珠海校区 2011 学年度第一学期高数 2 期中考试题 B 参考解答

一.(20 分,每小题 5 分)计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\tan 3x}{\sin 2x}$;

解 由洛必达法则,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x-3\sec 3x}{2\cos 2x}=\dfrac{5-3}{2}=1$;

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$;

解:原式$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+1-3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=\dfrac{-3}{3}=-1.$

(4) 已知$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$,求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

解:由洛必达法则, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0.$

二.(10 分) 设 $f(x)$在 0 点附近有定义且 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1+\sin^2 x}, & x>0\\ a & x=0;\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}+2011}, & x<0\end{cases}$

则 a,b 取何值时函数 $f(x)$在 0 点连续.

解: $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{1+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{(1+\sin^2 x)\ln\cos x}=e^0=1,$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+bx)^{\frac{1}{x}+2011}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+bx)^{\frac{1}{x}}=e^b,$

故当 $a=1,b=0$ 时,函数 $f(x)$在 0 点连续.

三.(10 分,每小题 5 分)求下列函数的导数.

(1) $y=e^{\arctan^2\frac{1}{x}}$;

解: $y' = e^{\arctan^2\frac{1}{x}} \cdot 2\arctan\frac{1}{x} \cdot \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\dfrac{2}{x^2+1}\arctan\dfrac{1}{x} \cdot e^{\arctan^2\frac{1}{x}}$;

(2) $y = \sqrt{x\sqrt{(x-1)\sqrt{\ln x}}}$.

解: $y = x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{4}}(\ln x)^{\frac{1}{8}}$, 取对数,得 $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{4}\ln(x-1) + \dfrac{1}{8}\ln(\ln x)$,

两边同时求导,得 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{8x\ln x}$, 因此

$$y' = \sqrt{x\sqrt{(x-1)\sqrt{\ln x}}} \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{8x\ln x}\right).$$

四.(10 分,每小题 5 分)求下列函数的微分.

(1) $y = \cos^2 x \ln^2(1-x)$;

解: $\mathrm{d}y = 2\cos x(-\sin x)\ln^2(1-x)\mathrm{d}x + 2\cos^2 x\ln(1-x)\dfrac{-1}{1-x}\mathrm{d}x$

$$= -\left[\sin 2x\ln(1-x) + \frac{2\cos^2 x}{1-x}\right]\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

(2) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

解: 因 $y = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ 故

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(e^{\frac{1}{x}\ln x}) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\ln x\right) = x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)\mathrm{d}x.$$

五.(10 分) 设 $y(x)$是由$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$参数方程确定的函数,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{t}{1+t^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{1+t^2} = -\frac{1+t^2}{t^3},$$

六.(10 分) 求曲线$\sqrt{x^2+y^2}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$在(0,1)处的切线方程和法线方程.

解:方程化为 $$x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x,$$

两边分别对 x 求导,得

$$2x+2yy'=\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}+1,$$

解出 y', 得 $$y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}(1-2x)-x}{(2\sqrt{x^2+y^2}-1)y},$$

因此 $$y'\big|_{(0,1)}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}(1-2x)-x}{(2\sqrt{x^2+y^2}-1)y}\Big|_{(0,1)}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x+1$,法线方程为 $y=-x+1$.

七.(10 分) (1)证明方程$\sin x+x+1=0$至少有一个实根;

(2)证明方程$\sin x+x+1=0$只有一个实根.

证明 (1) 令 $f(x)=\sin x+x+1$,则 $f(x)$ 在闭区间$[-\pi/2,0]$上连续,且

$$f(-\pi/2)=-\pi/2<0,\ f(0)=1>0.$$

由介值定理, 在区间$(-\pi/2,0)$存在实数 c,使得 $f(c)=0$.即方程$\sin x+x+1=0$至少有一个实根.

(2) 设方程$\sin x+x+1=0$至少有两个相邻的不同实根,不妨设 $f(x_1)=f(x_2)=0, x_1<x_2$.显然函数 $f(x)=\sin x+x+1$,满足 Roll 定理的条件,因此必有 $\xi\in(x_1,x_2)$,使得$f'(\xi)=0$.即 $f(\xi)$为函数的极值.不妨设ξ为极大值点,于是在区间(ξ,x_2)内,函数 $f(x)$ 单调减少,因此 $f'(x)<0$.但是 $f'(x)=\cos x+1\ge 0$,矛盾.因此方程$\sin x+x+1=0$只有一个实根.

八.(20 分) 设函数$y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

(1) 求该函数的单调区间,极值,凹凸区间,拐点;

(2) 求其渐近线方程; (3) 描绘函数图形.

解: $$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{-2x+x^2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$y''=\frac{2(x-1)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}==\frac{2}{(x-1)^3}.$$

列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	(0,1)	1	(1,2)	2	$(2,+\infty)$
$y'=f'(x)$	+	0	－	不存在	－	0	+
$y''=f''(x)$	－	－	－	不存在	+	+	+
$y=f(x)$	↗凸	极大值 0	↘凸	不存在	↘凹	极小值 4	↗凹

⑴ 函数的单调增加区间为$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$;单调减少区间为(0,1)和(1,2);

函数的凸区间为$(-\infty,1)$,凹区间为$(1,+\infty)$,其图形无拐点.

函数的极大值点为 x=0,在此点上极大值为 0;函数的极小值点为 x=2,在此点上函数取极小值 4.

⑵ 由于 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$, 所以函数的图形有垂直渐近线 $x=1$;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

因此曲线有斜渐近线 $y=x+1.$

⑶ 函数的图形如右: