一、推导计算题（共 2 小题，每小题 15 分，共 30 分）

1、请推导无损耗情况下，波导中光脉冲的非线性传播方程（10）；并通过无量纲变换，推导出其对应的无量纲非线性薛定谔方程（5 分）。

将非线性极化看做微扰项，先求解$\delta n_{NL}=0$的传播常数，波导中的电场（单色）可以表示成：

$$E(\omega)=u(x,y,\omega)e^{i(\omega t-\beta z)}$$

代入线性波动方程

$$\nabla_T{}^2E+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\mu_0\varepsilon_{(1)}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

得到

$$\nabla_T{}^2u+\left(\mu_0\varepsilon_{(1)}\omega^2-\beta^2\right)u=0$$

这就是波导中的线性传播方程。其中$\varepsilon_{(1)}(x,y,\omega)$依赖于空间坐标，因此第二项不再满足$\mu_0\varepsilon_{(1)}\omega^2-\beta^2=0$，需结合第一项，修正$\beta$取值。换句话说，通过$\varepsilon_{(1)}(x,y,\omega)$的分布，可求得波导的横模$u$和相应的分立的传播常数$\beta$。

$$E(z,t)=a(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}u(x,y)$$
$$P_{NL}(x,y,z,t)=\tilde{P}_{NL}(x,y,z)e^{i\omega_0 t}$$

脉冲包络傅里叶变换 $A(z,\Omega)=\int a(z,t)e^{-i\Omega t}dt,\ \Omega=\omega-\omega_0$

$a(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int A(z,\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega,\ \Omega=\omega-\omega_0$

$$\nabla_T{}^2E+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\mu_0\varepsilon_{(1)}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\nabla_T{}^2-\beta_0{}^2-2i\beta_0\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\mu_0\varepsilon_{(1)}\right\}Aue^{i(\Omega+\omega_0)t}=\mu_0\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}e^{i\beta_0 z}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla_T{}^2u+\left(\mu_0\varepsilon_{(1)}\omega^2-\beta^2\right)u=0,\ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\to 0}$$

$$\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\beta^2-\beta_0{}^2-2i\beta_0\frac{\partial}{\partial z}\right\}Aue^{i(\Omega+\omega_0)t}=\mu_0\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}e^{i\beta_0 z}$$

$$\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\beta^2-\beta_0{}^2-2j\beta_0\frac{\partial}{\partial z}\right\}Aue^{i(\Omega+\omega_0)t}=\mu_0\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}e^{i\beta_0 z} \leftarrow \boxed{\begin{cases}\beta(\omega)\approx\beta_0+\beta_1\Omega+\frac{1}{2}\beta_2\Omega^2-\frac{i}{2}\alpha\\ \beta(\omega)+\beta_0\approx 2\beta_0\end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{i\left(\beta_1\Omega+\frac{1}{2}\beta_2\Omega^2-\frac{i}{2}\alpha\right)A+\frac{\partial A}{\partial z}\right\}ue^{i\Omega t}=\frac{-i\mu_0\omega_0{}^2}{2\beta_0}\tilde{P}_{NL}e^{i\beta_0 z} \leftarrow \boxed{a(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int A(z,\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega,\ \Omega=\omega-\omega_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a\right\}u=\frac{-i\mu_0\omega_0{}^2}{2\beta_0}\tilde{P}_{NL}e^{i\beta_0 z} \leftarrow \boxed{P_{NL}\approx 2n_0\varepsilon_0\delta n_{NL}E,\delta n_{NL}=n_2 I=n_2\cdot\frac{1}{2}cn_0\varepsilon_0|a\cdot u|^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a\right)\cdot\iint|u|^2dxdy+\frac{i\varepsilon_0\omega_0}{2}|a|^2a\cdot\iint n_0n_2|u|^4dxdy=0$$ 乘以u^*并两边对横向积分

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a+i\kappa|a|^2a=0 \quad \boxed{\kappa=\frac{\omega_0n_0n_2\varepsilon_0}{2}\frac{\iint|u|^4dxdy}{\iint|u|^2dxdy}}$$ 描述波导中光脉冲的传播方程

无损耗方程光脉冲的非线性传播方程：$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+i\kappa|a|^2a=0$

变量替换

$\tau = \dfrac{t - z/v_g}{T_0}$ T_0为任意时间尺度因子

$\xi = \dfrac{|\beta_2| z}{T_0{}^2}$ ξ为无量纲传输

$a(z,\tau) = E_p u(z,\tau)$ E_p为脉冲峰值场强

$$E_p{}^2 = \frac{|\beta_2|}{\kappa T_0{}^2}$$

忽略损耗，坐标变化，得无量纲**非线性薛定谔方程**

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - i\frac{\operatorname{sgn}(\beta_2)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + i\operatorname{sgn}(n_2)|u|^2 u = 0$$

2、请从麦克斯韦方程组出发，推导小信号近似情况下三次谐波的转换效率表达式（15分）。

1）从麦克斯韦方程到各项同性介质中的频率波动方程

麦氏方程组 **得到基本波动方程**

非磁性介质

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

其中$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} + \vec{P}_{NL}$
$= \vec{\varepsilon} \vec{E} + \vec{P}_{NL}$

其中$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 [1 + \chi^{(1)}]$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \textbf{(1)}$$

$$\nabla \times \vec{D} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad \textbf{(2)}$$

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon} \vec{E} + \vec{P}_{NL} \quad \textbf{(3)}$$

将（1）两边进行▽ ×运算，在将（2）带入，利用（3）可以得到
同时，假设介质无损（σ=0），并且 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

$$[\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \cdot] \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{NL}(r, t) \quad \textbf{(4)}$$

1）从麦克斯韦方程到各项同性介质中的频率波动方程

对（4）做傅里叶变换：

$$\because\ \vec{E}(\vec{r},t)=\sum_i \vec{E}_i(\vec{k}_i,\vec{\omega}_i)=\sum_i \vec{E}_i e^{i(k_i\vec{r}-\omega_i t)} \qquad \vec{P}_{NL}(r,t)=\sum_i \vec{P}_i^{NL}(\vec{k}_i,\vec{\omega}_i)e^{i(k_i^{'}\vec{r}-\omega_i t)}$$

上式带入（4）：$[\nabla\times(\nabla\times)-\dfrac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\varepsilon]\vec{E}(\vec{k},\omega)=-\dfrac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\vec{P}_{NL}(\vec{k}',\omega)$ **(4)**

考虑各向同性：$\nabla\cdot E=0$，$\therefore\ \nabla\times\nabla\times E=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2 E=-\nabla^2 E$

又 $\because\ n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$，$k=k_0 n,\ k_0=\omega/c$

上式可化简为：$\nabla^2\vec{E}(\vec{k},\omega)+k^2\vec{E}(\vec{k},\omega)=-\dfrac{k_0^2}{\varepsilon_0}\vec{P}_{NL}(\vec{k}',\omega)$ **(6)**

1）从麦克斯韦方程到各项同性介质中的频率波动方程

单色光情况 考虑光场为三色平面波，沿z传播，振幅随z变化，不随时间变化

$$\vec{E}(\vec{k},\omega)=\vec{E}(z,\omega)e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{P}_{NL}(\vec{k},\omega)=\vec{P}_{NL}(z,\omega)e^{i(k^{'}z-\omega t)}$$

上式带入（6）得：$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+\mathrm{i}2\mathrm{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}(z,\omega)e^{i(kz-\omega t)}=-\dfrac{k_0^2}{\varepsilon_0}\vec{P}_{NL}(z,\omega)e^{i(k^{'}z-\omega t)}$ **(7)**

慢变振幅近似： $\left|\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}(z,\omega)\right| << \left|\mathrm{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{E}(z,\omega)\right|$

考虑慢变振幅近似带入（7）得：$\dfrac{\partial\vec{E}(z,\omega)}{\partial z}=\dfrac{i\omega}{2\varepsilon_0 cn}\vec{P}_{NL}(z,\omega)e^{i\Delta\vec{k}z}$ **(8)**

$$\Delta\vec{k}=\vec{k}^{'}-\vec{k}$$

各项同性介质中的频率波动方程

2）从各向同性介质中频率波动方程出发，加入基波小信号近似得到三次谐波波动方程

$$\frac{\partial\vec{E}(z,\omega)}{\partial z}=\frac{i\omega}{2\varepsilon_0 cn}\vec{P}_{NL}(z,\omega)e^{i\Delta\vec{k}z},\ \Delta\vec{k}=\vec{k}^{'}-\vec{k} \qquad E(z,\omega)=E(0,\omega)=\text{常数}$$

$$\Delta\vec{k}=\vec{k}^{'}-\vec{k}$$

$$\frac{\partial E_{3\omega}(z)}{\partial z}=i\frac{3\omega}{2\varepsilon_0 cn_{3w}}P_{3\omega}^{(3)}(z)e^{-i\Delta kz} \qquad \textbf{(4-6)}$$

$$P_{3\omega}^{(3)}(z)=\varepsilon_0\chi^{(3)}(3\omega;\omega,\omega,\omega)E_\omega^3(z) \qquad \textbf{(4-7)}$$

$$\frac{\partial E_{3\omega}(z)}{\partial z}=i\frac{3\omega}{2cn_{3w}}\chi^{(3)}(3\omega,\omega,\omega,\omega)E_\omega^3(z)e^{-i\Delta kz} \qquad \textbf{(4-8)}$$

$$\Delta k=k_{3\omega}-3k_\omega=\frac{3\omega}{c}(n_{3\omega}-n_\omega) \qquad \textbf{(4-9)}$$

3）解方程

$$\frac{\partial E_{3\omega}(z)}{\partial z}=i\frac{3\omega}{2cn_{3w}}\chi^{(3)}(3\omega,\omega,\omega,\omega)E_{\omega}^{3}(z)e^{-i\Delta kz} \qquad (4\text{-}8)$$

$$\Delta k=k_{3\omega}-3k_{\omega}=\frac{3\omega}{c}(n_{3\omega}-n_{\omega}) \qquad (4\text{-}9)$$

在式（4-8）中，$\chi^{3}(3\omega;\omega,\omega,\omega)$和$E_{\omega}(z)=E_{\omega}(0)$ 为常数，设晶体长度为 L ,进行积分得:

$$E_{3\omega}(L)=-\frac{3\omega}{2cn_{3\omega}\Delta k}\chi^{(3)}E_{\omega}^{3}(0)\left(e^{-i\Delta kL}-1\right) \qquad (4\text{-}10)$$

3）解方程

求出 $|E_{3\omega}(L)|^{2}=E_{3\omega}(L)\cdot E_{3\omega}^{*}(L)$ **，利用功率公式：**

$$I_{3\omega}(L)=\frac{1}{2}\varepsilon_{0}cn_{3\omega}|E_{3\omega}(L)|^{2} \qquad (4\text{-}11)$$

$$I_{\omega}(0)=\frac{1}{2}\varepsilon_{0}cn_{\omega}|E_{3\omega}(0)|^{2} \qquad (4\text{-}12)$$

输出光强： $$I_{3\omega}(L)=\frac{9\omega^{2}L^{2}}{\varepsilon_{0}^{2}c^{4}n_{\omega}^{3}n_{3\omega}}\left|\chi^{(3)}\right|^{2}I_{\omega}^{3}(0)\sin c^{2}\left(\frac{\Delta kL}{2}\right) \qquad (4\text{-}13)$$

转换效率： $$\eta=\frac{P_{3\omega}(L)}{P_{\omega}(0)}=\frac{9\omega^{2}L^{2}}{\varepsilon_{0}^{2}c^{4}n_{3\omega}n_{\omega}^{3}}\left|\chi^{(3)}\right|^{2}\left(\frac{P_{\omega}(0)}{S}\right)^{2}\sin c^{2}\left(\frac{\Delta kL}{2}\right) \qquad (4\text{-}14)$$

在相位匹配条件下，要求 $\Delta k=0, n_{3\omega}=n_{\omega}$ **，此时有最大的三倍频转换效率：**

$$\eta=\frac{9\omega^{2}L^{2}}{\varepsilon_{0}^{2}c^{4}n_{\omega}^{4}S^{2}}\left|\chi^{(3)}\right|^{2}[P_{\omega}(0)]^{2} \qquad (4\text{-}15)$$

二、简答题（共 2 小题，每小题 15 分，共 30 分）

1、什么是双折射相位匹配和准相位匹配（5 分）；铁电畴的调制方法有哪些（5 分）；如何提高二次谐波转换效率（5 分）。

- 双折射相位匹配指利用晶体双折射效应弥补材料色散，使波矢失配量为 0
- 准相位匹配是一种相位匹配技术，它通过在非线性媒介中构建周期性结构，有规则的矫正非线性光学相互作用过程中光波的相位或振幅，使非线性光场的振幅随作用距离的增加而上升，实现相位匹配（$\Delta k+G_{m}=0$）。
- 铁电畴调制方法：晶体生长、电场极化、飞秒激光擦除或极化
- 提高二次谐波转换效率：选择合适的晶体；满足相位匹配条件；增加相互作用距离（避免走离效应）；选择较大的有效非线性系数 d_{eff}; 增加入射光的强度

2、请列举至少 4 种三阶光学非线性效应（5 分）；什么是光克尔效应（7 分）？它是几阶光学非线性效应，主要特点是什么（3 分）？

三次谐波	$(\omega_1+\omega_1+\omega_1)$	$D=1$
四波混频	$(\omega_1+\omega_2+\omega_3)$	$D=6$
简并四波混频	$(\omega_1-\omega_1+\omega_1)$	$D=3$
四波混频相位共轭	$(\omega_1+\omega_2-\omega_3)$	$D=6$
自相位调制光克尔效应（自聚焦、饱和吸收）	$(\omega_1-\omega_1+\omega_1)$	$D=3$
交叉相位调制光克尔效应（双光子吸收）	$(\omega_2-\omega_2+\omega_1)$	$D=6$
斯托克斯拉曼散射	$(\omega_1-\omega_1+\omega_2)$	$D=6$
反斯托克斯拉曼散射	$(\omega_1+\omega_1-\omega_2)$	$D=3$

光克尔效应定义

光克尔效应是入射光的光电场直接引起介质折射率变化的效应，其折射率变化大小Δn与光电场振幅的平方$|E|^2$成正比，即$\Delta n\propto|E|^2$，或与光强I成正比。

光克尔是三阶非线性效应；它的特点就是，入射光会引起介质折射率的变化。

三、综合题（共 2 小题，每小题 20 分，共 40 分）

1、请利用偶极子模型，推导受激拉曼散射的增益因子（10 分）？请简述微纳光学的发展对于拉曼散射研究的影响（10 分）。

已知条件

1）斯托克斯散射光场的增益因子（根据耦合波方程）

在各向同性介质中，频率为 ω_p 的泵浦光场 $\mathbf{E}_p(\omega_p)$ 入射介质，与介质发生作用产生频率为 ω_s 的斯托克斯散射光场 $\mathbf{E}_s(\omega_s)$，两者沿z向传播，在相位匹配条件下，$\mathbf{E}_s(z,\omega_s)$ 的非线性耦合波方程为

$$\frac{dE_s(\omega_s,z)}{dz}=\frac{i\omega_s}{2n_s c\varepsilon_0}P(\omega_s,z)$$

斯托克斯拉曼散射的光子能量守恒与动量守恒关系为

$$\omega_s=\omega_p-\omega_p+\omega_s$$
$$\mathbf{k}_s=\mathbf{k}_p-\mathbf{k}_p+\mathbf{k}_s$$

已知条件

1）斯托克斯散射光场的增益因子（根据耦合波方程）

$$\frac{dE_s(\omega_s,z)}{dz}=\frac{i\omega_s}{2n_s c\varepsilon_0}P(\omega_s,z)$$

非线性极化强度为 $$P^{(3)}(\omega_S)=6\varepsilon_0\chi_R^{(3)}(\omega_S;\omega_P,-\omega_P,\omega_S)E_PE_P^*E_S$$

$$\frac{dE_S(\omega_S)}{dz}=\frac{3i\omega_S}{n_S c}\chi_R^{(3)}|E_P|^2E_S$$

式中，$\chi_R^{(3)}(\omega_s;\omega_p,-\omega_p,\omega_s)$ 为斯托克斯拉曼散射光场的极化率，简化为 $\chi_R^{(3)}(\omega_s)$ 可分为实部和虚部两部分： $\chi_R^{(3)}(\omega_s)=\chi_R(\omega_s)'+i\chi''_R(\omega_s)$

实部反应折射率的变化，虚部反应吸收系数的变化。仅研究散射过程中光与介质的能量交换关系，所以只保留虚部项。

$\chi_R^{(3)}(\omega_s)$ 只取虚部项得

1）斯托克斯散射光场的增益因子（根据耦合波方程）

$$\frac{d\mathbf{E}_s(z)}{dz}=-\frac{3\omega_s}{cn_s}\chi_R^{(3)''}(\omega_s)|E_p|^2\mathbf{E}_s(z)$$

利用 $I=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cn_0|\boldsymbol{E}_p|^2$，以光强 I_p 代替 $|E_p|^2$，解得

$$\boldsymbol{E}_s(z)=E_{s0}\exp\left[-\frac{6\omega_s}{\varepsilon_0c^2n_pn_s}\chi''_R(\omega_s)I_pz\right]=E_{s0}\exp\left[\frac{1}{2}gI_pz\right]$$

其中 g 因子为

$$g=-\frac{12\omega_s}{\varepsilon_0c^2n_pn_s}\chi''_R(\omega_s)$$

2）受激拉曼散射极化率公式推导

A. 得到*E*:

为求场强平均值，假设介质中的总光场是泵浦光场与斯托克斯光场之和：

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{p}} t - k_{\mathrm{p}} z)} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{s}} t - k_{\mathrm{s}} z)} + c.c. \qquad \textbf{(6-22)}$$

其中定义 $K = k_{\mathrm{p}} - k_{\mathrm{s}} \qquad \Omega = \omega_{\mathrm{p}} - \omega_{\mathrm{s}}$

2）受激拉曼散射极化率公式推导

B. 得到 α_{NL}

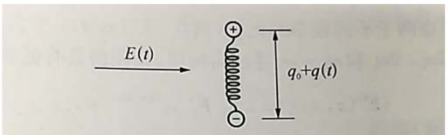


图 6－7　描述受激拉曼散射的分子电偶极子模型

电偶极子在光电场作用下的极化强度为

$$\boldsymbol{p}(z,t) = \varepsilon \boldsymbol{E}(z,t)$$

其中介电常数与电偶极子极化率的关系为

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\alpha)$$

电偶极子的极化率是时间的函数：

α_{NL}

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q}\right)_0 q(t) \qquad \textbf{(6-19)}$$

必须要求q(t)

2）受激拉曼散射极化率公式推导

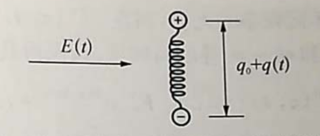


图 6－7　描述受激拉曼散射的分子电偶极子模型

C. 得到q(t)

C1. 写出方程

分子偶极子受迫振动的经典运动方程为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}(t)}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial \boldsymbol{q}(t)}{\partial t} + \omega_v^2 \boldsymbol{q}(t) = \frac{\boldsymbol{F}(z,t)}{m} \quad (6\text{-}16)$$

式中 $\boldsymbol{F}(z,t)$ 为外电场作用力；m 为组成偶极子的原子的质量。

2）受激拉曼散射极化率公式推导

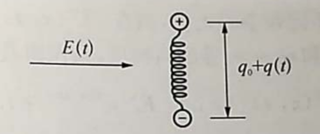


图 6－7　描述受激拉曼散射的分子电偶极子模型

C. 得到q(t)

C2. 化简F

电偶极子的静电能为

$$W = \frac{1}{2}[\boldsymbol{p}(z,t)\cdot \boldsymbol{E}(z,t)] = \frac{1}{2}\varepsilon_0(1+\alpha)\langle \boldsymbol{E}^2(z,t)\rangle \quad (6\text{-}20)$$

〈〉表示在一个光学周期内的时间平均(可能包含几个频率分量)。

电偶极子在外场中所受的电场力是静电能对偶极子长度变化的导数，利用（6-20）和（6-19）得

$$\boldsymbol{F}(z,t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q}\right)_0 \langle \boldsymbol{E}^2(z,t)\rangle \quad (6\text{-}21)$$

2）受激拉曼散射极化率公式推导

C. 得到q(t)

C2. 化简F

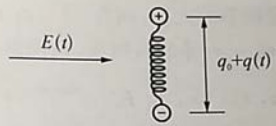


图 6-7　描述受激拉曼散射的分子电偶极子模型

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_\mathrm{p}t-k_\mathrm{p}z)} + \boldsymbol{E}_\mathrm{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_\mathrm{s}t-k_\mathrm{s}z)} + c.c.$$

略去含 $2\omega_\mathrm{p}, 2\omega_\mathrm{s}$ 和 $\omega_\mathrm{p}+\omega_\mathrm{s}$ 等的高频项，只保留具有低频 $\omega_\mathrm{p}-\omega_\mathrm{s}$ 的项，则有

$$\langle E^2(z,t)\rangle \approx 2\boldsymbol{E}_\mathrm{p}\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t-kz)} + c.c.$$

2）受激拉曼散射极化率公式推导

C. 得到q(t)

C3. 解方程

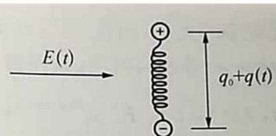


图 6-7　描述受激拉曼散射的分子电偶极子模型

又因为q(t)的尝试解　$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t-kz)} + c.c.$

方程　$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{q}(t)}{\partial t^2} + 2\gamma\dfrac{\partial\boldsymbol{q}(t)}{\partial t} + \omega_\mathrm{v}^2\boldsymbol{q}(t) = \dfrac{\boldsymbol{F}(z,t)}{m}$　化为：

$$-\Omega^2\boldsymbol{q}(\Omega) - 2\mathrm{i}\Omega\gamma\boldsymbol{q}(\Omega) + \omega_\mathrm{v}^2\boldsymbol{q}(\Omega) = \frac{\varepsilon_0}{m}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)_0\boldsymbol{E}_\mathrm{p}\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^*$$

因此得到电偶极子振动的振幅

$$q(\Omega) = \frac{(\varepsilon_0/m)(\partial\alpha/\partial q)_0\boldsymbol{E}_\mathrm{p}\boldsymbol{E}_\mathrm{s}^*}{\omega_\mathrm{v}^2 - \Omega^2 - 2\mathrm{i}\Omega\gamma} \qquad (6\text{-}28)$$

2）受激拉曼散射极化率公式推导

D. 整理P和E的关系　　**三阶极化强度为**

$$P^{(3)}(z,t) = \varepsilon_0 N\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)_0 [q(\Omega)e^{-i(\Omega t-kz)} + c.c.] \times [E_p e^{-i(\omega_p t-k_p z)} + E_s e^{-i(\omega_s t-k_s z)} + c.c.]$$

非线性极化强度包含若干不同的频率差成分。其中频率为 ω_s 的斯托克斯光引起介质的非线性极化强度可表示为：

$$P_s^{(3)}(z,t) = P^{(3)}(\omega_s)e^{-i(\omega_s t-k_s z)} + c.c. \qquad (6\text{-}32)$$

斯托克斯光三阶非线性极化强度的振幅为

$$P^{(3)}(\omega_s) = \varepsilon_0 N\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)_0 q^*(\Omega) E_p \qquad (6\text{-}33)$$

E. 得到三阶极化率

结合

$$P^{(3)}(\omega_s) = \varepsilon_0 N\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)_0 q^*(\Omega) E_s \qquad (6\text{-}33)$$

$$q(\Omega) = \frac{(\varepsilon_0/m)(\partial\alpha/\partial q)_0 E_p E_s^*}{\omega_v^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\gamma} \qquad (6\text{-}28)$$

得到：

$$P^{(3)}(\omega_s) = \frac{\varepsilon_0^2 (N/m)(\partial\alpha/\partial q)_0^2 |E_p|^2 E_s}{\omega_v^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\gamma} \qquad (6\text{-}34)$$

与 $P^{(3)}(\omega_S) = 6\varepsilon_0 \chi_R^{(3)}(\omega_S;\omega_P,-\omega_P,\omega_S)E_P E_P^* E_S$ **比较**

$$\chi_R^{(3)}(\omega_s) = \frac{\varepsilon_0 (N/6m)(\partial\alpha/\partial q)_0^2}{\omega_v^2 - (\omega_p-\omega_s)^2 + 2i(\omega_p-\omega_s)\gamma} \qquad (6\text{-}36)$$

2）受激拉曼散射极化率公式推导

F. 讨论三阶极化率 $\chi_R^{(3)}(\omega_s) = \dfrac{\varepsilon_0(N/6m)(\partial\alpha/\partial q)_0^2}{\omega_v^2 - (\omega_p - \omega_s)^2 + 2i(\omega_p - \omega_s)\gamma}$

考虑近共振条件 $\omega_p - \omega_s \approx \omega_v$ **，则（6-36）也可表示为：**

$$\chi_R^{(3)}(\omega_s) \simeq \frac{\varepsilon_0(N/12m\omega_v)(\partial\alpha/\partial q)_0^2}{(\omega_s - \omega_p + \omega_v) + i\gamma} \qquad (6\text{-}37)$$

根据定义 $\chi_R^{(3)}(\omega_s) = \chi'_R(\omega_s) + i\chi''_R(\omega_s)$，可将以上三阶极化率分为实部和虚部两部分

$$\chi'_R(\omega_s) \simeq \frac{\varepsilon_0 N(\partial\alpha/\partial q)_0^2(\omega_v - \omega_p + \omega_s)}{12m\omega_v[(\omega_s - \omega_p + \omega_v)^2 + \gamma^2]} \qquad (6\text{-}38)$$

$$\chi''_R(\omega_s) \simeq \frac{-\varepsilon_0 N(\partial\alpha/\partial q)_0^2\gamma}{12m\omega_v[(\omega_s - \omega_p + \omega_v)^2 + \gamma^2]} \qquad (6\text{-}39)$$

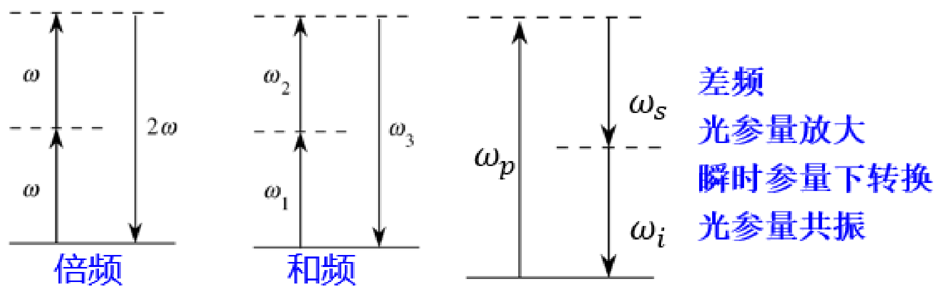
结合（6-39）和（6-15）

$$g = \frac{\omega_s N(\partial\alpha/\partial q)_0^2\gamma}{c^2 n_p n_s m\omega_v[(\omega_s - \omega_p + \omega_v)^2 + \gamma^2]}$$

微纳光学发展对于拉曼散射研究的影响：1）拉曼散射总体来说信号较弱，微纳光学的发展使得人们可以按需制备人工功能微纳光学结构，增强光与物质相互作用，从而也就增强了拉曼散射信号。具有代表性的研究有表面等离激元结构增强拉曼散射基底，针尖增强拉曼等等。2）微纳光学的发展对于开发拉曼散射器件起到了推动影响，比如开发基于拉曼信号的信息隐藏器件等。3）微纳光学的发展使得人们可以在量子极限研究拉曼散射，比如单光子量级的拉曼散射等。

2、三波混频效应有哪些，请用虚拟能级图表示（5 分）。若提供一个 1064 nm 光源和若干元器件，包括 BBO 晶体（透光波段 190 nm -3500 nm，匹配输出波长 190 nm -2750 nm）、分束镜、反射镜、和角度控制装置，请问：如何实现一个覆盖波长 200 nm~2700 nm 的可调谐光源（需说明具体非线性过程；相互作用光场类型，如泵浦光、二次谐波等；每个过程对应的波长或波长范围）（10 分）？如果允许替换元器件，如何将波长调谐范围拓展到 200 nm~4000 nm（5 分）？

（1）三波混频效应



（2）

- 1064 nm 倍频 532 nm; 1064 nm+532 nm 和频成 355 nm，作为泵浦源；
- 355nm 泵浦 OPO, 产生信号光和闲频光，覆盖 400 nm-2700 nm
- 剩余 355 nm 与 400 nm-2700 nm 光和频，产生 190nm-355nm;剩余 1064 nm 与 400 nm-2700 nm 光和频， 产生 355-400 nm。（参考答案）

  实际系统的设计：
  292nm~400nm: OPO 信号光（400~700nm）与残余 1064nm 和频
  234nm~292nm:信号光（468nm~584nm）单独倍频；
  192nm~234nm：信号光（420nm~680nm）和 355nm 和频

（3）采用周期性极化晶体（PPLN、PPLT 等），作为 OPO 中的增益介质，在 1064nm 光泵浦下，通过周期、温度调控，产生中红外激光，波长可以覆盖到 2700 nm-4000nm.（要点，需要找到透光和匹配波导覆盖 2700nm-4000nm 的晶体或周期性极化晶体）