珠海校区2014学年度第二学期13级《线性代数》期中考题C卷

专业 城乡规划 姓名 任洁 学号 13302015 评分 93

《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者，不授予学士学位。"

试卷共2大页,满分为100分。

一、 填空题:(每小题3分，共30分)

1. 排列31452的逆序数是 4

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$ -5

3. 设3阶行列式 $|a_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{32} 的代数余子式 $A_{32} =$ -6

4. 设 $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \lambda & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 有唯一解，则参数 λ 的取值范围为 $\{\lambda \mid \lambda \neq -\frac{8}{5}\}$

5. 设 A 为3阶矩阵且 $|A| = a \neq 0$，则 $|(2A)^{-1}| =$ $\frac{1}{8a}$，$|A^*| =$ a^2

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 的秩 $R(A) =$ 3

7. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_1^2 \\ x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_1^3 \end{vmatrix} =$ $(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_4-x_3)(x_1-x_4)$

8. 设 A, B, C 为 n 阶可逆方阵，则 $(ABC)^{-1} =$ $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

9. 设矩阵 A, B, D, X 全为 n 阶方阵，且 A, B 可逆，$AXB = D$，则 $X =$ $A^{-1}DB^{-1}$

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ×

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -20$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & -20 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3

2

二、 计算题：(7题，共70分；注：要写出必要的计算过程)

1 (8分)计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&2\end{vmatrix}$

3

解: $D_4 \xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&2\\2&3&-1&-1\\0&1&1&-1\end{vmatrix} \xlongequal[c_1-3c_4]{r_2+r_4} \begin{vmatrix}-8&1&2&3\\0&0&0&1\\5&3&-1&-1\\3&1&1&-1\end{vmatrix} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix}-8&1&2\\5&3&-1\\3&1&1\end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_2-3r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix}\overset{-11}{\cancel{-5}}&0&1\\8&0&-4\\-4&1&1\end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}\overset{-11}{\cancel{-5}}&1\\8&-4\end{vmatrix} = \cancel{28}$ -36

2. (8分)求解矩阵方程：$X\begin{pmatrix}2&5\\3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$

解: 令 $A=\begin{pmatrix}2&5\\3&8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$ 则 $X=BA^{-1}$

$|A|=1$，故 A 可逆，$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-5\\-3&2\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}8&-5\\-3&2\end{pmatrix}$

故 $X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-5\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50&-32\\13&-8\\8&-5\end{pmatrix}$

3. (8分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&2&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}

解:

$(A,E)=\begin{pmatrix}1&4&-2&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\1&3&-1&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1&4&-2&1&0&0\\0&-6&5&-2&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1+4r_3} \begin{pmatrix}1&0&2&-3&0&4\\0&-1&0&3&1&-5\\0&-1&1&-1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1-2r_3\\ r_2\times(-1)}]{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1&0&0&5&2&-8\\0&1&0&-3&-1&5\\0&0&1&-4&-1&6\end{pmatrix}$ X

可知 $A\sim E$，故 A 可逆，

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&2&-8\\-3&-1&5\\-4&-1&6\end{pmatrix}$

4. (10分)求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & -4\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 7 & -2 & 5 & -9\\ -1 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的秩,并计算一个最高阶非零子式.

解: $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & -4\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 7 & -2 & 5 & -9\\ -1 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-3r_1\\ r_3-7r_1\\ r_4+r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_4\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+4r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 故 $R(A)=3$

取3阶子式 $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{vmatrix} \overset{c_1-c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 1\end{vmatrix} = -2\neq 0$

故其中一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{vmatrix}$

5. (12分)求解齐次线性方程组: $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1-6x_2-x_3-3x_4=0,\\ 4x_1-8x_2+x_3-4x_4=0\end{cases}$

解: $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 3 & -6 & -1 & -3\\ 4 & -8 & 1 & -4\end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_2\div(-4)} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} C_1 + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} C_2$

6. (12分)求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3 &= 5 \\ x_1-2x_2+4x_3 &= -1 \\ 3x_1+8x_2-2x_3 &= 11 \\ 4x_1-x_2+9x_3 &= 3 \end{cases}$

$$(A,b)=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & -2 & 11 \\ 4 & -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 14 & -14 & 14 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_4-r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_2\div 7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故方程的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} C + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C\in\mathbb{R}$

7. (12分)设$AP=PB$, 其中$P=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求$f(A)=A^8(A^2-A-2E)$.

解, 因$AP=PB$，则$APP^{-1}=PBP^{-1}$，即$A=PBP^{-1}$

故$f(A)=Pf(B)P^{-1}$

$f(1)=-2$ $f(2)=0$ 故$f(B)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|P|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5$，故$P$可逆

$P^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

故$f(A)=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$