电动力学

矢量分析，复习与提高

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

February 26, 2019

本课程第一个问题:

在"电动力学"课程的学习中，为什么矢量分析是重要的?

电磁现象的基本规律是 Maxwell 方程组. 例如，真空中的 Maxwell 方程组写为:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q/\epsilon_0, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0,$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0, \qquad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} - \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I.$$

它们可以等价地表达为:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0, \qquad \nabla\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0,$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{J}.$$

数学定理:

将 Maxwell 方程组从具有浓浓实验味的积分形式转化为更适合于挖掘其物理性质的微分形式的过程中，我们使用了两条数学定理。这就是诸位在多元函数微积分课堂上学到的

1. 奥高散度定理:

$$\oiint_S \vec{\mathscr{A}} \cdot d\vec{s} = \iiint_V d^3x \, \nabla \cdot \vec{\mathscr{A}}$$

2. 斯托克斯环路定理:

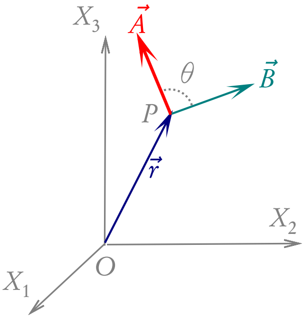
$$\oint_C \vec{\mathscr{A}} \cdot d\vec{l} = \iint_S d\vec{s} \cdot \nabla \times \vec{\mathscr{A}}$$

式中 $\nabla \cdot \vec{\mathscr{A}}$ 和 $\nabla \times \vec{\mathscr{A}}$ 分别是矢量场 $\vec{\mathscr{A}}$ 的散度和旋度。

矢量分析中的三度运算:

式中的符号 ∇ 称为 nabla 算符。其在 Cartesian 直角坐标系里的表达式为:

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$



nabla 算符 ∇ 与标量场的梯度运算密切相关。在直角坐标系中，考虑标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在场点 $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ 邻域的全微分，

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3$$

φ 的梯度 Gradφ 按下式定义:

$$d\varphi = \mathrm{Grad}\varphi \cdot d\vec{r} = \mathrm{Grad}\varphi \cdot \left[\vec{e}_1 dx_1 + \vec{e}_2 dx_2 + \vec{e}_3 dx_3\right]$$

设

$$\mathrm{Grad}\varphi = \xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \xi_3\vec{e}_3$$

我们有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 = d\varphi \\
&= \mathrm{Grad}\varphi\cdot d\vec{r} \\
&= \mathrm{Grad}\varphi\cdot\left[\vec{e}_1dx_1 + \vec{e}_2dx_2 + \vec{e}_3dx_3\right] \\
&= \left[\xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \xi_3\vec{e}_3\right]\cdot\left[\vec{e}_1dx_1 + \vec{e}_2dx_2 + \vec{e}_3dx_3\right] \\
&= \xi_1dx_1 + \xi_2dx_2 + \xi_3dx_3
\end{aligned}$$

最后一步利用了坐标系基矢之间的标量积[1]满足正交归一的性质。比较知：

$$\xi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\quad \xi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\quad \xi_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}.$$

[1]俗称：点乘。

从而：

$$\mathrm{Grad}\varphi = \vec{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$$

所以，标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的梯度可以通过 nabla 算符表达为：

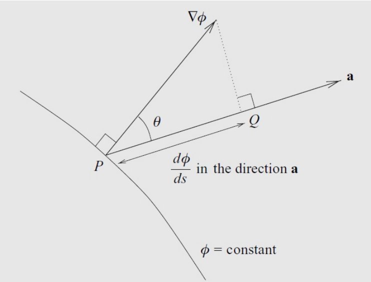
$$\mathrm{Grad}\varphi = \left[\vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right]\varphi = \nabla\varphi$$

鉴于此，nabla 算符通常亦称为梯度算符。

$\nabla\varphi$ 的几何意义：

- $\nabla\varphi$ 本身是矢量场，其方向沿着曲面 $\varphi = c$（等 φ 面）的法线方向。
- $\nabla\varphi$ 的量值是标量场 φ 方向导数的最大值，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\nabla\varphi|\cos\theta$$



矢量场在空间各点的性质完全决定于其散度和旋度[2]。

设三维 Euclidean 空间 $\mathbb{M}$ 中存在矢量场分布 $\vec{\mathscr{A}}(x, y, z)$. 考虑其中的一个区域 Ω, 其体积为 V、表面为闭合曲面 S. 矢量场 $\vec{\mathscr{A}}$ 对于 S 面的通量与体积 V 的比值在 $V \to 0$ 条件下的极限称为 $\vec{\mathscr{A}}$ 的散度:

$$\mathrm{Div}\vec{\mathscr{A}} = \lim_{V\to 0} \frac{\oiint_S \vec{\mathscr{A}} \cdot d\vec{\sigma}}{V}$$

- $\mathrm{Div}\vec{\mathscr{A}}$ 是一个标量。
- 矢量场的散度可以通过 nabla 算符表达为:

$$\mathrm{Div}\vec{\mathscr{A}} = \nabla \cdot \vec{\mathscr{A}}$$

- 散度用来描写矢量场的有源性。凡是 $\nabla \cdot \vec{\mathscr{A}} \neq 0$ 的空间点都可以看作 $\vec{\mathscr{A}}$ 的源。若空间各点处处均有 $\nabla \cdot \vec{\mathscr{A}} = 0$, 则 $\vec{\mathscr{A}}$ 是无源场。

[2] 也可以合法地定义矢量场的梯度，其结果是一个二阶张量。

同理，考虑 $\mathbb{M}$ 中的一个曲面 ζ，其面积为 S、边界为闭合曲线 C. 当 $S \to 0$ 时，矢量场 $\vec{\mathscr{A}}$ 对于 C 的环量与 S 的比值的极限定义为 $\vec{\mathscr{A}}$ 的旋度 $\mathrm{Curl}\vec{\mathscr{A}}$ 沿该曲面法线的分量：

$$\mathrm{Curl}\vec{\mathscr{A}}\Big|_n = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_C \vec{\mathscr{A}} \cdot d\vec{l}}{S}$$

- $\mathrm{Curl}\vec{\mathscr{A}}$ 本身是一个矢量。
- 矢量场的旋度可以通过 nabla 算符表达为：

$$\mathrm{Curl}\vec{\mathscr{A}} = \nabla \times \vec{\mathscr{A}}$$

- 旋度用来描写矢量场是否是保守力场。 若空间各点处处均有 $\nabla \times \vec{\mathscr{A}} = 0$，则 $\vec{\mathscr{A}}$ 是保守力场，$\vec{\mathscr{A}}$ 的力线一定不会形成闭合曲线。可以引入一个辅助的标量场 φ 等效地描写此矢量场的性质：

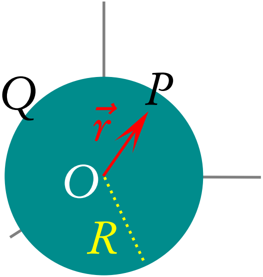
$$\vec{\mathscr{A}} \propto \nabla \varphi$$

初试身手:

1. 考虑一带电总量为 Q、半径为 R 的带电球体，其在球体内部某点 P 处激发的静电场强度为:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\,r^3\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\,R^6}$$

式中 $\vec{r}$ 是 P 点相对于球心的位置矢径，r 是其大小，$0 \leqslant r < R$. 请分别求出 P 点电场强度的散度与旋度.



矢量运算为什么是困难的？

依在下愚见，大部分同学对于电动力学三大数学基础的掌握情况中以“矢量分析”最为薄弱。

“矢量代数与矢量分析”只是大家在微积分课程学习过程中的一段小插曲。其难度、深度在高端大气上档次的“数理方程”和“线性代数”面前简直就不值一提。

那么，是什么原因导致矢量分析在芸芸众生眼里变成了公认的电动力学征途上排行第一的拦路“虎”？

Cat:

此路是我开
此树是我栽
要想过此路
留下买路财

对于矢量运算的困难，一般人总结出的原因大约有如下几条：

1. 某些学生跳不出高中阶段标量代数运算的思维模式，从而经常不自觉地把矢量运算误当做标量运算处理.
2. 对于微积分的思算和应用，学生普遍关注较多. 但许多人却不愿也没有对矢量运算也给予足够的重视，有些人甚至在表达矢量时略去矢量箭头(不写)，不习惯使用标准的数学手段表达矢量的方向，从而造成了矢量运算中的各种错误.

拙见：

愚以为，即使学习态度端正，要真正掌握矢量分析也是有一定难度的. 对大多数同学而言，矢量分析之所以困难其原因本质上只有两个：

- 同学们在数学课堂学到的矢量表达方法效率不高。要准确地表达一个矢量，在基矢为 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 的正交曲线坐标系里，需要将其写为三项之和:

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

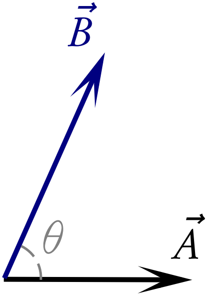
  啰嗦!
- 在曲线坐标系中，基矢 $\vec{e}_i\ (i = 1, 2, 3)$ 一般情况下不是常矢量，

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t} \neq 0$$

  鉴于此，某些同学误以为欲学好矢量分析必须事先学好微分几何 (大多数同学没有学过)，无形中形成了对于矢量分析的恐惧心理[3]。

找到原因后自然要对症下药。今天先给大家介绍物理学中矢量的高效表达方式。

[3]微分几何这种类似于紫霞秘籍的高级货对于掌握电动力学所需的矢量分析而言其实是多余的，这是因为 $\mathbb{R}^3$ 是内禀曲率为零的平直空间。

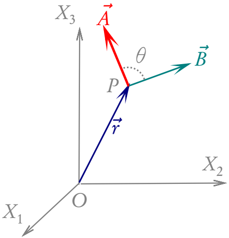


先对 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量代数作一简单复习。矢量之间的基本代数运算是：

1. 矢量加法服从平行四边形法则，满足交换律：
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

2. 标量积：
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$
满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$.

3. 矢量积不满足交换律，但满足反交换律：
$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{A}\times\vec{A}=0.$$
其大小定义为：$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta$，方向由右手法则确定。



若使用坐标系，任意矢量之间的基本代数运算可以归于坐标系的基矢。对于正交归一的右手曲线坐标系而言，

- 标量积：

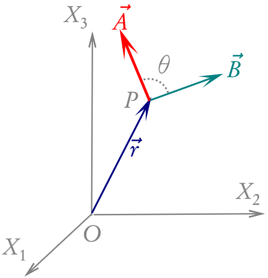
$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=1,\quad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1,\quad \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3=1,$$
$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0,\quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=0,\quad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0$$

基矢之间的标量积可以简洁地归纳为：

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$$

式中的 δ_{ij} 称为 Kronecker 符号，

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=j\\ 0, & \text{若 } i\neq j\end{cases}$$



- 正交归一的右手曲线坐标系基矢之间的矢量积如下:

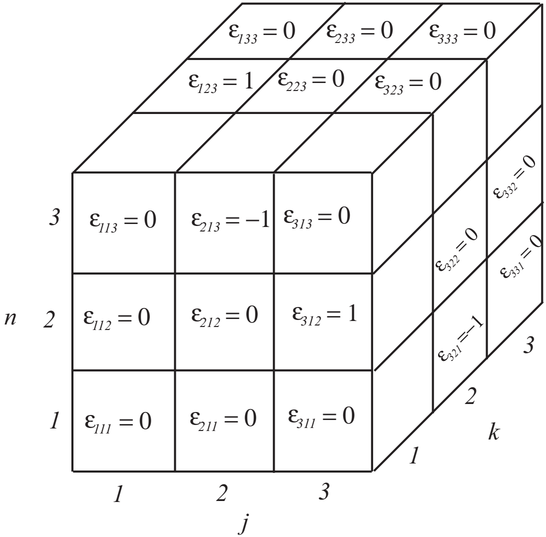
$$
\begin{aligned}
&\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0, \qquad && \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\\
&\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, && \\
&\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, && \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0,\\
&\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, && \\
&\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, && \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,\\
&\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0 &&
\end{aligned}
$$

它们可以简洁地写为:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

式中 ϵ_{ijk} 称为 Levi-Civita 三秩全反对称张量。

Levi-Civita 张量诸分量ϵ_{jkn}的取值魔方：



Levi-Civita 三秩全反对称张量 ϵ_{ijk} 的定义式可以等价地写为:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & 若\ (ijk)\ 是\ (123)\ 及其偶排列 \\ -1, & 若\ (ijk)\ 是\ (123)\ 的奇排列 \\ 0, & 其他情形 \end{cases}$$

显然, $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$ 但 $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$.

ϵ_{ijk} 可以利用 δ_{ij} 表达为:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2} \\ &\quad - \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1} - \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3} \end{aligned}$$

或者写为如下行列式:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

假设 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 二矢量在某右旋正交曲线坐标系中的分量表达式为:

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3, \quad \vec{B} = B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3.$$

则有:

$$\begin{aligned}
\vec{A} + \vec{B} &= (A_1 + B_1)\vec{e}_1 + (A_2 + B_2)\vec{e}_2 + (A_3 + B_3)\vec{e}_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3}(A_i + B_i)\vec{e}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3\right) \cdot \left(B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3\right) \\
&= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} A_iB_i
\end{aligned}$$

矢量代数, 6

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \vec{e}_2(A_3B_1 - A_1B_3) + \vec{e}_3(A_1B_2 - A_2B_1) \\
&= \vec{e}_1(\epsilon_{123}A_2B_3 + \epsilon_{132}A_3B_2) + \vec{e}_2(\epsilon_{231}A_3B_1 + \epsilon_{213}A_1B_3) \\
&\qquad + \vec{e}_3(\epsilon_{312}A_1B_2 + \epsilon_{321}A_2B_1) \\
&= \vec{e}_1\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{1jk}A_jB_k + \vec{e}_2\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{2jk}A_jB_k + \vec{e}_3\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{3jk}A_jB_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3}\vec{e}_i\epsilon_{ijk}A_jB_k
\end{aligned}
$$

这些表达式实在是太笨拙、太啰嗦了！

Question:
矢量及其运算的表达方式可否大幅改进？

矢量代数, 7

以上复习中对于矢量的表达实在笨拙。倘若不加改善就将其应用于电动力学的学习，不挫伤诸位的学习热情那一定是不可能的。

怎样改善？

矢量 $\vec{A}$ 在直角坐标系中常表为：$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$. 这一表述虽然准确，但写法太繁琐。 可以将其简化为：

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\vec{e}_i$$

然而，求和号仍然很烦人。
进一步略去这烦人的求和号后，上式变为：

$$\vec{A} = A_i\vec{e}_i$$

这就是我们在电动力学学习中将使用的矢量表达式。 注意:

1. 重复指标代表求和。
2. 在方程的任一项中，表示求和的重复指标只能出现两次。

重复指标称为哑标，可以替换为任意其他字母。例如：

$$\vec{A} = A_i\vec{e}_i = A_j\vec{e}_j = A_k\vec{e}_k$$

那么，为什么说使用了上述简化符号后就可以极大地提高矢量代数运算的效率呢？

理由在于 δ_{ij} 和 ϵ_{ijk} 所具有的如下性质：

$$\delta_{ij}\delta_{mj} = \delta_{i1}\delta_{m1} + \delta_{i2}\delta_{m2} + \delta_{i3}\delta_{m3} = \delta_{im} \quad \rightsquigarrow \quad \delta_{ij}\delta_{mj} = \delta_{im},$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \quad \rightsquigarrow \quad \delta_{ii} = 3,$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

最后这个公式非常有用，有人誉其为“值得任何一个想学好物理的学生留驻心底的数学公式”[4]。

[4] E. G. Harris, Introduction to Modern Theoretical Physics, Vol1, John Wiley & Sons, 1975, Page 11.

Warning:

数学恒等式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

是进行矢量代数运算的一招绝杀技。

Harris 书上的原话如下：

A very useful expression which it is worthwhile for any serious student of physics to commit to memory is the following:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{1-29}$$

Note that the subscript k is repeated and hence is to be summed over. We leave it as an exercise for the reader to check that Eq. 1-29 is indeed true.

为节省时间计，请原谅在下在此越俎代庖，对这一恒等式给予证明。恒等式 $\delta_{ij}\delta_{jm} = \delta_{im}$ 与 $\delta_{ii} = 3$ 是显然的，无需赘言。以下仅考虑 ϵ_{ijk} 所具有的性质。注意到：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

我们有：

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnl} &= \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{m1} & \delta_{n1} & \delta_{l1} \\ \delta_{m2} & \delta_{n2} & \delta_{l2} \\ \delta_{m3} & \delta_{n3} & \delta_{l3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kl} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

在其中令 $k=l$，则有：

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} &= \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ik} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jk} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{km} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}\delta_{ik} \\
&\qquad - \delta_{kn}\delta_{jk}\delta_{im} - 3\delta_{jm}\delta_{in} \\
&= 3\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{jn}\delta_{im} - 3\delta_{jm}\delta_{in} \\
&= \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}
\end{aligned}
$$

这就是期望中的恒等式。显见，它还有如下两个推论：

1. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta_{im}$.
2. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

利用新引入的简化表达式，矢量代数的基本计算公式可以归纳为：

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk}\vec{e}_k$$

从而：

$$\begin{aligned}
\vec{A} + \vec{B} &= (A_i + B_i)\vec{e}_i \\
\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_i\vec{e}_i \cdot B_j\vec{e}_j = A_iB_j(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i \\
\vec{A} \times \vec{B} &= A_i\vec{e}_i \times B_j\vec{e}_j = A_iB_j(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \epsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k
\end{aligned}$$

显然，

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

且：

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{e}_i\epsilon_{ijk}A_j(\vec{B} \times \vec{C})_k = \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}A_jB_mC_n \\
&= \vec{e}_i(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n \\
&= \vec{e}_i(B_iA_jC_j - C_iA_jB_j) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}
\end{aligned}$$

矢量的简化表达式真正的用武之地是 Cartesian 直角坐标系中的矢量分析。首先，我们把 Cartesian 直角坐标系中的梯度算符进行简化:

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \rightsquigarrow \quad \nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

显然，这个表式还是略嫌繁琐。今后，我们将使用 ∂_i 替代 $\frac{\partial}{\partial x_i}$。从而梯度算符可以有如下更简化的表达式:

$$\nabla = \vec{e}_i \partial_i$$

- 梯度算符的上述表达式仅仅成立于 Cartesian 直角坐标系。
- 导数运算的基本性质是:

$$\partial_i x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j, \\ 0 & \text{若 } i \neq j. \end{cases}$$

简记为:

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}$$

矢量分析, 2

对于矢量场可以定义其散度和旋度，分别描写该场的有源性和有旋性。在 Cartesian 直角坐标系中，矢量场 $\vec{A}$ 的散度计算公式是:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \vec{e}_i\partial_i\cdot(A_j\vec{e}_j) = (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)\partial_i A_j + A_j\vec{e}_i\cdot\partial_i\vec{e}_j$$

Cartesian 直角坐标系有别于其他任何一个正交曲线坐标系的特点是：直角坐标系的所有基矢均是常矢量，

$$\rightsquigarrow\quad \partial_i\vec{e}_j = 0.$$

所以，上面的散度计算可以进一步简化为:

$$\nabla\cdot\vec{A} = (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)\partial_i A_j = \delta_{ij}\partial_i A_j \quad\rightsquigarrow\quad \nabla\cdot\vec{A} = \partial_i A_i$$

若写成显式，即为:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

同理，矢量场 $\vec{A}$ 的旋度在 Cartesian 直角坐标系中的计算公式是:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_i \partial_i \times (A_j \vec{e}_j) = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \partial_i A_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \partial_i A_j$$

即,

$$\nabla \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k$$

写作显式，就是:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$$

此乃数学教材中著名的旋度计算公式:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

直角坐标系中进行矢量分析的秘诀:

1. 矢量运算完全由坐标系的基矢承担.
2. 微商运算完全由矢量的分量承担，二者井水不犯河水.

忠告:

- 若某矢量场在球坐标系中表达为,

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, \phi)\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \phi)\vec{e}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi)\vec{e}_\phi$$

则在计算其散度、旋度时须知:

$$\nabla \cdot \vec{A} \neq \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \vec{A} \neq \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & A_\theta & A_\phi \end{vmatrix}$$

标量场:

若标量 F 的量值成为场点坐标 (x_1, x_2, x_3) 的函数，则称 F 为一标量场.

对于标量场 F, 通常以如下方式定义其梯度 ∇F:

$$dF = d\vec{r} \cdot \nabla F$$

在 Cartesian 直角坐标系里，标量场的全微分和场点位置矢量的微分分别表为：$dF = dx_i \partial_i F$ 和 $d\vec{r} = \vec{e}_j dx_j$。所以，

$$dx_i \partial_i F = dx_j \vec{e}_j \cdot \nabla F = dx_j (\nabla F)_j \quad \rightsquigarrow \quad (\nabla F)_i = \partial_i F$$

即：

$$\nabla F = \vec{e}_i \partial_i F$$

这个结果恰好与直接写出来的一致.

现在证明矢量分析中的两个恒等式:

1. 梯度场无旋.
2. 旋度场无散.

以 Cartesian 直角坐标系为依托，则梯度场 ∇F 的旋度计算如下:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla F &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla F)_k \\
&= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F \\
&= \frac{1}{2} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F + \frac{1}{2} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F \\
&= \frac{1}{2} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k F + \frac{1}{2} \vec{e}_i \epsilon_{ikj} \partial_k \partial_j F \\
&= \frac{1}{2} \vec{e}_i (\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj}) \partial_j \partial_k F \\
&= 0
\end{aligned}
$$

恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ 的验证留给同学们练习。

矢量分析, 6

教材的附录一中枚举了许多涉及梯度算符的运算公式. 这些公式在电动力学学习中随处可见. 但是, 倘若我们必须时时记忆这些公式, 那学习电动力学的过程将是痛苦不堪的.

事实上, 只要掌握了 Cartesian 直角坐标系中矢量与梯度算符的简化表达式, 即

1. $\vec{A} = A_i \vec{e}_i$
2. $\nabla = \vec{e}_i \partial_i$

则这些公式都变成了平庸的矢量恒等式, 根本无须记忆.

下面我们举例论证这个观点。考虑验证教材附录一中的 (I.22) 式:

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla) \vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g}) \vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla) \vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f}) \vec{g}$$

在直角坐标系中，矢量$\vec{f}$、$\vec{g}$分别表为：$\vec{f}=f_i\vec{e}_i$和$\vec{g}=g_i\vec{e}_i$. 所以，

$$\vec{f}\times\vec{g}=\vec{e}_k\epsilon_{kmn}f_mg_n \quad\rightsquigarrow\quad (\vec{f}\times\vec{g})_k=\epsilon_{mnk}f_mg_n$$

进而，

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g}) &= \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{f}\times\vec{g})_k \\
&= \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{mnk}f_mg_n) \\
&= \vec{e}_i\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\ \partial_j(f_mg_n) \\
&= \vec{e}_i(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})(f_m\partial_jg_n+g_n\partial_jf_m) \\
&= \vec{e}_i(f_i\partial_jg_j+g_j\partial_jf_i)-\vec{e}_i(f_j\partial_jg_i+g_i\partial_jf_j) \\
&= (\vec{e}_if_i)(\partial_jg_j)+(g_j\partial_j)(\vec{e}_if_i)-(f_j\partial_j)(\vec{e}_ig_i)-(\vec{e}_ig_i)(\partial_jf_j) \\
&= \vec{f}(\nabla\cdot\vec{g})+(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}-\vec{g}(\nabla\cdot\vec{f})
\end{aligned}$$

证毕.

例一：

请计算矢量场 $\vec{V}$ 旋度的旋度：$\nabla\times(\nabla\times\vec{V}) = ?$

解：

在 Cartesian 直角坐标系中将 $\vec{V}$ 表达为：

$$\vec{V} = \vec{e}_i V_i \quad \rightsquigarrow \quad \nabla\times\vec{V} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk}\partial_j V_k \quad \rightsquigarrow \quad (\nabla\times\vec{V})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j V_k$$

所以，

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\vec{V}) &= \vec{e}_m \epsilon_{mni}\partial_n (\nabla\times\vec{V})_i \\
&= \vec{e}_m \epsilon_{mni}\partial_n \Big[\epsilon_{ijk}\partial_j V_k\Big] \\
&= \vec{e}_m \epsilon_{mni}\epsilon_{jki}\partial_n\partial_j V_k \\
&= \vec{e}_m \Big[\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}\Big]\partial_n\partial_j V_k \\
&= \vec{e}_j \partial_j(\partial_k V_k) - \vec{e}_k \partial_j\partial_j V_k \\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}
\end{aligned}$$

例二：

已知某矢量场 $\vec{V}$ 在柱坐标系中的表达式是：$\vec{V} = (\ln r)\,\hat{\phi}$，求其散度和旋度.

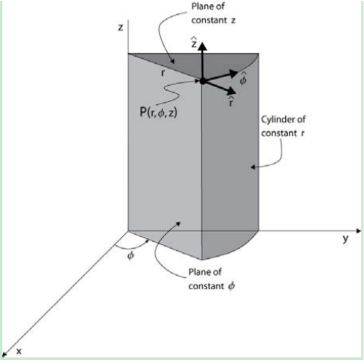
解：

如附图，柱坐标系的基矢 $\hat{\phi}$ 可等价地表为：

$$\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{r}$$

且，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



按照直角坐标系的基矢，我们有 $\hat{z} = \vec{k}$，且：

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

在直角坐标系中，可以把 $\vec{V}$ 重新写作:

$$\vec{V} = \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}\times(x\vec{i}+y\vec{j}) = \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\vec{j}-y\vec{i})$$

因此,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{V} &= \partial_i V_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{y\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \\
&= \frac{xy\left[\ln(x^2+y^2)-2\right]}{2(x^2+y^2)^{3/2}} - \left\{x\leftrightarrow y\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{V} &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j V_k \\
&= \vec{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{y \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] \right\} \\
&= \frac{\left[\ln(x^2+y^2) + 2\right]}{2\sqrt{x^2+y^2}} \vec{k}
\end{aligned}
$$

若换回原始的柱坐标，则有：

$$
\nabla \times \vec{V} = \left[\frac{(\ln r) + 1}{r} \right] \hat{z}
$$

这个例题说明：直角坐标系中进行矢量分析的技术尚存在极大的弱点。

有必要发展在正交曲线坐标系中直接进行矢量分析的方法。

Question :

直接立足于柱坐标系，怎样求

$$\vec{V} = (\ln r)\,\hat{\phi}$$

的散度和旋度？

初步的尝试：

根据直角坐标系中进行矢量分析的原则，很容易证明复合矢量$\vec{V} = \psi\,\vec{u}$的散度、旋度满足如下性质：

- $\nabla \cdot (\psi\,\vec{u}) = \nabla\psi \cdot \vec{u} + \psi\nabla \cdot \vec{u}$
- $\nabla \times (\psi\,\vec{u}) = \nabla\psi \times \vec{u} + \psi\nabla \times \vec{u}$

我们现在尝试选取$\psi = \ln r$和$\vec{u} = \hat{\phi}$，则可以有：

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \left[(\ln r)\,\hat{\phi}\right] = \nabla(\ln r) \cdot \hat{\phi} + (\ln r)\nabla \cdot \hat{\phi}$$

同理可以有：

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla(\ln r) \times \hat{\phi} + (\ln r)\nabla \times \hat{\phi}$$

困难在于我们现在缺少高效、准确地计算柱坐标系基矢 $\hat{\phi}$ 的散度和旋度的手段：

$$\nabla \cdot \hat{\phi} = \ ? \qquad \nabla \times \hat{\phi} = \ ?$$

当然，

$$\nabla(\ln r) = \ ?$$

也是一个需要澄清的问题.

1. 那么，在不系统地学习微分几何及张量分析高深理论的前提下，

   有无克服上述困难的好方法呢？

作业：

1. 请推导如下矢量恒等式：

1. $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$
2. $\nabla\cdot(\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi)\cdot\vec{f} + \varphi\nabla\cdot\vec{f}$
3. $\nabla\times(\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi)\times\vec{f} + \varphi\nabla\times\vec{f}$
4. $\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) = (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{g} - \vec{f}\cdot(\nabla\times\vec{g})$
5. $\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \vec{f}\times(\nabla\times\vec{g}) + (\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g} + \vec{g}\times(\nabla\times\vec{f}) + (\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}$

要求以等式左端为出发点.

作业 (续):

2. 请计算下列矢量的散度和旋度，其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为常矢量，$\vec{r}$ 为场点的位置矢径，在直角坐标系中

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\phi(r)$ 与 $\vec{A}(r)$ 则是场点与坐标原点之间距离的任意函数.

1. $(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{b}$
2. $(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}$
3. $\vec{a} \times \vec{r}$
4. $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$
5. $\phi(r)\left[\vec{a} \times \vec{r}\right]$
6. $\phi(r)\vec{A}(r)$
7. $\vec{r} \times \vec{A}(r)$