

一.(每小题 6 分,共 12 分)求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{2x^3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

二. (每小题 6 分,共 24 分)求下列积分:

(1) $\int \frac{dx}{x(2+x^{10})}$; (2) $\int \cos(\ln x) dx$; (3) $\int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$

三. (每小题 7 分,共 21 分)

(1) 设 $z(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $dz|_{(0,1)}$;

(2) 已知 $f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 及点 $A(1, 0, 1), B(3, -2, -2)$, 求函数 $f(x, y, z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

(3) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + y + z = e^z$ 给出, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四. (第一小题 4 分, 第二小题 6 分, 共 10 分)

(1) 给定空间三点: $A(1, 2, 0), B(-1, 3, 1), C(2, -1, 2)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

(2) 求经过直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: x = y = \frac{z}{2}$ 的平面方程.

五. (7 分) 求函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x > 0$ 的极值.

六. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求(1)此函数的单调区间与极值点;(2)此函数的凹凸区间与拐点;(3)此函数的渐近线.

七. (每小题 7 分,共 14 分)

1. 求证不等式 $\sin x + \tan x > 2x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$;

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0, f''(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

求证: $f(x) \neq 0, x \in (a, b)$.