

一. 填空

1. 函数 $f(x) = \lg \sin x - \arccos \frac{x}{5}$ 的定义域是_____;

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} =$ _____;;

3. 函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的间断点是_____;

4. 设 $y = f(\arcsin \frac{1}{x})$, 其中 $f(x)$ 可导, 则 $dy =$ _____;

5. 函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的 2 阶导数 $y'' =$ _____.

二. 选择题

1. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 ()

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小;; (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小; (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

2. 下列各式**错误**的是 ()

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$;

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$;

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$;

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = 1$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1; \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 ().

(A) 左右导数都存在; (B) 左导数存在, 右导数不存在;

(C) 左导数不存在, 右导数存在; (D) 左右导数都不存在.

三. 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$

2. 设 $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+3x)}{1 - \cos x}$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2-x}$

5. 求参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = t^2 + \arctan t \end{cases}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

6. 求方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

7. 设 $F(x) = \int_x^{x^2} x \cos t^2 dt$, 求 $\frac{dF(x)}{dx}$ 和 $\frac{d^2 F(x)}{dx^2}$.

8. 求 $y = \frac{x^{\sqrt{x}}(3-2x)^2}{(1+x)\sqrt[3]{2+x}}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

9. 计算不定积分 $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x + \cos x - 6}$

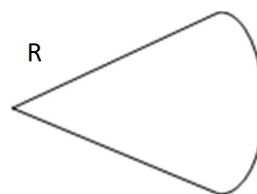
10. 计算不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x(x-1)}}$

11. 计算定积分 $\int_{-1}^1 (x^3 \arctan x + e^{x^2} \sin x) dx$

12. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续性, $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的存在性。

13. 设扇形的圆心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R = 100\text{cm}$ 。如果圆心角不变, 半径 R 减少 1cm , 问扇

形面积大约改变了多少? (扇形面积 $= \frac{1}{2} \alpha R^2$)



14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$. 证明: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得 $f(\xi)e^\xi = \xi$.

15. 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 在区间 $(1,3)$ 内的一点, 使得该点的切线与直线 $x = 1, x = 3$ 以及 $y = \sqrt{x}$ 所围的平面图形面积最小, 并求此取最小面积的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

16. 求函数 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积。