# 第四章　解析函数的 Laurent 展开与孤立奇点*

## 目　录


**§1　解析函数的 Laurent 展开　2**

一　双边幂级数 . . . . . . . . . . 2

二　解析函数的 *Laurent* 展开 . . . . . . . . . . 3

三　展开实例 . . . . . . . . . . 5

**§2　解析函数的零点与孤立奇点　6**

一　解析函数的零点 . . . . . . . . . . 6

二　解析函数的孤立奇点及其分类 . . . . . . . . . . 8

**§3　各种孤立奇点的判断　8**

一　可去奇点 . . . . . . . . . . 8

二　极点 . . . . . . . . . . 9

三　本性奇点 . . . . . . . . . . 10

**§4　*无穷远点　11**

**补充习题　13**

本章研究解析函数的 Taylor 展开式的推广，即 Laurent 展开式. 它是研究解析函数的奇点的重要工具.

## §1 解析函数的 Laurent 展开

### 一 双边幂级数

考虑两个级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{1}$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{2}$$

级数 (1) 即是上章研究的幂级数，它和级数 (2) 之和

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{3}$$

称为双边幂级数.

假设级数 (1) 的收敛半径为 $R$（$0<R\le+\infty$），则它在圆 $|z-a|<R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛，并具有解析的和函数，记作 $f_1(z)$. 对于级数 (2)，令 $\zeta=1/(z-a)$，则可改写为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n,$$

假设它的收敛半径为 $1/r$（$0<1/r\le+\infty$），则它在圆 $|\zeta|<1/r$ 上绝对收敛且内闭一致收敛，并具有解析的和函数. 换句话说，级数 (2) 当 $|z-a|>r$（$0\le r<+\infty$）时绝对收敛且内闭一致收敛，并具有解析的和函数，记作 $f_2(z)$.

若 $r>R$，则级数 (1) 和 (2) 没有公共收敛区域，因而双边幂级数 (3) 处处发散.

**例 1** 双边幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}1/z^n$ 的正幂部分在圆 $|z|<1/2$ 内绝对收敛，负幂部分在单位圆外 $|z|>1$ 绝对收敛. 所以原双边幂级数处处发散.

若 $r=R$，则级数 (1) 和 (2) 亦没有公共收敛区域. 但在圆周 $|z-a|=R=r$ 上可能存在收敛点.

**例 2** 双边幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z^n/n^2+\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n/n^2=\sum_{n=1}^{+\infty}z^n/n^2+\sum_{n=1}^{+\infty}1/n^2z^n$ 的正幂部分在单位圆内 $|z|<1$ 绝对收敛，负幂部分在单位圆外 $|z|>1$ 绝对收敛. 所以原双边幂级数没有公共收敛区域，但它在单位圆周 $|z|=1$ 上绝对收敛.

若 $r<R$，级数 (1) 和 (2) 有公共的收敛区域，即环域

$$H:\quad r<|z-a|<R \quad (0\le r<R\le+\infty).$$

这时，根据上章的 Weierstrass 定理，有如下

**定理** 双边幂级数 (3) 具有下列性质：

(1) 在收敛环 $H$ 内绝对收敛于 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$，且在闭环：$r<\rho_1\le|z-a|\le\rho_2<R$ 上一致收敛（即在 $H$ 上内闭一致收敛）；

(2) 和函数 $f(z)$ 在 $H$ 内解析；

(3) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 在 $H$ 内可以逐项求导和逐项积分.

**例 3** 双边幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(z/2)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(z/2)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}1/z^n$ 的正幂部分在圆 $|z|<2$ 内绝对收敛于函数 $2/(2-z)$，负幂部分在单位圆外 $|z|>1$ 绝对收敛于函数 $1/(z-1)$. 所以原双边幂级数在环域 $H$: $1<|z|<2$ 中绝对收敛于函数 $-z/(z-1)(z-2)$. 容易看出，该和函数在 $H$ 中解析.

## 二 解析函数的 *Laurent* 展开

由上面的分析，双边幂级数在收敛环内具有解析的和函数，换句话说，它在收敛环内代表一个解析函数. 反过来，在环域内解析的函数是否可以展开为双边幂级数呢？下面的定理给出了肯定的答案.

**定理**（Laurent） 设函数 $f(z)$ 在环域 $H$：$r<|z-a|<R$（$0\le r<R\le+\infty$）内解析，则在 $H$ 内可以展开为双边幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{5}$$

而 $\Gamma$ 是环内包围内圆的任一围线. 且展开式是唯一的.

式 (4) 称为 $f(z)$ 在 $a$ 点的 *Laurent* 展开式，右边称为 *Laurent* 级数，式 (5) 称为 *Laurent* 系数.

**注** ① Laurent 定理在形式上与 Taylor 定理非常相似，证明的方法也相似（参见以下详细的证明）. 了解两者的联系和区别对于深入理解这一定理是重要的. ② 一般来说，即使正幂项的系数也不能表示为高阶导数的形式. 这是因为 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a|\le r$ 上有奇点，所以在 $\Gamma$ 上的积分不满足应用 Cauchy 高阶导数公式的条件. ③ 如果 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a|\le r$ 上确实没有奇点，那么它就在圆 $|z-a|<R$ 上解析，这时 Laurent 级数应该退化为 Taylor 级数. 事实上，这时有

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\mathrm{d}\zeta=0,\quad n\in\mathbb{N}^+,$$

其中最后一步用了 Cauchy 积分定理，因为被积函数中的两个因子均在 $\Gamma$ 所包围的闭域上解析. 可见 Taylor 级数是 Laurent 级数的特殊情况. ④ 一般情况下，展开式中有负幂项，因为 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a|\le r$ 上有奇点. 但是，$f(z)$ 的奇点不一定在 $a$. 所以，不要因为展开式中有 $z-a$ 的负幂项就误以为 $a$ 是 $f(z)$ 的奇点. 例如，当 $1<|z|<+\infty$ 时，有

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

展开式中全是 $z$ 的负幂项，但 $z=0$ 并不是被展开函数的奇点. 这是因为展开式在 $z=0$ 附近并不成立. ⑤ 知道了展开式的唯一性，我们就可以用任何方法来求展开式，而不一定要用式 (5) 来计算系数. 最常用的方法是利用已知的 Taylor 级数展开式. 具体方法参见下面的展开实例.

下面给出 Laurent 定理的

**证明** $\forall z\in H$，在 $H$ 内作圆周 $\Gamma_1$：$|\zeta-a|=\rho_1$ 和 $\Gamma_2$：$|\zeta-a|=\rho_2$，使得 $r<\rho_1<|z-a|<\rho_2<R$. 由于 $f(\zeta)$ 在闭环 $\rho_1\le|\zeta-a|\le\rho_2$ 上解析，故由 Cauchy 积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\zeta,$$

其中积分皆沿正方向进行. 对于第一项，仿照 Taylor 定理的证明，易得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \mathbb{N}.$$

对于第二项，由于 $|\zeta-a|<|z-a|$，故有

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}&=\frac{f(\zeta)}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{f(\zeta)}{z-a}\,\frac{1}{1-(\zeta-a)/(z-a)}=\frac{f(\zeta)}{z-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}(z-a)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n.\end{aligned}$$

上式右边在 $\Gamma_1$ 上一致收敛，故可逐项积分，而得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=-1,-2,\cdots.$$

设 $\Gamma$ 为 $H$ 中包围内圆的任一围线，由 Cauchy 积分定理，有

$$\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

综合以上结果，即得式 (4) 和式 (5).

下面证明展开式的唯一性. 设有另一展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n'(z-a)^n,$$

两边乘以 $(z-a)^{-m-1}$，得

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n'(z-a)^{n-m-1}.$$

在 $\Gamma$ 上积分，由于右边在 $\Gamma$ 上一致收敛，故可逐项积分，利用第二章例题结果，右边积分只有一项不为零，即

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c'_m,$$

所以

$$c'_m = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta = c_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

这就证明了唯一性. 证毕.

## 三 展开实例

**例 4** 在 $a=0$ 处展开 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 为 Laurent 级数.

**解** $f(z)$ 有奇点 $z=0$ 和 $z=1$，故分别在 $H_1$：$0<|z|<1$ 和 $H_2$：$1<|z|<+\infty$ 上解析. 在 $H_1$ 上，

$$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n.$$

在 $H_2$ 上，

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

**例 5** 在 $0<|z|<+\infty$ 中可展开 $\cosh(z+1/z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$，试证 $c_{-n}=c_n$，$c_{2n-1}=0$（$n\in\mathbb{N}^+$）.

**解** 在原式中令 $z=1/\zeta$，可得

$$\cosh\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\zeta^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n, \quad 0<|\zeta|<+\infty.$$

把自变量重新写作 $z$，则有

$$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n}z^n, \quad 0<|z|<+\infty.$$

与原式比较，利用展开式的唯一性，即得

$$c_{-n}=c_n, \quad n\in\mathbb{N}^+.$$

另一方面，在原式中令 $z=-\zeta$，可得

$$\cosh\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n c_n\zeta^n, \quad 0<|\zeta|<+\infty.$$

把自变量重新写作 $z$，则有

$$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-)^n c_n z^n, \quad 0<|z|<+\infty.$$

与原式比较，利用展开式的唯一性，即得

$$c_n = (-)^n c_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

考虑到 $c_{-n} = c_n$，独立的结论有

$$c_{2n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

最后，展开式可以写成

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right), \quad 0 < |z| < +\infty,$$

其中 $c_{2n}$ 可用积分表出，这里从略. 以上结论也可以用系数的积分公式证明，但比较麻烦.

**例 6** 求函数 $f(t) = \mathrm{e}^{(z/2)(t-1/t)}$ 在 $0 < |t| < +\infty$ 中的 Laurent 展开式，其中 $z$ 是参数.

**解** 暂略.

**习题** 将下列各函数在指定的环域内展开为 Laurent 级数。(1) $1/z^2(z-1), \quad 0 < |z-1| < 1$; (2) $(z-1)(z-2)/(z-3)(z-4), \quad 4 < |z| < \infty$; (3) $\cot z, \quad 0 < |z| < \pi$（计算三个非零项）.

## §2 解析函数的零点与孤立奇点

### 一 解析函数的零点

为了后面讨论的需要，这里简单介绍一下解析函数的零点的概念.

**定义**（$m$ 阶零点） 若函数 $f(z)$ 在 $a$ 点解析，且 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$，而 $f^{(m)}(a) \neq 0$，则 $a$ 称为 $f(z)$ 的 $m$ 阶零点. 一阶零点亦称为单零点.

**注** $f(z)$ 在 $a$ 点解析，即在某圆 $K$：$|z-a| < R$ 内解析，在该圆内，$f(z)$ 可展开为 Taylor 级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$，其中 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. 如果所有的系数均为零，则 $f(z)$ 在 $K$ 内恒为零. 若 $f(z)$ 在 $K$ 内不恒为零，则上述定义中的 $m$ 值总是存在的.

**例 1** $f(z) = \sin z$ 的零点为 $z_n = n\pi$（$n \in \mathbb{Z}$）. 由于 $f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-)^n \neq 0$，故所有的 $z_n$ 均为单零点.

**例 2** 显然 $z = 0$ 是函数 $f(z) = z - \sin z$ 的零点. 由于 $f'(0) = (1 - \cos z)|_{z=0} = 0$，$f''(0) = \sin z|_{z=0} = 0$，而 $f'''(0) = \cos z|_{z=0} = 1 \neq 0$，故 $z = 0$ 是 $f(z)$ 三阶零点.

**例 3** $f(z) = (z-a)^m$，$m \in \mathbb{N}^+$. 显然 $a$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 阶零点.

**例 4** $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $a$ 点解析且 $\varphi(a) \neq 0$. 显然 $a$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 阶零点.

多项式是最简单的解析函数. 如果 $a$ 是多项式 $P_n(z)$ 的 $m$ 重根（$m \leq n$），则有 $P_n(z) = (z-a)^m Q_{n-m}(z)$，其中 $Q_{n-m}(z)$ 是 $n-m$ 次多项式，且 $Q_{n-m}(a) \neq 0$. 容易验证，$P_n(z)$ 在 $a$ 点满足以上条件，所以 $a$ 是 $P_n(z)$ 的 $m$ 阶零点. 一般解析函数的 $m$ 阶零点是多项式 $m$ 重根的推广. 所以，类似于多项式的情况，有以下

**定理**（$m$ 阶零点） 若函数 $f(z)$ 在 $a$ 点的邻域 $K$：$|z-a| < R$ 内解析且不恒为零，则 $f(z)$ 以 $a$ 为 $m$ 阶零点的充要条件是 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $K$ 内解析，且 $\varphi(a) \neq 0$.

**证明** 充分性. 若 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，且 $\varphi(a)\neq 0$，则容易验证 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$，而 $f^{(m)}(a)=m!\varphi(a)\neq 0$，故 $a$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 阶零点.

必要性. $f(z)$ 在 $K$ 内解析，故可展开为 Taylor 级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$，其中 $c_n=f^{(n)}(a)/n!$. 由于 $a$ 是 $m$ 阶零点，故 $c_0=c_1=\cdots=c_{m-1}=0$，而 $c_m\neq 0$，所以

$$f(z)=\sum_{n=m}^{+\infty}c_n(z-a)^n=(z-a)^m\sum_{n=m}^{+\infty}c_n(z-a)^{n-m}=(z-a)^m\sum_{k=0}^{+\infty}c_{k+m}(z-a)^k\equiv(z-a)^m\varphi(z).$$

显然 $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_{k+m}(z-a)^k$ 在 $K$ 内解析（注意 $\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 只相差一个因子 $(z-a)^m$，且没有奇性），且 $\varphi(a)=c_m\neq 0$. 证毕.

由上面的定理容易推出零点的孤立性，即有下面的

**定理**（零点的孤立性） 若函数 $f(z)$ 在 $a$ 点的邻域 $K$：$|z-a|<R$ 内解析且不恒为零，$a$ 是 $f(z)$ 的零点，则必存在邻域 $K'$：$|z-a|<r$，在其中 $f(z)$ 只有 $a$ 一个零点.

**证明** 由于 $f(z)$ 在 $K$ 内解析，故可展开为 Taylor 级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$，其中 $c_n=f^{(n)}(a)/n!$. 如果所有的系数均为零，则 $f(z)$ 在 $K$ 内恒为零，这与假设矛盾. 故必存在 $m\in\mathbb{N}^+$，使得 $a$ 满足 $m$ 阶零点的条件. 按以上定理，必有 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $K$ 内解析，且 $\varphi(a)\neq 0$. 由于 $\varphi(z)$ 连续，故存在邻域 $K'$：$|z-a|<r$，在其中 $\varphi(z)\neq 0$，从而 $f(z)$ 在其中只有 $a$ 一个零点. 证毕.

这一定理有一个重要的

**推论** 若函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，在 $D$ 内有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$，满足 $z_n\neq a$，$z_n\to a\in D$，$f(z_n)=0$，则在 $D$ 内 $f(z)\equiv 0$.

**证明** 由于 $f(z)$ 连续，易得 $f(a)=\lim_{n\to+\infty}f(z_n)=0$，故 $a$ 是 $f(z)$ 的非孤立零点. 由上述定理，在 $a$ 点的某邻域 $K$：$|z-a|<R$ 内必有 $f(z)\equiv 0$，只要 $K\subset D$. 如果 $D$ 本身就是 $a$ 点的邻域，或者 $D$ 是复平面，则结论得证. 否则，设 $b\neq a$ 是 $D$ 内任一点，只需证明 $f(b)=0$ 即可. 今在 $D$ 内作折线 $L$ 连接 $a$ 和 $b$，设 $L$ 与 $C=\partial D$ 的最小距离为 $d$（$d>0$）. 在 $L$ 上由 $a$ 至 $b$ 取分点 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，使 $|a_1-a|=|a_2-a_1|=\cdots=|a_m-a_{m-1}|=R/2$，而 $|b-a_m|\leq R/2$，其中 $0<R<d$. 考虑一系列圆 $K$：$|z-a|<R$ 和 $K_i$：$|z-a_i|<R$（$i=1,2,\cdots,m$），它们都在 $D$ 内. 如上所述，在 $K$ 内必有 $f(z)\equiv 0$. 按分点的取法，$a_1$ 落在 $K$ 内，且是 $f(z)$ 的非孤立零点，故可推知在 $K_1$ 内必有 $f(z)\equiv 0$，继续同样的推理，最后可得在 $K_m$ 内必有 $f(z)\equiv 0$，而 $b$ 落在 $K_m$ 内，故 $f(b)=0$. 证毕.

由这一推论，马上可以推出非常重要的唯一性定理：

**定理**（解析函数的唯一性） 若函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 均在区域 $D$ 内解析，在 $D$ 内有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$，满足 $z_n\neq a$，$z_n\to a\in D$，$f_1(z_n)=f_2(z_n)$，则在 $D$ 内必有 $f_1(z)=f_2(z)$.

**证明** 令 $F(z)=f_1(z)-f_2(z)$，则 $F(z)$ 在区域 $D$ 内解析，且在点列 $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 上有 $F(z_n)=0$，根据以上推论，在 $D$ 内必有 $F(z)\equiv 0$，从而 $f_1(z)=f_2(z)$. 证毕.

唯一性定理表明，解析函数在区域 $D$ 内一个点列上的取值，就完全决定了它在区域 $D$ 内的形式. 这里我们再次看到，解析性对于函数值的分布给予了极大的限制. 如果将定理中的点列改为区域 $D$ 内的一个弧段或子区域，定理当然还是成立的. 下面是应用唯一性定理的例子.

**例 5** 函数 $\sin 2z$ 和 $2\sin z\cos z$ 均在复平面上解析，而在实轴上有 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，由唯一性定理，在复平面上必有 $\sin 2z=2\sin z\cos z$. 按照这种方式，可以将实变函数中的许多恒等式推广到复变函数中.

**例 6** 上章介绍了解析开拓的基本概念，并且指出，如果区域 $D$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以解析开拓到 $G$（$G\supset D$），则结果是唯一的. 现在用唯一性定理容易证明这一结论. 事实上，如果 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$

都是 $f(z)$ 在 $G$ 内的解析开拓，由于在 $G$ 的子区域 $D$ 上必须有 $F_1(z)=F_2(z)=f(z)$，根据唯一性定理，在 $G$ 内必有 $F_1(z)=F_2(z)$.

### 二　解析函数的孤立奇点及其分类

**定义**（孤立奇点）　如果函数 $f(z)$ 以 $a$ 为奇点，但在 $a$ 的某去心邻域 $K\backslash\{a\}$：$0<|z-a|<R$ 中解析，则 $a$ 称为 $f(z)$ 的*孤立奇点*（isolated singularity）.

粗略地说，如果函数 $f(z)$ 以 $a$ 为奇点，但在 $a$ 附近没有别的奇点，则 $a$ 就是 $f(z)$ 的孤立奇点. 所以这一定义是非常直观的.

去心邻域 $K\backslash\{a\}$：$0<|z-a|<R$ 是内半径为零的环域，$f(z)$ 在其中解析，则可以展开为 Laurent 级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n.$$

展开式中的正幂部分，即 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 称为*正则部分*，而负幂部分，即 $\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}/(z-a)^n$ 称为*主要部分*. 由于现在展开式在 $a$ 点附近成立，故其中负幂项的多少可以刻画 $f(z)$ 在 $a$ 点的奇性的大小. Laurent 展开式的主要用途正在于此. 根据主要部分的不同情况，我们有如下

**定义**（孤立奇点的分类）　(1) 如果主要部分为零，则 $a$ 称为 $f(z)$ 的*可去奇点*（removable singularity）. (2) 如果主要部分为 $\sum_{k=1}^{m}c_{-k}/(z-a)^k$，其中 $c_{-m}\neq 0$，则 $a$ 称为 $f(z)$ 的 $m$ *阶极点*（pole）. $m=1$ 时亦称为*单极点*. (3) 如果主要部分有无穷多项，则 $a$ 称为 $f(z)$ 的*本性奇点*（essential singularity）.

## §3　各种孤立奇点的判断

### 一　可去奇点

先看看下面的例子.

**例 1**　函数 $\sin z/z$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 Laurent 级数：

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-)^n z^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{6}$$

由于展开式的主要部分为零，按定义，$z=0$ 是可去奇点. 如果只看右边的幂级数，易知其收敛半径为 $+\infty$，故它在复平面上解析，包括 $z=0$ 点. 由于函数

$$f(z)=\begin{cases}\sin z/z, & z\neq 0;\\ 1, & z=0\end{cases}$$

在整个复平面上与式 (6) 右边的幂级数相等，故 $f(z)$ 在复平面上解析，包括 $z=0$ 点. 这就是说，只要对原来的函数 $\sin z/z$ 适当补上 $z=0$ 处的定义，即可构造出一个解析函数. 所以 $z=0$ 称为 *可去* 奇点是非常恰当的. 一般情况下，只要令 $f(a)=c_0$ 即可将可去奇点 $a$ 变为解析点.

下面的定理用于判断可去奇点.

**定理**（可去奇点） 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $a$ 为可去奇点的充要条件是 $\lim_{z\to a}f(z)=b(\neq\infty)$.

**证明** 必要性. 按定义，此时 Laurent 展开式没有负幂项，即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n,\quad 0<|z-a|<R.$$

显然，$\lim_{z\to a}f(z)=c_0(\neq\infty)$.

充分性. 此时 $f(z)$ 在 $a$ 的某去心邻域 $K$：$0<|z-a|<R_0$ 内有界：$|f(z)|<M$.（事实上，按极限定义，取 $\epsilon=1$，$\exists\, R_0$，当 $0<|z-a|<R_0$，有 $|f(z)-b|<1$，则 $|f(z)|<|b|+1$.）按公式 (5)，Laurent 展开式的负幂项系数

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=\rho}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,\mathrm{d}\zeta,\quad n\in\mathbb{N}^+,$$

其中 $\rho>0$ 可以任取，但不超过展开环域的外半径. $c_{-n}$ 实际上与 $\rho$ 的大小无关，取 $0<\rho<R_0$，则易得

$$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=\rho}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,\mathrm{d}\zeta\right|<\frac{M}{2\pi}\rho^{n-1}\int_{|\zeta-a|=\rho}|\mathrm{d}\zeta|=M\rho^n,\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

最后，令 $\rho\to0$，则得 $c_{-n}=0$（$n\in\mathbb{N}^+$）. 所以，展开式的主要部分为零，即 $a$ 是可去奇点. 证毕.

下面是关于可去奇点的一个更一般的

**定理** 若 $a$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三命题等价：

(1) $f(z)$ 在 $a$ 的主要部分为零，即 $a$ 为可去奇点；

(2) $\lim_{z\to a}f(z)=b(\neq\infty)$；

(3) $f(z)$ 在 $a$ 的某去心邻域内有界.

这类定理的证明方式是 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). 本定理的具体证明基本上已包含在上一定理的证明中，故从略.

## 二 极点

先看一个简单的例子.

**例 2** 函数 $\mathrm{e}^z/z$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 Laurent 级数：

$$\frac{\mathrm{e}^z}{z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}.\tag{7}$$

由于展开式的主要部分有一项，按定义，$z=0$ 是单极点.

判断极点，主要用下面的

**定理**（$m$ 阶极点） 若 $a$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三命题等价：

(1) $f(z)$ 在 $a$ 的主要部分为 $\sum_{k=1}^m c_{-k}/(z-a)^k$（其中 $c_{-m}\neq0$），即 $a$ 为 $m$ 阶极点；

(2) $f(z)$ 在 $a$ 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\varphi(z)/(z-a)^m$，其中 $\varphi(z)$ 在 $a$ 解析，且 $\varphi(a)\neq0$；

(3) $g(z)=1/f(z)$ 以 $a$ 为 $m$ 阶零点.

**注** 其中第一条是 $m$ 阶极点的定义，其它两条也很直观. 下面的证明供有兴趣的读者参考.

**证明** (1) $\Rightarrow$ (2). 在 $a$ 的某去心邻域内，有

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}c_n(z-a)^n=(z-a)^{-m}\sum_{n=-m}^{+\infty}c_n(z-a)^{n+m}=(z-a)^{-m}\sum_{k=0}^{+\infty}c_{k-m}(z-a)^k\equiv\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}.$$

其中 $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_{k-m}(z-a)^k$ 是 Taylor 级数，且收敛半径不为零（否则 $\varphi(z)$ 除 $z=a$ 外处处发散，由上式，$f(z)$ 在 $a$ 的任一去心邻域内发散，与假设矛盾），故在 $a$ 点解析，且 $\varphi(a)=c_{-m}\neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由已知条件，得 $g(z)=(z-a)^m/\varphi(z)$. 因为 $\varphi(z)$ 在 $a$ 解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，故在 $a$ 的某邻域内 $\varphi(z)\neq 0$，在该邻域内 $1/\varphi(z)$ 亦解析，且显然 $1/\varphi(a)\neq 0$. 根据 §2 的定理，$a$ 是 $g(z)$ 的 $m$ 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (1). 根据 §2 的定理，有 $g(z)=(z-a)^m\psi(z)$. 其中 $\psi(z)$ 在 $a$ 解析且 $\psi(a)\neq 0$，故在 $a$ 的某邻域内 $\psi(z)\neq 0$，在该邻域内 $1/\psi(z)$ 亦解析，故可展开为 Taylor 级数：$1/\psi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n-m}(z-a)^n$，其中系数的写法是为了下面的方便. 于是

$$f(z)=\frac{(z-a)^{-m}}{\psi(z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n-m}(z-a)^{n-m}=\sum_{n=-m}^{+\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中 $c_{-m}=1/\psi(a)\neq 0$. 所以 $a$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 阶极点. 证毕.

下面就用以上定理来分析几个实例.

**例 3** 再回头看例 2 的函数 $\mathrm{e}^z/z$，由于 $\mathrm{e}^z$ 解析，且 $\mathrm{e}^0=1\neq 0$，根据定理的第二条，$z=0$ 是该函数的单极点.

**例 4** 考虑函数 $\cot z=\cos z/\sin z$，易知 $z=n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）都是其孤立奇点，而且它们都是 $1/\cot z=\sin z/\cos z$ 的单零点，根据定理的第三条，$z=n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）都是 $\cot z$ 的单极点.

**例 5** 考虑函数 $f(z)=1/(z-\sin z)$，由 §2 例 2 知 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，根据定理的第三条，$z=0$ 是 $f(z)$ 三阶极点.

由上述定理，容易得到以下

**推论**（极点的判定） 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $a$ 为极点的充要条件是 $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$.

这一推论主要用来判定一个孤立奇点是否极点，若要进一步判定其阶数，就需要用上面的定理.

## 三 本性奇点

由前面关于可去奇点和极点的讨论，容易得到以下判定本性奇点的

**定理**（本性奇点） 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 $a$ 为本性奇点的充要条件是 $\lim_{z\to a}f(z)$ 不存在，即不为有限值，亦不为 $\infty$.

这说明在本性奇点处极限 $\lim_{z\to a}f(z)$ 与 $z\to a$ 的方式有关.

**例 6** 函数 $\mathrm{e}^{1/z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，故可以展开为 Laurent 级数：

$$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}.$$

展开式的主要部分有无穷多项，按定义，$z=0$ 是本性奇点. 当 $z=x$，容易知道

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x}=+\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x}=0,$$

可见极限 $\lim_{z\to 0}\mathrm{e}^{1/z}$ 不存在.

实际上，关于本性奇点，有下述

**定理** （Weierstrass） 若 $a$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，则对任意复数 $A$ （有限或无穷），都有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim_{n\to\infty} z_n=a$，使 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

**证明** 首先，如果 $A=\infty$，必能找到所要求的点列. 否则，必存在 $M>0$ 和 $\delta>0$，当 $0<|z-a|<\delta$，有 $|f(z)|<M$，如此，则 $a$ 为可去奇点，与假设矛盾.

其次，对任何有限的 $A$，亦必能找到所要求的点列. 否则，必有 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$，当 $0<|z-a|<\delta$，有 $|f(z)-A|\geq\epsilon$，于是 $1/[f(z)-A]$ 在 $0<|z-a|<\delta$ 内解析，且 $1/|f(z)-A|\leq 1/\epsilon$，如此，则 $a$ 为 $1/[f(z)-A]$ 的可去奇点，而有

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)-A}=B,$$

其中 $B$ 为有限的复数. 若 $B=0$，则得 $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$，从而 $a$ 为极点；若 $B\neq 0$，则得 $\lim_{z\to a} f(z)=A+1/B$，从而 $a$ 为可去奇点，均与假设矛盾. 证毕.

这一定理是 Weierstrass 在 1876 年给出的，它表明，在本性奇点附近，函数值可以无限接近于任何事先给定的复数，包括 $\infty$. 1879 年，Picard 给出了下述更为精密的

**定理**（Picard） 若 $a$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，则除去可能的一个例外值 $A_0$，对于任意的有限复数 $A$，都有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim_{n\to\infty} z_n=a$，使 $f(z_n)=A$.

这一定理表明，在本性奇点附近，函数值可以无限次地取得任何事先给定的有限复数，最多有一个例外值（称为 Picard 例外值）. 可见，在本性奇点附近，分布着非常丰富的函数值，而且是“取之不尽，用之不竭”的.

**例 7** 由例 6 知道，$z=0$ 是函数 $f(z)=\mathrm{e}^{1/z}$ 的本性奇点. 对任意的有限复数 $A\neq 0$，存在点列 $z_n=1/(\ln A+\mathrm{i}2\pi n)$ （其中 $n\in\mathbb{N}^+$），满足 $\lim_{n\to\infty} z_n=0$，$f(z_n)=A$. 由于 $\mathrm{e}^{1/z}\neq 0$，故 $A_0=0$ 是 Picard 例外值. 但存在点列 $z_n=-1/n$ （其中 $n\in\mathbb{N}^+$），满足 $\lim_{n\to\infty} z_n=0$，$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$. 另外，存在点列 $z_n=1/n$ （其中 $n\in\mathbb{N}^+$），满足 $\lim_{n\to\infty} z_n=0$，$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n}=\infty$.

**习题** 指出下列函数在 $z$ 平面上的奇点及其类型：

(1) $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$, (2) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z-1}$.

## §4 *无穷远点

由于函数在无穷远点没有定义，所以无穷远点总是一个奇点. 我们关心的是，什么情况下，无穷远点是孤立奇点? 下面是一个非常直观的

**定义** 如果函数 $f(z)$ 在 $\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则称 $\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

在 $\infty$ 是孤立奇点的情况下，我们可以作变换 $t=1/z$，将 $z=\infty$ 化作 $t=0$ 来研究. 若 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则 $f(1/t)$ 在 $0<|t|<1/R$（若 $R=0$，则令 $1/R=+\infty$）内解析，即 $t=0$ 是 $f(1/t)$ 的孤立奇点. 于是有以下

**定义** 如果 $t=0$ 是 $f(1/t)$ 的可去奇点，$m$ 阶极点或本性奇点，则相应地称 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，$m$ 阶极点或本性奇点.

由于 $f(1/t)$ 在 $0<|t|<1/R$ 内解析，故可展开为 Laurent 级数：

$$f(1/t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n,$$

展开式的主要部分是 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}/t^n$，换回自变量 $z$，就是说，$f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式的主要部分是 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}z^n$. 由此可见：

如果 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式没有正幂项；

如果 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 阶极点，则 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式的正幂部分为 $\sum_{k=1}^{m} c_{-k}z^k$（其中 $c_{-m}\neq 0$）；

如果 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式有无穷多正幂项.

这些结果表明以上的定义是恰当的，因为在 $\infty$ 附近，正幂项的多少才体现奇性的大小.

如果 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，我们也说 $f(z)$ 在 $\infty$ 解析. 所以，所谓 $f(z)$ 在 $\infty$ 解析，无关乎 $f(z)$ 在 $\infty$ 的导数，事实上，我们从未定义过 $f(z)$ 在 $\infty$ 的导数.

**例 1** 函数 $f(z)=1/(z-1)$ 以 $z=\infty$ 为可去奇点，因为 $f(1/t)=1/(1/t-1)=t/(1-t)$ 以 $t=0$ 为可去奇点. 另一方面，在 $\infty$ 的去心邻域内，即当 $1<|z|<+\infty$，有 Laurent 展开式

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n},$$

它没有正幂项，这正是可去奇点的特征.

**例 2** $n$ 次多项式 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$（其中 $a_n\neq 0$）以 $z=\infty$ 为 $n$ 阶极点，因为 $P_n(1/t)=\sum_{k=0}^{n} a_k/t^k$ 以 $t=0$ 为 $n$ 阶极点. 另一方面，多项式 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 本身已具有 $z$ 的 Laurent 级数的形式（在复平面上，即 $|z|<+\infty$ 成立），它只有正幂项，且最高正幂项为 $a_n z^n$，正是 $n$ 阶极点的特征.

**例 3** 指数函数 $\mathrm{e}^z$ 以 $z=\infty$ 为本性奇点，因为 $\mathrm{e}^{1/t}$ 以 $t=0$ 为本性奇点. 另一方面，在复平面上，即 $|z|<+\infty$，有 $\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$，这是通常的 Taylor 展开式，但它也是 $\infty$ 的去心邻域内的 Laurent 展开式，它有无穷多正幂项，这正是本性奇点的特征.

**例 4** $f(z)=\cot z$ 以 $z=\infty$ 为非孤立奇点，因为 $z_n=n\pi$（其中 $n\in\mathbb{Z}$）是其单极点，而 $z_n\to\infty$（$n\to\infty$）.（参看上节例 4.）

## 补充习题

1. 将下列各函数在指定的环域内展开为 Laurent 级数.

   (a) $1/(z-a)(z-b)$（其中 $b \neq a$）， $|b-a| < |z-a| < \infty$;

   (b) $1/(z-a)(z-b)$（其中 $b \neq a$）， $0 < |z-a| < |b-a|$;

   (c) $\mathrm{e}^{1/(1-z)}$, $1 < |z| < \infty$（计算五个非零项）;

   (d) $1/(z^2-3z+2)$, $1 < |z| < 2$;

   (e) $1/(z^2-3z+2)$, $2 < |z| < \infty$.

2. 研究下列函数在 $z$ 平面上的奇点及其类型.

   (a) $z^2/(\mathrm{e}^z-1)$;

   (b) $\cot \pi z/(z-1)$;

   (c) $(\sin z - z)/z^3$;

   (d) $(\mathrm{e}^{az}-\mathrm{e}^{bz})/z^2$（其中 $b \neq a$）;

   (e) $\cos(1/z^2)$;

   (f) $1/\cos z$.