第四章 电磁波的传播

讨论没有电流和电荷分布的区域中

电磁场的变化和传播规律

第1节 平面波

服从线性波动方程的波可以归结为平面波的叠加.

1.1 电磁场的波动方程

没有自由电流分和自由电荷的区域，麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

先考虑**真空情形**： $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\;\Longrightarrow\;\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

由 $$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

令 $$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

<u>**波动方程**</u>**:** $$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

类似可得 $$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的每一个分量都满足波速为c的波动方程.

波动方程的解

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

平面波解为 $f = \varphi(\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} - ct)$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为波传播的单位方向矢量.

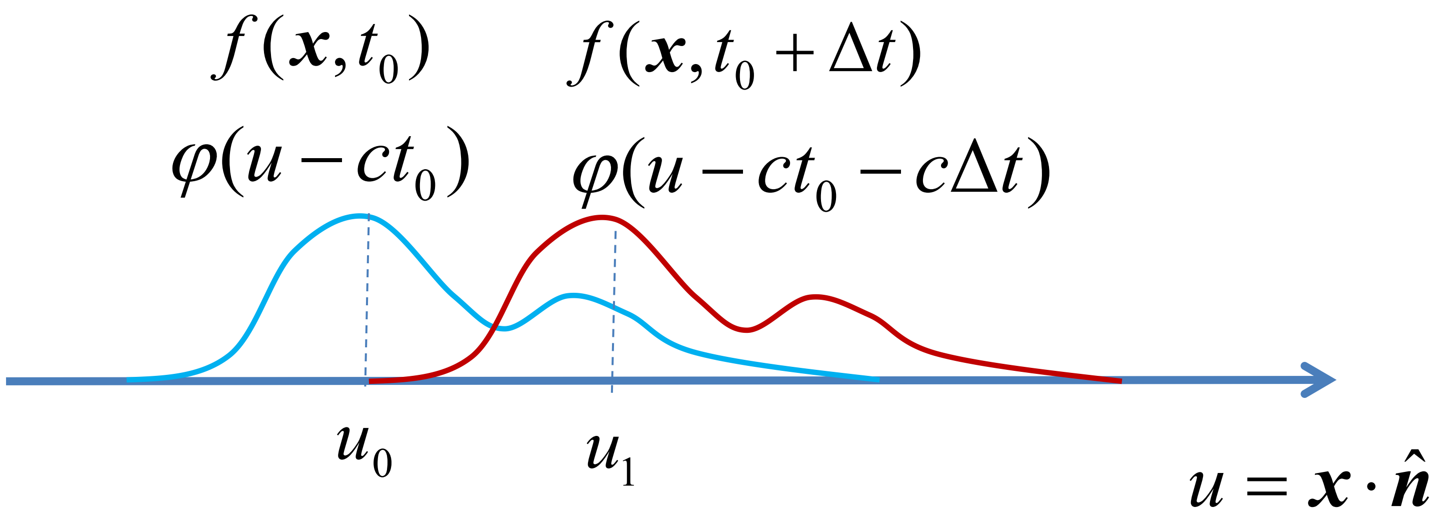
证明： 单位矢量 $\hat{\boldsymbol{n}} = (n_x, n_y, n_z)$, $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(xn_x + yn_y + zn_z - ct)$$

$$= \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)\frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}-ct} = \frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}-ct}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi(\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} - ct)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}-ct}$$

从而： $\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}-ct} - \frac{1}{c^2}c^2\frac{\partial^2\varphi(s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}-ct} = 0$ （证毕）



$$u_1 - ct_0 - c\Delta t = u_0 - ct_0$$

$$\Delta u = u_1 - u_0 = c\Delta t$$

波速

$$c = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

重要结论:

一切电磁波的波速都等于c，与参考系无关，与产生波的方式（波源的运动）无关. 也就是说，c是一个基本物理常数.

电磁波包括无线电、光波、X光和ϒ射线等所有变化的电磁场.

这是狭义相对论的两个基础之一.

根据2019年的新国际单位制，c定义为 一个常数.

无耗散线性介质情形 $\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(t),\ \boldsymbol{B}(t)=\mu\boldsymbol{H}(t)$ （瞬时关系）

仅当电磁场变化缓慢时近似成立. 对射频及频率更高的电磁波，耗散不可避免，极化和磁化有延时效应，即每时刻的极化和磁化原则上依赖于过去所以时刻的电磁场.

弱场（快速变化的场常常是这种情形），可用线性近似

$$\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(t)+\varepsilon_0\int_0^\infty \chi_e(t')\boldsymbol{E}(t-t')dt'$$

在频域讨论比较方便. 傅里叶变换：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)e^{i\omega t}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)e^{i\omega t}$$

对磁场有类似关系.

由 $\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(t)+\varepsilon_0\int_0^\infty \chi_e(t')\boldsymbol{E}(t-t')dt'$ 傅里叶变换

$$\boldsymbol{D}(\omega)=\varepsilon_0\left[1+\chi_e(\omega)\right]\boldsymbol{E}(\omega)$$

$$\boldsymbol{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$$

$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0[1+\chi_e(\omega)]=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)$ 虚部对应耗散.

对非铁磁材料类似有： $\boldsymbol{B}(\omega)=\mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)$

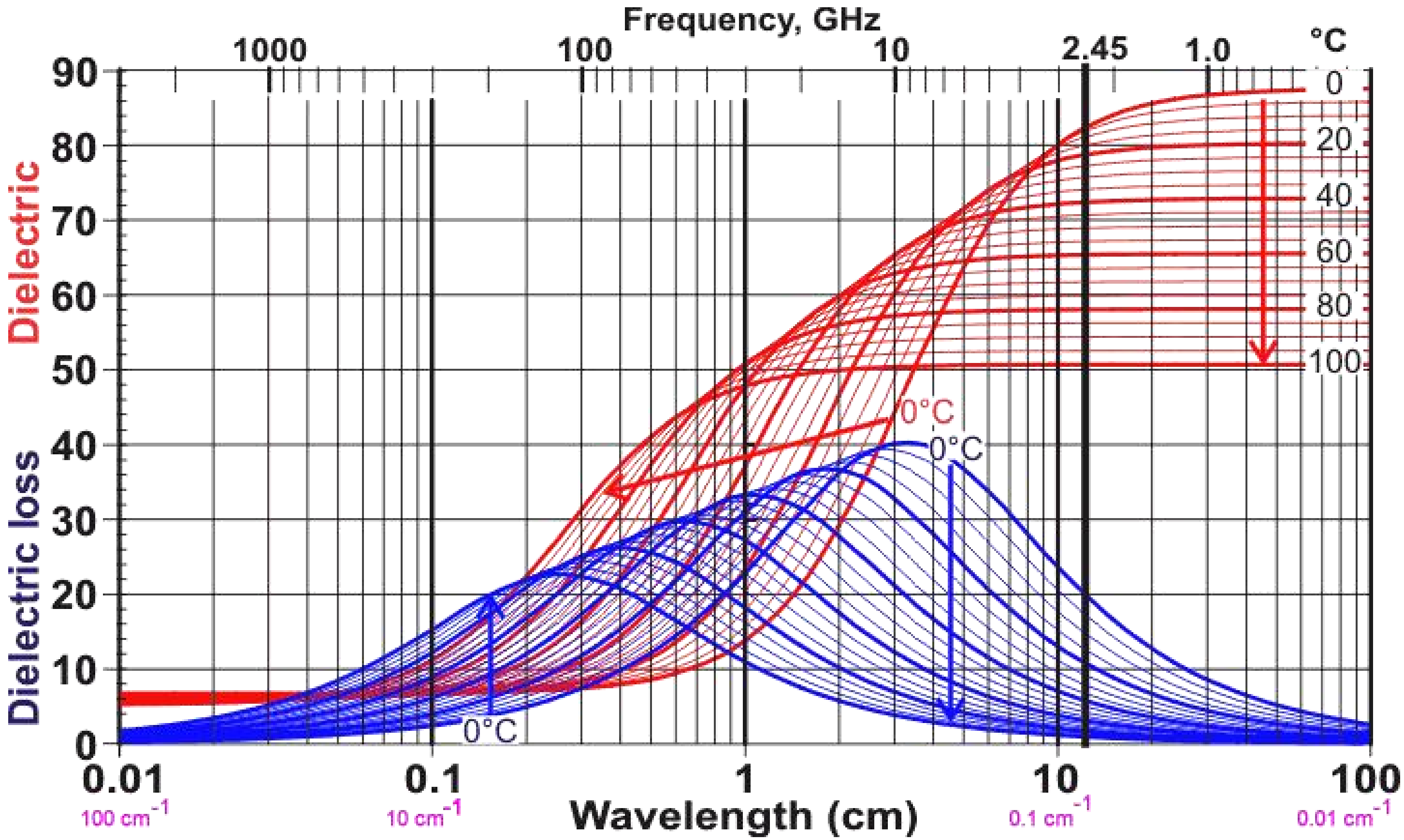
因此在线性近似中，一种频率的电磁波产生同样频率的极化和磁化，

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\varepsilon_0\chi_e(\omega)\boldsymbol{E}(\omega),\qquad \boldsymbol{M}(\omega)=\chi_M(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)$$

水的色散关系

ε_r'

ε_r''



1.2 时谐波

固定频率ω的电磁波称为**时谐波**.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}\qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}$$

物理场是他们的实部. 在线性运算中可以直接对复场运算，而非线性运算中要先取实部再运算.

介质性质：$\boldsymbol{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)\qquad \boldsymbol{B}(\omega)=\mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)$

电容率和磁导率与频率的关系称为**色散关系**.

在没有自由电流和电荷分布区域的麦氏方程组成为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\to -i\omega\right)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

由左列的散度可以得到右列，所以只有左列两条方程独立.

亥姆霍兹方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0}\qquad k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

（波数平方）

亥姆霍兹方程的解不自动满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$

物理解需要加上这个约束条件．得到物理电场解后，磁场

$$\boldsymbol{H}=-\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}$$ 自动满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$

类似有： $\boxed{\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0}$

可由上式结合 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ 先解磁场，电场由下式给出

$$\boldsymbol{E}=\frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}$$ 自动满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$

基本方程小结：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \boldsymbol{E}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{H}$$

结合边界条件，从左列或右列方程组（两种做法等价）解出的时谐波的每种电磁场空间分布称为该频率的一个波模. 物理解是各种波模的线性叠加，叠加系数由初始条件确定.

波数： $k = |\omega| \sqrt{\mu\varepsilon}$

1.3 平面波

考虑无穷大空间的简单波模：电磁场与y和z坐标无关.

$$\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dx}+k_x^2\boldsymbol{E}=0 \qquad k_x=\pm k \qquad k=|\omega|\sqrt{\mu\varepsilon}$$

解： $\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{E}_0 e^{ik_x x}$,

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{E}_0 e^{ik_x x-i\omega t}$$

由约束 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 得知振幅常矢量有约束 $\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\boldsymbol{E}_0=0$

因此这是一个横波.

振幅 $\boldsymbol{E}_0$

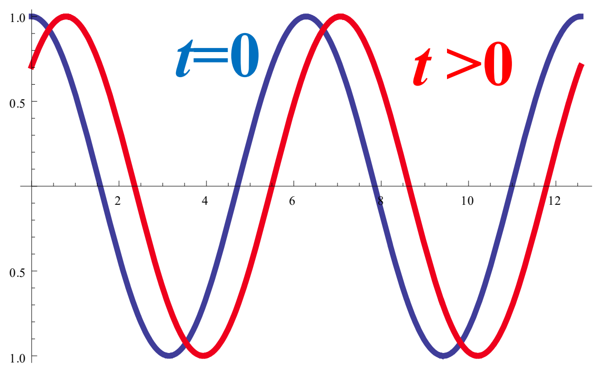
相因子 $e^{ik_x x-i\omega t}$

位相 $k_x x-\omega t$

物理电场是实矢量，等于复电场的实部，可写成一个正频模和一个负频模的叠加（ω > 0）

$$\boldsymbol{E}^{phys}(x,t) = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}_0 e^{ik_x x - i\omega t}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_0 e^{ik_x x - i\omega t} + \boldsymbol{E}_0^* e^{-ik_x x + i\omega t}\right)$$
$$= E_0^{phys}\cos\left(k_x x - \omega t + \phi_0\right)$$

其中 $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_0^{phys} e^{i\phi_0}$ ， ϕ_0 为初始位相.



相速度 $v = \dfrac{\omega}{k_x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

左图 $k_x > 0$ 为右行波

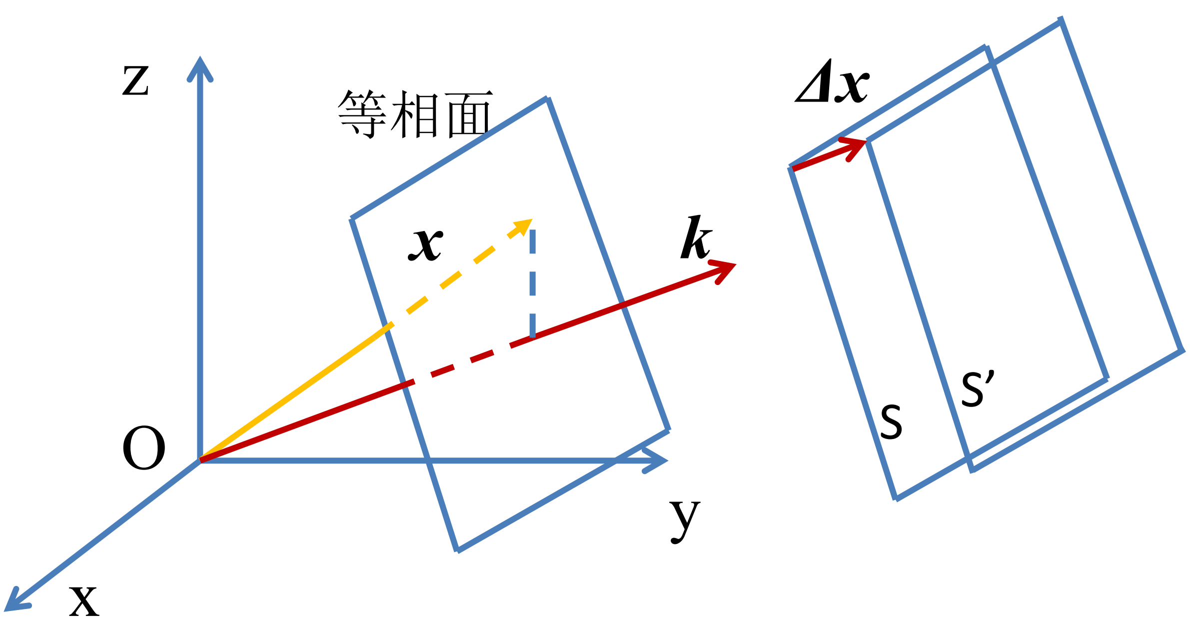
一般平面波

复电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}$ $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$ （横波）

代入亥姆霍兹方程可知波矢 $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)=k\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 满足

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon \qquad k=|\omega|\sqrt{\mu\varepsilon}$$

等相面方程 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t=const.$



等相面垂直于$\boldsymbol{k}$. 经Δt等相面从S移至S'. 等相面沿$\boldsymbol{k}$方向移动

$$\Delta\boldsymbol{x}=|\Delta\boldsymbol{x}|\,\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

位相 $\phi(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t$

对等相面， $\Delta\phi(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{x} - \omega\Delta t = 0$

把 $\Delta\boldsymbol{x} = |\Delta\boldsymbol{x}|\,\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 代入， $k\,|\Delta\boldsymbol{x}| - \omega\Delta t = 0$

故等相面移动速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{|\Delta\boldsymbol{x}|}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{\omega}{k}\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

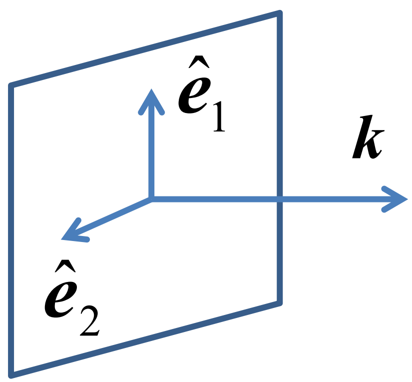
易见 $\phi(\boldsymbol{x} + \frac{2\pi}{k}\hat{\boldsymbol{e}}_k, t) = \phi(\boldsymbol{x},t) + 2\pi$ 因此**波长**为 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

因为 $\phi(\boldsymbol{x}, t + \frac{2\pi}{\omega}) = \phi(\boldsymbol{x},t) - 2\pi$ 因此**周期**为 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

偏振

对给定波矢$\boldsymbol{k}$, 电场$\boldsymbol{E}$可以在垂直$\boldsymbol{k}$的任意方向上振荡. $\boldsymbol{E}$的取向称为偏振方向.

电场可以写成平面上两个正交矢量$\hat{\boldsymbol{e}}_1$和 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 的线性叠加.

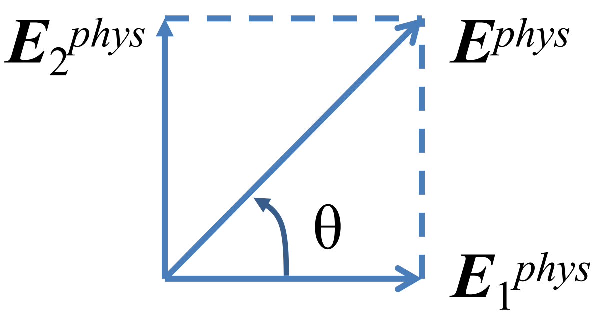


$$\boldsymbol{E} = (\hat{\boldsymbol{e}}_1 E_1 e^{i\phi_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_2 E_2 e^{i\phi_2})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t}$$

其中E_1和E_2是两个非负实常数. 物理场

$$\boldsymbol{E}^{phys} = \boldsymbol{E}_1^{Phys} + \boldsymbol{E}_2^{Phys}$$

在正交方向偏振的电场为

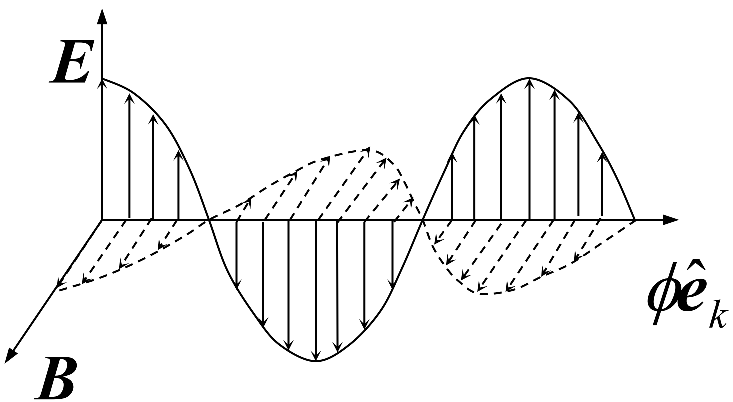


$$\boldsymbol{E}_1^{phys} = \hat{\boldsymbol{e}}_1 E_1 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2^{phys} = \hat{\boldsymbol{e}}_2 E_2 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_2)$$

$$\tan\theta = \frac{E_2\cos(k\cdot x - \omega t + \phi_2)}{E_1\cos(k\cdot x - \omega t + \phi_1)}$$

复磁场 $\boldsymbol{H}=-\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\dfrac{k}{\omega\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_k\times\boldsymbol{E}$



线偏振平面波

$$\boldsymbol{B}=\frac{k}{\omega}\hat{\boldsymbol{e}}_k\times\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

- $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{k}$构成右手正交系.
- $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$同相.

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$$

真空： $\left|\dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right|_{vac}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c$

<u>**介质折射率**</u>：

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

1.4 电磁波的能量和能流

能流密度由坡印亨矢量给出，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$

由平面波解 $\boldsymbol{H}=\dfrac{k}{\omega\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_k\times\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$

$$\boldsymbol{S}=\frac{k}{\omega\mu}E^2\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

上式E是实的物理电场，下同.

在无耗散线性介质中，能量密度为 $w=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$

把平面波解代入，

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2\right)=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$$

（E和B为实物理场）

可把能流密度写成 $\boxed{\boldsymbol{S}=vw\hat{\boldsymbol{e}}_k}$

$v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 为相速

瞬时能量密度:

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t) = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\left[1+\cos 2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right]$$

对快速变化的电磁波（微波、光），通常只能测量到

平均能量密度:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$$

对同周期振荡场的二次式求时间平均，还可以用普遍公式

$$\overline{fg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(f^* g\right)$$

其中f和g是两个同周期振动场的复表达式（p116).

平均能流密度:

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\hat{\boldsymbol{e}}_k$$

第2节 电磁波在界面上的反射和折射

边值关系的应用.

2.1 发射和折射定律

边值关系

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

对绝缘介质界面：

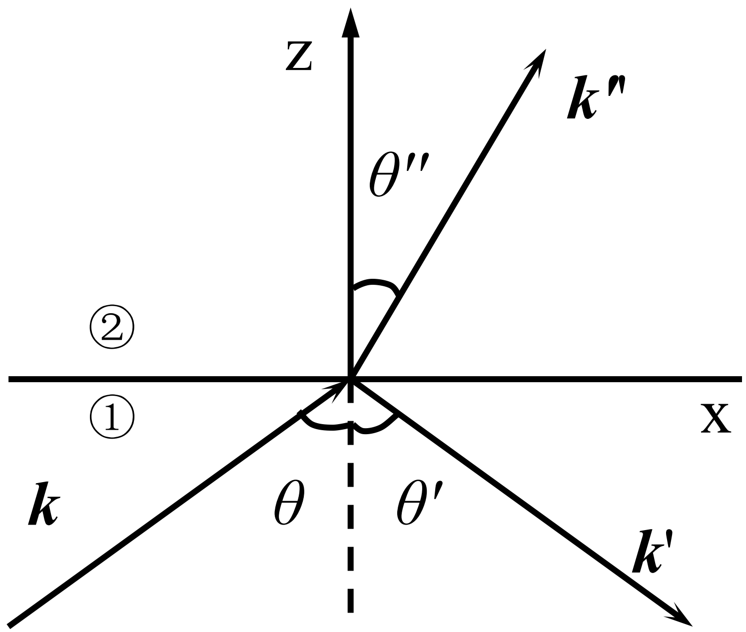
$\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \sigma = 0$

对时谐波，由前两式是可以推导出后两式，从而独立的边值关系为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}$$

考虑时谐平面波入射到无穷大绝缘平面界面. 设入射发射频率不变.



入射波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)\right]$

反射波 $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_0 \exp\left[i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)\right]$

折射波 $\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}''_0 \exp\left[i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)\right]$

由 $\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}') = \hat{\boldsymbol{e}}_n \times \boldsymbol{E}''$$

对界面所有点成立，故

$$k_x = k'_x = k''_x \qquad k_y = k'_y = k''_y$$

设入射波 $k_y = 0$，则

$$k_y = k'_y = k''_y = 0$$

几何关系

$$k_x = k\sin\theta \qquad k'_x = k'\sin\theta' \qquad k''_x = k''\sin\theta''$$

在介质1，　　　　　　在介质2，

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega}{c}n_1 \qquad k'' = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{c}n_2$$

结合上面各式，

$$\theta = \theta'$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n_{21}$$

这些关系体现了光在平行界面方向动量守恒. 而频率不变体现了能量守恒.

2.2 振幅关系 菲涅耳公式

1.入射电场垂直入射平面

因为考虑的介质是各向同性的非磁性介质，反射电场和折射电场也垂直入射平面.

由 $\hat{\boldsymbol{e}}_n\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$ 得 $E+E'=E''$

其中E，E'和E''分别是入射、反射和折射电场（以y方向为正向）

由 $\hat{\boldsymbol{e}}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$ 平行界面的分量满足

$$H\cos\theta-H'\cos\theta'=H''\cos\theta''$$ （留意正向的设定）

代以 $H=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E$ $H'=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E'$ $H''=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''$ 得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E-E')\cos\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''\cos\theta''$$

入射电场垂直入射平面：

菲涅耳公式之一

$$E+E'=E''$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E-E')\cos\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''\cos\theta''$$

$$\frac{E'}{E}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$$

2.入射电场平行入射平面

入射电场平行射平面：

菲涅耳公式之二

$$E\cos\theta-E'\cos\theta'=E''\cos\theta''$$

$$H+H'=H''$$

$$\frac{E'}{E}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$$

布儒斯特定律

当 $\theta+\theta''=\dfrac{\pi}{2}$ 时反射电场没有平行入射面的分量，反射波具有垂直入射面的完全偏振性.

半波损失

在电场垂直入射平面的情形，当$\varepsilon_2>\varepsilon_1$时（从光疏介质入射到光密介质），有$\theta>\theta''$, 因而$E'/E<0$，即反射电场与入射电场反相.

2.3 全反射

考虑从光密介质入射到光疏介质，即$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，有$n_{21} < 1$和$\theta < \theta''$. 用 $\sin\theta_c = n_{21}$定义θ_c.

当入射角 $\theta = \theta_c$时，折射角 $\theta'' = \dfrac{\pi}{2}$

若入射角继续增大，折射将不能发生，出现全反射现象.

此时，x方向仍然有动量守恒，

$$k''_x = k_x = k\sin\theta = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta, \qquad k_y = k'_y = k''_y = 0$$

色散关系（k和ω）由亥姆霍兹方程确定，不随入射角变化，因而仍有

$$k''^2 = k''^2_x + k''^2_z = \frac{\omega}{c} n_2 \qquad k''_z = k\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta} = i\kappa$$

$$\kappa = k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$$

在全发射条件下，入射角 $\theta > \theta_c$，κ为正实数. 从而

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}_0'' e^{i(k_x'' x + k_z'' z - \omega t)} = \boldsymbol{E}_0'' e^{-\kappa z} e^{i(k_x'' x - \omega t)}$$

可见进入介质2的电磁波沿z方向指数衰减，**穿透深度**为

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}$$

这个例子说明，在边界附近可以存在复波矢，称为**边缘态**.

全反射情形的能流密度

$$\bar{S}''_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,|E''_0|^2\, e^{-2\kappa z}\,\frac{\sin\theta}{n_{21}}$$

$\bar{S}''_z = 0$ 平均来说，没有能量流进介质2.

还可以推导出入射和发射波的相位关系（参见课本）.

作业：

1. 考虑两列振幅相同、偏振方向相同、频率分别为$\omega+d\omega$和$\omega-d\omega$的线性偏振平面波，它们都沿z轴转播。（1）求合成波，并把合成波写成振幅依赖于空间点和时间的以ω为频率的平面波；（2）求合成波的相位传播速度和振幅传播速度。

2.一平面波以$\pi/4$的角度从真空入射到$\varepsilon_r=2$的介质，电场强度垂直与入射面。求发生系数和折射系数。