第 二 十 六 讲

上次课：

- 绝对时空观的困难（麦-莫实验）
- 相对时空观，**Lorentz** 变换, 四维空间， $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$
- 标量、矢量、张量 …

4．速度及四维速度矢量

假定在 S 系中考察一个物体的运动，其速度的定义是 $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$。现在假定 S' 系相对 S 系以速度 v 沿着 x 轴运动，则在 S' 系中同一粒子的速度定义为 $\vec{u}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$。因为在相对论时空观中，时间和空间是一起变换的，由 Lorentz 公式得

$$\begin{aligned} dx' &= (dx - v dt)\gamma_v \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v \end{aligned} \qquad (11.2.11)$$

用上面第四个方程除前三个，则得

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{(dx - v dt)\gamma_v}{\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \end{cases} \qquad (11.2.12)$$

上式决定了两个参考系中速度的变换，这就是相对论中的速度合成法则。在极限 $v \ll c$ 的情况下（同时要求 $|\vec{u}| \ll c$），可将分母展开，上式变成经典力学中速度的矢量合成法则，即

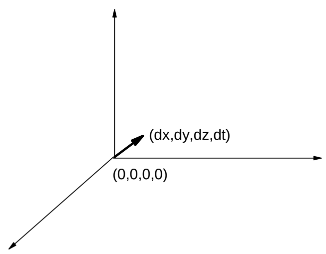
$$\begin{cases} u'_x = u_x - v, \\ u'_y = u_y, \\ u'_z = u_z, \end{cases} \tag{11.2.13}$$

根据这些结果可以回答之前几个 Puzzle：

1）为什么水波和电磁波都是波，换一个坐标系观测水波，其速度变化甚至变为 **0**（像那位英国科学家一样骑着马追泰晤士河上的一个水孤波），但电磁波却从来不变（**M-M** 实验）？ 原因是水波的运动 $u << c$，而电磁波的速度 $u = c$。将 $\vec{u} = c\hat{x}$ 带入（11.2.12），发现 $\vec{u}' = u_x^{'}\hat{x},\ u_x^{'} = \dfrac{c-v}{1-vc/c^2} \equiv c$。这是一个多么惊人的结果？！**当且仅当我们考察的“物质”的运动速度为光速时，无论如何换坐标系都不能改变其运动速度的观测值！**

2）可否改变坐标系运动速度 ***v***，使得原本低速运动的粒子在另一个坐标系的运动速度“超”光速？**答案是“否”。即使我们以光速反向运动，根据（11.2.12）我们发现** $u'_x = \dfrac{u_x + c}{1 + cu_x / c^2} = c$**，而当坐标系速度小于光速时，粒子速度也必然小于光速。也就是说，我们最多能使得粒子的相对运动速度达到光速，而不能超过光速！**

注意到速度的变换公式很复杂，不满足四维矢量的变换公式，这是因为三维空间速度的定义不是相对论协变的。 如右图所示，在 S 系中测量粒子运动的速度，须定义 2 个事件，粒子在 t = 0 时刻在原点（时空坐标（0，0，0，0）)，粒子在 dt 时刻在 $d\vec{r}$ 这一点（时空坐标（dx，dy，dz，dt））. 三维速度的定义是 $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - 式中分子是三维矢量，很容易推广到四维协变形式 $x_\mu = \{\vec{r}, ict\}$。问题出在分母上：dt ***不是一个四维标量！其在不同惯性系中测量值不同***！为了解决这个问题，我们知道 2 个事件之间的四维时空间隔



$$\left(ds\right)^2 = -dx_\mu dx_\mu = \left(cdt\right)^2 - d\vec{r}\cdot d\vec{r} \qquad (11.2.14)$$

是一个标量，**其在不同惯性系中的测量值不变**。可以据此定义一个具有时间量纲的标量

$$d\tau = ds/c = dt\sqrt{1-\vec{u}\cdot\vec{u}/c^2} = dt\sqrt{1-\beta_u^2} \qquad (11.2.15)$$

用来替代 dt . 考察 $d\tau$ 的物理意义。**注意到其与坐标系无关，因此我们可以选取与粒子一起运动的坐标系来测量它**。此时我们有 $\beta_u^2 = 0$，因此得到 $d\tau = dt$ 。***故*** $d\tau$ ***的物理意义为： 在粒子静止的坐标系中测量的两个事件之间的时间差***。***通常我们也把*** $d\tau$ ***称作“固有时”- Proper Time***。对两个事件的时间间隔 dt ，在***与粒子相对运动的坐标系中***测到的值为

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta_u^2}} = \gamma_u d\tau \qquad (11.2.16)$$

这个时间间隔值比与运动粒子相对静止的坐标系中测得的“固有时”增大了 $\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$ 倍 – 这就是所谓“***运动时钟变慢***”效应（这里的运动时钟指得是在与粒子相对运动的坐标系中的“时钟”）。既然“固有时”是个与坐标变换无关的具有时间量纲的标量，我们可据此定义一个四维矢量（四维速度）：

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_u\{\vec{u}, ic\} \qquad (11.2.17)$$

它显然是在 Lorentz 变换下协变的，因为分子是个四维矢量而分母是个四维不变量。这个四维矢量中三维空间部分与三维速度矢量相关（但不是一回事！因为运动的时钟测得的时间不是固有时，需做修正 --- 此即为 γ_u 的来源！）。

Tips：对理论物理学家来说，最重要的就是对任何一个三维矢量如何正确的找到它的四维伴侣！你试试其他的三维矢量，能否自己找到它们的伴侣？

§ 11.3　麦克斯韦方程的协变形式

根据相对性原理要求，作为描述电磁体系物理规律的麦克斯韦方程组应当在 Lorentz 变换下协变。下面我们就将我们所关心的方程一一写成在 Lorentz 变换下

协变的形式

1．电荷守恒定律 - 四维电流矢量

电荷密度和电流密度之间满足连续性方程，

$$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{11.3.1}$$

此方程是在某一个坐标系（记为 S 系）下写出的，在 S'系中 $\vec{j},\rho$ 都应相应变化成 $\vec{j}',\rho'$。根据相对性原理，（11.3.1）的方程形式应当洛伦兹变换下不变。因为 $(\vec{\nabla},\partial(ict))$ 构成一个四维矢量，假如

$$J_\mu=(\vec{j},ic\rho) \tag{11.3.2}$$

也构成一个四维矢量，则（11.3.1）式可以写成相对论不变的形式：

$$\partial_\mu J_\mu=0 \tag{11.3.3}$$

为书写方便，式中 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 记为 ∂_μ。***下面我们证明*** $(\vec{j},ic\rho)$ ***确实构成一个四维矢量。实验显示，电荷是洛伦兹不变量，亦即 --- 一个带电体在任意一个惯性系下测得的电荷量均相同，这一实验事实将成为我们证明的关键。***

设在 S 系中有一体积元 $\Delta\Omega$，其中电荷以速度 u 沿 x 方向运动，体积元 $\Delta\Omega$ 中的总电荷为 $\Delta Q=\rho\Delta\Omega$，其中 ρ 为 S 系中测量的电荷密度。在与电荷相对静止的参考系 S_0 中，电荷速度为零，电荷密度为 ρ_0，相应的体积元为 $\Delta\Omega_0$，根据电荷的洛伦兹不变性，我们有

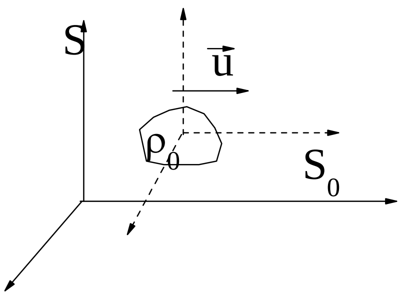
$$\rho\Delta\Omega=\rho_0\Delta\Omega_0 \tag{11.3.4}$$

由于 S_0 相对于 S 系以速度 $\vec{u}$ 运动，则两个坐标系的时空微元的变换关系为

$$\Delta x_0=(\Delta x-u\Delta t)\gamma_u,\ \Delta y_0=\Delta y,\ \ \Delta z_0=\Delta z,\ \Delta t_0=\left(\Delta t-u\Delta x/c^2\right)\gamma_u \tag{11.3.5}$$

在 S 系中测量运动物体的“长度”时必须同时进行，亦即，$\Delta t=0$。将其带入上式，我们发现两参考系之间的体积元的关系为

$$\Delta\Omega_0 = dx_0 dy_0 dz_0 = \gamma_u dx dy dz = \gamma_u \Delta\Omega \qquad (11.3.6)$$



我们注意到同一个带电微元，其体积在相对其运动的坐标系中测量时（$d\Omega$）比静止坐标系测量出的结果$d\Omega_0$小，这就是所谓的“*运动物体长度收缩*”的概念。把（11.3.6）式代入（11.3.4）式，则得

$$\rho = \rho_0 \gamma_u \qquad (11.3.7)$$

将上式代入电流密度的表达式发现

$$\vec{j} = \rho\vec{u} = \rho_0 \gamma_u \vec{u} \qquad (11.3.8)$$

因为ρ_0为四维不变量，（11.3.8）式显示

$$(\vec{j}, ic\rho) = \rho_0(\gamma_u \vec{u}, ic\gamma_u) = \rho_0 u_\mu$$

正好构成一个正比于四维速度的四维矢量，因此电流守恒定律是满足相对论协变性要求的。

Tips: 其实写出正确的四维速度，又知道了电荷是个 Lorentz 不变量，（11.3.8）是非常容易预期的。

2．电磁势方程的协变形式

电磁场可以用矢势$\vec{A}$和标势φ来描写，在洛伦兹规范条件下，电磁势方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{A}\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu_0\vec{j}\\ -\rho/\varepsilon_0\end{pmatrix} \qquad (11.3.9)$$

式中$\vec{A}$和φ应满足洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (11.3.10)$$

若我们定义一个四维矢量：

$$A_\mu = (\vec{A}, i\frac{\varphi}{c}) \qquad (11.3.11)$$

则（11.3.9）式的电磁势方程可以写为

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \qquad (11.3.12)$$

洛伦兹条件可以写为

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (11.3.13)$$

(11.3.12)式很清楚地显示：若我们要求 Maxwell 方程在 Lorentz 变换下协变，则 A_μ 一定是一个四维矢量，因为等式右方的 J_μ 为一四维矢量，等式的左方亦应为一四维矢量，由于 $\Box^2$ 为一标量，故 A_μ 为—四维矢量，称为四维势。这意味着矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 在不同的坐标下会相互耦合在一起。

Tips：这里的逻辑与之前有点不同 -- 根据 M-M 实验推断 Maxwell 方程组及所有相关的方程一定是 Lorentz 协变的。根据这些方程的协变性，我们断定 A_μ 为四维矢量。

3. 电磁场张量

现在我们来讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式，电磁场强度 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 可以用电磁势 $\vec{A}$ 和 φ 表示，即

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

电磁场强 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 不是四维矢量。注意到$(\vec{\nabla}, \partial(ict))$ 构成四维矢量，$(\vec{A}, i\frac{\varphi}{c})$ 也构成四维矢量，显然上式右边是两个四维矢量∂_μ, A_ν 之间的数学运算。排除降阶的缩并运算（左边不是标量）、只能是升阶的并矢运算。再考虑到对称性，发现等式右边只能是一个反对称的二阶张量。综合上述分析，可定义

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (11.3.14)$$

$F_{\mu\nu}$ 是四维二阶反对称张量，满足 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，称为电磁场张量。直接结算可得其

具体形式为

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0\end{bmatrix} \tag{11.3.15}$$

利用$F_{\mu\nu}$和J_{μ}，我们可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$$
$$\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$$

合并写成一个一阶的 Lorentz 协变的形式：

$$\partial_{\mu}F_{\nu\mu}=\mu_0 J_{\nu} \tag{11.3.16}$$

容易证明：$\nu=4$ 的结果对应 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$，而 $\nu=1,2,3$ 的结果对应 $\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$。同理，可把两个齐次方程

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

合并写成

$$\partial_{\mu}F_{\nu\alpha}+\partial_{\alpha}F_{\mu\nu}+\partial_{\nu}F_{\alpha\mu}=0,\qquad \mu\neq\nu\neq\alpha \tag{11.3.17}$$

(11.3.16）式和（11.3.17）式即是协变形式的麦克斯韦方程组。

§ 11.4 电磁场的变换公式

下面考虑电磁场（由反对称电磁张量$F_{\mu\nu}$表示）在不同惯性系下得变换关系。因为$F_{\mu\nu}$是二阶张量，故不同参考系中的$F_{\mu\nu}$间的变换关系为

$$F'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{11.4.1}$$

根据 Lorentz 变换把(11.4.2)式具体写成分量的形式，则为

$$
\begin{cases}
E_1' = E_1, \\
E_2' = \gamma(E_2 - \upsilon B_3), \\
E_3' = \gamma(E_3 + \upsilon B_2), \\
B_1' = B_1, \\
B_2' = \gamma(B_2 + \dfrac{\upsilon}{c^2} E_3), \\
B_3' = \gamma(B_3 - \dfrac{\upsilon}{c^2} E_2),
\end{cases}
\qquad (11.4.2)
$$

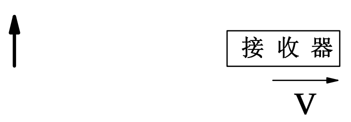
假若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解，则（11.4.2）式可表示为

$$
\begin{cases}
\vec{E}_{\parallel}' = \vec{E}_{\parallel} \\
\vec{E}_{\perp}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B})_{\perp} \\
\vec{B}_{\parallel}' = \vec{B}_{\parallel} \\
\vec{B}_{\perp}' = \gamma(\vec{B} - \dfrac{\vec{\upsilon}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp}
\end{cases}
\qquad (11.4.3)
$$

上述场变换方程式自动给出了 **Lorentz** 力以及动生电动势的物理解释。动生电动势是指一段运动导体切割磁力线产生的电动势。在实验室坐标系下观测，体系只有静磁场，当一个导线以速度 $\vec{\upsilon}$ 切割磁力线时，在导线静止的坐标系中产生了新的电场 $\vec{E}_{\perp}' = \gamma(\vec{\upsilon} \times \vec{B})_{\perp} \approx (\vec{\upsilon} \times \vec{B})_{\perp}$（后一个等式在低速下成立），因此导线中的电荷会受到这个电场的作用力－这就是动生电场（电动势）的来源．而导线中的电荷受到的力 $\vec{F}' \approx q(\vec{\upsilon} \times \vec{B})_{\perp}$，就是 Lorentz 力的来源。

补充题：

1) 写出四维速度在 Lorentz 变换下的变换方式，验证其与三维速度的变换公式（11.2.12）的一致性。（提示，参考书上 P. 276 最下面的一个公式）
2) 考虑一个以 ω 振动的偶极振子 $\vec{p} = p\hat{z}e^{-i\omega t}$，一个接收器以速度为 $\vec{v}$ 沿 x 轴离开原点，计算在接收器上测得的电场、磁场，并由此计算接收器测得的波的频率。



P. 298, 11.5