05学年度上学期.

05级高等数学(一)试题(东校区)

(第一学期)

(B卷答案)

一、求极限

1. 原式 $= -\frac{\sqrt{2}}{4}$,　　2. 原式 $= 1$

二、

1. $dy = \frac{(1+x^2)e^x\cos e^x - 2x\sin e^x}{(1+x^2)^2}dx + \frac{1}{2x}dx$

2. $y' = \sqrt{x^2-a^2}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+t^2}{4t}$

4. $x + 2y - 2 = 0$

中山大學 考试草稿纸

三、

1. 原式 $= \ln(\ln x) + 2\sin\sqrt{x} + C$

2. 原式 $= \ln(1+\sin^2 x) + C$

3. 原式 $= \frac{1}{2}(a-b)^2$

4. 原式 $= 0$

四、

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x(1-\cos x)}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}$$

中山大學 考试草稿纸

五：

直线 l_1 的方向向量 $n_1=(-2,2,-2)$

直线 l_2 的方向向量 $n_2=(2,-1,-1)$

所求平面的法向量

$n=n_1\times n_2=(-4,-6,-2)$

所求平面过直线 l_1 上点 $P_0(1,1,0)$.

所求平面方程

$-4(x-1)-6(y-1)-2z=0$

即 $2x+3y+z-5=0$

中山大學 考试草稿纸

六、

(1) 单调递增区间 $(-\infty,-3)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$

单调递减区间 $(-3,-1)$. 极大值点 $x=-3$.

(2) 凸区间 $(-\infty,0)$, 凹区间 $(0,+\infty)$

拐点 $x=0$.

(3) 垂直渐近线 $x=-1$. 斜渐近线 $y=\frac{x}{2}-1$.

七、(1) 令 $g(t)=f(t)-t$, 则 $g(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续.

又 $g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}>0$, $g(1)=f(1)-1=-1<0$.

∴ 由介值定理, 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $g(\eta)=0$.

即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 令 $g(t)=e^{\lambda t}(f(t)-t)$, 则 $g(t)$ 在 $[0,\eta]$

连续, 在 $(0,\eta)$ 可导, 且 $g(0)=g(\eta)=0$.

∴ 由罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,\eta)$ 满足 $g'(\xi)=0$.

由此即得证等式.