



光电电子技术(23)

$$\chi_{i23}, \chi_{i32} \rightarrow d_{i4}; \chi_{i13}, \chi_{i31} \rightarrow d_{i5}; \chi_{i12}, \chi_{i21} \rightarrow d_{i6}$$

变换后，二阶极化强度表示为：

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^2 \\ E_y^2 \\ E_z^2 \\ 2E_y E_z \\ 2E_z E_x \\ 2E_x E_y \end{pmatrix}$$

上式中 d_{ij} 称为非线性系数

三、非线性波耦合方程

一般情况下，作用在非线性介质上的电场可以是多个的迭加，迭加



光电电子技术(23)

电场与介质的二阶非线性系数作用后，产生新的频率电磁波。所以，在介质中存在多个电磁波。它们间的能量耦合可以通过麦克斯韦方程组-多波耦合方程描述。

1、非线性介质中的麦克斯韦方程

设非线性介质为非铁磁、非导电性的，即 $\mu=1$ ， $\sigma=0$ ，则麦克斯韦方程为：

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} + 4\pi \vec{P}^{NL}$$

组合三式，并利用： $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}; \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$

得：

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\epsilon}{c^2} \vec{E} \right) + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2} \quad (A)$$

光子技术(23)

(A) 式就是电磁波与介质非线性作用的一般方程，与线性作用的差别就表现在多了最后一个非线性极化项。

2、二阶非线性过程的三波耦合

设在非线性介质中传播的三个平面电磁波分别为：

$$E^{\omega_1}(z, t) = E^{\omega_1}(z) e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)}$$

$$E^{\omega_2}(z, t) = E^{\omega_2}(z) e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)}$$

$$E^{\omega_3}(z, t) = E^{\omega_3}(z) e^{-i(\omega_3 t - k_3 z)}$$

则作用在非线性介质上的总电场为：

← / ≡ →

光子技术(23)

$$E(z, t) = E^{\omega_1}(z, t) + E^{\omega_2}(z, t) + E^{\omega_3}(z, t)$$

将总电场代入 (A) 式，进行复杂的推导，并利用慢变化近似：

$$\frac{\partial^2 E^{\omega}(z)}{\partial z^2} \ll \frac{\partial E^{\omega}(z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 E^{\omega}(z)}{\partial t^2} \ll \frac{\partial E^{\omega}(z)}{\partial t}$$

最后可得耦合波方程：

$$\begin{aligned} \frac{dE^{\omega_1}(z)}{dz} &= -i \frac{8\pi\omega_1^2 d}{k_1 c^2} E^{\omega_2}(z) E^{\omega_3}(z) e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z} \\ \frac{dE^{\omega_2}(z)}{dz} &= -i \frac{8\pi\omega_2^2 d}{k_2 c^2} E^{\omega_1}(z) E^{\omega_3}(z) e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z} \\ \frac{dE^{\omega_3}(z)}{dz} &= -i \frac{8\pi\omega_3^2 d}{k_3 c^2} E^{\omega_1}(z) E^{\omega_2}(z) e^{i(k_2 + k_1 - k_3)z} \end{aligned} \quad (B)$$

← / ≡ →



光电子技术(23)

上式为研究二阶非线性过程的基本方程，其物理意义为：

(1) 由于表征二阶非线性效应的参数 d 很小，多波之间的耦合只有在强电场下才能显示出来。

(2) 当作用电场较强时，非线性耦合使能量在不同频率的波之间转换，从而实现频率转换。

§ 6.3 光学倍频

光学倍频是最常见的非线性光学现象，它的应用扩展了激光的光谱范围，得到了广泛应用。

一、倍频耦合效率

令耦合波方程 (B) 中 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ， $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ ，则 (B) 方



光电子技术(23)

程组即描述光学倍频过程。

设倍频晶体的长度为 L ，则积分 (B) 式中第三个方程得倍频晶体出口处的倍频波振幅为：

$$\begin{aligned} E^{2\omega}(L) &= \int_0^L \frac{dE^{2\omega}(z)}{dz} dz = -i \frac{8\pi\omega_3^2 d}{k_3 c^2} \int_0^L [E^\omega(z)]^2 e^{i\Delta k z} dz \\ &= -\frac{8\pi\omega_3^2 d}{k_3 c^2} \frac{[E^\omega(0)]^2}{\Delta k} (e^{i\Delta k L} - 1) = -\frac{16\pi^2 d [E^\omega(0)]^2}{n_3 \lambda_3} \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{\Delta k} \end{aligned}$$

式中 $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$

倍频光强度为：

光电子技术(23)

$$I^{2\omega}(L) = \frac{cn_3}{8\pi} E^{2\omega}(L)(E^{2\omega}(L))^* = \frac{512\pi^5 L^2 d^2 (I^\omega)^2}{[n^\omega]^2 n^{2\omega} [\lambda^{2\omega}]^2 c} \left[\frac{\sin(\Delta k L / 2)}{\Delta k L / 2} \right]^2$$

式中
$$I^\omega = \frac{cn_1}{8\pi} E^\omega (E^\omega)^*$$

倍频效率为:
$$\eta_{SHG} = \frac{I^{2\omega}(L)}{I^\omega} = \frac{512\pi^5 L^2 d^2 I^\omega}{[n^\omega]^2 n^{2\omega} [\lambda^{2\omega}]^2 c} \left[\frac{\sin(\Delta k L / 2)}{\Delta k L / 2} \right]^2$$

$$= \eta_{\max} \left[\frac{\sin(\Delta k L / 2)}{\Delta k L / 2} \right]^2$$

讨论: (1) 最大倍频效率正比于晶体长度L和二阶有效非线性系数d的平方, 正比于基频光强。

✦ (2) 给定晶体和基频光功率情况下, 倍频功率由相位因子决定。

光电子技术(23)

二、相位匹配

1、相位匹配条件

根据倍频效率公式, 仅当

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = 0$$

时, 倍频效率达到最大值。称 $\Delta k=0$ 为满足相位匹配条件。

相位匹配条件的物理实质:

利用公式:
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$$

相位匹配条件变为: $v^\omega = v^{2\omega}$ or $n^\omega = n^{2\omega}$ (物理意义?)



光电子技术(23)

这样就能保证任意时刻产生的二次极化波与先前产生的二次极化波同相迭加，放大。（证明？）

当不满足相位匹配时，相位因子随 ΔkL 变化衰减振荡。当

$$L_c = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{\pi}{2k^\omega - k^{2\omega}} = \frac{\lambda^\omega}{4(n^\omega - n^{2\omega})} \quad (\eta \approx 40.5\% \eta_{\max})$$

称 L_c 为相干长度。

2、相位匹配方法

在各向同性正常色散介质中显然是不可能实现相位匹配条件的。因此，必须寻求各向异性介质，并且是非中心反演对称的。我们学过的电光双折射晶体刚好满足所要求的条件。利用基频光和倍频光的不同o、e偏振组合，有可能实现相位匹配条件。



光电子技术(23)

(1)、负单轴晶体的相位匹配法

如图116所示为一负单轴晶体的基、倍频光的o、e偏振的折射率椭球。当满足

$$n_e^{2\omega} \leq n_o^\omega$$

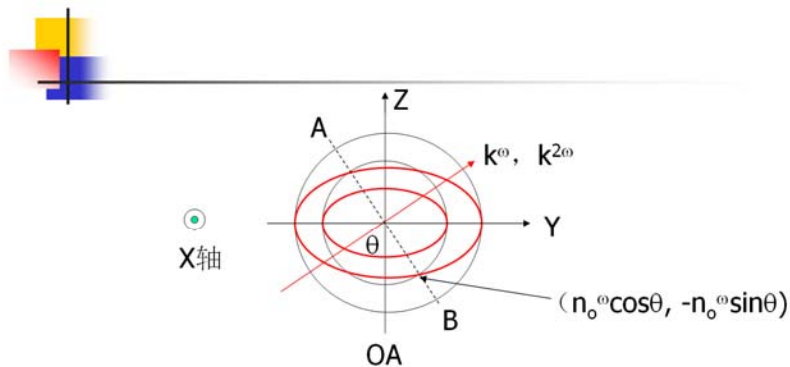
条件时，基频的o光折射率球与倍频的e光折射率椭球相交。过中心和交点做直线AB，设置基频光为o偏振，波矢与直线AB垂直，则倍频的e光刚好满足相位匹配条件：

$$n_o^\omega = n_e^{2\omega}(\theta)$$

θ 为基频波矢与光轴的夹角，称为相位匹配角。

在Y-Z平面上，倍频e光的椭圆方程为：

$$\frac{y^2}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{z^2}{(n_e^{2\omega})^2} = 1$$



相位匹配条件: $n_o^\omega = n_e^{2\omega}(\theta)$

Fig.116 负单轴双折射晶体的基、倍频光的折射率椭球。

光电子技术(23)

代入交点坐标 $y = n_o^\omega \cos \theta; z = -n_o^\omega \sin \theta$ 入上述椭圆方程解得:

$$\theta = \sin^{-1} \left[\frac{n_e^{2\omega}}{n_o^\omega} \sqrt{\frac{(n_o^\omega)^2 - (n_o^{2\omega})^2}{(n_e^{2\omega})^2 - (n_o^{2\omega})^2}} \right]$$

所以, 负单轴晶体能够实现一类 $o+o \rightarrow e$ 匹配

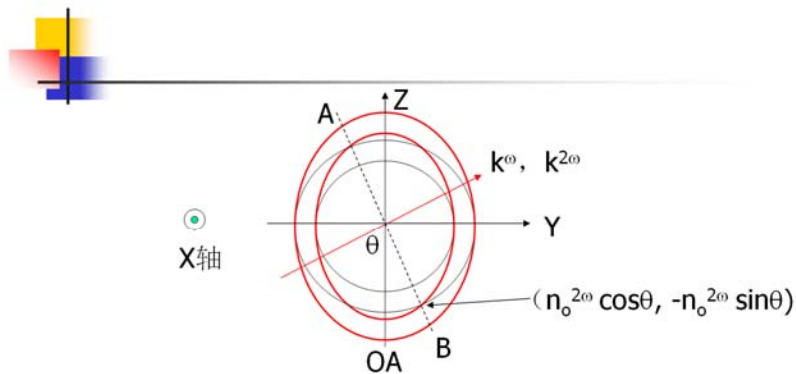
所谓一类匹配指两基频波具有相同的偏振态。

(2) 正单轴晶体的相位匹配法

如图117所示为一正单轴晶体的基、倍频光的o、e偏振的折射率椭球。当满足

$$n_e^\omega \geq n_o^{2\omega}$$

条件时, 基频e光折射率椭球与倍频o光折射率球相交, 过交点和球心做直线AB, 设置基频光为e偏振, 波矢量垂直AB, 则此时满足相



相位匹配条件: $n_o^{2\omega} = n_e^{\omega}(\theta)$

Fig.117 正单轴双折射晶体的基、倍频光的折射率椭球。

光电子技术(23)

位匹配条件: $n_o^{2\omega} = n_e^{\omega}(\theta)$

同理, 把交点坐标: $y = n_o^{2\omega} \cos \theta; z = -n_o^{2\omega} \sin \theta$

代入基频e光椭圆方程: $\frac{y^2}{(n_o^{\omega})^2} + \frac{z^2}{(n_e^{\omega})^2} = 1$

解得相位匹配角位:

$$\theta = \sin^{-1} \left[\frac{n_e^{\omega}}{n_o^{2\omega}} \sqrt{\frac{(n_o^{2\omega})^2 - (n_o^{\omega})^2}{(n_e^{\omega})^2 - (n_o^{\omega})^2}} \right]$$

所以, 正单轴晶体能够实现一类 $e+e \rightarrow o$ 相位匹配。

由于匹配角 θ 指基频光波矢相对于光轴的夹角, 所以, 对单轴晶体在以光轴为中轴线, θ 角为顶角的圆锥面上任一母线方向均满足相位匹配条件。

光电子技术(23)

二类相位匹配指两基频光具有不同的偏振，即

$$o + e \rightarrow o \quad \text{or} \quad o + e \rightarrow e$$

负单轴晶体有可能实现 $o + e \rightarrow e$ 匹配，如图117a。

当满足：
$$n_e^{2\omega} \leq (n_o^\omega + n_e^\omega)/2$$

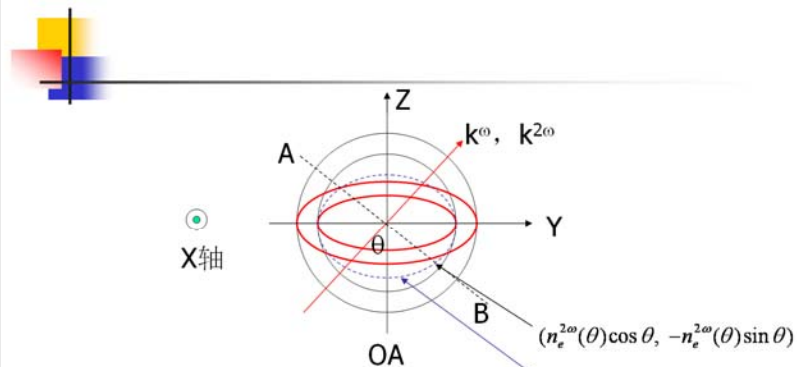
时，可以实现 $o + e \rightarrow e$ 二类相位匹配。

相位匹配条件：
$$n_e^{2\omega}(\theta) = (n_o^\omega + n_e^\omega(\theta))/2 \quad (a)$$

代入交点坐标 $(n_e^{2\omega}(\theta)\cos\theta, -n_e^{2\omega}(\theta)\sin\theta)$ 入椭圆方程：

$$\frac{y^2}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{z^2}{(n_e^{2\omega})^2} = 1 \quad (b)$$

⏪ / ⏩ ⏮ ⏭ ⏯ ⏰



相位匹配条件：

$$k_1 + k_2 - k_3 = 0 \Rightarrow n_e^\omega(\theta) + n_o^\omega = 2n_e^{2\omega}(\theta) \Rightarrow n_e^{2\omega}(\theta) = (n_o^\omega + n_e^\omega(\theta))/2$$

Fig.117a 负单轴双折射晶体的基、倍频光的折射率椭球。
二类共线相位匹配， $o + e \rightarrow e$ 。



光电电子技术(23)

同时，代坐标点 $(n_e^\omega(\theta)\cos\theta, -n_e^\omega(\theta)\sin\theta)$ 入如下方程：

$$\frac{y^2}{(n_0^\omega)^2} + \frac{z^2}{(n_e^\omega)^2} = 1 \quad (c)$$

联合求解方程(a)(b)(c)得：

$$[n_e^\omega(\theta)]^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{(n_0^\omega)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(n_e^\omega)^2} \right] = 1$$

$$[n_e^\omega(\theta) + n_0^\omega]^2 \left[\frac{\cos^2 \theta}{(n_0^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(n_e^{2\omega})^2} \right] = 4$$

数字求解上两式可获得匹配角 θ

⌂ / ☐ ➡



光电电子技术(23)

正单轴晶体有可能实现 $o+e \rightarrow o$ 二类匹配，如图117b。

当满足： $n_e^\omega \geq 2n_0^{2\omega} - n_0^\omega$

时，可以实现二类 $o+e \rightarrow o$ 匹配。匹配条件为：

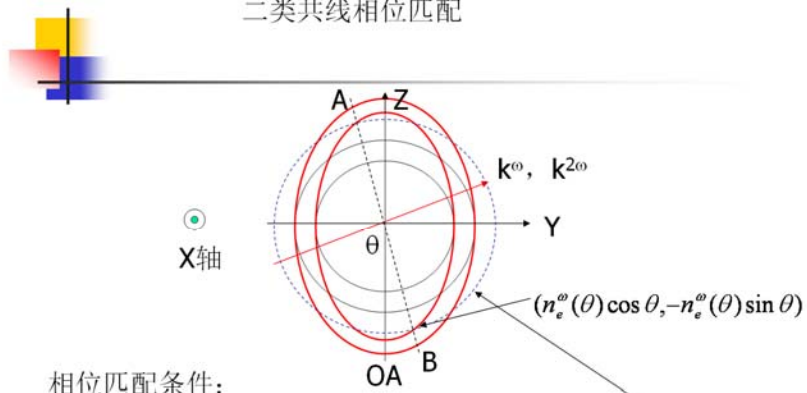
$$n_e^\omega(\theta) = 2n_0^{2\omega} - n_0^\omega$$

代交点坐标 $(n_e^\omega(\theta)\cos\theta, -n_e^\omega(\theta)\sin\theta)$ 入椭圆方程：

$$\frac{y^2}{(n_0^\omega)^2} + \frac{z^2}{(n_e^\omega)^2} = 1$$

求解得匹配角为：

二类共线相位匹配



$$k_1 + k_2 - k_3 = 0 \Rightarrow n_e^{\omega}(\theta) + n_o^{\omega} = 2n_o^{2\omega} \Rightarrow n_e^{\omega}(\theta) = 2n_o^{2\omega} - n_o^{\omega}$$

Fig.117b 正单轴双折射晶体的基、倍频光的折射率椭球。
二类相位匹配: $\text{o}+\text{e} \rightarrow \text{o}$

光电子技术(23)

$$\theta = \sin^{-1} \left[\frac{n_e^{\omega}}{2n_o^{2\omega} - n_o^{\omega}} \sqrt{\frac{(2n_o^{2\omega} - n_o^{\omega})^2 - (n_o^{\omega})^2}{(n_e^{\omega})^2 - (n_o^{\omega})^2}} \right]$$

三、倍频器设计

由于晶体的折射率是波长的函数，所以，匹配角会随波长变化，即同种晶体对不同的基频，匹配角是不同的。

倍频器设计考虑:

(1) 匹配角的计算

(2) 切割角的计算。通常要求基频光垂直晶体表面入射，所以要



光子电子技术(23)

晶体进行适当的切割。[如图118所示](#)。切割角定义为入射面与光轴的夹角。

四、倍频器应用

1、腔外式应用

在激光器谐振腔外应用，对输出的激光束倍频。[如图119所示](#)，为了提高倍频效率，通过透镜聚焦激光束，倍频晶体放置在焦点处，达到提高基频光功率密度（光强）的目的。然后，用另一透镜准直光束。用一二色分束片或偏振棱镜把基频和倍频分开。

2、内腔式应用

对连续耦合输出激光器，由于谐振腔内的功率比输出的功率几乎高一个数量级，所以在腔内倍频的效率会比腔外高。[如图120所示](#)，



光子电子技术(23)

晶体进行适当的切割。[如图118所示](#)。切割角定义为入射面与光轴的夹角。

四、倍频器应用

1、腔外式应用

在激光器谐振腔外应用，对输出的激光束倍频。[如图119所示](#)，为了提高倍频效率，通过透镜聚焦激光束，倍频晶体放置在焦点处，达到提高基频光功率密度（光强）的目的。然后，用另一透镜准直光束。用一二色分束片或偏振棱镜把基频和倍频分开。

2、内腔式应用

对连续耦合输出激光器，由于谐振腔内的功率比输出的功率几乎高一个数量级，所以在腔内倍频的效率会比腔外高。[如图120所示](#)，



复习要点

- 1、耦合波方程的物理意义？
- 2、倍频效率与哪些因素有关？何谓相位匹配？
- 3、正、负单轴晶体如何实现相位匹配？何谓一类、二类相位匹配条件？正、负单轴晶体各能实现什么样的偏振配置的一、二类相位匹配条件？
- 4、相位匹配角公式的推导和相位匹配角的计算？
- 5、腔内、外倍频的应用和优缺点？



作业23

- 1、导出正单轴晶体的共线二类相位匹配条件的匹配角公式？

