

# 第五章 脉冲激光产生原理

## §5-4 锁模原理与超短脉冲产生

1. 激光器纵模输出特性

2. 锁模基本原理

3. 锁模的方法

4. 主动锁模激光器

5. 被动锁模激光器

6. 同步泵浦锁模激光器

7. 自锁模激光器

8. 脉冲宽度测量技术

## §5-4 锁模原理与超短脉冲产生

### 1.激光器纵模输出特性

### 2.锁模基本原理

### 3.锁模的方法

- » 主动锁模
- » 被动锁模
- » 同步泵浦锁模
- » 自锁模

# 第五章

# 脉冲激光产生原理

## 4.主动锁模激光器

- 振幅调制锁模；相位调制锁模；主动锁模激光器的结构

## 5.被动锁模激光器

- 固体激光器的被动锁模；染料激光器的被动锁模；对碰锁模激光器

## 6.同步泵浦锁模激光器

## 7.自锁模激光器

- 自锁模原理；超短脉冲压缩技术

## 8.脉冲宽度测量技术

## §5-4 锁模原理与超短脉冲产生

- ◆ 调Q激光器一般只能产生  $10^{-8}$  秒量级的激光脉冲。
- ◆ 锁模激光器可以产生脉冲为  $10^{-12}$  秒到  $10^{-15}$  秒的激光脉冲。
- ◆ 文献上习惯把  $\Delta\tau \leq 10^{-10}$  的脉冲称为 “超短脉冲”。

# 1. 激光器纵模输出特性

## (a) 激光器的多纵模输出特性

激光模式的锁定：纵模锁定、横模锁定，以及纵横模同时锁定。

◆ 在一个光学长度为L的谐振腔中，在增益带宽范围内，可以存在多个纵模：

$$\nu_q = \frac{c}{2L} q \quad q - \text{纵模指数} \dots\dots(1)$$

◆ 相邻的纵模间隔为：

$$\Delta\nu_q = \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} \dots\dots\dots(2)$$

# 1. 激光器纵模输出特性

◆例如，激光器共有 **$N = (2q+1)$** 个纵模，则激光输出的电场强度应是各个纵模电场之和：

$$E(t) = \sum_{k=-q}^q E_k e^{i(\omega_k t + \varphi_k)} \dots\dots\dots (3)$$

式中  **$k$** 为振荡模的序数

$\omega_k$  为振荡模的圆频率

$\varphi_k$  第 **$K$** 个模的初相位

**$N(=2q+1)$** 振荡模的总数目

# 1. 激光器纵模输出特性

- ◆如果N个模的位相  $\varphi_k$  是无规的，由于  $\varphi_k$  的随机性质，各模之间是不相干的。这时，激光光强等于各个模的光强之和。由于

$$I(t) \propto E^2(t)$$

- ◆故瞬时光强I ( t ) 可表示为：

$$I(t) \propto E^2(t) = \sum_{k=-q}^q E_k e^{i(\omega_k t + \varphi_k)}$$

$$+ 2 \sum_{k \neq k'} E_k E_{k'} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \cdot \cos(\omega_{k'} t + \varphi_{k'}) \dots\dots (4)$$

# 1. 激光器纵模输出特性

◆在实际观测时间 $t$ 内, (  $t \gg$  纵模振荡周期  $T = \frac{2\pi}{\omega_k}$  ), 所获得的光强值是每个纵模在时间 $t$ 内的平均值之和。对于第 $K$ 个纵模的光强为:

$$\begin{aligned} \overline{I_k(t)} &\propto \overline{E_k^2(t)} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t E_k^2(t) dt = \frac{1}{t} \int_0^t E_k^2 \cos^2(\omega_k t + \varphi_k) dt \approx \frac{E_k^2}{2} \dots\dots(5) \end{aligned}$$



# 1. 激光器纵模输出特性

◆对于全部  $N = 2q + 1$  个纵模的总光强为：

$$\begin{aligned} \overline{I(t)} \propto \overline{E^2(t)} &= \frac{1}{t} \sum_{k=-q}^q \int_0^t E^2(t) dt = \sum_{k=-q}^q \frac{E_k^2}{2} \\ &+ \frac{2}{t} \sum_{k \neq k'} \int_0^t E_k E_{k'} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \cos(w_k t + \varphi_k + w_{k'} t + \varphi_{k'}) + \cos(w_k t + \varphi_k - w_{k'} t - \varphi_{k'}) \right] \right\} dt \\ &\dots(6) \end{aligned}$$

◆上式右方第二项随  $t$  增大而趋于零，因此得

$$\overline{E^2(t)} = \sum_{k=-q}^q \frac{E_k^2}{2} \dots\dots\dots(6')$$

# 1. 激光器纵模输出特性

◆（为分析简明起见）设各纵模振幅均相等，则有

$$\overline{E^2(t)} = (2q + 1) \frac{E_k^2}{2} = N \cdot \frac{E_k^2}{2} \dots\dots\dots(7)$$

◆由（7）式可见：具有N个纵模的激光器输出光强等于单个纵模激光器输出光强的N倍。由于各模的位相是随机的，所以激光输出的光强随着时间的变化也带有瞬时无规脉动的性质。

# 1. 激光器纵模输出特性

## (b) 多纵模的位相锁定特性

如果采取锁相措施，把各纵模的初相位相对地固定下来，亦即各是相关的。最简明的情况是设相邻的两纵模的相位差为一个常数  $\alpha$ ：

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \alpha \quad \text{..... (8)}$$

(8) 通常称之为相位锁定或锁模

# 1. 激光器纵模输出特性

- ◆首先考察具有4个纵模的激光谐振腔内光波叠加的情况：设四个振荡频率为：

$$\nu_1、\nu_2、\nu_3、\nu_4$$

- ◆并沿同一轴向传播。并且有

$$\nu_2 = 2\nu_1、\nu_3 = 3\nu_1、\nu_4 = 4\nu_1$$

- ◆振幅均为  $E_0$ 。

$$E_k = E_0 \cos(2\pi\nu_k t + \varphi) \begin{cases} E_1 = E_0 \cos(2\pi\nu_1 t) \\ E_2 = E_0 \cos(4\pi\nu_1 t) \\ E_3 = E_0 \cos(6\pi\nu_1 t) \\ E_4 = E_0 \cos(8\pi\nu_1 t) \end{cases}$$

# 1. 激光器纵模输出特性

◆利用锁相技术使得  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$

◆当  $t = t_1 = 0$  时 ,

$$E = \sum_{k=1}^4 E_k = E_0 \sum_{k=1}^4 \cos(2\pi\nu_k t) = E_0(1+1+1+1) = 4E_0$$

$$I = E^2 = 16E_0^2$$

◆  $t = t_2 = \frac{1}{4\nu_1}$  时 ,

$$E = \sum_{k=1}^4 E_k = E_0 \sum_{k=1}^4 \cos(2\pi\nu_k \cdot \frac{1}{4\nu_1}) = 0$$

# 1. 激光器纵模输出特性

◆  $t = t_3 = \frac{2}{4\nu_1}$ 时 ,

$$E = \sum_{k=1}^4 E_k = E_0 \sum_{k=1}^4 \cos(2\pi\nu_k \cdot \frac{2}{4\nu_1}) = 0$$

◆  $t = t_4 = \frac{3}{4\nu_1}$ 时 ,

$$E = \sum_{k=1}^4 E_k = E_0 \sum_{k=1}^4 \cos(2\pi\nu_k \cdot \frac{3}{4\nu_1}) = 0$$

◆  $t = t_5 = \frac{4}{4\nu_1}$ 时 ,

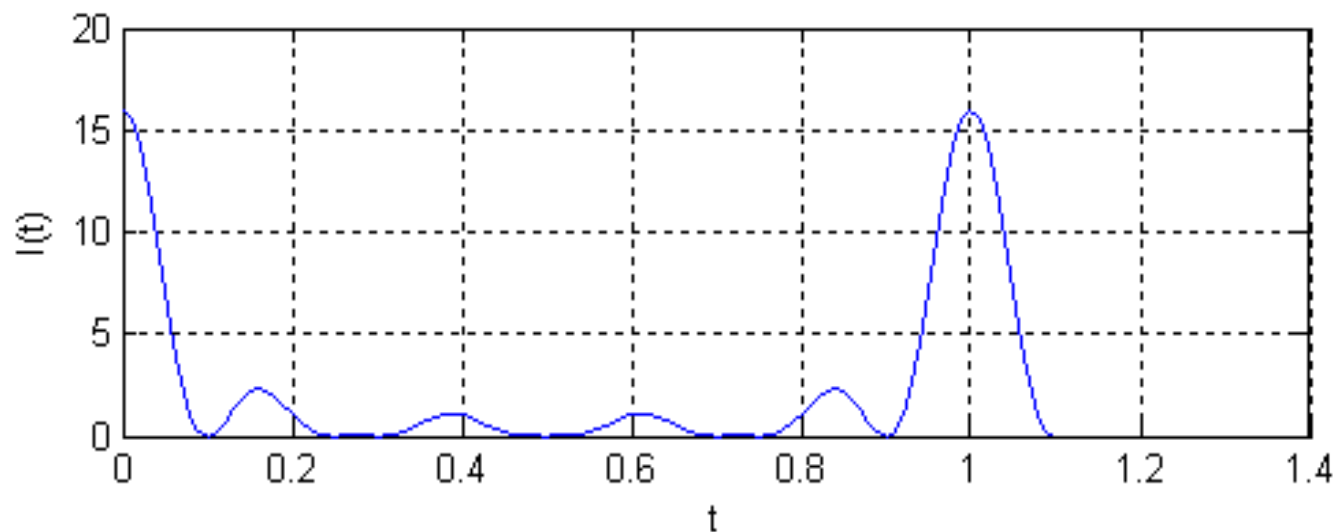
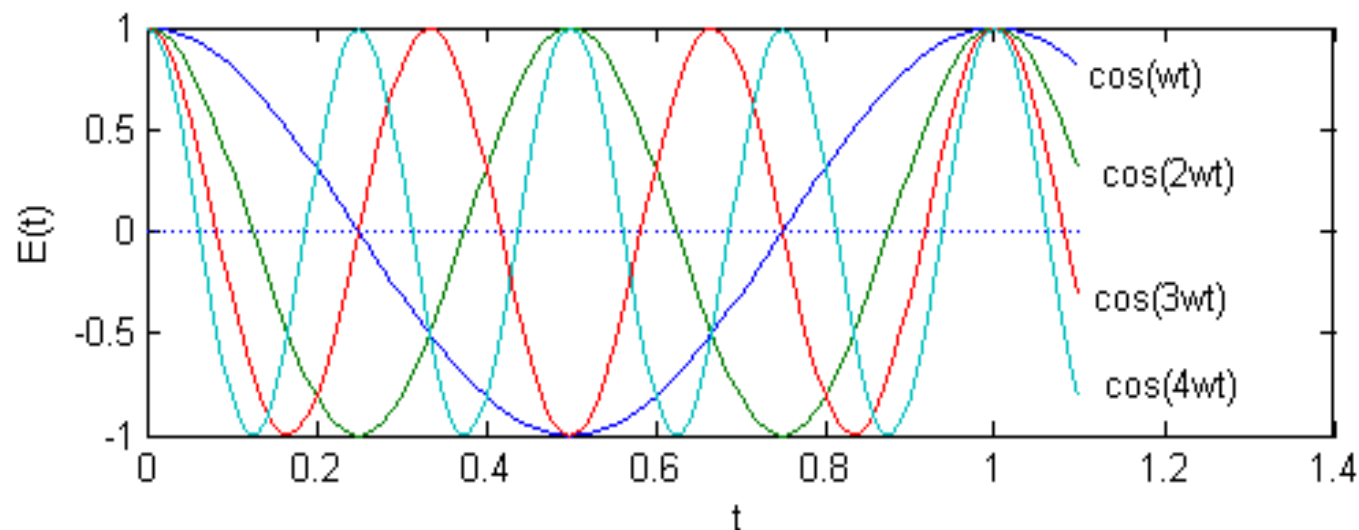
$$E = \sum_{k=1}^4 E_k = E_0 \sum_{k=1}^4 \cos(2\pi\nu_k \cdot \frac{4}{4\nu_1}) = 4E_0$$

# 1. 激光器纵模输出特性

◆按此，在 $t=0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{2}{\nu_1}, \frac{3}{\nu_1}, \dots$ 处，各光波

振幅同时达到最大值，由于产生“建设性”的相干结果，这些地方振幅叠加均有 $E = 4E$ 。从而在时间上将出现一系列周期性脉冲（极大值）。

# 1. 激光器纵模输出特性



四个纵模  
锁定输出  
特性



# 1. 激光器纵模输出特性

◆ 如果腔内存在  $N = (2q + 1)$  个纵模，则类似的有周期性脉冲序列，

其脉冲极大值处的电场振幅为  $E = NE_0$ 。

◆ 光强  $I = N^2 E_0^2$

( 普通激光器的情形，对应的光强为  $I_{\text{不锁模}} N \frac{E_0^2}{2}$  )

◆ 这个脉冲序列中相邻脉冲的时间间隔为  $\tau = \frac{1}{\nu_1}$

注意： $\nu_1$  亦是相邻纵模的频率间隔  $\Delta\nu_q$ ，

◆ 所以  $\tau = \frac{1}{\Delta\nu_q} = \frac{2L}{C}$

## 2.锁模基本原理

- ◆存在**N**个纵模的激光器采用锁相措施，确保各相邻的纵模之间的位相差为一常数  $\alpha$ ：

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \alpha \dots\dots(8)$$

- ◆设中心模的振荡频率为  $\omega_0$  在增益带宽范围内，两侧均有**q**个模，即总共有 **$N = 2q + 1$** 个模起振。其中相邻模的圆频率差为：

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu_q = 2\pi \frac{C}{2L}$$

## 2.锁模基本原理

◆ 设各振荡模都具有相等的振幅  $E_0$  。

◆ 激光器输出电场强度是各个纵模电场之和：

$$E(t) = \sum_{k=-q}^q E_k e^{i(w_k t + \varphi_k)} = \sum_{k=-q}^q E_k e^{i[(w_0 + k\Delta w)t + k\alpha]} = E_0 e^{i w_0 t} \sum_{k=-q}^q e^{i k(\Delta w t + \alpha)} \quad ..(9)$$

◆ 当 **t** 满足:  $\Delta w t + \alpha = 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
时, 因子  $e^{i k(\Delta w t + \alpha)} = 1$  ,

◆ 此时有  $\sum_{k=-q}^q e^{i k(\Delta w t + \alpha)} = 2q + 1 = N$

## 2.锁模基本原理

- ◆ 此时  $\Sigma$  达到最大，各纵模在这个时刻的振幅值均达到最大值  $E_0$ ，而在其它时间，由于各个纵模的位相不同，幅值有正有负，有大有小，累加结果中幅值是不大的。
- ◆ 由此可见：激光的输出应是一个在时间上满足于  $\Delta\omega t + \alpha = 2n\pi$  的脉冲序列。
- ◆  $\therefore$ 
  - $\Delta\omega t_1 + \alpha = 2n\pi$
  - $\Delta\omega t_2 + \alpha = (2n+1)\pi$
- ∴ 相继的两个脉冲相隔的时间为
$$\tau = (t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \dots\dots(10)$$

## 2.锁模基本原理

◆事实上  $\sum e^{ik(\Delta\omega t + \alpha)}$  是一个几何级数，公比

为  $e^{ik(\Delta\omega t + \alpha)}$ ，按几何级数求和公式：

$$\sum_{k=0}^{2q} a^k = \frac{a^{2q+1} - 1}{a - 1}$$

◆可得：

$$\sum_{k=-q}^q e^{ik(\Delta\omega t + \alpha)} = e^{-iq(\Delta\omega t + \alpha)} \sum_{k=0}^{2q} e^{ik(\Delta\omega t + \alpha)} = \frac{\sin[\frac{2q+1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]} = \frac{\sin[\frac{N}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]} \dots\dots(11)$$

## 2.锁模基本原理

◆把 ( 11 ) 式代入 ( 9 ) 式，得合成振动

锁模激光输出的电场强度 $E(t) = \frac{\sin[\frac{N}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]} E_0 e^{i\omega_0 t} \dots\dots(12)$

◆可以分成两部分看待：

“位相”部分： $e^{i\omega_0 t}$

“振幅”部分： $A(t) = \frac{\sin[\frac{N}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]} E_0$

相对而言它随时间变化很慢

## 2.锁模基本原理

考察**A(t)**随时间变化的规律：

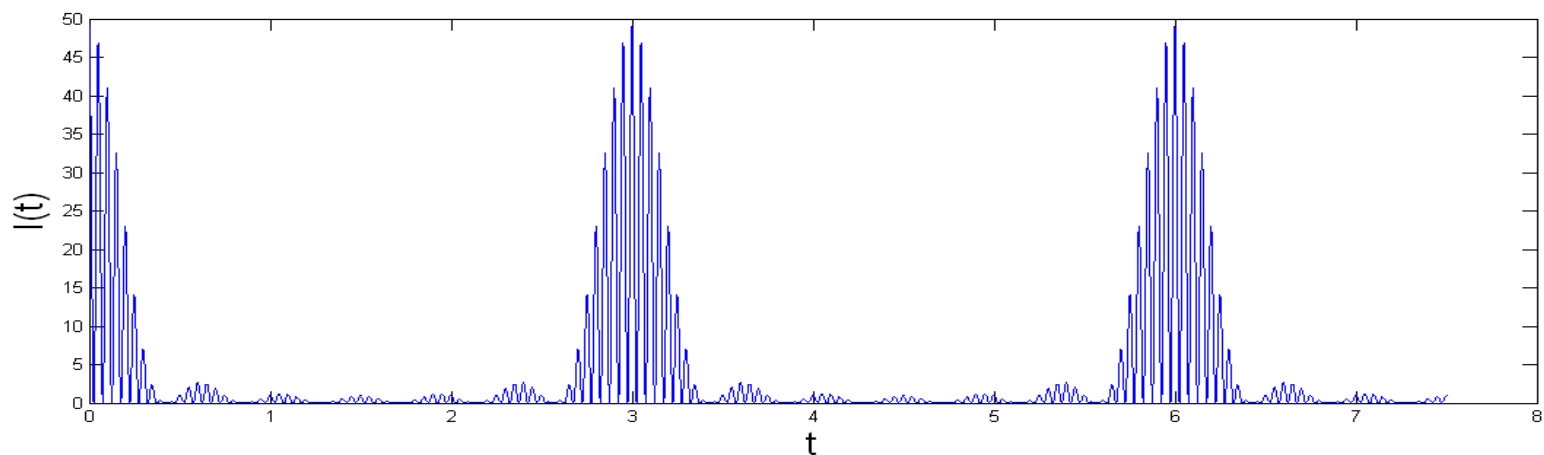
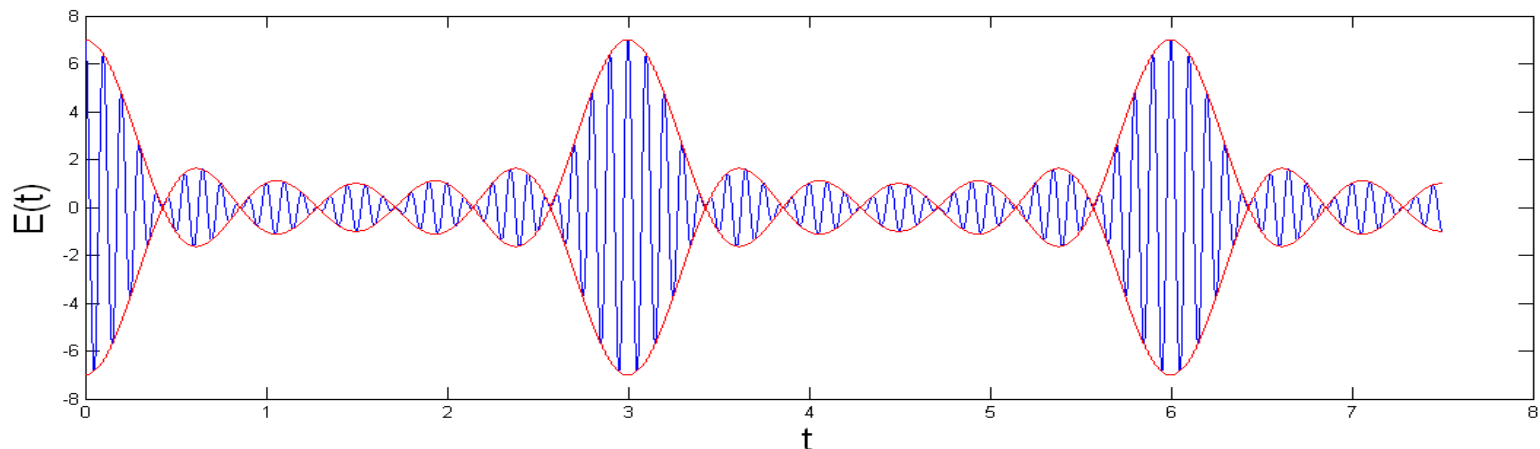
◆当  $\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha) = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  时，

$$A_{\max}(t) = NE_0 \dots\dots(13)$$

◆当  $\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha) \neq n\pi$ , 但是  $\frac{N}{2}(\Delta\omega t + \alpha) = n'\pi, n' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$A_{\min}(t) = 0 \dots\dots(14)$$

**$A(t)$ 与 $t$ 关系的曲线表示锁相激光器输出的电场  
随时间的变化规律。  
图中实线表示光波的电场强度，它以 $A(t)$ 为包络线：**





## 2.锁模基本原理(1)锁模脉冲序列的时间间隔

### (1)锁模脉冲序列的时间间隔 $\tau$

- ◆ ( 12 ) 式看出：锁模激光器输出是一系列光脉冲（实际上是宽度很窄的调制波），相继的两个脉冲的时间间隔为（从 ( 10 ) 式得：

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\Delta\nu_q} = \frac{1}{\Delta\nu_q} = \frac{2L}{C} \dots\dots(15)$$

- ◆ 它刚好等于光子在谐振腔中来回一次的时间，因此，锁相激光振荡可以看成只有一个激光脉冲在腔内来回传播。

## 2.锁模基本原理(2)脉冲的宽度

◆例子：一个锁模的Nd:YAG激光器，光学腔长**L = 150cm**，那么锁模脉冲序列相继脉冲间隔时间为：

$$\tau = \frac{2L}{C} = \frac{2 \times 150}{3 \times 10^{10}} \text{秒} = 10 \times 10^{-9} \text{秒} = 10 \text{ns}$$

**(2)脉冲的宽度  $\Delta\tau$ ：**

$\Delta\tau$  定义为等于光强 **I(t)** 从极大值降至第一个零值所需的时间：

$$\frac{N}{2}(\Delta\omega t_2 + \alpha) - \frac{N}{2}(\Delta\omega t_1 + \alpha) = \pi \dots\dots(16)$$

## 2.锁模基本原理(2)脉冲的宽度

$$\Delta\tau = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{1}{N\Delta\nu_q} = \frac{1}{N} \frac{2L}{C} \dots\dots(17)$$

**( 17 ) 式表明 :**

**脉冲宽度和激光振荡的数目N成反比。**

◆ 如果激光器工作物质的光谱带宽为  $\Delta\nu_D$  , 在  $\Delta\nu_D$  内允许N个纵模振荡 , 则 ( 17 ) 式可以改写为 :

$$\Delta\tau = \frac{1}{N} \frac{2L}{C} = \frac{1}{\Delta\nu_D N} \frac{\Delta\nu_D}{C/2L} = \frac{1}{\Delta\nu_D N} \frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu_a} = \frac{1}{\Delta\nu_D N} N = \frac{1}{\Delta\nu_D} \dots\dots(18)$$

**( 18 ) 式表明 : 锁相激光脉宽  $\Delta\tau$  是与工作物质的荧光带宽  $\Delta\nu_D$  ( 或Doppler展宽 ) 成反比的。**

## 2.锁模基本原理(2)脉冲的宽度

- ◆ **气体激光器**:增益线宽一般都很窄,  $\Delta\nu_D \approx 10^9 \text{ Hz}$ , 能够起振的纵模数目不多, 锁相后产生的脉宽一般大于 100ps。
- ◆ **固体激光器**:如Nd玻璃, 增益带宽  $\Delta\lambda_D \approx 200 \text{ \AA}$ , 锁相后, 输出脉宽可达到1ps。
- ◆ **染料激光器**:以Rh6G为例, 增益带宽  $\Delta\lambda_D \approx 500 \text{ \AA}$ , 考虑到锁模腔引入的损耗(如饱和吸收体等), 实际增益带宽约为  $\Delta\lambda_D \approx 100 \text{ \AA}$ , 在  $\lambda \approx 6000 \text{ \AA}$  附近:

$$\Delta\nu_D = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \approx 8.3 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

所以染料锁相激光脉宽

$$\Delta\tau = \frac{1}{\Delta\nu_D} \approx 0.12 \times 10^{-12} \text{ s}$$

## 2.锁模基本原理(3)锁模脉冲的峰值功率：

### (3)锁模脉冲的峰值功率：

◆由（13）式可知道，“振幅”部分：

峰值电场振幅：

$$A(t) = \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\Delta\omega t + \alpha)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)\right]} E_0 = NE_0$$

（当  $\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha) = n\pi$  时）。

◆故可得锁模脉冲的峰值功率：

$$P_p = I_p \propto A_{\max}^2(t) = N^2 E_0^2 \dots\dots(19)$$

## 2.锁模基本原理(3)锁模脉冲的峰值功率：

- ◆**注意：**当激光器没有锁相时，输出功率只和  $NE^2$  成正比（参看（7）式）因为每个模的输出功率  $\propto E_0^2$ ，N个模非相干叠加，总输出功率  $\propto NE_0^2$ 。
- ◆**由此可见：**对于同一激光器，锁相后产生的峰值功率增大了N倍，而脉宽同时收窄了，其平均功率是不会因锁相而增加的。

## 2.锁模基本原理

◆对于染料Rh6G激光器:

光学腔长  $L_{12} = 30cm$      $\Delta\nu_D = 8.3 \times 10^{12} Hz$

故可以产生的纵模数目：

$$N = \frac{\Delta\nu_D}{C/2L} = \frac{0.83 \times 10^{12}}{3 \times 10^{10} / 2 \times 30} = 1.7 \times 10^4$$

## 2.锁模基本原理

◆**结论**：把一个多纵模  $\omega_k = \omega_0 + k\Delta\omega$  激光器的位相锁定，使得  $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \text{常数}$ ，其结果是：

(1)输出一个以中心频率  $\omega_0$  为振荡频率的脉冲型调幅振荡。

(2)脉冲列的时间间隔为  $\tau = \frac{1}{\Delta\nu_q} = \frac{2L}{C}$

(3)单个脉冲的宽度为  $\Delta\tau = \frac{1}{\Delta\nu_D}$

(4)单个脉冲的峰值功率  $P_p \propto N^2 E_0^2$ ，比不锁相

时同一激光器的功率大了**N**倍。



## 2.锁模基本原理(4)锁模激光器与调Q激光的对比:

### (4)锁模激光器与调Q激光的对比:

在调Q激光器中，最窄的单脉冲宽度近似

为  $\tau = \frac{2L}{C} = \frac{1}{\Delta\nu_q}$ ，因此：

◆锁模脉宽要比调Q脉宽窄  $\left( \frac{\Delta t'}{\Delta \tau} = \frac{\Delta \nu_D}{\Delta \nu_q} = \right)$  N倍。

◆锁模脉冲峰功率要比调Q脉冲峰功率高。

◆锁模脉宽强烈依赖工作物质增益带宽  $\Delta\nu_D$ 。

( 调Q的脉宽与  $\Delta\nu_D$  关系不大 )

## 常用锁模激光器的脉宽：

工作物质	He-Ne	Ar	Nd:YAG	Ruby	Nd:Glass	Rh6G
增益线宽 $\Delta\nu_D$	$1.5 \times 10^{-9} \text{ Hz}$		$1.2 \times 10^{11} \text{ Hz}$	$6 \times 10^{11} \text{ Hz}$	$3 \times 10^{12} \text{ Hz}$	$5 \times 10^{12}$ 到 $4 \times 10^{12} \text{ Hz}$
实际获得脉宽 $\Delta t$	600ps	130ps	40ps	15ps	2ps	16fs

# 各种工作物质及其锁模产生的激光脉宽

工作物质	XeF	HeCd	Ar	GaAl As	Nd	I <sub>2</sub>	色心	HF	CO <sub>2</sub>	D <sub>2</sub> O
波长 (um)	0.351	0.325 0.442	0.514 5	0.86	1.06, 1.31	1.31	0.8~ 2.2	2.7	10.6	385
脉宽	<2ns	400ps	130ps	16ps	6ps	500p s	4ps	10p s	<1ns	<1ns

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

### (5)超短激光脉冲的时间带宽积

锁模激光产生的超短脉冲可以采用**频域与时域**的两种方法来分析。

- ◆ 虽然着眼点不同，但是反映的事实在本质上是一致的。因为时域和频域的描述函数可以通过**傅立叶变换和逆变换**唯一对应的获得。

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

### 【频域分析】：

- ◆对激光进行腔内调制的周期等于腔内纵模间隔的倒数时，（即  $T = \frac{1}{\Delta\nu_q} = \frac{2L}{C}$ ），每一纵模都会产生边带与相邻纵模耦合，从而保持各纵模具有固定的位相关系被锁定。
- ◆锁模激光是在频域上等间隔频率（等于纵模间隔  $\Delta\nu_q$ ）成分的频谱。不同成分频率的纵模群瞬时电场叠加，得到在时域上表现为一个时间序列的光脉冲。

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

### 【时域分析】：

- ◆考虑一个时间分布为高斯型脉冲在谐振腔内通过增益介质和调制元件，往返一周回到原来的位置，仍然保持着原来的高斯型脉冲形状。
- ◆当调制周期等于光在腔内往返一次的时间时，锁模激光在时域上将表现为一个周期性序列光脉冲。这个脉冲在时域上将展开成一系列等间距频率成份的频谱。

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

**【锁模光脉冲的数学描述】**：在时间范畴或频率范畴内去了解或定义一个光脉冲。

从一对傅立叶变换积分变换出发：

$$\begin{cases} V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ v(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) \exp(i\omega t) dt \end{cases}$$

对于空间中某一点，定义一个平面波光脉冲的复信号  $E(t)$ （它与该点的光电场矢量振幅  $e(\omega)$  对应）：

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2a(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \dots\dots (20)$$

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

复函数 $E(t)$ 和 $e(\omega)$ 可以分别用来在时间范畴内和频率范畴内定义一个光脉冲：

◆频率范畴：
$$e(\omega) = a(\omega) \exp[-i\phi(\omega)] \dots\dots (22)$$

定义： $a(\omega)$ : 频谱幅度  
 $\phi(\omega)$ : 频谱位相

频谱强度函数 
$$i(\omega) = e(\omega)e^*(\omega) = a^2(\omega) \dots (23)$$

$I(\omega)$ 可以用光谱仪或频谱分析器进行记录。



## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

### ◆时间范畴：

$$E(t) = A(t) \exp [i(\Phi(t) - \omega_0 t)] \dots\dots (24)$$

定义：  $A(t)$ : 频谱幅度

$\Phi(t)$ : 频谱位相

◆ (23) 式成立条件：与中心光频  $\omega_0$  比较，脉冲的频率宽度  $\Delta\omega$  很窄，（即  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ ），在这种“准单色”情况下， $A(t)$ 和 $\Phi(t)$  都是  $t$  的慢变函数。

◆时间强度函数  $I(t) = E(t) \cdot E^*(t) = A^2(t) \dots (25)$

**$I(t)$** 可以用实时快速示波器或条纹相机记录

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

◆按照Parseval理论(帕斯瓦尔定理), 一个脉冲的总能量正比于时间强度 **$I(t)$** 的或者频谱强度 **$i(w)$** 的波形下所包的

面积:

$$\mathcal{E} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt \dots\dots (26)$$

$$\mathcal{E} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} i(w) dw = \int_0^{\infty} a^2(w) dw \dots\dots (27)$$

◆表示出对一个光学脉冲的时间和频率描写之间的对称性。并且两种强度波形 **$I(t)$** 和 **$i(w)$** 之间有着一一对应的关系。

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

◆锁模激光器的变换极限：脉冲的时间 - 带宽积  $\Delta t \cdot \Delta \nu$  :

前述关于激光锁模原理的推导，做了一个不合符实情的假设，即：激光器内各纵模电场振幅均相等，从而导致锁模脉冲的宽度与频带宽度的乘积等于1的结论。

然而实际的情形应该是：一个多纵模激光器，各纵模的振幅是不相等的。在频域上可以用一个分布函数来描写。

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

### ◆用积分近似求和的方法处理方程（9）

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{k=-q}^q E_k e^{i(\omega_k t + \varphi_k)} = \sum_{k=-q}^q E_k e^{i[(\omega_0 + k\Delta\omega)t + k\alpha]} \\ &= E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{k=-q}^q e^{ik(\Delta\omega t + \alpha)} \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

◆所得到的锁模激光输出电场强度在时域上将不是  
如（12）式所示的程式：

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

$$E(t) = \frac{\sin[\frac{N}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Delta\omega t + \alpha)]} E e^{i\omega_0 t} \dots\dots(12)$$

而是具有高斯分布形式：

$$E(t) = E_0 e^{-\alpha t^2} \cdot e^{i\omega t} = E_0 e^{-\alpha t^2} \cdot e^{i(\omega_0 t + \beta t^2)} \dots\dots(28)$$

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

“振幅”部分为 $A(t) = E_0 e^{-\alpha t^2} \dots\dots(29)$

“相位”部分为 $e^{i(w_0 t + \beta t^2)} \dots\dots(30)$

◆其中， $\alpha$  决定脉冲高斯包络形状的参数

$\beta$  代表锁模系统由于采用腔内调制而造成的线性频率啁啾。

◆对应的啁啾频率为  $w(t) = w_0 + \beta t \dots\dots(31)$

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

◆利用傅立叶变换，可以求出具有（28）式表示的时域上的高斯脉冲的频谱分布特性：

$$\begin{aligned} e(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \cdot e^{(-iwt)} dt \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha-i\beta)t^2} \cdot e^{-i(w-w_0)t} dt \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{\alpha-i\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(w-w_0)^2}{4(\alpha-i\beta)}} \dots\dots(32) \end{aligned}$$

◆由此可见：时域上的高斯型光脉冲，其频域上（频谱分布）的表述也是高斯型分布。

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

◆从时域上定义高斯脉冲的脉宽为脉冲半功率之间的时间间隔。

$$\because \text{光强 } I(t) = A^2(t) = E_0^2 e^{-2\alpha t^2} \dots\dots (33)$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } I(0) = E_0^2, \text{ 在光强为 } \frac{I(0)}{2} \text{ 处, 有 } I(t) = E_0^2 e^{-2\alpha t^2} = \frac{I(0)}{2} = \frac{E_0^2}{2},$$

$$\text{因此, } e^{-2\alpha t^2} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } t = \sqrt{\frac{\ln 2}{2\alpha}}. \text{ 从而可获得脉冲半功率点间宽度为}$$

$$\text{脉冲的时间宽度 } \Delta t = 2t = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\alpha}} \dots\dots (34)$$



从频域上定义高斯脉冲频谱的带宽为脉冲宽度的半功率点之间的频率间隔。

$$\because \text{频谱强度 } i(\omega) = e(\omega) \cdot e^*(\omega) = e^2(\omega) = \frac{E_0^2}{4\pi} \cdot \frac{e^{-2(\omega-\omega_0)^2 / 4(\alpha-i\beta)}}{\alpha-i\beta} \dots (35)$$

$$\text{当 } \omega = \omega_0 \text{ 时, 有 } i(\omega) = e^2(\omega_0) = \frac{E_0^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\alpha-i\beta} \dots\dots (36)$$

$$\text{设半功率点的频率为 } \omega, \text{ 则 } i(\omega) = \frac{1}{2} i(\omega_0) = \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{\alpha-i\beta} \dots\dots (37)$$

$$\text{把 (37) 代入 (35) 式, 得 } \frac{E_0^2}{4\pi} \cdot \frac{e^{-2(\omega-\omega_0)^2 / 4(\alpha-i\beta)}}{\alpha-i\beta} = \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{\alpha-i\beta}$$

从频域上定义高斯脉冲频谱的带宽为脉冲宽度的半功率点之间的频率间隔。

马上求得： 
$$e^{-\frac{(w-w_0)^2}{2(\alpha-i\beta)}} = \frac{1}{2} \dots\dots (38)$$

∵ 半功率点间的距离为  $\Delta w = 2(w - w_0)$ ，代入 (38) 式，得

$$e^{-\frac{(\Delta w/2)^2}{2(\alpha-i\beta)}} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\Delta w}{2}\right)^2 = 2(\alpha-i\beta) \ln 2$$

$$\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{2}\right)^2 = 2(\alpha-i\beta) \ln 2, \quad \Delta\nu = \frac{1}{\pi} (2 \ln 2)^{\frac{1}{2}} (\alpha-i\beta)^{\frac{1}{2}}$$

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

◆从而获得脉冲频谱的带宽为

$$\Delta \nu = \frac{1}{\pi} (2 \ln 2)^{1/2} \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \right)^{1/2} \dots (39)$$

◆最后，从（34），（39）式得到锁模激光的时间  
- 带宽积：

$$\Delta \nu \cdot \Delta t = \frac{2}{\pi} \ln 2 \left[ 1 + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right]^{1/2} \dots (40)$$

## 时间频谱乘积：频谱强度计算

$$\begin{aligned} e(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi} \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha - i\beta)}} \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha + i\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^*(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^* \left[ e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha - i\beta)}} \right]^* \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^* e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha - i\beta)} \end{aligned}$$

$$i(\omega) = e(\omega)e^*(\omega)$$

$$= \frac{E_0}{2\pi} \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha + i\beta)} \frac{E_0}{2\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^* e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha - i\beta)}$$

$$= \frac{E_0}{2\pi} \frac{E_0}{2\pi} \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^* e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha + i\beta)} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha - i\beta)}$$

$$= \frac{E_0^2}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha - i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^* \right\} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}\alpha}$$

$$= \text{const} \times e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}\alpha}$$

由带宽的定义，令  $i(\omega) = \frac{1}{2}i(\omega_0)$ ，则  $\Delta\omega = 2(\omega - \omega_0)$ ，有

$$e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\alpha} = e^{-\frac{(\Delta\omega/2)^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 = 2\ln 2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha}$$

$$\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{2}\right)^2 = 2\ln 2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha}$$

$$\Delta \nu = \frac{1}{\pi} (2 \ln 2)^{1/2} \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta t = \left( \frac{2 \ln 2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta \nu \cdot \Delta t = \frac{2 \ln 2}{\pi} \left( 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

◆在实现锁模的各种技术措施中,  $\beta$  可以有不同的取值:

- AM调制的锁模激光系统中, 没有产生线性频移, 即  $\beta = 0$ , 那么, (40) 式给出:

$$\Delta\nu \cdot \Delta t = \frac{2}{\pi} \ln 2 \approx 0.441$$

- FM调制的锁模激光系统中, 将出现频率啁啾效应, 为了保证腔内激光脉冲往返时始终保持高斯分布, 则必须使线性因子  $\beta$  与高斯包络参数  $\alpha$  相等。  
(即  $\beta = \pm\alpha$ ), 那时, (40) 式给出:

$$\Delta\nu \cdot \Delta t = \frac{2}{\pi} \ln 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0.626$$



## 2.锁模基本原理(5)超短激光脉冲的时间带宽积

- 对碰锁模方法的激光系统中，因为光脉冲波型式双曲正割函数型（ $\text{sch}x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ ，即双曲线余弦 $\text{ch}x$ 的倒数），较繁难的分析结果给出：

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \approx 0.315$$

- ◆ 在超短激光脉冲研究中， $\Delta\nu \cdot \Delta t$  是一个及其重要的参量，它可以评价一个系统的锁模成功的程度。它也意味着，对于一个具有一定频率宽度的锁模激光系统所能产生的脉冲时间宽度的理论“**变换极限**”。

### 3. 锁模的方法

#### (1)主动锁模

◆ 用一定的调制频率  $\omega_m = \Delta\omega$  (纵模间距)

周期性地改变谐振腔内振荡模的振幅（损耗）或者相位（光程）；

◆ 对激光纵模  $\omega_q$  调制后产生边频  $\omega_q \pm \omega_m$  ,

与  $\omega_{q-1} = \omega_q - \omega_m$  和  $\omega_{q+1} = \omega_q + \omega_m$  重叠一致

模之间的相互作用，使所有模在该调制下达到同步形成锁模脉冲。

## 3. 锁模的方法

### (2) 被动锁模

在腔内插入饱和吸收体，类似被动Q开关。

**不同之处：**饱和吸收体的上能级寿命特别短，即饱和恢复时间极快，才获得锁模脉冲。

### (3) 同步泵浦锁模

用一台锁模激光器的脉冲系列泵浦另一台激光器，调制增益实现锁模的方法：要求两台激光器的腔长要匹配。

**优点：**脉冲宽度更小，波长通常可调谐。

### 3. 锁模的方法

#### (4) 自锁模

当激光器腔内激光物质本身的非线性效应足够强，以保持各个振荡纵模有确定的初始相位关系，不需要外界元件插入：

**Ti:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>激光器   ps-fs量级**

## 4.主动锁模激光器

### (1)振幅调制锁模

◆把激光器看作一个频率为  $\omega_0$  的光频振荡器，产生的载波电场为

$$E(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \dots\dots(41)$$

◆采取技术措施：在激光器腔内插入一调制器，并令调制器的透过率T以角频率  $\omega_m$  周期的变化，使得腔内载波的电场受到一个光学调幅波

$$A_m = E_0 (1 + \cos \omega_m t) \dots\dots(42)$$

## 4.主动锁模激光器

◆从而有：

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 (1 + \cos w_m t) \cos(w_0 t + \phi_0) \\ &= E_0 \cos(w_0 t + \phi_0) + E_0 \cos w_m t \cos(w_0 t + \phi_0) \\ &= E_0 \cos(w_0 t + \phi_0) + \frac{E_0}{2} \cos[(w_0 + w_m)t + \phi_0] + \frac{E_0}{2} \cos[(w_0 - w_m)t + \phi_0] \dots\dots(43) \end{aligned}$$

◆由此可见：经过通光频率的调制器作用后，载波  
将形成三个频率：

- (1) 基波  $w_0$
  - (2) 高边频波  $w_0 + w_m$
  - (3) 低边频波  $w_0 - w_m$
- 并且此时三个频率的光波都具有相同的初位相  $\phi_0$

## 4.主动锁模激光器

◆拓展到更普适的情况：例如  $A_m$  是一个周期为  $T$  的任意调制函数，按傅立叶展开，可分解为许多三角函数之和：

$$A_m^{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_m t + b_k \sin k\omega_m t) \dots\dots (44)$$

## 4.主动锁模激光器

◆式中,

$$\omega_m = 2\pi\nu_m = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_m dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_m(t) \cos k\omega_k t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_m(t) \sin k\omega_k t dt$$



## 4.主动锁模激光器

◆当 $k=0$ 时，有  $E(t) = \frac{a_0}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

◆当 $k=1$ 时，有

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{a_0}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{a_1}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_m)t + \varphi_0] + \\ & \frac{a_1}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_m)t + \varphi_0] + \frac{b_1}{2} \sin[(\omega_0 + \omega_m)t + \varphi_0] + \\ & \frac{b_1}{2} \sin[(\omega_0 - \omega_m)t + \varphi_0] \dots\dots (45) \end{aligned}$$

◆当 $k=2,3,4\dots\dots$ 时，亦可求出相应的 **$E(t)$** 。

## 4.主动锁模激光器

◆如果我们特意把调制频率设计成：

$$\omega_m = 2\pi\nu_m = \Delta\omega_q = 2\pi(\Delta\nu_q)$$

◆则**E ( t )** 中包含有频率为：

$$\omega_q = \omega_0 \pm \Delta\omega_q q (\text{或} \nu_q = \nu_0 \pm \Delta\nu_q q), q = 0, 1, 2, 3, \dots$$

的频率成份，而  $\omega_q$  正好是谐振腔的第**q**个纵模，  
且各振荡纵模  $\omega_q$  与  $\omega_0$  有着相同的初相位。

## 4.主动锁模激光器

### 激光器的振荡建立与演变的过程：

◆在最靠近激光物质增益曲线峰值波长的纵模  $\omega_0$  首先开始振荡，由于腔内调制器以  $\omega_m = \Delta\omega_q$  频率调制的结果。以相同的初位相  $\varphi_0$  激发了两个边频  $(\omega_0 \pm \Delta\omega_q)$ （亦正好是两个腔纵模）。

◆它们经腔内增益介质放大后，亦同样受到调制器的损耗调制，并各自激发出一个新的边频

$$[(\omega_0 \pm \Delta\omega_q) \pm \Delta\omega_q] = (\omega_0 \pm 2\Delta\omega_q)$$

## 4.主动锁模激光器

◆通过腔内调制，把各纵模的相位锁定了。谐振腔的总的激光电场强度为：

$$E(t) = \sum_{k=-q}^q E_k(0) \cos[(\omega_0 + k\Delta\omega_q)t + \varphi_0] \dots\dots(46)$$

◆考察 $t=0$ 时，调制损耗为零（或某一极小值），此时纵模振幅达极大，显然  $\varphi$  必然是**0或**  $\pi$ 。

## 4.主动锁模激光器

◆对于：

$$\left. \begin{aligned} t = T &= \frac{2L}{C} = \frac{1}{\Delta\nu_q} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_q} \\ t = 2T &= \frac{2}{\Delta\nu_q} = 2\frac{2\pi}{\Delta\omega_q} \\ &\dots\dots\dots \\ t = nT &= n\frac{2\pi}{\Delta\omega_q} \end{aligned} \right\}$$

各纵模振幅均能达到极大值。

## 4.主动锁模激光器

◆经相位锁定后的各纵模振幅叠加的结果（46）式，  
将会出现重复周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_q} = \frac{1}{\Delta\nu_q} = \frac{2L}{C}$$

的一个脉冲序列。

## 4.主动锁模激光器

### ◆调幅锁模的技术措施：

在主动锁模的AM调制方法中主要有电光和声光两类，因为声光调制功耗低，调制度高和热稳定性好等优点，在实际应用上最多。

在声光调制器中多采用驻波工作方式，故此，损耗调制频率刚好等于超声频率的两倍。一般轴向透射光均取零级衍射光。当（典型的）谐振腔长度为 **$L=150\text{cm}$** 时，超声频率

$$\nu_s = \frac{\Delta\nu_q}{2} = \frac{1}{2} \frac{C}{2L} = 50\text{MHz}$$

## 4.主动锁模激光器

### (2) 相位调制锁模

激光腔内置一个调相装置（亦即调频装置），也能获得锁模效果。

例如，腔内装一压电晶体（石英），当加上一定电压时，晶体将会伸长、缩短，（也可以把腔镜附在一压电陶瓷上）从而变更谐振腔的有效程长，以调变激光振荡输出的频率。

◆调相（FM）的特点是：光波振幅不变，相位以  $\nu_m$  频率变化，即：

$$E(t) = E_0 \cos[2\pi\nu_0 t + \varphi_c \cos 2\pi\nu_m t] \dots\dots(47)$$

式中  $\varphi_c$  为调相系数。



## 4.主动锁模激光器

◆ **频率域：** 调相后的激光频率成分仍由一系列边频光所组成。电场可以表述为：

$$E(t) = E_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(\varphi_c) \cos[2\pi(\nu_0 + n\nu_m)t] \dots\dots (48)$$

式中  $J_n(\varphi_c)$  是贝塞尔函数。

**可见：** 这些边频光都有一致的相位，并且与中央纵模

$\nu_m$  一致。它们具有相等的频率间隔

( 令  $\nu_m = \Delta\nu_q$  )。故此，当它们把相应的纵模

激发起来并相互耦合时，将出现锁模的激光脉冲列。

## 4.主动锁模激光器

### ◆时间域考察调相锁模过程：

◆由于位相被周期的调制，故当光通过调制器的时候， $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$  则该光束此时引起一个频移（腔的有效长度改变了），其频移的正负、大小由  $\frac{d\Phi}{dt}$  决定。

◆在下一周期（ $T + t$ ），该光束再次抵达调制器时，又因  $\frac{d\phi}{dt} \neq 0$ ，从而继续引起频移。循此下去，此光束将被频移至增益曲线之外而最后消失。

## 4.主动锁模激光器

◆故只有在与  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  相对应的时刻经过调制的光，  
在频率上才无移动并可在腔内往返多次而被不断  
的放大。最后形成周期为

$$T = \frac{2L}{C} \text{ 的脉冲列。}$$

## 4.主动锁模激光器

◆由于  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  处是  $\phi$  调制曲线的极大值或极小值处，故在激光振荡和调制电压之间的位相关系存在双重性。即存在自发相位开关效应。从而造成激光输出脉冲会在这两种情况随即漂移。产生不稳定性。

故在实际上不常采用此法锁模。

## 4.主动锁模激光器

### (3)主动锁模激光器的结构

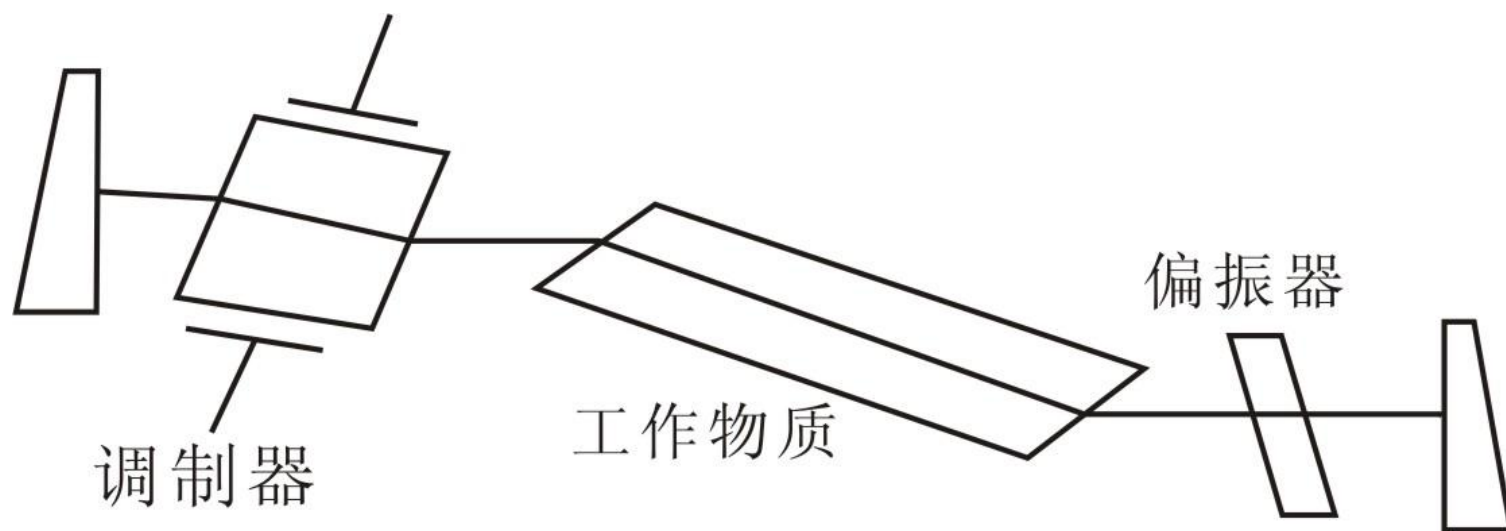


图3. 2-4 主动锁模激光器结构示意图