几何与代数简介（I）
Introduction to Geometry and Algebra (I)

中山大学数学系
Department of Mathematics, Sun Yat-sen University
姜正禄
Zhenglu Jiang

October 23, 2017

向量的概念

日常生活中遇到的许多量大体可分为两种：

- 一种是只有大小的量，例如温度、时间、质量、密度、功、面积和体积等，在规定的单位下，它们都可以由一个数完全确定，称之为数量或标量(scale)；

向量的概念

日常生活中遇到的许多量大体可分为两种：

- 一种是只有大小的量，例如温度、时间、质量、密度、功、面积和体积等，在规定的单位下，它们都可以由一个数完全确定，称之为数量或标量(scale)；
- 另一种是不仅有大小而且还有方向的量，诸如位移、力、速度和加速度等，称之为向量或矢量(vector).

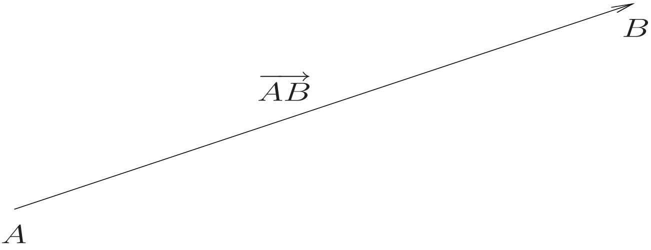
向量的概念

日常生活中遇到的许多量大体可分为两种：

- 一种是只有大小的量，例如温度、时间、质量、密度、功、面积和体积等，在规定的单位下，它们都可以由一个数完全确定，称之为数量或标量(scale)；
- 另一种是不仅有大小而且还有方向的量，诸如位移、力、速度和加速度等，称之为向量或矢量(vector).
- 后一种量还可以用一条有向线段来表示；用线段的长度表示这个量的大小，线段的方向表示这个量的方向.

向量的概念

既有大小又有方向的量称为向量或矢量，它可以用空间点A到空间点B的有向线段AB来表示，如下图所示，记为$\overrightarrow{AB}$；称点A为始点、点B为终点；有向线段AB的长度叫做向量$\overrightarrow{AB}$的模，记为$|\overrightarrow{AB}|$.

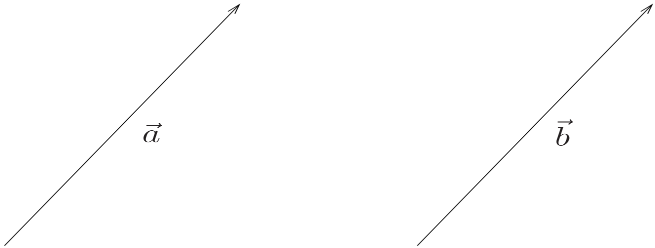


向量的概念

通常用一个上方带箭头的或黑体的小写字母来表示一个向量，例如$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\cdots$，或$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，$\cdots$．如向量$\vec{a}$的模为0，即$|\vec{a}| = 0$，则称$\vec{a}$为零向量，记为$\vec{0}$或$\vec{a} = \vec{0}$，并规定任意一个方向都可看作零向量的方向．事实上，表示零向量的有向线段是条特殊的线段，它的始点和终点相同，它就是一个点，因此还可简记零向量为0．如$|\vec{a}| = 1$，则称$\vec{a}$为单位向量．

向量的概念

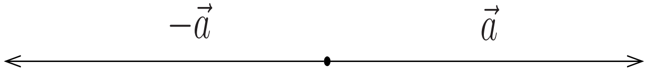
如向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的大小相等，且它们的方向相同，如下图所示，则称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相等，记为$\vec{a}=\vec{b}$.



向量只与它的大小和方向有关，与它的始点和终点无关.

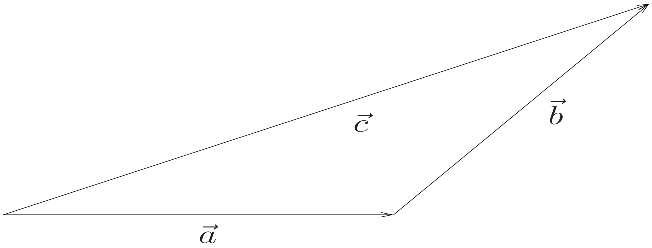
向量的概念

如向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的大小相等，它们的方向却相反，如下图所示，则称$\vec{a}$为$\vec{b}$的负向量或反向量，或称$\vec{b}$为$\vec{a}$的负向量或反向量，或称$\vec{a}$与$\vec{b}$互为负向量或反向量，记为$\vec{a}=-\vec{b}$，或$\vec{b}=-\vec{a}$.



加法运算

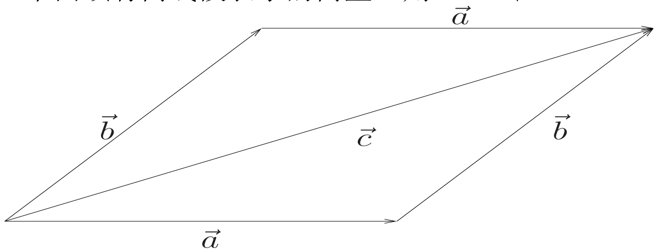
平行移动向量$\vec{a}$直至它的终点与向量$\vec{b}$的始点重合，然后作一条连接向量$\vec{a}$的始点至向量$\vec{b}$的终点的有向线段，并记向量$\vec{c}$是一个由该有向线段表示的向量，如下图所示，则称向量$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记为$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



三角形法则

加法运算

平行移动向量$\vec{a}$直至它的始点与向量$\vec{b}$的始点重合，以这两个向量作为邻边作一个平行四边形，然后再作一条连接该平行四边形上的这两个向量的重合始点至其对应的顶点的有向线段，并记向量$\vec{c}$是一个由该有向线段表示的向量，则$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



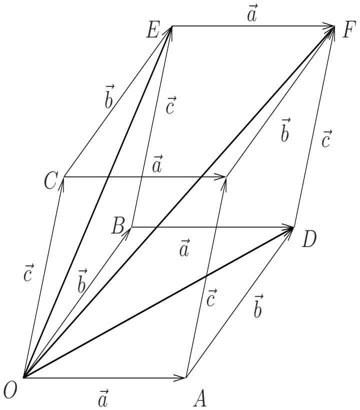
平行四边形法则

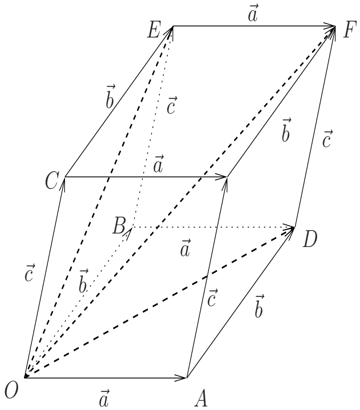
加法运算

定理 设$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$是三个向量，则加法运算满足

1) 零向量的特征：$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2) 负向量的特征：$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;
3) 交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
4) 结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

加法运算


E
$\vec{a}$
F
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$
C
$\vec{a}$
B
D
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
O
$\vec{a}$
A

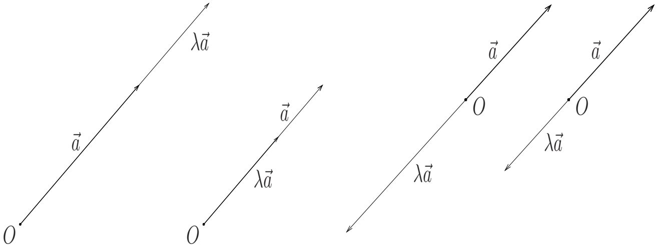

E
$\vec{a}$
F
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$
C
$\vec{a}$
B
D
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
O
$\vec{a}$
A

结合律

数乘运算

设$\vec{a}$是一个向量，λ是一个数，则规定$\lambda\vec{a}$是一个新的向量，它的大小为$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$；当$\lambda > 0$时，其方向与$\vec{a}$相同，当$\lambda < 0$时，其方向与$\vec{a}$相反.

数乘运算



当$\lambda \neq \pm 1$时，数乘运算反映了有向线段正向(或反向)延伸或收缩．当$\lambda > 1$时，$\lambda\vec{a}$是向量$\vec{a}$正向延伸到λ倍后所得的向量；当$0 < \lambda < 1$ 时，$\lambda\vec{a}$是向量$\vec{a}$正向收缩到λ倍后所得的向量．当$\lambda < -1$时，$\lambda\vec{a}$是向量$\vec{a}$反向延伸到$|\lambda|$倍后所得的向量；当$-1 < \lambda < 0$时，$\lambda\vec{a}$是向量$\vec{a}$反向收缩到$|\lambda|$倍后所得的向量．当$\lambda = -1$时，$\lambda\vec{a}$为一个反向量，即$-\vec{a}$；当$\lambda = 1$时，$\lambda\vec{a}$即为同一个向量$\vec{a}$，这里，称数"1"为单位元．

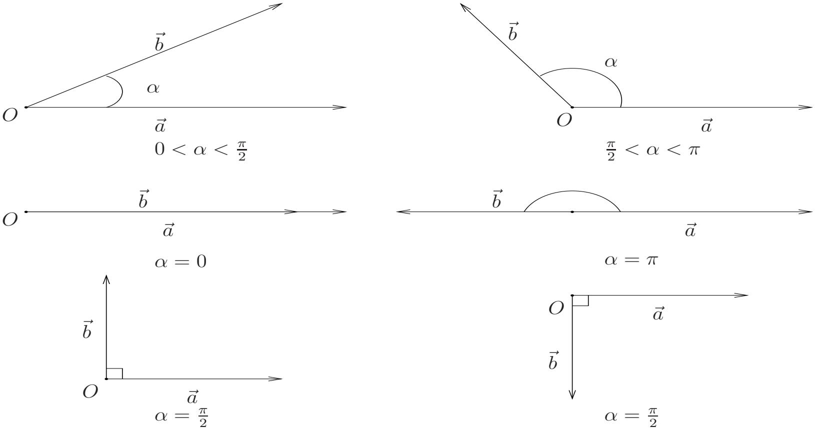
数乘运算

定理 设$\vec{a}$和$\vec{b}$是两个向量，λ和μ是两个数，则数乘运算满足

1) 单位元的特征：$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;
2) 结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
3) 第一分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
4) 第二分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

向量的夹角

将两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的始点置于同一个点O，这时，这两个向量就有夹角．规定在0至π之间的角作为这两个向量的夹角，记为$\angle(\vec{a},\vec{b})$，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\alpha$，这里，$0\leq\alpha\leq\pi$，如下图所示．



向量的夹角

- 当向量$\vec{a}$和$\vec{b}$方向相同时，$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$；

向量的夹角

- 当向量$\vec{a}$和$\vec{b}$方向相同时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=0$;
- 当它们方向相反时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$.

向量的夹角

- 当向量$\vec{a}$和$\vec{b}$方向相同时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=0$；
- 当它们方向相反时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$.
- 如果$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi/2$，就称向量$\vec{a}$和$\vec{b}$正交或垂直，记为$\vec{a}\perp\vec{b}$.

向量的夹角

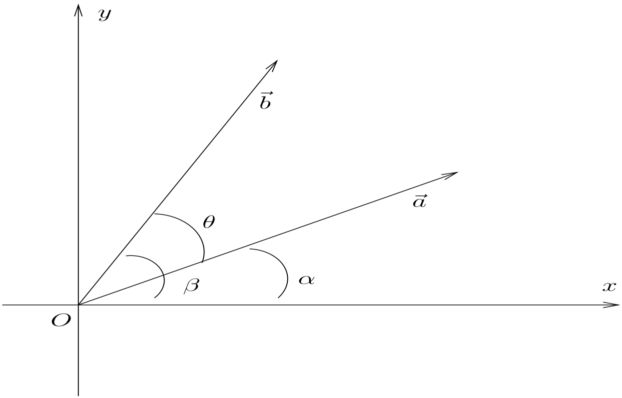
- 当向量$\vec{a}$和$\vec{b}$方向相同时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=0$；
- 当它们方向相反时，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$.
- 如果$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi/2$，就称向量$\vec{a}$和$\vec{b}$正交或垂直，记为$\vec{a}\perp\vec{b}$.
- 特别要注意的是，向量的夹角与向量的始点及其大小无关，只与向量的方向有关.

向量的内积

设$\vec{a}$和$\vec{b}$是任意两个向量，则称$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的内积或点积，记为$\vec{a} \cdot \vec{b}$或$\vec{a}\vec{b}$，即为$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

内积的几何意义

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$$



内积的性质

1. $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\vec{c}=\alpha\vec{a}\vec{c}+\beta\vec{b}\vec{c}$
2. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$
3. $\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0, \vec{a}\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

向量的外积

设$\vec{a}$和$\vec{b}$是任意两个向量，则规定$\vec{a}\times\vec{b}$是一个新的向量，要求它的大小为$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$，其方向与向量$\vec{a}$和$\vec{b}$均垂直，而且如果$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{a}\times\vec{b}$均为非零向量，将这三个向量的始点置于同一点$O$，那么$\vec{a}\times\vec{b}$的方向还要求$\{O;\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$可以构成一个右标架．称$\vec{a}\times\vec{b}$为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的外积，或称叉积，或称向量积．

外积的几何意义

$$\boxed{\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|},\quad 0\le\theta<\pi}$$

外积的性质

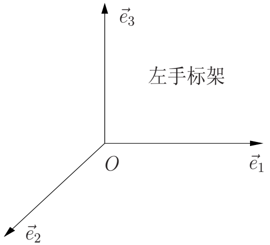
1. $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\vec{a}\times\vec{c}+\beta\vec{b}\times\vec{c}$
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
3. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

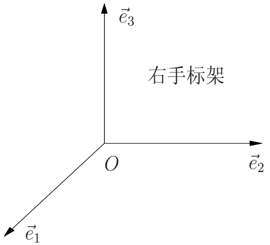
标架与坐标

给定空间中的一个定点O和一个三元不共面有序向量组$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$，并将所有向量的始点经平行移动后置于点$O$，则确定了空间中的任意一个点$P$，就唯一确定了向量$\overrightarrow{OP}$，反之，用空间中的任意一个向量$\overrightarrow{OP}$也就唯一确定了空间中的一点$P$. 空间中的点$P$与向量$\overrightarrow{OP}$构成了一一对应的关系，它将空间中的点与向量一一对应起来. 另一方面，存在唯一一个三元有序数组$\{x, y, z\}$，使得$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$；这就确定了$\overrightarrow{OP}$与$\{x, y, z\}$之间一一对应的关系，它将空间向量与三元有序数组一一对应起来. 因此，这两个一一对应的关系也就构成了空间点与三元有序数组之间的一个一一对应的关系.

标架与坐标

称这个有序向量组$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$为向量集合的一个基；定点$O$和基$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$构成了空间中的一个参照系，称之为一个标架，简记为$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$，基向量的顺序遵循左手法则（顺时针）的标架称为左手标架，遵循右手法则（逆时针）的标架称为右手标架，如下图所示.



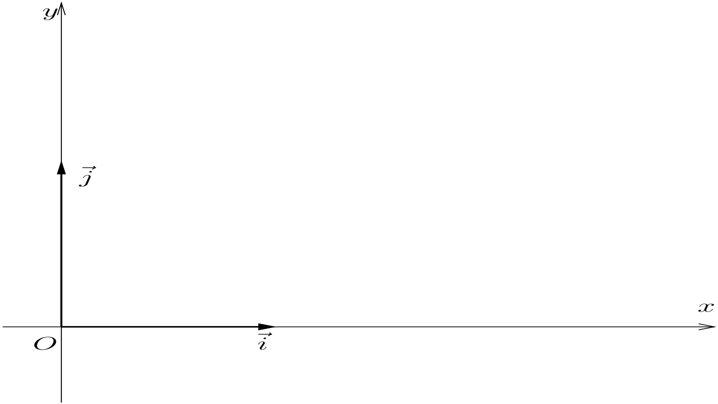


标架与坐标

称向量$\overrightarrow{OP}$为点P的径矢，称三元有序数组$\{x, y, z\}$为点P或向量$\overrightarrow{OP}$ 关于标架$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$的坐标或分量，记为$(x, y, z)$或$P(x, y, z)$，基向量也称为坐标轴向量；空间点与三元有序数组之间的这种一一对应的关系称为空间坐标系，当坐标向量均为单位向量时，称之为笛卡尔坐标系，否则，称之为仿射坐标系，当坐标向量两两互相垂直时，称之为直角坐标系，特别地，当坐标向量均为单位向量而且两两互相垂直时，这个坐标系称为笛卡尔直角坐标系，这种标架下的基称为幺正基．而且在有些教材中通常约定带有右手标架的笛卡尔直角坐标系的坐标轴向量$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$分别改记为$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$，即其标架为$\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$，而且基$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$是幺正基．

标架与坐标

平面坐标

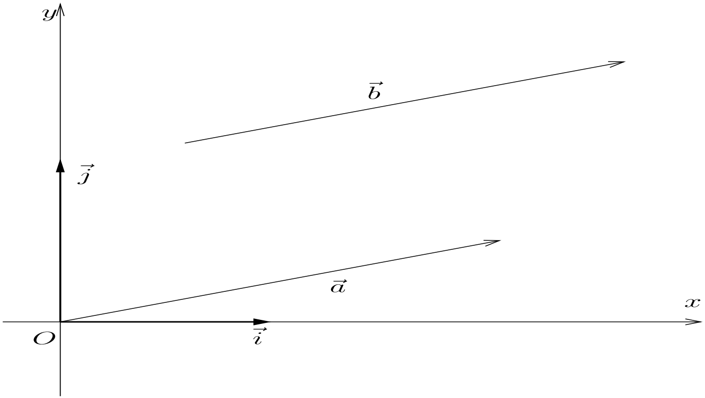


标架与坐标

平面坐标

$\vec{a} = (x, y)$

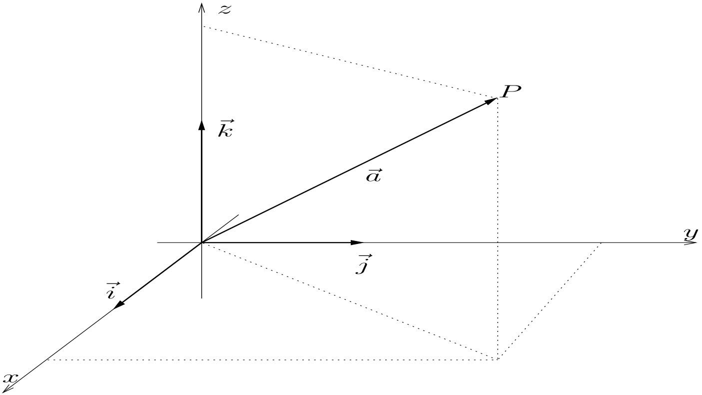
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



标架与坐标

空间坐标

$\vec{a} = (x, y, z)$ $\qquad$ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



坐标的运算

依据向量的加法和数乘运算，我们还可以确定空间坐标系下向量坐标的加法和数乘运算．给定一个基$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$，任意给定两个数$\alpha$和$\beta$，如向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的坐标分别为$(a_1, a_2, a_3)$和$(b_1, b_2, b_3)$，即$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$，$\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i$，则

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \sum_{i=1}^{3}(\alpha a_i + \beta b_i)\vec{e}_i,$$

即知向量$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$的坐标为$(\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3)$．为此，我们可以规定如下坐标的加法和数乘运算：

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$
$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

这种运算与向量的加法和数乘运算一致．这样一来，在同一坐标系下考虑向量和坐标时，就可以将向量和坐标视为一样，也就是通常所说的，称三元有序数组为向量，把向量看做三元有序数组，也即诸如$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$．

坐标的运算

依据向量的内积和外积运算，可以确定空间坐标系下向量坐标的内积和外积运算．给定一个基$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$，任意给定两个数$\alpha$和$\beta$，如向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的坐标分别为$(a_1,a_2,a_3)$和$(b_1,b_2,b_3)$，
即$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，则

$$\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3;$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.$$

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!