电动力学

第一章：电磁现象的基本规律，电流与磁场

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

March 7, 2019

电流密度矢量:

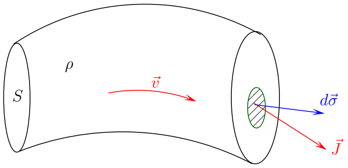
电荷的定向移动形成电流. 通常使用

- 电流强度 I
- 电流密度矢量 $\vec{J}$

来描写电流. $\vec{J}$ 的方向沿着电荷定向移动的方向, 其大小等于单位时间垂直通过单位截面的电荷量. 从而,

$$I = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{J}$$

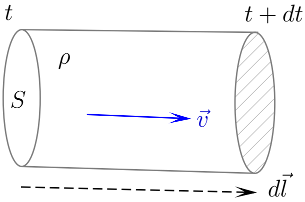
I 的物理意义: 单位时间内穿过截面 S 的电量.



两个有用的公式:

若电流由一种运动带电粒子构成，其电荷密度为 ρ，正电荷定向运动速度为 $\vec{v}$，则 $\vec{J}$ 的方向与 $\vec{v}$ 相同，大小为:

$$J = \frac{1}{S}\frac{\rho S dl}{dt} = \rho v$$



即，

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

在研究电流激发的磁场时，常常引入“电流元” $Id\vec{l}$ 的概念. 注意到 $I = JS$,

$$Idl = JSdl = JdV$$

计入方向，即得:

$$Id\vec{l} = \vec{J}dV$$

电荷守恒定律:

- 电荷守恒定律是一条实验定律.
- 在经典电动力学中，电荷守恒定律用"连续性方程"表达.

考虑空间中某区域 V, 其边界为闭合曲面 S. 根据电荷守恒定律, 如果有电荷从该区域流出的话，区域 V 中的电荷必然减小. 通过界面 S 流出的总电流应该等于 V 内电荷的减小率:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

利用奥高定理，$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{J}\, d^3x$, 所以:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$$

对于稳恒电流,

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Q: 与电荷守恒定律相联系的对称性是什么？为什么？

Biot-Savart 定律:

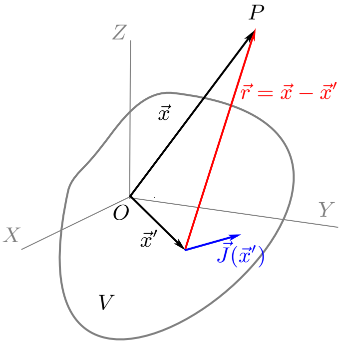
电流激发磁场.稳恒电流分布激发磁场的规律是所谓 Biot-Savart 定律:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} d^3x'$$

式中 $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$, μ_0 为真空磁导率.

若电流集中在细导线 C 上，则上式简化为:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



磁场的"高斯定律":

迄今为止没有任何关于磁荷非零体分布存在的实验证据，$\rho_m = 0$. 所以，磁场是无源的：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

磁感应强度 $\vec{B}$ 对于任何闭曲面的总通量为零：

$$\oint_S d\vec{s} \cdot \vec{B} = 0$$

拙见：

上述结论虽然可以形式化地称为磁场的"高斯定律"，但实际上它是一条反映磁场无源性的实验定律.

1. 磁感应线总是闭合曲线.
2. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 是电磁场获得规范场资格的基础之一.
3. 关于磁单极的理解须在保证 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 成立的前提下进行.

计算稳恒磁场的散度：

现在验证稳恒电流激发的磁场满足高斯定律，即确实是无源场。注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\frac{1}{r}, \quad \nabla\times(f\vec{g}) = \nabla f\times\vec{g}+f\nabla\times\vec{g}, \quad \nabla\times\vec{J}(\vec{x}\,') = 0$$

我们可以把 Biot-Savart 定律写为：

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\vec{J}(\vec{x}\,')\times\frac{\vec{r}}{r^3} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\vec{J}(\vec{x}\,')\times\nabla\frac{1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\nabla\frac{1}{r}\times\vec{J}(\vec{x}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla\times\left[\vec{J}(\vec{x}')/r\right] \\
&= \nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] := \nabla\times\vec{A}(\vec{x})
\end{aligned}$$

由于旋度场无散，$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$. 所以，$\nabla\cdot\vec{B} = 0$.

稳恒磁场的矢势:

根据磁感应强度的无源性，可以一般性地把 $\vec{B}$ 表达为:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

称 $\vec{A}$ 为磁场的矢势.

- 由于梯度场的无旋性，$\nabla \times \nabla\psi = 0$，我们看到:

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi)$$

  这里 $\psi(\vec{x})$ 是一任意标量函数 (规范函数). 所以，$\vec{A}$ 和 $\vec{A} + \nabla\psi(\vec{x})$ 描写的是同一个磁感应强度 $\vec{B}$.

- 对于稳恒电流激发的磁场，可以将其矢势选择为:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

  如此定义的矢势也是无源场: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

对于稳恒磁场证明 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$:

稳恒磁场的矢势如下：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}$$

所以，

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \right]$$

现在问题来了：可否使用微积分中的奥高散度定理把上式右端的体积分化为区域边界 S 上的面积分？

基本思路自然应该如此.

但须注意，奥高散度定理不能直接应用于上式右端，因为其表达形式是：

$$\int_V d^3x \, \nabla \cdot \vec{\mathscr{B}} = \oint_S \vec{\mathscr{B}} \cdot d\vec{s}$$

或者

$$\int_V d^3x' \, \nabla' \cdot \vec{\mathscr{B}} = \oint_S \vec{\mathscr{B}} \cdot d\vec{s}'$$

But,

$$\int_V d^3x' \, \nabla \cdot \vec{\mathscr{B}} \neq \oint_S \vec{\mathscr{B}} \cdot d\vec{s}'$$

警告:

如此看来, 在计算 $\nabla \cdot \vec{A}$ 时我们需要把被积函数

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \right]$$

中的 ∇ 设法更换为 ∇'.

对于稳恒磁场证明 $\nabla\cdot\vec{A}=0$(续一):

注意到复合矢量求散度的运算法则,

$$\nabla\cdot(f\vec{g})=\nabla f\cdot\vec{g}+f\nabla\cdot\vec{g}$$

以及平庸的数学恒等式

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x}\,')=0$$

我们有:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\left[\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\cdot\vec{J}(\vec{x}\,')+0\right]\\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\cdot\vec{J}(\vec{x}\,')\end{aligned}$$

数学恒等式:

$$\partial_x G(x-y)=-\partial_y G(x-y)$$

对于稳恒磁场证明 $\nabla\cdot\vec{A}=0$(续二):

因为,

$$\nabla'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\cdot\vec{J}(\vec{x}\,')=\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]-\frac{\left[\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}\,')\right]}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}=\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]$$

上式第二步用到了稳恒电流的连续性方程, 即 $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}\,')=0$. 所以,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S d\vec{s}\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\end{aligned}$$

由于积分区域 V 包含所有的电流分布在内, 没有电流通过区域的界面 S 溢出, 因而上述面积分为零. 所以,

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x})=0.$$

对于稳恒磁场求 $\nabla^2\vec{A}$:

磁感应强度 $\vec{B}$ 的旋度可由下式计算,

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

对于稳恒磁场, $\nabla\cdot\vec{A}=0$, 所以 $\nabla\times\vec{B}=-\nabla^2\vec{A}$. 回忆稳恒磁场矢势的表达式,

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$$

所以,

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\vec{J}(\vec{x}\,')\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\vec{J}(\vec{x}\,')\big[-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,')\big]=-\mu_0\vec{J}(\vec{x})\end{aligned}$$

稳恒磁场的旋度:

稳恒磁场是有旋场.其旋度正比于该点的电流密度矢量:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

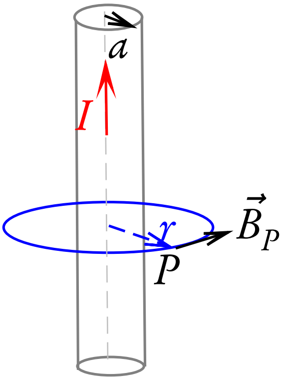
- 求稳恒磁场旋度在一个有向曲面上的面积分，利用 Stokes 定理，则上述公式化为著名的安培环路定理:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S d\vec{s} \cdot \vec{J}$$

  式中 C 代表曲面 S 的边界曲线，右端的物理意义是 μ_0 与穿过曲面 S 的电流强度之积.

- 无论是 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 还是安培环路定理，都只对稳恒磁场成立.当电磁场随时间变化时，它们被 Maxwell 方程取代.

例： 电流 I 均匀分布于半径为 a 的无穷长直导线内. 求空间各点的磁感应强度，并由此计算磁场的旋度.



解：

在导线的中垂面上作一半径为 r 的圆周，由对称性知圆周上各点的磁感应强度为：

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\phi$$

当 $r > a$ 时，由安培环路定理知，

$$\mu_0 I = \oint_C B(r)\vec{e}_\phi \cdot dl\vec{e}_\phi = \int_0^{2\pi} B(r) r d\phi = B(r) 2\pi r$$

所以，$B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$，或者：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\phi, \qquad (r > a)$$

当 $r < a$ 时，穿过圆周的总电流强度是，

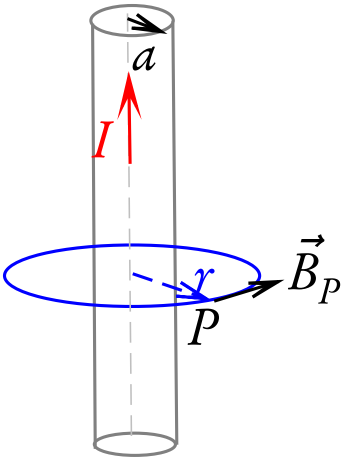
$$\pi r^2 J = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} = \frac{r^2 I}{a^2}$$

应用安培环路定理得：

$$\mu_0 \frac{r^2 I}{a^2} = B(r) 2\pi r$$

所以，

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\phi, \qquad (r < a)$$



现在设法计算 $\vec{B}$ 的旋度.在柱坐标系中,

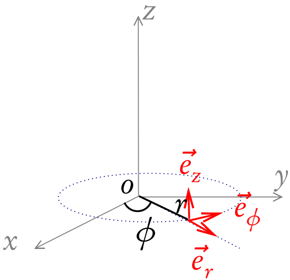
$$\nabla = \vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\phi}{r}\partial_\phi + \vec{e}_z\partial_z$$

所以 $\nabla r = \vec{e}_r$, 且:

$$\nabla\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{r}, \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} = 0$$

应用此式于本题所求出的 $\vec{B}$, 我们看到, 当 $r > a$ 时,

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\nabla \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} = 0$$



最后，利用数学恒等式，

$$\nabla \times (\psi \vec{A}) = \nabla \psi \times \vec{A} + \psi \nabla \times \vec{A}$$

求 $r < a$ 时磁感应强度 $\vec{B}$ 的旋度：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \nabla \times (r\vec{e}_\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \nabla \times \left[r^2 \frac{\vec{e}_\phi}{r} \right] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \nabla r^2 \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r^2 \nabla \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} 2r \nabla r \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} \\
&= \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} (\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi) = \mu_0 J \vec{e}_z
\end{aligned}$$

即，

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

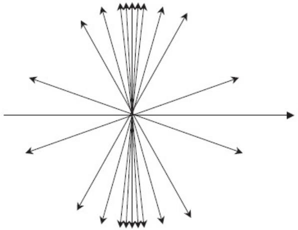
例： 以速度 $\vec{v} = c\vec{\beta}$ 做匀速直线运动的点电荷 Q 在空间激发的电场强度矢量及磁感应强度在 $t = 0$ 的瞬时值可以在球坐标系中分别表为：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\, Q\vec{r}}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

和

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}$$

式中 $\vec{\beta}$ 为点电荷的无量纲速度 (常矢量)，β 为其大小. 点电荷瞬时处于坐标原点处，θ 是场点位置矢径 $\vec{r}$ 与 $\vec{\beta}$ 之间的夹角.



请计算 $\vec{B}$ 的散度与旋度.

解： 注意到 $\vec{\beta}$ 是常矢量，则在直角坐标系里，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{B} &= \frac{1}{c}\nabla\cdot(\vec{\beta}\times\vec{E}) \\ &= \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\partial_i(\beta_j E_k) = -\frac{1}{c}\epsilon_{jik}\beta_j\partial_i E_k = -\frac{1}{c}\vec{\beta}\cdot(\nabla\times\vec{E})\end{aligned}$$

已知 $\vec{\beta}=\beta\hat{k}$. 回忆前一节例题的结论，

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{3\beta^2(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\sin\theta\cos\theta}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\,\vec{e}_\phi$$

我们有：

$$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{3\beta^3(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0\,c}\frac{Q\sin\theta\cos\theta}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\,\hat{k}\cdot\vec{e}_\phi$$

注意到球坐标系与直角坐标系基矢之间的联系，

$$\begin{aligned}\vec{e}_\phi &= \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\vec{e}_r = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\left[\hat{k}\cos\theta+\hat{\imath}\sin\theta\cos\phi+\hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi\right] \\ &= -\hat{\imath}\sin\phi+\hat{\jmath}\cos\phi\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow\ \hat{k}\cdot\vec{e}_\phi = 0$$

所以，

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

这正是磁感应强度应该服从的高斯定律，恰如预期.

$\vec{B}$ 的旋度计算如下：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \nabla \times (\vec{\beta} \times \vec{E}) \\
&= \frac{\vec{e}_i}{c} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk}\, \partial_j (\beta_m E_n) \\
&= \frac{\vec{e}_i}{c} (\beta_i \partial_j E_j - \beta_j \partial_j E_i) = \frac{1}{c} \Big[\vec{\beta} (\nabla \cdot \vec{E}) - (\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{E} \Big]
\end{aligned}$$

回忆前一节例题的结果，

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r})$$

现在须设法计算 $(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{E}$. 注意到梯度算符在球坐标系中的表达式是：

$$\nabla = \vec{e}_r \partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin\theta} \partial_\phi$$

鉴于球坐标系与直角坐标系基矢之间存在着如下联系,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \hat{k} \cos\theta + \hat{\imath} \sin\theta \cos\phi + \hat{\jmath} \sin\theta \sin\phi \\
\vec{e}_\theta &= \partial_\theta \vec{e}_r = -\hat{k} \sin\theta + \hat{\imath} \cos\theta \cos\phi + \hat{\jmath} \cos\theta \sin\phi \\
\vec{e}_\phi &= \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi \vec{e}_r = -\hat{\imath} \sin\phi + \hat{\jmath} \cos\phi
\end{aligned}$$

我们看到:

$$\hat{k} \cdot \vec{e}_r = \cos\theta, \quad \hat{k} \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\theta, \quad \hat{k} \cdot \vec{e}_\phi = 0, \quad \partial_r \vec{e}_r = 0.$$

所以,

$$\vec{\beta} \cdot \nabla = \beta \hat{k} \cdot \left(\vec{e}_r \partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin\theta} \partial_\phi \right) = \beta \left(\cos\theta \partial_r - \frac{\sin\theta}{r} \partial_\theta \right)$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{\beta}\cdot\nabla)\vec{E} &= \beta\left(\cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\,Q\,\vec{r}}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\
&= \frac{Q\,\beta(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\left(\cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right)\left[\frac{1}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right] \\
&= -\frac{Q\,\beta(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0\,r^3}\left[\frac{(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{3\beta^2\sin^2\theta\cos\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\,\vec{e}_r\right] \\
&= -\frac{Q\,\beta(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0\,r^3}\left[\frac{(2+\beta^2\sin^2\theta)\cos\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\,\vec{e}_r\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\vec{e}_\theta\right]
\end{aligned}
$$

由于 $\beta \neq 0$[1]，我们看到：$(\vec{\beta}\cdot\nabla)\vec{E} \neq 0$. 代入到前面的公式，$\vec{B}$ 的旋度最终求得为：

[1] 否则此荷电粒子处于静止状态，不激发磁场.

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{Q}{\epsilon_0 c}\vec{\beta}\delta^{(3)}(\vec{r}) + \frac{Q\beta(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 c\, r^3}\left[\frac{(2+\beta^2\sin^2\theta)\cos\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\,\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\vec{e}_\theta\right]$$

Insights:

1. 注意到 $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ 以及 $\rho = Q\delta^{(3)}(\vec{r})$，我们有：

$$\frac{Q}{\epsilon_0 c}\vec{\beta}\delta^{(3)}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0 c^2}\vec{v}\delta^{(3)}(\vec{r}) = \mu_0\,\rho\vec{v} = \mu_0\vec{J}$$

即 $\nabla \times \vec{B}$ 表达式右端的第一项恰为安培环路定理的内容.

2. $\nabla \times \vec{B}$ 表达式右端第二大项的存在说明本例中安培环路定理不成立. 究其原因，在于做匀速直线运动的荷电粒子的电流线没有形成闭合曲线、它产生的电流不是稳恒电流.

静电、静磁规律小结：

静电场与稳恒磁场的基本方程是相互独立的：

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \times \vec{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}
\end{aligned}
$$

所以，静电场是保守力场而稳恒磁场是无源场：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

与静场比较，时变电磁场的新规律主要是：

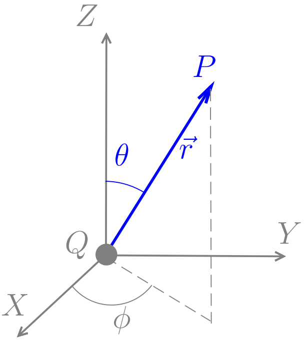
1. 变化磁场激发电场(法拉第电磁感应定律)；
2. 变化电场激发磁场(麦克斯韦位移电流假设).

时变电、磁场的相互激发是形成电磁波的物理基础.

专题研究：

位于坐标原点的点电荷 Q 在空间激发的静电场场强是：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,\vec{r}}{r^3}$$



采用球坐标系后，

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,\vec{e}_r}{r^2}$$

注意到 $\vec{e}_r = \nabla r$，我们有：

$$\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{r^2}\nabla r = -\nabla\frac{1}{r}, \qquad \rightsquigarrow \vec{E} = -\nabla\left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r}\right] = -\nabla\varphi$$

换言之，此点电荷所激发静电场可以用静电标势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

描写， 这正是我们预期的结果.

由于球坐标系基矢满足关系式 $\vec{e}_r = \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi$，我们也可以把点电荷的电场强度改写为:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,\vec{e}_r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi}{r^2} = \frac{Q\sin\theta}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{e}_\theta}{r} \times \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\right]$$

亦即，

$$\vec{E} = \frac{Q\sin\theta}{4\pi\epsilon_0}\nabla\theta\times\nabla\phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla(\cos\theta)\times\nabla\phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\times(\cos\theta\,\nabla\phi)$$

最后一步使用了数学恒等式 $\nabla \times \nabla\phi = 0$. 此式似乎建议我们:

$$\vec{E} = \nabla \times \vec{A}$$

如果此式真能成立，则 $\vec{A}$ 应称为点电荷静电场的矢量势[2]. 从上面的推演过程可知：

$$\vec{A} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cos\theta\nabla\phi = -\frac{Q\vec{e}_\phi}{4\pi\epsilon_0\, r}\cot\theta$$

或者，

$$\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(1-\cos\theta)\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\cos\theta)\,\vec{e}_\phi}{r\,\sin\theta}$$

疑问：

1. 点电荷的静电场可以引入矢势描写吗？ 若能，请阐述理由. 若不能，如何理解上面的结果？

[2] 或者简称为“矢势”.

评论：

1. 点电荷 Q 的静电场实际上并不能使用矢势描写．设点电荷 Q 占据了坐标原点. Q 激发的静电场场强
$$\vec{E} = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0\, r^2}$$
的定义域是 $r > 0$. 但候选 "矢势"
$$\boxed{\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\cos\theta)\,\vec{e}_\phi}{r\,\sin\theta}}$$
的定义域是 $r > 0$ 且 $0 \leq \theta < \pi$. 二者在定义域上的差异意味着 $\vec{E} \neq \nabla \times \vec{A}$.
2. 倘若接受 $\vec{E} = \nabla \times \vec{A}$, 则必须使 $\vec{E}$ 与 $\vec{A}$ 具有完全重合的定义域，即把点电荷场强 $\vec{E}$ 的定义域从 $r > 0$ 缩小为
$$r > 0,\ 0 \leq \theta < \pi$$
换言之，必须把 $\theta = \pi$ 的负 z 轴从场强分布的物理空间中剔除．

新疑问:

1. 矢量场

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0\, r^2}, \quad (r > 0,\ 0 \le \theta < \pi)}$$

还能看作占据在坐标原点处的点电荷 Q 激发的的静电场场强吗? 为什么?

2. 或许大家可以就这个问题展开调研, 写一篇调研报告或者小论文[3].

---

[3] 欢迎大家把完成的论文发到邮箱 hyang@ustc.edu.cn 与我分享新思想的喜悦. 提交之前请审核过文字、公式以及逻辑.

作业:

1. 电荷体系的电偶极矩定义为 $\vec{p}(t) = \int_V d^3x' \ \rho(\vec{x}', t)\vec{x}'$，请证明其时间变化率为:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}', t)$$

2. 若 $\vec{m}$ 是常矢量、$\vec{r}$ 是场点相对于坐标原点的位置矢径且其大小 $r \neq 0$. 请证明矢量场

$$\vec{A} = \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

的旋度可以表为某一标量场的负梯度，即 $\nabla \times \vec{A} = -\nabla\psi$. 请写出 ψ 场的一个可能的表达式.

3. 请计算两个电流元之间的相互作用力并判明此力是否服从牛顿第三定律. 如何从物理上理解这个计算结果?