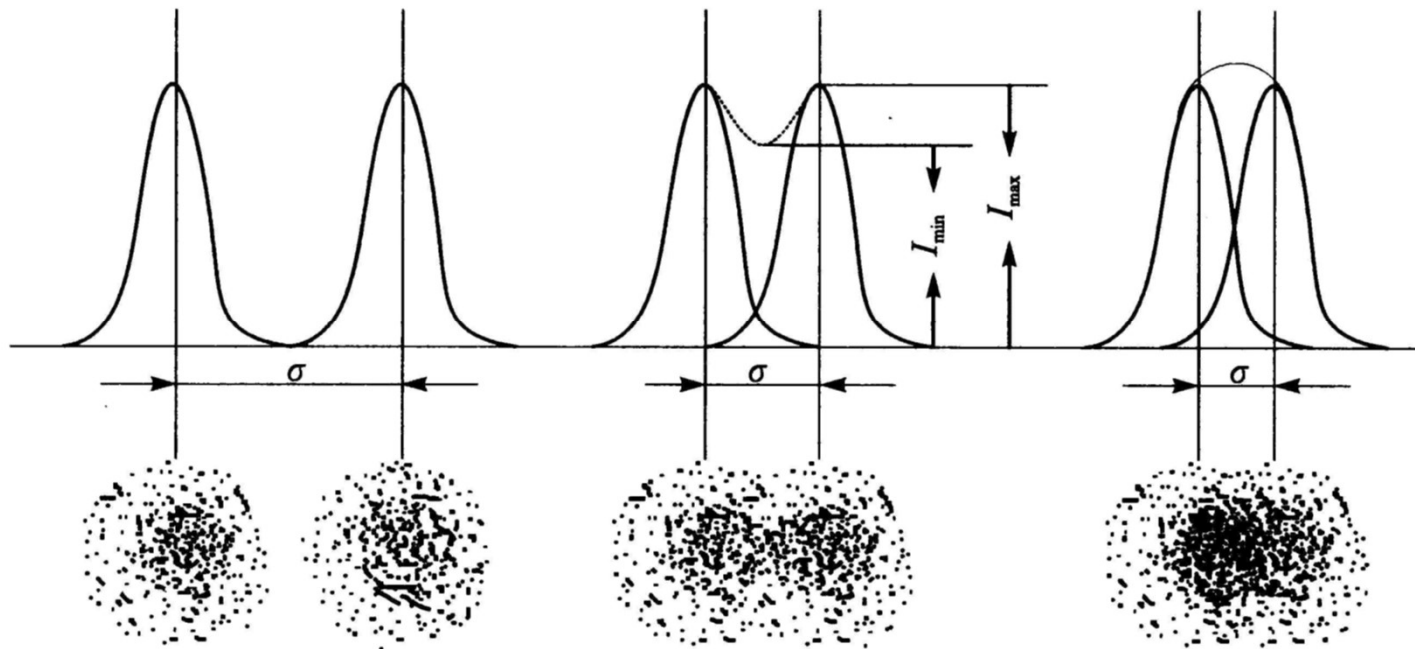
分辨率长期以来作为评定光学系统成像质量的一种标志，且能给出数量的大小，使用方便、速度快，应用广泛。本相机性能检测装置采用的也是分辨率法评定象质，即模拟无限远目标，完成静态及动态分辨率的测试任务。

对于衍射受限的圆形光瞳情况，在非相干照射方式下，瑞利建议了一个分辨判据，对两个强度相等的非相干点源，若一个点源产生的艾里斑中心恰好落在另一个点源所产生的的艾里斑的第一个极小点上，则称它们是非相干衍射受限系统“刚刚能够分辨”的两个点源。由前面所讲的圆孔的夫琅禾费衍射强度分布公式可知，像斑的归一化强度可表示为：

$$I(r) = \left[\frac{2J_1(\pi dr / \bar{\lambda} z)}{\pi dr / \bar{\lambda} z} \right]^2 = \left[\frac{2J_1(\pi x)}{\pi x} \right]^2$$

$\downarrow x = \pm 0.61$
 $\nwarrow x = dr / \bar{\lambda} z$

$$I(x) = \left\{ \frac{2J_1[\pi(x - 0.61)]}{\pi(x - 0.61)} \right\}^2 + \left\{ \frac{2J_1[\pi(x + 0.61)]}{\pi(x + 0.61)} \right\}^2$$



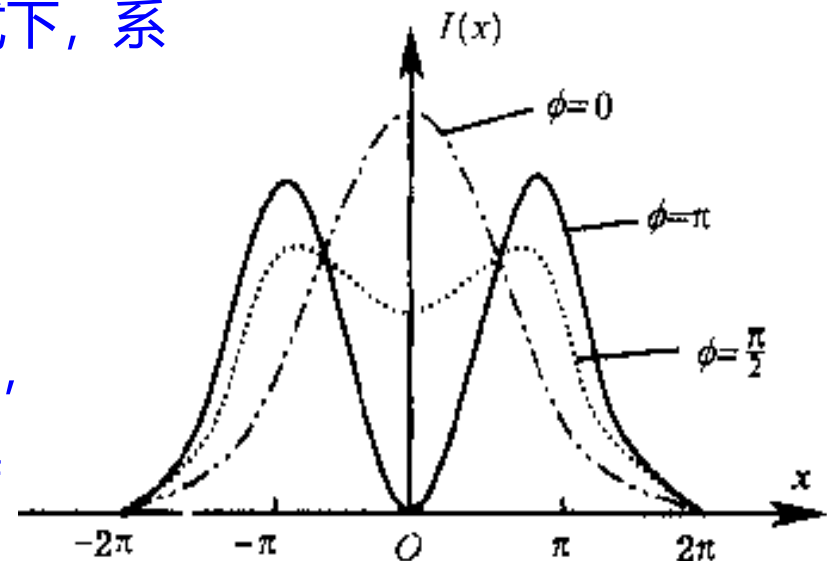
相对于相干照射方式，两个点源产生的爱里斑必须按复振幅叠加后，再求其合强度。此强度记为：

$$I(x) = \left\{ \frac{2J_1[\pi(x-0.61)]}{\pi(x-0.61)} + \frac{2J_1[\pi(x+0.61)]}{\pi(x+0.61)} e^{i\phi} \right\}^2$$

$\phi = 0$ 两点源同相位，因而两物点完全不能分辨，其系统的分辨能力不如非相干情形好。

相干照射的强度与非相干照射所得结果
 $\phi = \pi/2$ 完全相同，从而在两种照射方式下，系统的分辨能力都一样。

$\phi = \pi$ 即两点源相位相反时，相干照射的强度分布的中心凹陷取极小值，远低于19%，故这两点间的分辨要比非相干照射方式下更清楚。



按照瑞利准则，当一个点目标的衍射图样的中央亮斑的峰值正好落在另一点目标的衍射图样的第一个暗环处，那么这样的两个点目标被认为是可以分辨的。形成两个可分辨的光斑的两物点之间的最小间距，称为系统的分辨率。这时两点衍射图样的能量合成曲线的能量峰值和谷值之比约为1:0.735，两衍射斑的中心距即分辨的最小线度为：

瑞利判据 $\sigma_0 = 1.22 \bar{\lambda} \frac{f'}{D_0} = 1.22 \bar{\lambda} F$ 物镜焦距

光瞳口径

上式可转变更常习惯使用的显微镜的分辨率表达：

$$\sigma_0 = \frac{0.61 \bar{\lambda}}{n \sin U}$$

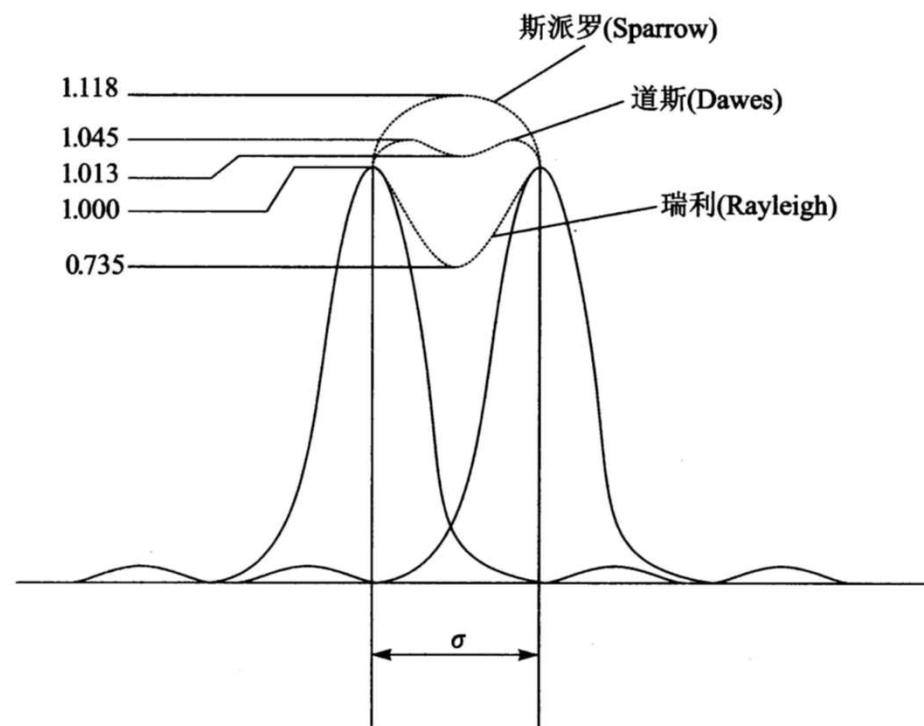
显微镜的数值孔径

按照瑞利判据，两衍射斑之间光强的最小值为73.5%，人眼很易察觉，因此有人认为该判据过于严格，于是提出了另一个判据-道斯(Dawes)判据，根据道斯判据，人眼刚能分辨两个衍射像点的最小中心距为：

$$\sigma_0 = 1.02 \bar{\lambda} F$$

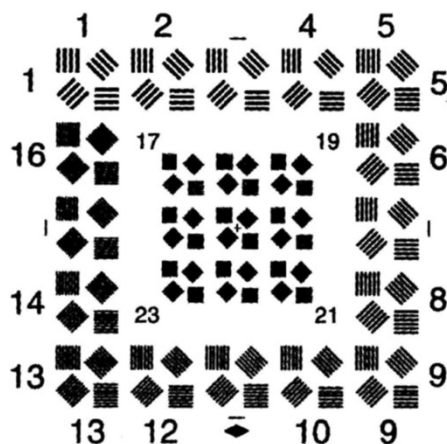
根据道斯判据，两衍射斑之是的总光强的最小值为1.013，两衍射斑中心最大光科学家为1.045。除上述两个判据外，斯派罗 (Sparrow) 还提出了一个判据，即当两个衍射斑之间的总光强刚好不出现下凹时为刚可分辨的极限情况，根据这一判据，两衍射斑之间的最小中心距为：

$$\sigma_0 = \frac{2.976 f' \bar{\lambda}}{\pi D_0} = 0.974 \bar{\lambda} F$$

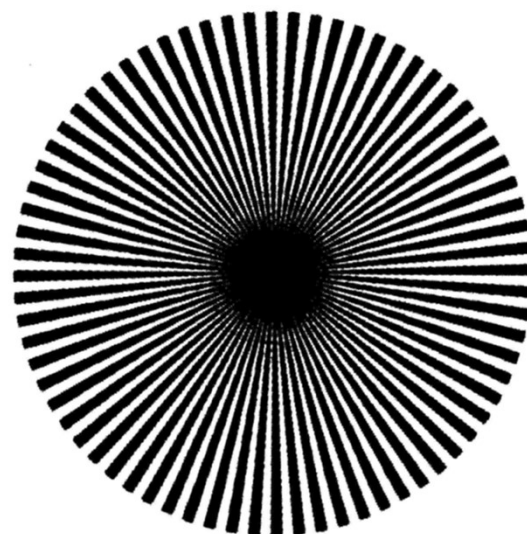


直接用人工方法得到两个非常靠近的非相干点光源用为检验光学系统分辨率的目标物是比较困难的。通常采用由不粗细的黑白线条组成的人工特制图案或实物标本作为目标物来检验光学系统的分辨率。由于各类光学系统的用途、工作条件、要求不同，所以实际制作的分辨率图案在形式上也有很大的不同。

常常采用鉴别率板作为目标为检查的极限分辨率。鉴别率板由若干组具有不同空间频率的黑白相间的条带组成。如图6.1.6所示为两种典型的常用分辨率图案。每组条带的空间频率相同，但具有不同的方向，用以检查镜头在不同方向下的成像情况。对于望远物镜和显微物镜，通常采用目视观察方法来判断其极限分辨率。首先使鉴别率板通过望远镜或显微物镜成像，然后用高分辨显微镜来观察所成的像，判断该物镜能分辨到哪一组条带。由于每组都对应一定的空间频率，由此可以知道该物镜的极限分辨率。



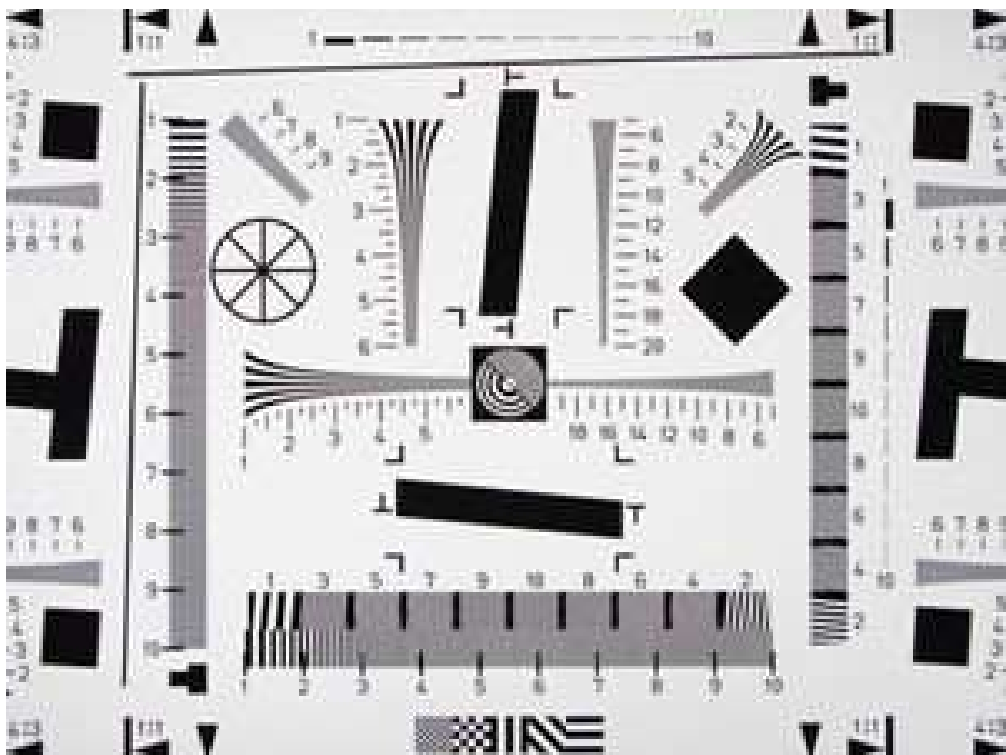
(a) 国家专业标准分辨率图案



(b) 辐射式分辨率图案

对于照相物镜，常采用照相方法。待检查的照相物镜把鉴别率板成像在高分辨胶片或干板上，经过冲洗后，判断该物镜能分辨到哪一组条带。

图6.1.7给出了ISO 12233分辨率板。这是一种专用于数码相机镜头分辨率检测的分辨率板(解析度卡)的标准样张，可以提供实际拍摄的垂直分辨率和水平分辨率等辅助测试。分辨率测试采用了国际标准的ISO12233解析度分辨率卡进行测试，采取统一拍摄角度和拍摄环境，对于数码摄像头的评测与其他产品不同，不像笔记本、DIY等有大量软件去测试客观的数据，能够从数据上说明一切。而评定数码相机的质量除了需要有一定的客观数据外，还需要结合实际的使用操作以及样张的拍摄来评定。因此，我们的评测是以客观数据为原则，并结合经验丰富的评测人员的理性分析，以求获得最客观的评测结果。ISO12233标准分辨率测试卡遵照12233的标准“摄影-电子照相画面-衡量方法”。它具有几乎大部分解析度卡所具有的特性。



分辨率作为光学系统成像质量的评价方法并不是一种完善的方法，主要原因有如下几点：

(1) 它只适合于大像差系统。从星点检验法可知，光学系统的分辨率与其像差的大小直接有关，即像差可降低光学系统的分辨率。但在小像差光学系统，如望远物镜、显微物镜中，实际分辨率几乎只与系统的相对孔径，即衍射现象有关，受像差的影响很小。只有在大像差光学系统，如照相物镜、投影物镜中，分辨率是与系统的像差有关的，并常以分辨率作为系统的成像指标。

(2) 与实际的图像有会差异。由于分辨率检测的分辨率板为黑白相间的条纹，因此，这与实际物体的亮度背景有着很大的差别。而且，对于同一光学系统，使用一块分辨板来检测其他分辨率，由于照明条件和接收器的不同，其检测结果就会有一定的差异。

(3) 会发生伪分辨的情况。对照相物镜等作分辨率检测时，当鉴别率板的某一组条纹已不能分辨时，但对更密一组的条纹反而可以分辨，这是因为对比度反围而造成的。因此，用分辨率来评价光学系统的成像质量也不是一种严格可靠的像质评价方法，但由于其指标单一，且便于测量，在光学系统的像质检测中得到了广泛的应用。

6.2 光学传递函数的概述

光学系统可以有效地看作一个空间频率的滤波器，因而其成像特性和像质评价可用物的空间频谱和像的空间频谱之比来表示，这个比的特性就是所谓的光学传递函数。所以，光学传递函数是从空间频谱的角度来描述成像特性。

上节介绍的光学系统成像质量的评价方法，都是基于把物体看作是发光点的集合，并以一点的成像质量来进行评价。而用光学传递函数来评价光学系统的成像质量，是基于把物看作是各种空间频率的谱组成的，也就是把物的光场分布函数用傅里叶展开的形式表示。物经具有线性不变性质的光学系统成像，可看作是物经光学系统的传递，其传递效果是频率不变，但其对比度下降，相位要发生推移，并在某一频率处截止，即对比度为0。这种对比度的降低和相位推移是随频率不同而不同的，其函数关系称之为光学传递函数。由于光学传递函数既与光学系统的像差有关，又与光学系统的衍射效果有关，因此用它来评价光学系统的成像质量，具有客观和可靠性，并能同时运用于小像差光学系统和大像差光学系统。光学传递函数反映了光学系统对物不同频率成分的传递能力。一般来说，高频部分反映物的细节传递情况，而低频部分则反映物的轮廓情况。

6.2 光学传递函数的概述

光学系统可以有效地看作一个空间频率的滤波器，因而其成像特性和像质评价可用物的空间频谱和像的空间频谱之比来表示，这个比的特性就是所谓的光学传递函数。所以，光学传递函数是从空间频谱的角度来描述成像特性。

上节介绍的光学系统成像质量的评价方法，都是基于把物体看作是发光点的集合，并以一点的成像质量来进行评价。而用光学传递函数来评价光学系统的成像质量，是基于把物看作是各种空间频率的谱组成的，也就是把物的光场分布函数用傅里叶展开的形式表示。物经具有线性不变性质的光学系统成像，可看作是物经光学系统的传递，其传递效果是频率不变，但其对比度下降，相位要发生推移，并在某一频率处截止，即对比度为0。这种对比度的降低和相位推移是随频率不同而不同的，其函数关系称之为光学传递函数。

由于光学传递函数既与光学系统的像差有关，又与光学系统的衍射效果有关，因此用它来评价光学系统的成像质量，具有客观和可靠性，并能同时运用于小像差光学系统和大像差光学系统。光学传递函数反映了光学系统对物不同频率成分的传递能力。一般来说，高频部分反映物的细节传递情况，而低频部分则反映物的轮廓情况。

在几何光学中是以点光源作为物的“基元”，并用几何像差来描述光线经过光学系统之后的空间分布的。几何像差虽然反映了光学系统的某些成像品质，但是用几个简单的像差数据来表示实际成像效果十分困难，而且从本质上说，它忽视光的不可避免的衍射效应。

阿贝和瑞利根据光波动性指出，衍射效应会使光学系统存在一个分辨极限。这样，用鉴别率板作为评价光学系统的时，就会有一个分辨极限。但实际情况表明，除了分辨率测定时的各种条件的复杂性、读取时的主误差以及光学系统的鉴别率与接收器(如胶片)之间关系不太明确等问题外，还存在鉴别率大小并不一定代表光学系统成像质量这样一个根本性的问题。

由于鉴别率的大小所反映的仅仅是光学系统的分辨极限，并没有反映出在可分辨范围内的整个像质状态，从光学传递函数的角度来说，分辨率不能反映不同空间频率物像之间对比度的变化，这意味着，分辨率虽然能定量地反映出一些成像特性，但它所提供的成像质量信息却不多。

而星点检验是观察光学系统在像差和衍射综合影响下的像面光能量分布状态，这虽然较全面地反映了成像质量，但由于这种观察提供成像质量的信息又太多而难以加对区分与定量处理。

过去曾经用过的像质评价手段，实际上都是在空间域里进行的，也就是通过一定的空间坐标的函数来描述光学系统的成像品质。实际上，分辨率方法的引入已经初步应用了“空间频率”的概念，它用了有一定空间频率的线条作为物的基元。另外，光学系统存在分辨极限，这就意味着它可以被看作是一个低通的空间滤波器，即它只能通过低于某一空间频率的光信号。

空间频率概念被引入光学问题的处理后，就试图开始在频率域中建立评价光学系统成像量的方法，这个方法主要就是光学传递概念的应用。自从发现分辨率评价的缺陷后，早在1938年由弗里塞把傅里叶处理的方法用于照相底片分辨率试验，提出了应该用亮度呈正弦分布的分辨率板来检验光学系统，并证实这种率的像的亮度仍是正弦分布，而且空间频率保持相对不变，只是正弦波的相对振幅有所降低。

1946年，杜弗运用傅里叶变换的处理方法来分析光学系统，从此建立了一种新的成像理论，使傅里叶变换在光学中的应用有了较大的发展，并为光学传递函数建立了理论基础。

1948年，赛尔温用正弦试验物来光学系统和光学材料。同年，赛德第一次利用通信论的观点，提出了用光学传递函数来评价成像质量。他用一个电影底片上的声带作为近似的正弦物来进行实验，用光电倍增管来测量像的反差，并指出了用光电方法来对光学像进行傅里叶处理的途径。在当时的实验条件下，这些的实验都是比较麻烦的，且精度也不高，理论上也还有不完善的之处，所以光学传递函数的概念并没有被普遍接受。

通常，认为霍普金斯的理论和林特贝的实验被认为是光学传递函数研究的开端。上世纪50年代霍普金斯发表了几篇关于光学传递函数方面的重要论文，在杜弗理论的基础上，他完整地提出了光学传递函数的概念和处理方法，并指出了光学传递函数作为像质评价的许多优点。

1954年，林特贝系统地提出了用扫描方法测量光学传递函数的几种可能性，为光学传递函数的测量打下了基础。光学传递函数的概念从此得到了光学的认同，许多学者开始开展了大量的工作。但是，在一段时间内，由于对一些具体问题，如坐标系的选择、空间频率的归一化方式、频率定位面的确定以及变形成像等方面的认识不一致和处理上的差异，还有当时光电测量技术的水平和实验装置精度的限制，所以各国和各实验室对光学传递函数的计算和测量结果很难一致。后来，通过举行多次国际会议进行交流和讨论，统一了看法，找出了误差的来源，并作了改进。

1962年8月在德国慕尼黑举行的第六届国际光学会议(ICO)上通过决定, 采用“光学传递函数”(Optical Transfer Function)这一名词, 简称OTF。

1964年9月在东京举行的第七届国际光学会议上, 已有关于光学传递函数理论和测量方面的专题报告和讨论。

1968年3月在波士顿、1970年9月在纽约、1974年5月在罗彻斯特举行有关光学传递函数的专题国际会议。

进入上世纪七十年代以后，随着大容量高速度数字计算机的发展和高精度光电技术测试技术的改进，使光学传递函数的计算和测量工作日趋完善，并开始在实际中得到应用。麦克唐奈的工作大提高了光学传递函数的计算精度，并使计算在小型计算机上亦能实现。关于光学传递函数的计算已经有了不少有效的计算程序，并已把快速傅里叶变换(FFT)技术用于光学传递的计算。为了校验光学传递函数测量仪器的精度并与计算结果进行比较，英国科学仪器研究协会(SIRA)1969年起研制了各种标准透镜，在各国的各实验进行测量。目前用光学传递函数来评价成像质量已进入实用阶段，各国已制订了光学传递函数的标准和相应的像质标准，在透镜自动设计中已采用光学传递函数作为控制成像质量的价值函数。作为生产检验和实验室用的光学传递函数测量仪器已有多种成熟的商用产品。

由于光学传递函数是建立在把光学系统用为空间滤波器这样一个基础上的，因此光学传递函数的概念和方法不仅对于像质评价，而且对于成像理论的研究，光学像的改善以及光学信息处理等方面，也起了很大的作用。

光学传递函数已在国际上被认定为光学仪器成像质量最为可靠的定量评价方法。光学传递函数能全面反映光学系统的衍射、渐晕及杂散光等影响成像质量的各种因素，客观定量地评价光学系统的像质。鉴于光学传递函数评价像质的方法，在光学系统的设计阶段和光学仪器产品的检验阶段都有重要的应用。国际上和我国都制定了有关光学传递函数的标准。

国家标准GB/T 4315.1：《光学传递函数 第1部分：术语、符号》，包括了光学传递函数术语、符号；

国家标准GB/T 4315.2：《光学传递函数 第2部分：测量导则》，规定了成像系统光学传递函数测量装置结构和用途的通用导则，叙述了可能影响光学传递函数测量的各个重要因素，同时规定了测量装置性能要求和环境控制的一般规则等。

国家标准GB/T 13742-2009：《光学传递函数测量准确度》，规定了对光学传递函数测量装置的误差来源进行评价的通常用导则，并提出了光学传递测量装置测量准确度的评定导则和评定方法。

光学传递函数的重要性的优点可以总结如下：

(1) 定量地反映了光学系统的孔径、光谱成份以有像差大小所引起的综合效果。

(2) 用光学传递函数来讨论光学系统时，其可靠性仅依赖于光学系统对于线性空间不性的满足程度。

(3) 用光学传递函数一分析讨论物象之间的关系时，不受试验物形式的任何限制。

(4) 可以用各个不同方位的一维光学传递来分析处理光学系统，大大简化了二维处理。

(5) 光学传递函可以根据设计结果直接计算，也能对已制成的光学系统进行测量。它物理意义明确，可以光学系统的实际成象效果与某些数据之间建立直接的联系。

6.3 衍射受限相干成像系统的传递函数

6.3.1 相干传递函数

6.3.2 相干传递函数的计算

6.3.3 相干传递函数的角谱解释

衍射受限系统是指不存在像差的理想光学系统，系统对点物所成像的光强分布是由衍射效应决定的。在相干照射下的衍射受限系统，对光场复振幅的传递是线性空不变的。系统的输出特性由输入光场与脉冲响应函数的卷积得到，即系统的成像特性在空域中是由点扩散函数来表征的。由于线性空不变系统的变换特性在频域中描述起来更为方便，因此在频域中用点扩散函数的频谱函数，来描述系统的成像特性，这个频谱函数就是传递函数。

点扩散函数

$$\tilde{h}(x, y)$$

$$\longleftrightarrow H(\xi, \eta)$$

$$H(\xi, \eta)$$

频谱函数；相干传递函数

在相干照射下的衍射受限系统，对复振幅的传递是线性空不变的。系统的输出特性由它的输入与脉冲响应的卷积得到，系统的成像特性在空域中是由点扩散函数来表征的。由于空不变系统的变换特性在频域中描述起来更为方便。

6.3.1 相干传递函数

相干成像系统的物像关系是由式(5.6.26)中的卷积积分描述的, 在该式中是衍射受限成像系统对物面复振幅的脉冲响应, 也可称为相干脉冲响应。卷积积分是把物点看做基元, 像点是物点产生的衍射图样的相干叠加。这是从空域的观点来看的, 也可以从频域来分析成像过程, 如果选择复指数函数作为物的基元函数, 考查系统对各种频率成分的传递特性。把相干脉冲响应的傅里叶变换定义为相干传递函数 (coherent transfer function, CTF)。

相干成像系统的物像关系的卷积积分为：

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} U^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o$$

几何光学理想的复振幅分布

系统的脉冲响应

$$G^g(\xi, \eta) = F\{U^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)\}$$

输入频谱

$$G_i(\xi, \eta) = F\{U_i(x_i, y_i)\}$$

输出频谱

$$H(\xi, \eta) = F\{\tilde{h}(x_i, y_i)\}$$

相干传递函数

运用卷积定理，可得：

$$G_i(\xi, \eta) = G^g(\xi, \eta)H(\xi, \eta)$$



表征了衍射受限的相干成像系统在频域中的作用

在衍射受限系统中：

$$H(\xi, \eta) = F \left\{ F \left\{ P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \right\} \right\} = P(-\lambda d_i \xi, -\lambda d_i \eta)$$


$$H(\xi, \eta) = P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)$$



相干传递函数与表示系统物理属性的光瞳函数联系起来了

假如不考虑光瞳的有限大小，光瞳函数可定义如下：

$$P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = \begin{cases} 1 & \text{在出瞳内} \\ 0 & \text{在出瞳外} \end{cases}$$

频域坐标与其空域坐标之间的关系为：

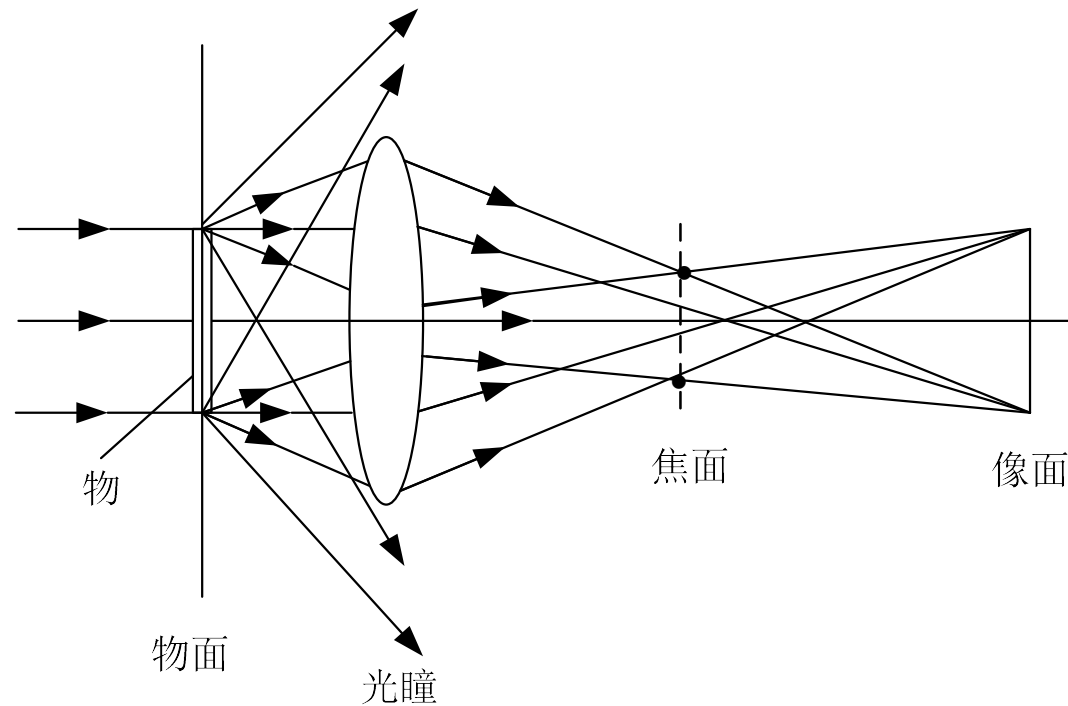
$$x = \lambda d_i \xi, \quad y = \lambda d_i \eta$$

系统的截止频率：

$$\xi_{\text{cx}} = \frac{x_{\text{max}}}{\lambda d_i}, \quad \eta_{\text{cy}} = \frac{y_{\text{max}}}{\lambda d_i}$$

对于相干传递函数，也有：

$$H(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{在出瞳内} \\ 0 & \text{在出瞳外} \end{cases}$$



对衍射受限相干成像系统，存在一个有限通频带。在些通频带内，系统允许每一频率分量无畸变地通过；在通频带外，频率响应突然变为零，即通带以外的所有频率分量统统都被衰减掉。因此，衍射受限相干成像系统对输入的各种频率成分的作用，相当于一个低通滤波器。由此可见，截止频率是检验光学成像系统质量优劣的重要参数之一。

6.3.2 相干传递函数的计算

例6.3.1 有一出射光瞳为正方形的衍限受限系统，正方形的边长为 l ，试计算该系统的相干传递函数。

解：该系统出瞳的透射率函数可用二维矩形函数来描述

$$P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right) = \begin{cases} 1 & \frac{|x|}{l}, \frac{|y|}{l} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

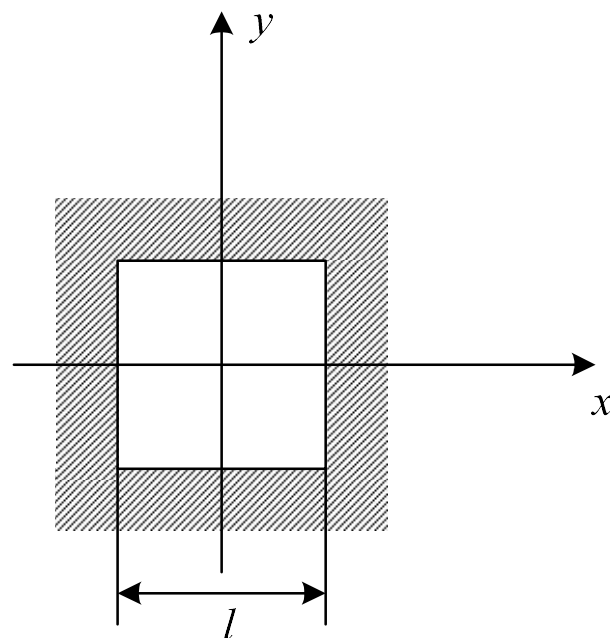
系统的相干传递函数是：

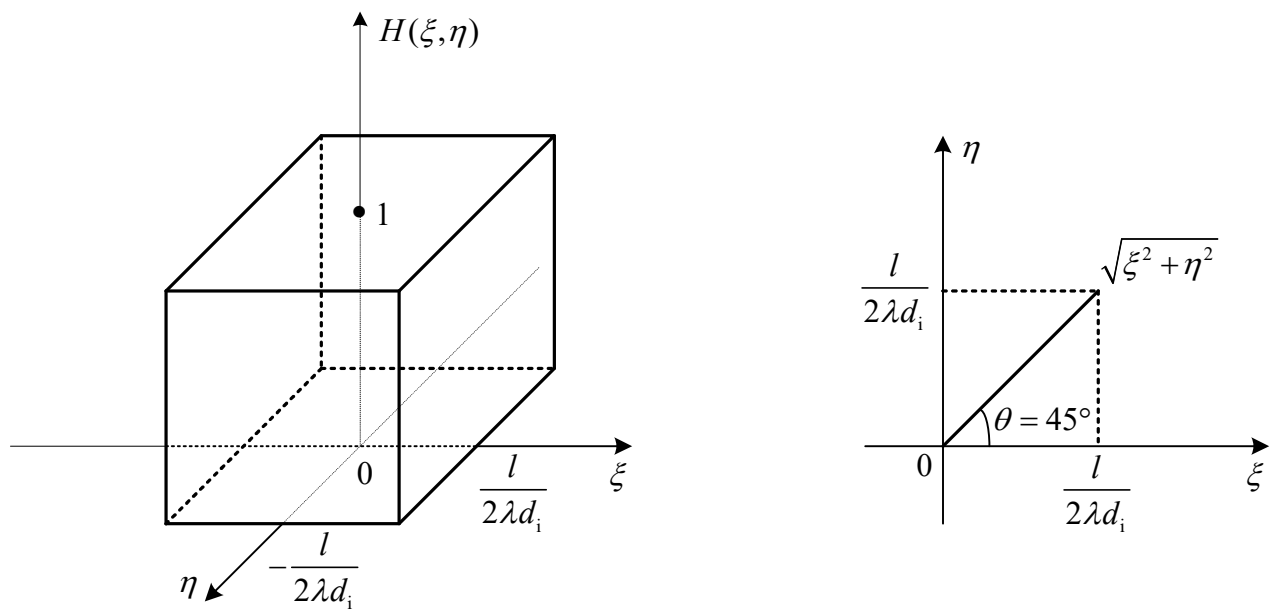
$$H(\xi, \eta) = P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)$$

$$= \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i \xi}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i \eta}{l}\right) = \begin{cases} 1 & |\xi|, |\eta| \leq \frac{l}{2\lambda d_i} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

空间截止频率相等，为：

$$\xi_c = \eta_c = \frac{l}{2\lambda d_i} = \rho_c$$





实际上，对于非圆对称光瞳的系统在频率平面上不同方向上截止频率数值常常不等。

$$\rho_c^{\max} = \frac{\sqrt{2}l}{2\lambda d_i} = \sqrt{2}\rho_c$$

例6.3.2 设衍射受限系统的出射光为一圆，其直径为 D ，试计算该系统的相干传递函数。

解：该系统出瞳的透射率函数可以用一个圆域函数来描述：

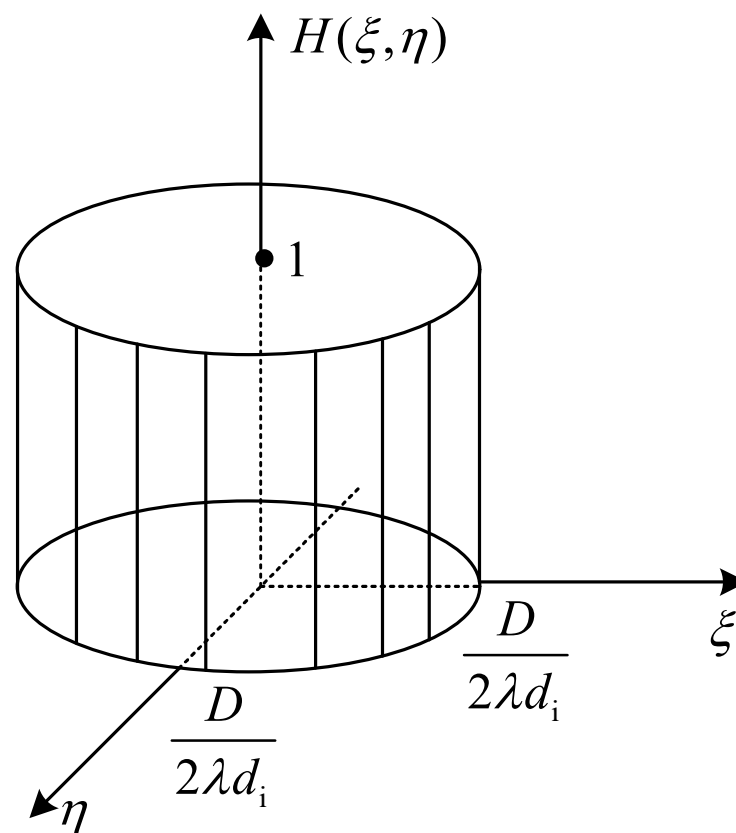
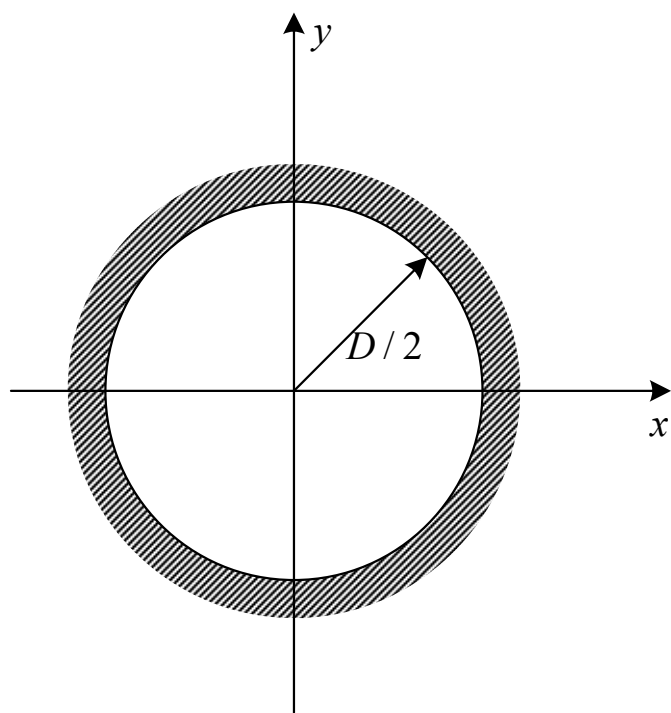
$$P(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{D/2}\right) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq r^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

系统的相干传递函数是：

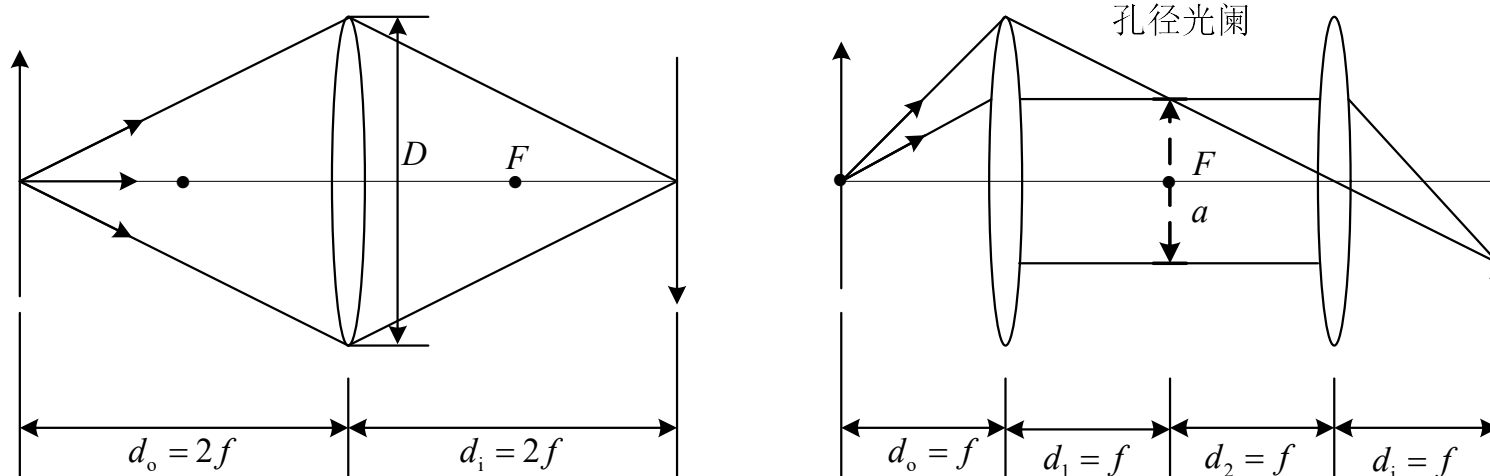
$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = \text{circ}\left(\frac{\lambda d_i \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{D/2}\right) \\ &= \begin{cases} 1 & \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \frac{D}{2\lambda d_i} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

根据出瞳的圆对称性，该系统在一切方向的空间截止频率分别为：

$$\rho_c = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{D}{2\lambda d_i}$$



例6.3.3 如图所示的是单透镜相干成像系统和双透镜相干成像系统，在双透镜系统中孔径光阑直径 a 应等于多大，才能使双透镜系统得到与单透镜系统相同的截止频率？假定透镜的焦距均为 f 。



解:

截止频率为:

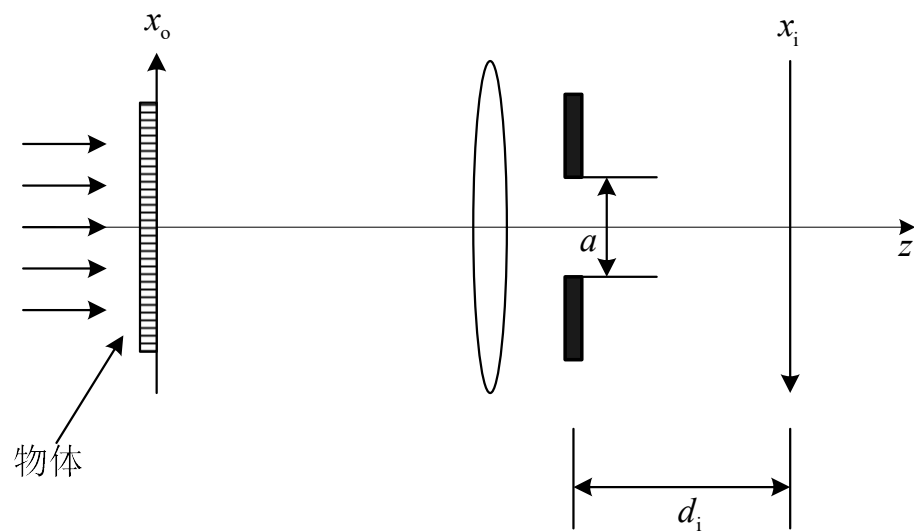
$$\rho_c = \frac{D}{2\lambda d_i} = \frac{D}{4\lambda f}$$

$$\rho_{c1} = \frac{a}{2\lambda d_2} = \frac{a}{2\lambda f} \quad \longrightarrow \quad a = D/2$$

例6.3.4 如图所示为衍射受限的相干成像系统，物体是振幅透过率为：

$$t(x_o) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x_o - ml)$$

的理想光栅。光阑缝宽为 $a = 5\text{cm}$ ，透镜焦距 $f = 5\text{cm}$ ，照明光波长 $\lambda = 10^{-4}\text{cm}$ ，成像时的放大倍率 $M = 1$ ，如果光栅周期 $l = 0.01\text{mm}$ ，求用单位振幅的平面波垂直照射该物体后像的振幅和强度分布。



解：应用式(6.3.2)从频域的角度来求解成像问题，需要知道物的谱频函数和相干传递函数，由题设条件，这里系统的截止频率为：

$$\rho_c = \frac{a}{2\lambda d_i} = \frac{5}{2 \times 10^{-4} \times 10} = 250 / \text{mm}$$

由于光阑为系统的出瞳，可用一维矩形函数表示出瞳函数，这样，由式(6.3.4)，可得到系统相干传递函数为：

$$H(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\rho_c}\right) = \begin{cases} 1 & |\xi| < \rho_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在空域中的光瞳函数为：

$$h(x) = F^{-1}\{H(\xi)\} = F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{\xi}{2\rho_c}\right)\right\}$$

当用单位振幅平面波垂直照射时，几何光学理想的光场复振幅在空频的分布 U^g 就等于物体的透过率，即入射光场(物)的复振幅分布为：

$$U^g(x_o) = t(x_o) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x_o - ml)$$

对上式作傅里叶变换可得到输入光场频谱函数为：

$$G^g(\xi) = F\{U^g(x_o)\} = \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi - \frac{m}{l}\right)$$

由式(6.3.7)可求得输出光场的频谱函数为：

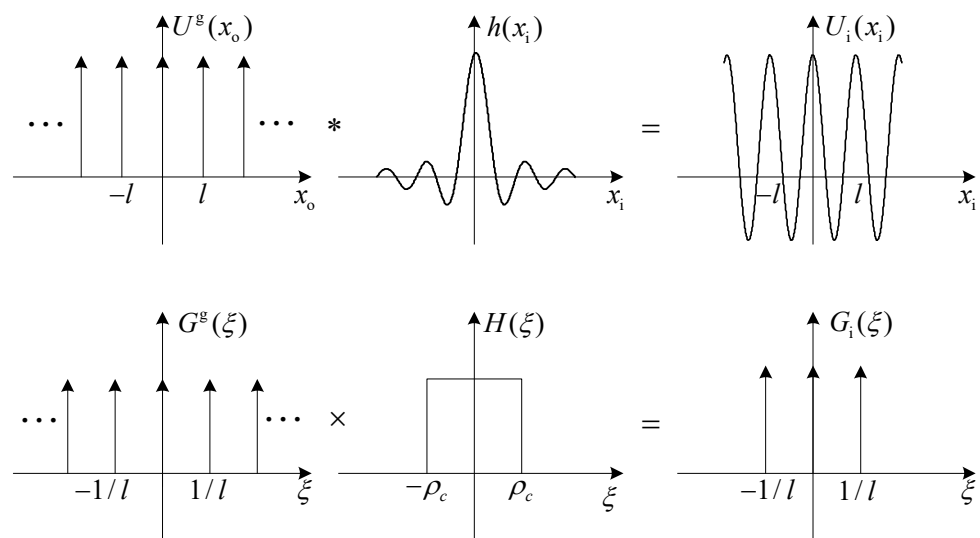
$$G_i(\xi) = G^g(\xi)H(\xi) = \frac{1}{l} \left[\delta(\xi) + \delta\left(\xi - \frac{1}{l}\right) + \delta\left(\xi + \frac{1}{l}\right) \right]$$

傅里叶逆变换，并略去常系数

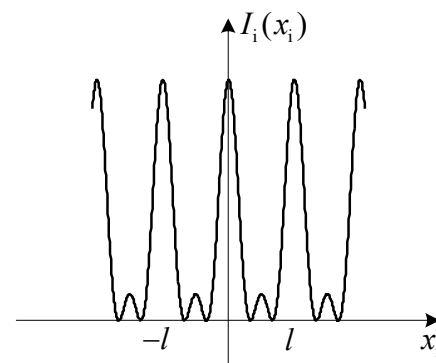
$$U_i(x_i) = U^g(x_o) * h(x) = 1 + e^{i2\pi x_i / l} + e^{-i2\pi x_i / l} = 1 + 2 \cos(2\pi x_i / l)$$

强度分布:

$$I_i(x_i) = |U_i(x_i)|^2$$



右图显示了像面的强度分布。从图中可以看出，光栅仍能分辨，像与物具有相同的周期，但在两个主极大之间出现极大，光栅条纹已经平滑变形。



6.2.3 相干传递函数的角谱解释

相干成像系统对于复振幅的变换是线性的，用单色光场传播的角谱理论可解释其在频域的效应。

$$\sin \theta_x = \lambda \xi, \sin \theta_y = \lambda \eta$$

$$G_i\left(\frac{\sin \theta_x}{\lambda}, \frac{\sin \theta_y}{\lambda}\right)(\xi, \eta) = G^g\left(\frac{\sin \theta_x}{\lambda}, \frac{\sin \theta_y}{\lambda}\right) H\left(\frac{\sin \theta_x}{\lambda}, \frac{\sin \theta_y}{\lambda}\right)$$

像的角谱

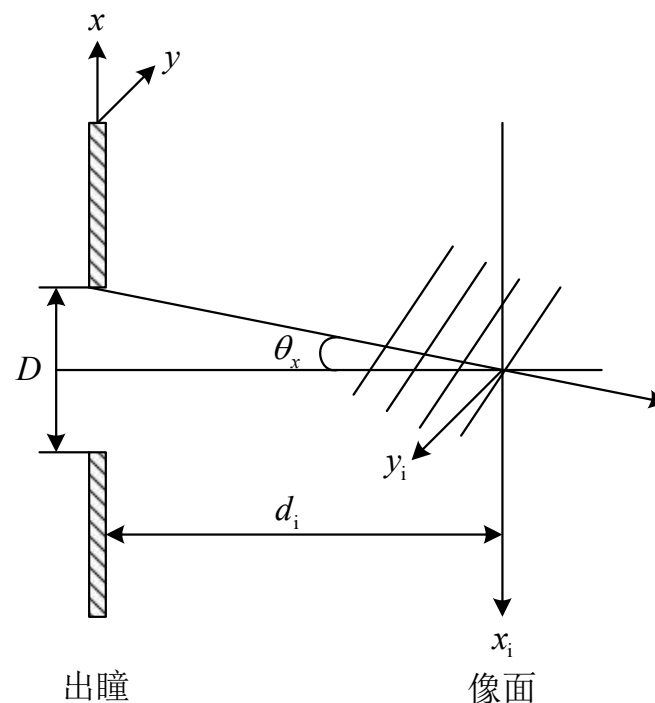
物的角谱

描述系统对各平面波分量在
传递过程中的影响

在傍轴近似下，由 x, y 点发出的光波对于像面上光轴附近很小区域来说，可看作平面波，传播方向由下式确定：

$$\sin \theta_x \approx \frac{x}{d_i} \quad \sin \theta_y \approx \frac{y}{d_i}$$

$$\xi = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \approx \frac{x}{\lambda d_i} \quad \eta = \frac{\sin \theta_y}{\lambda} \approx \frac{y}{\lambda d_i}$$



角谱传播时，显然受到有限大小光瞳的截取。光瞳本身的透过率函数就是频域的传递函数。

$$H\left(\frac{\sin \theta_x}{\lambda}, \frac{\sin \theta_y}{\lambda}\right) = P(d_i \sin \theta_x, d_i \sin \theta_y)$$

表明倾角 (θ_x, θ_y) 超过某一范围的平面波分量将被系统滤掉。如对于直径为 D 的圆形出瞳沿任意方向，如方向 x ，这个最大倾角应满足：

$$\sin \theta_x \approx \frac{D}{2d_i}$$

因而截止频率为：

$$\rho_c = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \approx \frac{D}{2\lambda d_i}$$

在不同方向上都相同

6.4 衍射受限非相干成像系统 的传递函数

6.4.1 非相干成像系统的光学传递函数

6.4.2 OTF和CTF的关系

6.4.3 衍射受限系统OTF的计算

6.4.4 有像差系统的传递函数

当光学系统用非相干光照射时，我们将会看到，系统的传递函数仍由出瞳确定，但二者之间的关系较为间接，不像相干传递函数那样简单，并直接由光瞳函数表示。非相干光照射的情形更复杂一些，并且更有趣。因此，比起相干成像理论，非相干成像理论的内容更为丰富。在非相干照射下，物面上各点的振幅和相位随时间变化的方式是彼此独立、统计无关的。这样一来，虽然物面上的每一点通过系统仍可得到一个对应的复振幅分布，但由于物面的照射是非相干的，故不能通过对这些复振幅分布的相干叠加得到像的复振幅分布，而应该先由这些复振幅分别求出对应的强度分布，然后将这些强度分布叠加(非相干叠加)而得到像面强度分布。

非相干成像是强度的线性系统，若成像是空不变的，则非相干成像是强度的线性空不变系统。

6.4.1 非相干成像系统的光学传递函数

在非相干照射方式下，衍射受限光学系统成像对光强度的变换是线性空不变的，对复振幅的变换则不是线性的。

由上面的讨论可以看到，对于非相干线性空不变成像系统，物像关系满足下述卷积积分：

$$I_i(x_i, y_i) = k \int \int_{-\infty}^{\infty} I_g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) h_1(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o = k I_g(x_i, y_i) * h_1(x_i, y_i)$$

在非相干照射下，线性空不变成像系统的像强分布是理想像的强度分布与强度点扩散函数的卷积。对于非相干照射下的强度线性空不变系统，在频域中来处理物像关系更加方便。

$$G_i(\xi, \eta) = G_g(\xi, \eta) H_1(\xi, \eta)$$

The diagram illustrates the frequency domain relationship for incoherent imaging. It features the equation $G_i(\xi, \eta) = G_g(\xi, \eta) H_1(\xi, \eta)$ at the top. Below the equation, three red arrows point upwards to the terms: $G_i(\xi, \eta)$, $G_g(\xi, \eta)$, and $H_1(\xi, \eta)$. The arrows from the left and right point to the first and third terms respectively, while the arrow from the center points to the second term. Below each arrow is a corresponding label in red text.

像强度频谱函数 物强度频谱函数 强度脉冲响应函数的频谱函数

$$G_i(\xi, \eta) = F\{I_i(x_i, y_i)\} \quad G_g(\xi, \eta) = F\{I_g(x_i, y_i)\} \quad H_i(\xi, \eta) = F\{h_1(x_i, y_i)\}$$


非负实函数，它们的傅里叶变换是厄米函数

$$G_i(\xi, \eta) = G_i^*(-\xi, -\eta)$$

$$G_i(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)e^{i\phi(\xi, \eta)}$$

$$A(\xi, \eta)e^{i\phi(\xi, \eta)} = A(-\xi, -\eta)e^{-i\phi(-\xi, -\eta)}$$

因此，模是偶函数，幅角是奇函数：

$$A(\xi, \eta) = A(-\xi, -\eta) \quad \phi(\xi, \eta) = -\phi(-\xi, -\eta)$$

$$I_i(\xi, \eta) = F^{-1} \left\{ A(\xi, \eta) e^{i\phi(\xi, \eta)} \right\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) e^{i\phi(\xi, \eta)} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} d\xi d\eta$$

并取其中对应的正频率项与负频率项相加，由欧拉公式可得到一个频率的余弦分量，即

$$\begin{aligned} & A(\xi, \eta) e^{i\phi(\xi, \eta)} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} + A(-\xi, -\eta) e^{-i\phi(-\xi, -\eta)} e^{i2\pi(-\xi x_i - \eta y_i)} \\ &= A(\xi, \eta) \left[e^{i\phi(\xi, \eta)} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} + e^{-i\phi(-\xi, -\eta)} e^{i2\pi(-\xi x_i - \eta y_i)} \right] \\ &= A(\xi, \eta) \cdot 2 \cos \left[2\pi(\xi x_i + \eta y_i) + \phi(\xi, \eta) \right]. \end{aligned}$$


像面上整个光强分布可视为各空间频率的余弦函数分布的光强分量的叠加求和。各余弦分量的模和幅角可以是互不相同的。最后得到：

$$I_i(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \cdot 2 \cos \left[2\pi(\xi x_i + \eta y_i) + \phi(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta$$

由于光强度不可能是负值，余弦分量的负值必然截止在零频率分量。

$$\xi = \eta = 0$$

零频分量


$$A(0,0)e^{i\phi(0,0)} = A(0,0)e^{-i\phi(0,0)}$$

由于光强度总是非负的实函数，因而必有一个常数分量即零频分量，而且它的幅值大于任何非零分量的幅值，即：

$$G(0,0) \geq |G_i(\xi, \eta)|$$

$$G_g(0,0) \geq |G_g(\xi, \eta)|$$

$$H_I(0,0) \geq |H_I(\xi, \eta)|$$

由于人眼或光探测器对图像的视觉效果在很大程度上取决于像所携带的信息与直流背景的相对比值，即像的清晰与否，主要的不在于包含零频分量在内的总光强有多大，而在于携带有信息那部分光强相对于零频分量的比值有多大。

归一化频谱函数:

$$G'_i(\xi, \eta) = \frac{G_i(\xi, \eta)}{G_i(0, 0)} = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i, y_i) e^{-i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} dx_i dy_i}{\int \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i, y_i) dx_i dy_i}$$

$$G'_g(\xi, \eta) = \frac{G_g(\xi, \eta)}{G_g(0, 0)} = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} I_g(x_i, y_i) e^{-i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} dx_i dy_i}{\int \int_{-\infty}^{\infty} I_g(x_i, y_i) dx_i dy_i}$$

$$H'_I(\xi, \eta) = \frac{H_I(\xi, \eta)}{H_I(0, 0)} = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} h_I(x_i, y_i) e^{-i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} dx_i dy_i}{\int \int_{-\infty}^{\infty} h_I(x_i, y_i) dx_i dy_i}$$

$$G_i(\xi, \eta) = G_g(\xi, \eta)H_I(\xi, \eta) \longrightarrow G_i(0, 0) = G_g(0, 0)H_I(0, 0)$$

$$G'_i(\xi, \eta) = G'_g(\xi, \eta)H'_I(\xi, \eta)$$

非相干成像系统的光学传递函数

$$H'_I(\xi, \eta) = |H'_I(\xi, \eta)|e^{i\varphi_1(\xi, \eta)} = M(\xi, \eta)e^{i\varphi(\xi, \eta)}$$

相位传递函数

调制传递函数

一个余弦输入的光强为：

$$\tilde{I}_g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) = a + b \cos[2\pi(\xi_o \tilde{x}_o + \eta_o \tilde{y}_o) + \varphi_g(\xi, \eta)]$$

则其频谱为：

$$\begin{aligned} G_g(\xi, \eta) &= F\{\tilde{I}_g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)\} \\ &= a\delta(\xi, \eta) + \frac{b}{2} \left\{ \delta(\xi - \xi_o, \eta - \eta_o) e^{i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} + \delta(\xi + \xi_o, \eta + \eta_o) e^{-i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} \right\}. \end{aligned}$$

$$I_i(x_i, y_i) = I_g(x_i, y_i) * h_1(x_i, y_i)$$

$$F\{I_i(x_i, y_i)\} = F\{I_g(x_i, y_i)\} F\{h_1(x_i, y_i)\}$$

$$F\{h_1(x_i, y_i)\} = H_1(\xi, \eta) = H_1(0, 0)H_1'(\xi, \eta)$$

$$F \{ I_i(x_i, y_i) \} = H_I(0,0)a\delta(\xi, \eta)H'_I(\xi, \eta) + \frac{1}{2}H_I(0,0)bH'_I(\xi, \eta) \\ \cdot \left\{ \delta(\xi - \xi_o, \eta - \eta_o)e^{i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} + \delta(\xi + \xi_o, \eta + \eta_o)e^{-i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} \right\}_o$$

↓
逆变换

$$I_i(x_i, y_i) = a \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi, \eta) H'_I(\xi, \eta) e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} d\xi d\eta \\ + \frac{b}{2} \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_o, \eta - \eta_o) H'_I(\xi, \eta) e^{i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} d\xi d\eta \right. \\ \left. + \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi + \xi_o, \eta + \eta_o) H'_I(\xi, \eta) e^{-i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} e^{i2\pi(\xi x_i + \eta y_i)} d\xi d\eta \right\} \\ = aH'_I(0,0) + \frac{b}{2} \left\{ H'_I(\xi_o, \eta_o) e^{i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} e^{i2\pi(\xi_o x_i + \eta_o y_i)} + H'_I(-\xi_o, -\eta_o) e^{-i\varphi_g(\xi_o, \eta_o)} e^{-i2\pi(\xi_o x_i + \eta_o y_i)} \right\}$$

$$H'_I(0,0)=1$$

$$H'_I(\xi_o,\eta_o)=M(\xi_o,\eta_o)e^{i\varphi(\xi_o,\eta_o)}$$

$$H'_I(-\xi_o,-\eta_o)=M(-\xi_o,-\eta_o)e^{i\varphi(-\xi_o,-\eta_o)}=M(\xi_o,\eta_o)e^{-i\varphi(\xi_o,\eta_o)}$$

像强度分布为：

$$I_i(x_i,y_i)=a+bM(\xi_o,\eta_o)\cos[2\pi(\xi_o x_i+\eta_o y_i)+\varphi_g(\xi_o,\eta_o)+\varphi(\xi_o,\eta_o)]$$



$$I_i(x_i,y_i)=a+bM(\xi,\eta)\cos[2\pi(\xi x_i+\eta y_i)+\varphi_g(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta)]$$

由此可见，余弦条纹通过线性空不变成像系统后，像仍然是同频率的余弦条纹，只是振幅减小了，相位变化了。振幅的减小和相位的变化都取决于系统的光学传递函数在该频率处的取值。

对于呈余弦变化的强度分布，其对比度或调制度定义为：

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

物(或理想像)和像的调制度为：

$$V_g = \frac{I_{g\max} - I_{g\min}}{I_{g\max} + I_{g\min}} = \frac{(a+b) - (a-b)}{(a+b) + (a-b)} = \frac{b}{a}$$

$$V_i = \frac{I_{i\max} - I_{i\min}}{I_{i\max} + I_{i\min}} = \frac{a + bM(\xi, \eta) - a + bM(\xi, \eta)}{a + bM(\xi, \eta) + a - bM(\xi, \eta)} = \frac{b}{a} M(\xi, \eta)$$

$$V_i = M(\xi, \eta) V_g$$

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \varphi_g(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta)$$

即像的对比度等于物的对比度与相应频率的MTF的乘积，PTF给出了相应的相移。

6.4.2 OTF和CTF的关系

$\tilde{H}^I(\xi, \eta)$, $H(\xi, \eta)$ 分别描述同一系统采用非相干和相干照射时的传递函数, 它们都取决于系统本身的物理性质, 由自相关定理和巴塞伐定理可以得到:


$$\begin{aligned}\tilde{H}^I(\xi, \eta) &= \frac{H^I(\xi, \eta)}{H^I(0, 0)} = \frac{F\{h^I(x_i, y_i)\}}{\int \int_{-\infty}^{\infty} h^I(x_i, y_i) dx dy} = \frac{F\left\{\left|\tilde{h}(x_i, y_i)\right|^2\right\}}{\int \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{h}(x_i, y_i)\right|^2 dx_i dy_i} \\ &= \frac{H(\xi, \eta) \otimes H(\xi, \eta)}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |H(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta} = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\alpha, \beta) H(\xi + \alpha, \eta + \beta) d\alpha d\beta}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |H(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta}.\end{aligned}$$

对于同一系统来说, 光学传递函数等于相干传递函数的自相关归一化函数。这一结论对于有像差与无像差的情况都是成立的。

6.4.3 衍射受限系统OTF的计算

对于相干照射的衍射受限系统，将式(6.3.4)代入式(6.4.29)可得：

$$\tilde{H}^I(\xi, \eta) = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \alpha, \lambda d_i \beta) P[\lambda d_i (\xi + \alpha), \lambda d_i (\eta + \beta)] d\alpha d\beta}{\int \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \alpha, \lambda d_i \beta) d\alpha d\beta}$$

 $x = \lambda d_i \alpha \quad y = \lambda d_i \beta$

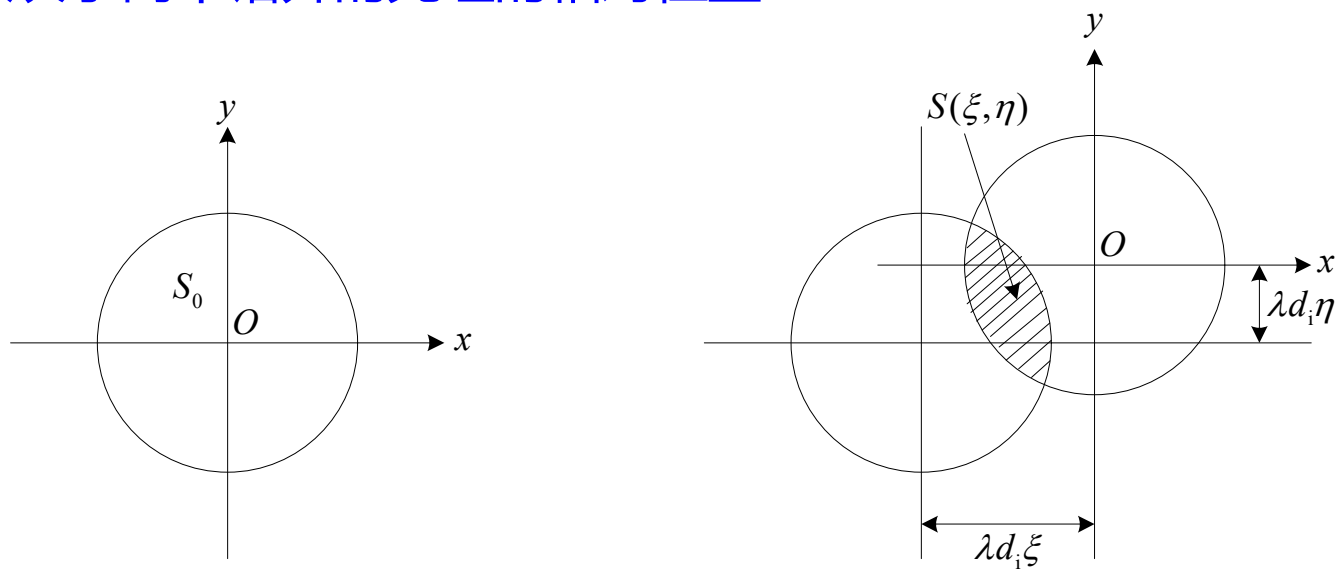
$$\tilde{H}^I(\xi, \eta) = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) P(x + \lambda d_i \xi, y + \lambda d_i \eta) dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx dy}$$

由于光瞳函数只有1和0两个值，且 $P^2 = P$ 上式表明衍射受限系统的OTF是光瞳函数的自相关归一化函数。

求衍射受限系统的OTF就是计算归一化的重叠面积，即

$$\tilde{H}^I(\xi, \eta) = \frac{\text{出瞳重叠面积}}{\text{出瞳总面积}} = \frac{S(\xi, \eta)}{S_0}$$

重叠面积取决于两个错开的光瞳的相对位置



对于简单几何形状的光瞳，不难求得归一化重叠面积的数学表达式；对于复杂的光瞳，可用计算机计算在一系列分立频率上的OTF。

衍射受限系统的**OTF**的一些性质：

(1) 由于 $\tilde{H}^I(\xi, \eta)$ 是实的非负函数，因此衍射受限的非相干成像系统只改变各频率余弦分量的对比，而不改变它们的相位。即只需考虑**MTF**而不必考虑**PTF**。

(2) $\tilde{H}^I(0,0)=1$ 。当 $\xi=0, \eta=0$ 时，两个光瞳完全重叠，归一化重叠面积为**1**，这正是**OTF**归一化的结果。这并不意味着物和像的背景光强相同。由于吸收、反射、散射及光阑挡光等原因，像面背光强总要弱于物面光强。但从对比度考虑，物像方零频分量的对比度都是零，无所谓衰减，所以才有 $\tilde{H}^I(0,0)=1$ 。

(3) $\tilde{H}^I(\xi, \eta) \leq \tilde{H}^I(0,0)$ 。这从两个光瞳错开后重叠的面积小于完全重叠面积可以看出。

(4) 截止频率 ξ_c, η_c 。两出瞳从完全重合开始，分别朝相反方向平移，直至重叠面积刚好为零时，它们已经移开了 $2x_{\max}, 2y_{\max}$ 于是有 $2x_{\max} = \lambda d_i \xi$ ， $2y_{\max} = \lambda d_i \eta$ 从而求得：
$$\xi_c = \frac{2x_{1\max}}{\lambda d_i} \quad \eta_c = \frac{2y_{1\max}}{\lambda d_i}$$

与相干成像系统相比，非相干成像系统的截止频率是相干成像系统的两倍。在截止频率所规定的范围之外，光学传递函数为零，像面上不出现这些频率成分。

计算OTF的步骤

(1) 确定系统出瞳的形状和大小，计算出瞳总面积 S_0 。

(2) 计算出瞳面至像平面之间的距离 d_i 。

(3) 任意给定一组 (ξ, η) 值，算出 $(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)$ 值。将出瞳平移，使其中心落到 $(-\lambda d_i \xi, -\lambda d_i \eta)$ 处，计算移动前后两出瞳的重叠面积。

(4) 相继再给定一组 (ξ, η) 值，再算出重叠面积。依次类推，就可算出 $S(\xi, \eta)$ 值。

(5) 按公式(6.4.32)计算得到 $\tilde{H}^1(\xi, \eta)$

例6.4.1 衍射受限非相干成像系统的光瞳为边长 l 的正方形，求其光学传递函数。

解： 此时的光瞳函数可表示为：

$$P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right)$$

显然光瞳总面积为 $S_0 = l^2$

重叠面积

$$S(\xi, \eta) = \begin{cases} (l - \lambda d_i \xi)(l - \lambda d_i \eta) & \xi, \eta > 0 \\ (l + \lambda d_i \xi)(l + \lambda d_i \eta) & \xi, \eta < 0 \\ 0 & \lambda d_i |\xi| > l, \lambda d_i |\eta| < l \end{cases}$$



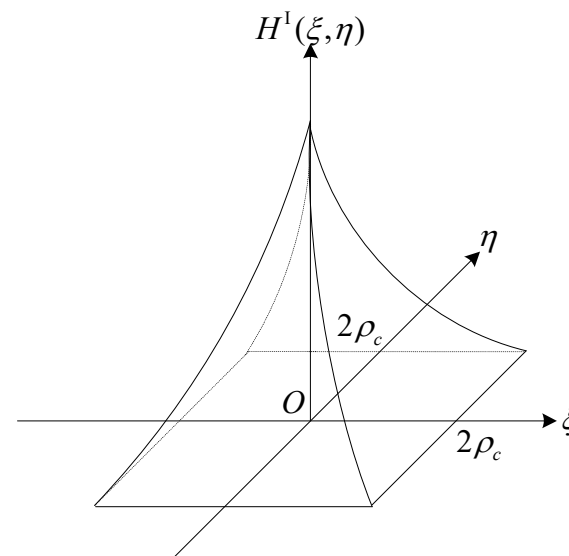
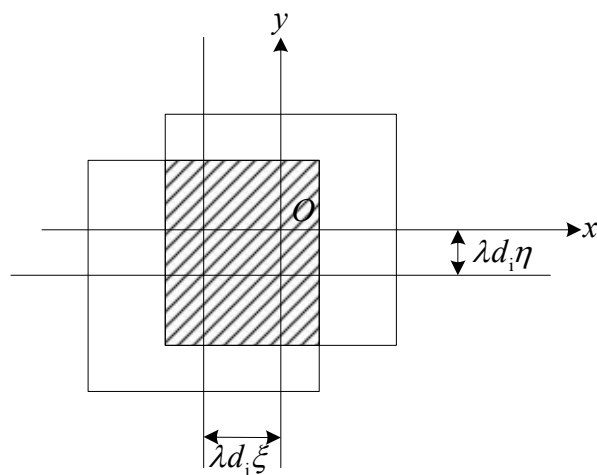
$$S(\xi, \eta) = \begin{cases} (l - \lambda d_i |\xi|)(l - \lambda d_i |\eta|) & \lambda d_i |\xi| < l, \lambda d_i |\eta| < l \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

光学传递函数为：

$$H'_I(\xi, \eta) = \frac{S(\xi, \eta)}{S_0} = \text{tri}\left(\frac{\xi}{2\rho_c}\right) \text{tri}\left(\frac{\eta}{2\rho_c}\right)$$

$$\rho_c = l / 2\lambda d_i$$

截止频率是 $2\rho_c = l / \lambda d_i$



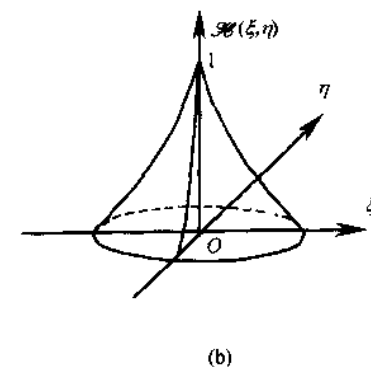
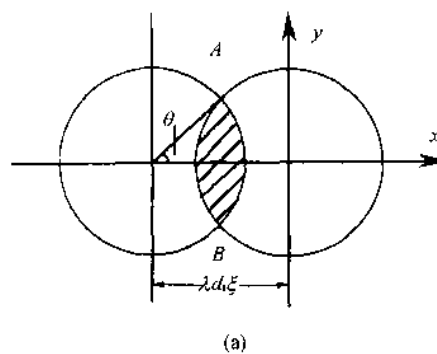
例6.4.2 衍射受限系统的出瞳是直径为**D**的圆，求此系统的光学传递函数。

解：由于是圆形光瞳，**OTF**应该是圆对称的。根据几何公式，重叠面积为：

$$S(\xi, 0) = \frac{D^2}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{\lambda d_i \xi / 2}{D/2} = \frac{\lambda d_i \xi}{D}$$

$$\lambda d_i \xi = D \quad \rho_c = D / 2 \lambda d_i \xi$$



$$H(\xi, 0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \\ 0 \end{cases}$$

$$\rho \leq D / \lambda d_i$$

其它

6.4.4 有像差系统的传递函数

上面我们只讨论了没有像差时相干照射与非相干照射下的光学传递函数，这当然是理想的情况。任何一个实际系统总是有像差的。像差可能来自构成系统的元件，也可能来自成像平面的位置误差，还可能来自理想球面透镜所固有的像差(如球面像差)等。对于有像差的光学系统，不论造成像差的原因是什么，总可以归结为波面对于理想球面波的偏离。像差会对传递函数产生影响，在相干或非相干照射下，往往都是复函数，系统将对各频率成分的相位产生影响。

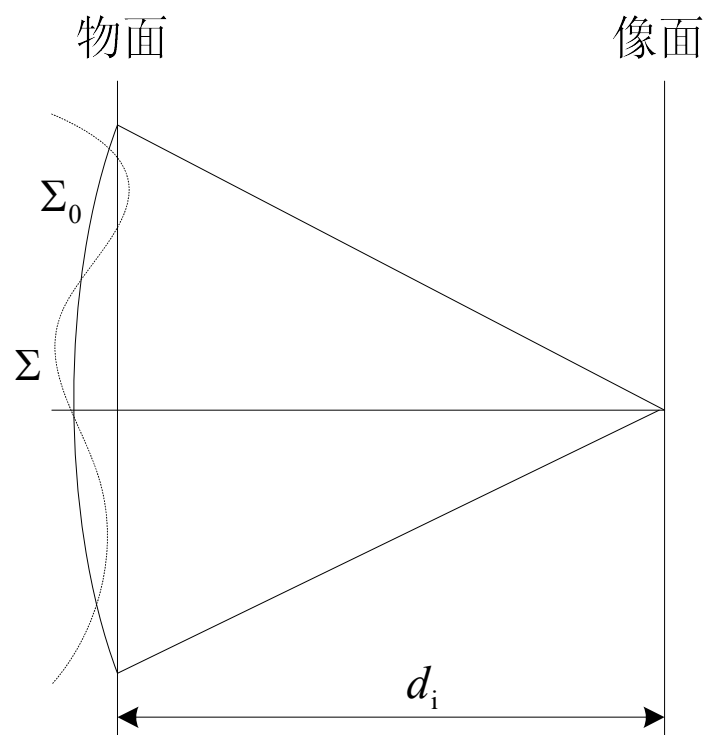
相位变化

$$P'(x, y) = P(x, y)e^{ikW(x, y)} = \begin{cases} e^{ikW(x, y)} & \text{在光瞳内} \\ 0 & \text{在光瞳外} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x_i, y_i) &= F \{ P'(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \} \\ &= F \{ P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) e^{ikW(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y})} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= P'(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) \\ &= P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{ikW(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)} \end{aligned}$$

由于像差的影响，点扩散函数的峰值明显小于没有像差时系统点扩散函数的峰值。可以把这两个峰值之比作为像差大小的指标，称为斯特列尔(Strehl) 清晰度。



有像差系统的OTF应该是广义光瞳函数的归一化自相关函数，即：

$$H'_I(\xi, \eta) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} P'(x, y) P'(x + \lambda d_i \xi, y + \lambda d_i \eta) dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx dy}$$



$$H'_I(\xi, \eta) = \frac{\iint e^{-ikW(x, y)} e^{ikW(x + \lambda d_i \xi, y + \lambda d_i \eta)} dx dy}{S_0}$$

上式给出了像差引起的相位畸变与OTF的直接关系，当波像差为零时，就是衍射受限的OTF。对于像差不为零的情况，OTF是复函数。像差不为零不仅影响输入频率成分的对比度，而且也产生相移，利用许瓦兹 (Schwarz) 不等式，像差的存在不会增大MTF的值。许瓦兹不等式为：

$$\left| \int \int_{-\infty}^{\infty} XY d\xi d\eta \right|^2 \leq \int \int_{-\infty}^{\infty} |X|^2 d\xi d\eta \int \int_{-\infty}^{\infty} |Y|^2 d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned} |H'_I(\xi, \eta)|_{\text{有像差}}^2 &= \frac{\left| \iint_{S(\xi, \eta)} e^{-ikW(\zeta, \iota)} e^{ikW(\zeta + \lambda d_i \xi, \iota + \lambda d_i \eta)} d\zeta d\iota \right|^2}{S_0^2} \\ &\leq \frac{\iint_{S(\xi, \eta)} |e^{-ikW(\zeta, \iota)}|^2 d\zeta d\iota \cdot \iint_{S(\xi, \eta)} |e^{ikW(\zeta + \lambda d_i \xi, \iota + \lambda d_i \eta)}|^2 d\zeta d\iota}{S_0^2} = \frac{\left| \iint_{S(\xi, \eta)} d\zeta d\iota \right|^2}{S_0^2} \\ &= |H'_I(\xi, \eta)|_{\text{无像差}}^2. \end{aligned}$$

由此可见，像差的存在会使光学系统的调制传递函数下降，像面光强度分布的各个空间频率分量的对比度降低，也就是像差会进一步降低成像质量。但可以证明，只要是同样大小和形状出射光瞳，则对于有像差的系统和无像差的系统，其截止空间频率是一样的。

6.5 线扩散函数和刃边扩散函数

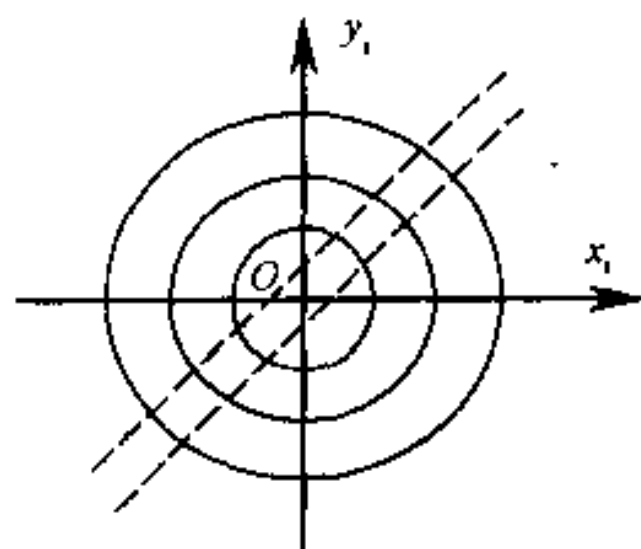
6.5.1 线扩散函数和刃边扩散函数的概念

6.5.2 相干及非相干线扩散函数和相干及非相干刃边扩散函数

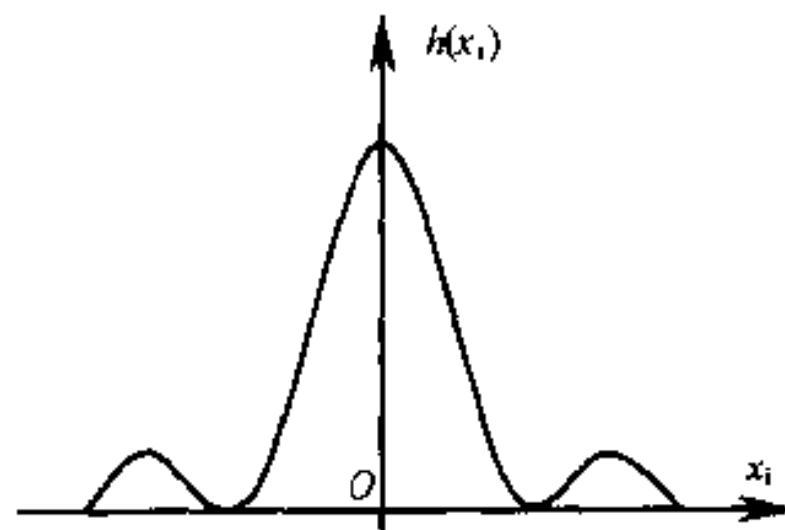
6.5.1 线扩散函数和刃边扩散函数的概念

要测量传递函数，一种方法是计算或测量出系统的点扩散函数，然后对它做傅里叶变换以求得传递函数。这种方法要求得到点扩散函数的精确表达式，在难以得到时，这种方法就难以使用。另一种方法是把大量频率不同的本征函数逐个输入系统，并确定每个本征函数所受到的衰减及其相移，从而得到传递函数。这种方法较第一种方法直接，但测量数目大，有时实现起来也相当困难。一种实用的方法是由线扩散函数来确定传递函数。

前面我们知道，对于相干照射成像系统，点物在像面上的响应，也就是点扩散函数是一种复振幅分布，所有点物响应的叠加即得像面上的复振幅分布，复振幅的绝对值的平方就是像面的强度分布。对于非相干照射成像系统，点物在像面上的响应即强度点扩散函数是一种强度分布，所有这些强度点扩散函数的叠加就得到像面强度分布。但无论是复振幅点扩散函数或是强度点扩散函数，就其叠加成线扩散函数的方式而言是一样的。这样，我们可以以点物的强度响应为例讨论点扩散函数与线扩散函数的关系。



(a)



(b)

一个亮狭缝通过光学系统后，光强分布依然是往两侧散开的，散开的情况取决于光学系统的点扩散函数。由于一根亮直线或一个亮狭缝可以看成由许多亮点的集合组成的，这许多沿直线排列的点源的像点的叠加就构成亮直线的光强分布。如果我们把直线像的长度方向取为 y_i 方向，那么沿 x_i 方向上的光强分布 $L(x_i)$ 就叫做线扩散函数。

如果系统输入一线脉冲，设这线脉冲是平行于 y_o 轴的线光源，即：

$$U_o(x_o, y_o) = \delta(x_o)$$

这样，线性空不变系统的线扩散函数为：

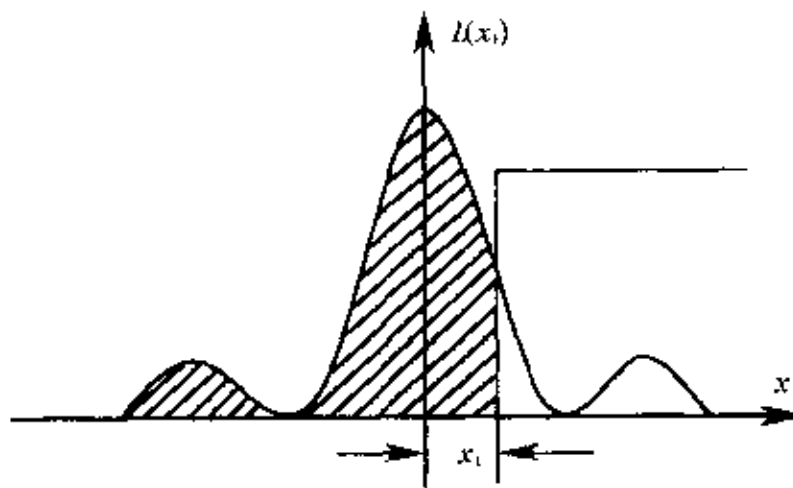
$$L(x_i) = \delta(x_i) * h(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) h(x_i - \xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i, \eta) d\eta$$

线扩散函数仅依赖于 x_i ，其值等于点扩散函数沿 y_i 方向的线积分。

如果物为一狭像，实际上在像面上形成的分布就是线扩散函数。我们可以用一个与狭缝方向平行的刀片放置在像面上。开始时，刀片完全挡住狭缝像，刀片逐渐移动，也就逐渐放入狭缝像的光。在图中所示的是狭缝线扩散函数 $L(x_i)$ ，刀片刃口移动到位置 x_i 时，放入的光通量与图中阴影面积成例。这样一来，在刀片的整个移动过程中，进入探测器的光通量随刀口位置 x_i 的变化，得到一个函数 $E(x_i)$ ，这个函数称为边缘函数。

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} L(\xi) d\xi$$

$$\frac{dE(x_i)}{dx_i} = L(x_i)$$



边缘扩散函数也可用下面方式导出：对系统输入一个阶跃函数，如均匀照射的直边或刀口形成的光分布。系统的输出叫阶跃响应或边缘扩散函数，即：

$$\begin{aligned} E(x_i) &= \text{step}(x_i) * h(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \text{step}(x_i - \xi) d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) d\eta \right] \text{step}(x_i - \xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\xi) \text{step}(x_i - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} L(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

6.5.2 相干及非相干线扩散函数和相干及非相干刃边扩散函数

在相干照射下的狭缝在像面上产生的复振幅就是相干线扩散函数，其一维傅里叶变换等于系统的传递函数沿 ξ 方向的截面分布，即有：

$$F\{L(x_i)\} = F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(x_i, \eta) d\eta\right\} = H(\xi, 0)$$

$$L(x_i) = F^{-1}\{H(\xi, 0)\}$$

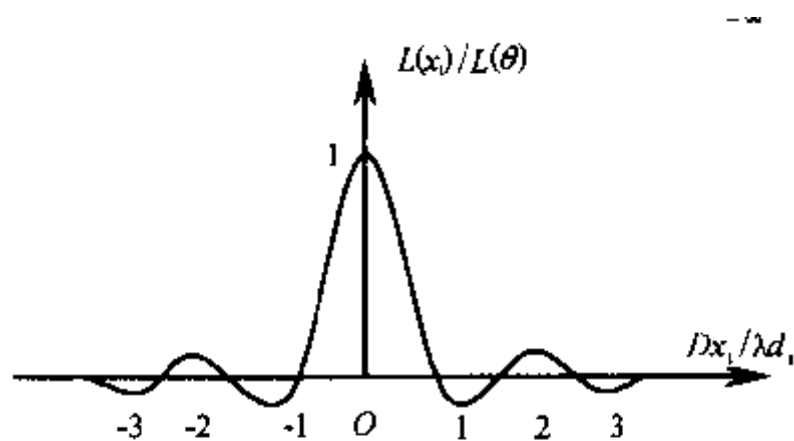
$$L(x_i) = F^{-1}\{P(\lambda d_i \xi, 0)\}$$

$$P(\lambda d_i \xi, 0) = \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i \xi}{D}\right)$$

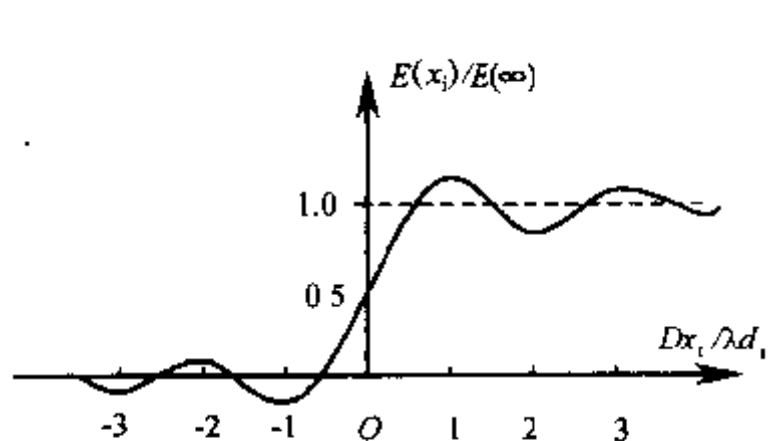
$$L(x_i) = F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{\lambda d_i \xi}{D}\right)\right\} = \frac{D}{\lambda d_i} \text{sinc}\left(\frac{D x_i}{\lambda d_i}\right)$$

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{D}{\lambda d_i} \operatorname{sinc}\left(\frac{D}{\lambda d_i} \xi\right) d\xi$$

$$E(x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi D x_i}{\lambda d_i} - \frac{1}{18} \left(\frac{\pi D x_i}{\lambda d_i} \right)^2 + \frac{1}{600} \left(\frac{\pi D x_i}{\lambda d_i} \right)^3 - \dots \right]$$



(a)



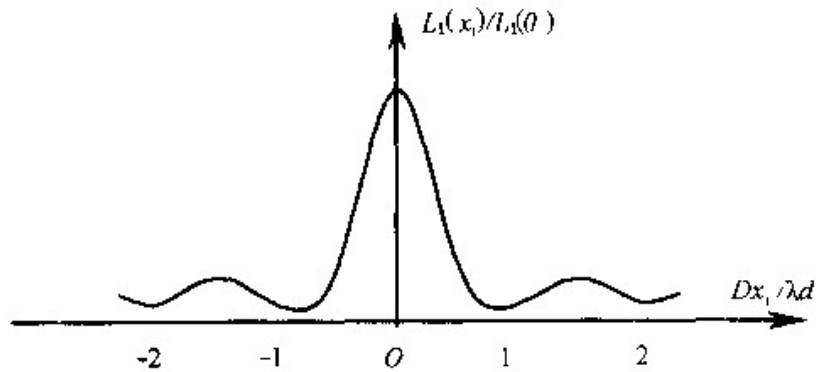
(b)

线扩散函数。它与光学传递函数的关系是：

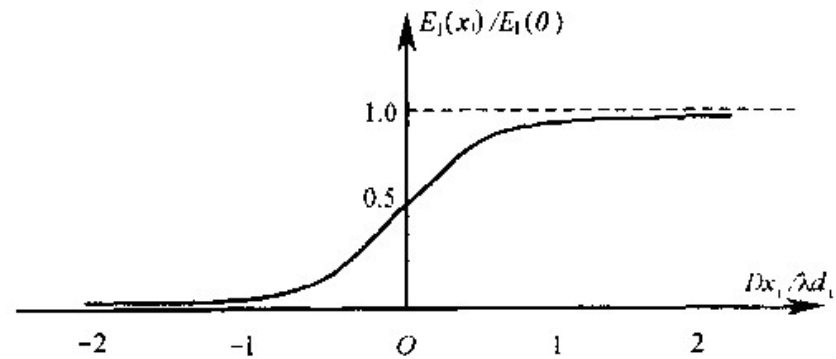
$$L(x_i) = F^{-1} \{ H'_1(\xi, 0) \}$$

非相干边缘扩散函数由非相干线扩散函数的积分给出：

$$E_I(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} L_I(\zeta) d\zeta$$



(a)



(b)

6.6 相干和非相干成像系统的比较

下面从截止频率和像强度频谱两方面来比较相干与非相干成像系统。

由上面讨论我们知道，非相干衍射受限系统的OTF，其截止频率扩展到相干系统CTF的截止频率的两倍处。因此，似乎可以得出结论：对于同一个光学成像系统，使用非相干照射一定会比采用相干照射得到更好的像。可是从下面的讨论看到，这一结论一般是不正确的。主要原因是，相干系统截止频率是确定像的复振幅的最高频率分量，而非相干系统截止频率是对像的强度的最高频率分量而言的。虽然这两种情况中，最后的可观察量都是像的强度分布，但由于两种截止频率所描述的物理量不同，所以不能直接对它们进行比较，从而简单地得到结论。即使比较的物理量一致，而要判断绝对好坏也是困难的。

要对相干照射和非相干照射下像强度进行比较，可以考察其频谱特性。由前可知，在相干和非相干照射下，像强度可分别表示为：

$$I_C(x_i, y_i) = \left| U_g(x_i, y_i) * \tilde{h}(x_i, y_i) \right|^2$$

$$I_I(x_i, y_i) = I_g(x_i, y_i) * h_I(x_i, y_i)$$

对上述两式进行傅里叶变换，并利用卷积定理和相关定理，得到相干照射和非相干照射下的像强度分布如下：

$$G_C(\xi, \eta) = [G_{gC}(\xi, \eta)H(\xi, \eta)] \star [G_{gC}(\xi, \eta)H(\xi, \eta)]$$

$$G_I(\xi, \eta) = [G_{gC}(\xi, \eta) \star [H(\xi, \eta) \star H(\xi, \eta)]]$$

由上两式可以看到，在两种情况下，像强度的频谱可能很不相同，但并不能因此而简单地说明一种照射方式比另一种照射方式更好。这是因为，成像不仅与照射方式有关，也与系统的结构和物的空间结构有关。这一点可从下面的例题中得到进一步的理解。

例 6.6.1 有一单透镜成像系统，其圆形边框的直径为 7.2cm ，焦距为 10cm ，且物和像等大。设物的透射率函数为：↵

$$t(x) = |\sin(2\pi x / b)| \quad \leftarrow$$

式中： $b = 0.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 。今用 $\lambda = 600\text{nm}$ 的单色光垂直照射该物，试解析说明在相干光和非相干光照射情况下，像面上能否出现强度起伏？↵

解：按题设条件，物周期 $T_1 = b/2$ ，其频率 $\rho_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{2}{b} = 400 \text{ 线/mm}$ ， $d_o = d_i = 2\rho = 200\text{mm}$ ，

故 $\rho_c = \frac{D}{2\lambda d_i} = 300 \text{ 线/mm}$ ， $\rho_0 = \frac{D}{\lambda d_i} = 600 \text{ 线/mm}$ 。↵

显然，在相干照射条件下， $\rho_c < \rho_1$ ，系统的截止频率小于物的基频，此时，系统只允许零频分量通过，其他频谱分量均被挡住，所以物不能成像，像面呈均匀分布。在非相干照射下， $\rho_1 < \rho_c$ ，系统的截止频率大于物的基频，故零频和基频均能通过系统参与成像，在像面上将有图像存在。基于这种分析，非相干成像要比相干成像好。但在别的物结构下，情况将发生变化(如下例)。↵

例 6.6.2 在上例中，如果物的透射率函数为：↵

$$t(x) = \sin(2\pi x / b), \quad \leftarrow$$

结论又如何？↵

解：这时，物周期 $T_1 = b$ ，其频率 $\rho_1 = \frac{1}{b} = 200$ 线/mm。根据上例的数据，显然有 $\rho_1 < \rho_c < \rho_0$ 。即

在相干照射下，这个呈正弦分布的物函数复振幅能够不受衰减地通过此系统成像。而对于非相干照射方式，物函数的基频也小于其截止频率，故此物函数也能通过系统成像，但其幅度要随空间频率的增加受到逐渐增大的衰减，即对比度降低。由此可见，在这种物结构中，相干照射方式比非相干照射方式要好。↵

此外，相干照射具有严重的散斑效应，且光学缺陷易在相干照射下观察到，并容易产生一些木纹状的附加干涉花纹，对成像的清晰度带来干扰。↵