一．填空

1. 函数 $f(x)=\lg\sin x-\arccos\frac{x}{5}$ 的定义域是___$[-5,-\pi)\cup(0,\pi)$______；

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=$___x_____；；

3. 函数 $f(x)=\frac{x}{\tan x}$ 的间断点是____$x=k\pi/2(k\in Z)$ ______；

4．设 $\boldsymbol{y=f(\arcsin\frac{1}{x})}$，其中 $\boldsymbol{f(x)}$ 可导，则 $\boldsymbol{dy=-\dfrac{f'(\arcsin\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx}$；

5．函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的 **2** 阶导数 $y''=\dfrac{4}{(1+x)^3}$.

二．选择题

1. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时，有（ B ）

$(A)$ $f(x)$与$x$是等价无穷小；；　　$(B)$ $f(x)$与$x$同阶但非等价无穷小；

$(C)$ $f(x)$是比$x$高阶的无穷小；　　$(D)$ $f(x)$是比$x$低阶的无穷小.

2. 下列各式错误的是（ A ）

$(A)$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x=e$；　　$(B)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$；

$(C)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$；　　$(D)$ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x=1$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le1;\\ x^2, & x>1.\end{cases}$，则 $f(x)$在$x=1$处的（ B ）.

(A) 左右导数都存在;　　(B) 左导数存在，右导数不存在;

(C) 左导数不存在，右导数存在;　　(D) 左右导数都不存在.

三．解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(-2)^n}{5^n}+1}{3\cdot\dfrac{3^n}{5^n}+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n+1}{3\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5}=\dfrac{0+1}{3\cdot 0+5}=\dfrac{1}{5}$

2.设 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：$\because \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}},\ k=1,2,\cdots,n.$

$\therefore\quad \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}=1$，根据夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+3x)}{1-\cos x}$.

解：极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+3x)}{1-\cos x}$ 是“$\dfrac{0}{0}$”型。当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\ln(1+3x)\sim 3x$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+3x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 3x}{\dfrac{x^2}{2}}=6$.

4.求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2-x}$

解：$\because\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2-x}$ 是 $1^\infty$ 型，用第二个重要极限 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$

$\because\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x^2}=e,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}=e,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2}=1$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2\cdot\frac{x^2-x}{-x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2\cdot\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2}\right]^{\frac{x^2-x}{-x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x^2-x}{x^2}}}$$

$$=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

5. 求参数方程$\begin{cases} x=\ln(1+t), \\ y=t^2+\arctan t \end{cases}$的导数$\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dt}=\left(t^2+\arctan t\right)'=2t+\frac{1}{1+t^2}=\frac{2t^3+2t+1}{1+t^2}$，

$$\frac{dx}{dt}=\left(\ln(1+t)\right)'=\frac{1}{1+t},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t^3+2t+1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t}}=\frac{(1+t)\left(2t^3+2t+1\right)}{1+t^2}$$

6. 求方程$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：方程$\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$对 $x$ 求导， $y=y(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y}{x^2}=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y}{x^2}=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$$

7.设 $F(x)=\int_{x}^{x^2} x\cos t^2\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_{0}^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t+x\int_{x}^{0}\cos t^2\mathrm{d}t\right)$

$=\int_{0}^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{0}^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t\right)+\int_{x}^{0}\cos t^2\mathrm{d}t+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x}^{0}\cos t^2\mathrm{d}t\right)$

$=\int_{x}^{x^2}\cos t^2dt+2x^2\cos x^4-x\cos x^2$

$\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{d}{dx}[\int_{x}^{x^2}\cos t^2dt+2x^2\cos x^4-x\cos x^2]$

$=\frac{d}{dx}[\int_{x}^{x^2}\cos t^2dt]+\frac{d}{dx}[2x^2\cos x^4-x\cos x^2]$

$=6x\cos x^4-2\cos x^2-8x^5\sin x^4+2x^2\sin x^2$

8.求 $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{x}^{\sqrt{x}}(\mathbf{3}-\mathbf{2}\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})\sqrt[3]{\mathbf{2}+\boldsymbol{x}}}$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：取对数求导法，这里设 2x-3>0 , x>3/2

$\ln y=\ln x+2\ln|3-2x|-\ln(1+x)-\frac{1}{3}\ln(2+x)$

$\frac{1}{y}y'=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{4}{2x-3}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3(x+2)}$

$y'=[\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{2x-3}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3(x+2)}]\frac{x^{\sqrt{x}}(3-2x)^2}{(1+x)\sqrt[3]{2+x}}$

**9.** 计算不定积分 $\int\frac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\cos^2 x+\cos x-6}$

解：设 $u=\cos x$, 则

$\int\frac{-d(\cos x)}{(\cos-2)(\cos x+3)}=\frac{1}{5}\int(\frac{1}{\cos x+3}-\frac{1}{\cos x-2})d\cos x\quad=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\cos x+3}{\cos x-2}\right|+C$

**10.**计算不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解：设$u=\sqrt{x}$，则$x=u^2$，$\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\ \ \mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\int \arcsin u\,\mathrm{d}\arcsin u=(\arcsin u)^2+C=(\arcsin\sqrt{x})^2+C$$

**11.**计算定积分$\int_{-1}^{1}\left(x^3\arctan x+e^{x^2}\sin x\right)\mathrm{d}x$

解：因为$x^3\arctan x$是偶函数，$e^{x^2}\sin x$是奇函数，且该两函数都在[-1,1]上连续，则

$$\int_{-1}^{1}x^3\arctan x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^3\arctan x\mathrm{d}x,\quad \int_{-1}^{1}e^{x^2}\sin\mathrm{d}x=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3\arctan x+e^{x^2}\sin x\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^3\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x\mathrm{d}(x^4)$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^4\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1 x^4\mathrm{d}(\arctan x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arctan 1-\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x^4)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}-\arctan x\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}-\arctan 1\right)=\frac{1}{3}$$

12. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续性，$f'(0)$和$f''(0)$的存在性。

解：**1**）当$x\to 0$时，$x^3$是无穷小，$\sin\frac{1}{x^2}$是有界函数，则

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x^2}=0=f(0)$$

$\therefore f(x)$在$x=0$处连续。

**2**）当$x\to 0$时，$x^2$是无穷小，$\sin\frac{1}{x^2}$是有界函数。当$x\neq 0$时，则$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x^2}$，$f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x^2}=0$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数存在，$f'(0)=0$。

3）当 $x\to 0$ 时，$x$ 是无穷小，$\sin\frac{1}{x^2}$ 是有界函数。则 $\lim_{x\to 0}3x\sin\frac{1}{x^2}=0,$

当 $x\to 0$ 时，$-\frac{2}{x}$ 是无穷大，$\cos\frac{1}{x^2}$ 是有界函数。则 $-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ 在(0,1]无界，

故 $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)$ 不存在。

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x^2}$，$f'(0)=0$，则

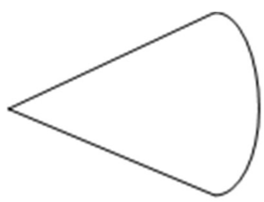
$f'(x)=(x^3\sin\frac{1}{x^2})'=3x^2\sin\frac{1}{x^2}+x^3(-2x^{-3})\cos\frac{1}{x^2}=3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$ 则

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)$$ 不存在。

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数 $f''(0)$ 不存在。

13. 设扇形的圆心角 $\alpha=60^\circ$，半径 $R=100cm$。如果圆心角不变，半径 R 减少 $1cm$，问扇形面积大约改变了多少？（扇形面积=$\frac{1}{2}\alpha R^2$）

解：扇形的面积与半径的函数关系式为 $S(R)=\frac{1}{2}\alpha R^2$



$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$S(R)=\frac{\pi}{6}R^2, S'=\frac{\pi}{3}R, \Delta R=1cm<<100cm$

$\Delta S\approx S'\Delta R=\frac{100\pi}{3}.$

扇形的面积大约减少了 $\frac{100\pi}{3}$ 平方厘米。

14. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $0\le f(x)\le \frac{1}{3}$. 证明：存在$\xi\in[0,1)$，使得$f(\xi)e^{\xi}=\xi$.

证明：令$F(x)=f(x)e^{x}-x$。由$f(x)$在$[0,1]$上连续，得

$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)e^{x}-x\right]=f(1)e-1=F(1),$

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)e^{x}-x\right]=f(0)e^{0}-0=F(0),$从而 $F(x)$在$[0,1]$上连续。

1）若$f(0)$是$f(x)$在$[0,1]$上的最小值，由$0\le f(x)\le\frac{1}{3}$。得

$F(0)=0$，则$\xi=0$是$f(x)e^{x}=x$的根。既， $f(\xi)e^{\xi}=\xi$。

2）若$f(0)$不是$f(x)$在$[0,1]$上的最小值 0，由$F(x)$在$[0,1]$上连续，$0\le f(x)\le\frac{1}{3}$。得

$F(0)=f(0)e^{0}-0=f(0)>0$，$F(1)=f(1)e-1=e\left[f(1)-\frac{1}{e}\right]\le e\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{e}\right)<0$.根据零点

定理，得存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=0$.得$f(\xi)e^{\xi}=\xi$。

3）综合 1）和 2）知，存在$\xi\in[0,1)$，使得$f(\xi)e^{\xi}=\xi$。

15. 求曲线$y=\sqrt{x}$在区间$(1,3)$内的一点，使得该点的切线与直线$x=1,x=3$以及$y=\sqrt{x}$所围的平面图形面积最小，并求此取最小面积的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解：设所求的切点为：$(x_0,\sqrt{x_0})$. 求得切线为

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{\sqrt{x_0}}{2}$$

于是所围图形的面积为：

$$S=\int_1^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0}-\int_1^3\sqrt{x}\,dx.$$

对$x_0$求导数得

$$S'=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}-\frac{1}{(\sqrt{x_0})^3}=0\Rightarrow x_0=2.$$

所以切线为：

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

于是旋转体的体积为：

$$V_x=\pi\int_1^3(\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_1^3(\frac{x^2}{8}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2})dx=\frac{\pi}{12}.$$

16. 求函数 $y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积。

解：

$$\boldsymbol{F}=\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,d(\cos x)$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du=(\text{分部积分法})$$

$$=2[u\sqrt{1+u^2}-\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du]$$

$$=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$$