# 电动力学

## 第一章：电磁现象的基本规律，电磁场的边值关系

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

*hyang@ustc.edu.cn*

March 21, 2019

# Maxwell 方程组：

普遍情形中，Maxwell 方程组可写为：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_f$$

式中的 $\rho_f$ 和 $\vec{J}_f$ 只代表自由的电荷、电流分布.

1. 上述方程组通常称为微分形式的 Maxwell 方程组.

**说明：**

解决实际问题时，还需要补充一些描写介质电磁性质的实验关系，例如：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

最后一式是导体中的欧姆定律.

# 积分形式的 Maxwell 方程组:

Maxwell 方程组的积分形式如下:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{\sigma} = Q_f$$

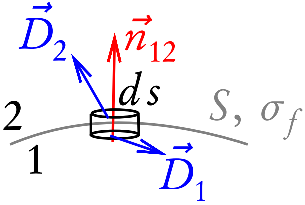
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{\sigma}$$

式中 $I_f$ 为穿过曲面 $S$ 的总自由电流强度, $Q_f$ 是闭合曲面 $S$ 内包含的自由电荷总量.

1. Maxwell 方程组的积分形式的一个重要用途是据此可以求出电磁场量在介质分界面两侧的边值关系.




设想将

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_f$$

应用于横跨两种介质的分界面的一个扁平状柱面上. 注意到,

$$Q_f = \sigma_f\, ds$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

$$= \vec{D}_2\cdot\vec{n}_{12}ds + \vec{D}_1\cdot\vec{n}_{21}ds$$

$$= \vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) ds$$

所以,

$$\vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f$$

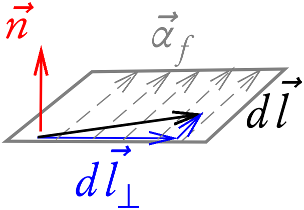
同理, 根据磁感应强度的无散性

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

可证:

$$\vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

# 面电流的线密度:




物理背景:

- 高频电流的趋肤效应
- 磁性材料表面的磁化电流

面电流实际上是一种平均宏观效应. 设想表面的厚度趋于零, 则通过电流的横截面变为横截线. 定义自由电流线密度 $\vec{\alpha}_f$, 其大小等于垂直通过单位横截线的电流强度:

$$\alpha_f = \Delta I / \Delta l_\perp$$

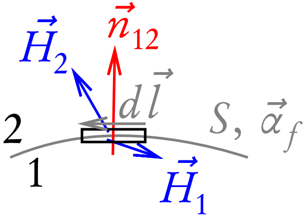
这样, 通过表面上某线元 $d\vec{l}$ 的电流强度为:

$$\begin{aligned} dI &= \alpha_f dl_\perp = \vec{\alpha}_f \cdot (\vec{n} \times d\vec{l}_\perp) \\ &= \vec{\alpha}_f \cdot (\vec{n} \times d\vec{l}) \end{aligned}$$

或者等价地,

$$dI = d\vec{l} \cdot (\vec{\alpha}_f \times \vec{n})$$

# 切向分量的跃变：




设想将

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

应用于横跨两种介质的分界面的一个扁平状回路上．注意到，

$$I_f = d\vec{l}\cdot(\vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{12})$$

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} \approx 0\,,$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} \approx (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot d\vec{l}$$

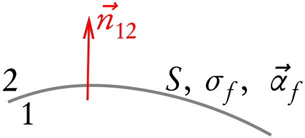
所以：$\vec{H}_2^{(t)} - \vec{H}_1^{(t)} = \vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{12}$，式中 $\vec{H}_i^{(t)}$ 表示磁场强度 $\vec{H}_i$ 在分界面上的切向投影．求此式与单位法矢量 $\vec{n}_{12}$ 的矢量积，又可将其改写为：

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

同理，由法拉第定律知：

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

## 电磁场边值关系小结:




电磁场量在两种介质分界面上需要满足的边值关系是:

$$\vec{n}_{12}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f$$
$$\vec{n}_{12}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$$
$$\vec{n}_{12}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$
$$\vec{n}_{12}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f$$

**点评:**

在介质分界面两侧,

- $\vec{E}$ 的切向分量连续;
- $\vec{B}$ 的法向分量连续.

# 介质电磁方程的边值关系举例:

1. 极化电荷体分布与极化强度的关系是: $\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$, 此式写成积分形式, 即为:

$$Q_P = -\oint_S d\vec{s}\cdot\vec{P}$$

将其应用于两种介质的分界面上, 即有:

$$\sigma_P = -\vec{n}_{12}\cdot(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

2. 稳恒电流的连续性方程 $\nabla\cdot\vec{J} = 0$ 可以等价地改写为积分形式,

$$\oint_S d\vec{s}\cdot\vec{J} = 0$$

因此,

$$\vec{n}_{12}\cdot(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0, \qquad \rightsquigarrow \quad \vec{n}_{12}\cdot(\sigma_2\vec{E}_2 - \sigma_1\vec{E}_1) = 0$$

## 作业：

1. 请证明：在静电情形下，导体外侧的电场线总是与导体表面垂直；在稳定电流情形下，导体内侧的电场线总是平行于导体表面.

2. 内外半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向流有恒定均匀自由电流 $\vec{J}_f$. 设导体的磁导率为 $\mu$，求空间中的磁感应强度和磁化电流分布.

3. 一个半径为 $R$ 的介质球的极化强度矢量为

$$\vec{P}(\vec{r}) = k\vec{r}$$

式中 $k$ 为常数，$\vec{r}$ 为从球心出发的位置矢量. 请计算介质球内部的极化电荷体密度 $\rho_P$ 及介质球表面上的极化电荷面密度 $\sigma_P$.

## 矢量分析的几个定理:

矢量场的体积分和面积分有几个重要定理，其中最基本的是奥高散度定理和 Stokes 旋度定理.

- 设 $\Omega$ 为三维空间中某区域的体积，其边界为闭合曲面 $\partial\Omega$. 用 $\vec{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法向单位矢量，则奥高散度定理表为:

$$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{A}\, d^3x = \oiint_{\partial\Omega} d\sigma\, \vec{n}\cdot\vec{A}$$

- 设 $S$ 为三维空间中的一个有向开曲面，其单位法矢量的方向与形成其边界的闭合曲线 $\partial S$ 的绕行方向形成右手法则，则 Stokes 旋度定理表为:

$$\iint_S d\sigma\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \oint_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

其他的几个定理涉及用标量场的梯度实现矢量场. 设 $\psi$ 和 $\varphi$ 是三维空间的标量场, 则:

1. $$\iiint_{\Omega} \nabla\psi d^3x = \oiint_{\partial\Omega} d\sigma\vec{n}\psi$$

2. $$\iiint_{\Omega} \nabla \times \vec{A}\, d^3x = \oiint_{\partial\Omega} d\sigma\vec{n} \times \vec{A}$$

3. $$\iiint_{\Omega} \left[\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\right] d^3x = \oiint_{\partial\Omega} d\sigma\varphi\vec{n} \cdot \nabla\psi$$

4. $$\iint_{S} d\sigma\vec{n} \times \nabla\psi = \oint_{\partial S} \psi d\vec{l}$$

实际上, 本页的这几个定理都不是基本的. 它们都可以看作是奥高散度定理和 Stokes 旋度定理的推论.

举例证明如下.

设 $\vec{a}$ 为一任意选择的非零常矢量, $\nabla\cdot\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=0$. 注意到:

$$\nabla\cdot(\psi\vec{a})=\nabla\psi\cdot\vec{a}+\psi\nabla\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\nabla\psi$$

我们有:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\iiint_\Omega\nabla\psi d^3x&=\iiint_\Omega\nabla\cdot(\psi\vec{a})d^3x=\oiint_{\partial\Omega}d\sigma\vec{n}\cdot(\psi\vec{a})\\&=\vec{a}\cdot\left[\oiint_{\partial\Omega}d\sigma\vec{n}\psi\right]\end{aligned}$$

鉴于非零常矢量 $\vec{a}$ 在选择上的任意性, 上式的成立就暗示着下式的成立:

$$\iiint_\Omega\nabla\psi d^3x=\oiint_{\partial\Omega}d\sigma\vec{n}\psi$$

这正是前页第一个定理的内容. 证毕. 其他各定理均可用类似的逻辑加以验证.

# 集中回答同学们提出的问题:

**Question 1:** 是否存在散度、旋度均为零的矢量场?

解答: 是的. 例如常矢量 $\vec{c}$ 就同时满足 $\nabla\cdot\vec{c}=0$ 和 $\nabla\times\vec{c}=0$. 再考虑其他的可能性. 采取直角坐标系,

$$\vec{V}=V_x\,\vec{i}+V_y\,\vec{j}+V_z\,\vec{k}$$

此矢量场的散度、旋度分别是:

$$\nabla\cdot\vec{V}=\partial_x V_x+\partial_y V_y+\partial_z V_z$$

$$\nabla\times\vec{V}=\vec{i}(\partial_y V_z-\partial_z V_y)+\vec{j}(\partial_z V_x-\partial_x V_z)+\vec{k}(\partial_x V_y-\partial_y V_x)$$

欲使 $\nabla\cdot\vec{V}=0$, 只要 $\nabla\cdot\vec{V}$ 的表达式的右端各项分别为零即可. 所以可取: $V_x=V_x(y,\,z)$, $V_y=V_y(z,\,x)$ 和 $V_z=V_z(x,\,y)$.
为简单计, 进一步假设:

$$V_x=f(y)\,g(z),\quad V_y=g(z)\,h(x),\quad V_z=h(x)\,f(y).$$

从而:

$$\nabla\times\vec{V}=\vec{i}\,h(x)\,[f'(y)-g'(z)]+\vec{j}f(y)\,[g'(z)-h'(x)]+\vec{k}\,g(z)\,[h'(x)-f'(y)]$$

显然，欲使 $\nabla\times\vec{V}=0$，只要上式右端各个方括号为零即可．于是：

$$h(x)=x+c_1,\quad f(y)=y+c_2,\quad g(z)=z+c_3$$

这里的 $c_i\ (i=1,2,3)$ 是三个积分常数．若忽略之，则我们找到的散度、旋度均为零的非平庸矢量场就是：

$$\vec{V}=yz\,\vec{i}+zx\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$$

**警告：**

散度、旋度均为零的矢量场在静电、静磁现象中随处可见．例如，均匀带电的导体球在球外空间激发的静电场场强矢量是：

$$\vec{E}=\frac{Q\,\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0\,r^2},\quad r>R.$$

此处采用了球坐标系，且 $R$ 为导体球半径．因为，

$$\nabla=\vec{e}_r\partial_r+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\quad\rightsquigarrow\quad\nabla r=\vec{e}_r,\quad\nabla\theta=\frac{\vec{e}_\theta}{r}.$$

我们有：

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)=0,\qquad \nabla\times\vec{e}_r=0.$$

于是：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\cdot\left[\sin\theta\ \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right]\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\sin\theta\ \cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cos\theta\ \frac{\vec{e}_\theta}{r}\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)=0,\\
\nabla\times\vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\times\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{1}{r^2}\times\vec{e}_r\\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{r^3}\ \vec{e}_r\times\vec{e}_r=0.
\end{aligned}$$

即这样的矢量场无散也无旋. 请诸位自行验证 均匀载流直导线在导线外部空间激发的静磁场也是既无散亦无旋的矢量场.

**Question 2:** 为什么仅仅已知矢量场的旋度无法唯一地确定该矢量场？

**解答：** 有同学对这一问题还做了补充提问：一个矢量 $\vec{A}$ 有三个独立分量，而旋度 (记为 $\vec{B}$) 若已知的话也是三个方程：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

那么为什么说已知 $\vec{B}$ 不能唯一地确定 $\vec{A}$？

理由很简单。
因为梯度场无旋，$\nabla \times \nabla\varphi = 0$，　所以，若矢量场 $\vec{A}$ 的旋度为 $\vec{B}$，则有：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\varphi)$$

即 $\vec{B}$ 既是矢量场 $\vec{A}$ 的旋度，也是矢量场 $(\vec{A} + \nabla\varphi)$ 的旋度．鉴于规范函数 $\varphi$ 在选择上的任意性，这样的矢量场原则上有无穷多．所以，仅仅知道 $\vec{B}$ 不足以确定以其作为旋度的矢量场．

Question 3: 为什么说要唯一地把一个矢量场确定下来需要同时已知其散度和旋度？

解答： 对这一问题的严格回答是数学中的 Helmholtz 定理的内容. 现在对此给出一个构造性的证明. 因为，

$$\int d^3x' \, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \, \vec{A}(\vec{x}') = \vec{A}(\vec{x})$$

且：

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

我们有：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \int d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \vec{A}(\vec{x}') = \int d^3x' \left[ -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right] \vec{A}(\vec{x}') \\ &= \nabla^2 \left[ -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right]\end{aligned}$$

这是一个矢量场的 Laplace 运算. 如何处理它呢？

注意到在 Cartesian 直角坐标系中：

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{u} &= \partial_i\partial_i(u_j\vec{e}_j) = \vec{e}_j\partial_i\partial_i u_j = \vec{e}_j\partial_i\partial_m u_n\, \delta_{im}\delta_{jn} \\ &= \vec{e}_j\partial_i\partial_m u_n\left[(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}) + \delta_{in}\delta_{jm}\right] \\ &= \vec{e}_j\partial_i\partial_m u_n\left[\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mnk} + \delta_{in}\delta_{jm}\right] = -\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) + \nabla(\nabla\cdot\vec{u})\end{aligned}$$

这个结果是矢量表达式，并不依赖于坐标系的选择. 取：

$$\vec{u} = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

则有：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int d^3x'\,\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] - \frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int d^3x'\,\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \\ &= \nabla\times\vec{F} + \nabla\varphi\end{aligned}$$

即任一矢量场都可以表达为一个旋度场与一个梯度场的矢量和. 上式中出现的 $\vec{F}$ 和 $\varphi$ 可进一步化简如下：

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int d^3x' \frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times\vec{A}(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \nabla'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times\vec{A}(\vec{x}') \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \nabla'\times\left[\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] + \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{[\nabla'\times\vec{A}(\vec{x}')]}{|\vec{x}-\vec{x}'|}
\end{aligned}
$$

此式右端第二项取决于矢量场 $\vec{A}$ 的旋度. 第一项可以利用矢量积分定理:

$$
\int \nabla'\times\vec{u}\, d^3x' = \oint d\vec{s}'\times\vec{u}
$$

化为无穷远边界面上的面积分. 只要 $\vec{A}$ 在 $r\to\infty$ 极限下比 $1/r$ 衰减的快, 这个面积分就是零. 所以, 矢量场 $\vec{A}$ 的无散部分

$$
\vec{F} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{[\nabla'\times\vec{A}(\vec{x}')]}{|\vec{x}-\vec{x}'|}
$$

完全由其旋度确定.

另一方面，

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int d^3x'\,\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\vec{A}(\vec{x}')\\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\nabla'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\vec{A}(\vec{x}')\\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{A}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] - \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{[\nabla'\cdot\vec{A}(\vec{x}')]}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\end{aligned}$$

此式右端第二项取决于矢量场 $\vec{A}$ 的散度. 第一项可以利用奥高散度定理:

$$\int \nabla'\cdot\vec{u}\,d^3x' = \oint d\vec{s}'\cdot\vec{u}$$

化为无穷远边界面上的面积分. 只要 $\vec{A}$ 在 $r\to\infty$ 极限下比 $1/r$ 衰减的快，这个面积分也是零. 所以，矢量场 $\vec{A}$ 的无旋部分

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{[\nabla'\cdot\vec{A}(\vec{x}')]}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

完全由其散度确定. 至此 Helmholtz 定理证毕.