电动力学 第13课

静电体系的能量

（一）静电体系激发的静电能量（自能量）

对于各向同性线性理想介质，电磁能密度为：

$$\boxed{w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

对于静电系统，介质内的静电能量密度为：

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \underline{\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2} + \underline{\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P}}$$

电场能量密度

极化能量密度

对于真空： $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2$

由于电荷激发的电场一般弥散在全空间，因此任一电荷激发的总能量————电荷系统的自能量

$$W_{total} = \iiint_{\infty} \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV$$ 对全空间积分

由于：$\vec{E}=-\nabla\varphi \quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$ 数学上 $\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{D}+\varphi\nabla\cdot\vec{D}$

于是：$\vec{E}\cdot\vec{D}=-\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{D}=-\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)+\varphi\nabla\cdot\vec{D}=-\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)+\varphi\rho_f$

$$W_{total}=\iiint_{\infty}\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV=\boxed{-\frac{1}{2}\iiint_{\infty}\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)dV}+\frac{1}{2}\iiint_{\infty}\varphi\rho_f dV$$

$$\boxed{=-\frac{1}{2}\oiint_{\infty}\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}}+\frac{1}{2}\iiint_{V}\varphi\rho_f dV$$

高斯定理

在电荷分布区域V之外，$\rho_f=0$

$$\varphi\propto\frac{1}{r} \qquad D\propto\frac{1}{r^2} \qquad S\propto r^2 \quad \Longrightarrow \quad \oiint_{r\to\infty}\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}\propto\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot r^2\to 0$$

等价于

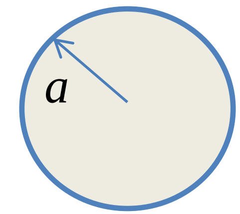
$$W_{total}=\iiint_{\infty}\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV = \frac{1}{2}\iiint_{V}\varphi\rho_f dV$$

并不意味能量藏在电荷中，而是能量蕴藏在场中！！！

只对计算静电问题有意义，
计算时可以取巧

例一：　电子经典模型————

设电子的电荷 $-e$ 均匀分布在半径为 a 的球内，求总静电能量。



电场：

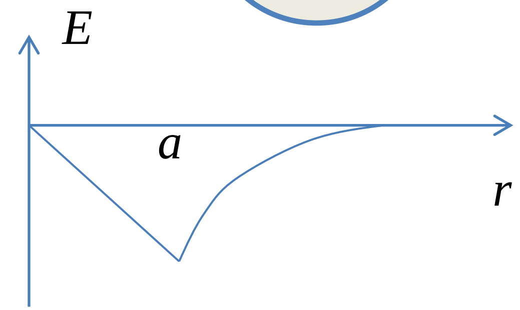
$$\vec{E}_{in} = \frac{-er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{e}_r$$

$$\vec{E}_{out} = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

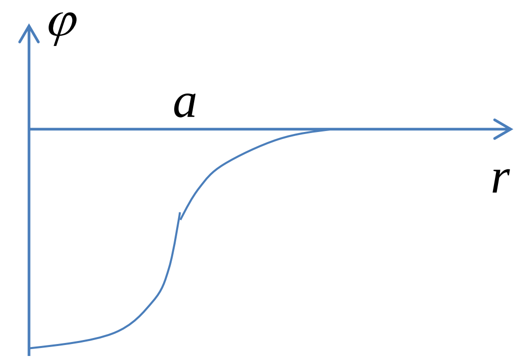
电势：

$$\varphi_{in} = \frac{-3e}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{er^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$\varphi_{out} = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



球内电荷密度　$\rho = \dfrac{-3e}{4\pi a^3}$



解法1：

$$W_{total} = \frac{1}{2}\iiint_{\infty} \varepsilon_0 \vec{E}^2 dV = \frac{1}{2}\int_0^a \varepsilon_0 E_{in}^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\int_a^{\infty} \varepsilon_0 E_{out}^2 4\pi r^2 dr$$

$$= 2\pi\varepsilon_0 \int_0^a \left(\frac{-er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)^2 r^2 dr + 2\pi\varepsilon_0 \int_a^{\infty} \left(\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 dr = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

解法2：$$W_{total}=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{-3e}{4\pi a^3}\right)\left(\frac{-3e}{8\pi\varepsilon_0 a}+\frac{er^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3}\right)4\pi r^2 dr=\frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

$$a\to 0 \qquad W_{total}\to\infty$$

当我们讨论电子时，很多时候，电子的体积大小并不影响所考虑的物理过程，我们都把电子想象成一个没有大小、没有内部结构的点电荷，但这种半径无穷小的考虑会导致电子自身所拥有的电磁能量（自能）无穷大

如果把电子想象成一个半径为 r_e ，表面均匀分布电量的球状体，电子的静止能量$m_0c^2=0.511MeV$

$$m_0c^2\sim\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} \quad\Longrightarrow\quad r_e=2.818\times10^{-15}m$$ （电子经典半径）

必须注意，在这尺度内，经典电动力学已经不再适用了，应由量子电动力学取而代之

值得指出的是，近年来高能物理实验结果显示，在直到大约$10^{-18}m$ 的范围内电子的行为仍然像个点电荷，因此 r_e 只能看成是一种长度尺度来引用。

（二）静电体系与外场的互作用（互作用能）

设点电荷 q 处于其他电荷产生的外电场中， q 所处的外场电势为 φ_e ，则 q 具有的电势能（q 与外场的互作用能）：

$$\boxed{W_i = q\varphi_e}$$

推广：在体积 V 内的电荷体系

$$\boxed{W_i = \iiint_V \rho\varphi_e dV}$$

与自能相差 $\frac{1}{2}$ 因子

另一种思路： 外场和点电荷共同构成一个复合的大系统，复合系统的自能量为

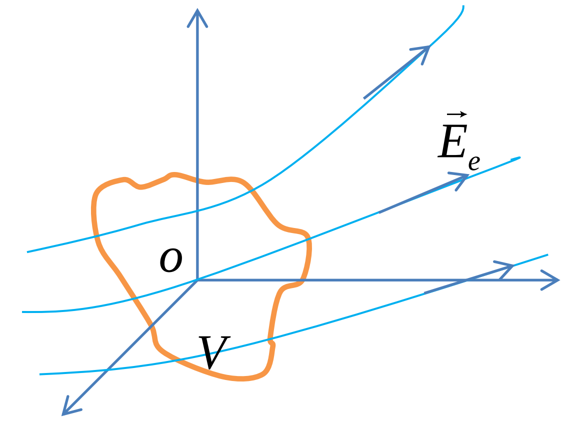
$$W_{total} = \frac{1}{2}\iiint_\infty (\varphi+\varphi_e)(\rho+\rho_e)dV = \frac{1}{2}\iiint_\infty \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\iiint_\infty \varphi_e\rho_e dV + \underline{\frac{1}{2}\iiint_\infty (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)dV}$$

交换积分变量

$$\iiint_\infty \rho_e\varphi dV = \iiint_{V_e} \rho_e\left(\iiint_{V'} \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'\right)dV = \iiint_{V'} \rho\left(\iiint_{V_e} \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon_0 r}dV\right)dV' = \iiint_\infty \rho\varphi_e dV$$

$$W_i = \frac{1}{2}\iiint_\infty (\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)dV = \iiint_V \rho\varphi_e dV$$

若体系体积 V 不小，取区域内某点o为坐标原点，
把 φ_e 对o点展开



$$\varphi_e(\vec{x}) = \varphi_e(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \varphi_e(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}\sum_{ij=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots$$

$$= \varphi_e(0) + \vec{x}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2!}\vec{x}\vec{x} : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots$$

于是 $$W_i = \iiint_V \rho\left[\varphi_e(0) + \vec{x}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{2!}\vec{x}\vec{x} : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots\right] dV$$

$$= \varphi_e(0)\iiint_V \rho dV + \nabla\varphi_e(0)\cdot\iiint_V \rho\vec{x}dV + \frac{1}{6}\iiint_V 3\rho\vec{x}\vec{x}dV \boxed{:} \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots$$

双点乘

$$W_i = Q\varphi_e(0) + \vec{p}\cdot\nabla\varphi_e(0) + \frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\varphi_e(0) + \ldots.$$

$W_i^{(0)} = Q\varphi_e(0)$ ⟹ 全部电荷集中于原点时的互作用能

$W_i^{(1)} = \vec{p}\cdot\nabla\varphi_e(0)$ ⟹ 把系统看成是电偶极矩，在外场作用下的互作用能

$W_i^{(2)} = \frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\varphi_e(0)$ ⟹ 电四极矩在外场下的互作用能

进一步 $W_i^{(1)} = \vec{p}\cdot\nabla\varphi_e(0) = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$

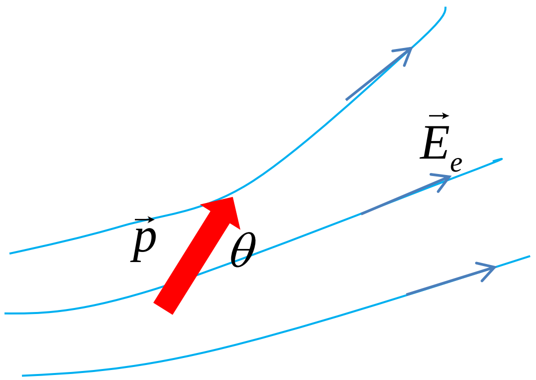
表明： 当 $\vec{p}$ 与外场 $\vec{E}_e$ 方向相同时，$W_i^{(1)}$ 最小，互作用能最弱；当 $\vec{p}$ 与外场方向相同时互作用能最强

电偶极矩在外场中所受的力：

$$\vec{F} = -\nabla W_i^{(1)} = \nabla\left[\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)\right] = \boxed{\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_e(0)}$$

（$\vec{p}$ 是常矢量，$\nabla\vec{E}_e(0)$ 是张量）

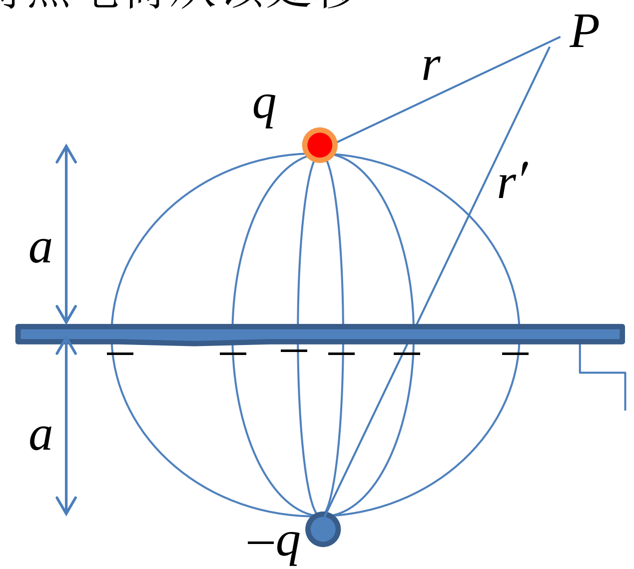
电偶极矩在外场中所受的力矩：



$$L_\theta = -\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(pE_e\cos\theta\right) = -pE_e\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{p}\times\vec{E}_e}$$

例一：接地的无限大导体平面附近有一点电荷q，求将点电荷从该处移离到无限远地方所要做的功



解：电荷 q 在 $z=a$ 处的电势能相当于它与像电荷$-q$ 之间的电势能

$$W_i = q\varphi_e = q\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2a)} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

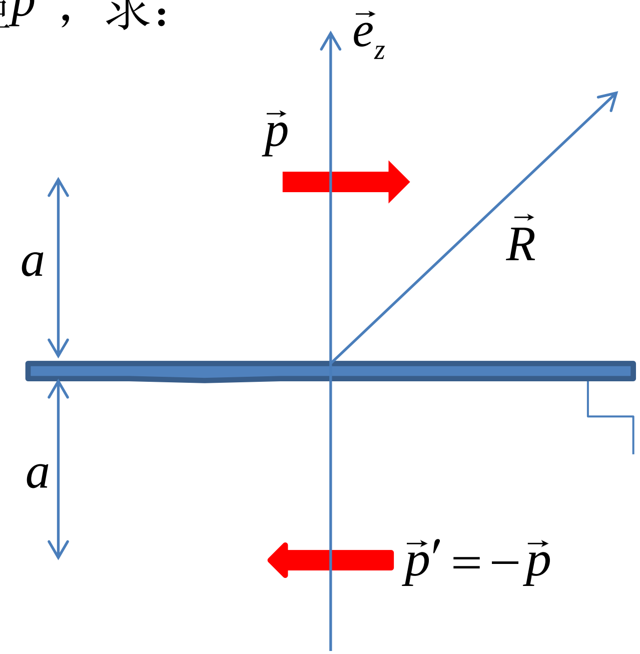
将点电荷从该处移离到无限远地方所要做的功：

$$W = W_\infty - W_i = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

例二：接地的无限大导体平面附近有平放的一电偶极矩$\vec{p}$，求：

（i）$\vec{p}$ 受导体上电荷的作用力；

（ii）$\vec{p}$ 与导体的互作用能。



电偶极矩在导体上产生的镜像为另一电偶极矩 $\vec{p}'=-\vec{p}$，镜像所产生的电场为：

$$\vec{E}_{p'}=\frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

（i）$\vec{p}$ 所受导体上电荷的作用力：

$$\vec{F}=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{p'}(a)$$

$$=p\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{3\left[\vec{p}'\cdot\left(\vec{R}+\vec{a}\right)\right]\left(\vec{R}+\vec{a}\right)-\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^2\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^5}\right\}\Bigg|_a=-p\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{R}\right)\left(\vec{R}+\vec{a}\right)-\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^5}\right\}\Bigg|_a$$

数学上：

$$\vec{p}\cdot\vec{R}=px \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^5}\right\}\Bigg|_{R=a}=0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\vec{p}}{\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^3}\right\}\Bigg|_{R=a}=0$$

故：
$$\vec{F}=-p\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{3px\left(\vec{R}+\vec{a}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^5}\right\}\Bigg|_{R=a}=-\frac{3p^2\left(\vec{R}+\vec{a}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(\vec{R}+\vec{a}\right)^5}\Bigg|_{a}=-\frac{3p^2\vec{a}}{64\pi\varepsilon_0 a^5}$$

（ii） $\vec{p}$ 与导体的互作用能：

$$\vec{E}_{p'}=\frac{3\left(\vec{p}'\cdot\vec{r}\right)\vec{r}-r^2\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0 r^5}=\frac{-3\left(\vec{p}\cdot 2\vec{a}\right)\left(2\vec{a}\right)+\left(2\vec{a}\right)^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\left(2\vec{a}\right)^5}=\frac{\vec{p}}{32\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$W_i=-\vec{p}\cdot\vec{E}_{p'}\left(a\right)=-\frac{p^2}{32\pi\varepsilon_0 a^3}$$

作业

1。

电偶极矩分别为$\vec{p}_1$ 和 $\vec{p}_2$ 的两个电偶极子，相距为 r（位矢 $\vec{r}$ 的方向从1指向2），

（i）证明它们之间的电势能为：

$$W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)r^2 - 3(\vec{p}_1\cdot\vec{r})(\vec{p}_2\cdot\vec{r})\right]$$

(ii）$\vec{p}_1$ 施加给 $\vec{p}_2$的力矩。