§2 复积分的计算

P7 习题 1： 计算$\int_{C_1}\bar{z}dz$和$\int_{C_2}\bar{z}dz$，其中C_1是上半单位圆（$z=1\to z=-1$），C_2是下半单位圆（$z=1\to z=-1$）。

[解] 首先，

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}dz &= \int_C (x-iy)(dx+idy) = \int_C \left(xdx+ydy\right)+i\int_C\left(xdy-ydx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_C d(x^2+y^2)+i\int_C\left(xdy+ydx\right)-2i\int_C\left(ydx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_C d(x^2+y^2)+i\int_C d(xy)-2i\int_C\left(ydx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Big|_{P_0}^{P_1}+i\,xy\Big|_{P_0}^{P_1}-2i\int_C ydx\end{aligned}$$

其中P_0和P_1分别为路径C的始点和终点。

于是对于C_1和C_2，前面两项积分与路径无关，大小为：$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Big|_{(-1,0)}^{(1,0)}+i\,xy\Big|_{(-1,0)}^{(1,0)}=0$

只需计算最后一项。

于是令：$C_1=\left\{\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\{\theta,0,\pi\}\right\}$，$C_2=\left\{\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\{\theta,0,-\pi\}\right\}$

$$\int_{C_1}\bar{z}dz=-2i\int_{C_1}ydx=2i\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=i\pi$$

$$\int_{C_2}\bar{z}dz=-2i\int_{C_2}ydx=2i\int_0^{-\pi}\sin^2\theta d\theta=-i\pi$$

P7 习题 2： 设$f(z)$在原点的邻域内连续，试证：$\lim\limits_{r\to0}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta=2\pi f(0)$

[证] 利用例 6 的结果$\int\limits_{|z|=r}\frac{dz}{z}=2\pi i$，（其中$|z|=r$在原点的使$f(z)$连续的邻域内）

令$z=re^{i\theta}$，则：
$$\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta \qquad (1)$$

而：
$$\left|\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz-2\pi if(0)\right|=\left|\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz-f(0)\int\limits_{|z|=r}\frac{dz}{z}\right|=\left|\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)-f(0)}{z}dz\right|$$

由于$f(z)$在原点的邻域内连续，故：$\lim\limits_{z\to0}[f(z)-f(0)]=0$

因此，对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$当$|z|=r<\delta$时，$\left|f(z)-f(0)\right|<\varepsilon$

于是：

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz-2\pi if(0)\right|=\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)-f(0)}{z}dz\right|\le\int_{|z|=r}\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right||dz|\le\frac{\varepsilon}{r}\int_{|z|=r}|dz|=\frac{\varepsilon}{r}2\pi r=2\pi\varepsilon$$

于是：
$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz=2\pi if(0)$$

即(由(1)式)：
$$\lim_{r\to 0}i\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta=2\pi if(0)$$

即：
$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta=2\pi f(0)$$

§4 Cauchy 积分公式及其推论

P18 习题：计算下列积分(1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{z^4-1}dz$ **(2)** $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{e^z}{z^2(z-2)^2}dz$

[解] (1) z^4-1 的全部零点为：$1,-1,i,-i$

故：$\dfrac{1}{z^4-1}$ 的奇点为：$1,-1,i,-i$

由复连通区域的 Cauchy 定理和 Cauchy 积分定理得：

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{1}{z^4-1}dz&=\int_{|z-1|=1/2}\frac{1/(z+1)(z-i)(z+i)}{z-1}dz+\int_{|z+1|=1/2}\frac{1/(z-1)(z-i)(z+i)}{z+1}dz\\&\quad+\int_{|z-i|=1/2}\frac{1/(z+1)(z-1)(z+i)}{z-i}dz+\int_{|z+i|=1/2}\frac{1/(z+1)(z-1)(z-i)}{z+i}dz\\&=\frac{1}{(1+1)(1-i)(1+i)}+\frac{1}{(-1-1)(-1-i)(-1+i)}\\&\quad+\frac{1}{(i+1)(i-1)(i+i)}+\frac{1}{(-i+1)(-i-1)(-i-i)}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}-\frac{i}{4}\\&=0\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{e^z}{z^2(z-2)^2}$ 的有限奇点为：$0,2$

由复连通区域的 Cauchy 定理和 Cauchy 高阶导数公式得：

$$\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z^2(z-2)^2}dz=\oint_{|z|=1/2}\frac{e^z/(z-2)^2}{z^2}dz+\oint_{|z-2|=1/2}\frac{e^z/z^2}{(z-2)^2}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z-2)^2}\bigg|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{z^2}\bigg|_{z=2}$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^z(z-2)^2-e^z2(z-2)}{(z-2)^4}\bigg|_{z=0}+\frac{e^z z^2-e^z 2z}{z^4}\bigg|_{z=2}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{2}+0\right]=\pi i$$

补充习题

P19 计算下列积分：

1. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz$，其中 $n=1,2,\cdots$

[解] 由 Cauchy 高阶求导公式：

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\cosh z\bigg|_{z=0}$$

由于：
$$\cosh'(z)=\sinh(z)=\frac{1}{i}\sin(iz)=\frac{1}{i}\cos(iz-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{i}\cosh(z+i\frac{\pi}{2})$$

$$\cosh''(z)=\frac{1}{i}\cosh'(z+i\frac{\pi}{2})=\frac{1}{i^2}\cosh(z+i2\frac{\pi}{2})$$

依此类推：
$$\frac{d^n}{dz^n}\cosh z=\frac{1}{i^n}\cosh\left(z+in\frac{\pi}{2}\right)$$

于是：

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cosh z}{z^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}\frac{1}{i^n}\cosh\left(in\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi i}{n!}\frac{1}{(e^{i\pi/2})^n}\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}+e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$=\frac{\pi i}{n!}\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}+e^{-in\frac{\pi}{2}}}{e^{in\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi i}{n!}\left(1+e^{-in\pi}\right)=\frac{\pi i}{n!}[1+(-1)^n]$$

2. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin^2 z}{z^4}dz$

[解] 由 Cauchy 高阶求导公式：
$$\oint_{|z|=1}\frac{\sin^2 z}{z^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\sin^2 z\bigg|_{z=0}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\sin^2 z=\frac{d^3}{dz^3}\frac{1-\cos 2z}{2}=-4\sin 2z$$

于是：
$$\int_{|z|=1}\frac{\sin^2 z}{z^4}dz=0$$

3. $\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$，其中 $n=1,2,\cdots$

[解] 由牛顿二项式公式得：

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}=\int_{|z|=1}\sum_{r=0}^{2n}C_{2n}^r z^r\frac{1}{z^{2n-r}}\frac{dz}{z}=\sum_{r=0}^{2n}C_{2n}^r\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^{2n-2r+1}}$$

利用(7)式的结果：
$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^{2n-2r+1}}=\begin{cases}2\pi i, r=n\\ 0,\quad r\neq n\end{cases}$$

于是：
$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}=\sum_{r=0}^{2n}C_{2n}^r\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^{2n-2r+1}}=2\pi iC_{2n}^n$$

4. $\int_{|z|=2}\frac{\sin(e^z)}{z}dz$

[解] 由 Cauchy 积分公式：

$$\int_{|z|=2}\frac{\sin(e^z)}{z}dz=2\pi i\sin(e^z)\Big|_{z=0}=2\pi i\sin 1$$

5. $\int_{|z|=2}\frac{e^z}{\cosh z}dz$

[解] $\cosh z$ 的零点是：$z=i\pi(2n+1)/2$，在 $|z|=2$ 中的奇点为：$\pm i\pi/2$

故由复连通区域的 Cauchy 定理得：

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\cosh z} dz = \oint_{|z-i\pi/2|=\pi/4} \frac{e^z (z-i\pi/2)/\cosh z}{z-i\pi/2} dz + \oint_{|z+i\pi/2|=\pi/4} \frac{e^z (z+i\pi/2)/\cosh z}{z+i\pi/2} dz$$

$$= 2\pi i \frac{e^z (z-i\pi/2)}{\cosh z}\bigg|_{z=i\pi/2} + 2\pi i \frac{e^z (z+i\pi/2)}{\cosh z}\bigg|_{z=-i\pi/2}$$

$$= 2\pi \left(-\lim_{z\to i\pi/2} \frac{z-i\pi/2}{\cosh z} + \lim_{z\to -i\pi/2} \frac{z+i\pi/2}{\cosh z} \right)$$

$$= 2\pi \left(-\lim_{z\to i\pi/2} \frac{1}{\sinh z} + \lim_{z\to -i\pi/2} \frac{1}{\sinh z} \right)$$

$$= -4\pi \frac{1}{\sinh(i\pi/2)} = -4\pi \frac{1}{i\sin(\pi/2)}$$

$$= 4\pi i$$

6. (1) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}$ **, (2)** $\oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}$ **, (3)** $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}$ **, (4)** $\oint_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right|$**.**

[解] (1) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot 1\big|_{z=0} = 2\pi i$

(2) 令： $z = e^{i\theta}$，则： $\oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{|e^{i\theta} i d\theta|}{e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = ie^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0$

(3) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = \oint_{|z|=1} dz = 0$

(4) $\oint_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right| = \oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z|} = \oint_{|z|=1} |dz| = 2\pi$

Lamberto Qin
2010-10-07
QQ:397968240
Tel:15975454463