第3章　光的干涉

§3.1　波的叠加和干涉 (3.1)

- 我们将会学到

- 平面波
- 平面波中若干物理量
- 复振幅表示方法
- 波的叠加原理
- 干涉公式

（标量）平面波

Maxwell equations(真空中的波动方程)

库仑 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$

高斯 $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$

法拉第 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

安培 $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Solution: $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos\left(\boxed{\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t+\xi}\right)$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t+\xi\right)$$

光是一种电磁波，随时间变化和随空间分布的规律，遵从Maxwell方程组。红色框表示平面波相位

特例简化：考察光沿x方向传播，在标量波近似下(即各向同性介质中旁轴条件)，并取 (-ωt)项，则标量平面波可表示为:

$E(x,t)=E_0\cos(kx-\omega t+\xi)$，或者

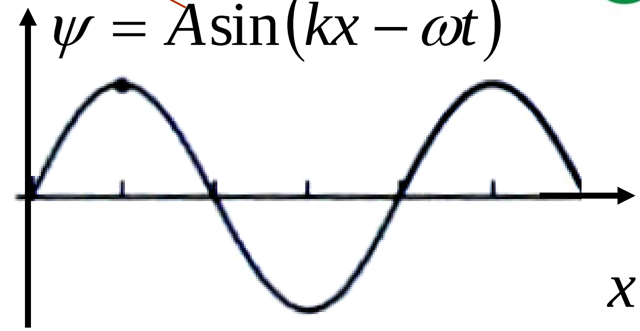
$E(x,t)=E_0\sin(kx-\omega t+\xi)$

其中，平面波相位为$\varphi=kx-\omega t+\xi$

平面波的特点

A代表实数振幅，常数

关于 cos()和sin()的等价性:



$$\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$$

$$\psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t-\pi/2)$$

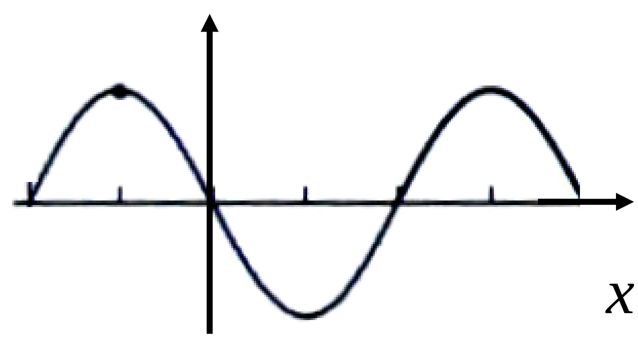
两个等价的解

特殊相位: $\xi = \pi = 180^{o}$

$$\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\pi)$$

$$\psi(x,t) = A\sin(\omega t-kx)$$

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t-kx-\pi/2)$$



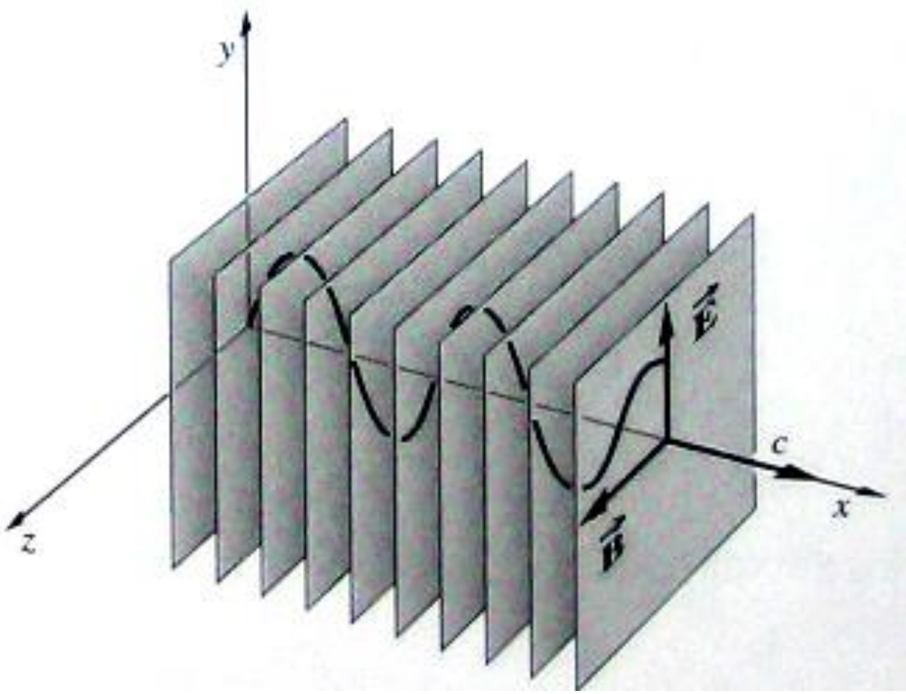
注意: sin(kx-ωt) 和 sin(ωt-kx) 均表示波向右移动，只是相位相差了180度 (π) 而已.

光波的等相面

平面波：$E(x,t)=E_0\cos(kx-\omega t+\xi)$，或者$E(x,t)=E_0\sin(kx-\omega t+\xi)$

令平面波相位为常数，即

$$\varphi=kx-\omega t+\xi=\varphi_0=\text{常数}$$



我们发现对于给定一个时刻，相位分布只与空间分量x有关。如果我们画出某一时刻光波在空间的分布，可以看出具有相同相位的空间点构成一个平面，该平面称为等相面。

时间频率 vs 空间频率（波矢）

重写平面波位相因子（令 $\xi=0$）： $\varphi = kx - \omega t$

（1）固定空间一点，例如**x=0**。随着时间推移，可以发现电磁波每隔 $\omega t = 2m\pi$ **(m**为整数） 重复一次，因此可以定义时间周期和时间频率

$$T = 2\pi / \omega \qquad f = 1/T = \omega / 2\pi$$

（2）固定某个时刻，例如**t=0**。在整个空间中，可以发现电磁波每隔 $kx = 2m\pi$ 重复一次，于是有空间周期（波长）和空间频率（波矢）的关系

$$\lambda \qquad k = 2\pi / \lambda$$

时间频率 vs 空间频率（波矢）

- 空间频率也叫波矢。波矢在三维空间中是一个矢量，其大小表示沿传播方向2pi长度内的波数，方向是等相面移动方向，其表达式为

$$\boxed{\mathbf{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{\mathbf{k}}}$$

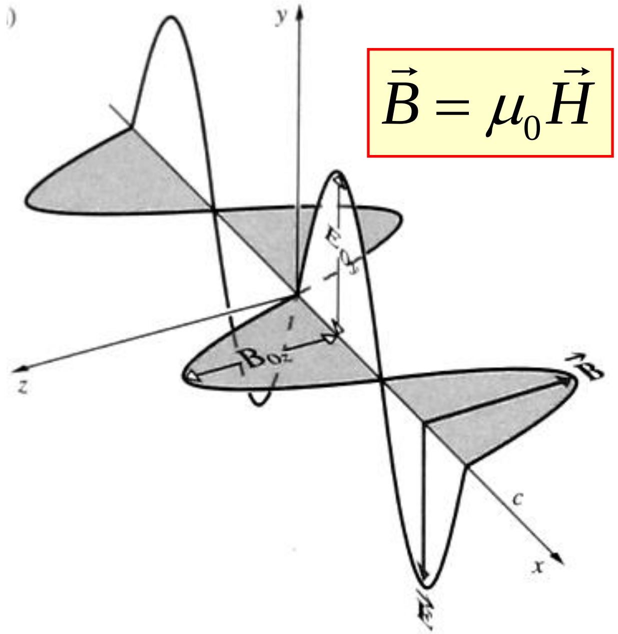
- 在三维直角坐标系下，相位可以写成：

$$\boxed{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=k\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)}$$

- 平面波的特点：常数振幅$\mathbf{E_0}$；线性位相。
- 可见，光波函数 $E\left(\mathbf{r},t\right)$ 表示光波在某时刻光场振幅(矢量）随空间分布的周期性，也表示光波在某点光场振幅(矢量）随时间变化的周期性

$$\boxed{E\left(\mathbf{r},t\right)=E_0\cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi_0\right)}$$

各向同性介质（如真空）中光以横波形式传播

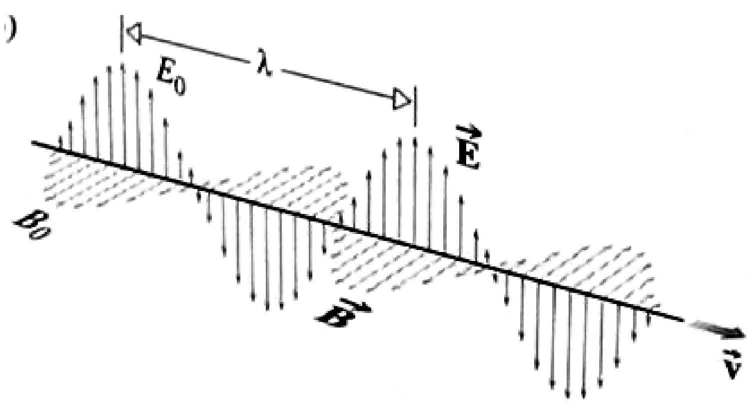


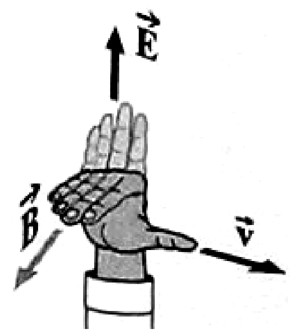
$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}}$$

* 电磁波传播方向
=电场与磁场叉乘后的方向

$$\boxed{\vec{E} \times \vec{H}}$$

* 电磁场并非空间运动，而是一种空间分布。在空间上一点，电场的变化会引起该点磁场的变化。反之亦然。





球面波

- Maxwell方程的另一个特解
- 点光源在各向同性均匀介质中传播，光波以相同的速率向各个方向传播。其波面（等相面）是球面
- 由平面波的知识可知：任一点**P(*x*,*y*,*z*)**的振动可表示为

$$\boxed{\vec{E}(r,t)=\vec{E}(r)\cos(kr-\omega t+\varphi_0)}$$

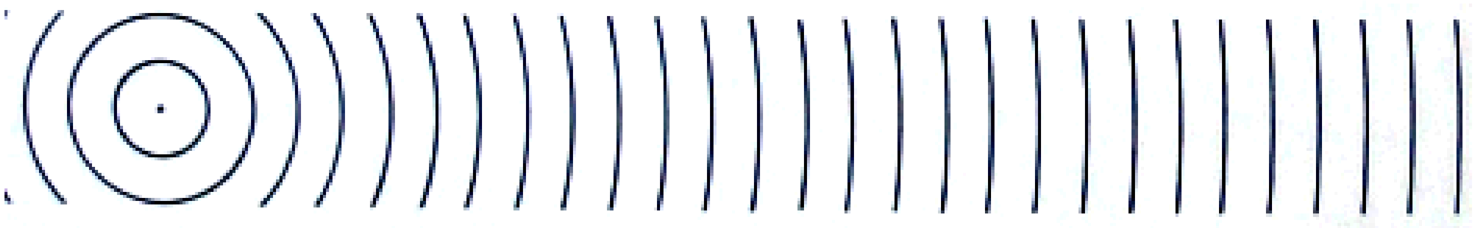
- 其中E(r)表明球面波振幅会随传播距离而变化，由能量守恒定律可得：　　E(r) = E_0/r .
- 所以

$$\boxed{\vec{E}(r,t)=\frac{\vec{E}_0}{r}\cos(kr-\omega t+\varphi_0)}$$

- 标量波近似：将电场 $\vec{E}$ 看成标量 E ，只有大小没有方向

球面波与平面波的关系：

- 当远场条件满足时，球面波可近似表示成平面波。



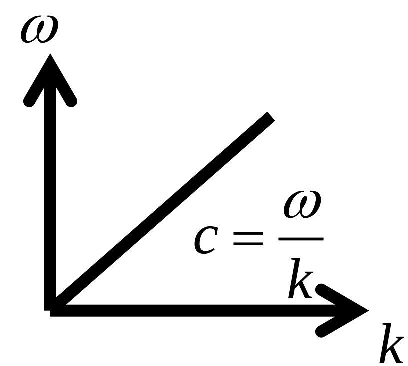
光波在真空中的色散关系和相速度

为了简化问题，我们令 $E(x,t)=E_0\cos(kx-\omega t+\xi)$

代入波动方程（由Maxwell方程得到） $\boxed{\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}E-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}E=0}$

得到真空中电磁波（光）的色散关系

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\Rightarrow\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\triangleq c$$

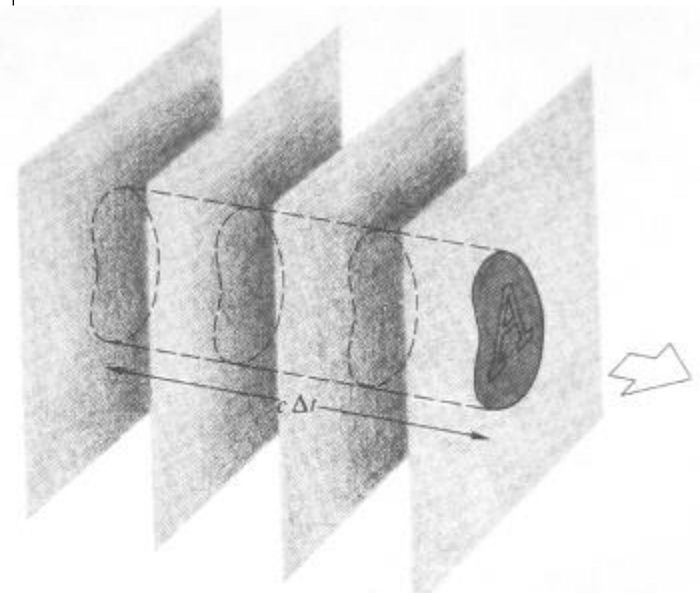


- 该速度可以用于表征相位传播快慢，数值上等于等相面移动的速度，也称相速度

【我们对等相面 $kx-\omega t+\xi=\varphi_0=Const$ 两边求导，有

$$v_p=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c=2.997\,924\,58\times10^8\,m/s$$ 】

光波的能量传播方向：波印廷矢量

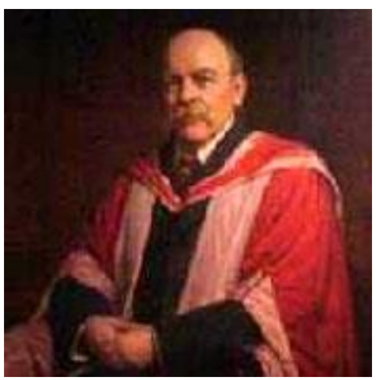


电磁场包含有能量。在真空中，能量是以光速在传播的

假定在时间Δt内，穿过面积为A的能量为$uAc\Delta t$

那么，单位时间内在单位面积上流过的电磁波能量称为能流密度S

$$S=\frac{uAc\Delta t}{A\Delta t}=uc=c\varepsilon_0 E^2=c\varepsilon_0 E\left(\overbrace{cB}^{E}\right)=\overbrace{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}^{c^2}\varepsilon_0 EB=\frac{1}{\mu_0}EB$$



John Henry Poynting (1852-1914)

波印廷矢量

The Poynting vector:

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{H}$$

在真空（包括各向同性）中，能流密度方向与波的相位传播方向一致。但在各向异性介质中则不一致

(量纲: W/m²)

光波的能量传播：光强Intensity

波印廷矢量是一直在振动着，振动频率与电磁波频率相当。例如在可见光波段是以~10 [15] Hz 频率振动。但是，大多数探测器只能探测一段时间的平均效应（慢响应时间）

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0\right)\cos^2\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right]$$

这样的话，单位时间内的平均能流： $\langle S\rangle_T = \frac{1}{2\mu_0}E_0B_0 = \frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2$

波印廷矢量的时间平均

Intensity:

$$I \equiv \langle S\rangle_T = \frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2 = \frac{\mu_0}{2c}H_0^2$$

该物理量就是我们平常说的光强，它正比于电场振幅的平方。

平面波复振幅（P101）

复数表示：为使计算简化，往往将余弦表达式用相应的复数表示。（数学公式：$\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ ）

- 对一般的波动表达式有　　$E(x,t)=E_0\cos(kx-\omega t+\xi)$
- 于是，复数表示形式写为

$$E(x,t)=\tilde{E}(x)\exp(-i\omega t)=E_0\exp(ikx)\exp(i\xi)\exp(-i\omega t)$$

复振幅

- 平面波（沿x方向）复振幅　$\tilde{E}(x)=E_0\exp[i(kx+\xi)]$
- 光强可表示为：　$\boxed{I=\tilde{E}\cdot\tilde{E}^*}$　（*表示取复共轭）

直角坐标系下任意方向平面波的复数表示

$$E(\vec{r},t)=E_0\exp\left[i\left(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t+\xi\right)\right]$$

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z$$

直角坐标系下的电磁波函数

$$E(x,y,z,t)=E_0\exp\left[i\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t+\xi\right)\right]$$

$$E(x,y,z,t)=E_0\exp\left[i\left(k\left(\alpha x+\beta y+\gamma z\right)-\omega t+\xi\right)\right]$$

复振幅 $\tilde{E}(x,y,z,t)=E_0\exp\left[i\left(k_x x+k_y y+k_z z+\xi\right)\right]$

$$\left|\vec{k}\right|=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

α, β, γ 为 波矢$\vec{k}$的方向余弦

波的叠加原理

波的叠加原理：在两列或多列波的交叠区域内，每点的振动等于各列波在该点振动的代数和。

Superposition principle: the resulting disturbance at each point in the region of overlap of two or more waves is the algebraic sum of the individual constituent waves at that location.

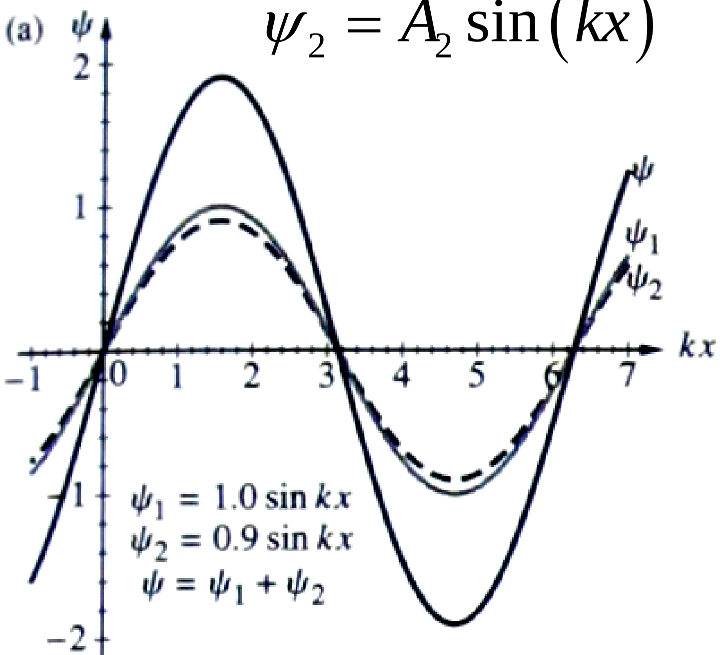
Note: once waves pass the intersecting region they will move away unaffected by encounter (光的独立传播原理)

波的叠加原理：同相和反相， $\psi = E$

两列波同相: $\Delta\varphi=0$

$$\psi_1 = A_1 \sin(kx)$$

$$\psi_2 = A_2 \sin(kx)$$



$$\psi = (A_1 + A_2)\sin(kx)$$

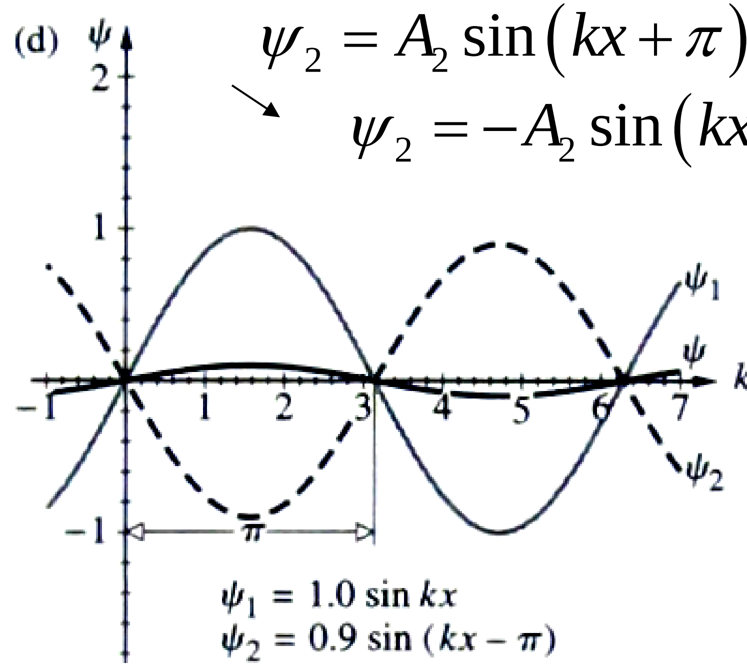
合成波的振幅增加:*相干相长*

两列波反相 : $\Delta\varphi=\pi$

$$\psi_1 = A_1 \sin(kx)$$

$$\psi_2 = A_2 \sin(kx+\pi)$$

$$\psi_2 = -A_2 \sin(kx)$$



$$\psi = (A_1 - A_2)\sin(kx)$$

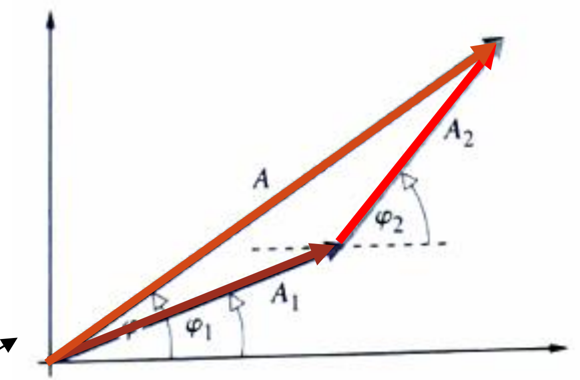
合成波的振幅减少:*相干相消*

波的叠加原理：一般情况 $\psi = E$

复数运算计算两列波的叠加

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \boxed{A_1 e^{i\varphi_1}} + \boxed{A_2 e^{i\varphi_2}}$$

$$\psi = \boxed{A e^{i\varphi}}$$



两个复数相加实际上是矢量相加

强度：$I(\vec{r}) = \psi\psi^* = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*) = \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_1\psi_2^* + \psi_2\psi_1^*$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 e^{i[\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})]} + A_1 A_2 e^{-i[\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})]}$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[\varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})] = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta(\vec{r})$$

光强分布

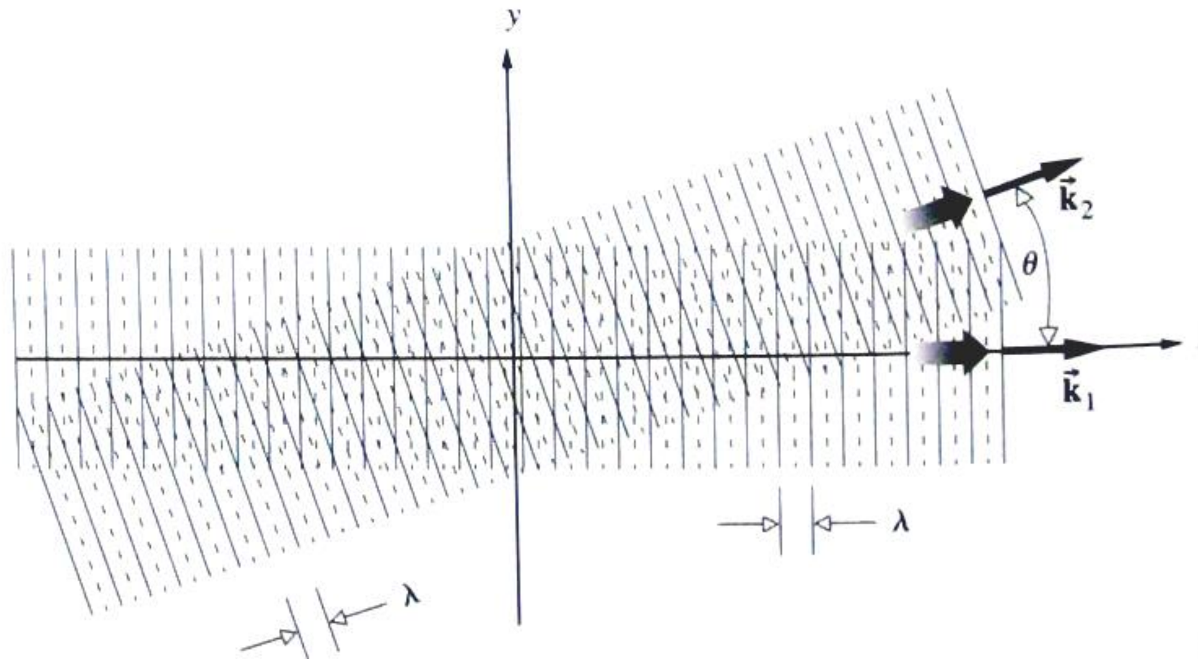
- 极大：　相位差$\delta(\vec{r}) = k_0 \Delta L = 2m\pi$，光程差$\Delta L = m\lambda$
- 极小：　相位差$\delta(\vec{r}) = (2m+1)\pi$，光程差$\Delta L = (2m+1)\lambda/2$

课堂练习

同一光源，经分束后，沿着不同方向传播。请写出两列平面波的复振幅。（提示：相同波长，初相位相等）

解: 复数形式

$$\boxed{\psi = Ae^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}}$$



空间相位

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

第一列波:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = kz$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{E}_1 = A_1 e^{ikz}$$

第二列波：

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k\sin\theta \cdot y + k\cos\theta \cdot z$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{E}_2 = A_2 e^{ik(y\sin\theta + z\cos\theta)}$$

复习

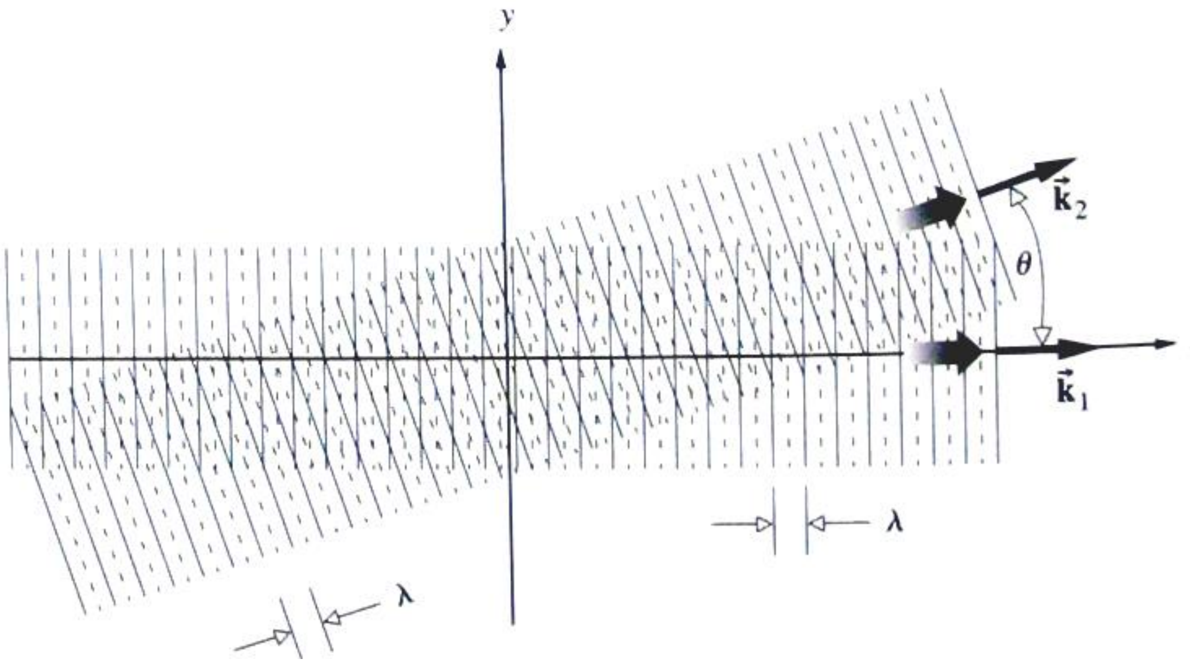
同一光源经过等振幅分束后，分别沿着不同方向传播的两束光。第一束光水平传播。第二束光以θ度角传播，且经过了相位延迟器并获得了额外的相位π。两列平面波的复振幅。

解: 第一列波:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = kz$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{E}_1 = e^{ikz}$$



第二列波:

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k\sin\theta \cdot y + k\cos\theta \cdot z$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{E}_2 = e^{i\left[k\left(y\sin\theta + z\cos\theta\right)+\pi\right]} = -e^{ik\left(y\sin\theta + z\cos\theta\right)}$$

π相位引起振幅相差一个负号