《电动力学》

静电学-1
库仑定律和高斯定理

第1节 电荷与电场

电荷的基本性质

(1) 电荷量子化：能够独立存在的粒子所带的电荷是基本电荷e的整数倍.

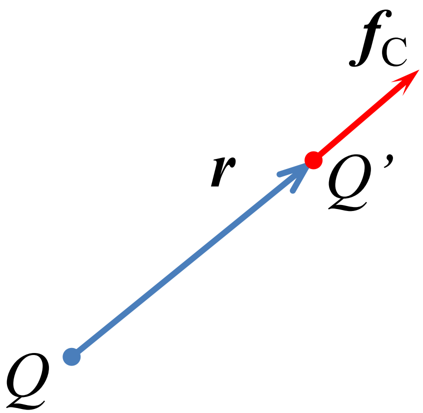
(2) 电荷定域守恒：任意空间区域内电荷量增加（减少）的同时有相等电荷量通过该区域边界流入（流出）. 孤立系统的总电荷量不依赖于时间.

(3) 电荷运动不变：带电粒子的运动及相互作用不改变带电体的总电量. 粒子的转化（产生和湮灭）也不改变总电荷量.

1.1 库仑定律

猜想和实验：静止点电荷Q对另一静止点电荷Q'的静电作用力

$$\boldsymbol{f}_C = k_C \frac{QQ'}{r^3}\boldsymbol{r}$$



黑体$\boldsymbol{r}$表示三维空间矢量.

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}$$

k_C为常数，与单位选择有关. 国际单位(SI):

$$k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\tilde{c}^2(NM^2C^{-2})$$

$$\tilde{c} = 2.9979\cdots\times 10^8$$

严格定义为在SI单位下真空光速的数值.

电场

相互作用的定域性要求电磁相互作用以场为媒介.

电场是连续分布在空间的一种物质. 在电场中的电荷感受到电场力.

$$\boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{x}) = Q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$$

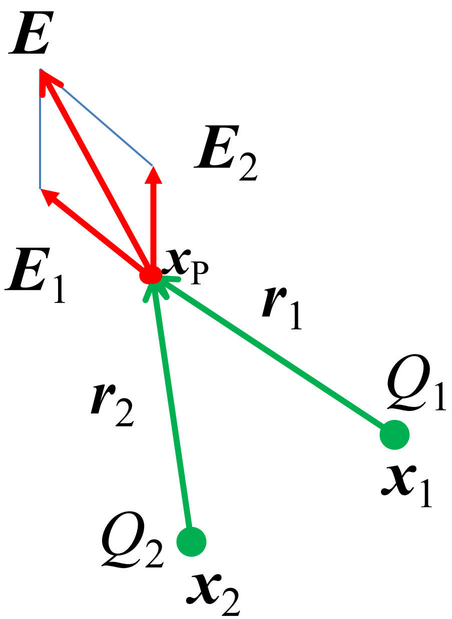
上式中$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$不包括$Q$自己带有的电场.

电场叠加性：一组电荷产生的总电场是其中每个电荷独立的产生电场的矢量叠加.

电场叠加性意味着关于电场的基本规律都是线性的，这是对基本规律的一个很强的限制.

例（电场叠加性）静止点电荷产生的电场

从库仑定律 $\boldsymbol{f} = k_C \dfrac{QQ'\boldsymbol{r}}{r^3}$



读出Q_1和Q_2在P处产生的电场分别为

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}_P) = k_C \frac{Q_1(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_1)}{|\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_1|^3} = k_C \frac{Q_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x}_P) = k_C \frac{Q_2(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_2)}{|\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_2|^3} = k_C \frac{Q_2\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}$$

Q_1和Q_2在点P产生的总电场

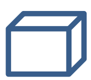
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_P) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}_P) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x}_P) = k_C \frac{Q_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} + k_C \frac{Q_2\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}$$

电荷密度：$\rho(\boldsymbol{x})$

$$dQ = \rho(\boldsymbol{x})dV$$

体元dV，物理上理解为

宏观小微观大的区域ΔV



直角坐标 $dV = dxdydz$

球坐标 $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

柱坐标 $dV = r dr d\phi dz$

$\boldsymbol{x}_q$处点电荷的电荷密度

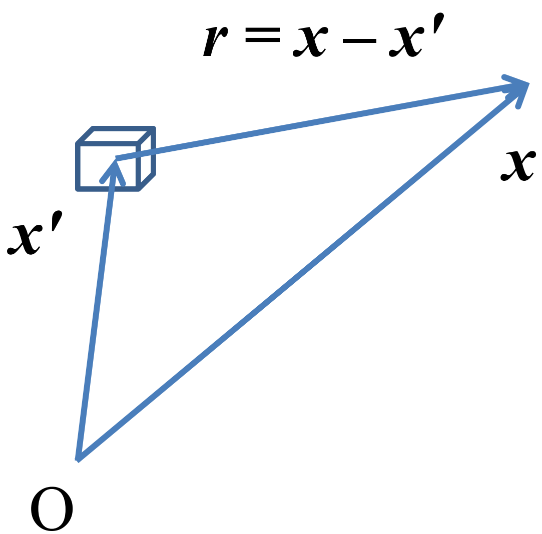
$$\rho_q(\boldsymbol{x}) = q\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_q) = q\delta(x - x_q)\delta(y - y_q)\delta(z - z_q)$$

δ-分布

$$\int_L \delta(x - x_1)dx = \begin{cases} 1 & , \quad x_1 \in L \\ 0 & , \quad x_1 \notin L \end{cases}$$

即 $$\int_L f(x)\delta(x - x_1)dx = \begin{cases} f(x_1) & , \quad x_1 \in L \\ 0 & , \quad x_1 \notin L \end{cases}$$

静止电荷分布产生的电场



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\int_V k_C\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{r}}{r^3}dV'$$

适用于电荷分布在有限区域情形。

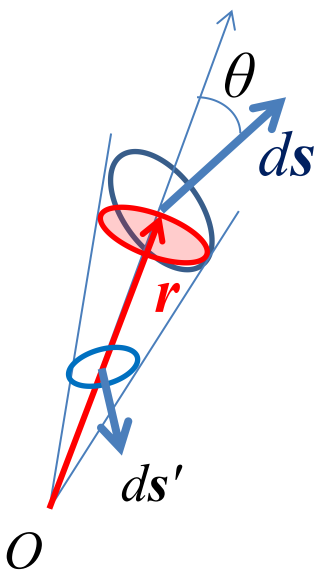
特定：

反平方律，线性依赖于电荷密度

1.2 高斯定理

面元

面积趋于零的小平面. 取其大小为面积，方向沿约定的法线方向（通常约定右手法则），可将面元看着（赝）矢量. 物理上理解为宏观小的$\Delta \boldsymbol{S}$.



立体角（$d\boldsymbol{s}$关于O点的立体角）

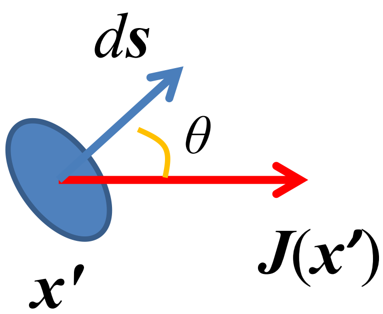
$$d\Omega=\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{s}}{r^3}=\frac{\cos\theta}{r^2}ds$$

体域V的边界（封闭曲面）$S=\partial V$ 关于O点的立体角

$$\oint\!\!\!\oint_S d\Omega=\begin{cases}0 & O\notin V\\ 4\pi & O\in V\end{cases}$$

⇨ 因为一对面元$d\boldsymbol{s}$和$d\boldsymbol{s}'$的通量互相抵消.

矢量场的通量



设ds是x'处的面元. 矢量场$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$在$d\boldsymbol{s}$的通量

$$d\Phi = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot d\boldsymbol{s} = J(\boldsymbol{x}')ds\cos\theta$$

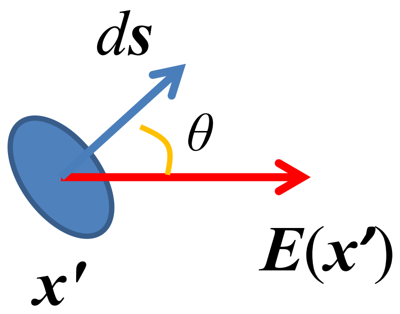
$J(\boldsymbol{x}')$ 是矢量$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$的大小；

ds是面元矢量$d\boldsymbol{s}$的大小，即面元的面积

通量的一些例子：

- 通量=流量，若$\boldsymbol{J}=n\boldsymbol{v}$（n流体密度，$\boldsymbol{v}$为平均速度）.
- 通量=电流，若$\boldsymbol{J}$为电流密度.
- 通量=电通量，若$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{E}$.
- 通量=磁通量，若$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{B}$.

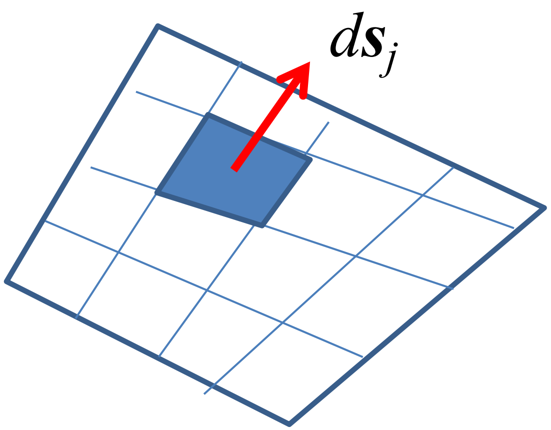
电通量



$$d\Phi = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')\cdot d\boldsymbol{s} = E(\boldsymbol{x}')ds\cos\theta$$

电通量反映了电场在面元方向的强度.

电场在任意曲面S的通量用面积分来计算,

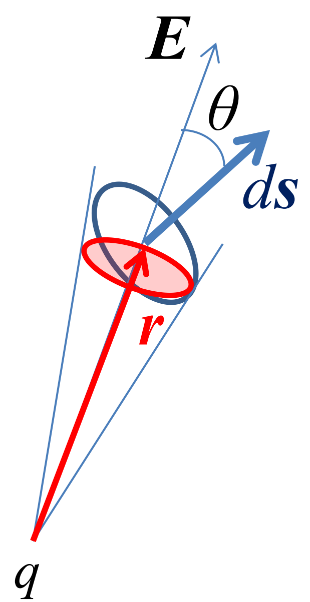


$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \sum_j \boldsymbol{E}_j \cdot d\boldsymbol{s}_j$$

如果S是一个封闭曲面，面积分记为

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$$

静止点电荷的电通量



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = k_C \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$d\Phi = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{s} = k_C \frac{q\cos\theta}{r^2} ds = k_C q d\Omega$$

其中dΩ是面元对电荷q张开的立体角.

在一个封闭曲面 $S = \partial V$的总通量为

$$\Phi = \begin{cases} 0 & q \notin V \\ 4\pi k_C q & q \in V \end{cases}$$

由电场的叠加性，静电荷产生的电场满足

$$\oint\!\!\!\oint_{S=\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi k_C Q$$

其中Q为V中的总电荷

高斯定理

$$\oiint_{S=\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

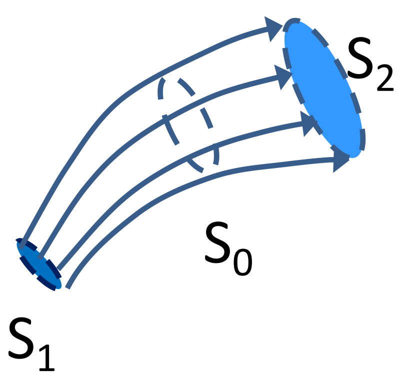
其中S是一个任意体域V的边界曲面，约定面元方向指向V外，称S为高斯面. Q是V中的电荷量.

高斯定理是一个基本实验事实，不限于静电荷和静电场.

封闭曲面的电通量只与曲面所包含的电荷量有关，与电荷的分布和运动状态无关。曲面外面的电荷对封闭曲面的总电通量没有贡献.

电场线

- 电场线的切线方向与该处电场方向一致.
- 电场线族在其横截面的密度正比于该处电场的大小，因此可以认为每根电场线拥有通过横截面的单位电通量.
- 在有限区域内电场线只能起于正电荷、终于负电荷.
- 在没有电荷的地方电场线不相交.

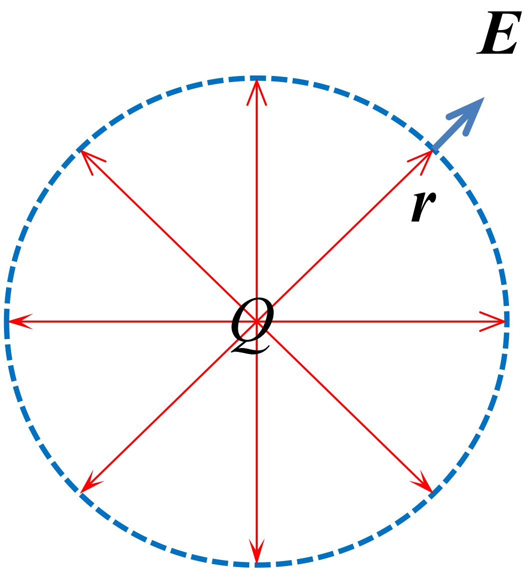


电场管：在没有电荷的区域，通过S_0边界每点可画出一条电场线，这些电场线紧密排列构成电场管的管壁.

若S_1和S_2是横截面，则 $\dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{S_1}{S_2}$

电场强（弱）处电管横截面小（大）

例. 由高斯定理求静止点电荷Q产生的电场



$$\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r = 1$$

从系统的球对称性推知，电场方向沿矢径方向 $\hat{\boldsymbol{e}}_r$，大小只与半径有关，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{e}_r$$

以电荷为圆心取半径为r的高斯面，

因为$\boldsymbol{E}$与$d\boldsymbol{s}$同向，

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \oiint_S E(r)ds = E(r)\oiint_S ds = 4\pi r^2 E(r)$$

应用高斯定理得：

$$E(r) = k_C \frac{Q}{r^2}$$

与库仑定律一致.

高斯定律并不能推导出库仑定律，必须加上“球对称”假设. 后者对运动电荷不成立.

矢量场的散度(divergence)

以电场为例. 考虑$\boldsymbol{x}$处一个体元ΔV. 设 $S=\partial(\Delta V)$. 电场$\boldsymbol{E}$在$\boldsymbol{x}$处的散度定义为

$$div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\!\oint_{S=\partial(\Delta V)}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$$

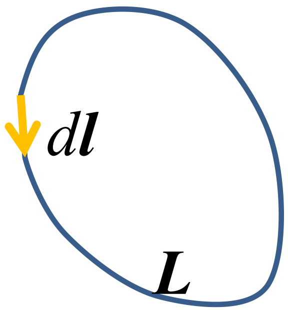
它是反映矢量场$\boldsymbol{E}$性质的一个标量场.

高斯定理的微分形式

$$div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$$

电场在某点的散度正比于该点的电荷密度，反映了电荷是电场的源.

1.3 静电场的旋度

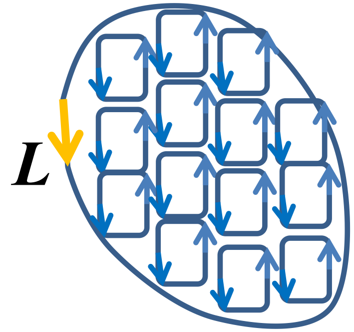


矢量场的环量：矢量场沿环路 $L=\partial S$ 的积分称为矢量场沿此环路的环量. 以电场为例.

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

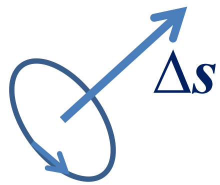
物理意义：电场对单位电荷做的功

注意，$\boldsymbol{L}$虽不是矢量，却有方向. 其方向约定当右手竖起拇指指向曲面方向时手指绕转的方向（右手法则）.



矢量场的旋度(rotation,or curl):

在$\boldsymbol{x}$的面元可以写成 $\Delta\boldsymbol{s}=\Delta s\hat{\boldsymbol{n}}$.



矢量场$\boldsymbol{E}$在$\boldsymbol{x}$处的旋度$(rot\boldsymbol{E})$ 可看作（赝）矢量，它在$\hat{\boldsymbol{n}}$方向的分量定义为

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(rot\boldsymbol{E}\right)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\oint_{\partial(\Delta\boldsymbol{s})}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

物理空间有三个独立方向，故$(rot\boldsymbol{E})$有三个分量.

重要数学公式

高斯公式：对任意连续矢量场$\boldsymbol{f}$，在任意体域V，有

$$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_{V} \mathrm{div}\boldsymbol{f} dV$$

斯托克斯公式：对任意连续矢量场$\boldsymbol{f}$，在任意曲面$\boldsymbol{S}$，有

$$\oint_{\boldsymbol{L}=\partial \boldsymbol{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_{\boldsymbol{S}} rot\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s}$$

矢量算符 ∇

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{f} \qquad rot\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} \qquad \mathbf{grad}\,\varphi = \nabla \varphi$$

在直角坐标中，

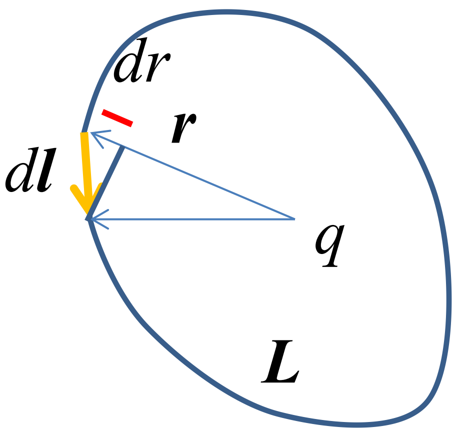
$$\nabla = \hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

例：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

散度和旋度是矢量场的两个主要性质. 可以证明，在给定边界条件下，单连通区域内的矢量场由它的散度和旋度完全确定.

静电场的旋度



$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{l} = rdr$$

静电荷q产生的电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = k_C \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$$

环量

$$\Gamma = \oint_{\boldsymbol{L}} k_C \frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{l} = k_C q \oint_{\boldsymbol{L}} \frac{1}{r^3} rdr$$

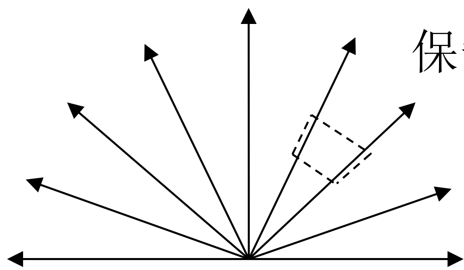
$$= -k_C q \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

所以

$$rot\boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{（静电场）}$$

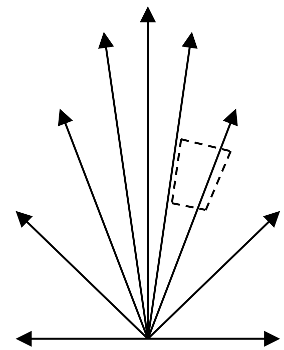
物理意义：静电场是一个保守力场（纵场），可以用电势描述.

库仑定律只适用于静电荷，而高斯定理对运动电荷也成立. 当电荷运动时，存在一个特殊方向，所以不能假设电场具有球对称性. 运动电荷电场对静电荷电场的偏离是狭义相对论效应.



保守力场

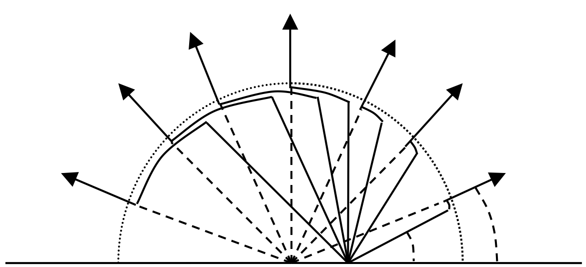
静止电荷



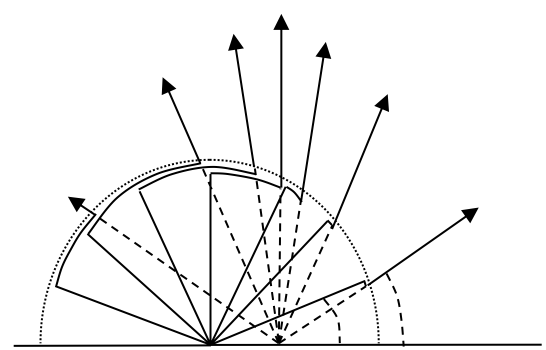
非保守力场

匀速电荷

电场急速变化的球面以光速扩大.



电荷从静止突然变匀速



电荷从匀速突然变静止

1.4 静电势，泊松方程

$$rot\boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

保守场可用势表示. 引入**静电势** φ：

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \qquad \text{（静电）}$$

代入高斯定理得**泊松方程**

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{（静电）}$$

物理上不可区分只相差一个常数的电势. 对电荷分布在有限区域情形，常约定无穷远处电势等于零.

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\int_{\infty}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad \text{（与路径无关）}$$

静电势：将单位电荷从无穷远处移到场点过程电场所作负功.

唯一性定理

在区域V中给定电荷密度$\rho(\boldsymbol{x})$，且静电势$\varphi(\boldsymbol{x})$在V边界∂V上满足：（1）第一类边界条件（DBC)，即在V边界∂V上φ的值给定；或者（2）第二类边界条件（NBC)，即在V边界∂V上法向导数$\partial_n\varphi$的值给定，则当泊松方程有解时，解是唯一的。

证明：设$\varphi_1(\boldsymbol{x})$和$\varphi_2(\boldsymbol{x})$均满足泊松方程和DBC，或者NBC.

令$\varphi(\boldsymbol{x})=\varphi_1(\boldsymbol{x})-\varphi_2(\boldsymbol{x})$. 则

$$\nabla^2\varphi=0, \qquad \varphi|_{\partial V}=0 \ （DBC）或者\ \partial_n\varphi|_{\partial V}=0\ (NBC)$$

引入 $H=\iiint\limits_V (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)dV$

因为 $(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)=\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)+\nabla^2\varphi$ 而第二项为零，所以

$$H=\iiint\limits_V \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)dV=\oiint\limits_{\partial V}\varphi\partial_n\varphi ds$$

根据边界条件，上式在DBC和NBC条件均等于零. 然而

$$(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\geq 0$$

所以由H=0得

$$\nabla\varphi=0$$

DBC: $\varphi|_{\partial V}=0$, 故上式导致在V中 $\varphi=0$，即$\varphi_1(\boldsymbol{x})=\varphi_2(\boldsymbol{x})$.

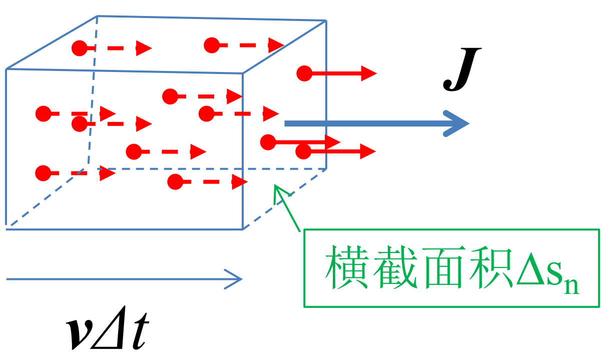
NBC: $\partial_n\varphi|_{\partial V}=0$ ，故上式导致V中φ=常数，即$\varphi_1(\boldsymbol{x})$和 $\varphi_2(\boldsymbol{x})$至多相差一个常数. 【证毕】

第2节 电流和磁场

2.1 电荷守恒定律

电流密度：方向与正（负）电荷移动方向相同（反），大小为单位时间通过单位横截面的电荷量绝对值.

电流模型



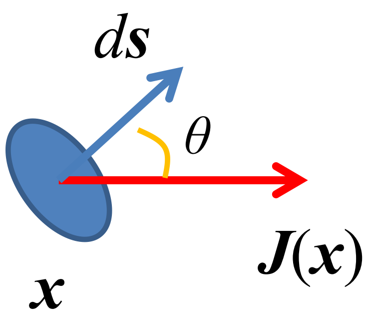
设带正电荷q的粒子密度为n，平均速度为$\boldsymbol{v}$. 经过Δt时间，原来在长方体内的粒子都会通过横截面. 因此此处的电流密度为

$$\boldsymbol{J}=\lim_{\Delta t\to 0}\lim_{\Delta s_n\to 0}\frac{qn\boldsymbol{v}\Delta t\Delta s_n}{\Delta t\Delta s_n}=qn\boldsymbol{v}$$

对多种带电粒子，$\boldsymbol{J}=\sum_i q_i n_i \boldsymbol{v}_i$　　单个电荷 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=q\dot{\boldsymbol{x}}_q\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_q)$

电流强度（电流）

电流密度关于给定曲面的通量，即单位时间内通过该曲面的电荷量.



对于无穷小面元$d\boldsymbol{s}$，电流强度与电流密度的关系为

$$dI = \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s}$$

对有限曲面S，

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s}$$

电流强度是一个标量.

电荷定域守恒定律

设Q为任一给定体域V内的电荷量，则

$$\oiint_{S=\partial V} \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

左边是单位时间流出S的电荷量，右边是V内电荷的减少率.

电荷连续性方程

利用高斯公式，$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}dV$，和 $Q = \iiint_V \rho dV$

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}dV = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

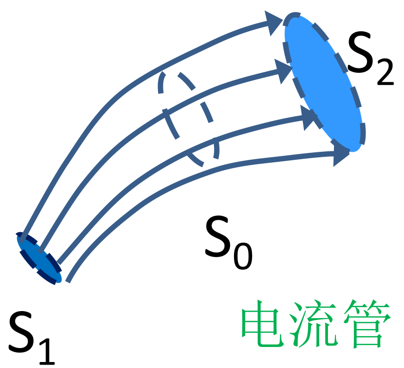
故电荷定域守恒定律可写成连续性方程（V与时间无关）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

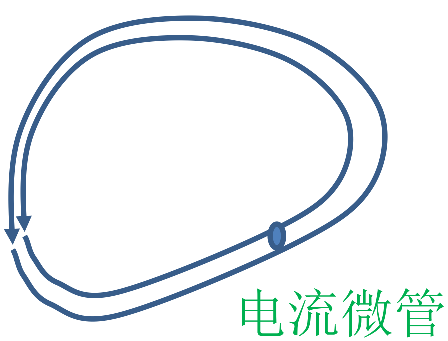
稳恒电流:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0 \quad 等价于 \quad \oiint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}=0$$

稳恒电流分布可以分解成电流管的集合（和电场管类似），管内电荷不会流出管外，管外电荷不会流入管内.



因为电荷定域守恒，通过电流管任意截面的稳恒电流（即电流通量）都相等. 对分布在有限区域的稳恒电流，微电流管构成封闭环路.

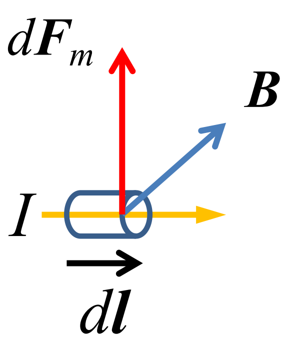


2.2 毕奥-萨伐尔定律

实验发现两电流之间有作用力. 这种力需要通过一种物质来传递，这种物质称为磁场.

用矢量场$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$来描写磁场，称$\boldsymbol{B}$为磁感应强度. 它通过电流元在磁场中受到的力（通过电线受力反推）来定义

$$d\boldsymbol{F}_m = I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$$

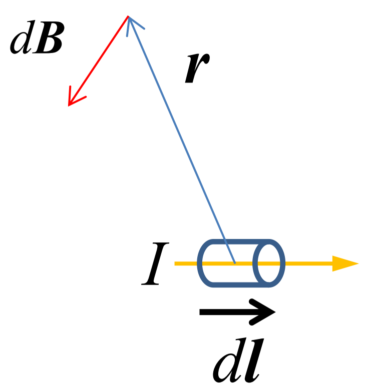


电流元$Id\boldsymbol{l}$

I是小流管的电流. 电流元$Id\boldsymbol{l}$是矢量. 叉乘是用两个矢量构造第三个矢量，并使后者分别线性地依赖于前两者的唯一方法.

类比静电场的库仑力，想象每个电流元$I\mathbf{d}\boldsymbol{l}$产生一个磁场元$d\mathbf{B}$，它在$\mathbf{r}$处的磁感应强度正比于$Idl$，反比于$r^2$，而且它应该和$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$和$\mathbf{r}$的方向有关. 这样的（赝）矢量具有如下形式

$$d\mathbf{B} = k_M \frac{I\mathbf{d}\boldsymbol{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



电流元$I\mathbf{d}\boldsymbol{l}$

k_M是一个与单位选择有关的比例常数.

实际上，电流元及其产生的磁场元仅是理论建立中假想的过渡概念，并没有物理可测量意义.

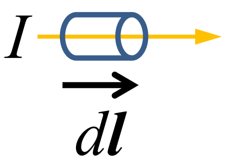
稳恒电流产生的总磁场是所有电流元产生磁场元的矢量叠加.

毕奥-萨伐尔定律：稳恒电流分布产生的磁场

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = k_M \iiint_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV' \qquad (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

对细导线L，$\boldsymbol{J}dV' = \boldsymbol{J}ds_n dl = Id\boldsymbol{l}$（电流元），故

ds_n为横截面积的电流元



$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = k_M \oint_L \frac{Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{（稳恒电流）}$$

SI: $\quad k_M = \dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} NA^{-2}$

毕奥-萨伐尔定律反映了稳恒电流是磁场的一种源，它产生的磁场也是按照反平方律减弱的.

2.3 稳恒磁场散度，矢势

磁通量： $\Phi = \iint\limits_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$

称B为（过横截面的）磁通密度. 每根磁场线拥有通过横截面的单位磁通.

对稳恒磁场， 在毕奥-萨伐尔定律应用 $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = k_M \iiint\limits_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV' = -k_M \iiint\limits_{V'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \nabla \frac{1}{r} dV'$$

应用 $\nabla \times (\varphi \boldsymbol{f}) = \nabla \varphi \times \boldsymbol{f} + \varphi \nabla \times \boldsymbol{f}$ ， 和 $\nabla \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') = 0$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = k_M \iiint\limits_{V'} \nabla \times \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \frac{1}{r} \right) dV' = k_M \nabla \times \iiint\limits_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV' \equiv \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$$

稳恒电流产生的矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = k_M \iiint_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'$$

因为 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$ 所以

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$ （稳恒磁场）

实验没有发现磁荷（磁单极子）， 因此把磁场散度等于零作为一个基本实验定律.

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0}$$ （普遍成立）

磁场线不间断，没有起点和终点.

2.3 安培定律

B的旋度

矢势表示： $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=k_M\iiint\limits_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'$

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j(\nabla\times\boldsymbol{A})_k=\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\partial_j\partial_l A_m$$

其中三维全反对称张量

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & ,\quad [i,j,k]=[1,2,3],[2,3,1],[3,1,2]\\ -1 & ,\quad [i,j,k]=[2,1,3],[1,3,2],[3,2,1]\\ 0 & ,\quad \text{其他情形}\end{cases}$$

利用 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})_i=\delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l A_m-\delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l A_m=\partial_i\partial_j A_j-\partial_j\partial_j A_i$$

所以：

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

（1） $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = ?$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = k_M \iiint\limits_V J_k(\boldsymbol{x}')\partial_k\left(\frac{1}{r}\right)dV' = -k_M \iiint\limits_V J_k(\boldsymbol{x}')\partial'_k\left(\frac{1}{r}\right)dV'$$

$$= -k_M \iiint\limits_V \partial'_k\left[\frac{J_k(\boldsymbol{x}')}{r}\right]dV' + k_M \iiint\limits_V \frac{1}{r}\partial'_k J_k(\boldsymbol{x}')dV'$$

$$= -k_M \iiint\limits_V \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}dV' + k_M \iiint\limits_V \frac{1}{r}\nabla' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')dV'$$

$$= -k_M \oiint\limits_{\partial V} \frac{1}{r}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \cdot d\boldsymbol{S} + k_M \iiint\limits_V \frac{1}{r}\nabla' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')dV'$$

对所有电流都在V内的情形，第一项等于零。对于稳恒电流，$\nabla' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = 0$ 因此第二项也等于零。所以

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

（2） $\nabla^2 \boldsymbol{A} = ?$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = k_M \iiint_{V'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dV'$$

利用： $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -4\pi k_M \iiint_{V'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') dV' = -4\pi k_M \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$$

因此：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = 4\pi k_M \boldsymbol{J}$$

安培定律（微分形式）

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = 4\pi k_M \boldsymbol{J} \qquad \text{（稳恒电流）}$$

电流密度产生具有涡旋的磁场.

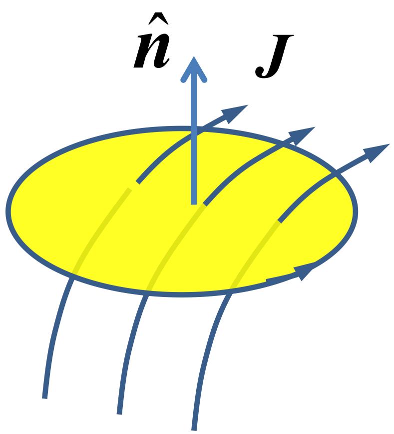
按照旋度的定义，

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{ds}\oint_{\partial(ds)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=4\pi k_M\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{J}$$

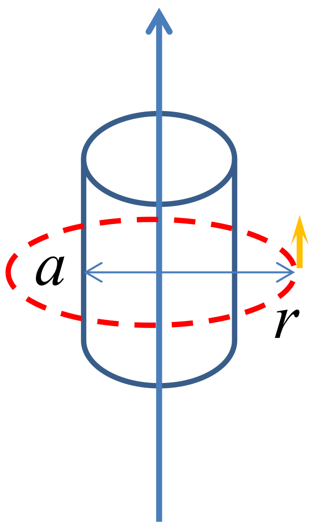
即 $$\oint_{\partial(ds)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=4\pi k_M\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}$$

<u>**安培环路定律**</u>：对任意（有限）曲面$\boldsymbol{S}$，

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=4\pi k_M\iint_{S}\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}=4\pi k_M I \qquad \text{（稳恒电流）}$$



例（13页）. 稳恒电流I均匀分布于半径为a的无穷长直导线内，求空间各点的磁感应强度，并由此计算磁场的旋度.



解. 采用柱坐标. 由对称性 B=$B(r)$，方向沿圆周环绕方向.

(1) $r > a$时，通过圆环的总电流为I. 据安培环路定律， $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r B = 4\pi k_M I$

因而 $B(r) = \dfrac{2k_M I}{r}$ 考虑方向， $\boldsymbol{B}(r) = \dfrac{2k_M I}{r}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

柱坐标下旋度写成: $\nabla\times\boldsymbol{f} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_z}{\partial\phi} - \dfrac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_r + \left(\dfrac{\partial f_r}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rf_\phi)}{\partial r} - \dfrac{\partial f_r}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$

因而 $\nabla\times\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} r\dfrac{2k_M I}{r}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z = 0$

(2) $r < a$ 时，环内总电流为 $\frac{r^2}{a^2}I$. 据安培环路定律，

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi rB = 4\pi k_M \frac{r^2}{a^2} I$$

因而 $B(r) = \frac{2k_M rI}{a^2}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r\frac{2k_M rI}{a^2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{4k_M I}{a^2}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

在导线内，电流密度为 $\boldsymbol{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{\boldsymbol{e}}_z$

故 $\nabla\times\boldsymbol{B} = 4\pi k_M \boldsymbol{J}$ 与安培定律的微分形式一致.

小结

库仑定律 $f_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{F}_e = Q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} dV'$$

高斯定理 $\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

静电场无旋

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

电荷守恒

$$\oiint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{dQ}{dt} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

毕奥-萨伐尔定律

$$d\boldsymbol{F}_m = Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \iiint_{V'} \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} dV'$$

无磁荷 $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$

安培定律

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_M \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

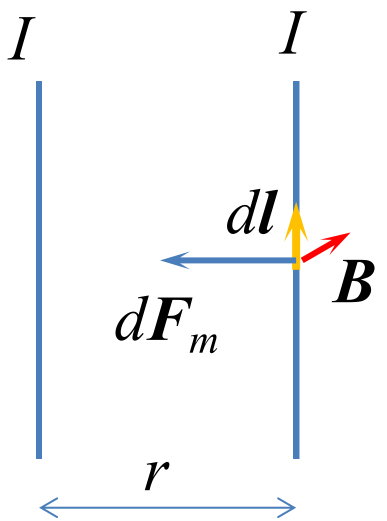
课外读物：MKSA单位制（2019.5以前）

沈乃澂，《物理》2019年第4期

基本量：长度（M），质量（公斤K），时间（秒S），电流（安培A）

单位导线受到磁力 $dF_m = BIdl = \dfrac{2k_M I^2}{r}dl$

分别通电流I的相隔r的平行细导线



规定 r =1M 而 $\dfrac{dF_m}{dl} = 2\times10^{-7}$ (N M^{-1})时

I =1A

因此 $k_M = 10^{-7}$ (N A^{-2})

令 $k_M = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$

因而 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ (N A^{-2} =HM^{-1})

磁感应强度B的单位（特斯拉）：T=N A^{-1}M^{-1}

电荷量（导出量）：库仑 = 安培 秒

测得 $e = 1.6021892(46) \times 10^{-19}$ (C 库仑)

库仑定律 $\boldsymbol{f} = k_C \dfrac{qQ}{r^3}\boldsymbol{r}$ 在SI中令 $k_C = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

以后可见真空光速为 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ 因此

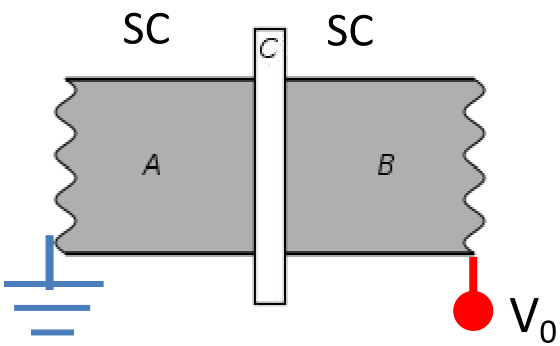
$$k_C = k_M c^2 \equiv 10^{-7}\tilde{c}^2 \qquad (\mathrm{N\ M^2/C^2})$$

$\tilde{c} = 2.998\cdots\times 10^8$ 是SI制中真空光速的数值（没有单位）

2019年 the International Committee for Weights and Measures (CIPM) 将e和c作为定义量.

- 标准电势差通过约瑟芬（Josenphson）效应来测量
- 标准电阻（电导）通过量子霍尔效应来测量
- 通过欧姆定律来定义安培

Josenphson 效应



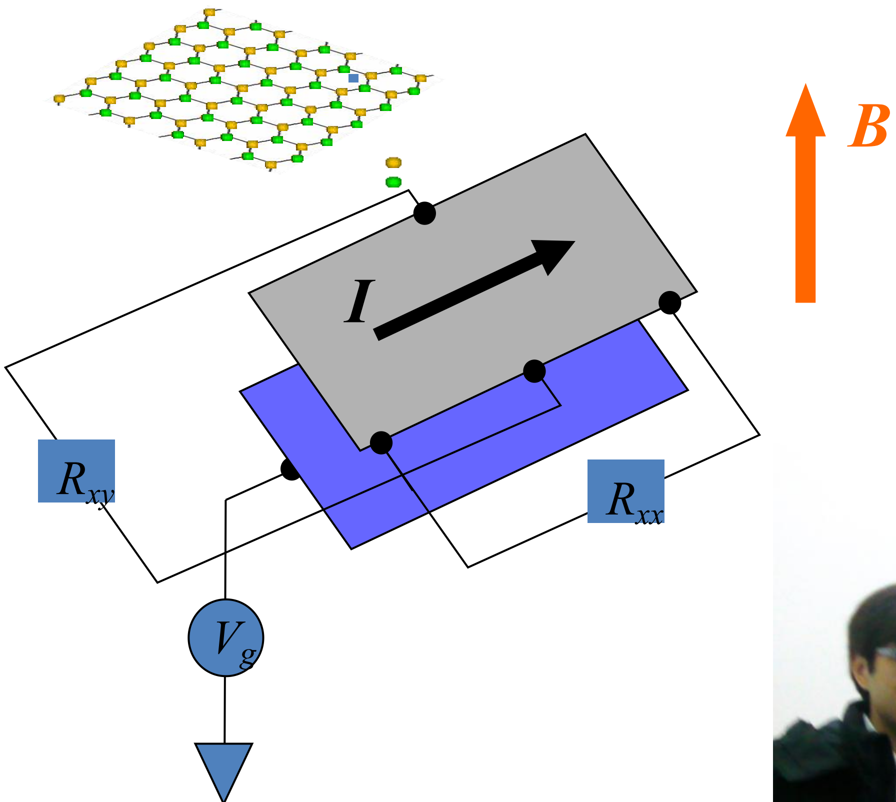
$$I = I_0 \sin(\delta + \frac{2eV_0}{\hbar} t)$$

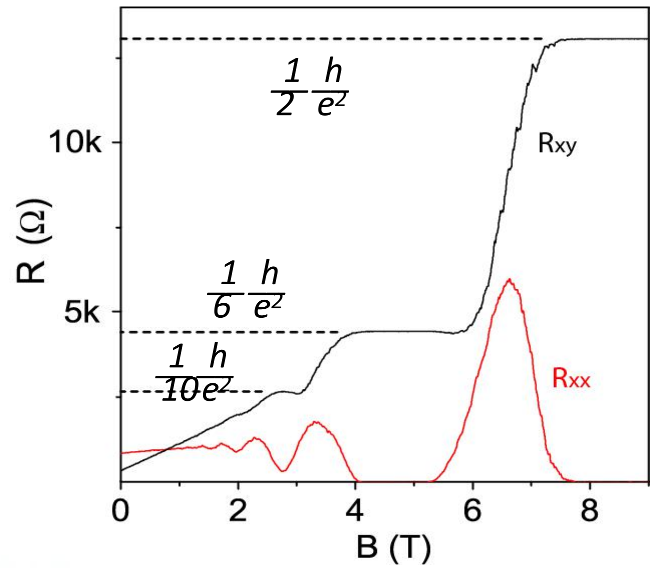
K_J=h/(2e) =483597.9GHz/V（约瑟夫常数）

R_K=h/e^2=25812.807Ω （冯.克利青常数）

B.D. Josephson, Phys. Lett. 1, (1962)251
K. von klitzing, et al, Phys. Rev. Lett. 45, (1980)494

石墨烯graphene量子霍尔效应（目前测量R_K最准确的方法）





K. S. Novoselov et al. Nature (2005)
Y. Zhang et al., Nature (2005)

张远波教授

“Half-Integer” Quantization:

$$R_{xy}^{-1} = \pm\left(n + \boxed{\frac{1}{2}}\right) \cdot g \cdot \frac{e^2}{h}$$

$$g = 4$$