

# 《通信原理》

(15 奈奎斯特1 匹配滤波器)

蔡志岗

光学与光学工程系

中山大学理工学院

[lasers@netease.com](mailto:lasers@netease.com)

**13316105077**

光信息实验室: **84110909**

中大光信息

# 第五章：数字信号的基带传输

## 5.1 引言

## 5.2 数字基带信号的码型和波形

## 5.3 数字基带信号的功率谱密度

## 5.4 数字基带信号的传输与码间串扰

## 5.5 码间串扰基带传输系统的抗噪

## 声性能分析

## 5.6 最佳基带传输系统

## 5.7 眼图

## 5.8 改善数字基带系统性能的措施

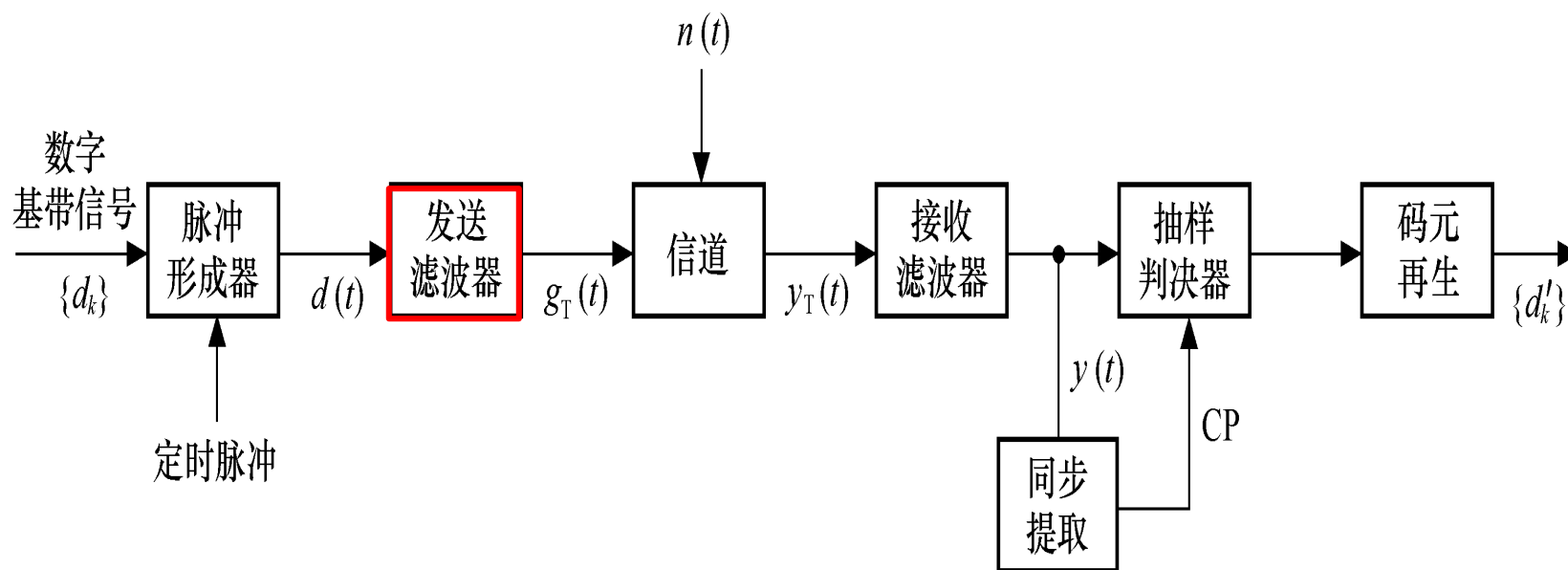
- 时域均衡
- 部分响应波形

## 5.9 位同步

## 5.2 数字基带信号的码型和波形

脉冲形成器

发送滤波器



## 5.2.2 基带波形的形成

在选择合适的码型之后，尚需考虑用什么形状的波形来表示所选择的码型。上面介绍的各种常用码型都是以矩形脉冲为基础的，我们知道矩形脉冲由于上升和下降是突变的，其低频分量和高频成分比较丰富，占用频带也比较宽。

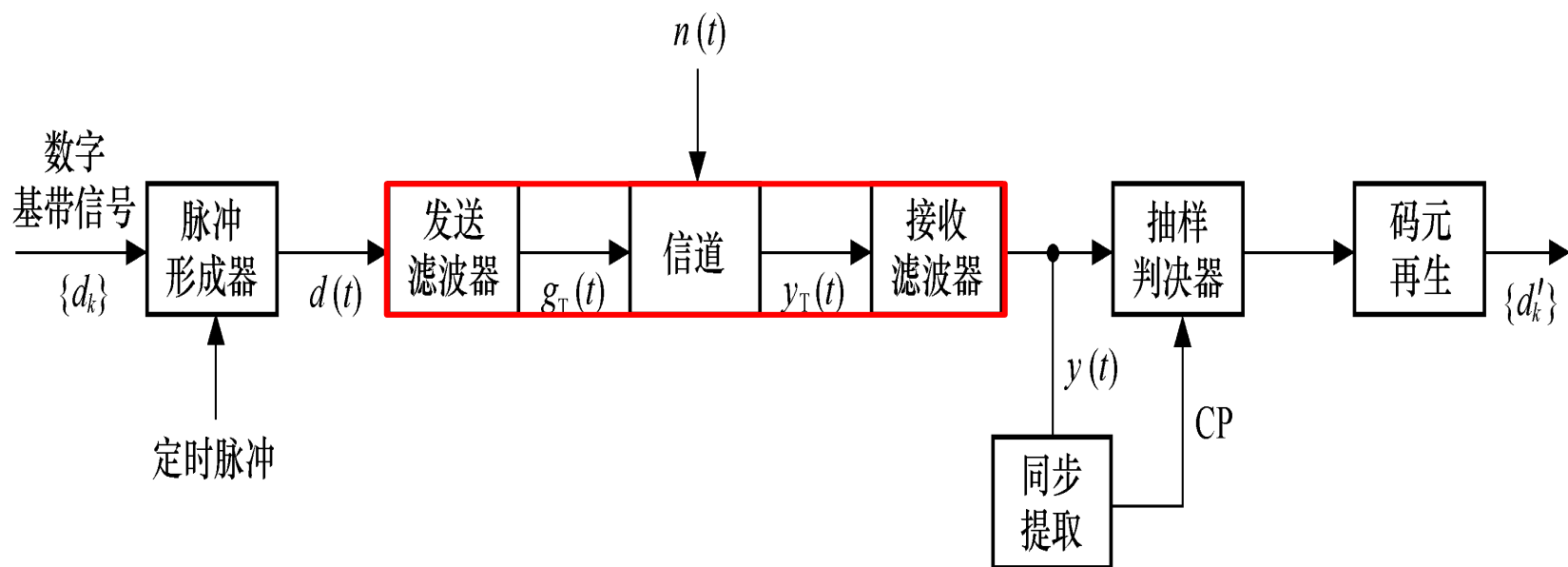
如果信道带宽有限，采用以矩形脉冲为基础的码型进行传输就不合适，而需要采用更适合于信道传输的波形，

譬如采用变化比较平滑的以升余弦脉冲为基础的脉冲波形。这样就有一个如何由矩形脉冲形成所需要的传输波形的问题。

本章后面几节将介绍的奈奎斯特准则的思想是将发送滤波器、信道、接收滤波器三者集中为一总的基带传输系统，进而对其基带传输系统的特性和接收响应的波形提出严格的要求，目的是消除在抽样判决时出现的码间干扰。

# 变化比较平滑的脉冲波形

## 发送滤波器+信道+接收滤波器



## 5.4 数字基带信号的传输与码间串扰

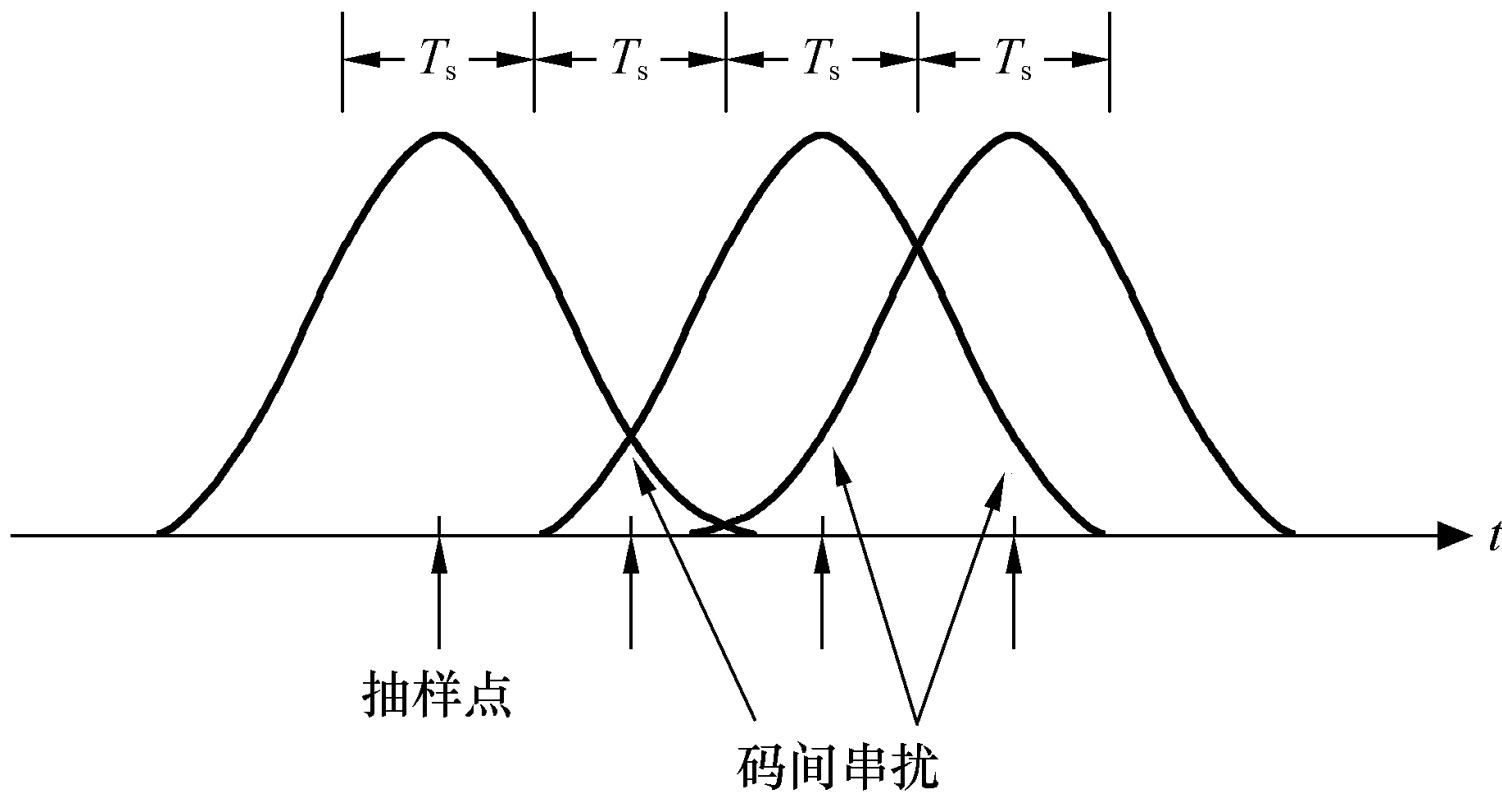
5.1节定性介绍了基带传输系统的工作原理，初步了解**码间串扰**和**噪声**是引起误码的因素。

本节我们进一步分析数字基带信号通过基带传输系统时的传输性能。



## 5.4.1 码间串扰

数字基带信号通过基带传输系统时，由于系统（主要是信道）传输特性不理想，或者由于信道中加性噪声的影响，使收端**脉冲展宽，延伸到邻近码元**中去，从而造成对邻近码元的干扰，我们将这种现象称为**码间串扰**。如图5-9所示。



**图5-9 基带传输中的码间串扰**

## 5.4.2 码间串扰的数学分析

数字基带信号的传输模型如图5-10所示。

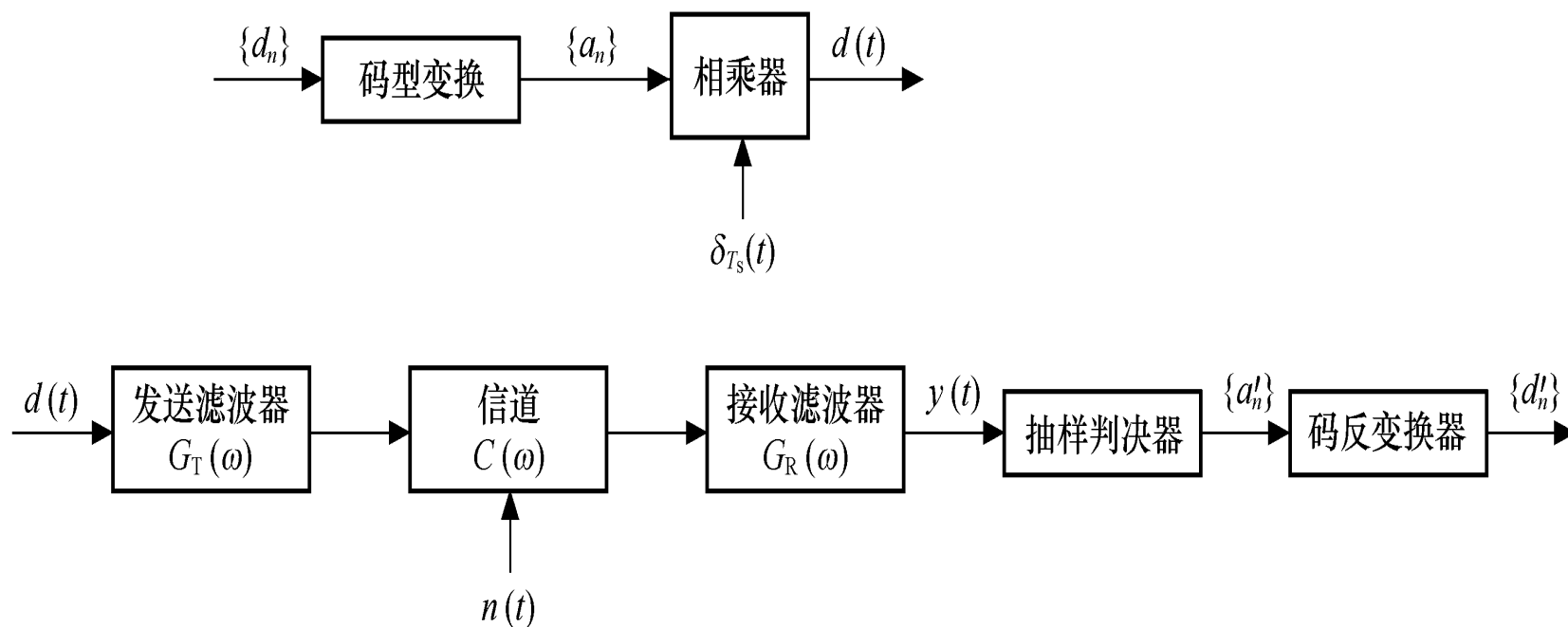


图5-10 基带传输系统模型

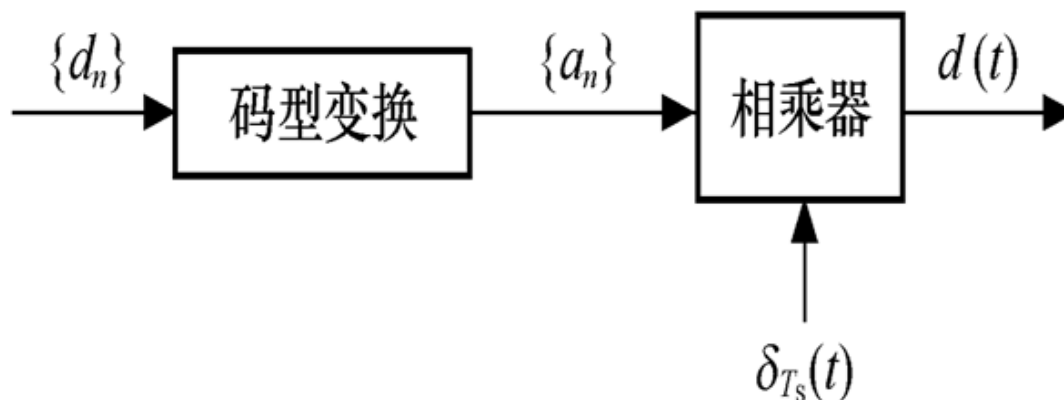
图中，输入信号  $\{d_n\}$  一般认为是**单极性**二进制矩形脉冲序列；  $\{d_n\}$  经过码型变换以后一般变换为**双极性**的码型（归零或不归零），也可能变换为**AMI 码**和**HDB<sub>3</sub>码**，但AMI 码和HDB<sub>3</sub>码与双极性码的区别在于多了一个零电平，零电平对码间串扰没有影响，如果不考虑零电平，只从研究传输性能来说，研究了**双极性码**，不难得出AMI和HDB<sub>3</sub>码的结果。

因此，一般都认为码型变换的输出为**双极性码**  $\{a_n\}$ ，其中

$$a_n = \begin{cases} a & \text{如果第}n\text{个码元是1码} \\ -a & \text{如果第}n\text{个码元是0码} \end{cases}$$

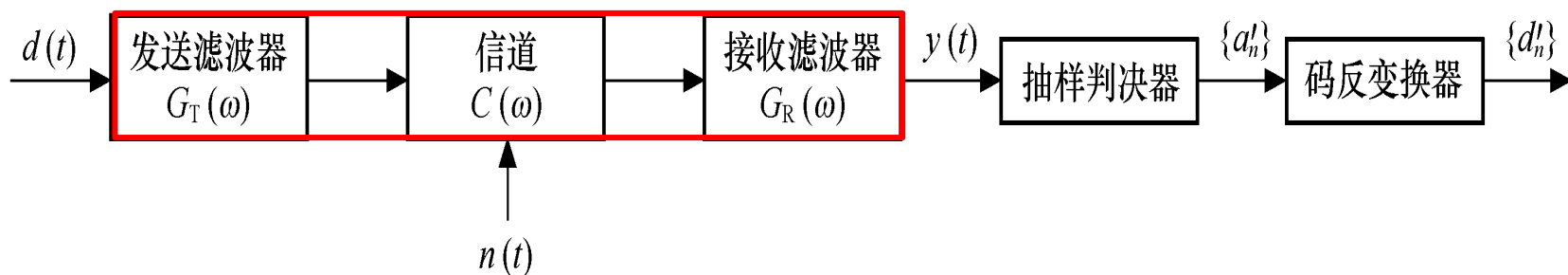
在波形形成时，通常先对  $\{a_n\}$  进行理想抽样，变成二进制冲激脉冲序列  $d(t)$ ，然后送入发送滤波器以形成所需的波形。即

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s) \quad (5.14)$$



# 基带传输系统模型

发送滤波器、信道、接收滤波器，一起来考虑：



设发送滤波器传输函数为 $G_T(\omega)$ ，信道的传输函数为 $C(\omega)$ ，接收滤波器的传输函数为 $G_R(\omega)$ ，则图5-10所示的基带传输系统的**总传输特性**为：

$$H(\omega) = G_T(\omega) C(\omega) G_R(\omega) \quad (5.15)$$

其对应的**单位冲激响应**为：

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.16)$$



则在 $d(t)$ 的作用下，接收滤波器输出信号 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = d(t) * h(t) + n_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT_s) + n_R(t) \quad (5.17)$$

式中， $n_R(t)$ 是加性噪声 $n(t)$ 经过接收滤波器后输出的窄带噪声。

**抽样判决器对 $y(t)$ 进行抽样判决。**

**设对第 $k$ 个码元进行抽样判决，抽样判决时刻应在收到第 $k$ 个码元的最大值时刻，设此时刻为 $kT_s+t_0$ （ $t_0$ 是信道和接收滤波器所造成的延迟），把 $t=kT_s+t_0$ 代入式（5.17）得**

$$\begin{aligned} y(kT_s + t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) + n_R(kT_s + t_0) \quad (5.18) \\ &= a_k h(t_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) + n_R(kT_s + t_0) \end{aligned}$$

上式中，右边第一项是第 $k$ 个码元本身产生的所需抽样值；第二项表示除第 $k$ 个码元以外的其他码元产生的不需要的串扰值，称为码间串扰。通常与第 $k$ 个码元越近的码元对它产生的串扰越大，反之，串扰小；第三项是第 $k$ 个码元抽样判决时刻噪声的瞬时值，它是一个随机变量，也要影响第 $k$ 个码元的正确判决。

从上面分析可见，数字基带信号在传输过程中是会产生**码间串扰**的。

码间串扰对基带传输的影响是：易引起判决电路的误操作，造成**误码**。所以我们要研究数字基带系统如何消除码间串扰。

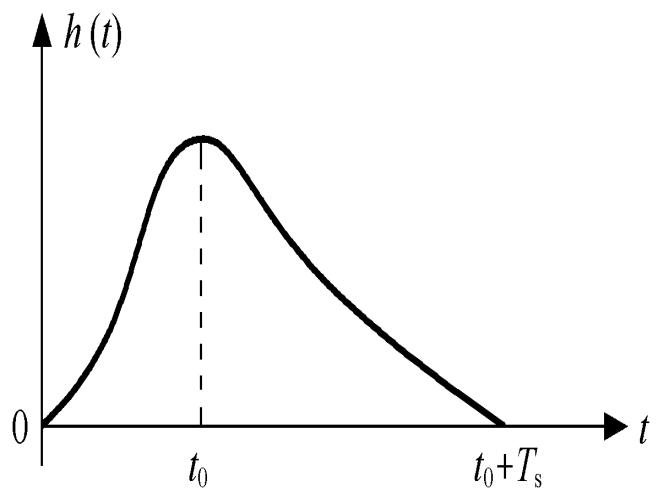
## 5.4.3 无码间串扰的基带传输特性

由式 (5.18) 可知, 若想消除码间串扰,

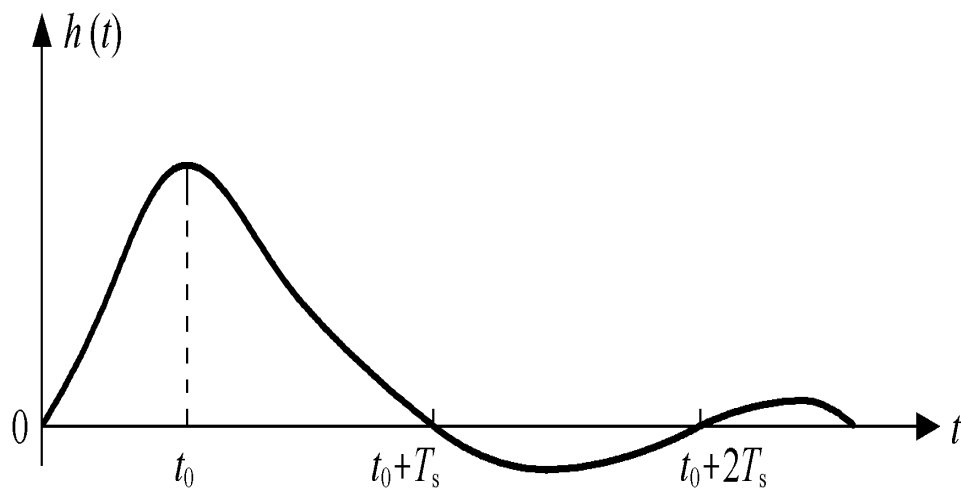
应有

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) = 0 \quad (5.19)$$

由于 $a_n$ 是随机的, 要想通过各项相互抵消使码间串扰为0是不行的, 这就需要对 $h(t)$ 的波形提出要求, **如果相邻码元的前一个码元的波形到达后一个码元抽样判决时刻时已经衰减到0**, 如图5-11 (a) 所示, 则这样的波形就能满足要求。



(a)



(b)

图5-11 消除码间串扰的原理

但这样的波形不易实现，因为实际中的 $h(t)$ 波形有很长的“拖尾”，也正是由于每个码元“拖尾”造成对相邻码元的串扰，但只要让它在 $t_0+T_s$ ， $t_0+2T_s$ 等后面码元抽样判决时刻上正好为0，就能消除码间串扰，如图5-11（b）所示。这就是消除码间串扰的基本思想。

由 $h(t)$ 与 $H(\omega)$ 的关系可知，如何形成合适的波形，实际上是如何设计特性的问题。下面，我们在不考虑噪声的条件下，研究如何设计**基带传输特性 $H(\omega)$** ，以形成在抽样时刻上无码间串扰的冲激响应波形 $h(t)$ 。



根据上面的分析，在假设信道和接收滤波器所造成的延迟 $t_0=0$ 时，无码间串扰的基带系统冲激响应满足下式：

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1(\text{或常数}), & k = 0 \\ 0, & k \text{为其它整数} \end{cases} \quad (5.20)$$

也就是说， $h(t)$ 的值除 $t=0$ 时不为零外，在其他所有抽样点均为零。

下面我们来推导符合以上条件的 $H(\omega)$ ：

因为

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad (5.21)$$

现在将上式的积分区域用角频率间隔 $2\pi/T_s$ 分割，可得

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{(2i-1)\pi/T_s}^{(2i+1)\pi/T_s} H(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad (5.22)$$

作变量代换：令  $\omega' = \omega - 2\pi i/T_s$ ，则有  
 $d\omega' = d\omega$ ，于是

$$\begin{aligned}
 h(kT_s) &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega' + \frac{2i\pi}{T_s}) e^{j\omega'kT_s} e^{j2\pi ik} d\omega' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega' + \frac{2i\pi}{T_s}) e^{j\omega'kT_s} d\omega' \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

当**上式之和一致收敛**时，求和与积分的次序可以互换，于是有

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \sum_i H(\omega + \frac{2i\pi}{T_s}) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \quad (5.24)$$

这里， 我们已把  $\omega'$  重新记为  $\omega$ 。

式 (5. 24) 中  $\sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$

的物理意义是：把 $H(\omega)$ 的分割各段平移到 $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$ 的区间对应叠加求和，简称为“切段叠加”。

令

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

(5. 24)

则 $H_{eq}(\omega)$ 就是 $H(\omega)$ 的“切段叠加”，称 $H_{eq}(\omega)$ 为**等效传输函数**。将其代入式 (5.24) 可得

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H_{eq}(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega \quad (5.26)$$

将式 (5.20) 代入上式，便可得到**无码间串扰时，基带传输特性应满足的频域条件**，

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1(\text{或常数}), & k = 0 \\ 0, & k \text{为其它整数} \end{cases}$$

$$h(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H_{eq}(\omega) e^{j\omega kT_s} d\omega = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} \sum_i H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) = T_s (\text{或常数}) & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

(5.27)

式 (5.27) 称为**奈奎斯特第一准则**。它为我们确定某基带系统是否存在码间串扰提供了理论依据。

$H_{eq}(\omega)$ 的物理含义如图5-12所示，从频域看，只要将该系统的传输特性 $H(\omega)$ 按 $2\pi/T_s$ 间隔分段，再搬回 $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$ 区间叠加，**叠加后若其幅度为常数，就说明此基带传输系统可以实现无码间串扰。**



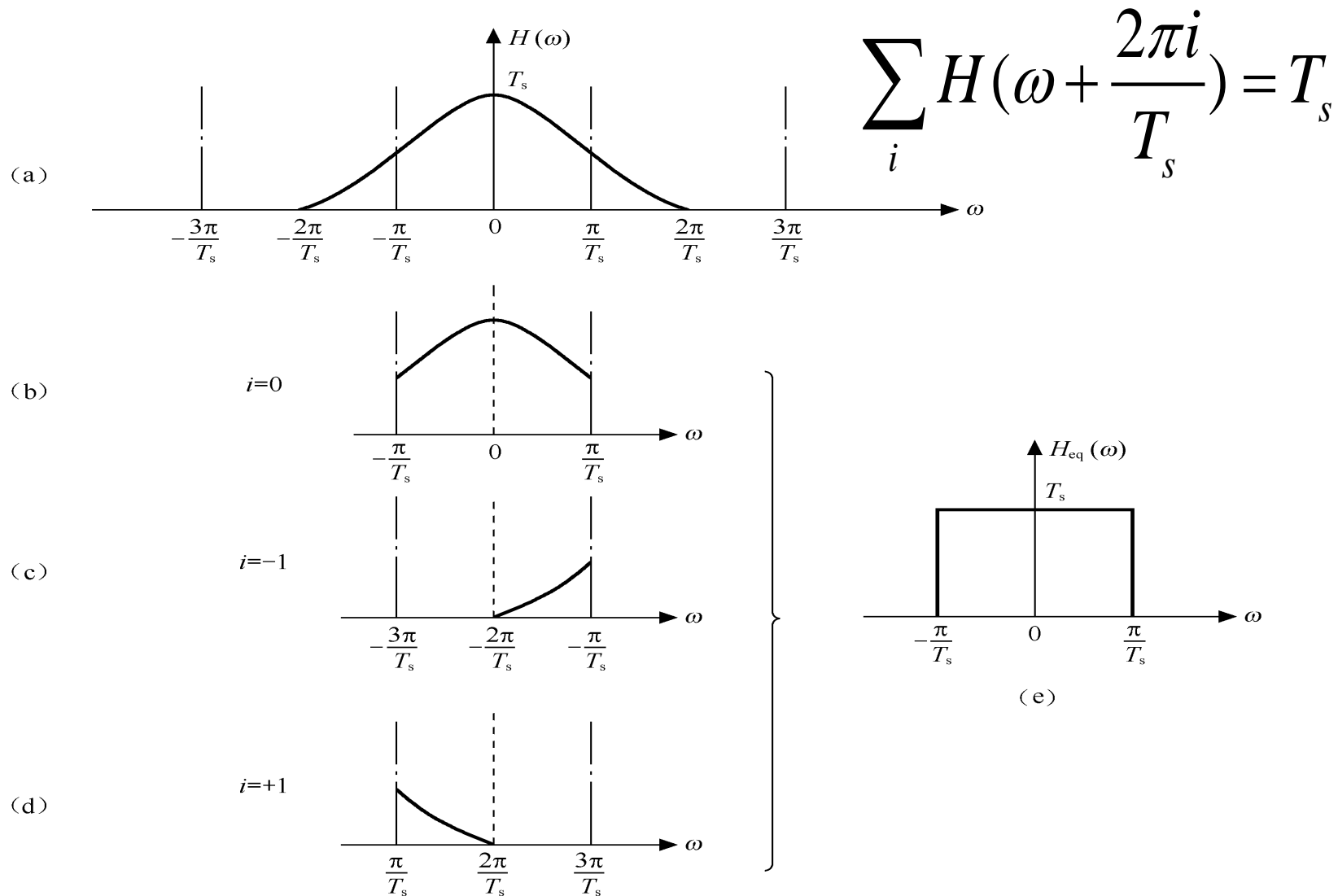


图5-12  $H_{eq}(\omega)$  的物理含义

中大光信息

$$\sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = T_s$$

显然，满足上式的系统并不是惟一的，**如何设计**或选择满足上式的是我们接下来要讨论的问题。

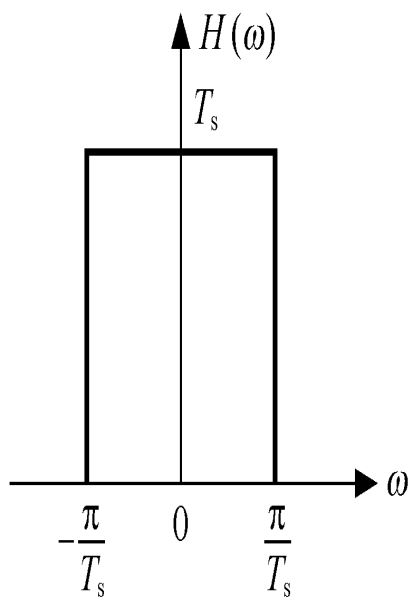
## 5.4.4 无码间串扰的理想低通滤波器

符合奈奎斯特第一准则的、最简单的传输特性是理想低通滤波器的传输特性，如图5-13所示，其传输函数为：

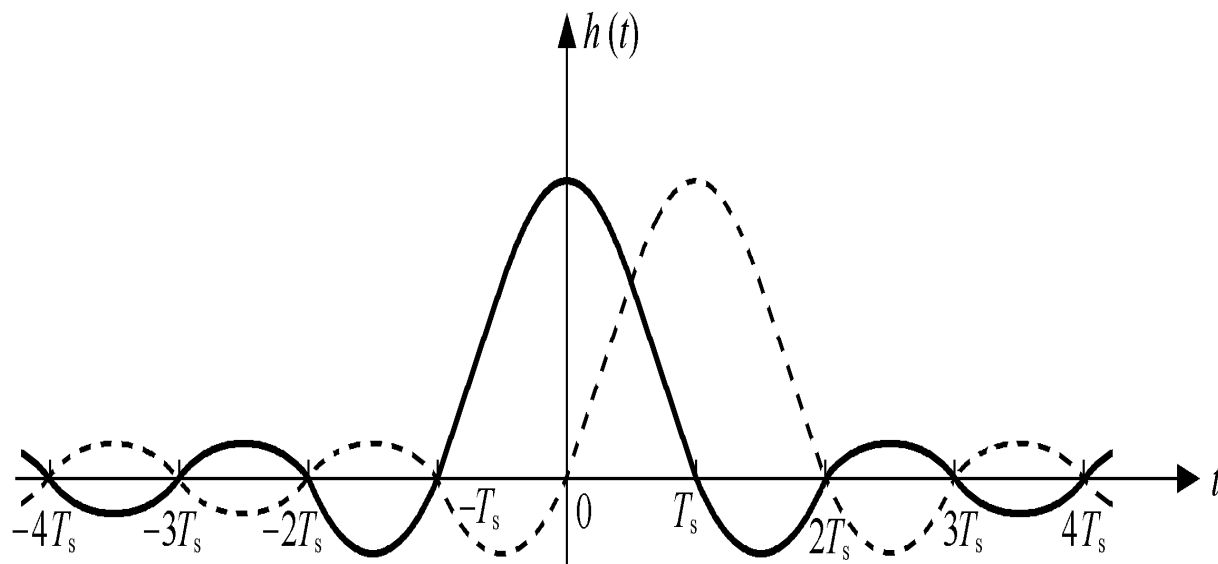
$$H(\omega) = \begin{cases} T_s (\text{或常数}) , & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases} \quad (5.28)$$

其对应的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T_s} t}{\frac{\pi}{T_s} t} = \text{Sa}(\pi t / T_s) \quad (5.29)$$



(a) 传输特性



(b) 冲激响应

$$|\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \rightarrow |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

图5-13 理想低通系统

由图5-13可见， $h(t)$ 在 $t=\pm kT_s$  ( $k \neq 0$ ) 时有周期性零点，当发送序列的间隔为 $T_s$ 时正好巧妙地利用了这些零点（见图 5 - 13 (b) 中虚线），实现了无码间串扰传输。

在图5-13所示的理想基带传输系统中，称截止频率

$$B_N = \frac{1}{2T_s} \quad (5.30)$$

为奈奎斯特带宽。

称  $T_s = 1/(2B_N)$  为系统传输无码间串扰的最小码元间隔，即奈奎斯特间隔。相应地，称  $R_B = 1/T_s = 2B_N$  为奈奎斯特速率，它是系统的最大码元传输速率

反过来说，输入序列若以  $1/T_s$  波特的速率进行传输时，所需的最小传输带宽为  $1/2T_s$  Hz。

下面再讨论频带利用率的问题。该理想基带系统的频带利用率  $\eta$  为：

$$\eta = R_B / B$$

$$\eta = R_B / B_N = 2 \text{Baud} / \text{Hz}$$

(5.30)

显然，理想低通传输函数的频带利用率为 **2Baud/Hz**。这是最大的频带利用率，因为如果系统用高于的码元速率传送信码时，将存在码间串扰。若降低传码率，则系统的频带利用率将相应降低。



从上面的讨论可知，理想低通传输特性的基带系统有最大的频带利用率。

但令人遗憾的是，理想低通系统在实际应用中存在两个问题：一是理想矩形特性的物理实现极为困难；二是理想的冲激响应 $h(t)$ 的“尾巴”很长，衰减很慢，当定时存在偏差时，可能出现严重的码间串扰。

下面，进一步讨论满足式（5.27）实用的、物理上可以实现的等效传输系统。

## 5.4.5 无码间串扰的滚降系统

考虑到理想冲激响应 $h(t)$ 的尾巴衰减慢的原因是系统的频率截止特性过于陡峭，这启发我们可以按图5-14所示的构造思想去设计 $H(\omega)$ 特性，只要图中 $Y(\omega)$ 的具有对 $B_N$ 呈奇对称的幅度特性，则 $H(\omega)$ 就能满足要求。这种设计也可看成是理想低通特性按奇对称条件进行“圆滑”的结果，上述的“圆滑”，通常被称为“滚降”。

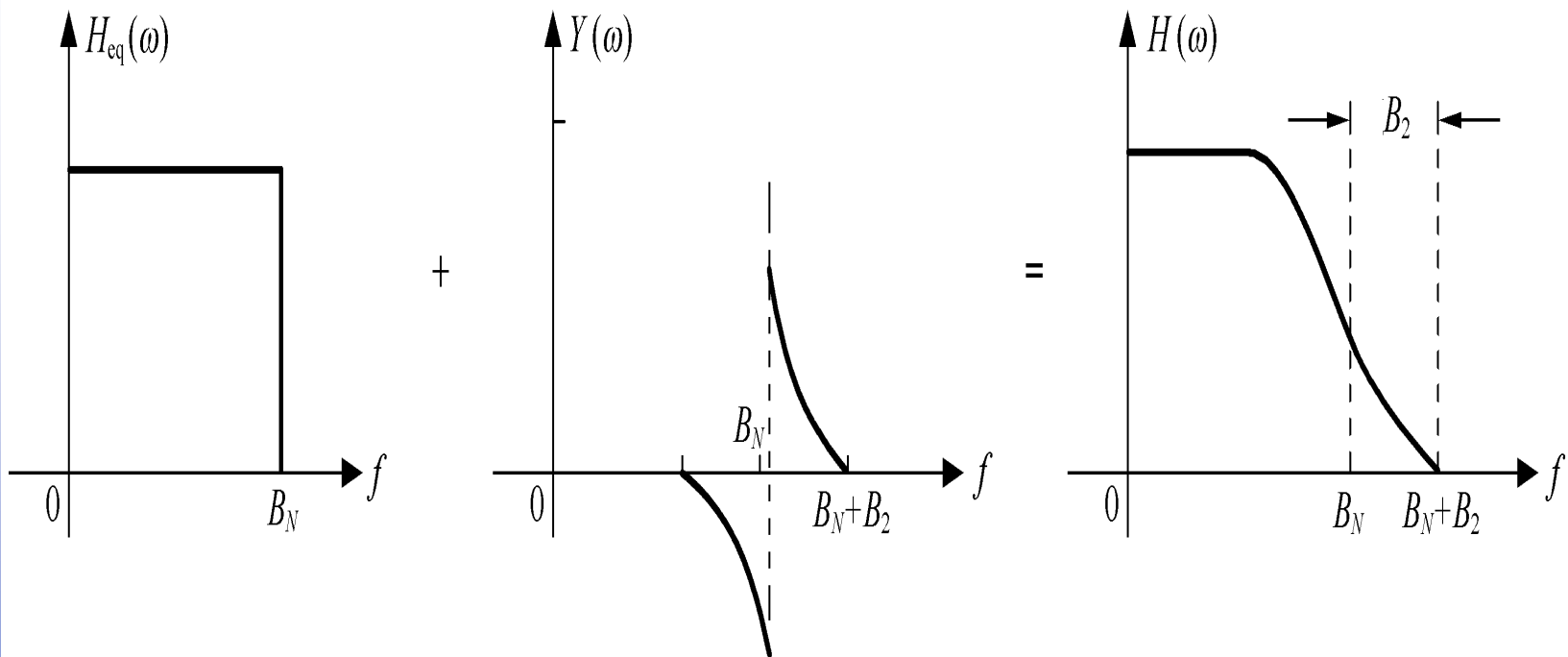


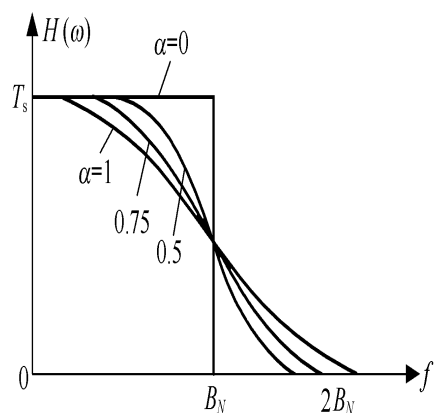
图5-14 滚降特性的构成

定义滚降系数为

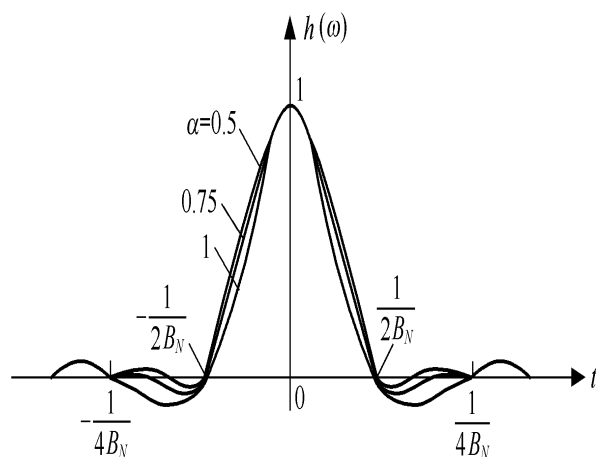
$$\alpha = \frac{B_2}{B_N} \quad (5.32)$$

其中 $B_N$ 是无滚降时的截止频率， $B_2$ 为滚降部分的截止频率。显然， $0 \leq \alpha \leq 1$

**不同的 $\alpha$ 有不同的滚降特性。** 图5-15画出了按余弦滚降的几种滚降特性和冲激响应。



(a) 不同  $\alpha$  的传输特性



(b) 不同  $\alpha$  的冲激响应

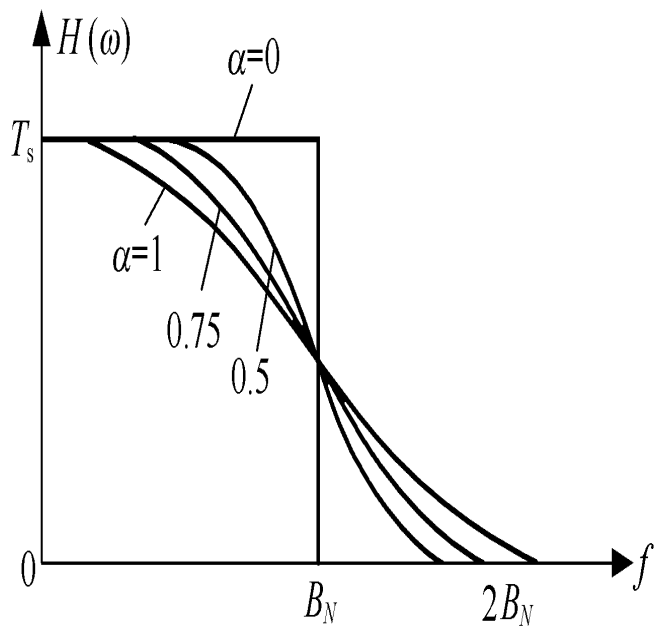
具有滚降系数  $\alpha$  的余弦滚降特性  $H(\omega)$  可表示成：

中大光信息

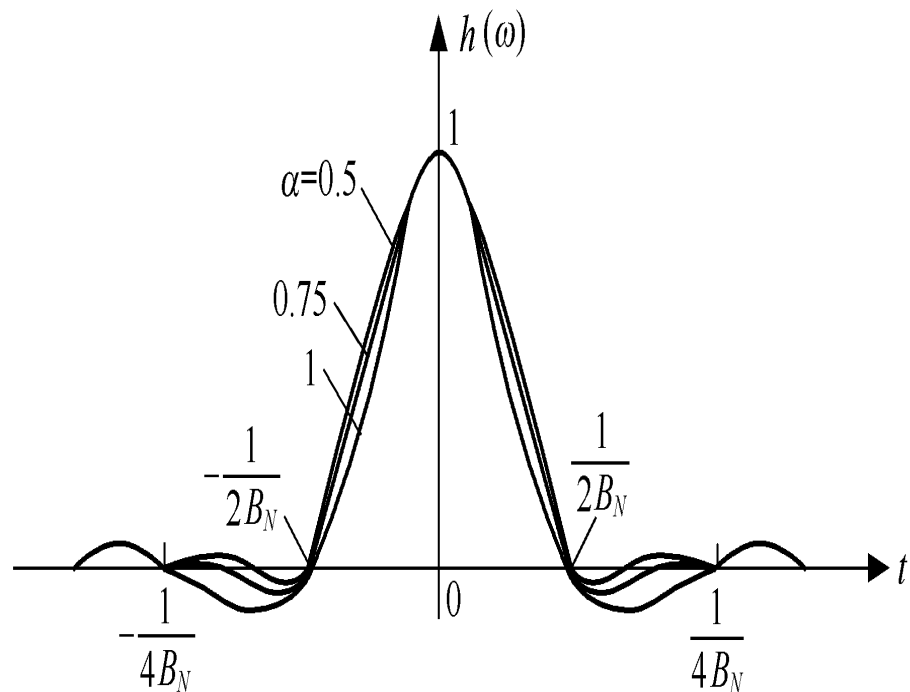
$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & , \quad 0 \leq |\omega| \leq \frac{(1-\alpha)\pi}{T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[ 1 + \sin \frac{T_s}{2\alpha} \left( \frac{\pi}{T_s} - \omega \right) \right] & , \quad \frac{(1-\alpha)\pi}{T_s} \leq |\omega| \leq \frac{(1+\alpha)\pi}{T_s} \\ 0 & , \quad |\omega| \geq \frac{(1+\alpha)\pi}{T_s} \end{cases} \quad (5.33)$$

而相应的冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s} \cdot \frac{\cos(\alpha \pi t / T_s)}{1 - (2\alpha t / T_s)^2} \quad (5.34)$$



(a) 不同  $\alpha$  的传输特性



(b) 不同  $\alpha$  的冲激响应

**图5-15 余弦滚降系统**

由图5-15可见， $\alpha=0$ 对应的图形正好是理想低通滤波器， $\alpha$ 越大抽样函数的拖尾振荡起伏越小、衰减越快。 $\alpha=1$ 时，是实际中常采用的升余弦频谱特性，它的波形最瘦，拖尾按速率 $t^{-3}$ 衰减，抑制码间串扰的效果最好，但与理想低通滤波器相比，它付出的代价是带宽增大了一倍。



# 升余弦频谱特性

此时系统的频带利用率为**1 Baud/Hz**，比理想低通滤波器的频带利用率降低了一倍

当  $\alpha=1$  时，  $H(\omega)$  可表示成

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} (1 + \cos \frac{\omega T_s}{2}), & |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_s} \\ 0, & |\omega| > \frac{2\pi}{T_s} \end{cases}$$

而 $h(t)$ 可表示为

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s} \cdot \frac{\cos(\pi t / T_s)}{1 - (2t / T_s)^2}$$

(5.36)

引入滚降系数  $\alpha$  后，系统的最高传码率不变，但是此时系统的带宽扩展为：

$$B = (1 + \alpha) B_N$$

$$R_B = 1/T_s$$

带宽  $B = (1 + \alpha)B_N$  (5. 37)

系统的**频带利用率**为

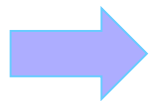
$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{(1 + \alpha)} \quad (Baud / Hz)$$

(5. 38)

余弦滚降特性的实现比理想低通容易得多，因此广泛应用于频带利用率不高，但允许定时系统和传输特性有较大偏差的场合。

$$B = (1 + \alpha) B_N$$

$$R_B = \frac{1}{T_S}$$



$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{(1 + \alpha)}$$

$$R_B = \frac{2}{(1 + \alpha)} B = \eta B = \frac{1}{T_S}$$

$$T_S = \frac{1}{\eta B}$$

$$\alpha = 0$$

$$T_S = \frac{1}{2B} \quad (B = B_N)$$

$$\alpha = 1$$

$$T_S = \frac{1}{B} \quad (B = 2B_N)$$

**[例5.4] 设某数字基带传输系统的传输特性 $H(\omega)$ 如图5-16所示。其中  $\alpha$  为某个常数 ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )。**

**(1) 试检验该系统能否实现无码间串扰传输？**

**(2) 试求该系统的最大码元传输速率为多少？这时的系统频带利用率为多大？**

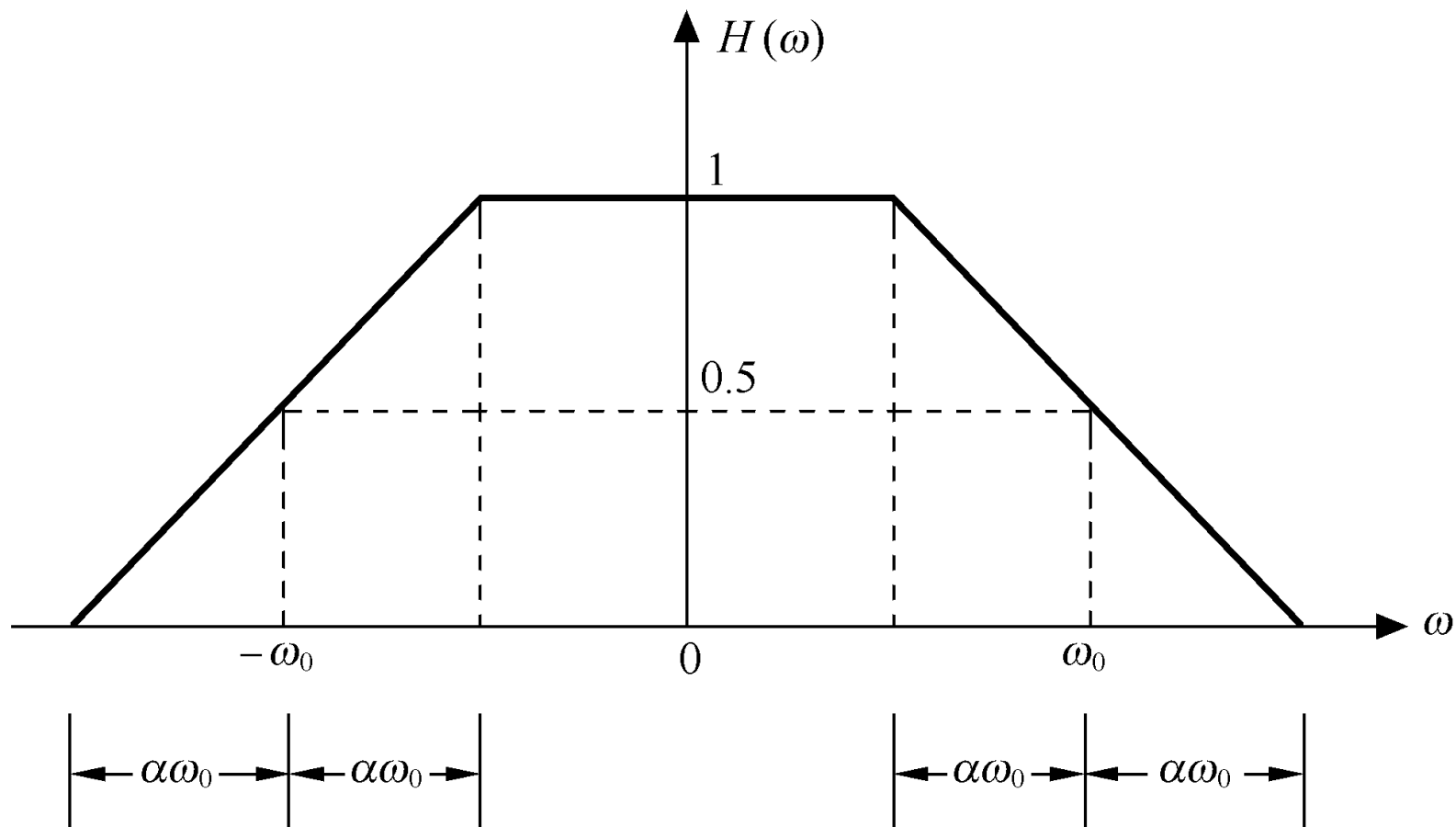


图5-16

**解：（1）由于该系统可构成等效矩形系统**

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

**所以该系统能够实现无码间串扰传输**

**（2）该系统的最大码元传输速率 $R_{\max}$ ，即满足 $H_{eq}(\omega)$ 的最大码元传输速率 $R_B$ ，容易得到：**

$$R_{\max} = 2B_N = 2 \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\pi} \quad (\text{Baud})$$

所以系统的频带利用率

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{1 + \alpha} \quad (\text{Baud} / \text{Hz})$$



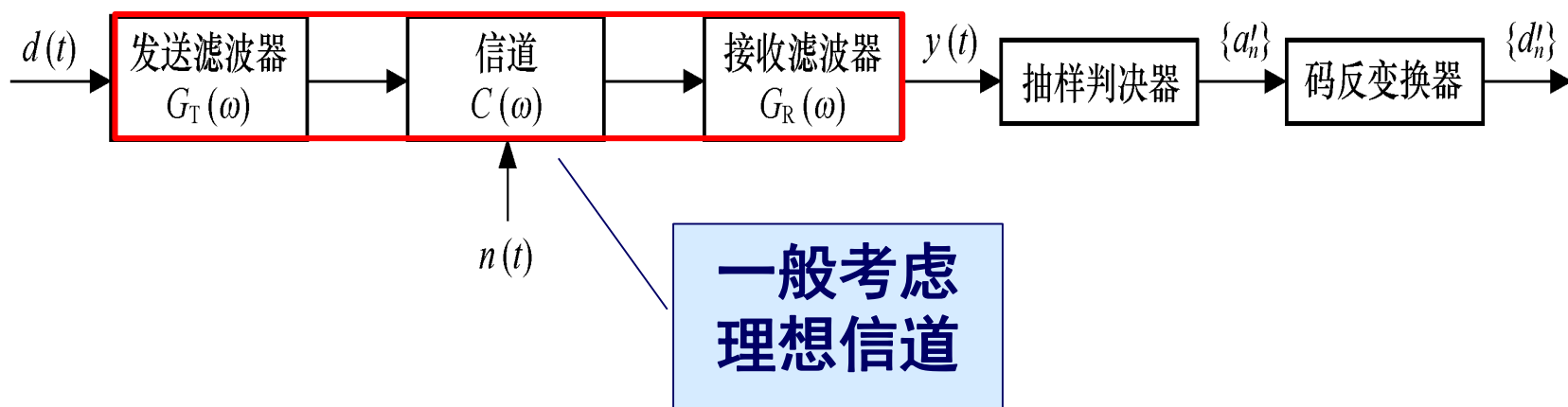
# 基带传输系统模型

发送滤波器、信道、接收滤波器，一并

来考虑：

最佳分配设计

$$G_R(\omega) = G_T(\omega) = \sqrt{H_{eq}(\omega)}$$



$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n h(kT_s + t_0 - nT_s) = 0$$

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1(\text{或常数}), & k = 0 \\ 0, & k \text{ 为其它整数} \end{cases}$$

**作业**

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

# 小复习

## 数字基带的码型与波形

- 波形——适合于信道的传输
- 码间串扰的问题
- 发送滤波器+信道+接收滤波器的总传输特性
  - 满足什么条件可以避免码间串扰?
  - 奈奎斯特第一准则
- 理想低通滤波器  $\eta = R_B / B_N = 2\text{Baud} / \text{Hz}$
- 滚降滤波器  $B = (1 + \alpha) B_N$

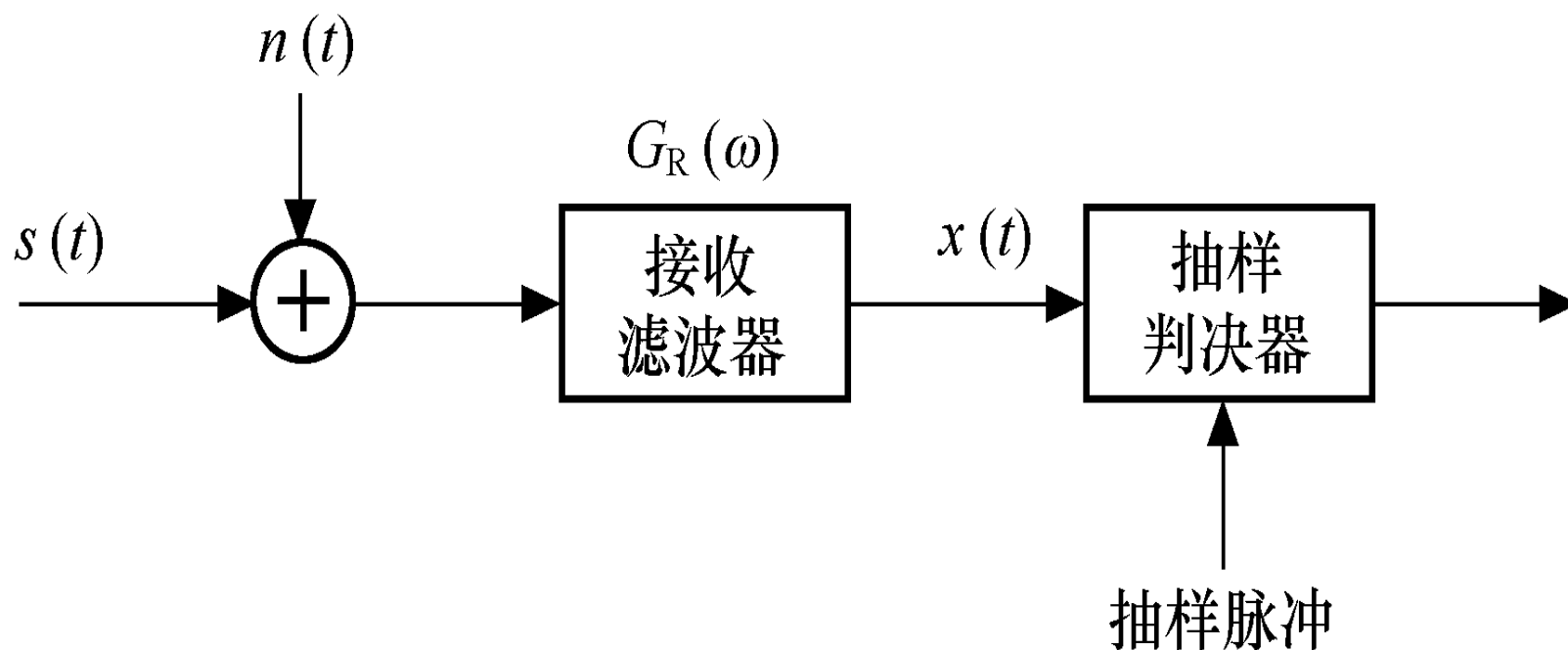
## 5.5 无码间串扰基带传输系统的抗噪声性能分析

通常用**误码率**来度量系统抗加性噪声的能力。误码是由**码间干扰**和**噪声**两方面引起的，如果同时计入码间串扰和噪声来计算误码率，将使计算非常复杂。为了简化起见，通常都是**在无码间串扰的条件下**计算由噪声引起的误码率。

$$x(t) = s(t) + n_R(t) \quad (5.39)$$

一般认为信道噪声只对接收端产生影响，则可建立抗噪声性能分析模型如图5-17所示。图中，设二进制接收波形为 $s(t)$ ，信道噪声是均值为零、双边功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声，它经过接收滤波器后变为高斯带限噪声 $n_R(t)$ ，则接收滤波器的输出是信号加噪声的合成波形，记为 $x(t)$ ，即

$$x(t) = s(t) + n_R(t)$$



**图5-17 抗噪声性能分析模型**

## 抽样判决

前面已经提到，发送端发出的数字基带信号是 $s(t)$ 经过信道和接收滤波器以后，在无码间串扰条件下，对“1”码抽样判决时刻信号有正的最大值，我们用 $A$ 表示；对“0”码抽样判决时刻信号有负的最大值（对双极性码），用 $-A$ 表示，或是为0值（对单极性码）。

由于我们只关心抽样时刻的值，因此我们把收到“1”码的信号在整个码元区间内用 $A$ 表示，“0”码的信号用 $-A$ （或者0）表示，也是可以的。

这样在性能分析时，双极性基带信号可近似表示为

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{发送“1”时} \\ -A & \text{发送“0”时} \end{cases} \quad (5.40)$$

同理，单极性基带信号可近似表示为

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{发送“1”时} \\ 0 & \text{发送“0”时} \end{cases} \quad (5.41)$$



## 一、传单极性基带信号时，接收端的误码率 $P_e$

设高斯带限噪声  $n_R(t)$  的均值为零，方差为  $\sigma_n^2$ ，则其一维概率分布密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5.42)$$

其中， 
$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(\omega)|^2 \frac{n_0}{2} d\omega$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

对传输的单极性基带信号，设它在抽样时刻的电平取值为+A或0（分别对应于信码“1”或“0”），则 $x(t)$ 在抽样时刻的取值为

$$x(kT_s) = \begin{cases} A + n_R(kT_s), & \text{发“1”码} \\ 0 + n_R(kT_s), & \text{发“0”码} \end{cases} \quad (5.43)$$

设判决电路的判决门限为 $V_d$ ，判决规则

$x(kT_s) > V_d$ ，判为“1”码

$x(kT_s) < V_d$ ，判为“0”码

实际中**噪声干扰**会使接收端出现两种**可能的错误**：发“1”码时，在抽样时刻噪声呈现一个大的负值与信号抵消使收端判为“0”码；

发“0”码时，在抽样时刻噪声幅度超过判决门限使收端判为“1”码。

下面我们来求这两种情况下码元**判错的概率**。

1、发“0”错判为“1”的条件概率 $P_{e0}$

发“0”码时， $x(t)=n_R(t)$ ，由于 $n_R(t)$ 是高斯过程，则 $x(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5.44)$$

此时，当 $x(t)$ 的抽样电平大于判决门限时 $V_d$ ，就会发生误码。

所以，发“0”错判为“1”的条件概率为：

$$P_{e0} = P(x > V_d) = \int_{V_d}^{\infty} f_0(x) dx = \int_{V_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right] dx$$

(5.45)

对应于图5-18中 $V_d$ 右边阴影部分的面积。

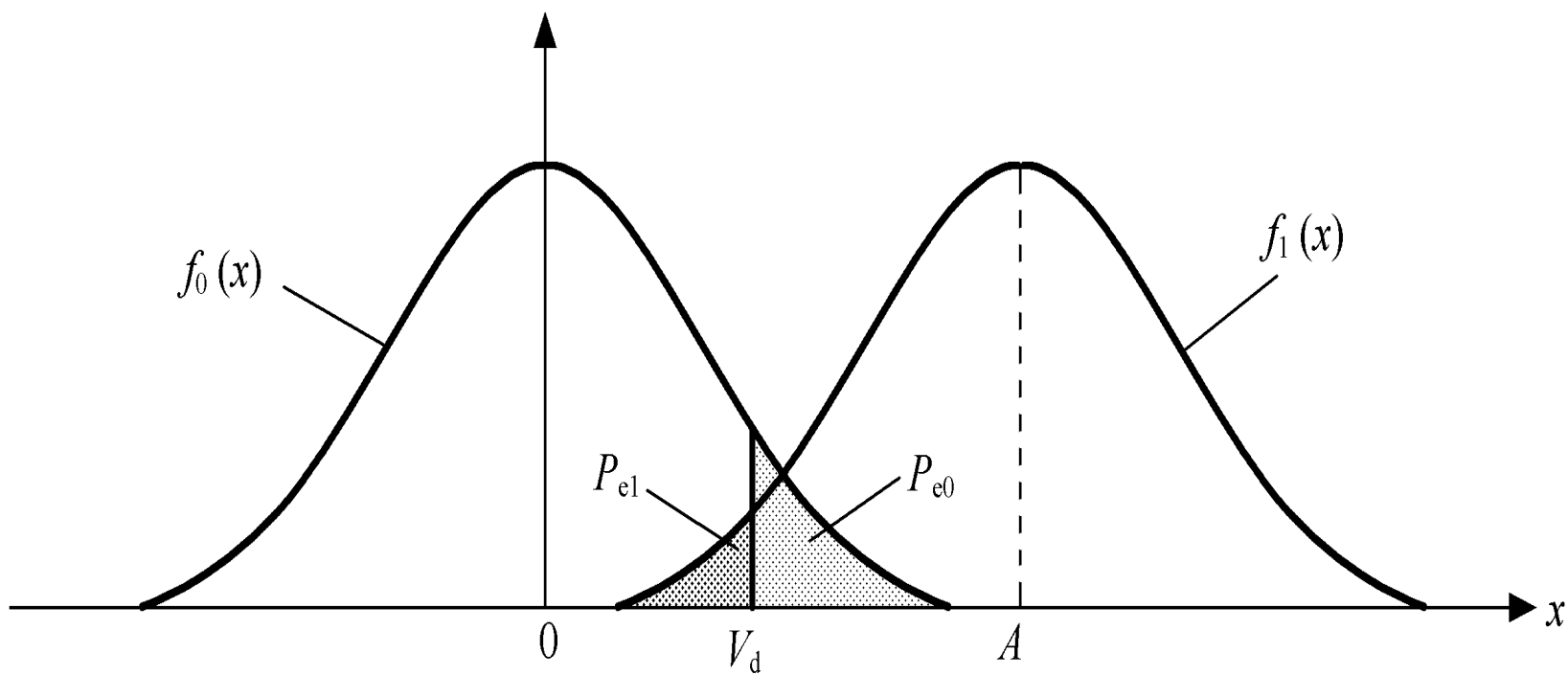


图5-18  $x(t)$  的概率密度分布曲线

## 2、发“1”错判为“0”的条件概率 $P_{e1}$

当发送“1”时， $x(t)=A+n_R(t)$ ，此时 $x(t)$ 的概率密度分布仍为高斯分布，但均值为 $A$ 。

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5.46)$$

此时，当 $x(t)$ 的抽样电平小于判决门限时 $V_d$ ，就会发生误码。

所以，发“1”错判为“0”的条件概率为：

$$P_{e1} = P(x < V_d) = \int_{-\infty}^{V_d} f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] dx$$

(5.47)

对应于图5-18中 $V_d$ 左边阴影部分的面积。



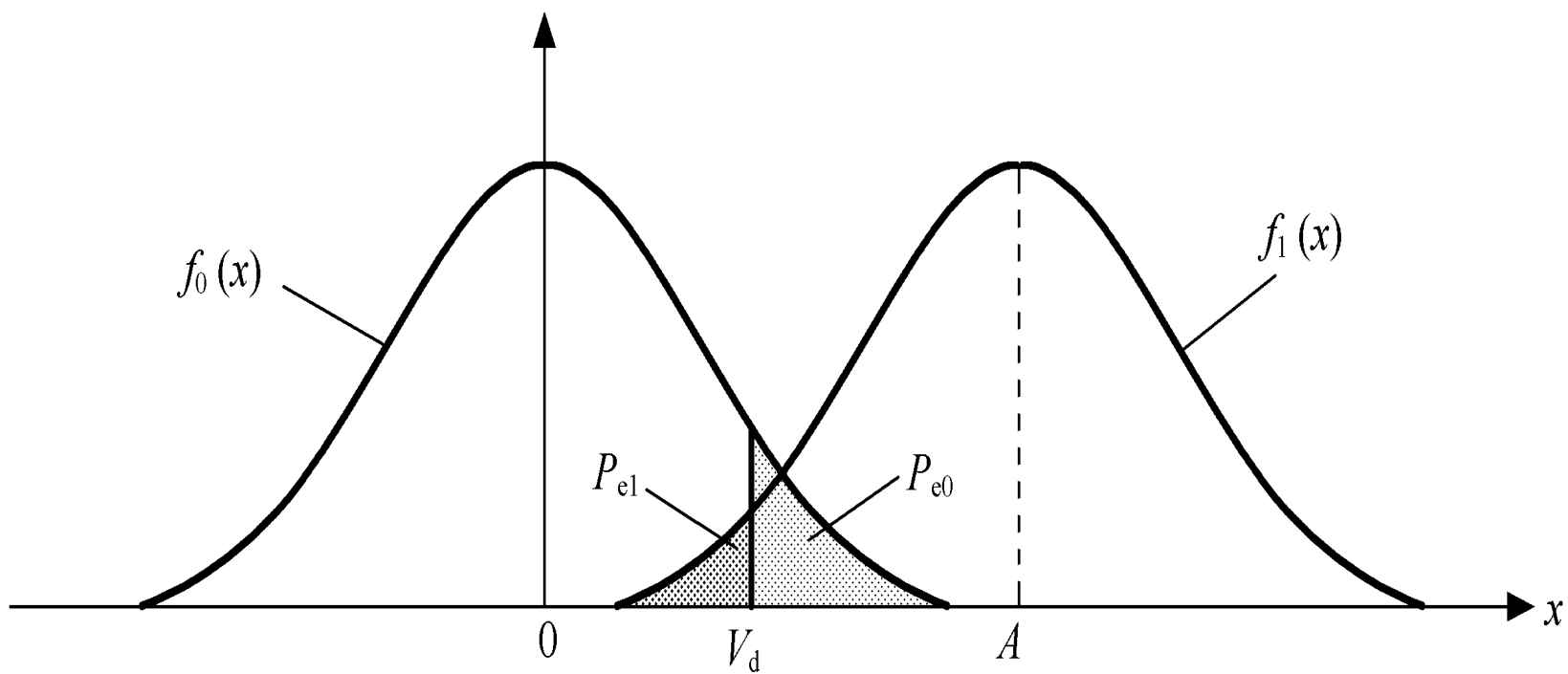


图5-18  $x(t)$  的概率密度分布曲线

### 3、传输系统总的**误码率** $P_e$

$$P_e = P(0)P_{e0} + P(1)P_{e1} \quad (5.48)$$

由式 (5.45)、式 (5.47) 和式 (5.48) 可以看出，基带传输系统的总误码率与判决门限电平有关。可以计算，

当  $P(0)=P(1)=1/2$  时，最佳判决门限为  $V_d=A/2$ 。

当发“1”和发“0”等概率时，且在最佳判决门限电平的条件下，基带传输系统的总误码率为：

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

下面我们讨论**误码率 $P_e$** 和**信噪比**之间的关系

由于信号平均功率 $S$ 与信号的波形和大小有关，前面我们已经提到，即使接收到的信号波形不是矩形脉冲，但由于我们只关心抽样判决时刻的值，因此一般我们都以矩形脉冲为基础的二进制码元来计算信号平均功率 $S$ 。

对单极性基带信号，在发“1”和发“0”等概率时，其信号的平均功率为  $S = A^2 / 2$ ，噪声功率为  $\sigma_n^2$ ，则其信噪比为：

$$r_{\text{单}} = \frac{A^2}{2} / \sigma_n^2 = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} = r \quad (5.50)$$

将式 (5.50) 代入式 (5.49) 可得

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right) \quad (5.51)$$

## 二、传双极性基带信号时，接收端的误码率 $P_e$ 。

对于双极性二进制基带信号，设它在抽样时刻的电平取值为 $+A$ 或 $-A$ （分别对应于信码“1”或“0”），当发“1”码和发“0”码等概率，并同时满足最佳判决门限电平 $V_d=0$ 的条件时，基带传输系统的总误码率为：

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.52}$$

对双极性基带信号，在发“1”和发“0”等概率时，其信号的平均功率为  $S = A^2$ ，噪声功率为  $\sigma_n^2$ ，则其信噪比为：

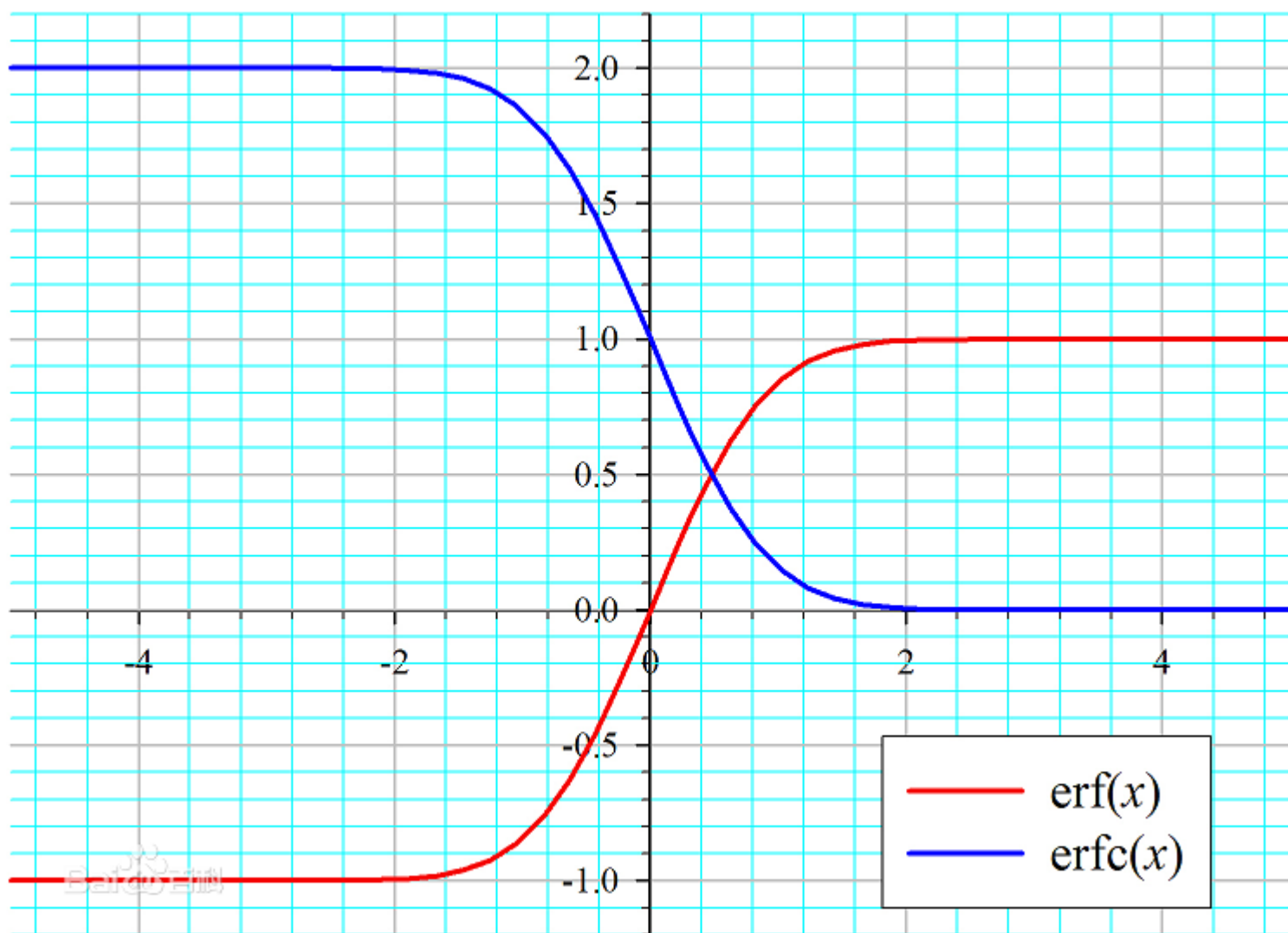
$$r_{\text{双}} = \frac{A^2}{\sigma_n^2} = 2r_{\text{单}} \quad (5.53)$$

将式 (5.53) 代入式 (5.52) 可得

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r_{\text{双}}/2}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r}) \quad (5.54)$$

其中,  $r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$  为信噪比。





比较式 (5.51) 和 (5.54) 可见：

第一，基带传输系统的误码率只与信噪比 $r$ 有关。

第二，在单极性与双极性基带信号抽样时刻的电平取值 $A$ 相等、噪声功率 $\sigma_n^2$ 相同的条件下，单极性基带系统的抗噪声性能不如双极性基带系统。

第三，在等概率条件下，单极性的最佳判决门限电平为 $A/2$ ，当信道特性发生变化时，信号幅度 $A$ 将随着变化，

故判决门限电平也随之改变，而不能保持最佳状态，从而导致误码率增大。

而双极性的最佳判决门限电平为0，与信号幅度无关，因而不随信道特性变化而改变，故能保持最佳状态。因此，数字基带系统多采用双极性信号进行传输。

## 小复习

$$P_{e,\text{单}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right)$$

$$P_{e,\text{双}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$

注：互补误差函数是自变量的递减函数

$$r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$$

## 5.6 最佳基带传输系统

在数字通信系统中，无论是数字基带传输还是数字频带传输，都存在着“最佳接收”的问题。**最佳接收理论**是以接收问题作为研究对象，研究从噪声中如何准确地提取有用信号。

显然，所谓“最佳”是个相对概念，是指在**相同噪声条件下以某一准则为尺度下的“最佳”**。不同的准则导出不同的最佳接收机，当然它们之间是有内在联系的。

在数字通信系统中，最常用的准则是**最大输出信噪比准则**，在这一准则下获得的最佳线性滤波器叫做**匹配滤波器（MF）**。

这种滤波器在数字通信理论、信号最佳接收理论以及雷达信号的检测理论等方面均具有重大意义。

本节介绍**匹配滤波器的基本原理**以及**利用匹配滤波器的最佳基带传输系统**。

## 5.6.1 匹配滤波器

前节的结论→**信噪比越大，误码率越小。**

因此，要想减小误码率必须设法提高信噪比。在接收机输入信噪比相同的情况下，若所设计的接收机输出的信噪比最大，则我们能够最佳地判断所出现的信号，从而可以得到**最小的误码率**，这就是**最大输出信噪比准则**。

为此，我们可在接收机内采用一种线性滤波器，当信号加噪声通过它时，使有用信号加强而同时使噪声衰减，在抽样时刻使输出信号的瞬时功率与噪声平均功率之比达到最大，这种线性滤波器称为**匹配滤波器**。下面讨论匹配滤波器的特性。

设接收滤波器的传输函数为 $H(\omega)$ ，滤波器输入信号与噪声的合成波为：

$$r(t) = s(t) + n(t)$$



$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (5.6-1)$$

式中， $s(t)$  为滤波器输入基带数字信号，其频谱函数为  $S(\omega)$ 。 $n(t)$  为高斯白噪声。其双边功率谱密度为  $n_0/2$ 。

由于该滤波器是线性滤波器，满足线性叠加原理，因此滤波器输出也由输出信号和输出噪声两部分组成，即

$$y(t) = s_0(t) + n_0(t) \quad (5.6-2)$$

这里， $s_0(t)$  和  $n_0(t)$  分别为  $s(t)$  和  $n(t)$  通过线性滤波器后的输出。

$$s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.6-3)$$

滤波器输出噪声的平均功率为

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_0}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_i}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \quad (5.6-4) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{n_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

因此，在抽样时刻 $t_0$ ，线性滤波器输出信号的瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_0 = \frac{|s_0(t_0)|^2}{N_0} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\frac{n_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

(5.6-5)

显然，寻求最大 $r_0$ 的线性滤波器，在数学上就归结为求式（5.59）中 $r_0$ 达到最大值的。这个问题可以用变分法或用许瓦尔兹(Schwartz)不等式加以解决。

这里用许瓦尔兹不等式的方法来求解。该不等式可以表述为：

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y(\omega)d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$$

(5.6-6)

当且仅当

$$X(\omega) = KY^*(\omega) \quad (5.6-7)$$

时式 (5.60) 中**等式**才能成立。其中K为常数。

将许瓦尔兹不等式 (5.6-7) 用于式 (5.6-6), 并令:

$$X(\omega) = H(\omega) \quad Y(\omega) = S(\omega)e^{j\omega t_0}$$

则可得

$$r_0 \leq \frac{\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega}{\frac{n_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0} \quad (5.6-8)$$

式中

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (5.6-9)$$

为输入信号 $s(t)$ 的总能量。

式（5.62）说明，线性滤波器所能给出的最大输出信噪比为

$$r_{0\max} = \frac{2E}{n_0} \quad (5.6-10)$$

它出现于式（5.61）成立的时候，即这时有

$$H(\omega) = KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (5.6-11)$$

$$H(\omega) = KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

上式表明， $H(\omega)$  就是我们所要求的最佳线性滤波器的传输函数，它等于输入信号频谱的复共轭。因此，此滤波器称为匹配滤波器。

匹配滤波器的传输特性还可以用其冲激响应函数 $h(t)$ 来描述：



$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K S^*(\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right]^* e^{-j\omega(t_0 - t)} d\omega \\
 &= K \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(\tau - t_0 + t)} d\omega \right] s(\tau) d\tau = K \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(\tau - t_0 + t) d\tau \\
 &= K s(t_0 - t)
 \end{aligned}
 \tag{5.6-12}$$

由上式可见，匹配滤波器的**冲激响应** $h(t)$ 是信号 $s(t)$ 的**镜像** $s(-t)$ 在时间轴上再向右平移 $t_0$ 。

作为接收滤波器的**匹配滤波器**应该是物理可实现的，即其冲激响应应该满足条件

$$h(t)=0 \quad \text{当 } t < 0 \quad (5.6-13)$$

即要求满足条件  $s(t_0-t)=0$ , 当  $t < 0$

或满足条件  $s(t)=0$ , 当  $t > t_0$  (5.6-14)

式 (5.6-14) 表明，**物理可实现的匹配滤波器**，其输入信号  $s(t)$  在抽样时刻  $t_0$  之后必须消失（等于零）。

这就是说，若要求输入信号在 $T$ 瞬间消失，则只有当 $t_0 \geq T$ 时滤波器才物理可实现。

一般总是希望 $t_0$ 尽量小些，通常选择  $t_0 = T$  。

故匹配滤波器的冲激响应可以写为：

$$h(t) = Ks(T - t)$$

$$h(t) = Ks(T - t) \quad (5.6-15)$$

上式中， $T$  为  $s(t)$  消失的瞬间。

这时，匹配滤波器输出信号波形可表示为

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)Ks(T - \tau)d\tau \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} s(-\tau')s(T - t - \tau')d\tau' = KR(t - T) \end{aligned}$$

(5.6-16)

上式表明，匹配滤波器输出信号波形是**输入信号的自相关函数的K倍**。因此，常把匹配滤波器看成是一个**相关器**。至于常数K，实际上它是可以任意选取的。因为 $r_0$ 与K无关。因此，在分析问题时，可令 $K=1$ 。

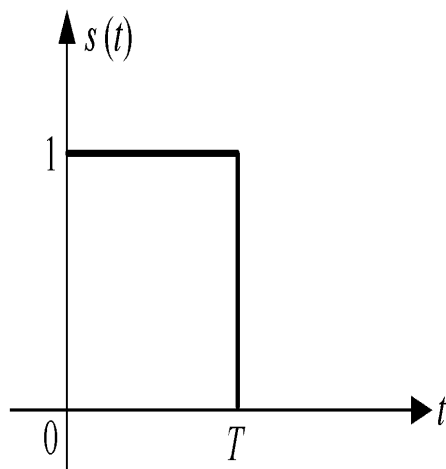
已经知道，自相关函数的最大值是 $R(0)$ 。由式（5.70），设 $K=1$ ，可得匹配滤波器的输出信号在时达到最大值，即：

$$s_0(T) = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E \quad (5.6-17)$$

由式（5.71）可见，匹配滤波器输出信号分量的最大值仅与输入信号的能量有关，而与输入信号波形无关。

信噪比 $r_0$ 也是在 $t_0=T$ 时刻**最大**，该时刻也就是整个信号进入匹配滤波器的时刻。

**[例5. 6]** 设输入信号如图5-19 (a) 所示，试求其匹配滤波器的传输函数，并画出 $h(t)$ 和 $s_0(t)$ 输出信号的波形。



(a)

**图5-19**

**解：输入信号的时域表达式为**

$$s(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

**输入信号的频谱函数为**

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^T e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}) \end{aligned}$$



由式 (5. 65) , 令 $K=1$ , 可得匹配滤波器的传输函数为:

$$H(\omega) = KS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega T} - 1)e^{-j\omega t_0}$$

由式 (5. 66) , 可得匹配滤波器的单位冲激响应为:

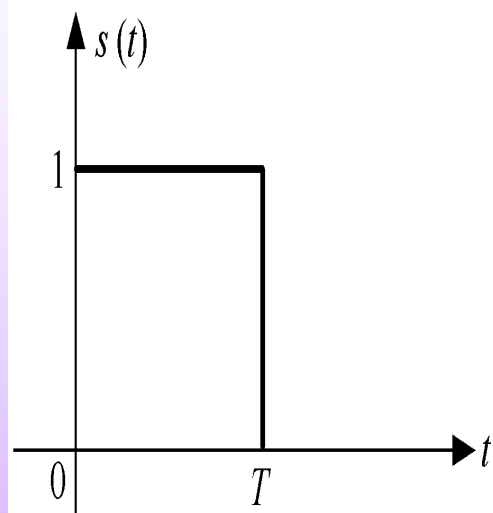
$$h(t) = s(t_0 - t)$$

取 $t_0=T$  , 则最终得

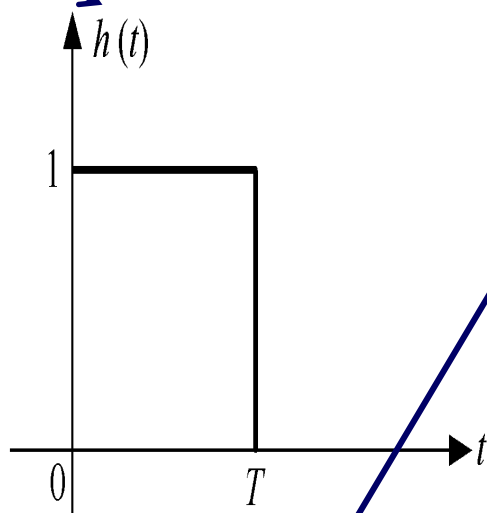
$$h(t) = s(T - t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T})$$

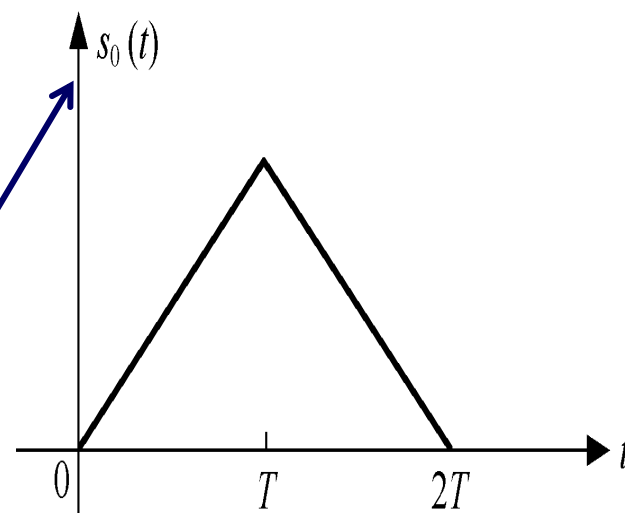
$$S(\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T})$$



(a)



(b)



(c)

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau = KR(t-T)$$

## 5.6.2 利用匹配滤波器的最佳基带传输系统

由前面的分析可知，影响基带系统误码性能的因素有两个：其一是**码间干扰**；其二是**噪声**。

- 码间干扰的影响，可以通过系统**传输函数**的设计，使得抽样时刻样值的码间干扰为零。
- 对于加性噪声的影响，可以通过**接收滤波器**的设计，尽可能减小噪声的影响，但是不能消除噪声的影响。

实际中，这两种“干扰”是同时存在的。因此**最佳基带传输系统**可认为是既能消除码间串扰而抗噪声性能又最理想（错误概率最小）的系统。

现在我们讨论如何设计这样一个最佳基带传输系统：发送滤波器的传输函数为 $G_T(\omega)$ ，信道的传输函数为 $C(\omega)$ ，接收滤波器的传输函数为 $G_R(\omega)$ ，其基带传输系统的总传输特性表示为：

$$H(\omega) = G_T(\omega) C(\omega) G_R(\omega)$$

在5.4.3节中我们忽略了噪声的影响，只考虑码间串扰。现在我们将**考虑在噪声环境下**，如何设计这些滤波器的特性使系统的性能最佳。由于信道的传输特性往往不易控制，这里将假设信道具有理想特性，即**假设** $C(\omega) = 1$ 。于是，基带系统的传输特性变为：

$$H(\omega) = G_T(\omega)G_R(\omega) \quad (5.72)$$

由前面讨论知，当系统总的传输函数 $H(\omega)$ 满足式（5.27）时就可以消除抽样时刻的码间干扰。所以，在 $H(\omega)$ 确定之后，只能考虑如何设计 $G_T(\omega)$ 和 $G_R(\omega)$ 以使系统在加性高斯白噪声条件下的误码率最小。

# 奈奎斯特第一准则

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} \sum_i H(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}) = T_s (\text{或常数}) & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

(5. 27)

前已指出，在加性高斯白噪声下，为使错误概率最小，就要**使接收滤波器特性与输入信号的频谱共轭匹配**。现在输入信号的频谱为发送滤波器的传输特性 $G_T(\omega)$ 。则由式(5.65)可得接收滤波器的传输特性 $G_R(\omega)$ 为：

$$G_R(\omega) = G_T^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (5.73)$$

上式中已经假定  $K=1$ 。



为了讨论问题的方便，可取 $t_0=0$ 。将式（5.72）和式（5.73）结合可得以下方程组：

$$\begin{cases} H(\omega) = G_T(\omega)G_R(\omega) \\ G_R(\omega) = G_T^*(\omega) \end{cases} \quad (5.74)$$

解方程组（5.74）可得

$$|G_R(\omega)| = |G_T(\omega)| = |H(\omega)|^{1/2} \quad (5.75)$$

由于上式没有限定接收滤波器的相位条件，所以可以选择

$$G_R(\omega) = G_T(\omega) = H^{1/2}(\omega) \quad (5.76)$$

由此可知，为了获得最佳基带传输系统，发送滤波器和接收滤波器的传输函数应相同。式（5.6-22）称为发送和接收滤波器的**最佳分配设计**。相应地在理想信道下最佳基带传输系统的结构图如图5-20所示：

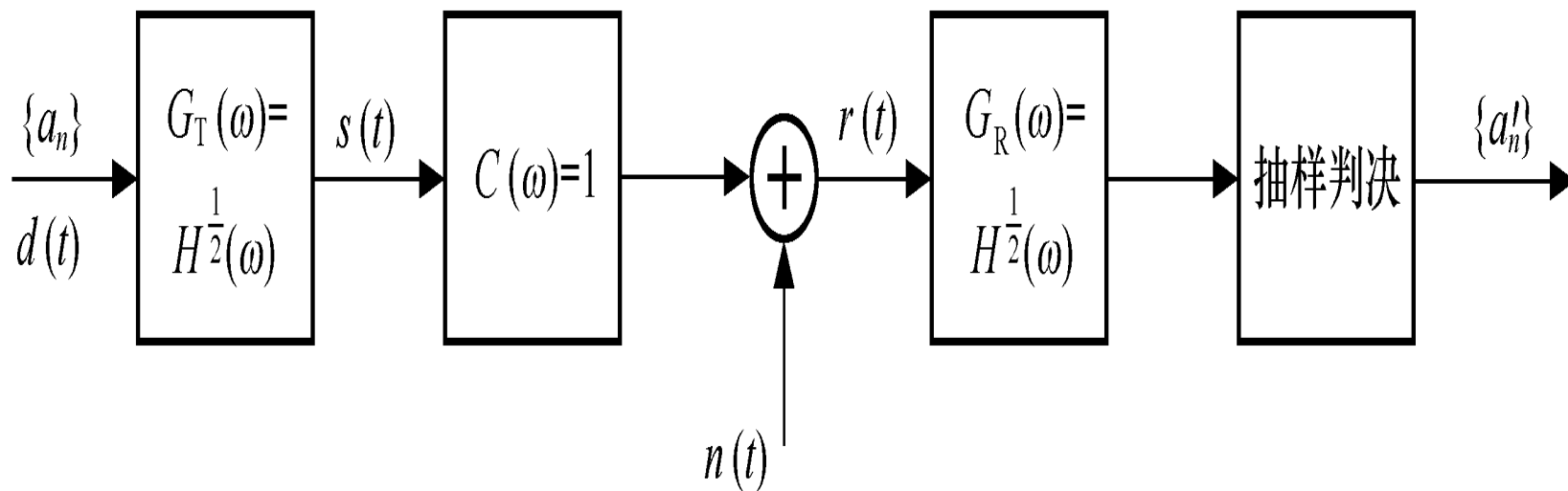


图5-20 理想信道下**最佳基带传输**系统的结构

下面以比较简单的方法分析最佳基带系统的抗噪声性能，即导出最佳传输时误码率 $P_e$ 的计算公式。

当信道噪声是均值为零、双边功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声时，由于接收滤波器是线性系统，故输出噪声仍为高斯分布，其均值为零，方差为：

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(\omega)|^2 \frac{n_0}{2} d\omega = \frac{n_0}{2} E \quad (5.77)$$

式中

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega$$

由式 (5.6-17n) 知，匹配滤波器在抽样时刻  $t_0=T$  时，有最大的输出信号值  $A_0$ ，即

$$s_0(T) = A_0 = E$$

对双极性基带信号，在发“1”和发“0”等概率时，其信号的平均功率为：

$$S = A_0^2 = E^2$$

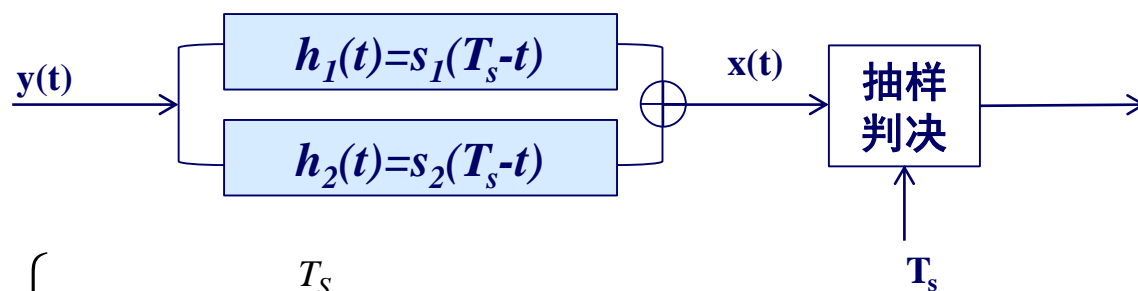
则

$$r_{\text{双}} = \frac{A_0^2}{\sigma_n^2} = \frac{E^2}{\frac{n_0}{2} E} = \frac{2E}{n_0} \quad (5.78)$$

将式 (5.78) 代入式 (5.74) 得

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r_{\text{双}}}{2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right)$$

## 5.6.3 二元系统基于匹配滤波器的最佳接收性能



$$s_o(T_S) = \begin{cases} s_{o1}(T_S) = \int_0^{T_S} s_1(t) \cdot [s_1(t) - s_2(t)] dt = E_1 - \rho_{12} \sqrt{E_1 E_2}, \\ s_{o2}(T_S) = \int_0^{T_S} s_2(t) \cdot [s_1(t) - s_2(t)] dt = \rho_{12} \sqrt{E_1 E_2} - E_2, \end{cases}$$

$$n_o(T_S) = \int_0^{T_S} n(t) \cdot [s_1(t) - s_2(t)] dt$$

# 概率密度函数

$$x(T_s) = \begin{cases} x_1(T_s) = s_{01}(T_s) + n_0(T_s), & \text{分布为: } N[E(1-\rho_{12}), \sigma_0^2] \\ x_2(T_s) = s_{02}(T_s) + n_0(T_s), & \text{分布为: } N[E(\rho_{12}-1), \sigma_0^2] \end{cases}$$

其中:

$$n_o(T_s) = \int_0^{T_s} n(t) \cdot [s_1(t) - s_2(t)] dt$$

$$\sigma_0^2 = E[n_0^2(T_s)] = n_0 E(1 - \rho_{12})$$



二个不同样本： $s_1(t)$ ； $s_2(t)$ ，等概，

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_1 + E_2 - 2\rho_{12}\sqrt{E_1 E_2}}{4n_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E(1 - \rho_{12})}{2n_0}} \right)$$

①单极性、②双极性、③一般正交码

最佳接收的性能由信道性能和样本能量决定，  
在功率受限信道传输时，延长码持续时间，  
是提高系统性能的有效途径。

①单极性NRZ ( $E_1=A^2T_s$ ,  $E_2=0$ ,  $\rho_{12}=0$ )

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_1}{4n_0}} \right)$$

②双极性NRZ ( $E_1=A^2T_s$ ,  $E_2=-E$ ,  $\rho_{12}=-1$ )

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_1}{n_0}} \right)$$

③一般正交码 ( $E_1=E_2=E$ ,  $\rho_{12}=0$ )

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_1}{2n_0}} \right)$$

