第八章　假设检验

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

显著性检验　假设检验的两类错误　单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验

考试要求

1. 理解显著性检验的基本思想，掌握假设检验的基本步骤，了解假设检验可能产生的两类错误。
2. 掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验。

本章导读　假设检验 8 大接受域和拒绝域，两类错误的计算方法。

一、假设检验与参数区间估计的关系

1. 参数θ的置信度为$1-\alpha$的区间估计，正好是显著性水平为α的假设检验的接受域。
2. 区间估计中，假设总体中的参数是未知的，要用样本对它进行估计；而假设检验中，是先对参数做出假设，再用样本值对假设作检验。在某种意义上，假设检验是区间估计的逆问题。
3. 具有完全相同的 8 大枢轴量（8 大枢轴量详见第七章）。

二、假设检验的基本思想及两类错误与显著性检验

比如，一个人说他射击是高手，我们将半信半疑。怎样才能确定他的话真假，最好的办法就是先假设他是高手或低手，然后让他实际打几枪，根据他射击的结果来检验。如果其射击结果命中率在 90% 以上，我们一般可以接受他的说法；如果命中率在 50% 以下，我们就拒绝他的说法，这个判断的标准是根据小概率事件几乎不可能发生的原理。但我们的判断也可能犯错误，因为几乎不可能发生，但还是有可能发生的。一是他的确是高手，但在这次射击中失误了，而我们却只根据他这一次的命中率没把他当高手，也就是说我们犯了以真当假的错误—称为**第一类错误**。二是他本来是个低手，但这次命中率恰好超过了 90% 以上，我们却把他当成了高手，实事上我们犯了以假当真的错误—称为**第二类错误**。这两类错误，我们都尽可能使其概率最小，但实事上做不到，因为它们是此消彼长的关系，因此，我们首先要控制主要错误（又称显著性错误）的概率，那究竟哪种错误严重，即显著呢？

为了说明两类错误主次关系的直观含义，我们引用一个生活例子：某人因身体不适前往医院求医。医生的职责就是通过各种生理检查，根据化验的数据作出该病员是否犯病的结论。然而再好的医生都不可避免会犯下两类错误。一种是病员确实有病，但由于生理指标未出现明显的异常现象，使医生判断为无病。另一种是病员实际上没有疾病，但生理指标呈现某种异常，使医生判断为有病。这两类错误都会导致病员的损失，然而两类错误的损失是不一样的。如果“有病判无病”，相当于以真当假—第 1 类错误，其结果可能延误了治病的时机造成病情的加重以致死亡；而“无病判有病”，相当于以假当真—第 2 类错误，其结果是病员会有一些经济或其他损失，然而对生命是无碍的。因此医生总是尽可能地避免犯上述第 1 类错误。

如果用假设检验的数学语言表达即为：原假设H_0：该人有病，备选假设H_1：该人无病。而生理检验指标就是样本观测值，医生要作的决定即为接受H_0或拒绝H_0。而拒绝域 W 即为“生理指标属于正常范围”，

而犯第Ⅰ类错误的概率为 $P_{H_0}(拒绝H_0 \mid H_0为真)=\alpha$，正是“有病误判无病”的概率。犯第Ⅱ类错误的概率为 $P_{H_1}(接受H_0 \mid H_1为真)=P(接受H_0 \mid H_0不真)=\beta$，正是“无病误判有病”的概率。由于两类错误的影响不同，第一类错误的后果严重，是显著的，故经常要求控制第一类错误概率，即 $P_{H_0}(W)\le\alpha$，其中 α 是充分小的正数，这也就是**显著性检验**的由来，α 称为**显著性水平**。α 的意思是概率 $P_{H_0}(拒绝H_0 \mid H_0为真)$ 很小，相应的事件为小概率事件，几乎不可能发生，但并不等于不发生，只是发生的概率等于 α 而已。注意**显著性检验并不考虑**犯第 2 类错误概率 β。

当总体的分布函数未知，或只知其形式而不知道它的若干参数的情况时，我们可以根据历史经验或者其他的充分理由对总体分布或者它的参数提出某种假设：例如

$\boxed{H_0：总体分布是正态分布\quad 或者\quad H_0：\theta_1\le\theta_{10}（\theta_{10}为某一已知常数）}$，称为**原假设**或零假设；

而它的否定命题为：$\boxed{H_1：总体分布不是正态分布\quad 或者\quad H_1：\theta_1>\theta_{10}}$，称为**备择假设**。

假设检验方案即为寻求一个拒绝区间 W，一旦样本的观测值落在 W 内，就作出拒绝 H_0 的决定，故称为拒绝域，W 的余集 $\overline{W}$ 成为接受域，接受域就是区间估计的范围。样本的观测值落在 $\overline{W}$ 就作出接受 H_0 的决定。假设检验就是根据取到的样本观测值与枢轴量的理论值作比较，作出拒绝还是接受哪个假设的决定。

例如若 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\ge\lambda\right\}=\alpha$，当 $\alpha=0.01;\quad 0.05,\quad 0.1$ 等很小的值时，叫做小概率事件，小概率事件在一次试验中认为是不会发生的，称为小概率原理，也就是说事件 $\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\ge\lambda\right\}$ 是不可能发生的，或发生的概率 α 很小。

在假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 下，由于 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其中分位数 $z=z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 可查表得到**理论值**，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ 的**检验值**可由样本观察值和 $\mu=\mu_0$ 计算确定。如果将样本观察值 $\overline{X}$ 和原假设 H_0 中的 $\mu=\mu_0$ 代入 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，有 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\ge\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}$（或 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\ge\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ 成立，到底取哪一种形式，要看哪一种能查表得出）则小概率事件发生了，就拒绝 H_0；反之，接受 H_0。显然，$\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|\ge\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 的拒绝域为 $\left(-\infty,-\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}+\infty,\right)$；接受域为 $\left(-\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$，由此还可以推出 μ 的拒绝域为 $\mu\ge\overline{X}+\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}\cup\mu\le\overline{X}-\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}$。可以看出，它与区间估计的分界点是完全相同的，只是区域描述不同而已。

显然，只要比较 Z_0（枢轴量）的理论计算值与分位数的查表值 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ 的大小即可，即有结论：

(a)　$|Z_0| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$　Z_0 落在拒绝域内，从而拒绝原假设 H_0，认为 H_1 正确；

(b)　$|Z_0| \le Z_{\frac{\alpha}{2}}$　Z_0 未落在拒绝域内，从而接受原假设 H_0，认为 H_o 正确。

其余枢轴量类推。

三、正态总体的参数检验的考点

1、单个正态总体（注意等号的分布位置，对单边假设等号一般在原假设上）

检验参数	条件	H_o	H_1	H_o 的拒绝域	选用检验枢轴量	自由度	分位点
数学期望 μ	σ^2 已知	$\mu = \mu_o$	$\mu \ne \mu_o$	$\|Z\| \ge Z_{\alpha/2} = -Z_{1-\alpha/2}$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$		$\pm Z_{\alpha/2}$
		$\mu \le \mu_o$	$\mu > \mu_o$	$Z \ge Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$			Z_α
		$\mu \ge \mu_o$	$\mu < \mu_o$	$Z \le -Z_\alpha = Z_{1-\alpha}$			$-Z_\alpha$
	σ^2 未知	$\mu = \mu_o$	$\mu \ne \mu_o$	$\|t\| \ge t_{\alpha/2} = -t_{1-\alpha/2}$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_o}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$n-1$	$\pm t_{\alpha/2}$
		$\mu \le \mu_o$	$\mu > \mu_o$	$t \ge t_\alpha = -t_{1-\alpha}$			t_α
		$\mu \ge \mu_o$	$\mu < \mu_o$	$t \le -t_\alpha = t_{1-\alpha}$			$-t_\alpha$
方差 σ^2	μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\begin{cases}\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2} \\ 或\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}\end{cases}$	$\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n)$	n	$\begin{cases}\chi^2_{\alpha/2} \\ \chi^2_{1=\alpha/2}\end{cases}$
		$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha$			χ^2_α
		$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}$			$\chi^2_{1-\alpha}$
	μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}$ 或$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$n-1$	$\begin{cases}\chi^2_{\alpha/2} \\ \chi^2_{1-\alpha/2}\end{cases}$
		$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha$			χ^2_α
		$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}$			$\chi^2_{1-\alpha}$

2、两个正态总体的假设检验

① 已知方差 σ_1^2 和 σ_2^2，检验均值 μ（Z 检验）

原假设 H_o	备样假设 H_1	H_o 成立时的统计量	α 显著性水平下 H_o 的拒绝域

$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$\lvert U\rvert\geq Z_{\alpha/2}$
	$\mu_1<\mu_2$		$U\geq Z_\alpha$
	$\mu_1>\mu_2$	$\sim N(0,1)$	$U\leq -Z_\alpha$

② 未知σ_1^2及σ_2^2，但σ_1^2=σ_2^2，（其中$S_W^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$），检验均值（$t$检验）

原假设H_o	备样假设H_1	H_o成立时的统计量	α显著性水平下H_o的拒绝域
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$
	$\mu_1<\mu_2$		$T\geq t_\alpha(m+n)-2$
	$\mu_1>\mu_2$	$\sim t(m+n-2)$	$T\leq -t_\alpha(m+n-2)=t_{1-\alpha}$

③已知均值μ_1与μ_2，检验方差（F 检验）　（注意：$F_{1-\alpha}(n,m)=\dfrac{1}{F_\alpha(n,m)}$）

原假设H_o	备样假设H_1	H_o成立时的统计量	α显著性水平下H_o的拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(y_j-\mu_2)^2}\sim F(m,n)$	$F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)$或$F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$
	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\geq F_\alpha(m,n)$
	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\leq F_{1-\alpha}(m,n)$

④ 未知均值μ_1和μ_2，检验方差（F 检验）

原假设H_o	备样假设H_1	H_o成立时的统计量	α显著性水平下H_o的拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$ 或$F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$
	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$\sim F(m-1,n-1)$	$F\geq F_\alpha(m-1,n-1)$
	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$

其中：$S_1=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2$　　$S_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_2)$

评 注　在实际解答中，

1．计算$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$时可能会出现负值时，就改用$t_{\frac{\alpha}{2}}$，或应根据问题的意义去掉负号以符合题意。

2．计算$F,\ \chi^2$的拒绝域时，可能会出现区间左端点的值大于右端点的值，应调整顺序。

四、假设检验的符号设定与计算技巧

假设检验的假设包括**原假设**H_0和**备择假设**H_1。原假设H_0中一般都要含有“=”，可以是“=”，“$\geq$”，“$\leq$”，但不能是“$\neq$”，“>”或“<”。因为在进行假设检验计算时要将原假设代入统计量，若原假设不含有“=”，则无法将之代入统计量进行计算，这就是原假设H_0中一定要含有“=”的原因。

在假设检验中，$H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu>\mu_0$ 与 $H_0:\mu\leq\mu_0$；$H_1:\mu>\mu_0$是等价的；$H_0:\mu=\mu_0$；$H_1:\mu<\mu_0$ 与 $H_0:\mu\geq\mu_0$；$H_1:\mu<\mu_0$也是一个意思。

比如要检验参数μ，根据不同要求，可以做原假设$H_0:\mu=\mu_0$，也可以做原假设$H_0:\mu\leq\mu_0$，或者可以做$H_0:\mu\geq\mu_0$。但不能作原假设$H_0:\mu\neq\mu_0$，也不能做$H_0:\mu>\mu_0$或$H_0:\mu<\mu_0$。

若原假设为$H_0:\mu=\mu_0$，则备择假设可以是$H_1:\mu\neq\mu_0,\ H_1:\mu>\mu_0$ 或 $H_1:\mu<\mu_0$三种情形都可以；若原假设是$H_0:\mu\leq\mu_0$，则备择假设通常是$H_1:\mu>\mu_0$；若原假设是$H_0:\mu\geq\mu_0$，则备择假设通常是$H_1:\mu<\mu_0$。

3．统计量的接受域与拒绝域快速求法及一般步骤

3-1 为了形象地确定接受域与拒绝域，我们先来看“位置关系”。

设μ_0为某一固定值，若$\mu<\mu_0$成立，则称μ在μ_0之左；若$\mu>\mu_0$成立，则称μ在μ_0之右；若$\mu\neq\mu_0$成立，则称μ在μ_0之两侧。这可以通过数轴上点的位置关系画图看出。

根据原假设和备择假设的不同形式，可以规定H_0，H_1的位置关系：

若$H_0:\mu\leq\mu_0$（或$H_0:\mu=\mu_0$），$H_1:\mu>\mu_0$，称H_0在左，H_1在右。

若$H_0:\mu\geq\mu_0$（或$H_0:\mu=\mu_0$），$H_1:\mu<\mu_0$，称H_0在右，H_1在左。

若$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，称H_0在中间，H_1在两侧。

H_1相对H_0的位置关系就是H_1中μ相对于已知量μ_0的位置关系。

设显著性水平为α，对于不同类型的假设检验，可以用下面的方法确定“统计量”的**接受域与拒绝域**（一般只写拒绝域）：

在 8 个枢轴量中，根据题意找出统计X，设统计量服从的分布为A（A可以是正态分布、t分布、χ^2分布、F分布）。判断H_0与H_1的位置关系，**H_0对应“统计量”的接受域，H_1对应“统计量”的拒绝域**。通过H_0与H_1的位置关系形象地确定接受域与拒绝域的位置关系。接受域较大，对应概率为$1-\alpha$，拒绝域

较小，对应概率为α，这就可以形象地确定分位点，从而得到各种类型的“统计量”的接受域与拒绝域。

若A的概率密度关于y轴对称，即为偶函数时（正态分布，t分布），根据对称性，接受域可以写为$|X|<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$或$|X|<z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒绝域可以写为$|X|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$或$|X|>z_{\frac{\alpha}{2}}$。

明确了“统计量”的接受域与拒绝域的概念，就可以进一步得到假设检验的一般步骤。

3-2 假设检验的一般步骤如下

根据上面对“统计量”的接受域与拒绝域的讨论，可以进一步得到假设检验的一般步骤：

① 根据已知条件，确定原假设和备择假设，并找出统计量。

② 判断H_0，H_1的位置关系。根据H_0对应概率为$1-\alpha$的接受域，H_1对应概率为α的拒绝域的原则，并结合它们的位置关系确定分位点，再利用分位点写出“统计量”的接受域或拒绝域（一般只写拒绝域即可）。将H_0中的等式$\mu=\mu_0$和样本值代入统计量进行计算，若结果落在“统计量”的接受域，就保留其对应的原假设H_0；若结果落在“统计量”的拒绝域，就保留其对应的备择假设H_1。

【例 1】已知$\overline{X}=0.5110,$，$n=9$，$X\sim N\left(\mu,\ 0.015\right)$，取$\alpha=0.05$，检验$\mu=\mu_0=0.5$。

解：设$\begin{cases}H_0:\mu=\mu_0\\H_1:\mu\neq\mu_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}H_0:\mu=0.5\\H_1:\mu\neq0.5\end{cases}$

已知σ^2，关于μ的假设检验使用枢轴量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

H_0在$1-\alpha$中部，H_1在$1-\alpha$两侧，分位数$z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{1-\frac{0.05}{2}}=z_{0.975}=1.96$，拒绝域为$\left|Z\right|>1.96$。

$Z_0=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{0.511-0.5}{\dfrac{0.015}{\sqrt{9}}}=\dfrac{0.011\times3}{0.015}=2.2$在拒绝域内，故接受$H_1$，即$\mu\neq0.5$。

这种解答方法简单形象，望读者掌握。

■假设检验题型题法

【例 2】正常生产条件下，某产品的生产指标 $X \sim N\left(\mu_0, \sigma_0^2\right)$，其中 $\sigma_0 = 0.23$，现在改变了生产工艺，产品生产指标 $X' \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，从新生产工艺中任取 10 件，测得均方差为 0.33，试求
显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验 (1) σ^2 无明显变化；(1) σ^2 明显增大。附表如下

附表　$Z_{0.05} = 1.64,\quad Z_{0.025} = 1.96$

$\chi_\alpha^2(n)$	$n=9$	$n=10$	$\chi_\alpha^2(n)$	$n=9$	$n=10$	$t_\alpha(n)$	$n=9$	$n=10$
$\alpha=0.95$	3.325	3.940	$\alpha=0.05$	16.919	18.307	$\alpha=0.05$	1.8331	1.8125
$\alpha=0.975$	2.700	3.247	$\alpha=0.025$	19.023	20.483	$\alpha=0.025$	2.2622	2.2281

解：(1) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \left(= 0.23^2\right)$

μ 未知，选用枢轴量计算 $\chi^2(n) = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(10-1)\times 0.33^2}{0.23^2} = 18.527$

查附表知，$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(9) = 19.023,\qquad \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(9) = 2.700$

拒绝域为 $(0,\ \ 2.7)\cup(19.023,\ \ +\infty)$，而统计推断量 $\chi^2(n) = 18.527$ 不在拒绝域内，故接受 σ^2 无明显变化。

(2) $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \left(= 0.23^2\right)$；$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \left(= 0.23^2\right)$

μ 未知，选用枢轴量计算 $\chi^2(n) = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(10-1)\times 0.33^2}{0.23^2} = 18.527$

查附表知，$\chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$

拒绝域为 $(16.919,\ \ +\infty)$，而统计推断量 $\chi^2(n) = 18.527$ 在拒绝域内，故拒绝 H_0 接受 H_1，认为 σ^2 明显变化增大。

【例 3】将一颗骰（tou）子掷 120 次，结果如下

出现点数 i	1	2	3	4	5	6
出现频数 u_i	23	26	21	20	15	15

检验这颗骰子是否均匀对称？$(\alpha = 0.05)$

解：设掷出的点数为 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，如骰子均匀对称，则等价于下列数学描述

$P\{X = i\} = \dfrac{1}{6}\qquad i = 1,2,3,4,5,6$

提出假设 $H_0: P\{X = i\} = \dfrac{1}{6}\qquad i = 1,2,3,4,5,6$

统计推断量选用 $\chi^2(n-1)=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$$\Rightarrow \chi^2(n-1)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{6}\left(u_i-\overline{u}\right)$$

$$=\frac{1}{np(1-p)}\sum_{i=1}^{6}\left(u_i-\overline{u}\right)=\frac{1}{120\times\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)}\sum_{i=1}^{6}\left(u_i-\frac{120}{6}\right)\approx 4.8$$

查表 $\Rightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(5)=0.831$；$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(5)=12.833$

拒绝域 W $(-\infty,\ 0,\ 0.831)\cup(12.833,\ +\infty)$

统计推断量的值=$4.8\notin W$，故接受 H_0 假设，即认为骰子是均匀对称的。

【例 4】设总体 $X\sim N(\mu,\ 9)$，μ 已知，从 X 中抽取样本容量为 16 的样本，已知检验假设 $H_0:\mu=0;\ H_1:\mu>0$ 的拒绝域为 $W=\left\{\overline{X}>1.41\right\}$，求显著性水平 α 。

解：$\sigma^2=9$ 已知，故选用统计推断量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}}{\sqrt{9}/\sqrt{16}}=\dfrac{4}{3}\overline{X}\sim N(0,1)\Rightarrow \overline{X}\sim\dfrac{3}{4}N(0,1)$

$H_0:\mu=0;\ H_1:\mu>0\Leftrightarrow H_0:\mu\le 0;\ H_1:\mu>0$,故实际上是单边检验。

拒绝域 $u\ge u_{1-\alpha}\Rightarrow \overline{X}\ge\dfrac{3}{4}u_{1-\alpha}$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}\times u_{1-\alpha}=1.41\Rightarrow u_{1-\alpha}=1.88\Rightarrow\Phi(1.88)=0.97\Rightarrow 1-\alpha=0.97\Rightarrow\alpha=0.03$$

【例 5】已知某厂生产两批电子器件的样品电阻(Ω)，见下表

A 批(x)	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
B 批(y)	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设这两批电阻值总体分别服从 $N\left(\mu_1,\ \sigma_1^2\right)$，$N\left(\mu_2,\ \sigma_2^2\right)$，且两样本独立。

(1) 检验假设 $(\alpha=0.05)$ $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$；$H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

(2) 检验假设 $(\alpha=0.05)$ $H_0:\mu_1=\mu_2$；$H_1:\mu_1\ne\mu_2$。

解：(1) 检验假设 $(\alpha=0.05)$ $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$；$H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

未知 μ_1，μ_2，选用枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^1}\sim F(n-1,\ n-1)=F(5,\ 5)$

$n_1=n_2=6,\ \ \alpha=0.05\Rightarrow F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ m)=F_{0.975}(5,\ 5)=\dfrac{1}{7.15}\approx 0.14$

$S_1^2=\dfrac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=0.000007816,\quad S_2^2=\dfrac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=0.0000071$

推断统计量计算值 $\hat{F}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{0.000007866}{0.0000071}\approx 1.109$

拒绝域$W\quad F>F_{\frac{\alpha}{2}}(5,\ 5)=7.15, or F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(5,\ 5)=\dfrac{1}{7.15}=0.14$

而推断统计量计算值 $\hat{F}=1.109$不在拒绝域内，故接受H_0，认为两个方差相等。

(2)检验假设$(\alpha=0.05)$　$H_0:\mu_1=\mu_2;\quad H_1:\mu_1\neq\mu_2$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，选用枢轴量 $\hat{T}=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)=t(10)$

$n_1=n_2=6,\ \ \alpha=0.05,\ \ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(10)=t_{1-0.975}(10)=2.2281$

$S_1^2=\dfrac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=0.000007816,\quad S_2^2=\dfrac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=0.0000071$

推断统计量计算值 $\hat{T}=\dfrac{\dfrac{0.844}{6}-\dfrac{0.831}{6}}{\sqrt{\dfrac{(6-1)\times 0.000007866+(6-1)\times 0.0000071}{6+6-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}}}=1.3927$

拒绝域为 $|t|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(10)=t_{0.975}(10)=\left|-t_{0.025}(10)\right|=2.2281$

拒绝域$W\quad F>F_{\frac{\alpha}{2}}(5,\ 5)=7.15, or F<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(5,\ 5)=\dfrac{1}{7.15}=0.14$

而推断统计量计算值 $\hat{T}=1.3927$不在拒绝域内，故接受H_0，认为两批电阻均值无显著差异。

【例 6】从而个独立的正态整体中分别独立抽取样本值如下

甲	4.4	4.0	2.0	4.8
乙	5.0	1.0	3.2	0.4

能否认为这两个样本值来自同一总体。

解：假设两个正态总体为$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，其中$\mu_1$，$\sigma_1^2$，$\mu_2$，$\sigma_2^2$均未知，需要检验的是$\mu_1=\mu_2$，由于不知道方差是否相等，因此首先要检验方差相等的假设。

假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

μ_1，μ_2未知，选用枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$

统计推断量 $\hat{F}=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{1}{4-1}\sum_{i=}^{4}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\frac{1}{4-1}\sum_{i=}^{4}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=\frac{1.547}{4.453}=0.35$

查 F 分布表 $\begin{cases} F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,\ n_2-1\right)=F_{0.025}\left(3,\ 3\right)=15.44, \\ F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,\ n_2-1\right)=\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_2-1,\ n_1-1\right)}=\frac{1}{F_{0.025}\left(3,\ 3\right)}=\frac{1}{15.44}=0.065 \end{cases}$

拒绝域 $W=\left(0,\ \ 0.065\right)\bigcup\left(15.44,\ \ +\infty\right)$

统计推断量 $\hat{F}=0.35$ 不在拒绝域 $W=\left(0,\ \ 0.065\right)\bigcup\left(15.44,\ \ +\infty\right)$ 内，故接受 H_0，即认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

再假设 $H_0':\mu_1=\mu_2$； $H_1':\mu_1\neq\mu_2$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知，选用枢轴量 $t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$

统计推断量 $\hat{t}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{3.8-2.4}{\sqrt{\frac{\left(4-1\right)\times1.547+\left(4-1\right)\times4.453}{8+8-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=1.33$

查 F 分布表 $t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+\ n_2-2\right)=t_{0.025}\left(6\right)=2.449$

拒绝域 $W=\left(2.449,\ \ +\infty\right)$

统计推断量 $\hat{t}=1.33$ 不在拒绝域 $W=\left(2.449,\ \ +\infty\right)$ 内，故接受 H_0'，即认为甲乙来自同一总体。

五、两类错误的概率关系与计算方法

1. 第一类错误的概率 $\alpha=P\left\{拒绝H_0\,|\,H_0真\right\}=P\left\{拒绝H_0\,|\,H_1假\right\}$

2. 第二类错误的概率 $\beta=P\left\{接受H_0\,|\,H_1真\right\}=P\left\{接受H_0\,|\,H_0假\right\}$

设正态总体的方差 $\sigma^2=\sigma_0^2$， μ 只可能取 μ_0 或 $\mu_1\left(>\mu_0\right)$ 二者之一，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自此总体的简单随机样本，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0;\ H_1:\mu=\mu_1\left(>\mu_0\right)$，则两类错误的概率计算如下

因样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是总体均值 μ 的无偏估计量且 $\mu_0<\mu_1$，因此当 $\overline{X}-\mu_0$ 过分偏大时，则说明 H_0 不真，故拒绝域的形式为 $\overline{X}-\mu_0\geq c$，此时犯第一类错误的概率为

$$\alpha=P\left\{拒绝H_0\,|\,H_0为真\right\}=P\left\{\overline{X}-\mu_0\geq c\,|\,H_0为真\right\}=P\left\{\overline{X}-\mu_0\geq c\,|\,\mu=\mu_0\right\}$$

$$=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\,|\,\mu=\mu_0\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right\}=1-P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right\}=1-\Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right)=1-\Phi\left(u_\alpha\right)$$

$$\beta=P\left\{接受H_0\mid H_1为真\right\}=P\left\{\overline{X}-\mu_0<c\mid H_1为真\right\}=P\left\{\overline{X}<c+\mu_0\mid \mu=\mu_1\right\}$$

$$=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\ge\frac{(c+\mu_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma_0}\mid \mu=\mu_0\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\frac{(c+\mu_0-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma_0}\mid \mu=\mu_1\right\}=\left\{\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\frac{\left[c-(\mu_1-\mu_0)\right]\sqrt{n}}{\sigma_0}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}-\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)=1-\Phi\left(u_\alpha-\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

$\Phi(x)$单调不减，α减少，u_α增大，故$u_\alpha-\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$也增大，从而$\beta$也增大，防止亦然，可见，同时减少$\alpha,\ \beta$是不可能的，但我们可以适当调整$c$的值，使得在控制$\alpha$的情形下，使得$\beta$尽可能小。

■两类错误的概率计算题型题法

【例 7】设某种元件的电气性能指标为正态分布$N\left(\mu,3.6^2\right)$，从总体抽取容量为36的样本对未知参数μ做下列检验，$H_0:\mu=68;\quad H_1:\mu\ne 68且\mu=70$，如果接受域为$(67,69)$，求两类错误的概率。

解：方差已知，选用枢轴量$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，由题知，拒绝域为$(-\infty,\ 67)\cup(69,\ \infty)$。

出现第一类错误（以真当假）的概率α为

$$\alpha=P\left\{|U|>Z_{\frac{\alpha}{2}}\mid H_0真\right\}=P\left\{\overline{X}<67\mid H_0真\right\}+P\left\{\overline{X}>69\mid H_0真\right\}\quad(\overline{X}为\mu的估计量)$$

$$=P\left\{\frac{\overline{X}-68}{3.6/\sqrt{36}}<\frac{67-68}{3.6/\sqrt{36}}\mid H_0真\right\}+P\left\{\frac{\overline{X}-68}{3.6/\sqrt{36}}<\frac{69-68}{3.6/\sqrt{36}}\mid H_0真\right\}$$

$$=P\left\{\overline{X}<-1.67\right\}+P\left\{\overline{X}>1.67\right\}$$

$$=\Phi(-1.67)+\Phi(1.67)=2-2\Phi(1.67)=2-2\times0.9525=0.095$$

出现第二类错误（以假当真）的概率β为

$$\beta=P\left\{接受H_0\mid H_1真\right\}=P\left\{67<\overline{X}<69\mid \mu=70\right\}$$

$$=P\left\{\frac{67-70}{3.6/\sqrt{36}}<\frac{\overline{X}-70}{3.6/\sqrt{36}}<\frac{69-70}{3.6/\sqrt{36}}\right\}=P\left\{-5<\frac{\overline{X}-70}{3.6/\sqrt{36}}<-1.67\right\}$$

$$=\Phi(-1.67)-\Phi(-5)=0.0475-0=0.0475$$

【例 8】设$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2\end{pmatrix}$，作检验$H_0:\theta=0.1;\ \ H_1:\theta=0.9$，抽取三个样本

$X_1,\ X_2,\ X_3$，其拒绝域为$W=\left\{X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=1\right\}$，求两类错误的概率。

解：第一类错误的概率为

$$\alpha=P_{H_0}\left\{W\right\}=P_{\theta=0.1}\left\{X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=1\right\}=\theta^6\big|_{\theta=0.1}=10^{-6}。$$

第二类错误的概率为

$$\beta=P_{H_1}\left\{\overline{W}\right\}=1-P_{H_1}\left\{W\right\}=1-P_{\theta=0.9}\left\{X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=1\right\}=1-\theta^6\big|_{\theta=0.9}=1-0.9^{-6}\approx0.4686$$

【例 9】设$\left(X_1,X_2,\cdots X_n\right)$为来自总体$X\sim N(\mu,4)$的一个样本，在显著性水平为$\alpha$情况下

$H_0:\mu=0;\ H_1:\mu\neq 0$，现取拒绝域$W=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)\mid\sqrt{n}\dfrac{\overline{x}}{2}>z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$。当实际情况为 $\mu=1$ 时，求犯第二类错误的概率。

解：犯第二类错误的概率

$$\beta=P\left\{接受H_0\mid H_1真\right\}=P\left\{接受H_0\mid H_0假\right\}=P\left\{样本观察值不属于拒绝域\mid \mu=1\right\}$$

因为 H_0 不成立时，$\mu=1$，即总体 $X\sim N\left(1,\ 4\right)\Rightarrow\overline{X}\sim N\left(1,\ \dfrac{4}{n}\right)$

$$\beta=P\left\{\sqrt{n}\frac{\left|\overline{X}\right|}{2}\le z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=P\left\{\left|\overline{X}\right|\le\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}=P\left\{-\frac{\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{2/\sqrt{n}}\le\frac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\le\frac{\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{2/\sqrt{n}}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{2/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(-\frac{\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-1}{2/\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+z_{\frac{\alpha}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

评 注　当样本 n 与显著性水平给定时，即可查表得出 β，且由上可以看出 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta=0$，即要使两类错误都仅可能小，必须将容量取得足够大。

第八章 假设检验模拟题

一．填空题

1. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自正态总体$N(\mu,2^2)$的样本，样本均值为$\overline{X}$,则在显著性水平α =0.05下检验假设$H_0:\mu$=5; $H_1:\mu\neq 5$的拒绝域为_______。

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中参数 μ和σ^2 未知，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则假设$H_0:\mu=0$的$t$检验使用的统计量 T=____________。

3. 设总体 X～N(μ_0,σ^2)，μ_0为已知常数，（$X_1,X_2,\cdots,X_n$）为来自总体X的样本，则检验假设$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2;H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$的统计量是______；当$H_0$成立时，服从______分布。

二．选择题

1. 设总体 X～$N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体 X 的样本，记$\overline{\mathrm{X}}$为样本均值，S^2为样本方差，对假设检验$H_0:\sigma\geq 2;H_1:\sigma<2,$应取检验统计量$\chi^2$为

（A）$\frac{(n-1)S^2}{8}$　　（B）$\frac{(n-1)S^2}{6}$

（C）$\frac{(n-1)S^2}{4}$　　（D）$\frac{(n-1)S^2}{2}$　　[　]

2. 在假设检验中，H_0表示原假设，H_1表示备择假设,则犯第一类错误的情况为

（A）H_1真，接受H_1　　（B）H_1不真，接受H_1

（B）H_1真，拒绝H_1　　（D）H_1不真，拒绝H_1　　[　]

3. 设总体 X～$N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体 X 的样本，检验假设$H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu>\mu_0$,则当检验水平为$\alpha$时，犯第二类错误的概率为（其中$z_\alpha$表示标准正态分布的上$\alpha$分位数）

（A）$\phi(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}+z_\alpha$）　　（B）$\phi(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}+z_{\alpha/2}$）

（C）$1-\phi(\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}+z_\alpha)$　　（D）$\phi(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}+z_\alpha)$　　[　]

三．解答题

1. 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率（单位：cm/s）服从正态分布 $N(40,2^2)$。现在用新方法生产了一批推进器，从中随机地抽取 25 只，测得其燃烧率的样本均值 $\overline{x}=41.25$，问这批推进器的燃烧率是否有显著提高？（取显著性水平：$\alpha=0.05)$

2. 某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定为（%）

   3.24　　3.27　　3.24　　3.26　　3.24

   设测定值总体服从正态分布，但参数均未知。问在 $\alpha=0.01$ 下能否接受假设：这批矿砂镍的含量均值为 3.25.

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X～ $N(\mu,4)$ 的样本，考虑检验问题

   $H_0:\mu=6;H_1:\mu\neq 6,$

   拒绝域取为 $W=\{|\overline{X}-6|\geq c\}$，试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu=6.5$ 处犯第二类错误的概率。

第八章 假设检验模拟题答案

一．填空题

1. $\{|\overline{X}-5|\geq 0.98\}$

2. $\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$

3. $\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum(X_i-\mu)^2;\chi^2(n)$

二．选择题

1.（C）　　2.（B）　　3.（A）

三．解答题

1. 单个正态总体在方差已知的情况下，对均值进行右边假设检验，从而使用 Z 检验法。$H_0:\mu\leq 40$，选取检验统计量$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-40}{2/5}$～N（0, 1），z=3. 125> z_α =1.645，拒 绝H_0而接受H_1，即认为这批推进器的燃烧率有显著提高。

2. 单个正态总体在方差未知时，对均值进行双边假设检验，选取 T 检验法。

$H_0:\mu=3.25$,选取检验统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$～t（n-1），|t|=0. 343<$t_{0.005}(4)=4.6041$接受$H_0$,即在显著性水平$\alpha=0.05$下，可以认为这批矿砂镍的含量均值为 3.25.

3. $c=0.98$，犯第二类错误的概率$\beta=0.83$