§ 4.5 多缝夫琅禾费衍射 光栅

本节课内容

- 光栅
- 多缝夫琅和费衍射
  - 缝间衍射因子
- 光栅光谱

光栅

光栅是现代科技中常用的重要光学元件。

光通过光栅衍射可以产生明亮尖锐的亮纹，复色光入射可产生光谱，用以进行光谱分析。

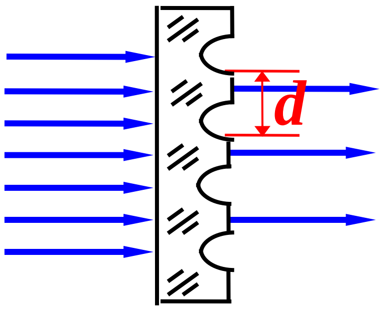
1）光栅的概念

光栅是由大量的等宽等间距的平行狭缝（或反射面）构成的光学元件。从广义上理解，任何具有空间周期性的衍射屏都可叫作光栅。

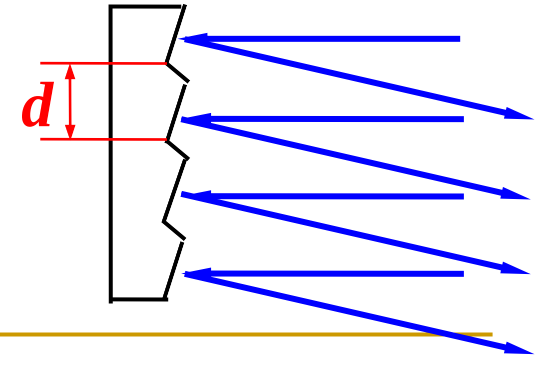
2）光栅的种类：

光栅最早由Rittenhouse发明，此后夫琅禾费又在1819年独立制成。

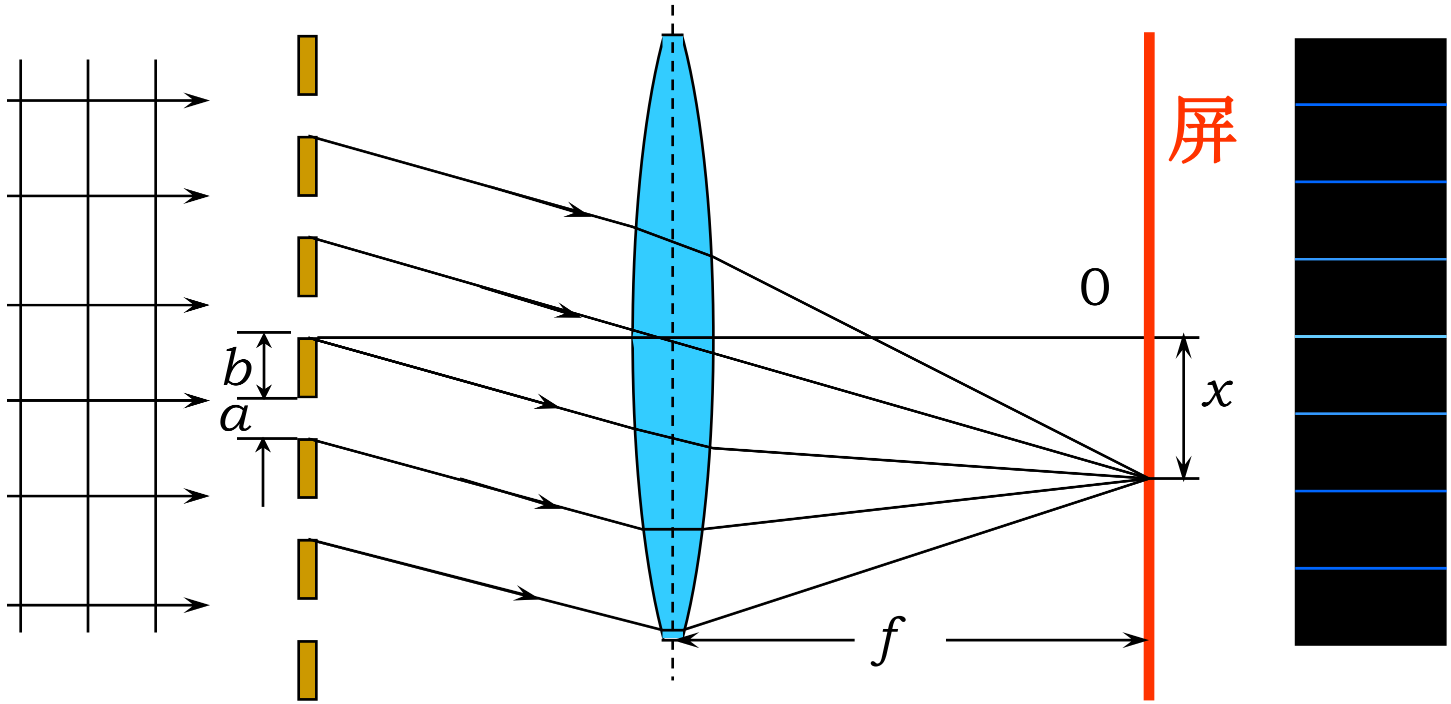
透射光栅



反射光栅



闪耀光栅

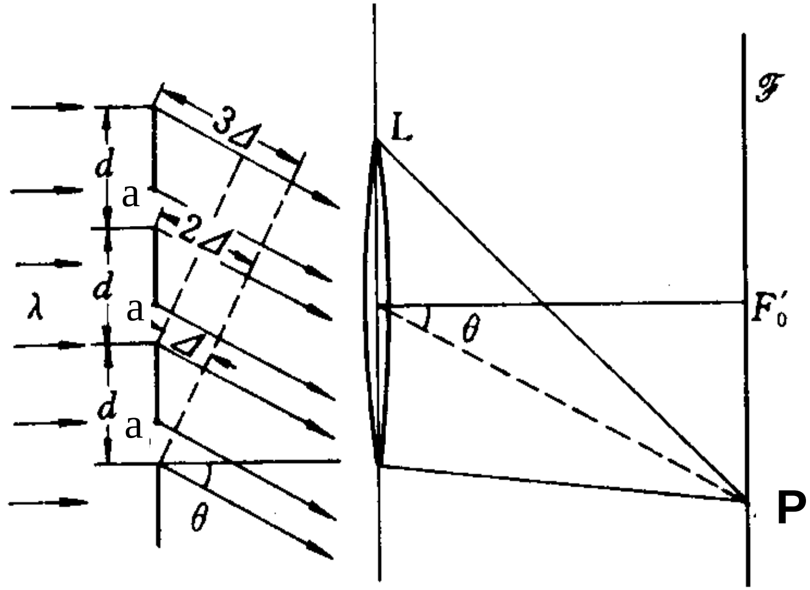


a —— 缝宽　　　b —— 不透光部分宽度

$$d=(a+b)\approx 10^{-4}\sim 10^{-6}\,\mathrm{m}$$ 光栅常数

普通光栅刻线为数十条/mm – 数千条**/mm**，
用电子束刻制可达数万条/mm($d\sim10^{-1}\mu m$)。

首先，考察N条等间距为 d 的缝



相邻两条缝的光程差 $\Delta = d \sin\theta$

相邻两条缝的相位差 $\delta = k\Delta = \left(2\pi/\lambda\right) d\sin\theta = 2\beta$

相邻两条缝在P点的复振幅

$$E(P) = E_1\left(P\right) + E_2\left(P\right) = A_1 e^{-i\varphi_1} + A_1 e^{-i\left(\varphi_1+\delta\right)} = E_1(P)(1+e^{-i\delta})$$

注：δ前面的负号表示相位超前，正/负不影响光强分布，见下页结论

假设 $E_1(P)$ 是第一个缝的单缝衍射复振幅，而另一个缝的衍射振幅为 $E_1(P)e^{-i\delta}$ ，则N个缝在P点的总复振幅为

$$E_N(P)=E_1(P)+E_2(P)+\cdots E_N(P)$$

$$=E_1(P)(1+e^{-i\delta}+e^{-2i\delta}+\cdots+e^{-(N-1)i\delta})$$

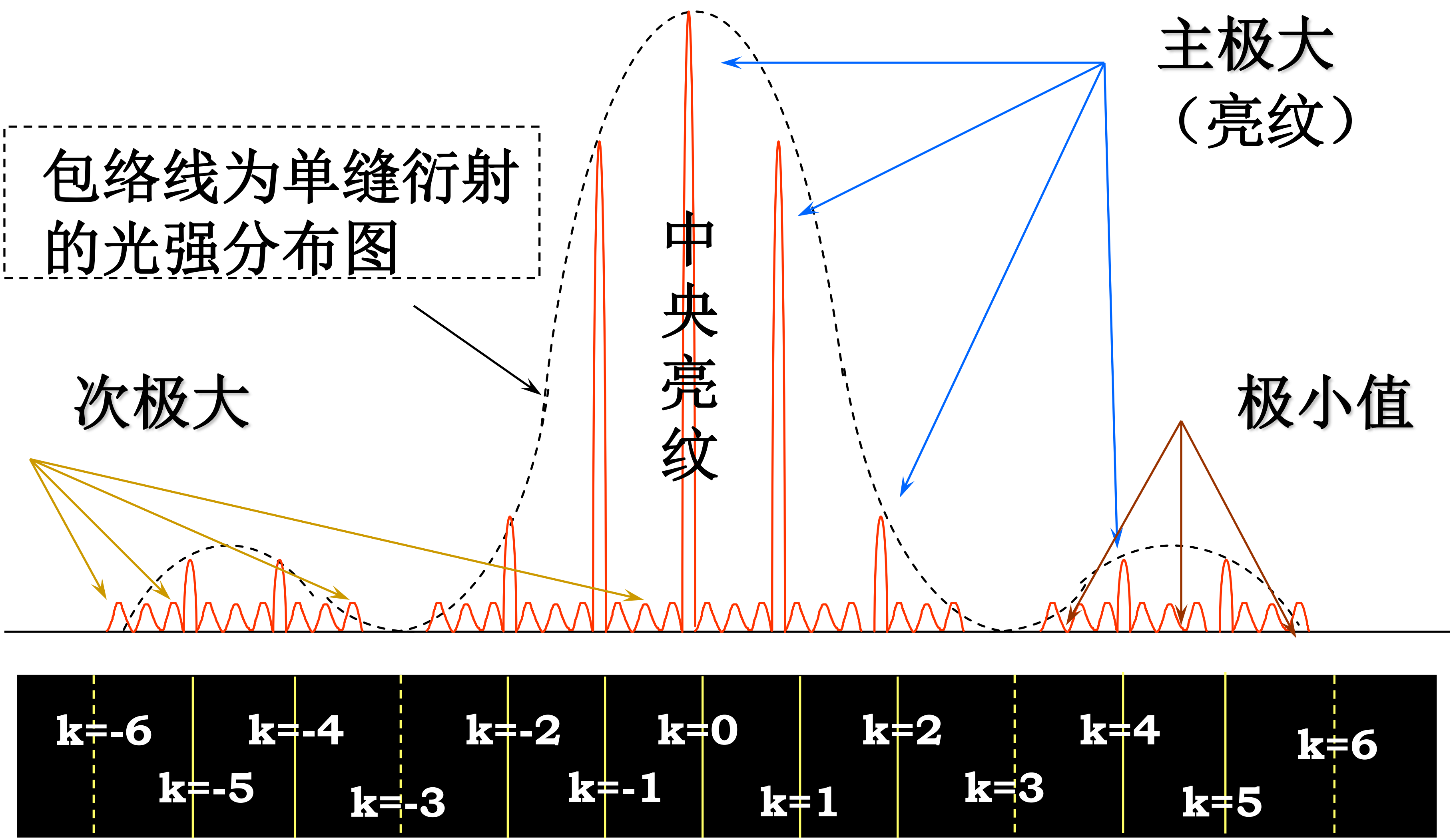
$$=E_1(P)\frac{1-e^{-iN\delta}}{1-e^{i\delta}}$$

$$I_N(P)=E_N(P)E_N^*(P)=E_1(P)E_1^*(P)\frac{(1-e^{iN\delta})(1-e^{-iN\delta})}{(1-e^{i\delta})(1-e^{-i\delta})}$$

$$=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}$$

$\boxed{\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\text{单缝衍射因子}}$ $\boxed{\dfrac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}\text{缝间衍射因子}}$

缝数 N = 5 时光栅衍射的光强分布图



$$I_N(P)=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta},\alpha=\pi a\sin\theta/\lambda,\beta=\pi\left(a+b\right)\sin\theta/\lambda$$

讨论：1）主极大（亮纹）的位置 （谱线位置）

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda(k=0,1,2\cdots)$$

物理意义：相邻两缝光线的光程差等于波长的整数倍时，即 $\delta=2\beta=2k\pi$，干涉加强，形成亮纹。主极大的位置与缝数N无关。上式称为光栅方程（式4.63）。

2）主极大的光强

$$g=\lim_{\beta\to k\pi}\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}=\lim_{\beta\to k\pi}\frac{N\cos(N\beta)}{\cos\beta}=N$$

$$I_N(P)=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}N^2$$

物理结论：主极大的光强是单缝衍射在该处光强的 N^2 倍

$$I_N(P)=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta},\alpha=\pi a\sin\theta/\lambda,\beta=\pi(a+b)\sin\theta/\lambda$$

3） 主极大的宽度（式4.66）（谱线宽度）

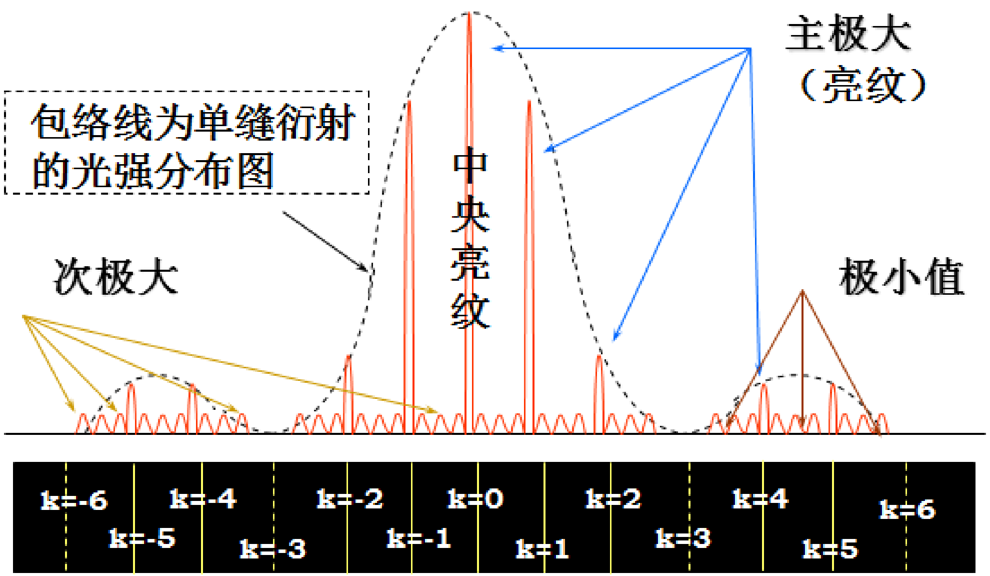
-1级和+1级极小值之间的角距离 $2\Delta\theta$

自学：根据极小值位置公式4. 64，两边微分：

$$N(a+b)(\Delta\theta)\cos\theta=\left[(kN+m)-(kN+m-1)\right]\lambda=\lambda$$

$$2\Delta\theta=2\lambda/\left[N(a+b)\cos\theta\right]$$

物理结论：主极大的宽度随*N*的增大而减小。



4） 缺级

由于单缝衍射的影响，在应该出现干涉极大（亮纹）的地方，不再出现亮纹，称为缺级。

出现缺级必须满足下面两个条件：

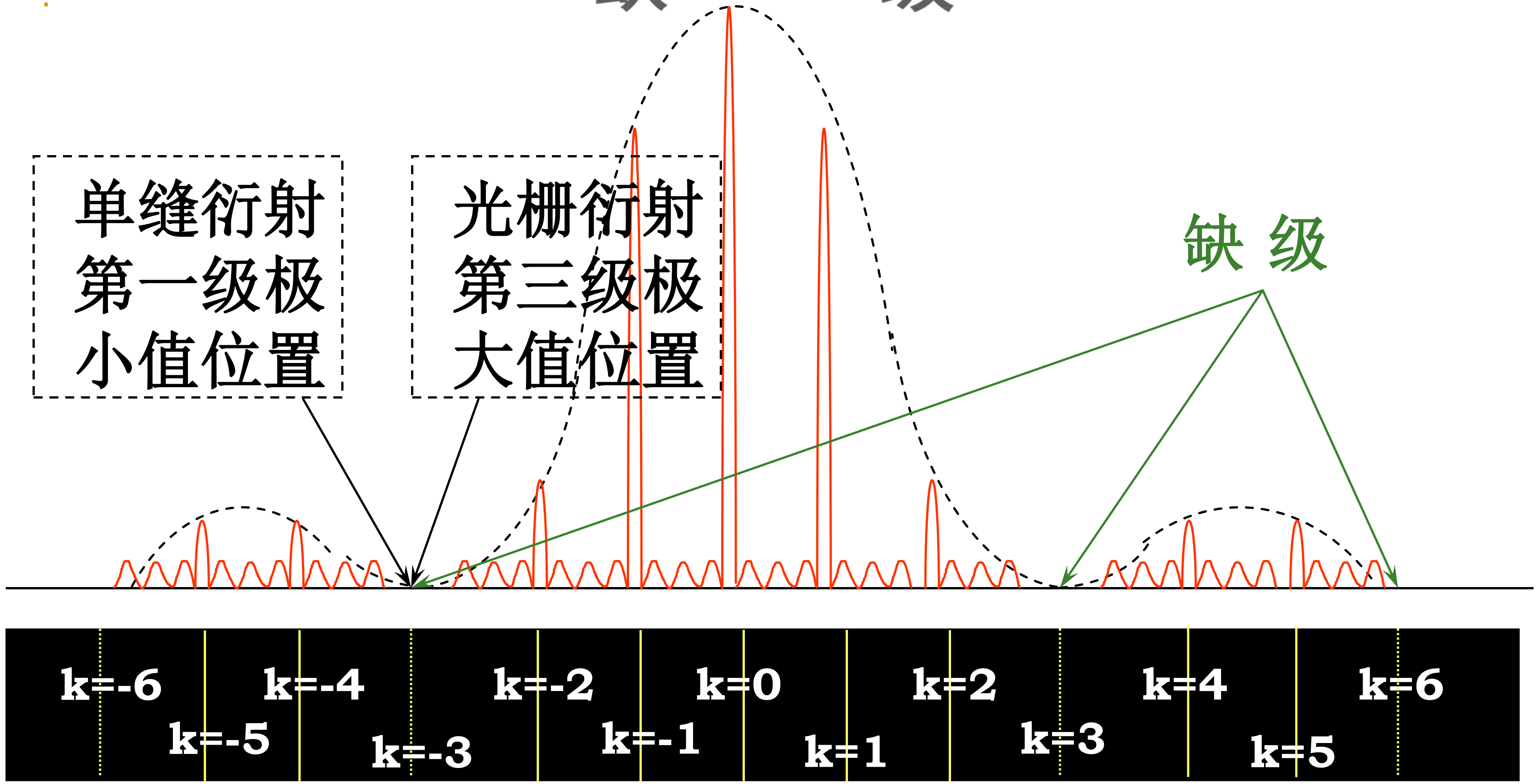
$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \longrightarrow$$ 缝间光束干涉极大条件

$$a\sin\theta = \pm n\lambda \longrightarrow$$ 单缝衍射极小条件

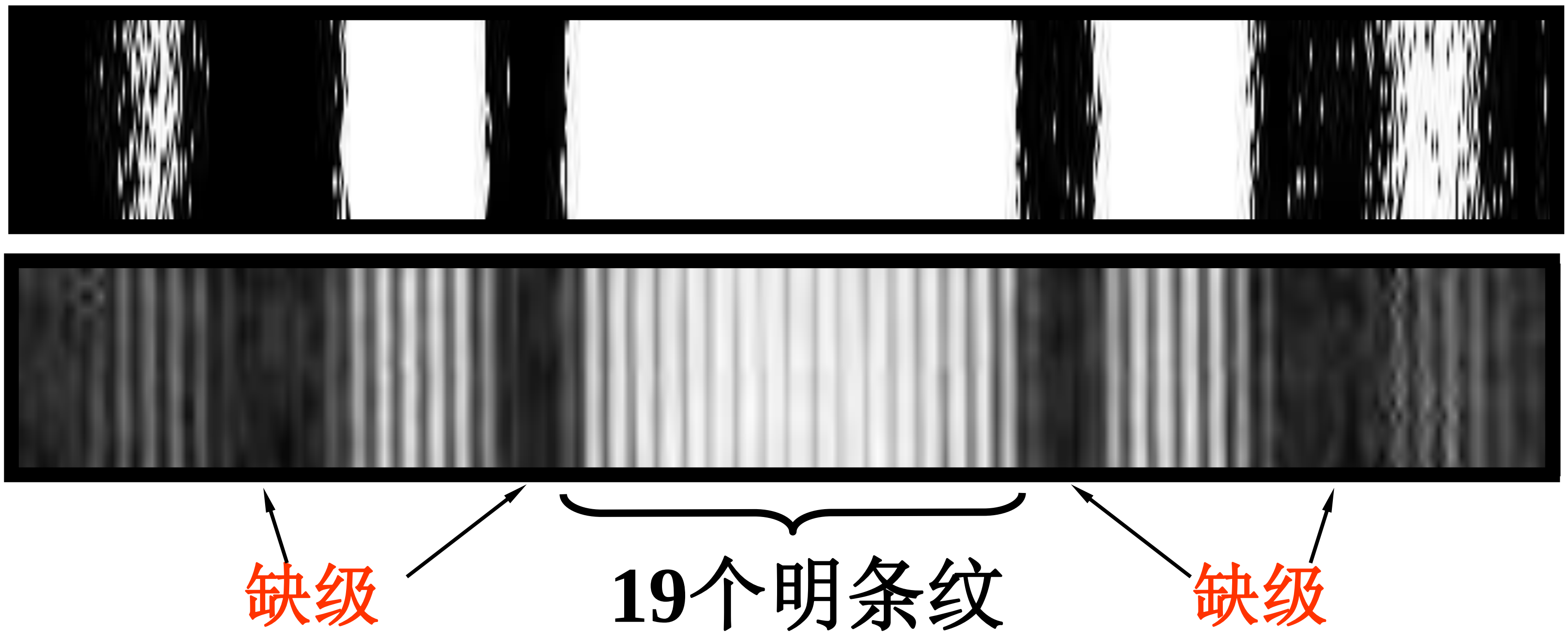
缺级公式：

$$k = n\frac{(a+b)}{a} \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

缺 级



若 $\dfrac{(a+b)}{a}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{k}{n}$， 缺级：$k = 3,6,9,\ldots$



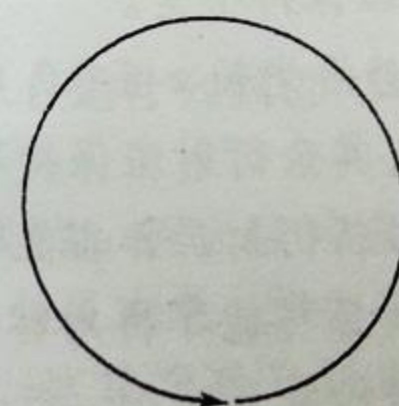
单缝衍射和多缝衍射干涉的对比（$d=10a$）

课堂练习

4 －28．为什么 $d\sin\theta = k\lambda$ 是缝间干涉因子的主极大条件，而 $a\sin\theta = k\lambda$ 却是单缝衍射的暗纹条件？

答：缝间干涉因子的主极大条件是一系列离散次波源之间的干涉，相邻次波源发出的光线之间的光程差为 λ 的整数 k 倍，矢量图如右图 a 所示，所有矢量都是同相位的，它们沿一直线排列，叠加成极大值。单缝衍射的暗纹条件是一系列光程从 0 连续变到 $k\lambda$ 的光线叠加，矢量图如右图 b 所示，所有矢量排成 k 周的封闭圆圈，叠加成 0.

a 多缝间干涉主极大条件



b 单缝衍射暗纹条件

光栅光谱 P205

如果有几种单色光同时投射在光栅上，在屏上将出现光栅光谱。

上节的(4.63)式

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{d} \quad 或 \quad d\sin\theta = k\lambda$$

称为光栅公式。它表明，不同波长的同级主极大出现在不同方位。长波的衍射角大，短波的衍射角小。如果入射光里包含几种不同波长λ、λ′、…的光，则除0级外各级主极大位置都不同(图4－45a)，因此用缝光源照明时，我们看到的衍射图样中有几套不同颜色的亮线，它们各自对应一个波长(图4－45b)。这些主极大亮线就是谱线，各种波长的同级谱线集合起来构成光源的一套光谱。如果光源发出的是具有连续谱的白光，则光栅光谱中除0级仍近似为一条白色亮线外，其它级各色主极大亮线都排列成连续的光谱带。

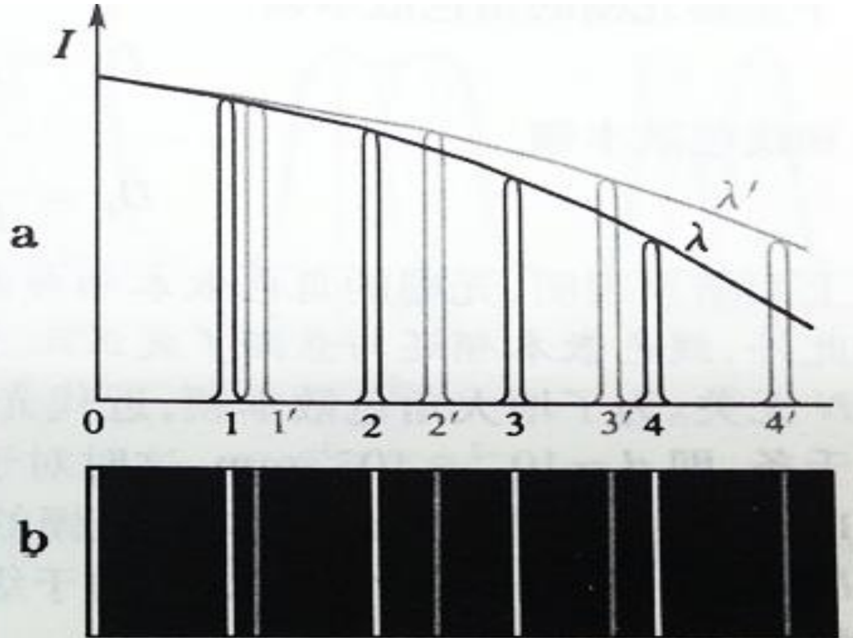


图4－45 光栅光谱

- Homework wk12 (submit on May 20)
- **P228 习题4-28**