

第七章 部分相干光的干涉和衍射

7.1 概述

7.2 互相干函数和相干度

7.3 空间相干性

7.4 时间相干性

7.5 准单色条件下的干涉和互强度

7.6 互相干函数的传播和广义惠更斯原理

7.7 范西泰特-策尼克定理及其应用

7.1 概 述

照射光源的相干性对光学系统成像具有极大的影响。所谓相干性 (coherence), 是指两列同频率的单色光波叠加时, 彼此相关而能够观察到清晰的干涉现象。它包含了相干的时间效应和空间效应, 这两种效应分别产生于光源的单色性程度和光源的有限尺寸。相干性的好坏常用其干涉条纹的对比度来描述。在实际问题的处理过程中, 为了简便起见, 作了两种理想化的假设: 一种情况是把光源假设为一个理想的点光源, 且具有严格的单色性, 这样的光振动具有完全的相干性, 其干涉条纹的对比度可以达到1; 另一种情况则假设光源是完全不相干的, 用完全不相干的光源照明时得不到干涉条纹, 干涉图的对比度等于0。

点光源和单色光都是一种理想化的抽象。严格的单色光在时间上是无限延续的, 传播的波列也是无限长的, 这在实际中是不存在的。同样, 严格的点光源也是一种理想模型, 同样也是不存在的。任何光源都包含有一定的波长范围和尺寸, 这就会影响到光源的相干性。

与此对应，完全不相干的光源也是一种理想化模型，即使采用通常认为完全不相干的太阳光束照射，在一定条件下也能产生干涉效应。例如，在杨氏干涉装置中，只要两个小孔靠得很近 (约0.02 mm)，用太阳光来照射双孔，也能看到干涉条纹。

由于严格相干场和严格的非相干场实际上都不可能得到，因此，应该研究实际存在于完全相干与完全不相干之间的中间状态，称为部分相干性 (partial coherence)，这就是本章所要讲述的内容。

部分相干理论是现代光学中较为活跃的一个研究领域，它既是处理光场统计性质的一种理论(统计光学方法)，又涉及光场的量子力学描述(量子光学)。这里，我们仅限于讲述部分相干理论的基本概念和基本规律，只采用对光场的统计描述，而不涉及量子光学处理方法。

光的干涉是研究光的相干性的重要手段。在两束或多束光在相遇的区域内形成稳定的明暗交替或彩色条纹的现象称为光的干涉现象。光的干涉现象是光波叠加后能量再分配的结果。**光干涉的理论基础是波的叠加原理**。在波叠加原理成立的条件下，考察叠加区内的光强分区分布时，需要区分两种情况：一是**非相干叠加**，指在观测时间内总光强是各分光强的直接相加；二是**相干叠加**，指在观测时间内总光强一般不等于各分光强的直接相加。

可见光的振动周期在 10^{-14}s 的量级，远小于探测仪器的响应时间和观测时间，目前任何探测器均无法追踪光场的即时振动，只能显示其时间平均效应——光强，所以干涉问题实质上是一个时间域中的统计平均问题。干涉的形成过程可以根据所考察的时间不同而分为三个层次：**场的即时叠加——瞬态干涉——稳定干涉**。在线性介质中，场的即时叠加总是存在的，而瞬态干涉和稳定干涉则与观测条件有关。不同的观测条件导致了对相干条件的不同提法。

稳定干涉干涉是指在一定的时间间隔内，通常这个时间间隔要大大超过光探测器的响应时间。例如，人眼的视觉暂留时间，照相底片的曝光时间，光电管的响应时间等，光强的空间分布不随时间改变。**强度分布是否稳定是目前我们区别相干和不相干的主要标志。**

7.2 互相干函数和相干度

7.2.1 概述

7.2.2 两束部分相干光的干涉

7.2.3 互相干函数的谱

7.2.1 互相干函数的定义

从微观角度来说，一个发光光源包含有大量微观的辐射基元，光场是由这些辐射基元叠加而成的。因此，实际上难以精确地描述这样的光场，只能将其作为随机过程来讨论它的统计性质。要对这种随机过程作完备的讨论，理论上是可能的，但实际上却因过于复杂而难以实现。由于大多数情况下，无需知道光波的完整统计模型，只要知道某些阶的矩即可。例如，只要用二阶矩就可以研究光场的相干性。引入光的统计特性来描述光的部分相干性，这是因为：

(1) 在大部分场合，光的产生总是大量的可以单独辐射的辐射体所产生的总和，在特定的边界条件下求解麦克斯韦方程不仅困难，也没有什么实际的意义；

(2) 光的统计特性中的绝大部分参数是可以仪器测量的，而光场本身，目前还没有一种仪器能够直接观测到；

(3) 最重要的是，统计方法确实能解释很多光学现象。这一切，通过考察光波的二阶统计描述，并引出相干性和相干度的概念。对相干性的理解，传统上是从迈克尔逊实验和杨氏干涉实验出发，来分别阐述时间相干和空间相干的。

但如何定量地描述相干性，是首先需要解决的问题，条纹可见度并不适用于定量描述相干性，它仅仅是一个对干涉结果的观测量，对理解相干的本质不会有更多的帮助。定量描述相干性的前提是光场看做是随机场，而把随机场的相干函数作为描述场的基本参量。

把一个实际光场看做一个随机场，假定场中的任意两点 P_1, P_2 在不同时刻的场值分别为 u_1 和 u_2 ，则**互相干函数** (mutual coherence function)的定义为：

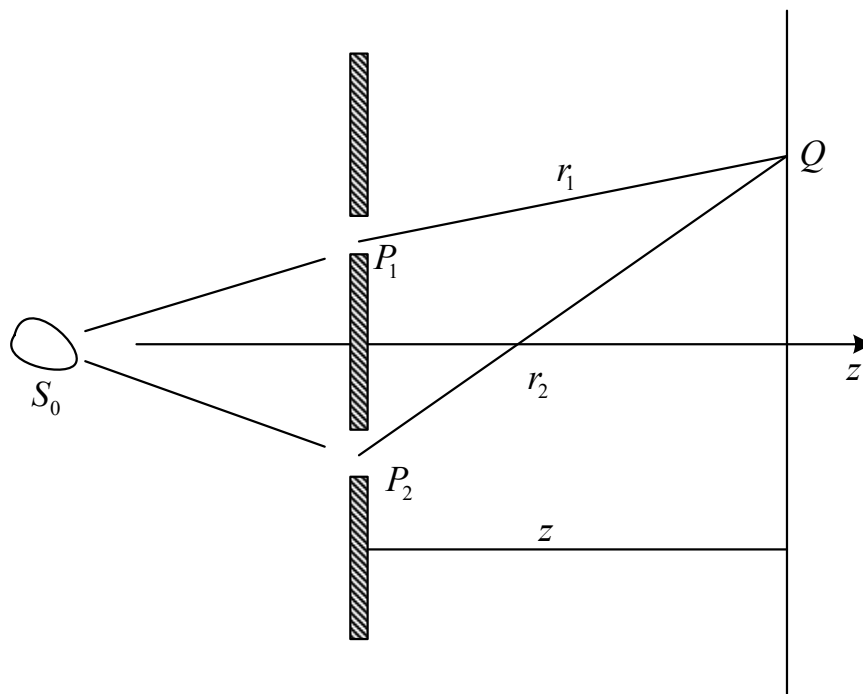
$$\Gamma_{12}(r_1, r_2; t_1, t_2) = \langle u_1(r_1; t_1) u_2^*(r_2; t_2) \rangle$$

上式的物理意义是，随机场的相干函数就是随机场中任意两点之间场值乘积(其中一个为共轭值)的集合平均。

二阶相干性可以分为空间相干性和时间相干性两大范畴。为了讨论一个具有有限带宽和有限大小的光源发出的光场的相干性问题，就要确定光场中两个不同点某一相对时间延迟时的相关性。可以把光场中的两点看作次波源，考察它们发出的两束光波在空间另一点 Q 的干涉现象。时间变量可以通过光程差而得到。在时空坐标中，研究两个时空点的相关性转化为在空间坐标系中研究三个点的相关性。

7.2.2 两束部分相干光的干涉

光场的相干性可以用相干度 (degree of coherence) 来度量。为此, 首先定义互相干函数 (mutual coherence function)。



由光场的叠加原理, 这两个光场在观察屏上 Q 点叠加在一起后的合成光场为:

$$u(Q, t) = u(P_1, t) + u(P_2, t) = K_1 u(P_1, t - t_1) + K_2 u(P_2, t - t_2)$$

光强是时间的平均值：

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

$$I(Q) = \langle u(Q, t) u^*(Q, t) \rangle$$

$$I(Q) = K_1^2 \langle u(P_1, t - t_1) u^*(P_1, t - t_1) \rangle + K_2^2 \langle u(P_2, t - t_2) u^*(P_2, t - t_2) \rangle \\ + K_1 K_2 \langle u(P_1, t - t_1) u^*(P_2, t - t_2) \rangle + K_1 K_2 \langle u^*(P_1, t - t_1) u(P_2, t - t_2) \rangle$$

如果光场是平稳的，也就是说，其统计性质不随时间改变，互相关函数只与时间差有关。若光场还是各态经历的，则时间互相关函数等于统计互相关函数。因此得出：

光场的互相干函数

$$\langle u(P_1, t - t_1) u^*(P_2, t - t_2) \rangle = \langle u(P_1, t + \tau) u^*(P_2, t) \rangle = \Gamma_{12}(\tau)$$

$$\langle u^*(P_1, t - t_1) u(P_2, t - t_2) \rangle = \langle u(P_1, t + \tau) u(P_2, t) \rangle^* = \Gamma_{12}^*(\tau)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \langle u(P_1, t + \tau) u^*(P_1, t) \rangle = \Gamma_{11}(\tau) & \swarrow & \\
 & \text{自相干函数} & \longrightarrow \Gamma(\tau) \\
 \langle u(P_2, t + \tau) u^*(P_2, t) \rangle = \Gamma_{22}(\tau) & \swarrow &
 \end{array}$$

$$\downarrow \tau = 0$$

$$\langle u(P_1, t) u^*(P_1, t) \rangle = \Gamma_{11}(0) = I_1 \qquad \langle u(P_2, t) u^*(P_2, t) \rangle = \Gamma_{22}(0) = I_2$$

$$\downarrow$$

$$I_1(Q) = K_1^2 \Gamma_{11}(0) = K_1^2 I_1 \qquad I_2(Q) = K_2^2 \Gamma_{22}(0) = K_2^2 I_2$$

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + K_1 K_2 [\Gamma_{12}(\tau) + \Gamma_{12}^*(\tau)] = I_1(Q) + I_2(Q) + K_1 K_2 \operatorname{Re}[\Gamma_{12}(\tau)]$$

互相干函数归一化

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

复相干度或相关度

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)]$$

上式就是平稳光场的普遍干涉定律。利用许瓦兹不等式容易证明：

$$|\Gamma_{12}(\tau)| \leq \sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}$$

$$0 \leq |\gamma_{12}(\gamma)| \leq 1$$

对窄带光，可将互相干函数和复相干度分别表示如下：

$$\Gamma_{12}(\tau) = |\Gamma_{12}(\tau)| e^{i[2\pi\bar{\nu}\tau + \alpha_{12}(\tau)]}$$

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{i[2\pi\bar{\nu}\tau + \alpha_{12}(\tau)]}$$

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[2\pi\bar{\nu}\tau + \alpha_{12}(\tau)]$$

$$\delta = 2\pi\bar{\nu}\tau = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \begin{cases} 1 & \text{完全相干} \\ 0 & \text{完全不相干} \\ 0 \sim 1 & \text{部分相干} \end{cases}$$

光场的相干性质可通过实验测定干涉条纹的清晰度或可见度来确定。对于正弦型条纹，迈克尔逊定义的干涉条纹可见度为：

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

干涉条纹的极大强度值和极小强度值

$$I_{\max} = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}$$

$$I_{\min} = I_1(Q) + I_2(Q) - 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}$$

单色、相干光

$$V = \frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q) + I_2(Q)} |\gamma_{12}(\tau)|$$

部分相干光

$$V = \frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q) + I_2(Q)}$$

只要测出两光束在 Q 点产生的光强及干涉条纹的可见度，就可得到复相干度的模。

$|\gamma_{12}(\tau)|$ 的物理意义为：在 Q 点附近的干涉条纹的可见度达到了当 P_1 和 P_2 完全相干时的多大程度。

$\gamma_{12}(\tau)$ 的幅角 $\alpha_{12}(\tau) + \delta$ 的物理意义是：第一项为光波在小孔 P_1 和 P_2 两点的光振动有一时间延迟所引起相位差，称为有效相位延迟；第二项是光波从小孔 P_1 和 P_2 到达 Q 点的相位延迟。

于是两束窄带光的复相干度的相位可通过测量干涉条纹的位置来确定。当两束光波在 Q 点的强度相等时，复相干度的模就等于干涉条纹的可见度：

$$|\gamma_{12}(\tau)| = V$$

7.2.3 互相干函数的谱

对互相干函数进行傅里叶变换，可得到互相干函数的光谱表达式，并可定义光谱密度。首先引入截断函数的定义：

$$u_1^{T_0}(P_1; t) = \begin{cases} u_1(P_1; t) & |t| \leq T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{解析信号}} u_1^{T_0}(P_1; t) = \int_0^\infty U_1^{T_0}(P_1; \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$u_1^{(r)T_0}(P_1; t) \xrightarrow{\quad} 2U_1^{(r)T_0}(P_1, \nu) = U_1^{T_0}(P_1, \nu)$

同样有： $u_2^{T_0}(P_2, t) = \int_0^\infty U_2^{T_0}(P_2, \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$

于是，互相干函数可以写为：

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= \langle u_1(P_1; t + \tau) u_2^*(P_2; t) \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(P_1; t + \tau) u_2^*(P_2; t) dt \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^\infty \int_0^\infty U_1^{T_0}(P_1; \nu) U_2^{T_0*}(P_2; \nu') e^{i2\pi(\nu - \nu')t} e^{i2\pi\nu\tau} d\nu d\nu' \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(\nu-\nu')t} dt = \delta(\nu - \nu')$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{12}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

互光谱密度 \longrightarrow $\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{12}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$

对于自相干函数，类似有：

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} G(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

光场的功率谱密度函数
也就是光源的光谱分布函数

$$G(\nu) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{U^{T_0}(P, \nu) U^{T_0*}(P, \nu)}{2T_0} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{|U^{T_0}(P, \nu)|^2}{2T_0}$$

对于复相干度也有类似的关系：

$$\gamma_{12}(\tau) = \int_0^\infty \hat{G}_{12}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

归一化的互谱密度 $\longrightarrow \hat{G}_{12}(\nu) = \frac{G_{12}(\nu)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}$

$$\hat{G}(\nu) = \frac{G(\nu)}{\Gamma(0)}$$

$$\int_0^\infty \hat{G}(\nu) d\nu = 1$$

7.3 空间相干性

7.3.1 杨氏干涉

7.3.2 两球面波的干涉

7.3.3 光源对双孔干涉的影响

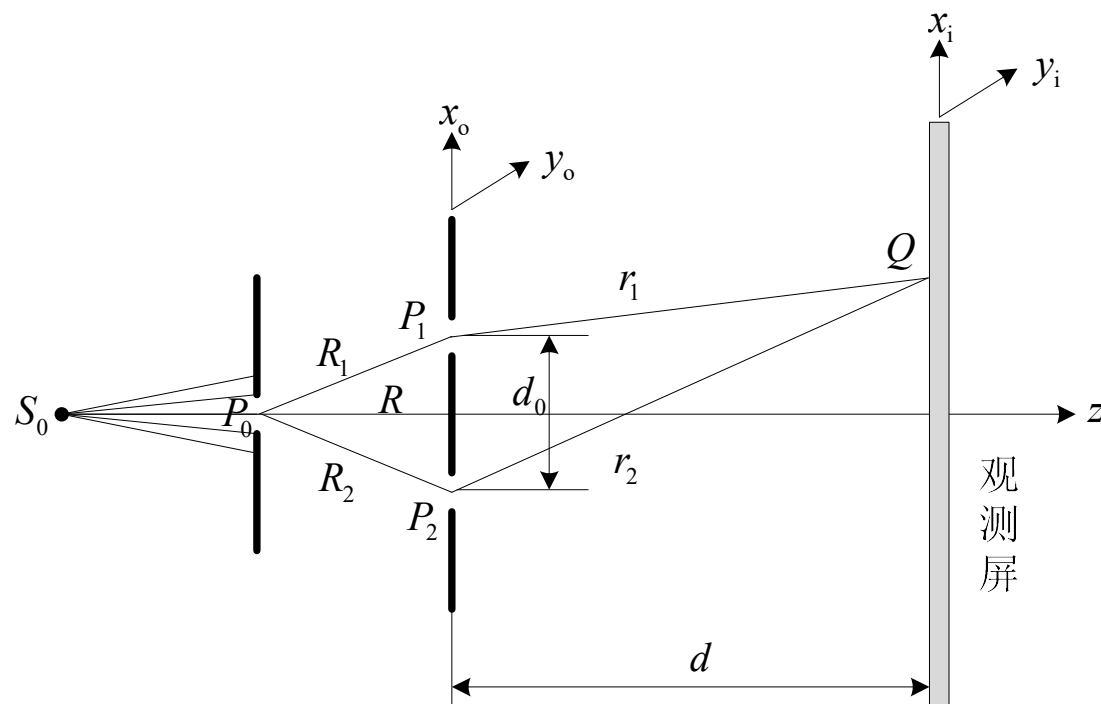
7.3.4 光场的空间相干性

空间相干性是指两个空间点光振动的相关程度，也就是说在任一时刻来自空间中这两点的光振动是否有固定的相位联系，是否能形成稳定的干涉图样。这种相干的空间效应是由光源的有限大小而引起的，通常称为光源或由光源产生的光波场的空间相干性。下面以单色扩展光源的杨氏干涉实验为例，分析光源线度对干涉条纹可见度的影响，从而分析光源的空间相干性。

7.3.1 杨氏干涉

1801年，杨(Young)提出一个观察光的干涉现象的实验装置。

杨氏装置的本质就是用一对小孔从球面波的波前提取出了两个相干子波。



7.3.2 两球面波的干涉

由双光束干涉理论可知

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

相位差

杨氏干涉双孔干涉是一种等强度的双球面波干涉，观测点Q的叠加光强度随着光波相位差呈现余弦平方型周期变化，且条纹可见度为1。

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (k_2 R_2 - k_1 R_1)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} [(nr_2 - nr_1) + (n'R_2 - n'R_1)] = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta S_r + \Delta S_R)$$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 \\ \Delta S_R &= 0 \end{aligned}$$

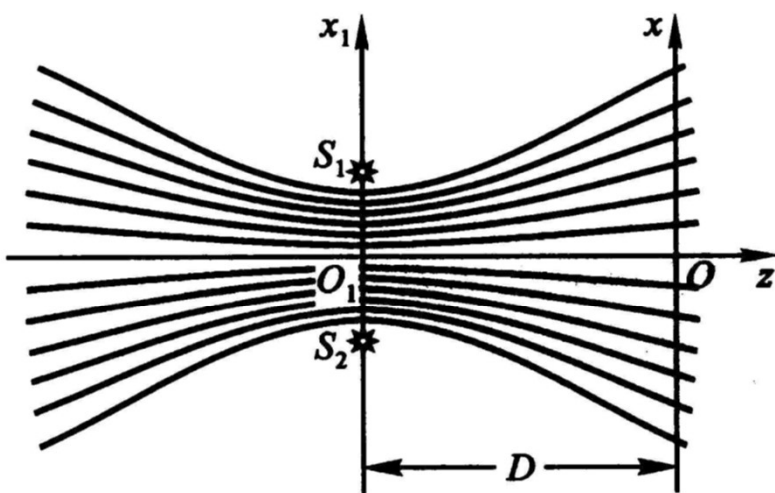
$$n = n'$$

双孔屏右边和左边前两束光的光程差

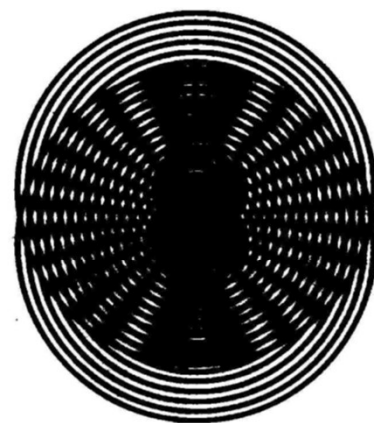
双孔屏左边和右边介质的折射率

$$\Delta\varphi = \frac{2n\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_r$$

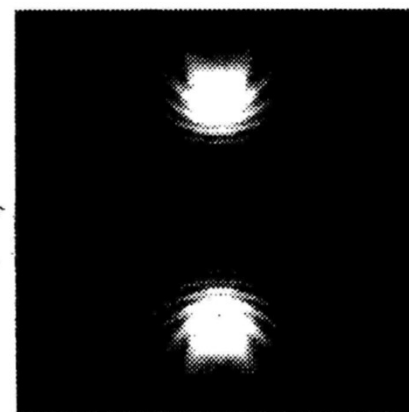
干涉光场中等相位差的轨迹是以点源 P_1 和 P_2 连线为旋转轴且亮暗相同的空间旋转双曲面族，其在 x_i - z 平面上的投影为一组亮暗相间的余弦平方双曲线条纹，如下图所示。



(a) 干涉条纹的几何图示



(b) 干涉条纹的形成原理



(c) 仿真实验结果

$$r_1 = \sqrt{d^2 + \left(x_i - \frac{d_0}{2}\right)^2} \approx d + \frac{1}{2d} \left(x_i - \frac{d_0}{2}\right)^2 \quad r_2 = \sqrt{d^2 + \left(x_i + \frac{d_0}{2}\right)^2} \approx d + \frac{1}{2d} \left(x_i + \frac{d_0}{2}\right)^2$$

傍轴近似

$$\Delta S_r = r_2 - r_1 \approx \frac{1}{2d} \left(x_i + \frac{d_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2d} \left(x_i - \frac{d_0}{2}\right)^2 = \frac{d_0}{d} x_i$$

$$\Delta S_r = r_2 - r_1 = \frac{d_0}{d} x_i \longrightarrow \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_0}{d} x_i$$

亮条纹中心位置: $x_{im} = \pm m \frac{\lambda}{d_0} d$

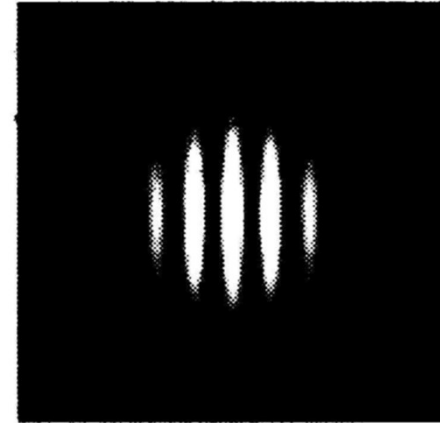
暗条纹中心位置 $x'_{im} = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2d_0} d$

相邻两级亮条纹或暗条纹间距: $\Delta x_i = x_{im+1} - x_{im} = x'_{im+1} - x'_{im} = \frac{\lambda d}{d_0}$

两光束光程差的改变引起干涉条纹移动的数目: $N = \frac{\Delta_r}{\lambda} = \frac{d_0}{\lambda d} x_i = \frac{x_i}{\Delta x_i}$

两束窄带光的复相干度的相位可通过测量干涉条纹的位置来确定，其关系如下：

$$\alpha_{12}(\tau) = \frac{2\pi d_0}{\lambda d} \Delta x_i$$



由此可知，球面波杨氏干涉的条纹的主要特点如下：

(1) 在傍轴近似下，干涉图样是一组沿双孔连线方向展开的等强度、等间距的余弦平方型直线条纹

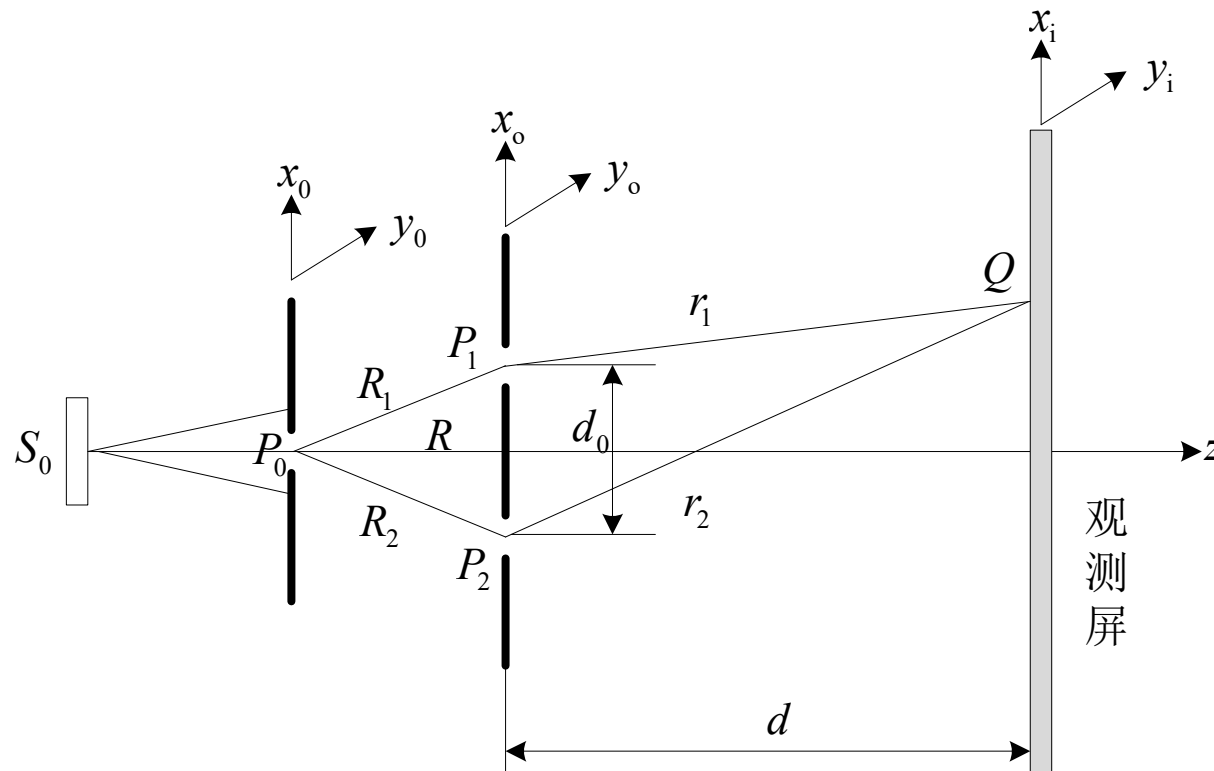
(2) 复色光照明时，各级干涉条纹除0级(中央亮条纹)外呈现彩色状，并且相对于0级条纹位置按波长自小到大展开；

(3) 相遇点出现强度极大或是极小，取决于两光波在该点的总相位差或总光程差的大小。只要由于某种原因使得两光波在该点的总相位差或总光程差发生改变，则该点条纹的亮暗将随之变化，或者说该点的条纹将发生移动，光程差改变几个波长，则条纹移动几个间距。

此外，在用普通单色扩展光源发出的光场中提取一个点光源，在激光发明之前是十分必要的。现在由于激光器输出的光束直径可以做到很小，实际上就可以看作一个很理想的点光源。如果在杨氏干涉实验中采用激光器，则只需要让光束会聚点位于 S_0 点即可，而无需要再加小孔，因此，通常就可以把 S_0 看成一个点光源，而不管其产生的方式。


7.3.3 光源宽度对干涉的影响

不管用何种方式产生的点光源都不是完全理想，总是有一定横向宽度，即有一定光发面积，这样的实际光点源可以看成许多彼此不相干的理想点光源的集合。在杨氏干涉实验中，要使干涉图样得到更多的光，就必须增加线光源的宽度。



现假设点源沿 x 方向平移，则在小孔 P_0 产生的位移为 δx_0 ，中央亮条纹中心相应地平移 δx_i ，这样有：

$$R_2 + r_2 - (R_1 + r_1) = 0 \Rightarrow R_1 - R_2 = r_2 - r_1 \Rightarrow \frac{d_0 \delta x_0}{R} = \frac{d_0 \delta x_i}{d}$$


$$\delta x_i = \frac{d}{R} \delta x_0$$

因点光源 S_0 的平移所引起的干涉条纹的平移数目为：

$$N = \frac{\delta x_i}{\Delta x_i} = \frac{d_0}{\lambda d} \cdot \frac{d}{R} \delta x_0 = \frac{d_0}{\lambda R} \delta x_0$$

可见，干涉条纹的平移量大小与点光源的平移量大小成正比。

光源的横向宽度对双孔干涉的影响，还可以从干涉图样的可见度看出来。假设光源沿x方向扩展的线光源代替点源照明。为简单起见，假定光源发射单色谱 λ ，有一定宽度的狭缝光源 S_0 可以看成是由许多线光源所组成，每一条线光源经过 P_1 和 P_2 后，观测面上都产生各自的一套条纹，各套条纹间距都相同，只是相互有了错动，当 S_0 的上、下边缘外的两线元形成的两套条纹相互位移了一个条纹间距时，观测面上的条纹就模模糊糊，形成了均匀的照明光场。

如果要得到可观测的干涉条纹，光源 S_0 的宽度 b 应该满足：

$$b < \Delta x = \frac{d\lambda}{2d_0} \quad \frac{b}{R} = \alpha < \frac{\Delta x}{d} = \frac{\lambda}{d_0}$$

光源线度 b 对双孔平面中心的张角

$$b < \frac{R\lambda}{d_0}$$


如果要得到较好清晰程度的干涉条纹，光源的宽度需要进一步变小，通常要求为

$$b < \frac{1}{4} \frac{R\lambda}{d_0}$$

这虽然是一个近似的条件，却是在实验中用来计算光源所许可宽度的基础。

观测面点 x_i 的光振幅为


$$\frac{A_{o0}}{R_1} e^{ikR_1} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{A_{o0}}{R_2} e^{ikR_2} \frac{e^{ikr_2}}{r_2}$$


 $R_1 \approx R_2 \quad r_1 \approx r_2$

$$A_{i0} e^{ik(R_1+r_1)} + A_{i0} e^{ik(R_2+r_2)}$$

观测面点 x_i 的光强为

$$I(x_i) \Big|_{x_0} = 4A_{i0}^2 \{1 + \cos[\Delta\varphi(x_i)]\} = 4A_{i0}^2 \{1 + \cos[k(R_2 + r_2 - R_1 - r_1)]\}$$


傍轴近似

$$\Delta\varphi(Q) = \frac{2\pi}{\lambda} [(R_2 - R_1) + (r_2 - r_1)] = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{d_0}{d} x_i + \frac{d_0}{R} x_0 \right)$$

整个线光源在Q点引起的干涉图样总强度：

$$I(x_i) = \int_{-b/2}^{b/2} I(x_i)|_{x_0} dx_0 = 2I_0 \int_{-b/2}^{b/2} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{d_0}{d} x_i + \frac{d_0}{R} x_0 \right) dx_0$$

$$= 2I_0 b \left[1 + \frac{\sin \mathcal{G}}{\mathcal{G}} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_0}{d} x_i \right) \right]$$

$$I_0 = A_{i0}^2$$

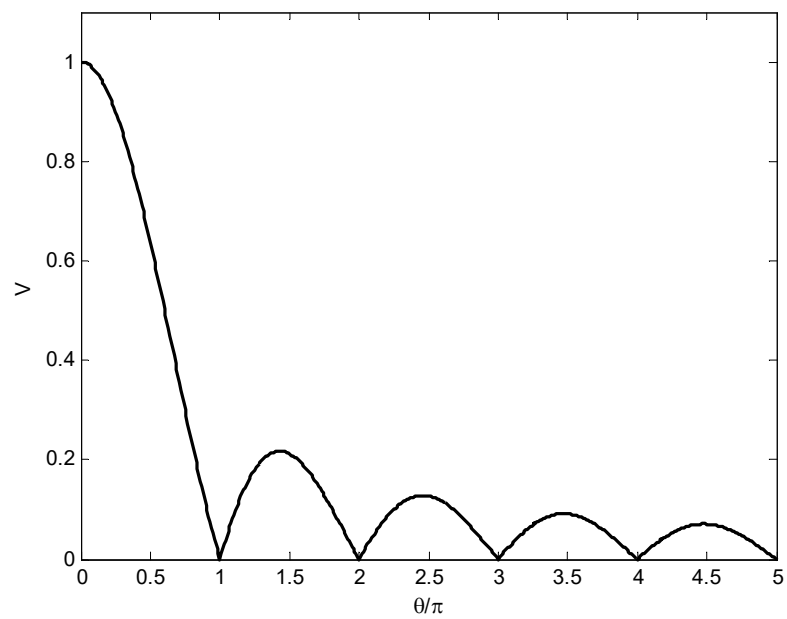
$$\mathcal{G} = \frac{\pi b d_0}{\lambda R}$$

可得出亮条纹和暗条纹中心强度以及干涉图样的可见度分别为

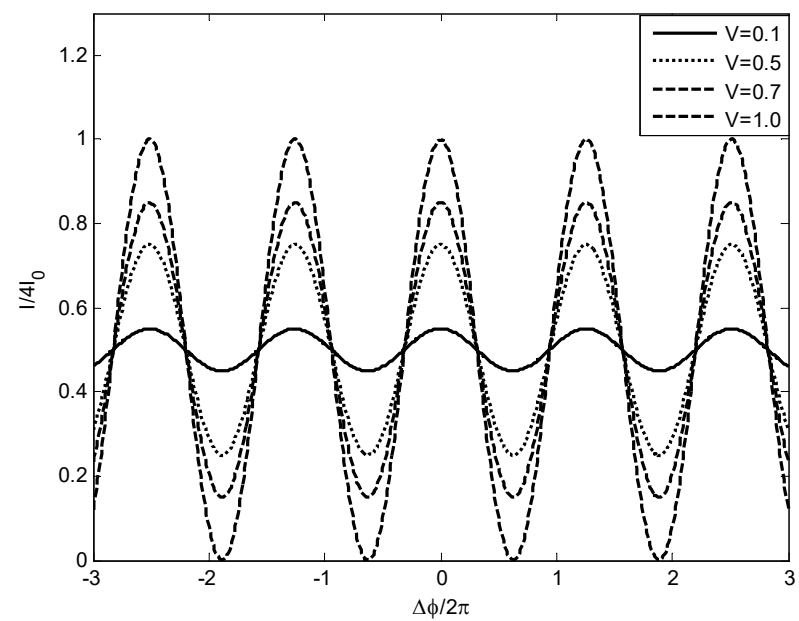
$$I_{\max} = 2I_0 b \left(1 + \left| \frac{\sin \mathcal{G}}{\mathcal{G}} \right| \right) \quad I_{\min} = 2I_0 b \left(1 - \left| \frac{\sin \mathcal{G}}{\mathcal{G}} \right| \right) \quad V = \left| \frac{\sin \mathcal{G}}{\mathcal{G}} \right|$$

上式表明，照明光源沿双孔连线方向的扩展宽度影响着杨氏干涉图样的可见度。

可见度随光源宽度的变化



可见度对干涉图样的影响



$$b = m \frac{R}{d_0} \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \xrightarrow{m=1} b_1 = \frac{R}{d_0} \lambda$$

干涉图样可见度
第一次降为0时
的光源宽度

当光源宽度 $b \ll b_1$ 杨氏干涉图样有较高的可见度

当光源宽度 $b \approx b_1$ 干涉图样消失

继续增大光源宽度到 $b > b_1$ 干涉图样又会复现，但可见度以衰减振荡的形式迅速趋于0，第一峰值仅为0.21，以致干涉条纹难以辨认。

b_1 表征了光源能够产生可分辨杨氏干涉图样的极限宽度，称为光源的临界宽度。

可见，杨氏干涉图样的衬比度并非唯一地由光源的绝对宽度决定，而是由这几个参数共同决定。

7.3.4 光场的空间相干性

在杨氏干涉实验中，时间相干性和空间相干性都是起作用。如果在图7.3.1中， S_0 是一个窄带扩展光源，那么空间相干效应将是主要的。

空间互相干函数

$$\Gamma_{12}(0) = \langle u(P_1, t) u^*(P_2, t) \rangle \quad \leftarrow r_2 - r_1 = 0, \tau = 0$$

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

复空间相干度

它们描述在同一时刻光场中两点的空间相干性。它们一般是复数，可写成：

$$\Gamma_{12}(0) = |\Gamma_{12}(0)| e^{i\alpha_{12}(0)}$$

$$\gamma_{12}(0) = |\gamma_{12}(0)| e^{i\alpha_{12}(0)}$$

这样， Q 点的光强又可表达：

$$I(Q) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)} |\gamma_{12}(0)| \cos[\alpha_{12}(0)]$$

光源横向几何线度的大小影响着干涉图样的可见度。对于分波前干涉而言，参与叠加的光波来自同一光源发出的光场中某个波前上的不同点，可见度等于0意味着自这些场点取出的次级光波间是不相干的。因此，实际上关注的是在给定照射光波长 λ 和光源宽度 b 以及光场中某个波前到光源平面的距离 R 的情况下，从该波前上多大范围内取出的次级光波在空间是相干的。这个取值范围表征了光场的横向相干范围，称为光场的空间相干性。

对于线状光源，空间相干性用给定波前上具有相干性的两个次级波源之最大间距 $d_{\max} \approx \frac{R\lambda}{b_1}$

在杨氏干涉实验中，线状光源沿双孔连线方向放置时，若取双孔间距 $d_0 < d_{\max}$ 则两个次级波源相干，反之则不相干。

对于面光源，空间相干性用相干面积表征，大小定义为给定波前上具有相干性的两个间距最大的次级波源所在处(矩形或圆形)区域的面积 S_c ，如对方形区域有：

$$S_c \approx d_{\max}^2 \approx \left(\frac{R\lambda}{b_1} \right)^2 = \frac{R^2}{b_1^2} \lambda^2$$

光场的相干面积与光源对给定波前中心所张立体角成反比。光源面积越小，距离给定波前越远，则相干面积越大，空间相干性越好。

光源的空间相干性也可以用相干范围孔径角来表征，其定义如下：

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{d_{\max}}{R} \approx \frac{\lambda}{b_1}$$

即，对于给定波长的单色扩展光源，其相干孔径角与光源的横向宽度 b_1 成反比。光源的横向宽度越小，则相干孔径角越大，因而光源的空间相干性越好。点光源具有最大的空间相干性。又由于相干孔径角与给定波前到光源平面的距离 R 成正比，因此，对于给定的相干孔径角，所考虑的波前距离光源越远，则光源的横向相干范围越大。

几种常见光源的空间相干性。

太阳光是一个自然光源，其绝对面积很大，但于由太阳与地球的距离远远大于太阳的直径，所以，从地球上来看，太阳具有很大的相干面积，是一个很好的点光源。

远处的日光灯、白炽灯以及建筑工地上使用的人造小太阳，由于其横向线度远小于光源到观察场点的距离，也可以近似看作点光源。

有些手电灯泡和小功率卤素灯泡地的发光面积很小，在实验内有限的距离下，也可以按点光源处理。

一般激光器发出的光束很细，是一种近乎理想的点光源，所以，激光具有很高的空间相干性。

7.4 时间相干性

7.4.1 光源发光特性

7.4.2 迈克耳逊干涉仪

7.4.3 时间相干性描述

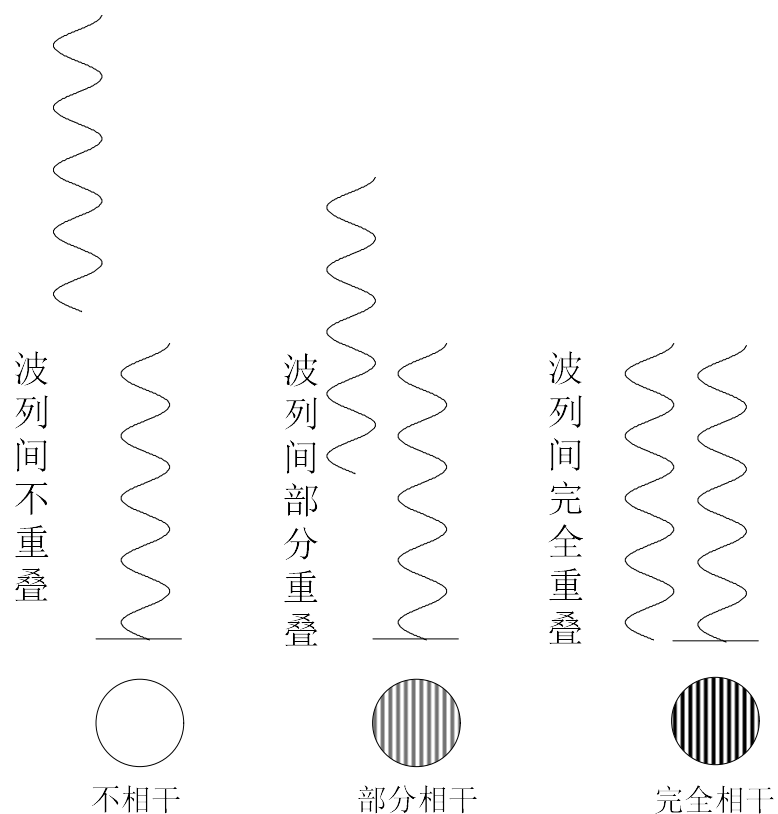
7.4.4 相干时间和相干长度

7.4.1 光源发光特性

从同一光源发出的两束光产生干涉时，干涉条纹的可见度不仅决定于光束比，并且决定于两束光的光程差，即两光束的时间差。光源的这种性质决定于它的时间相干性。

光是由光源中原子或分子运动状态发生变化时辐射出来的，每个原子或分子都是一个发光基元，它们每次发出的光波只有短短的一列，持续时间极短，约为 $10^{-10} \sim 10^{-9} \text{s}$ ，有的甚至短到 $10^{-12} \sim 10^{-11} \text{s}$ ，以下。宏观看到的或测量检测到的光波是大量发光基元所发出的大量波列在一段时间的平均效应。一般情况下，这些发光基元是各自独立地发出一个个波列的，这些波列的频率、相位和振动方向都不尽相同。同一个发光基元所发出的波列具有大致相同的频率、相位和振动方向。例如，激光器内的发光基元所发出的波列都具有基本相同的频率、相位和振动方向。即便在这种情况下，由于波列是有限长的，激光器发射的激光也不具有完全的相干性。譬如，激光的有限长波列经过分振幅法分成两束等振幅的波列后再次相遇而产生干涉时，就会出三种不同的情况。当两路波列光程差为零时，它们将同时到过观测屏上，两列波完全重叠，并产生 $V=1$ 的最大条纹可见度；当两路波列光程差大于波列长度时，它们在观察屏上不能相遇，两波列不能重叠，各自在屏上形成一片均匀的亮场，条纹可见度 $V=0$ 。

而当两路波列光程差大小于零，小于波列长度时，它们将先后到达观测上，两波列将部分重叠，其中重叠部分产生干涉、而不重叠部分不发生干涉，条纹可见度将在0与最大值1之间，其干涉条纹可见的高低将取决于它们重叠的程度，光程差越小，重叠越多，则可见度越高，如下图所示，这三种情况分别称为完全相干、不相干和部分相干。



为了研究光场的时间相干性，需要考察从光源发出的光波在空间同一点不同时间的相干性。通常是将光源发出的一束光波分为两束，让它们通过不同的路程，然后再相遇。通常采用分振幅方法，最典型的分振幅实验装置就是迈克耳逊干涉仪。

在杨氏干涉实验中，我们知道空间相干性和时间相干性都起作用。如果图7.3.1中的初级光源S为一个位于轴上的、具有有限带宽的点光源，那么时间相干性将是主要的。这时 P_1 和 P_2 点处的光振动将相同，两点间的互相干函数将变成自相干函数，即

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{11}(\tau) = \Gamma(\tau)$$

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{11}(\tau) = \gamma(\tau)$$

在理想的单色光场中，空间任一点**P**的振动的振幅是不变的，而其相位随时间做线性变化。但在实际光源所产生的光场中，**P**点的振幅和相位都是随机涨落的，其涨落速度基本上取决于光源的有效频谱宽度 $\Delta\nu$ ，只有当时间间隔 τ 比 $1/\Delta\nu$ 小得多时，振幅才会大体保持不变。在这样一个时间间隔内，任何两个分量的相对相位变化都比 2π 小得多。

$$\tau_c = 1 / \Delta\nu$$

相干时间 有效频谱宽度

$$l_c = c \tau_c$$

相干长度

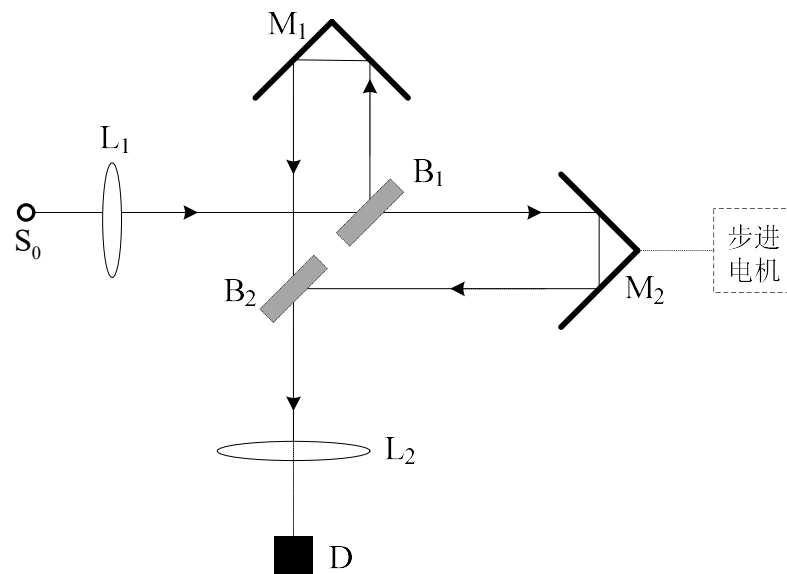
相干时间越长，也就是光源的谱线宽度愈窄(即单色性愈好)，则时间相干性也就越大，反之则时间相干性小。

7.4.2 迈克耳逊干涉仪

通过考察迈克耳逊干涉仪中光波的干涉可以更精确地描述和定义时间相干性。迈克耳逊干涉仪是由迈克耳逊(**Michelson**)提出并加以发展的一种最典型的分振幅双光束干涉装置。

在下图所示的迈克耳孙干涉仪中，由点光源 S_0 发出的光束通过分束器**BS**分成两束：一束反射到可移动的反射镜 M_1 上，经过反射后又折回到达探测器**D**上；另一束透过**BS**和补偿板**C**射到固定反射镜 M_2 上，再经 M_2 反射后折回也到达探测器**D**。

实际系统会加入准直透镜 L_1 和会聚透镜 L_2 等光学元件以改善性能。探测器位于干涉场内，这样一来，入射到探测器上的光强取决于干涉仪两支光路中的光的干涉，补偿板**C**的作用是保证光在干涉仪的两支光路中通过玻璃的光程相同。



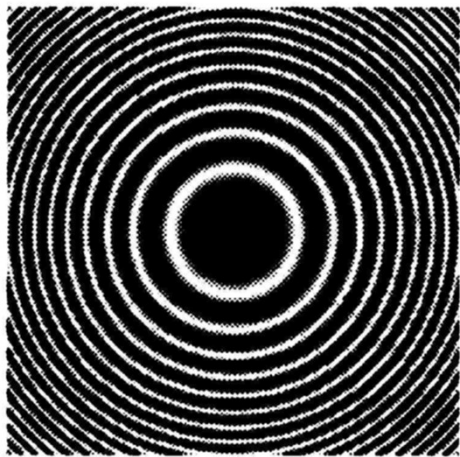
两束光在相遇点的总光程差为 $\Delta S = l \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2}$ θ 为入射角

干涉光强取极大值 $\Delta S = l \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$

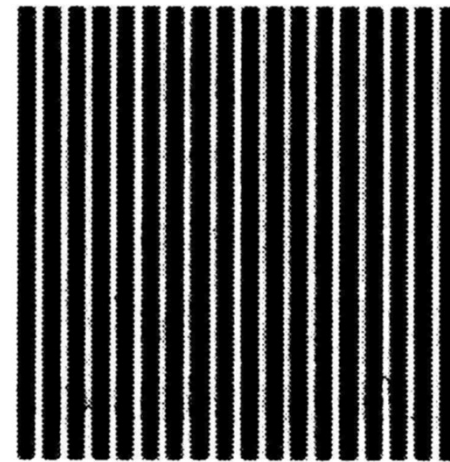
干涉光强取极小值 $\Delta S = l \cos \theta \pm \frac{\lambda}{2} = \pm (2m + 1)\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\theta=0$ 时，可得干涉图样中心条纹出现极大值和极小值的条件分别为

$$\Delta S_{\max} = l \pm \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda \quad \Delta S_{\min} = l \pm \frac{\lambda}{2} = \pm (2m + 1)\lambda$$



当满足等倾干涉条件时，由迈克耳逊干涉仪可以观察到一组同心圆环形条纹图样。

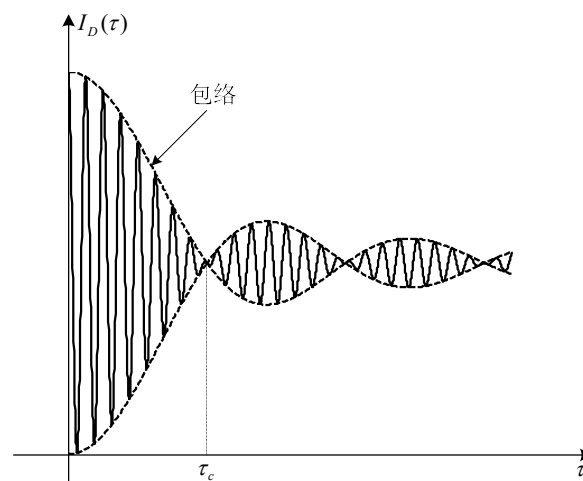


当满足等厚干涉条件时，由迈克耳逊干涉仪可以观察到一组等间距直线条纹。

7.4.3 时间相干性的描述

如果可移动反射镜 M_1 从两束光路等光程的位置开始移动，其效果相当于在两支光路中引入了时间的相对延迟。反射镜每移动 $\lambda/2$ 入射到探测器上的光强变化一个周期。实际光源不是理想单色光，总是具有一定的光谱宽度的，这样，如果两束光路的光程差超过一定范围，干涉条纹的可见度就会下降到零。对于某些特种光源，当继续移动 M_1 加大程差，又能产生干涉条纹，只不过可见度已很小了。下面把光信号用解析信号构成的随机过程表示，对迈克耳孙干涉实验作出理论解释。

探测器上的光强度与 τ 的关系



探测器上的叠加解析信号为

$$u_D(t) = K_1 u(t) + K_2 u(t + \tau)$$

探测器所测量到的光强需要对时间求平均

$$\begin{aligned} I_D &= \langle u_D(t) u_D^*(t) \rangle = \langle |K_1 u(t) + K_2 u(t + \tau)|^2 \rangle \\ &= K_1^2 \langle |u(t)|^2 \rangle + K_2^2 \langle |u(t + \tau)|^2 \rangle + K_1 K_2 \langle u(t + \tau) u^*(t) \rangle + K_1 K_2 \langle u^*(t + \tau) u(t) \rangle \end{aligned}$$

假设光场是平稳的和各态历经的，统计量的平均与时间原点无关，时间平均与统计平均相同。

$$I_0 = \langle |u(t)|^2 \rangle = \langle |u(t + \tau)|^2 \rangle$$

光振动的自相干函数，在各态历经条件假设下可用时间平均代替，即

$$\Gamma(\tau) = \langle u(t+\tau)u^*(t) \rangle$$

$$I_D = (K_1^2 + K_2^2)I_0 + 2K_1K_2 \operatorname{Re}\{\Gamma(\tau)\}$$

归一化，便可得到复相干度为：

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \quad \gamma(0) = 1, \quad 0 \leq |\gamma(\tau)| \leq 1$$


若认为两路光的透过率相等，即 $K_1 = K_2 = K$ 如果不考虑吸收 $K = 1$

$$I_D(\tau) = 2I_0 + 2\operatorname{Re}\{\Gamma(\tau)\} \quad I_D(\tau) = 2I_0\{1 + \operatorname{Re}\{\gamma(\tau)\}\}$$

用归一化功率谱密度表示为：

$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty \hat{G}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

对于窄带光

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)| e^{i[2\pi\bar{\nu}\tau + \alpha(\tau)]} \quad I_D(\tau) = 2I_0 \{1 + |\gamma(\tau)| \cos[2\pi\bar{\nu}\tau + \alpha(\tau)]\}$$

干涉图的条纹可见度为：

$$V = \frac{2K_1K_2}{K_1^2 + K_2^2} |\gamma(\tau)|$$

当两支光路透射系数相等时，可见度为：

$$V = |\gamma(\tau)|$$

干涉条纹的可见度反映了上述迈克尔逊干涉仪的探测器中相叠加的两个不同时刻的光振动之间的相关性，这也就是光场的时间相干性，具体来说它可以用自相关函数和复自相干度来描述。

实际光源发出的光，高斯线型、洛伦兹线型和矩形线型是三种常见的谱线形状，其表达式分别为：

$$\hat{G}(\nu) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu} e^{-\left[\frac{2\ln 2(\nu - \bar{\nu})}{\Delta\nu}\right]^2} \quad \hat{G}(\nu) = \frac{2\pi\Delta\nu}{[2\pi(\nu - \bar{\nu})]^2 + (\pi\Delta\nu)^2} \quad \hat{G}(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu} \text{rect}\left(\frac{\nu - \bar{\nu}}{\Delta\nu}\right)$$

↓

$$\gamma(\tau) = e^{-\left(\frac{\pi\Delta\nu\tau}{2\ln 2}\right)^2} e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}$$

↓

$$|\gamma(\tau)| = e^{-\pi\nu|\tau|}$$

$$\alpha(\tau) = 0$$

↓

$$\gamma(\tau) = e^{-\pi\Delta\nu|\tau|} e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}$$

↓

$$|\gamma(\tau)| = e^{-\pi\Delta\nu|\tau|}$$

$$\alpha(\tau) = 0$$

↓

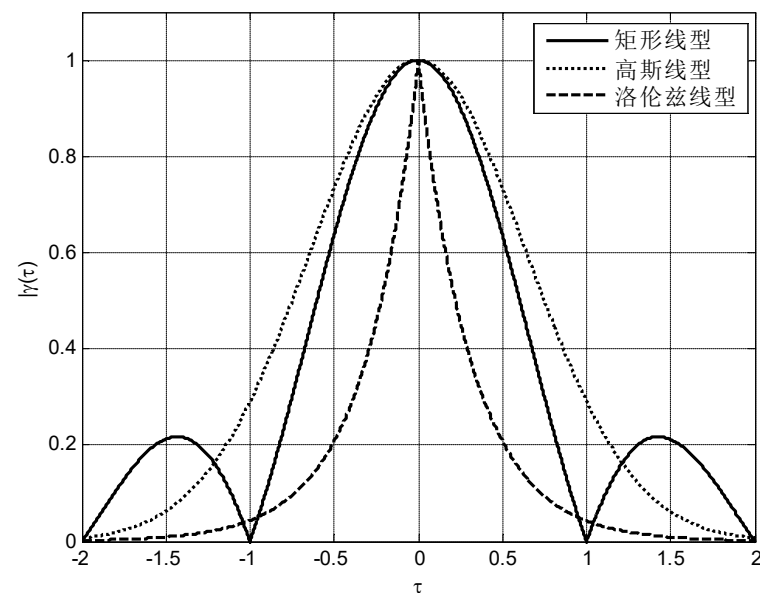
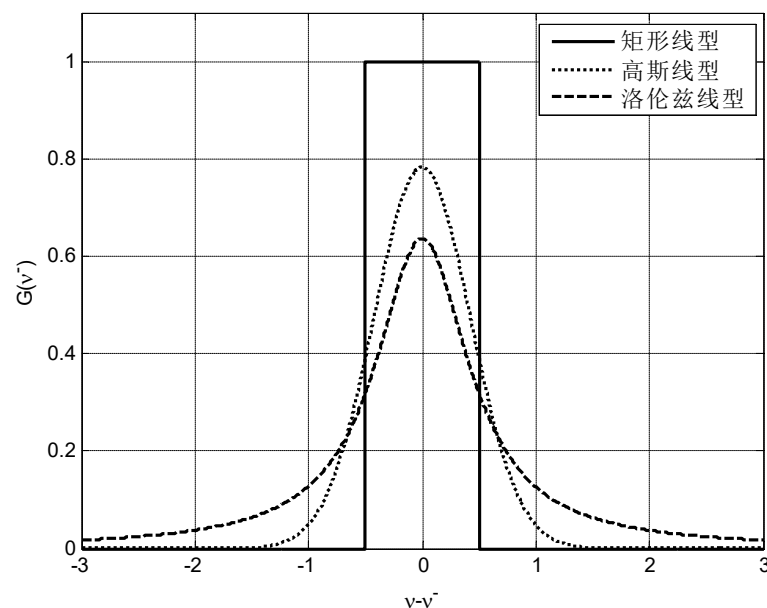
$$\gamma(\tau) = \text{sinc}(\Delta\nu\tau) e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}$$

↓

$$|\gamma(\tau)| = |\text{sinc}(\Delta\nu\tau)|$$

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 0 & 2n < |\Delta\nu\tau| < 2n+1 \\ \pi & 2n+1 < |\Delta\nu\tau| < 2n+2 \end{cases}$$

三种线型的功率谱密度(左)和复相干度的模(右)



矩形线性是理想的线性，有利于理论处理的问题的简化。在低压气体中可见光范围内的多普勒加宽所引起的线型是高斯线性。自发辐射弛豫过程的存在导致谱线的纯辐射加宽，其线形是洛仑兹线形。由原子或分子间碰撞引起的碰撞加宽的谱线通常也是洛仑兹线形的。

7.4.4 相干时间和相干长度

通常采用相干时间(**coherence time**)或相干长度(**coherenct length**)来描述光源的时间相干性，这是光源——一个重要指标，当知道所使用的光源的相干长度后，就能由此合理地安排光路以使各个记录点处两光束都有很好的相干性，以保证记录的质量。知道了光源的相干长度就可以根据这数据来考虑光路布局，使来自同一光源的诸光束的程差限制在光源的相干长度允许范围内。一般而言，当两光束的程差超过了相干长度时，都得不到很好的干涉条纹。所以，在干涉实验中布置光路时，必须使需要产生干涉的两光束的相差小于相干长度，这是通常与干涉有关的实验光时必须遵守的准则。特别是，为了获得最佳的条纹可见度，需要将两束光束的光程调到相等，即做它们之间的程差为零或接近于零，常称等光程或零程差配置。

可用复相干度来精确地定义相干时间，用复相干度定义相干时间的方法很多。曼德尔(L. Mandel) 将相干时间定义为：

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau$$

对于前面给出的三种线型，其相干时间也不同。对高斯线型有：

高斯线型：

$$\tau_c = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\pi}} \frac{1}{\Delta \nu} \approx 0.664 \frac{1}{\Delta \nu}$$

洛伦兹线型：

$$\tau_c = \frac{1}{\pi \Delta \nu} \approx 0.318 \frac{1}{\Delta \nu}$$

矩形线型：

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta \nu}$$

玻恩(M. Born)和沃尔夫(E. Wolf)的定义为

$$\tau_c = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Gamma(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\tau)|^2 d\tau} \right]^{\frac{1}{2}}$$

另外，在全息图的记录中，通常会以干涉条纹的可见度不低于**70%**时，方可得到较高质量的全息图，因此，常以条件

$$|\gamma(\tau_c)| \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

而条纹可见度降低到第一个零值，也就是以干涉条纹消失的极限条件定义相干时间

$$|\gamma(\tau_c)| \equiv 0$$

这种定义既简洁方便，也便于计算，还可用于物理学基本概念的分析中。

以上用不同的方式定义相干时间，其结果相差并不大，通常其值同属一个数量级。

7.5 准单色光的干涉和互强度

7.5.1 准单色光的干涉

7.5.2 傅里叶变换光谱技术

7.5.3 准单色光的互强度

7.5.1 准单色光的干涉

准单色光条件是指满足如下两个条件的光称为准单色光。即

窄带条件： $\Delta\nu \ll \bar{\nu}$

小光程条件： $l_c \gg l = r_2 - r_1$ $\tau_c \gg \tau = \frac{l}{c} = \frac{r_2 - r_1}{c}$

程差甚小于相干长度，或时差甚小于相干时间。

此条件应在研究的空间范围内都被满足。满足准单色条件的光源准单色光源(quasi-monochromatic light source)。

对实际光源发出的具有一定谱分布函数的准单色光，可用功率谱密度函数 $G(\nu)$ 来表示光源的谱分布，这样，准单色光的干涉条纹与光源的光谱线型有关。

这样，干涉强度分布为：

$$I(\Delta S) = 2 \int G(\nu) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \nu}{c} \Delta S \right) \right] d\nu$$

对每一条光谱线来说，在某一频率附近的小范围之外， $G(\nu)$ 的值很小，可以忽略。

$$\tilde{\nu} = \nu - \bar{\nu}$$

$$G(\tilde{\nu}) = G(\bar{\nu} + \tilde{\nu}) = G(\nu)$$

$$\begin{aligned} I(\Delta S) &= 2 \int G(\tilde{\nu}) \left[1 + \cos \left[(\bar{\nu} + \tilde{\nu}) \frac{2\pi}{c} \Delta S \right] \right] d\tilde{\nu} \\ &= 2 \int G(\tilde{\nu}) d\tilde{\nu} + 2 \int G(\tilde{\nu}) \cos \left(\frac{2\pi \bar{\nu}}{c} \Delta S \right) \cos \left(\frac{2\pi \tilde{\nu}}{c} \Delta S \right) d\tilde{\nu} \\ &= I_0 + I_1(\Delta S) \cos \left(\frac{2\pi \bar{\nu}}{c} \Delta S \right) - I_2(\Delta S) \sin \left(\frac{2\pi \bar{\nu}}{c} \Delta S \right) \end{aligned}$$

$$I_0 = 2 \int G(\tilde{\nu}) d\tilde{\nu}$$

$$I_1(\Delta S) = 2 \int G(\tilde{\nu}) \cos \left(\frac{2\pi \tilde{\nu}}{c} \Delta S \right) d\tilde{\nu}$$

$$I_2(\Delta S) = 2 \int G(\tilde{\nu}) \sin \left(\frac{2\pi \tilde{\nu}}{c} \Delta S \right) d\tilde{\nu}$$

$$\tilde{\nu} \ll \bar{\nu} \longrightarrow G(\tilde{\nu}) \neq 0$$

$$I_1(\Delta S) \quad \sin\left(\frac{2\pi\bar{\nu}}{c}\Delta S\right)$$

$$I_2(\Delta S) \quad \cos\left(\frac{2\pi\bar{\nu}}{c}\Delta S\right)$$

变化缓慢

故在求极值时，这种变化可以忽略。在良好的近似下，求极值有：

$$\frac{dI}{d\Delta S} \approx \frac{2\pi}{c} \left[I_1(\Delta S) \sin\left(\frac{2\pi\bar{\nu}}{c}\Delta S\right) + I_2(\Delta S) \cos\left(\frac{2\pi\bar{\nu}}{c}\Delta S\right) \right] = 0 \longrightarrow \tan\left(\frac{2\pi\bar{\nu}}{c}\Delta S\right) = -\frac{I_2}{I_1}$$

这样，可求得I的极值为：

$$I_{\text{极值}} = I_0 \pm \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$$

由可见度的定义，可得：

$$V(\Delta S) = \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_0}$$

这样有

$$I(\Delta S) = I_0 \left\{ 1 + \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_0} \cos \left[\arctan\left(-\frac{I_2}{I_1}\right) + \frac{2\pi\bar{\nu}}{c}\Delta S \right] \right\}$$


所以，可见度函数曲线是归一化强度曲线 I/I_0 的包络。

如果光谱分布函数为矩形分布，则有

$$G(\nu) = \begin{cases} I_0 & \bar{\nu} - \frac{\Delta\nu}{2} < \nu < \bar{\nu} + \frac{\Delta\nu}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其干涉强度分布为：

$$dI(\nu) = 2G(\nu)[1 + \cos(k\Delta S)]d\nu = 2I_0(\nu)\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\Delta S\right)\right]d\nu$$


$$I(\Delta S) = \int_{-\infty}^{\infty} dI(\nu)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar{\nu}-\Delta\nu/2}^{\bar{\nu}+\Delta\nu/2} 2G(\nu)\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\Delta S\right)\right]d\nu \\ &= 2I_0\Delta\nu\left[1 + \frac{\sin(2\pi\Delta\nu\Delta S/c)}{2\pi\Delta\nu\Delta S/c}\right]\cos(2\pi\bar{\nu}\Delta S/c) \\ &= 2I_0\Delta\nu\left[1 + \text{sinc}\left(\frac{2\Delta\nu}{c}\Delta S\right)\right]\cos(2\pi\bar{\nu}\Delta S/c)。 \end{aligned}$$



慢变包络函数

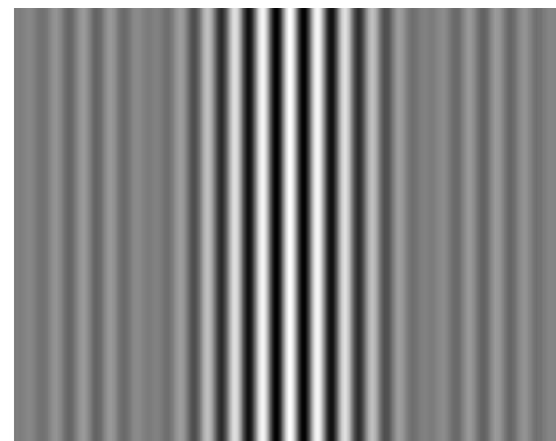
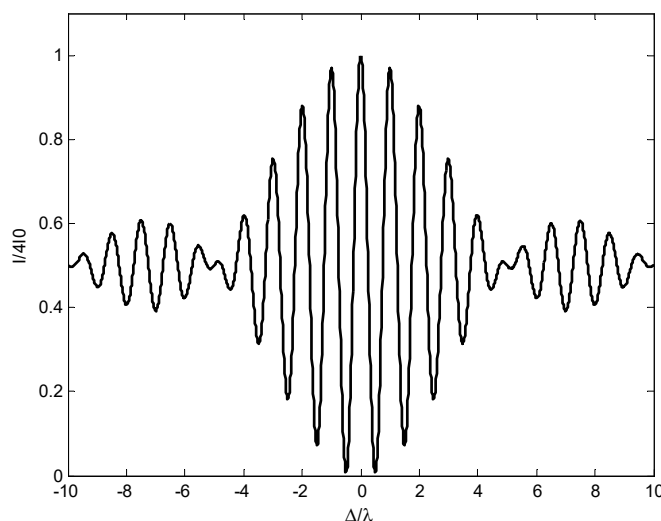
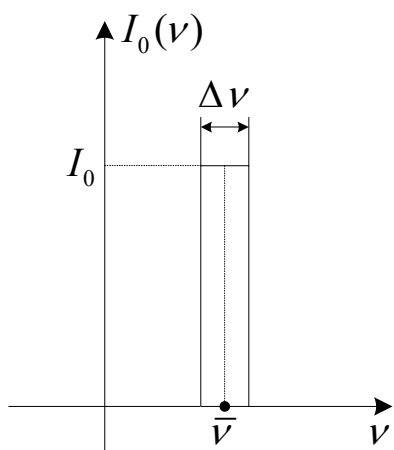


快变函数

上式中的余弦函数相对于它前面的**sinc**函数因子是快变函数，这个因子为慢变振幅包络，因此，条纹的可见度函数为

$$V = \text{sinc}\left(\frac{2\Delta\nu}{c} \Delta S\right)$$

$$\Delta\nu = m \frac{c}{2\Delta S} \rightarrow V = 0$$



与双波长的干涉图样很相似，所不同的是振幅包络的函数形式不同

7.5.2 傅里叶变换光谱技术

从上面的结果可以看出，由于条纹可见度包含了光源的光谱分布信息，因此，可以通过测量可见度曲线来测定光源的光谱分布，对光谱分布做傅里叶变换，就可得到光源的时域线型。利用这种干涉方法，通过对条纹可见度的测量来求出光源的光谱。这就是自上世纪60年代以来发展起来的傅里叶变换光谱学。

如果光波功率谱密度已知，由迈克耳逊干涉仪观察到的干涉图特征就可完全确定。利用干涉图和功率谱密度之间的关系，通过测量干涉图来确定未知的入射光的功率谱密度，就是傅里叶变换光谱术的基础。

由傅里叶变换光谱术得到光谱，首先必须测量干涉图。通常是在干涉仪的控制下，可动反射镜从零程差的位置移到大程差的范围内，将光强作为这个过程的时间函数进行测量。同时，把所得到的干涉图数字化，这可利用快速傅里叶变换技术，由数字傅里叶变换得到光谱。

$$I_D = 2I_0 + I(\tau) + I^*(\tau)$$

$$I(\tau) = I_D(\tau) - 2I_0 = I(\tau) + I^*(\tau)$$

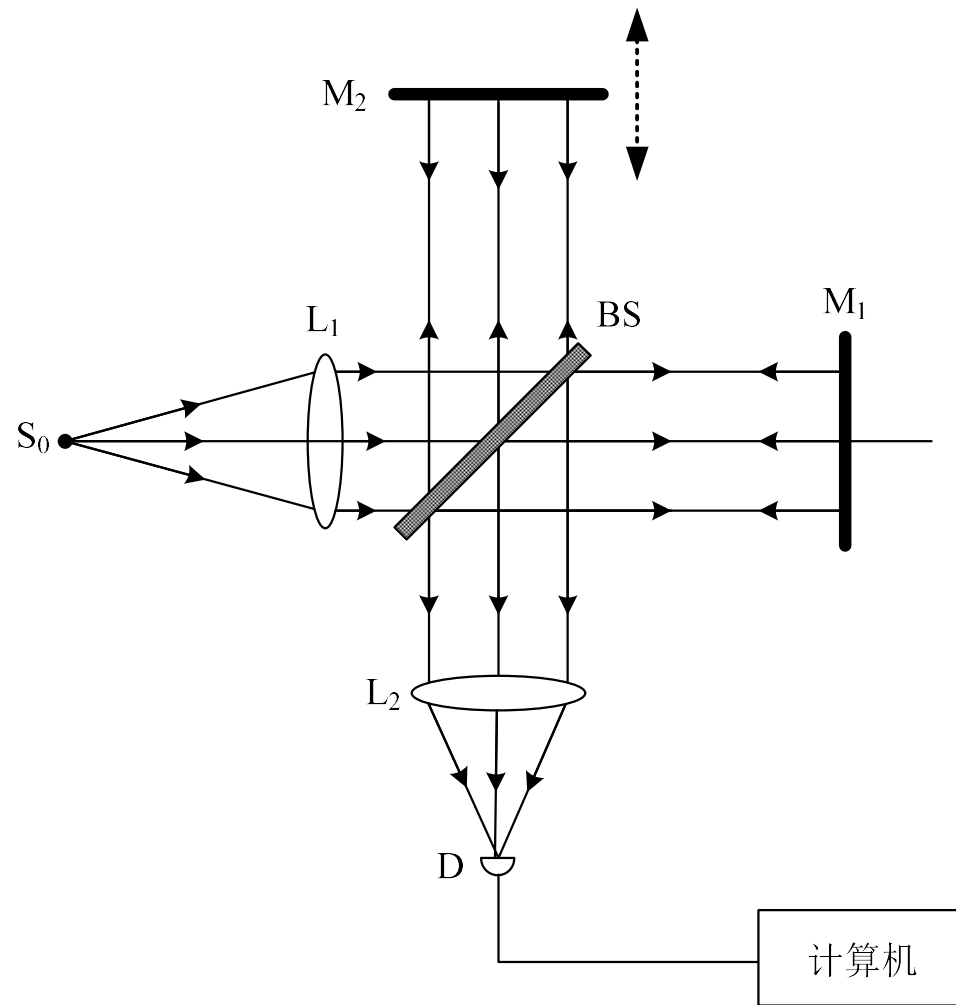
$$= \int_0^\infty G(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu + \int_0^\infty G(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu = 2 \int_0^\infty G(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu。$$

实偶函数的傅里叶变换也是实偶函数，由实偶函数的余弦变换性质得出：

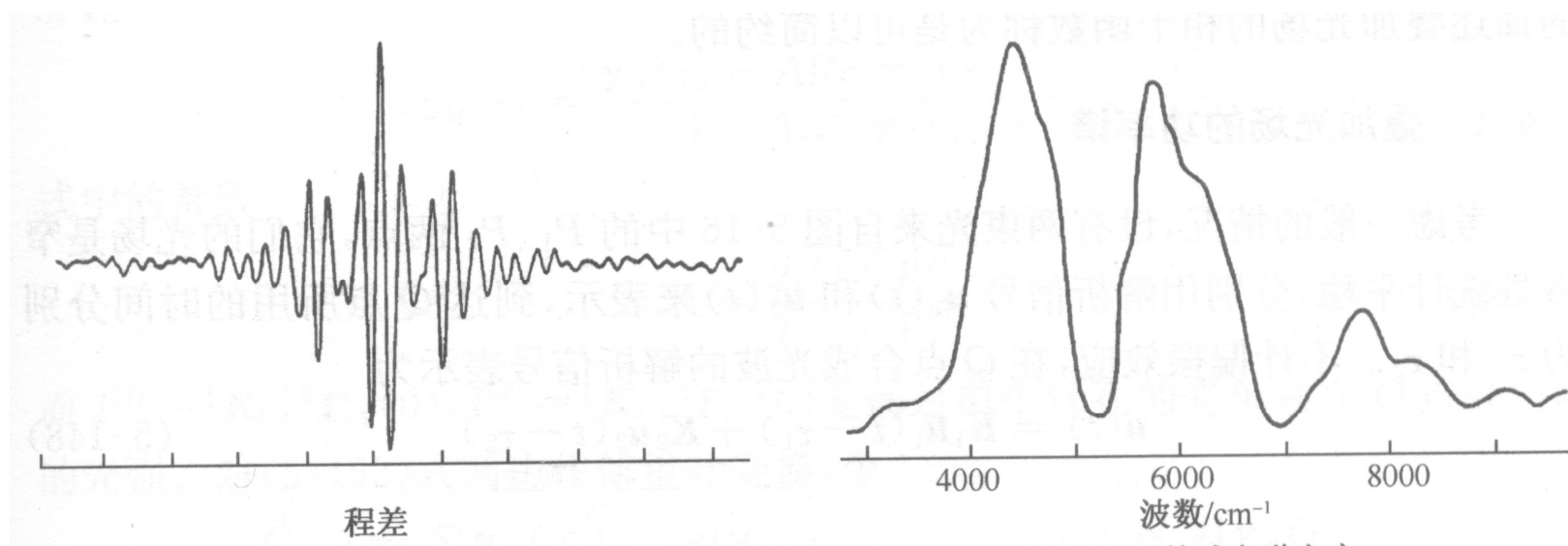
$$G(\nu) = 2 \int_0^\infty I(\tau) \cos(2\pi\nu\tau) d\tau$$

用迈克耳逊干涉仪记录下 $I(\tau)$ ，再借助于傅里叶余弦变换就可获得光源的光谱分布，这种方法称为傅里叶变换光谱术。

傅里叶变换光谱仪的光路



由傅里叶变换光谱得到的结果



传统的直接测量光谱的仪器有棱镜光谱仪、法布里-珀罗干涉仪、光栅光谱仪等，与它们比较，傅里叶变换光谱术不是一种直接的方法。根据色散原理，用一个普通的棱镜光谱仪或光栅光谱仪也可直接得到光源的光谱。但这种方法有一个缺点，即在每一波长位置上只能接收光源总能量的极小一部分(该波长所含的那部分)。这一缺点对于微弱光源(如某些红外信号测量)成为严重问题。

在傅里叶变换光谱术中，探测器在任何时刻接收的都是光源全波段所有波场联合作用的结果，因而充分利用了光源能量。另外，傅里叶变换光谱术有更高的分辨率，它取决于可动反射镜的最大移动距离。

正是由于这些优点，傅里叶变换光谱术已成为从近红外到远红外甚至毫米波区最有力的光谱分析方法，广泛用于物质结构、天体物理、工业检测、环境监护等许多领域。虽然傅里叶光谱技术取得了很大的成功，但也有不足，如在测量干涉光强时干涉仪测量臂移动范围有限，不可能使时间延迟满足无限大的要求，结果使得探测器接收到的光谱分布与光源的实际分布有差别。为了在计算频谱时有较高的分辨率，需要测出在很大光程差条件下的干涉图，而当光程差很大时，干涉图的可见度很小，因此进入探测器的光的频谱与进入干涉仪的光的频谱有差别。

7.5.3 准单色光的互强度

小光程差条件的实质，是为在感兴趣的观察范围内，条纹的可见度是一个常数，这样，就可简化互相干函数和复相干度的形式。在准单色条件下，互相干函数和复相干度可以近似分解为与程差有关和与程差无关的两个因子的乘积。时间相干性对互相干函数和复相干度的影响只包含在与程差有关的因子中，与程差无关的因子则只描述空间相干性对互相干函数和复相干度的影响，而与时间相干性无关。从而可简化对许多问题的分析。特别是在些条件下，可以单独研究空间相干性的传播问题。

下面仍然以杨氏双孔实验为基础，来研究准单色光源情况下光场的相干特性。两解析信号的互相关函数仍为解析信号，且具有单边频谱，这就是式(7.2.26)所表示的关系，即

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^\infty G_{12}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu = e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} \int_0^\infty G_{12}(\nu) e^{i2\pi(\nu-\bar{\nu})\tau} d\nu$$

$$|\nu - \bar{\nu}| \ll \bar{\nu}$$

$$\tau \ll 1/\Delta\nu, \Delta\nu\tau \ll 1$$

$$\Gamma_{12}(\tau) \approx e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} \int_0^\infty G_{12}(\nu) d\nu = e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} \Gamma_{12}(0)$$

与时间差有关

$$\Gamma_{12}(0) = |\Gamma_{12}(0)| e^{i\alpha_{12}(0)}$$

与时间差无关

互强度 $J_{12} = (P_1, P_2, 0) \equiv \langle u(P_1, t) u^*(P_2, t) \rangle \equiv \Gamma_{12}(0)$

互强度是时间差 $\tau=0$ 时的互相干函数，表示同时刻光波波阵面上两个点之间的相干性，描述光场的“同时异地”的空间相干性。

则根据互强度的定义，有：

$$\Gamma_{12}(\tau) \approx J_{12} e^{-i2\pi\bar{\nu}\tau} \quad J_{11} = \Gamma_{11}(0) = I_1 \quad J_{22} = \Gamma_{22}(0) = I_2$$

复相干度也分解为与时间差无关和有关的两项：

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &= \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1 I_2}} e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} \\ &= \frac{J_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}} e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} = \gamma_{12}(0) e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} = \mu_{12} e^{i2\pi\bar{\nu}\tau} \end{aligned}$$

复空间相干度(系数) $\mu_{12}(P_1, P_2, 0) \equiv \gamma_{12}(0) = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \approx \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}} = \frac{J_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}}$

$$\mu_{12} = |\mu_{12}| e^{i\alpha_{12}(0)} \quad \gamma_{12}(\tau) = |\mu_{12}| e^{i[-2\pi\bar{\nu}\tau + \alpha_{12}(0)]}$$

$$0 \leq |\mu_{12}| \leq 1$$

即光场干涉定律变成：

$$I(Q, r) = I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)} |\mu_{12}| \cos(\beta_{12} + 2\pi \bar{\nu}\tau)$$

在该区域干涉图样具有几乎恒定的可见度和相位。这时，条纹可见度为：

$$V = \frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q) + I_2(Q)} |\mu_{12}|$$

若两支光路的光强相等，则有： $V = |\mu_{12}|$

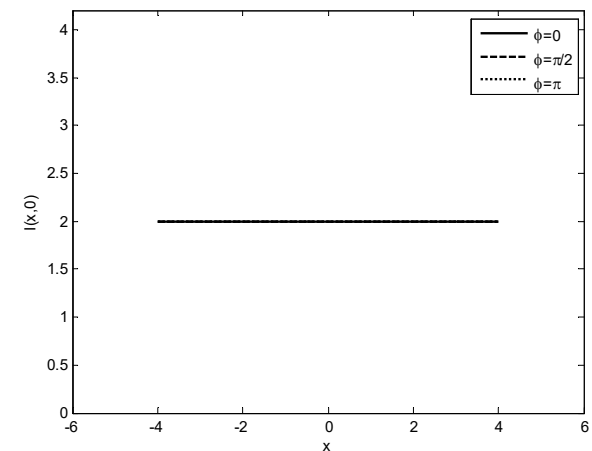
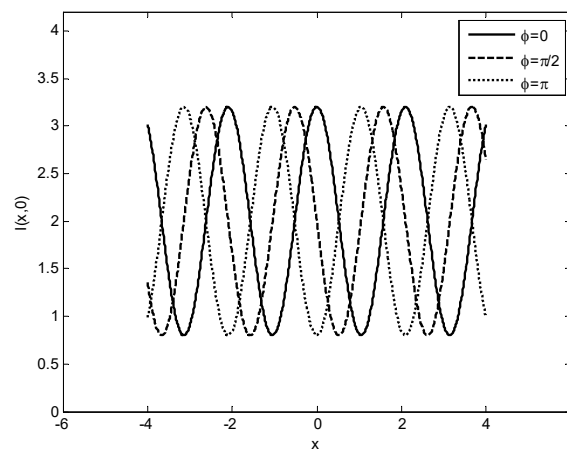
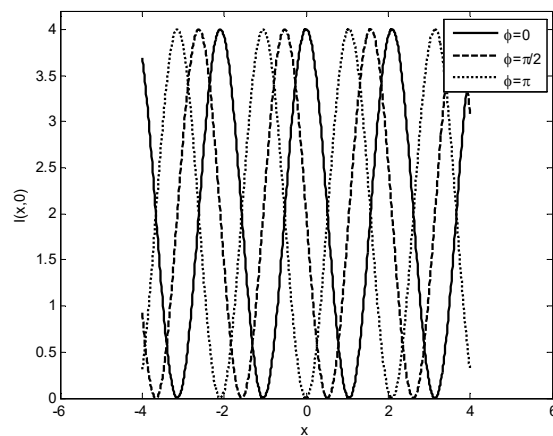
由此可以看出，准单色光场的特点似乎类似于单一频率的严格单色光场，其区别在于准单色光场的干涉条纹的可见度和位置分别取决于复相干度的模和相位。测量出干涉条纹的可见度就可以确定复相干因子。

干涉条纹的最大值(干涉条纹位置)由下列条件确定:

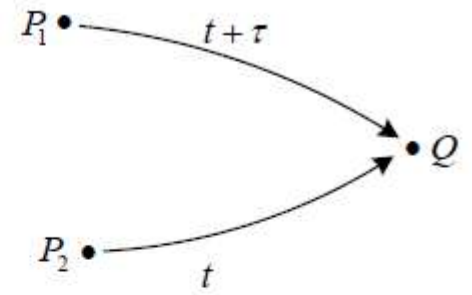
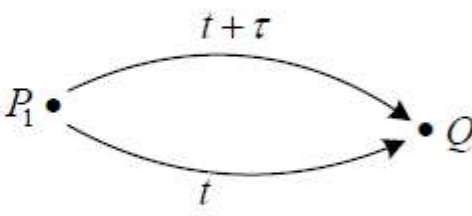
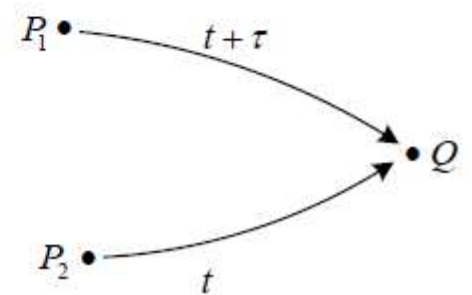
$$\alpha_{12}(0) + 2\pi \bar{\nu} \tau = \alpha_{12}(0) + \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2m\pi$$

由上式可以看出, 准单色光条件下干涉条纹形式上与单色光相似, 但实质上两者不是同的。准单色光条件下得到的干涉条纹对比度和位置分别取决复相干因子的模和相位。

下图是复相干因子的模和幅角取不同值时的干涉条纹图样。



在前面，为了描述限带光和准单色光条件下的干涉问题，定义了一系列的参量和函数，借助于这些量去描述干涉条纹的可见度，它们也反映了光场的时间或空间相干性。

符 号	名 称	定 义	相干性	示意图
$\Gamma_{12}(\tau)$	互相干函数	$\Gamma_{12}(\tau) = \langle u_1(P_1, t + \tau) u_2^*(P_2, t) \rangle$	空间相干性 及时间相干性	
$\gamma_{12}(\tau)$	复相干度	$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}$		
$\Gamma_{11}(\tau)$	互相干函数	$\Gamma_{11}(\tau) = \langle u_1(P_1, t + \tau) u_1^*(P_1, t) \rangle$	时间相干性	
$\gamma_{11}(\tau)$	复相干度	$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\Gamma_{11}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)}$		
J_{12}	互强度	$J_{12} = \Gamma_{12}(0) = \langle u_1(P_1, t) u_2^*(P_2, t) \rangle$	准单色光的 空间相干性	
μ_{12}	复相干因子	$\mu_{12} = \gamma_{12}(0) = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}}$		

7.6 互相干函数的传播和广义惠更斯原理

7.6.1 互相干函数的传播定律

7.6.2 互相干函数的波动方程

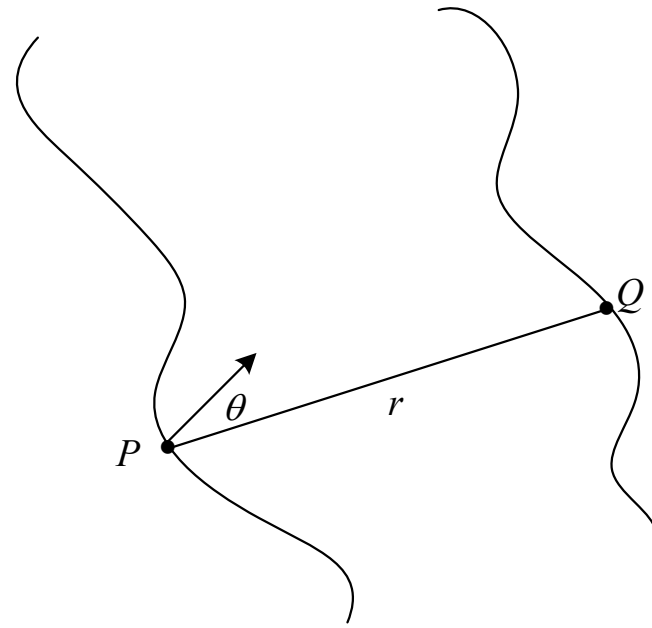
7.6.3 互谱函数的传播

7.6.1 互相干函数的传播定律

互相干函数传播的意思是指，当光波在空间传播时，其详细结构会发生变化，互相干函数的详细结构也以同样的方式在变化。传播的最基本物理本质是光波服从波动方程。这里我们只给出在惠更斯-菲涅耳原理基础上的解。在讨论互相干函数传播之前，引述一下非单色光场的衍射积分公式。

一个单色光波入射到一个无限大表面 Σ 上，如右图所示，可借助于 Σ 上的光场表示出右边场中一点 Q 的复振幅。根据惠更斯-菲涅耳原理，可写出 Q 点的复振幅表达式：

$$u(Q) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} u(P) K(\theta) \frac{e^{i2\pi r/\lambda}}{r} dS$$



现在考虑入射到面 Σ 上的光场是一个非单色光波

$$u(P, t) \longrightarrow u(Q, t)$$

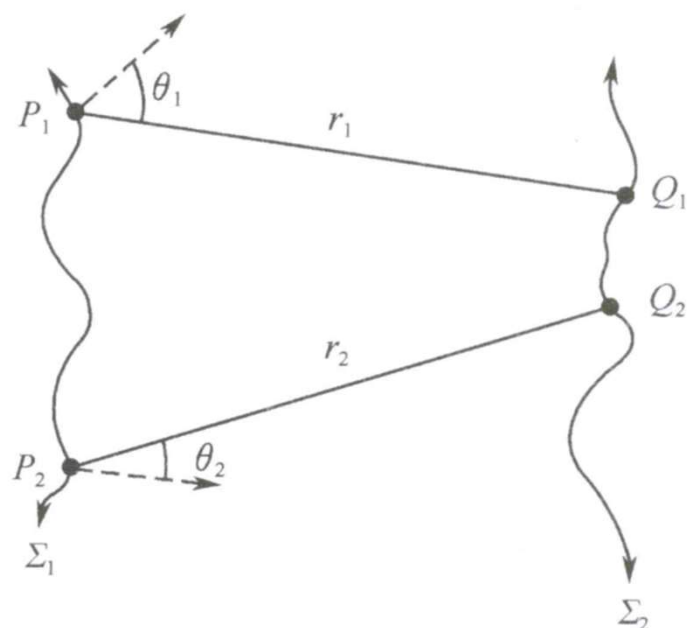
$$u(Q, t) = \iint_{\Sigma} \frac{du(P, t - r/c)}{2\pi cr} K(\theta) dS$$

窄带光

$$u(Q, t) = \iint_{\Sigma} \frac{u(P, t - r/c)}{i\bar{\lambda}r} K(\theta) dS$$

中心波长

现在讨论互相干函数的传播问题。如下图所示，若有任意相干性的光波从左向右传播，



$\Gamma(P_1, P_2, \tau)$ Σ_1 面互相干函数，已知

Σ_2 面互相干函数，需求

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \langle u(Q_1, t + \tau) u^*(Q_2, t) \rangle$$

这样通过窄带光传播规律，就可以把 Σ_2 面上的光场同 Σ_1 面上的光场联系起来了，于是有：

$$u(Q_1, t) = \iint_{\Sigma_1} \frac{u(P_1, t + \tau - r_1 / c)}{i\bar{\lambda} r_1} K(\theta_1) dS_1$$

$$u^*(Q_2, t) = \iint_{\Sigma_2} -\frac{u(P_2, t + \tau - r_2 / c)}{i\bar{\lambda} r_2} K(\theta_2) dS_2$$

交换积分及求平均的次序

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \frac{\langle u(P_1, t + \tau - r_1 / c) u^*(P_2, t - r_2 / c) \rangle}{\bar{\lambda}^2 r_1 r_2} K(\theta_1) K(\theta_2) dS_1 dS_2$$

被积函数中的时间平均可借助于 Σ_1 面上的互相干函数来表示。对于一个平稳随机过程，式(7.6.7)中的被积函数中的时间平均为：

$$\left\langle u(P_1, t + \tau - r_1 / c) u^*(P_2, t - r_2 / c) \right\rangle = \Gamma \left(P_1, P_2; \tau + \frac{r_2 - r_1}{c} \right)$$

于是得到，在窄带假设下互相干传播的基本定律：

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \Gamma \left(P_1, P_2; \tau + \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda} r_1} \frac{K(\theta_2)}{\bar{\lambda} r_2} dS_1 dS_2$$

上式适用于窄带条件，现在对它作进一步的限制以适用于准单色条件。为此我们要求最大光程差远小于相干长度。在这个假设下，我们会找到相应的互强度的传播规律。当准单色条件被满足时，按定义 Σ_2 面上的互强度为：

$$J(Q_1, Q_2) = \Gamma(Q_1, Q_2; 0)$$

在式(7.6.9)中令 $\tau=0$ ，可得

$$\Gamma\left(P_1, P_2; \frac{r_2 - r_1}{c}\right) = J(P_1, P_2) e^{i2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}}$$

准单色近似下互强度的传播规律

$$J(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} J(P_1, P_2) e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)} \frac{K(\theta_1)}{\lambda r_1} \frac{K(\theta_2)}{\lambda r_2} dS_1 dS_2$$

$$I(Q) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} J(P_1, P_2) e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)} \frac{K(\theta_1)}{\lambda r_1} \frac{K(\theta_2)}{\lambda r_2} dS_1 dS_2$$

为了得到以上各个重要结论，使用了关系式(7.6.5)和式(7.6.6)，而这两个关系式均是由惠更斯-菲涅耳原理出发得到的。因此，互相干性和互强度的传播定理也必须满足推导惠更斯-菲涅耳原理时所作的假设。式(7.6.13)可以用是部分相干场中强度传播的惠更斯-菲涅耳原理。它与描述单色光场传播的惠更斯-菲涅耳公式是极为相似的。其原因在于互强度的传播也满足亥姆霍兹方程。

7.6.2 互相干函数的波动方程

在真空中，解析函数的实部满足波动方程：

$$\nabla^2 u^r(P; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^r(P; t) = 0$$

对上式两式的两边作希尔伯特变换，并交换算符的次序后得到：

$$\nabla^2 u^i(P; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^i(P; t) = 0$$

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \nabla_1^2 \langle u_1(P_1, t + \tau) u_2^*(P_2, t) \rangle = \langle \nabla_1^2 u_1(P_1, t + \tau) u_2^*(P_2, t) \rangle$$

由导数的基本定义可以证明：

$$\frac{\partial^2 u_1(P_1, t + \tau)}{\partial (t + \tau)^2} = \frac{\partial^2 u_1(P_1, t + \tau)}{\partial \tau^2}$$

这样，可得：

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \left\langle \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1(P_1, t + \tau)}{\partial (t + \tau)^2} u_2^*(P_2, t) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1(P_1, t + \tau)}{\partial \tau^2} u_2^*(P_2, t) \right\rangle$$



与 τ 无关

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \left\langle \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1(P_1, t + \tau)}{\partial \tau^2} u_2^*(P_2, t) \right\rangle = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \langle u_1(P_1, t + \tau) u_2^*(P_2, t) \rangle$$

于是有：

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau) = 0$$

同理可得：

$$\nabla_2^2 \Gamma_{12}(\tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau) = 0$$

将式(7.5.29)对变量 τ 求偏微分两次，可得：

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau) \approx -(2\pi \bar{\nu}) J_{12} e^{-i2\pi \bar{\nu} t}$$

$$\nabla_1^2 \Gamma_{12}(\tau) = \nabla_1^2 (J_{12} e^{-i2\pi \bar{\nu} t}) = (\nabla_1^2 J_{12}) e^{-i2\pi \bar{\nu} t}$$



$$\nabla_1^2 J_{12}(\tau) + \bar{k}^2 J_{12}(\tau) = 0$$

$$\nabla_2^2 J_{12}(\tau) + \bar{k}^2 J_{12}(\tau) = 0$$



是准单色光场中用来描述空间相干性传播的基本规律，也就是说，互强度也按照亥姆霍兹方程传播的。

7.6.3 互谱函数的传播

互谱函数是互相干函数的傅里叶变换：

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu) e^{-2\pi\nu\tau} d\nu$$

将上式代入式(7.6.23)，并交换微分和积分次序可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) G_{12}(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu = 0$$

上式左边的积分式中的积分函数为**0**，才能保证上式对一切时间延迟 τ 所有互谱密度均成立，对被积函数进行简单运算可得：

$$\nabla_1^2 G_{12}(\tau) + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 G_{12}(\tau) = 0 \quad \nabla_2^2 G_{12}(\tau) + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 G_{12}(\tau) = 0$$

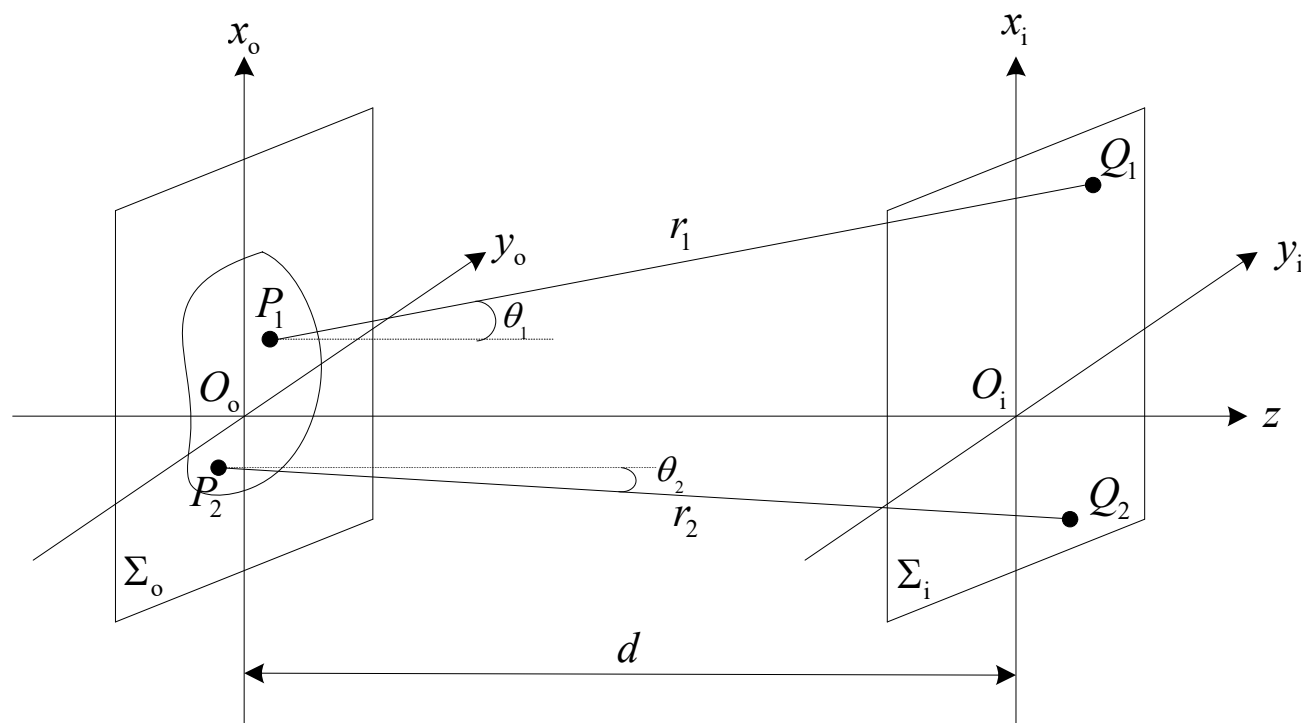
7.7 范西泰特-策尼克定理及其应用

7.7.1 范西泰特-策尼克定理

7.7.2 相干面积

7.7.3 范西泰特-策尼克定理的应用例子

互强度和复相干度是描述单色光辐射场的基本物理量。一个扩展非相干准单色光源所产生的光场的互强度和复相干度的计算可由范西泰特-策尼克(Van Cittert-Zernike)定理来描述，这一定理首先由范西泰特在1934年确定，之后又由策尼克于1938年用一种较简单的方法得出，是近代光学中最重要的定理之一。后来霍普金斯(Hopkins)又把范西泰特-策尼克定理推广到了更普遍的情形。



7.7.1 范西泰特-策尼克定理

互强度

$$J(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} J(P_1, P_2) e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)} \frac{K(\theta_1)}{\lambda r_1} \frac{K(\theta_2)}{\lambda r_2} dS_1 dS_2$$

对于空间非相干光源的这种特殊情况，两个不同点的光振动是统计无关的，因而有：

$$J(P_1, P_2) = I(P_1) \delta(P_1 - P_2)$$



$$J(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma_1} I(P_1) e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)} \frac{K(\theta_1)}{\lambda r_1} \frac{K(\theta_2)}{\lambda r_2} dS$$

作如下假设和近似：

(1) 光源和观察区的线度与两者之间的距离 z 相比很小，因此有：

$$r_1 r_2 = z^2$$

(2) 只涉及小角度，即 $K(\theta_1) \approx K(\theta_2) \approx 1$

于是在观察区的互强度取如下形式：

$$J(Q_1, Q_2) = \frac{1}{(\bar{\lambda} z)^2} \iint_{\Sigma_1} I(P_1) e^{\frac{i2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2 - r_1)} dS$$



傍轴近似

$$J(x_{i1}, y_{i1}; x_{i2}, y_{i2}) = \frac{e^{i\psi}}{(\bar{\lambda} z)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} I(x_o, y_o) e^{-\frac{2\pi}{\bar{\lambda} z}(\Delta x_i x_o + \Delta y_i y_o)} dx_o dy_o$$

范西泰特-策尼克定理

$$\Delta x_i = x_{i2} - x_{i1} \quad \Delta y_i = y_{i2} - y_{i1}$$

相位因子为 $\psi = \frac{\pi}{\bar{\lambda}_z}[(x_{i2}^2 + y_{i2}^2) - (x_{i1}^2 + y_{i1}^2)] = \frac{\pi}{\bar{\lambda}_z}(\rho_2^2 - \rho_1^2)$

定理表示成归一化形式：

$$I(x_{i1}, y_{i1}) = I(x_{i2}, y_{i2}) = \frac{1}{(\bar{\lambda}_z)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} I(x_o, y_o) dx_o dy_o$$

$$\mu_{12} = \mu(Q_1; Q_2) = \mu(x_{i1}, y_{i1}; x_{i2}, y_{i2}) = \frac{J(x_{i1}, y_{i1}; x_{i2}, y_{i2})}{\sqrt{I(x_{i1}, y_{i1})I(x_{i2}, y_{i2})}}$$

$$= \frac{e^{i\psi} \int \int_{-\infty}^{\infty} I(x_o, y_o) e^{-\frac{2\pi}{\bar{\lambda}_z}(\Delta x_i x_o + \Delta y_i y_o)} dx_o dy_o}{\int \int_{-\infty}^{\infty} I(x_o, y_o) dx_o dy_o}$$

$\xi = \frac{\Delta x_i}{\lambda z}, \eta = \frac{\Delta y_i}{\lambda z}$ 时，则上式可写为

$$\mu(Q_1; Q_2) = \frac{e^{i\psi} F\{I(x_o, y_o)\} \Big|_{\xi = \frac{\Delta x_i}{\lambda z}, \eta = \frac{\Delta y_i}{\lambda z}}}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x_o, y_o) dx_o dy_o}$$

以上式给出了一个十分重要的结论：当光源本身的线度以及观察区域的线度都比二者间的距离小得多时，观察区域上的复相干系数正比于光源强度分布的归一化二维傅里叶变换。

7.6.2 相干面积

从范西泰特-策尼克定理出发可以导出准单色扩展光源相干性的量度，即空间相干性。定义一个相干面积

$$A_c = \iint_{-\infty}^{\infty} |\mu(\Delta x, \Delta y)|^2 d\Delta x d\Delta y$$

由范西泰特-策尼克定理得以证明, 对于形状任意、面积为 A_s 的均匀非相干准单色光源，在离光源 z 处的相干面积是：

$$A_c = \frac{(\bar{\lambda} z)^2}{A_s} \approx \frac{(\bar{\lambda})^2}{\Omega_s}$$

光源对观察区原点所张的立体角

范西泰特-策尼克定理的一个重要应用，是分析一个亮度均匀、非相干准单色、半径为 a 的圆盘形扩展光源的相干性，如下图2所示，显然这样的光源的强度分布可用圆域函数来表示，即

$$I(x_o, y_o) = I_0 \text{circ}\left(\sqrt{x_o^2 + y_o^2} / a\right)$$

在极坐标系下，有：

$$I(x_o, y_o) = I_0 \text{circ}(r_o / a)$$

对观测平面，设

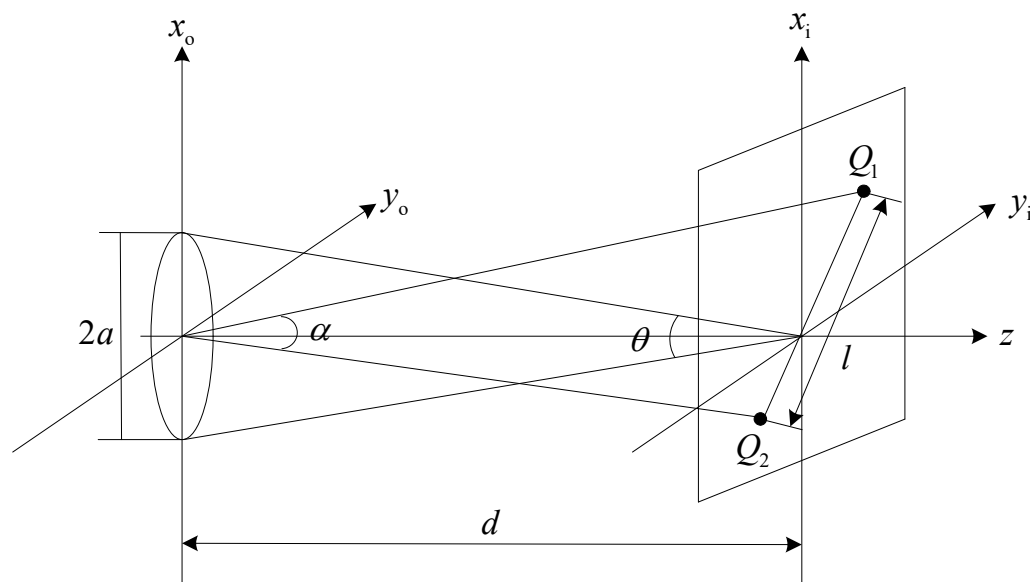
$$\Delta x_i = x_{i1} - x_{i2} = \bar{\lambda} z \rho \cos \phi$$

$$\Delta y_i = y_{i1} - y_{i2} = \bar{\lambda} z \rho \sin \phi$$

因此有：

$$\rho = \frac{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}{\bar{\lambda} z} = \frac{l}{\bar{\lambda} z}$$

频域中的极坐标半径



$$l = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

两点间的距离

由式(7.7.14), 有

$$B\{I_0 \text{circ}(r_o / a)\} = 2\pi I_0 \int_0^a r_o J_0(2\pi r_o \rho) dr_o = I_0 \pi a^2 \frac{2J_1(2\pi a \rho)}{2\pi a \rho}$$

$$\mu(Q_1, Q_2) = \frac{e^{i\psi} F\{I_0 \text{circ}(r_o / a)\} \Big|_{\xi=\frac{\Delta x_i}{\lambda d}, \eta=\frac{\Delta y_i}{\lambda d}}}{\iint_{-\infty}^{\infty} I_0 \text{circ}(r_o / a) ds}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} I_0 \text{circ}(r_o / a) ds = I_0 \pi a^2$$

$$\mu(Q_1, Q_2) = e^{i\psi} \left[\frac{2J_1(2\pi a \rho)}{2\pi a \rho} \right]$$

$$\psi = \frac{\pi(x_{i1}^2 + y_{i1}^2)}{\lambda d} = \frac{\pi l^2}{\lambda d}$$

如果令: $\Phi = 2\pi a \rho = \frac{2\pi a l}{\bar{\lambda} d} \approx \frac{\pi l}{\bar{\lambda}} \theta$

光源的角直径 $\theta \approx 2a/d$

$\Phi \approx \frac{2\pi a}{\bar{\lambda}} \alpha$

Q_1 和 Q_2 两点相对于光源中心点的张角(孔径角) $\alpha \approx l/d$

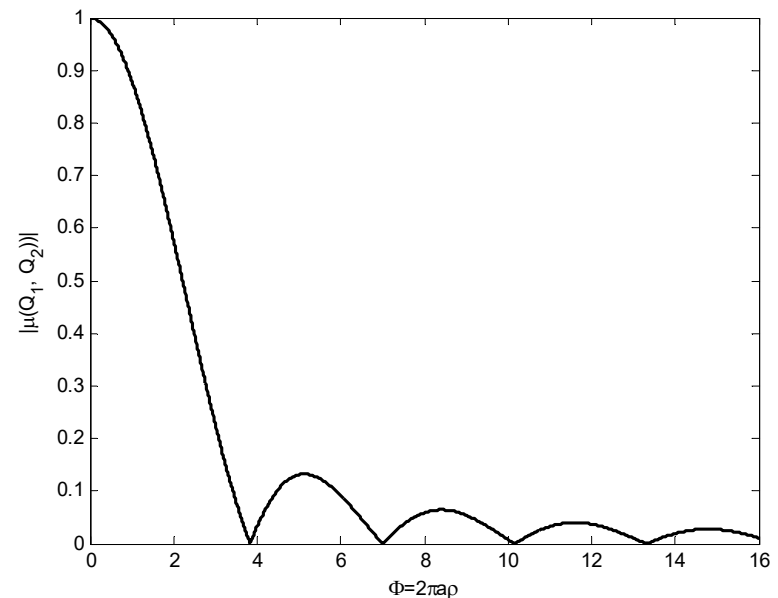
$|\mu|$ 到达第一个零值。此时，干涉条纹恰好消失，其相应的双孔间距为：

$$l_c = \frac{3.833}{\pi} \frac{\bar{\lambda}}{\theta} = 1.220 \frac{\bar{\lambda}}{\theta}$$

这个间距称为空间相干宽度或横向相干宽度。或相应的孔径角为：

$$\alpha = 0.610 \frac{\bar{\lambda}}{a}$$

复空间相干度的模 $|\mu|$ 和 Φ 的关系



7.7.3 范西泰特-策尼克定理的应用例子

1. 迈克耳逊测星干涉仪

范西泰特-策尼克定理的一个重要应用就是用来确定星体的角直径。利用光场的空间相干性质，可以测量宇宙中星体的直径和双星的间距。由于星体非常遥远，所以这它们的角直径非常小，约为 10^{-7}rad 。因此，在地球上观察星体发出的光的横向相干宽度为数米量级。确定像星体这类遥远光源角直径的方法，可以用双孔间距可变的杨氏干涉装置。

2. 汤姆逊-沃耳夫衍射计

汤姆逊(**Thompson**)和沃耳夫(**Wolf**)曾采用被称为汤姆逊-沃耳夫衍射计的装置, **diffractometer**)来研究光源尺度变化以及双孔间距变化对复相干度的影响。汤姆逊-沃耳夫实验在部分相干理论中具有重要意义，因为它通过修改杨氏实验验证了部分相干态的各种特性，它可作为一种称之为衍射计的仪器来使用。汤姆逊-沃耳夫当初研制的目的是为了用光学衍射方法来解决X射线的结构分析。