§1 解析函数的 *Laurent* 展开

P6 习题 将下列各函数在指定的环域内展开为 **Laurent** 级数. **(1)** $1/z^2(z-1)$，$0<|z-1|<1$；

(2) $(z-1)(z-2)/(z-3)(z-4)$ **,** $4<|z|<\infty$；**(3)** $\cot z$，$0<|z|<\pi$ （计算三个非零项）.

[解] 以下的计算应用了 Laurent 级数展开的唯一性以及常用的求和公式（在所涉及到级数都绝对收敛的情况下成立）：

$$\sum_{l=0}^{\infty}a_l\sum_{m=0}^{\infty}b_m=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}b_m=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-l}$$

(1) 由于 $0<|z-1|<1$，则 $0<|1-z|<1$

$$\begin{aligned}
1/z^2(z-1)&=\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(1-z)}\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{z-1}\sum_{l=0}^{\infty}(1-z)^l\sum_{m=0}^{\infty}(1-z)^m\\
&=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(1-z)^n=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-z)^n=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-z)^n\\
&=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n-1}\\
&=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n
\end{aligned}$$

(2) 由于 $4<|z|<\infty$，则 $0<3/|z|<4/|z|<1$，

$$\begin{aligned}
\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}&=(1-\frac{1}{z})(1-\frac{2}{z})\frac{1}{1-\frac{3}{z}}\frac{1}{1-\frac{4}{z}}=(1-\frac{1}{z})(1-\frac{2}{z})\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^l\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^m\\
&=(1-\frac{1}{z})(1-\frac{2}{z})\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{3}{z}\right)^{n-m}\left(\frac{4}{z}\right)^m=(1-\frac{1}{z})(1-\frac{2}{z})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{4}{3}\right)^m\\
&=(1-\frac{1}{z})(1-\frac{2}{z})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3}}=(1-\frac{3}{z}+\frac{2}{z^2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n+1}}{z^n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n+1}}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(4^{n+1}-3^{n+1})}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(4^{n+1}-3^{n+1})}{z^{n+2}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4^{n+1}-3^{n+1})}{z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(4^n-3^n)}{z^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(4^{n-1}-3^{n-1})}{z^n}\\
&=1+\frac{4^2-3^2}{z}-\frac{3}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(4^{n+1}-3^{n+1})-3(4^n-3^n)+2(4^{n-1}-3^{n-1})}{z^n}\\
&=1+\frac{4}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6\cdot4^{n-1}-2\cdot3^{n-1}}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\cdot4^{n-1}-2\cdot3^{n-1}}{z^n}
\end{aligned}$$

(3) 由于 $z=0$ 是奇函数 $\cot z$ 的 1 阶极点（$\lim_{z\to0} z\cot z=\lim_{z\to0}\frac{z}{\sin z}\cos z=1$），于是：

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots}=\frac{1}{z}+\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m+1}z^{2m+1}$$

c_m 是待定系数。则：

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots=\left(1+c_1z^2+c_3z^4+c_5z^6+\cdots\right)\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right)$$

于是比较两边同次项的系数得：

$$\begin{cases}-\frac{1}{2!}=c_1-\frac{1}{3!}\\+\frac{1}{4!}=c_3-\frac{1}{3!}c_1+\frac{1}{5!}\\-\frac{1}{6!}=c_5-\frac{1}{3!}c_3+\frac{1}{5!}c_1-\frac{1}{7!}\\\cdots\end{cases}$$

于是：

$$c_1=-\frac{1}{3},c_3=-\frac{1}{45},c_5=-\frac{2}{945},\cdots$$

于是前三个非零项为：

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3+\cdots$$

当然若引入伯努利数的话，还可以得到通式。见王竹溪和郭敦仁的《特殊函数概论》P5(18)式：

$$\frac{t}{2}\cot\frac{t}{2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}t^{2n}$$

令 $t=2z$，得到：

$$z\cot z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

于是：

$$\cot z=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n2^{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$$

§3 各种孤立奇点的判断

P11 习题 指出下列函数在 z 平面上的奇点及其类型：

(1) $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$**, (2)** $f(z)=\dfrac{e^{1/(z-1)}}{e^z-1}$**.**

[解] (1) $f(z)$ 的有限奇点为满足 $z=0$ 或者 $\sin(1/z)=0$ 的点，即 $\left\{z=0,\dfrac{1}{n\pi}\middle| n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$

由于 $z=0$ 的任意邻域里面都有 $f(z)$ 的奇点，因此 $z=0$ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点。

令 $\varphi(z)=1/f(z)=\sin(1/z)$，则 $\varphi(1/n\pi)=0$，$\varphi'(1/n\pi)=-(n^2\pi^2)\cos(n\pi)\neq 0$。

于是：$z=1/n\pi$（$n\neq 0$）是 $\varphi(z)$ 的单零点，也即是 $f(z)$ 的单极点。

此外，$t=0$ 是 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{\sin t}$ 的单极点（由 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$），于是 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的单极点。

(2) $f(z)$ 的有限奇点为满足 $z=1$ 或者 $e^z=1$ 的点，即 $\left\{z=1,i2n\pi\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$。

$f(z)=\dfrac{e^{1/(z-1)}}{e^z-1}$ 在 z 沿不同的点列 $\left\{z_n=1+\dfrac{1}{n}\right\}$ 和 $\left\{z_n=1-\dfrac{1}{n}\right\}$ 趋于 1 时，极限分别为：

$f(z_n)=\dfrac{e^n}{e^{1+\frac{1}{n}}-1}\to\infty$ 和 $f(z_n)=\dfrac{e^{-n}}{e^{1-\frac{1}{n}}-1}\to 0$， 故 $\lim\limits_{z\to 1}f(z)$ 不存在，

于是 $z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

令 $\varphi(z)=1/f(z)=\dfrac{e^z-1}{e^{1/(z-1)}}$，则 $\varphi(i2n\pi)=0$，而

$$\begin{aligned}\varphi'(i2n\pi)&=\left.\frac{e^{1/(z-1)}[-1+e^z(z^2-2z+2)]}{(1-z)^2}\right|_{z=i2n\pi}=\left.\frac{e^{1/(z-1)}[-1+(z^2-2z+2)]}{(1-z)^2}\right|_{z=i2n\pi}\\&=\left.e^{1/(z-1)}\right|_{z=i2n\pi}\neq 0\end{aligned}$$

于是，$z=i2n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）是 $\varphi(z)$ 的单零点，也即 $f(z)$ 的单极点。

此外，在无穷远点的任意邻域内含有其他奇点，因此无穷远点 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点。

补充习题

1. 将下列各函数在指定的环域内展开为 Laurent 级数.

(a) $1/(z-a)(z-b)$（其中 $b\neq a$），$|b-a|<|z-a|<\infty$；

[解] 由于$|b-a|<|z-a|<\infty$，于是$0<\left|\frac{b-a}{z-a}\right|<1$，故展开式为：

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{z-a}\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=\frac{1}{(z-a)^2}\frac{1}{1-\dfrac{b-a}{z-a}}$$
$$=\frac{1}{(z-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+2}}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(b-a)^{n-2}}{(z-a)^n}$$

(b) $1/(z-a)(z-b)$（其中$b\neq a$），$0<|z-a|<|b-a|$；

[解] 由于$0<|z-a|<|b-a|$，于是$0<\left|\frac{z-a}{b-a}\right|<1$，故展开式为：

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{z-a}\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=\frac{1}{(z-a)(a-b)}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$
$$=\frac{1}{(z-a)(a-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}}$$
$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}$$

(c) $e^{1/(1-z)}$，$1<|z|<\infty$（计算五个非零项）；

[解] 令$t=1/z$，则，$0<|t|<1$，$e^{1/(1-z)}=e^{t/(t-1)}$

由于$e^{t/(t-1)}$在$t=0$处解析，故可展开为 Taylor 级数，逐步求$t=0$处的导数值如下：

$$e^{t/(t-1)}=1,$$

$$\frac{d}{dt}e^{t/(t-1)}=e^{t/(t-1)}\frac{-1}{(t-1)^2}=-1,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{t/(t-1)}=e^{t/(t-1)}\frac{2t-1}{(t-1)^4}=-1,$$

$$\frac{d^3}{dt^3}e^{t/(t-1)}=e^{t/(t-1)}\frac{-6t^2+6t-1}{(t-1)^6}=-1,$$

$$\frac{d^4}{dt^4}e^{t/(t-1)}=e^{t/(t-1)}\frac{1+12t(t-1)(2t-1)}{(t-1)^8}=1.$$

于是：$e^{t/(t-1)}=1-t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\cdots$，

于是：$e^{1/(1-z)}=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\cdots$.

(d) $1\big/(z^2-3z+2)$，$1<|z|<2$；

[解] 由于$1<|z|<2$，于是$\left|\frac{1}{z}\right|<1$和$\left|\frac{z}{2}\right|<1$，于是：

$$
\begin{aligned}
1\big/(z^2-3z+2)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\\
&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}
\end{aligned}
$$

(e) $1\big/(z^2-3z+2)$，$2<|z|<\infty$.

[解] 由于$2<|z|<\infty$，于是$\left|\frac{1}{z}\right|<\left|\frac{2}{z}\right|<1$，于是：

$$
\begin{aligned}
1\big/(z^2-3z+2)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\
&=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}
\end{aligned}
$$

2. 研究下列函数在 z 平面上的奇点及其类型.

(a) $z^2\big/(e^z-1)$；

[解] $z^2\big/(e^z-1)$的奇点为$\left\{z=\infty,i2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$。

由于无穷远点的任意邻域内均有其他奇点，故$z=\infty$是$z^2\big/(e^z-1)$的非孤立奇点。

由于$\lim\limits_{z\to0}\frac{z^2}{e^z-1}=\lim\limits_{z\to0}\frac{2z}{e^z}=0$，故$z=0$是$z^2\big/(e^z-1)$的可去奇点。而：

$$\lim_{z\to i2k\pi}\frac{(z-i2k\pi)z^2}{e^z-1}=-4k^2\pi^2\lim_{z\to i2k\pi}\frac{z-i2k\pi}{e^z-1}=-4k^2\pi^2\lim_{z\to i2k\pi}\frac{1}{e^z}=-4k^2\pi^2\left(k\neq0\right)$$

故$z=i2k\pi\left(k\neq0\right)$是$z^2\big/(e^z-1)$的单极点。

(b) $\cot(\pi z)/(z-1)$；

[解] $\cot(\pi z)/(z-1)$ 的奇点为 $\left\{z=\infty, k \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$。

由于 $z=\infty$ 的任意邻域中含有其他奇点，故 $z=\infty$ 是 $\cot(\pi z)/(z-1)$ 的非孤立奇点。

由于：

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{\cot(\pi z)}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\cos\pi z}{\sin(\pi z)}=-\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\sin(\pi z)}=-\lim_{z\to 1}\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}=\frac{1}{\pi}$$

于是 $z=1$ 是 $\cot(\pi z)/(z-1)$ 的 2 阶极点。

由于：

$$\lim_{z\to k}\frac{(z-k)\cot(\pi z)}{z-1}=\lim_{z\to k}\frac{(z-k)\cos\pi z}{(z-1)\sin(\pi z)}=\frac{(-1)^k}{k-1}\lim_{z\to k}\frac{z-k}{\sin(\pi z)}=\frac{(-1)^k}{k-1}\lim_{z\to k}\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}=\frac{1}{k-1}\frac{1}{\pi}$$

于是 $z=k(k\neq 1, k\in\mathbb{Z})$ 是 $\cot(\pi z)/(z-1)$ 的 1 阶极点。

(c) $(\sin z-z)/z^3$；

[解] $(\sin z-z)/z^3$ 的奇点为 $\{z=\infty, 0\}$。

由于：

$$\frac{\sin z-z}{z^3}=\frac{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)-z}{z^3}=\frac{-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots}{z^3}=-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\cdots$$

于是 $z=0$ 是 $(\sin z-z)/z^3$ 的可去奇点。

从 Laurent 展开式，容易知道 $z=\infty$ 是 $(\sin z-z)/z^3$ 的本性奇点。

(d) $(e^{az}-e^{bz})/z^2$ （**其中** $b\neq a$ ）;

[解] $(e^{az}-e^{bz})/z^2$ 的奇点为 $\{z=0,\infty\}$，并且由于：

$$\lim_{z\to 0}z\frac{e^{az}-e^{bz}}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{az}-e^{bz}}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{ae^{az}-be^{bz}}{1}=a-b\neq 0$$

于是， $z=0$ 是 $(e^{az}-e^{bz})/z^2$ 的单极点。

由于 $0<|z|<\infty$ 既是零的邻域，也是无穷大的邻域，于是在零处的 Laurent 展开和在无穷大处的展开应该是同一个式子，于是 $z=\infty$ 是 $(e^{az}-e^{bz})/z^2$ 本性奇点。

(e) $\cos(1/z^2)$；

[解] $\cos(1/z^2)$ 的奇点为 $\{z=0,\infty\}$，并且由于 $\cos(1/z^2)$ 的 Laurent 展开如下：

$$\cos(1/z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-4n}}{(2n)!}$$

于是 $z=0$ 是 $\cos(1/z^2)$ 的本性奇点。

容易知道 $z=\infty$ 是 $\cos(1/z^2)$ 的可去奇点。

(f) $1/\cos z$.

[解] $1/\cos z$ 的有限奇点为满足 $\cos z=0$ 的点，即 $\{z=\pi/2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

容易知道这些点都是 $1/\cos z$ 的孤立奇点，并且，由于：

$\lim\limits_{z\to\pi/2+k\pi}\dfrac{z-(\pi/2+k\pi)}{\cos z}=\lim\limits_{z\to\pi/2+k\pi}\dfrac{1}{-\sin z}=(-1)^{k-1}\neq 0$ 知道，

这些奇点 $\{z=\pi/2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ 都是 $1/\cos z$ 的单极点。

由于无穷远点的任意邻域含有其他奇点，故无穷远点是 $1/\cos z$ 的非孤立奇点。

Lamberto Qin
2010-10-24
QQ:397968240
Tel:15975454463