§3 用留数定理计算围线积分

P5 习题 计算下列围线积分. (1) $\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中 C 的方程是 $x^2+y^2-2x-2y=0$；**(2)** $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$；**(3)** $\int_{|z|=2} \frac{2z}{1-2\sin^2 z} dz$.

[解](1) C 的方程是 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或者 $|z-(1+i)|=\sqrt{2}$.

被积函数 $f(z)$ 的有限奇点为 $\{-i,i,1\}$，其中落在 C 所包围圈内的为 $\{i,1\}$，分别是 1 阶极点和 2 阶极点，其留数如下计算：

$$\operatorname{Res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z^2+1)(z-1)^2}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z-1)^2}=\frac{1}{(i+i)(i-1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}=\frac{-2}{(1+1)^2}=-\frac{1}{2}$$

于是根据留数定理：

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi i}{2}$$

(2) 被积函数 $f(z)$ 落在围线（单位圆圆周）围成的区域里面的奇点为 0，在奇点的去心邻域内展开被积函数为洛朗级数：

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1-\frac{1}{2}z^2+\cdots}{z^3}=z^{-3}-\frac{1}{2}z^{-1}+\cdots$$

故 0 处的留数为：

$$\operatorname{Res} f(0)=-\frac{1}{2}$$

于是根据留数定理：

$$\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$$

(3) $\int_{|z|=2}\frac{2z}{1-2\sin^2 z}dz=\int_{|z|=2}\frac{2z}{\cos 2z}dz$

被积函数 $f(z)$ 的奇点为使 $\cos 2z=0$ 的点，即 $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$

落在围线之内的奇点为 $\left\{\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right\}$，都是 1 阶极点，留数为：

$$\operatorname{Res} f(\pm\frac{\pi}{4}) = \left.\frac{2z}{-2\sin 2z}\right|_{z=\pm\pi/4} = -\frac{\pi}{4}$$

于是根据留数定理：

$$\int_{|z|=2} \frac{2z}{1-2\sin^2 z} dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\pi^2 i$$

§5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

P7 习题 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\phi}{1-2p\cos\phi+p^2} d\phi$，其中 $0<p<1$.

[解]令：$z=e^{i\phi}$，于是：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\phi}{1-2p\cos\phi+p^2} d\phi = \oint_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^2+z^{-2}}{2}\right)^2}{1-2p\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4pi} \oint_{|z|=1} \frac{(z^4+1)^2}{z^2-\frac{1+p^2}{p}z+1} \frac{dz}{z^4}$$

被积函数的奇点为$\{p, 1/p, 0\}$，落在单位圆内的只有$\{p, 0\}$，p 处的留数为：

$$\operatorname{Res} f(p) = \lim_{z\to p} \frac{(z^4+1)^2}{z-\frac{1}{p}} \frac{1}{z^4} = \frac{(p^4+1)^2}{p-\frac{1}{p}} \frac{1}{p^4}$$

由于在 0 处的洛朗展开如：

$$\frac{(z^4+1)^2}{z^2-\frac{1+p^2}{p}z+1} \frac{1}{z^4} = \frac{(z^8+2z^4+1)}{(1-pz)(1-\frac{1}{p}z)} \frac{1}{z^4} = (z^4+2+\frac{1}{z^4}) \sum_{m=0}^{\infty} p^m z^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p^l} z^l$$

z^{-1} 的系数是：$\sum_{m+l=3} p^{m-l} = p^{3-0}+p^{2-1}+p^{1-2}+p^{0-3} = p^3+p+p^{-1}+p^{-3}$

于是：

$$\operatorname{Res} f(0) = p^3+p+p^{-1}+p^{-3}$$

故由留数定理：

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2\phi}{1-2p\cos\phi+p^2}d\phi=-\frac{1}{4pi}2\pi i\left[\frac{(p^4+1)^2}{p^2-1}\frac{1}{p^3}+p^3+p+p^{-1}+p^{-3}\right]$$
$$=-\frac{\pi}{2p^4}\left[\frac{(p^4+1)^2}{p^2-1}+\left(p^4+1\right)\left(p^2+1\right)\right]$$
$$=\frac{\pi(p^4+1)}{1-p^2}$$

§6 实积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

P9 习题 计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx$**，其中**$m,n\in\mathbb{N}^+$**，且**$m<n$**.**

[解] 令 $f(z)=\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}$，则 $f(z)$的奇点满足$z^{2n}+1=0$，此方程在上半平面只有有限个零点$\left\{z_k=\exp\left[i\frac{(1+2k)\pi}{2n}\right]\middle| k=0,1,\cdots,n-1\right\}$，除此之外在实轴和上半平面解析。另外，由于$\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$，且令$z=re^{i\theta}(r>1,0\le\theta\le\pi)$，则（$m\le n-1$）:

$$|zf(z)|=\frac{|z\cdot z^{2m}|}{|z^{2n}+1|}=\frac{r^{2m+1}}{|r^{2n}e^{i2n\theta}+1|}=\frac{r^{2m+1}}{\sqrt{1+2r^{2n}\cos(2n\theta)+r^{4n}}}$$
$$\le\frac{r^{2n-1}}{\sqrt{1+2r^{2n}\cos(2n\theta)+r^{4n}}}\le\frac{r^{2n-1}}{\sqrt{1-2r^{2n}+r^{4n}}}=\frac{r^{2n-1}}{r^{2n}-1}=\frac{1}{r}\frac{r^{2n}}{r^{2n}-1}$$

当$|z|=r>2^{-2n}$时，$\frac{r^{2n}}{r^{2n}-1}<2$，

于是，对于任意小$\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，取$R=\frac{2}{\varepsilon}>2>2^{-2n}$，则$|z|=r>R$时，有：

$\frac{1}{r}\frac{r^{2n}}{r^{2n}-1}<\frac{2}{r}<\frac{2}{R}=\varepsilon$，即$|zf(z)|<\varepsilon$，于是$zf(z)$一致的趋于 0。

于是由本节的定理可以知道，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx=2\pi i\left[\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}f(z_k)\right]$$

由于z_k是$z^{2n}+1=0$的一阶零点，故z_k是 $f(z)$的一阶极点，

$$\mathrm{Res}\, f(z_k)=\frac{z_k^{\ 2m}}{2nz_k^{\ 2n-1}}=\frac{1}{2n}z_k^{\ 2m-2n+1}$$

又 $z_k=\exp\left[i\frac{(1+2k)\pi}{2n}\right]=z_0^{\ 2k+1}$，其中 $z_0=\exp\left[i\frac{\pi}{2n}\right]$

于是（利用了 $z_0^{\ 2n}=-1$）：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx=2\pi i\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n}z_k^{\ 2m-2n+1}\right]=\frac{\pi i}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}z_0^{\ (2m-2n+1)(2k+1)}\right]\\
&=\frac{\pi i}{n}z_0^{\ (2m-2n+1)}\frac{1-z_0^{\ (2m-2n+1)2n}}{1-z_0^{\ (2m-2n+1)2}}=\frac{\pi i}{n}z_0^{\ 2m+1}(-1)\frac{1-(-1)^{(2m-2n+1)}}{1-z_0^{\ (2m+1)2}}\\
&=-\frac{2\pi i}{n}\frac{z_0^{\ 2m+1}}{1-z_0^{\ 2(2m+1)}}=-\frac{2\pi i}{n}\frac{1}{z_0^{\ -(2m+1)}-z_0^{\ (2m+1)}}=\frac{\pi}{n}\left(\frac{z_0^{\ (2m+1)}-z_0^{\ -(2m+1)}}{2i}\right)^{-1}\\
&=\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2i}\left\{\exp\left[i\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right]-\exp\left[-i\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right]\right\}\right)^{-1}=\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right)\right)^{-1}\\
&=\frac{\pi}{n}\csc\left[\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right]
\end{aligned}$$

§7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{imx}dx$

P12 习题 计算下列积分. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^4+1}dx$，其中 $m>0$；**(2)** $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx$，其中 $a>0$，$m>0$.

[解] (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x^4+1}dx$

第一个等号是因为被积函数是偶函数，第二个等号是因为最后一个积分的虚部为零。

令 $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$，则 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$，且对于任意小的 $\varepsilon>0$，取 $R=(1+1/\varepsilon)^{1/4}$，则当 $|z|>R$ 时，$|f(z)|=\left|\frac{1}{z^4+1}\right|<\frac{1}{|z|^4-1}<\varepsilon$，于是 $f(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致的趋于 0。

此外，$f(z)$ 在上半平面中的奇点只有 $\left\{e^{i\pi/4},e^{i3\pi/4}\right\}$，且都为 1 阶极点，于是由本节的定理，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x^4+1}dx=2\pi i\left\{\text{Res}\,[\frac{e^{imz}}{z^4+1},e^{i\pi/4}]+\text{Res}\,[\frac{e^{imz}}{z^4+1},e^{i3\pi/4}]\right\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{e^{ime^{i\pi/4}}}{4(e^{i\pi/4})^3}+\frac{e^{ime^{i3\pi/4}}}{4(e^{i3\pi/4})^3}\right\}=\frac{\pi i}{2}\left\{\frac{e^{ime^{i\pi/4}}}{ie^{i\pi/4}}+\frac{e^{ime^{i3\pi/4}}}{e^{i\pi/4}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{e^{-i\pi/4}e^{i\frac{m}{\sqrt{2}}(1+i)}+ie^{-i\pi/4}e^{i\frac{m}{\sqrt{2}}(-1+i)}\right\}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left\{(1-i)e^{i\frac{m}{\sqrt{2}}}+i(1-i)e^{-i\frac{m}{\sqrt{2}}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left\{(1-i)(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}+i\sin\frac{m}{\sqrt{2}})+(i+1)(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}-i\sin\frac{m}{\sqrt{2}})\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left\{\cos\frac{m}{\sqrt{2}}+\sin\frac{m}{\sqrt{2}}+\cos\frac{m}{\sqrt{2}}+\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}+\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right)$$

于是：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}+\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{(x^2+a^2)^2}dx$

第一个等号是因为被积函数是偶函数，第二个等号是因为最后一个积分的虚部为零。

令 $f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^2}$，则 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$，且对于任意小的 $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<a^4$)，取 $R=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-a^2}$，

则当 $|z|>R$ 时，$|f(z)|=\left|\frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right|<\varepsilon$，于是 $f(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致的趋于 0。

此外，$f(z)$ 在上半平面中的奇点只有 $\{ia\}$，且为 2 阶极点，于是由本节的定理，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\text{Res}\,[\frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2},ia]=2\pi i\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{e^{imz}}{(z+ia)^2}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ia}\frac{ime^{imz}(z+ia)-e^{imz}2}{(z+ia)^3}=\frac{\pi(1+ma)e^{-ma}}{2a^3}$$

于是：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\frac{\pi(1+ma)e^{-ma}}{2a^3}=\frac{\pi(1+ma)e^{-ma}}{4a^3}$$

补充习题

P13 计算下列积分

1. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\phi}{a+b\cos\phi}d\phi$，其中 $a>b>0$.

[解] 令 $z=e^{i\phi}$，则：

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\phi}{a+b\cos\phi}d\phi=\oint_{|z|=1}\frac{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{a+b\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(bz^2+2az+b)}dz$$

被积函数奇点为$\left\{0,z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},z_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right\}$，落在单位圆内的为$\{0,z_1\}$。

分别为 2 阶和 1 阶极点，其留数分别为（用 Res $[a]$ 表示被积函数在 a 处的留数值）：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[0]&=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^4-2z^2+1}{bz^2+2az+b}\\&=\lim_{z\to 0}\frac{(4z^3-4z)(bz^2+2az+b)-(z^4-2z^2+1)(2bz+2a)}{(bz^2+2az+b)^2}\\&=-\frac{2a}{b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[z_1]&=\lim_{z\to z_1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(bz^2+2az+b)}(z-z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2b(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1)\\&=\lim_{z\to z_1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2b(z-z_2)}=\frac{z_1{}^4-2z_1{}^2+1}{z_1{}^2b(z_1-z_2)}=\frac{(z_1-z_1{}^{-1})^2}{b(z_1-z_2)}\end{aligned}$$

由于 z_1,z_2 是 $bz^2+2az+b=0$ 的两个根，故 $z_1z_2=1$， $z_2=z_1^{-1}$

于是： $\mathrm{Res}\,[z_1]=\frac{(z_1-z_1{}^{-1})^2}{b(z_1-z_2)}=\frac{(z_1-z_2)^2}{b(z_1-z_2)}=\frac{z_1-z_2}{b}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$

于是由留数定理：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\phi}{a+b\cos\phi}d\phi&=-\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(bz^2+2az+b)}dz=-\frac{1}{2i}2\pi i\left[-\frac{2a}{b^2}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right]\\&=\frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2}\end{aligned}$$

2. $\int_0^{\pi}\frac{a}{a^2+\sin^2\phi}d\phi$，其中 $a>0$.

[解] 令 $\theta=\pi-2\phi$，则 $\phi=\dfrac{\pi-\theta}{2}$，因此：

$$\int_0^{\pi}\frac{a}{a^2+\sin^2\phi}d\phi=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{a}{a^2+\sin^2[(\pi-\theta)/2]}\frac{d\theta}{-2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a}{2a^2+1-\cos(\pi-\theta)}d\theta$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a}{2a^2+1+\cos\theta}d\theta=a\int_0^{2\pi}\frac{1}{2a^2+1+\cos\theta}d\theta=a\frac{2\pi}{\sqrt{(2a^2+1)^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$

注：也可令 $z=e^{i2\phi}$，$\sin^2\phi=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)$然后用留数定理来做。当然不过是把第五节例题 1 和 2 的结果重复了一遍而已。

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\phi}d\phi$

[解] 令：$\phi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，则 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\phi}d\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta$

由于 $\dfrac{1}{1+\sin^2(\dfrac{\pi}{2}+\theta)}=\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}=\dfrac{1}{1+\sin^2(\dfrac{\pi}{2}-\theta)}$

故函数 $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}$ 关于直线 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，因此：

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\phi}d\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

最后一步利用了上一题中 $a=1$ 的结果。

4. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx$，**其中** $a>0$，$b>0$**.**

[解] $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx$

很显然，$\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$ 在 $z\to\infty$ 时一致的趋于零，且它的在上半平面内的所有有限奇点为 $\{ia,ib\}$，分别为 2 阶极点和 1 阶极点。

(1) 若 $a=b$，则落在上半平面的奇点其实只有一个 $\{ia\}$，并且是 2+1=3 阶极点。留数为：

$$\text{Res }[ia]=\frac{1}{2}\lim_{z\to ia}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{(z+ia)^3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to ia}\frac{12}{(z+ia)^5}=-\frac{3i}{16a^5}$$

于是：

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}2\pi i\left(-\frac{3i}{16a^5}\right)=\frac{3\pi}{16a^5}$$

(2) 若 $a\neq b$，留数分别为：

$$\text{Res}\,[ia]=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+ia)^2(z^2+b^2)}=\lim_{z\to ia}\left[\frac{-2}{(z+ia)^3(z^2+b^2)}-\frac{2z}{(z+ia)^2(z^2+b^2)^2}\right]$$

$$=i\frac{1}{4a^3(a^2-b^2)}+i\frac{1}{2a(a^2-b^2)^2}=\frac{i\left[(a^2-b^2)+2a^2\right]}{4a^3(a^2-b^2)^2}=\frac{i(3a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^2}$$

$$\text{Res}\,[ib]=\lim_{z\to ib}\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+ib)}=\frac{1}{2ib(a^2-b^2)^2}$$

于是：

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}2\pi i\left[\frac{i(3a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{2ib(a^2-b^2)^2}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-(3a^2-b^2)}{4a^3(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{2b(a^2-b^2)^2}\right]=\pi\frac{-(3a^2-b^2)b+2a^3}{4a^3b(a^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{(2a+b)\pi}{4a^3b(a+b)^2}$$

从结果可以看出，当 $a=b$ 时回到了(1)的结果，因此，可以把(1)(2)合写为：

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx=\frac{(2a+b)\pi}{4a^3b(a+b)^2}$$

5. $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx$**，其中** $a>0$**.**

[解] 令 $x=at$，于是：$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx=a\int_0^{\infty}\frac{1}{a^4t^4+a^4}dt=\frac{1}{a^3}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^4+1}dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}$

最后一个等号利用了第六节例 6 的结果。

6. $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$

[解] 在第七节例 2 中取：$m=1,a=1$，于是得到：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2e}$$

7. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$**，其中** $a>0,b>0$

[解] $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$

则 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 在 $z\to\infty$ 时一致的趋于零。

(1) $a=b$.落在上半平面的奇点为$\{ia\}$，且为 1 阶极点，其留数为：

$$\text{Res}\,[f(z)e^{iz},ia]=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+ia)^2}=\lim_{z\to ia}\frac{ie^{iz}(z+ia)-e^{iz}2}{(z+ia)^3}=\frac{a+1}{i4a^3}e^{-a}$$

于是：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}2\pi i\frac{a+1}{i4a^3}e^{-a}=\pi\frac{a+1}{4a^3e^a}$$

(2) $a\neq b$. 落在上半平面的奇点为$\{ia,ib\}$，都为 1 阶极点，其留数为：

$$\text{Res}\,[f(z)e^{iz},ia]=\lim_{z\to ia}\frac{e^{iz}}{(z+ia)(z^2+b^2)}=\frac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)}$$

$$\text{Res}\,[f(z)e^{iz},ib]=\frac{e^{-b}}{2ib(a^2-b^2)}$$

于是：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}2\pi i\left[\frac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)}+\frac{e^{-b}}{2ib(a^2-b^2)}\right]=\pi\frac{ae^{-b}-be^{-a}}{2ab(a^2-b^2)}$$

当然由此结果可以看出：

$$\begin{aligned}\lim_{b\to a}\pi\frac{ae^{-b}-be^{-a}}{2ab(a^2-b^2)}&=\frac{\pi}{2a^2}\lim_{b\to a}\frac{ae^{-b}-be^{-a}}{(a+b)(a-b)}=\frac{\pi}{4a^3}\lim_{b\to a}\frac{ae^{-b}-be^{-a}}{a-b}\\&=\frac{\pi}{4a^3}\lim_{b\to a}\frac{ae^{-b}(-1)-e^{-a}}{-1}=\frac{\pi(a+1)}{4a^3e^a}\end{aligned}$$

这与(1)是一致的。

8. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

[解] 利用第 7 节例 3 的结果：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}(m>0)$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\pi(m>0)$$

于是（倒数第二个等号作了代换 $t=2x$）：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2 xd\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2 x}{x}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}d\left(\sin^2 x\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}2\sin x\cos xdx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

9. $\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx$，其中 $m>0,a>0$

[解] $\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x(x^2+a^2)}dx$

前一个等号因为被积函数是偶函数，后一个则是因为最后一个积分的实部（奇函数）为零。

由于 $f(z)=\frac{1}{z(z^2+a^2)}$ 的奇点为$\{0,ia,-ia\}$，都是 1 阶极点，按第七节(18)式，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{imx}dx=2\pi i\left\{\text{Res}\,[f(z)e^{imz},ia]+\frac{1}{2}\text{Res}\,[f(z)e^{imz},0]\right\}$$

而：

$$\text{Res}\,[f(z)e^{imz},ia]=\lim_{z\to ia}\frac{e^{imz}}{z(z+ia)}=-\frac{e^{-ma}}{2a^2}$$

$$\text{Res}\,[f(z)e^{imz},0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}=\frac{1}{a^2}$$

于是：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx=\frac{1}{2i}2\pi i\left[-\frac{e^{-ma}}{2a^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\right]=\frac{\pi(1-e^{-ma})}{2a^2}$$

10. $\int_{|z|=2}\frac{e^z}{\cosh z}dz$

[解] 被积函数的奇点满足$\cosh z=0$，即$e^{2z}=-1$，即$z=i\frac{2k+1}{2}\pi$，落在$|z|<2$的为

$\pm i\frac{\pi}{2}$，都是 1 阶极点，留数为：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{\cosh z}, \pm i\frac{\pi}{2}\right] = \lim_{z\to\pm i\frac{\pi}{2}}\left(z \mp i\frac{\pi}{2}\right)\frac{e^z}{\cosh z} = 2\lim_{z\to\pm i\frac{\pi}{2}}\frac{z \mp i\pi/2}{1+e^{-2z}}$$

$$= 2\lim_{z\to\pm i\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-2e^{-2z}} = 2\frac{1}{-2e^{\mp i\pi}} = 1$$

于是：

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z}{\cosh z}dz = 2\pi i[1+1] = 4\pi i$$

11. $\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$，其中 $m,a,b>0, a\neq b$

[解] $\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{imx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$

前一个等号因为被积函数是偶函数，后一个则是因为最后一个积分的实部（奇函数）为零。

由于 $f(z) = \frac{z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 的奇点为 $\{ia, ib\}$，都是 1 阶极点，于是：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i\left\{\operatorname{Res}\,[f(z)e^{imz}, ia] + \operatorname{Res}\,[f(z)e^{imz}, ib]\right\}$$

而：

$$\operatorname{Res}\,[f(z)e^{imz}, ia] = \lim_{z\to ia}\frac{ze^{imz}}{(z+ia)(z^2+b^2)} = \frac{e^{-ma}}{2(-a^2+b^2)}$$

$$\operatorname{Res}\,[f(z)e^{imz}, ib] = \frac{e^{-mb}}{2(-b^2+a^2)}$$

于是：

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2i}2\pi i\left[\frac{e^{-ma}}{2(-a^2+b^2)} + \frac{e^{-mb}}{2(-b^2+a^2)}\right] = \frac{\pi(e^{-mb}-e^{-ma})}{2(a^2-b^2)}$$

Lamberto Qin
2010-10-23
QQ:397968240
Tel:15975454463