数学准备

张量

（一）并矢量：　两个矢量并列在一起，中间不作任何运算 $\vec{A}\vec{B}$

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} &= \left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right)\left(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z\right)\\ &= A_xB_x\vec{e}_x\vec{e}_x + A_xB_y\vec{e}_x\vec{e}_y + A_xB_z\vec{e}_x\vec{e}_z + A_yB_x\vec{e}_y\vec{e}_x + A_yB_y\vec{e}_y\vec{e}_y\\ &\quad + A_yB_z\vec{e}_y\vec{e}_z + A_zB_x\vec{e}_z\vec{e}_x + A_zB_y\vec{e}_z\vec{e}_y + A_zB_z\vec{e}_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

记： $\vec{A}\vec{B} = \sum_{ij=1}^{3} A_iB_j\vec{e}_i\vec{e}_j$

一般地， $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$　　因为　$\vec{e}_i\vec{e}_j \neq \vec{e}_j\vec{e}_i$　　（i=j除外）

（二）二阶张量表示为：

$$\overset{\leftrightarrow}{T}=\sum_{ij=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

单位张量表示为：

$$\overset{\leftrightarrow}{I}=\vec{e}_x\vec{e}_x+\vec{e}_y\vec{e}_y+\vec{e}_z\vec{e}_z$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

张量的迹：张量的对角元素之和

$$Tr\overset{\leftrightarrow}{T}=\sum_{i=1}^{3}T_{ii}=T_{11}+T_{22}+T_{33}$$

对称张量 $T_{ij}=T_{ji}$ （9个元素中只有6个独立）

反对称张量 $T_{ij}=-T_{ji}$ （9个元素中只有3个独立）

$T_{ii}=-T_{ii}$ $T_{ii}=0$ 对角元素为零

同阶张量的和与差

$$\overleftrightarrow{R}\pm\overleftrightarrow{T}=\sum_{ij=1}^{3}R_{ij}\pm T_{ij}$$

定理：任何张量均可唯一地分解为对称张量和反对称张量之和

$$T_{ij}=S_{ij}+A_{ij}$$

因为

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(T_{ij}+T_{ji}\right)$$ 对称

$$A_{ij}=\frac{1}{2}\left(T_{ij}-T_{ji}\right)$$ 反对称

（三）张量与矢量的点乘——降阶为矢量

矢量 $\vec{A}$ 与张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的左点乘

$$\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}=\left(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3\right)\cdot\sum_{ij=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j=\sum_{k=1}^{3}A_k\vec{e}_k\cdot\sum_{ij=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

$$=\sum_{kij=1}^{3}A_kT_{ij}\left(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i\vec{e}_j\right)=\sum_{kij=1}^{3}A_kT_{ij}\left(\delta_{ki}\vec{e}_j\right)=\sum_{ij=1}^{3}A_iT_{ij}\vec{e}_j$$

矢量

$$=\left(A_1T_{11}+A_2T_{21}+A_3T_{31}\right)\vec{e}_1+\left(A_1T_{12}+A_2T_{22}+A_3T_{32}\right)\vec{e}_2$$

$$+\left(A_1T_{13}+A_2T_{23}+A_3T_{33}\right)\vec{e}_3$$

矢量 $\vec{A}$ 与张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的右点乘

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}=\sum_{ij=1}^{3}A_jT_{ij}\vec{e}_i$$

一般地， $\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}\neq\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}$ 　　除非 $\overleftrightarrow{T}$ 是单位张量或对称张量

单位张量 $\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{I}=\vec{A}$

（四）并矢量（张量）的双点乘——点乘两次，降两阶变为标量

规定： $\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D}=\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)$

$$\overleftrightarrow{H}\cdot\overleftrightarrow{T}=\sum_{ij=1}^{3}H_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j:\sum_{kl=1}^{3}T_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l=\sum_{ijkl=1}^{3}H_{ij}T_{kl}\left(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j\right)\left(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_l\right)$$

$$=\sum_{ijkl=1}^{3}H_{ij}T_{kl}\delta_{jk}\delta_{il}=\sum_{ij=1}^{3}H_{ij}T_{ji}$$

标量