

## 第二章 复变函数的积分\*

### 目录

<b>§1 复积分的定义和基本性质</b>	<b>25</b>
§1.1 曲线的方向 . . . . .	25
§1.2 复积分的定义与存在性 . . . . .	25
§1.3 复积分的基本性质 . . . . .	27
<b>§2 复积分的计算</b>	<b>27</b>
§2.1 *用定义计算 . . . . .	27
§2.2 曲线积分方法 . . . . .	28
§2.3 参数方程法 . . . . .	29
<b>§3 Cauchy 积分定理</b>	<b>30</b>
§3.1 <i>Cauchy</i> 积分定理 . . . . .	30
§3.2 * <i>Cauchy</i> 积分定理的证明 . . . . .	31
§3.3 <i>Cauchy</i> 积分定理的推论 . . . . .	34
§3.4 复通区域的 <i>Cauchy</i> 积分定理 . . . . .	35
<b>§4 Cauchy 积分公式及其推论</b>	<b>37</b>
§4.1 <i>Cauchy</i> 积分公式 . . . . .	37
§4.2 *无界区域的 <i>Cauchy</i> 积分公式 . . . . .	39
§4.3 解析函数的高阶导数 . . . . .	40
§4.4 * <i>Liouville</i> 定理 . . . . .	41
§4.5 *代数基本定理 . . . . .	41
<b>补充习题</b>	<b>42</b>

---

\*© 1992–2018 林琼桂

本讲义是中山大学物理学院学生学习数学物理方法课程的参考资料，由林琼桂编写制作，欢迎任何个人复制用于学习或教学参考，欢迎批评指正，请勿用于出售。

本章的 Cauchy 积分定理是整个解析函数理论的基础.

## §1 复积分的定义和基本性质

### §1.1 曲线的方向

本章提到的曲线一般都指光滑或逐段光滑的平面曲线. 若一段曲线的方程为  $y = f(x)$ , 则光滑指的是  $f'(x)$  连续. 若其方程为参数方程  $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ , 则光滑指的是  $x'(t)$  和  $y'(t)$  连续. 由有限条光滑曲线衔接而成的曲线称为逐段光滑曲线. 折线就是最简单的逐段光滑曲线. 曲线的方向定义如下.

1. 简单曲线: 没有重点的曲线称为简单曲线. 图 1 中的 a 是简单曲线, 而 b 则不是. 简单曲线的方向由起点指向终点. 所以规定了起点和终点就确定了它的方向.

2. 围线 (contour): 即简单闭曲线. 图 1 中的 c 是简单闭曲线, 而 d 则不是.

如果沿着围线走, 其所包围的区域在左边, 则该方向称为正方向, 其实就是逆时针方向.

### §1.2 复积分的定义与存在性

一元实变函数的积分定义在  $x$  轴上的有限区间内 (无限区间的广义积分通过极限过程得到), 而复变函数的积分 (简称复积分) 总是定义在曲线上, 参看图 2.

**定义 (复积分)** 设函数  $f(z)$  沿曲线  $C$  有定义, 在  $C$  上从起点  $a$  到终点  $b$  取分点

$$a = z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n = b$$

将  $C$  分为  $n$  个弧段, 在  $z_{k-1}$  至  $z_k$  的弧段上任取一点  $\zeta_k$ , 作和数

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k,$$

其中  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ . 若  $n \rightarrow \infty$  且  $\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$  时,  $S_n \rightarrow I$ , 则称  $f(z)$  沿  $C$  可积, 并称  $I$  为  $f(z)$  沿  $C$  的积分, 记作

$$I = \int_C f(z) dz.$$

$C$  称为积分路径, 沿相反方向的积分记作  $\int_{C^-} f(z) dz$ .

**注** 当  $b = a$ , 即  $C$  为围线时, 如果没有特别说明, 则沿围线  $C$  积分总是指逆时针方向的积分.

以上积分的定义与实变函数积分的定义是很类似的. 在复变函数论中, 积分理论具有非常基本的地位. 事实上, 关于复积分的 Cauchy 积分定理是解析函数理论的基础. 解析函数的微分性质的证明大都是由这个定理出发的.

定义了复积分, 首先遇到的问题是, 给定函数和曲线, 如何判断积分是否存在. 与实变情况类似, 我们有下述

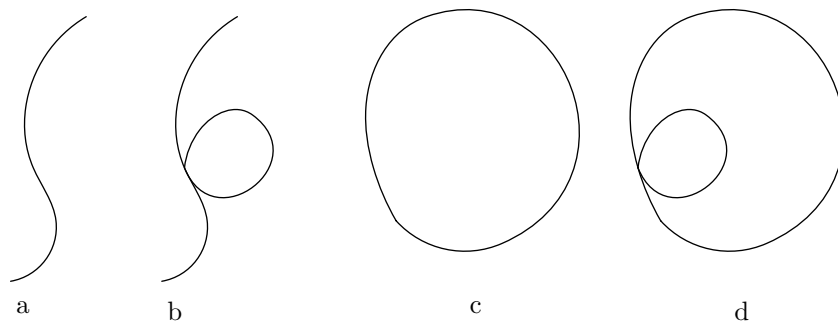
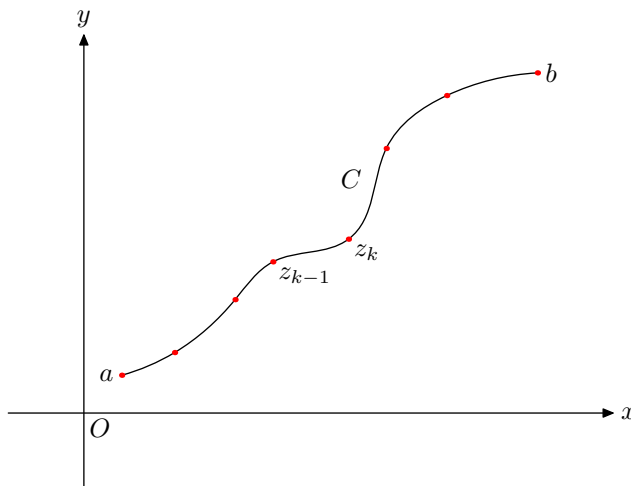


图 1: a 是简单曲线, 而 b 不是; c 是简单闭曲线, 而 d 不是

图 2:  $f(z)$  沿曲线  $C$  的积分

**定理 (积分存在)** 设函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  沿曲线  $C$  连续, 则  $f(z)$  沿  $C$  可积, 且

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (1)$$

**注** 形式上, 只要将  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  和  $dz = dx + idy$  代入左边, 分开实部和虚部, 即可得到右边的结果. 这可以帮助我们把握这一公式, 虽然不能用这种方法来证明它.

**证明** 设  $z_k = x_k + iy_k$ , 记  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ , 则  $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ . 又设  $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ , 记  $u_k = u(\xi_k, \eta_k)$ ,  $v_k = v(\xi_k, \eta_k)$ , 则  $f(\zeta_k) = u_k + iv_k$ , 于是

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k),$$

由于  $f(z)$  沿  $C$  连续, 故  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  沿  $C$  连续, 所以上式右边两项均有极限, 于是左边也有极限, 即  $f(z)$  沿  $C$  可积. 上式的极限正是式 (1). 证毕.

式 (1) 同时也给出了复积分的计算方法, 它把复积分的计算转化为实变函数的曲线积分的计算, 我们将在下一节进一步讨论.

### §1.3 复积分的基本性质

设  $f(z)$  和  $g(z)$  沿  $C$  连续, 复积分有下列基本性质.

1.  $\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz.$
2.  $\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$
3.  $\int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$
4.  $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| = \int_C |f(z)| ds.$

最后一个积分中的  $ds = |dz|$  就是弧长的微分. 这些性质都可以直接由积分的定义来证明. 比如, 利用三角不等式, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k|,$$

取极限即得性质 4.

## §2 复积分的计算

本节讨论复积分的计算, 这有三方面的目的. 第一, 加深对复积分的了解; 第二, 通过计算获得一些有用的具体结果; 第三, 建立 Cauchy 积分定理的特例, 从而对这一抽象的定理获得感性认识.

### §2.1 \*用定义计算

对于比较简单的函数, 可以直接用定义来计算. 下面就计算两个例子.

**例 1**  $C$  是  $a$  到  $b$  的任一简单曲线, 求  $\int_C dz$ .

**解**  $f(z) = 1$ , 则  $f(\zeta_k) = 1$ . 按定义作和数, 有

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a,$$

故当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$  时,  $S_n \rightarrow b - a$ , 即

$$\int_C dz = b - a. \quad (2)$$

**例 2**  $C$  是  $a$  到  $b$  的任一简单曲线, 求  $\int_C z dz$ .

**解**  $f(z) = z$ , 则  $f(\zeta_k) = \zeta_k$ . 按定义作和数, 有

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n \zeta_k (z_k - z_{k-1}),$$

先取  $\zeta_k = z_k$ , 得  $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n z_k(z_k - z_{k-1})$ , 再取  $\zeta_k = z_{k-1}$ , 得  $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n z_{k-1}(z_k - z_{k-1})$ . 由于  $f(z) = z$  是连续函数, 按上节定理, 积分存在, 记作  $I$ , 则当  $n \rightarrow \infty$ 、 $\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$  时, 应有  $S_n^{(1)} \rightarrow I$ ,  $S_n^{(2)} \rightarrow I$ , 于是  $S_n^{(1)} + S_n^{(2)} \rightarrow 2I$ . 另一方面,

$$S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2,$$

因此,  $S_n^{(1)} + S_n^{(2)} \rightarrow b^2 - a^2$ . 比较即得  $I = (b^2 - a^2)/2$ , 即

$$\int_C z \, dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \quad (3)$$

## §2.2 曲线积分方法

从上一小节看到, 直接用定义来计算复积分, 即使对于象  $f(z) = z$  这样简单的函数, 都需要一定的技巧. 对于较复杂的函数, 这种方法显然是不现实的. 注意到上节的定理不仅解决了积分的存在性问题, 而且式 (1) 同时也给出了计算复积分的一种方法, 即把复积分转化为实变函数的曲线积分来计算. 在简单情况下, 可以找到曲线积分的原函数, 这时就很容易得到结果. 为了叙述方便, 我们把这种方法称为曲线积分方法.

**例 3** 用曲线积分方法重新计算例 1.

**解**  $f(z) = 1$ , 即  $u(x, y) = 1$ ,  $v(x, y) = 0$ . 按式 (1), 有

$$\int_C dz = \int_C dx + i \int_C dy = x|_a^b + iy|_a^b = (x + iy)|_a^b = z|_a^b = b - a.$$

**例 4** 用曲线积分方法重新计算例 2.

**解**  $f(z) = z$ , 即  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ . 按式 (1), 有

$$\begin{aligned} \int_C z \, dz &= \int_C x \, dx - y \, dy + i \int_C y \, dx + x \, dy = \int_C d \left[ \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \right] + i \int_C d(xy) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_a^b = \frac{1}{2}(x + iy)^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}z^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

由以上两例看到, 积分的结果只与起点和终点有关, 而与路径无关, 这是与被积函数的解析性紧密相关的. 事实上, 这一方法可以用于任何具体的解析函数, 如指数、三角函数等, 并得到类似的结果. 后面将会看到, 对于解析函数, 存在着与实变积分类似的 Newton-Leibniz 公式.

如果被积函数不是解析的, 比如  $\bar{z}$ , 其积分一般都依赖于路径, 而不仅仅是起点和终点. 这时用上面的曲线积分方法并不方便. 实际上, 实变函数中的曲线积分在一般情况下还是要化成定积分来计算的. 所以, 下面就讨论计算复积分的参数方程法.

### §2.3 参数方程法

设曲线  $C$  的参数方程为  $z = z(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ),  $f(z)$  沿  $C$  连续, 则

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt. \quad (4)$$

这一公式将复积分化为实变数  $t$  的定积分. 形式上, 只要将  $z = z(t)$  和  $dz = z'(t) dt$  代入左边, 即可得到右边的结果. 当然这不是证明. 右边的定积分可能需要分开实部和虚部来计算, 但若直接找到原函数, 也可以不必分开.

式 (4) 证明如下. 由式 (1) 出发, 根据微积分中曲线积分的计算公式, 有

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} [u(t)x'(t) - v(t)y'(t)] dt + i \int_{\alpha}^{\beta} [v(t)x'(t) + u(t)y'(t)] dt,$$

其中  $u(t) = u[x(t), y(t)]$ ,  $v(t) = v[x(t), y(t)]$ , 上式可以改写为

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} [u(t) + iv(t)][x'(t) + iy'(t)] dt.$$

这就是式 (4).

利用式 (4), 马上可以得到例 1 和例 2 的结果. 它们是下述更一般结果的特例.

**例 5** 由于  $z^n(t)z'(t)$  的原函数显然是  $z^{n+1}(t)/(n+1)$ , 故有

$$\int_a^b z^n dz = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

结果与曲线  $C$  的细节无关, 而只依赖于起点和终点. 如果  $C$  是围线, 即  $b = a$ , 则

$$\int_C z^n dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \forall \text{ 围线 } C. \quad (6)$$

式 (6) 可由式 (5) 经  $b \rightarrow a$  的极限过程得到. 也可以将围线  $C$  分为两段, 再由式 (5), 两段的积分互相抵消, 从而得到式 (6). 注意式 (6) 对任意围线成立.

**注** 由式 (6) 容易推知, 对于任意多项式  $P_n(z)$  和围线  $C$ , 均有  $\int_C P_n(z) dz = 0$ . 由此我们可以推测, 对于一般的解析函数  $f(z)$ , 亦有  $\int_C f(z) dz = 0$ , 这基本上就是 Cauchy 积分定理了.

下面再计算一个例子.

**例 6** 计算积分  $\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n}$ , 其中  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

**解** 当  $n \leq 0$ , 由式 (6) 可知结果为 0, 这与下面的结果一致. 圆周  $|z-a| = \rho$  的参数方程为  $z(\theta) = a + \rho e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), 这里我们将参数写作  $\theta$ , 因为它是角度. 按式 (4), 有

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} d\theta}{\rho^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta,$$

如果  $n \neq 1$ , 易得原函数为  $-e^{-i(n-1)\theta}/(n-1)\rho^{n-1}$ , 代入上下限, 结果为 0. 若  $n = 1$ , 则结果显然为  $2\pi i$ . 所以

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & (n=1), \\ 0, & (n \in \mathbb{Z}, n \neq 1), \end{cases} \quad (7)$$

这是一个重要的结果.

注 ① 这一结果与  $a$  和  $\rho$  的数值无关. ② 后面将证明, 这一结果对任何包围  $a$  点的围线成立. ③  $n = 1$  时结果不为 0, 这是因为被积函数在积分围线内存在奇点  $z = a$ . 由此可以进一步推测, Cauchy 积分定理中的  $f(z)$  应该在围线  $C$  及其内部解析, 而不仅仅是在围线  $C$  上解析. ④ 虽然  $n = 2, 3, \dots$  时, 结果也为 0, 但这只是一个具体的结果, 没有必然性.

习题 1. 计算  $\int_{C_1} \bar{z} dz$  和  $\int_{C_2} \bar{z} dz$ , 其中  $C_1$  是上半单位圆 ( $z = 1 \rightarrow z = -1$ ),  $C_2$  是下半单位圆 ( $z = 1 \rightarrow z = -1$ ).

习题 2. 设  $f(z)$  在原点的邻域内连续, 试证  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$ .

## §3 Cauchy 积分定理

### §3.1 Cauchy 积分定理

由上节看到, 对于简单的解析函数  $P_n(z)$ , 有  $\int_C P_n(z) dz = 0$ ,  $C$  为任意围线. 实际上, 这是下面定理的一个特例.

**定理** (Cauchy 积分定理) 设函数  $f(z)$  在单通区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内的任一围线, 则

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (8)$$

这是复变函数论中最基本的定理.

如果假定  $f'(z)$  连续, 则上述定理的证明是很容易的. 这时  $u$ 、 $v$  的一阶偏导数连续, 可将 Green 公式应用于式 (1) 而得

$$\int_C f(z) dz = - \int_G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中  $G$  是围线  $C$  所包围的区域. 由 CR 条件, 上式右边两个积分都为 0, 故得式 (8). 但我们知道,  $f(z)$  解析的定义只是  $f'(z)$  存在, 并不一定连续, 所以上面证明的只是一种特殊情况. 下一小节将介绍严格的证明, 供有兴趣的读者参考.

值得注意的是, Cauchy 在 1825 年给出上述定理, 那时候  $f(z)$  解析的定义是  $f'(z)$  连续, 所以上面的证明是严格的. 1900 年, Goursat 发表了新的证明, 免去了  $f'(z)$  连续的条件. 也就是说, 只要  $f'(z)$  存在, Cauchy 积分定理就成立. 此后  $f(z)$  解析的定义才改为现在的样子. 这无疑是一个实质性的进步, 但期间经历了七十多年的时间.

Cauchy 积分定理也可以表述为

**定理** (Cauchy 积分定理的等价表述)  $C$  为复平面上的围线,  $D$  是  $C$  所包围的单通区域, 函数  $f(z)$  在闭域  $\bar{D} = D + C$  上解析, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

这与上面的形式是等价的. 但从这一形式容易看出它和下面强化的形式有什么区别.

**定理** (Cauchy 积分定理的强化形式)  $C$  为复平面上的围线,  $D$  是  $C$  所包围的单通区域, 函数  $f(z)$  在  $D$  内解析, 在  $\bar{D} = D + C$  上连续, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

应当指出, 即使证明了上面的定理, 要得到这一强化形式也并不是轻而易举的.

### §3.2 \*Cauchy 积分定理的证明

先证明下面的

**引理** 设  $f(z)$  在区域  $D$  内连续,  $\Gamma$  是  $D$  内的简单曲线或围线, 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 总可找到内接于  $\Gamma$  且完全位于  $D$  内的折线  $P$ , 使得

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

**注** ① 这一引理的大意是沿曲线的积分总可以用沿折线的积分来任意逼近. ② 这里只要求  $f(z)$  连续, 而不必解析. ③ 区域  $D$  也不必是单通的.

**证明** 设曲线  $\Gamma$  的长度为  $L$ . 在区域  $D$  内取区域  $G$ , 使  $\bar{G} \subset D$  而  $\Gamma$  完全在  $G$  内. 由于  $f(z)$  在区域  $D$  内连续, 故在  $\bar{G}$  上一致连续. 也就是说,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得对于  $\bar{G}$  内的任意两点  $z'$  和  $z''$ , 只要  $|z' - z''| < \delta$ , 就有  $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon/2L$ . 今在  $\Gamma$  上从起点  $a$  到终点  $b$  取分点

$$a = z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n = b.$$

依次连接各分点作成折线  $P$ , 如图 3 所示. 我们将  $\Gamma$  上从  $z_{k-1}$  到  $z_k$  的弧段记作  $\Gamma_k$ , 相应的线段记作  $P_k$ , 并记  $\Gamma_k$  的长度为  $L_k$ . 只要分点取得足够密, 就可以使所有  $L_k < \delta$ , 并使所有  $P_k$  完全落在  $G$  内. 这样, 对任意  $k$ ,  $\Gamma_k$  上的任意点  $z$  都满足  $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon/2L$ ,  $P_k$  上的任意点亦然. 由上节例 1,

$$\int_{\Gamma_k} f(z_k) dz = \int_{P_k} f(z_k) dz = f(z_k)(z_k - z_{k-1}),$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{P_k} f(z) dz \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz - \sum_{k=1}^n \int_{P_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\Gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| + \sum_{k=1}^n \left| \int_{P_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} |f(z) - f(z_k)| |dz| + \sum_{k=1}^n \int_{P_k} |f(z) - f(z_k)| |dz| \end{aligned}$$



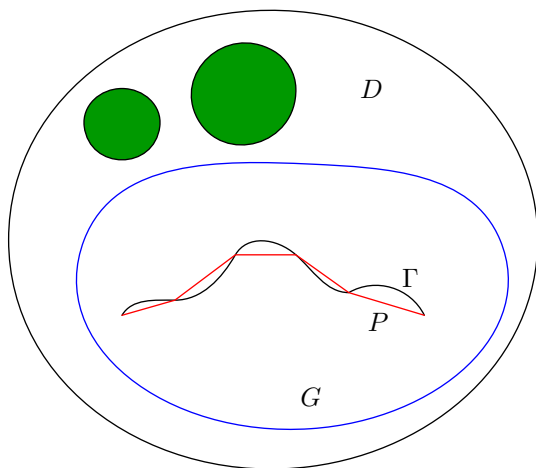


图 3: 引理的证明

$$\begin{aligned} &< \frac{\varepsilon}{2L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} |dz| + \sum_{k=1}^n \int_{P_k} |dz| \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2L} 2L = \varepsilon. \end{aligned}$$

其中第三步用了三角不等式, 第四步用了积分的性质 4, 第五步用了  $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon/2L$  (在  $\Gamma_k$  或  $P_k$  上均成立), 最后一步用了  $\sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} |dz| = \int_{\Gamma} |dz| = L$ , 而  $\sum_{k=1}^n \int_{P_k} |dz| \leq L$ . 证毕.

现在证明 Cauchy 积分定理.  $C$  是单通区域  $D$  内的任一围线, 由于  $f(z)$  在  $D$  内解析, 故必在  $D$  内连续, 根据上述引理,  $\forall \varepsilon > 0$ , 总可找到内接于  $C$  且完全位于  $D$  内的闭折线  $P$  (即多边形), 使  $|\int_C f(z) dz - \int_P f(z) dz| < \varepsilon$ . 如果能够证明, 对于  $D$  内的任意闭折线  $P$ , 都有

$$\int_P f(z) dz = 0, \quad (10)$$

则上式变成  $|\int_C f(z) dz| < \varepsilon$ , 但  $\varepsilon$  是任意的, 故  $|\int_C f(z) dz| = 0$ . 反过来, 如果 Cauchy 积分定理成立, 则式 (10) 也应该成立, 因为  $P$  也是  $D$  内的围线. 因此问题归结为证明式 (10).

由于  $D$  是单通区域, 所以  $P$  及其内部都完全在  $D$  内. 今适当连接  $P$  的各顶点作对角线, 将  $P$  所包围的多边形分解为若干三角形, 如图 4a 所示, 则沿各三角形边界的积分都存在, 且其和等于沿  $P$  的积分, 这是因为在和式中, 沿各对角线的积分都出现两次, 而且方向相反, 所以互相抵消. 如果能证明沿  $D$  内任一三角形边界  $T$  的积分为 0:

$$\int_T f(z) dz = 0, \quad (11)$$

则式 (10) 成立. 反过来, 如果式 (10) 成立, 则式 (11) 也应成立, 因为  $T$  就是最简单的闭折线. 因此问题归结为证明式 (11). 为此, 记

$$M = \left| \int_T f(z) dz \right|,$$

只要证明  $M = 0$  即可.

由于  $D$  是单通区域, 所以  $T$  及其内部都完全在  $D$  内. 将  $T$  及其内部所构成的闭域, 即闭三角形, 记作  $\Delta$ , 则  $\Delta \subset D$ . 今连接三角形各边中点, 将  $\Delta$  分解为四个三角形, 如图 4b 所示, 将其边界记作  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , 则  $\int_T f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{T_i} f(z) dz$ , 而  $M = \left| \int_T f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{T_i} f(z) dz \right|$ , 因此, 右边各项中必有一项不小于  $M/4$ , 记该项所在的三角形为  $T^{(1)}$ , 所包围的闭域为  $\Delta_1$ , 则

$$M_1 \equiv \left| \int_{T^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

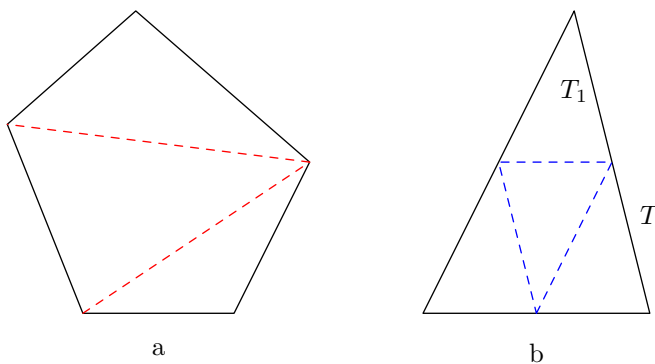


图 4: Cauchy 积分定理的证明

再将  $\triangle_1$  分解为四个三角形, 重复上面的论证, 然后继续同样的过程, 我们就可以得到一系列的三角形

$$\triangle, \triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_n, \dots,$$

其边界为

$$T, T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(n)}, \dots,$$

在这些边界上的积分满足

$$M_n \equiv \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M_{n-1}}{4} \geq \frac{M}{4^n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

其中  $M_0 \equiv M$ .

记  $\triangle$  的周长为  $L$ , 则  $\triangle_n$  的周长为  $L_n = L/2^n$ , 显然,

$$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \dots \supset \triangle_n \supset \dots,$$

而  $L_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故存在唯一点  $z_0$  属于所有的  $\triangle_n$  (这里用到了一个定理, 称为闭集套定理, 又称 Cantor 定理, 但这一结论是相当直观的), 当然  $z_0 \in D$ . 今  $f(z)$  在  $z_0$  解析, 则存在有限导数  $f'(z_0)$ , 成立

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right] = 0,$$

换句话说,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|z - z_0| < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

或

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

由于  $L_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故当  $n$  足够大时, 有  $L_n < \delta$ , 这时, 对于  $T^{(n)}$  上的任意点  $z$ , 都满足  $|z - z_0| < L_n < \delta$ , 故上面的不等式在  $T^{(n)}$  上成立. 由上节例 1 和例 2 知道,  $\int_{T^{(n)}} f(z_0) dz = 0$ ,  $\int_{T^{(n)}} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0$ , 因此

$$\begin{aligned} M_n &= \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{T^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \\ &\leq \int_{T^{(n)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| |dz| \\ &< \int_{T^{(n)}} \varepsilon |z - z_0| |dz| < \varepsilon L_n \int_{T^{(n)}} |dz| = \varepsilon L_n^2 = \frac{L^2 \varepsilon}{4^n}. \end{aligned} \quad (13)$$

比较式 (12) 和式 (13), 可得  $M/4^n \leq M_n < L^2 \varepsilon / 4^n$ , 即  $M < L^2 \varepsilon$ , 但  $\varepsilon$  可以任意小, 故  $M = 0$ . 这样就完成了 Cauchy 积分定理的证明.

### §3.3 Cauchy 积分定理的推论

由 Cauchy 积分定理, 马上可以得到以下

**推论** 设函数  $f(z)$  在单通区域  $D$  内解析,  $z_1, z_2 \in D$ , 则积分  $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$  与  $z_1$  到  $z_2$  的路径无关.

**证明** 任取  $D$  内由  $z_1$  到  $z_2$  的两条路径  $C_1$  和  $C_2$ , 有

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = \int_{C_1+C_2^-} f(z) dz = 0,$$

其中前两步都是用积分的基本性质, 最后一步用了 Cauchy 积分定理, 因为  $C_1 + C_2^-$  构成  $D$  内的围线. 证毕.

现在我们将积分的起点固定在  $z_0$ , 而让终点  $z$  变化, 这就是变上限积分. 由上面的推论, 这一变上限积分是  $z$  的单值函数, 类似于实变函数的情况, 我们有下列结论

**定理** (变上限积分) 设函数  $f(z)$  在单通区域  $D$  内解析,  $z_0 \in D$  是定点, 则由  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  定义的函数在  $D$  内解析, 且  $F'(z) = f(z)$ .

**注** 在一元实变函数的相应定理中, 只要求被积函数  $f(x)$  连续, 而不必可导, 但这里必须要求  $f(z)$  解析, 否则积分与路径有关, 就不是上限  $z$  的单值函数了. 另外, 所考虑的区域必须是单通的, 这一点也很重要.

**证明** 考虑  $z \in D$ , 任取  $z_0$  到  $z$  的路径, 记作  $C_1$ , 又任取  $z_0$  到  $z + \Delta z$  的路径, 记作  $C_2$ , 当然  $C_1$  和  $C_2$  都应在  $D$  内. 又记  $z$  到  $z + \Delta z$  的线段为  $P$ , 只要  $\Delta z$  足够小,  $P$  也必在  $D$  内. 今

$$F(z) = \int_{C_1} f(\zeta) d\zeta, \quad F(z + \Delta z) = \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta.$$

由上面的推论,  $\int_{C_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{C_1} f(\zeta) d\zeta + \int_P f(\zeta) d\zeta$ , 则

$$\Delta F \equiv F(z + \Delta z) - F(z) = \int_P f(\zeta) d\zeta,$$

由上节例 1, 又有  $\int_P f(\zeta) d\zeta = f(z)\Delta z$ , 故

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_P [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

而

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_P [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_P |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta|.$$

由于  $f(z)$  在  $D$  内解析, 故必在  $D$  内连续, 所以,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $|\zeta - z| < \delta$  时, 有  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . 今取  $|\Delta z| < \delta$ , 则线段  $P$  上的各点均满足  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ , 于是

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_P |d\zeta| = \varepsilon,$$

也就是说,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z), \quad z \in D.$$

证毕.

类似于实变积分, 下面引入原函数的概念.

**定义 (原函数)** 设函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 若有函数  $\Phi(z)$  满足  $\Phi'(z) = f(z)$ , 则  $\Phi(z)$  称为  $f(z)$  的一个不定积分或原函数.

**注** ① 本来在这一定义中并没有必要要求  $f(z)$  解析, 但后面我们会看到, 当  $\Phi(z)$  解析 (因为  $\Phi'(z) = f(z)$  存在), 则  $\Phi'(z)$  亦必解析, 从而  $f(z) = \Phi'(z)$  也解析. 换句话说, 如果  $f(z)$  不解析, 它也不可能存在原函数. 所以上述定义只针对解析函数就是很自然的了. ② 原函数显然不是唯一的, 因为如果  $\Phi(z)$  是  $f(z)$  的原函数, 则  $\Phi(z) + c$  也是它的原函数, 其中  $c$  是复常数. 但任意两个原函数也只能相差一个常数, 因为如果  $\Phi(z)$  和  $\Psi(z)$  都是  $f(z)$  的原函数, 则  $[\Psi(z) - \Phi(z)]' = 0$ , 由此易证  $\Psi(z) - \Phi(z) = c$ .

定义了原函数, 就可以给出一个计算积分的公式, 但仍然要注意它的条件.

**定理 (Newton-Leibniz 公式)** 设函数  $f(z)$  在单通区域  $D$  内解析,  $\Phi(z)$  是  $f(z)$  的任一原函数, 则

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z, z_0 \in D \quad (14)$$

**证明** 记  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ , 则  $F'(z) = f(z)$ , 又已知  $\Phi(z)$  是  $f(z)$  的原函数, 则根据上面的讨论有  $\Phi(z) = F(z) + c$ . 以  $z_0$  代入, 可得  $\Phi(z_0) = F(z_0) + c = c$ , 所以  $F(z) = \Phi(z) - c = \Phi(z) - \Phi(z_0)$ , 此即式 (14). 证毕.

**例 1** 利用这一公式, 马上可以得到式 (5).

**例 2** 在不包含原点的单通区域内计算积分  $\int_a^b \frac{1}{z} dz$ , 其中  $b \neq a$ .

**解**  $1/z$  在去掉原点的复平面上是解析的, 但这是复通区域, 在其中积分可能与路径有关. 上节例 6 证实了这一点. 这样, 如果不指定路径, 则积分就没有意义. 但在不包含原点的单通区域内, 比如右半平面, 则积分与路径无关.  $1/z$  的原函数是  $\operatorname{Ln} z$ , 根据上面的公式 (14),

$$\int_a^b \frac{1}{z} dz = \operatorname{Ln} b - \operatorname{Ln} a.$$

在所考虑的单通区域内,  $\operatorname{Ln} z$  可以分出单值分支, 所以结果是确定的, 而且与所取的分支无关. 事实上, 取定一个单值分支, 其中  $a$  和  $b$  的辐角分别为  $\theta_a$  和  $\theta_b$ , 则

$$\int_a^b \frac{1}{z} dz = \ln |b| - \ln |a| + i(\theta_b - \theta_a).$$

若取定另一分支, 其中  $a$  和  $b$  的辐角分别为  $\theta_a + 2k\pi$  和  $\theta_b + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), 易见结果不变.

但是, 对于不同的单通区域, 结果却可能不同. 比如当  $a = i$ ,  $b = -i$ , 在单通区域  $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$  内 (即去掉  $x$  轴正半轴的复平面),  $\theta_b - \theta_a = \pi$ , 积分结果为  $\pi i$ ; 但在单通区域  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$  内 (即去掉  $x$  轴负半轴的复平面),  $\theta_b - \theta_a = -\pi$ , 积分结果为  $-\pi i$ .

以上结果可以这样理解, 在单通区域  $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$  内, 沿各种可能路径的积分等于沿左半单位圆由  $i$  到  $-i$  的积分, 记作  $I_1$ , 而在单通区域  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$  内, 沿各种可能路径的积分等于沿右半单位圆由  $i$  到  $-i$  的积分, 记作  $I_2$ ,  $I_1 - I_2$  等于沿单位圆正向的积分, 由上节例 6, 它等于  $2\pi i$ , 所以  $I_1 \neq I_2$  就是很自然的. 而且, 上面的计算也给出  $I_1 - I_2 = 2\pi i$ , 与上节例 6 一致, 如所期望.

### §3.4 复通区域的 Cauchy 积分定理

上节讨论 Cauchy 积分定理及其相关结论时, 我们多次强调单通区域, 因为在复通区域内, 它一般是不能成立的. 不过在复通区域  $D$  内, 只要围线  $C$  及其内部完全在  $D$

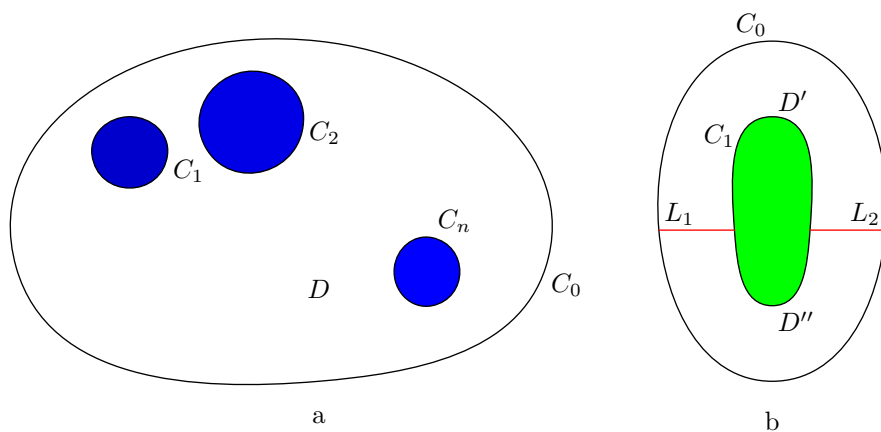


图 5: 复通区域及其 Cauchy 积分定理的证明

内, 它还是成立的. 比如  $1/z$  在去掉原点的复平面上是解析的, 这是复通区域, 在其中 Cauchy 积分定理不能成立, 因为沿单位圆的积分就不为 0, 但对于不包围原点的围线, 比如右半平面上的围线, 积分为 0. 另一方面, 我们知道,  $1/z$  在以原点为圆心的一切圆周上, 其积分结果相同. 这是复通区域的 Cauchy 积分定理的一个特例. 本小节就是要讨论 Cauchy 积分定理在复通区域内的推广形式.

考虑  $n+1$  条围线  $C_0, C_1, \dots, C_n$ , 其中  $C_1, \dots, C_n$  全在  $C_0$  内部, 且互不相交也互不包含, 如图 5a. 在  $C_0$  内部而在  $C_1, \dots, C_n$  外部的点集构成一个复通区域  $D$ , 它的边界包括以上各围线, 称为复围线  $C$ , 即

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-,$$

其中  $C_0$  取正向, 而  $C_1, \dots, C_n$  取反向, 以便沿边界绕行时, 其所包围的区域  $D$  总在左边.

**定理** (复通区域的 Cauchy 积分定理) 设  $D$  是由复围线  $C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-$  围成的复通区域, 函数  $f(z)$  在  $\bar{D}$  上解析, 则

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz + \int_{C_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{C_n^-} f(z) dz = 0, \quad (15a)$$

或

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (15b)$$

**注** 定理的条件可以减弱为  $f(z)$  在  $D$  内解析, 在  $\bar{D}$  上连续.

**证明** 考虑只有两条围线  $C_0$  和  $C_1$  的情况. 如图 5b, 作线段  $L_1$  和  $L_2$  连接  $C_0$  和  $C_1$ , 这样区域  $D$  就被分为  $D'$  和  $D''$  (但注意  $D \neq D' \cup D''$ ), 显然  $D'$  和  $D''$  都是单通区域, 而且  $f(z)$  在  $\bar{D}'$  和  $\bar{D}''$  上解析, 根据 Cauchy 积分定理, 有

$$\int_{\partial D'} f(z) dz = 0, \quad \int_{\partial D''} f(z) dz = 0,$$

所以

$$\int_{\partial D' + \partial D''} f(z) dz = 0,$$

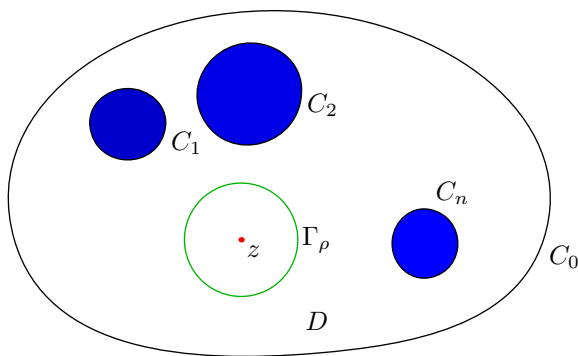


图 6: Cauchy 积分公式的证明

但  $\partial D' + \partial D'' = C_0 + C_1^- + L_1 + L_2 + L_1^- + L_2^-$ , 而  $\int_{L_1+L_1^-} f(z) dz = 0$ ,  $\int_{L_2+L_2^-} f(z) dz = 0$ , 所以

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz + \int_{C_1^-} f(z) dz = 0,$$

此即式 (15a), 由积分的基本性质易得式 (15b). 对于有多条围线的情况, 可以类似证明. 证毕.

以后我们说到 Cauchy 积分定理, 就包括复通区域的情况. 比较式 (15a) 与 Cauchy 积分定理的等价表述, 可以看出, 只要积分路径包括全部的边界, 那么复通与单通情况下的 Cauchy 积分定理在形式上并没有什么区别.

**例 3** 由上面的定理和前面的结果 (7) 可知

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & (n=1), \\ 0, & (n \in \mathbb{Z}, n \neq 1), \end{cases}$$

其中  $C$  是包围  $a$  点的任一围线.

如果围线  $C$  不包围  $a$  点, 则积分显然为 0. 于是, 当  $n \neq 1$  时, 无论围线  $C$  是否包围  $a$  点, 积分都是 0. 但是必须注意, 对于  $n > 1$ , 围线不能经过  $a$  点, 否则积分不存在.

## §4 Cauchy 积分公式及其推论

### §4.1 Cauchy 积分公式

由 Cauchy 积分定理, 可以推出下面的 Cauchy 积分公式, 我们把它写成定理.

**定理 (Cauchy 积分公式)** 设区域  $D$  的边界是围线或复围线  $C$ , 函数  $f(z)$  在  $\bar{D}$  上解析, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D. \quad (16)$$

**注** ① Cauchy 积分公式表明, 对于解析函数, 只要边界上的函数值给定, 则区域内的函数值也就完全确定了. 这说明函数值在各点的分布是互相牵制、紧密关联的, 其实 Cauchy 积分定理也表明了这种关联. 而上一章的 CR 条件则表明解析函数的实部和虚部

也互相牵制、紧密关联, 给定了其中一个, 另一个也就确定了 (最多可以差一常数项). 可见解析性对于复变函数是一个很强的限制. 在实变函数中, 没有任何类似的结论, 无论要求函数多么光滑, 其变化都还是可以相当任意的, 区间端点的函数值完全不能决定区间内部的函数值. ② 将公式改写为

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a), \quad a \in D \quad (16')$$

则可以用来计算某些积分. ③ 定理的条件可以减弱为  $f(z)$  在  $D$  内解析, 在  $\bar{D}$  上连续.

④ 由 Cauchy 积分定理可以推出 Cauchy 积分公式 (见下面的证明), 反过来, 由 Cauchy 积分公式也可以推出 Cauchy 积分定理, 所以两者是等价的. 事实上, 设  $F(z)$  是  $\bar{D}$  上的任意解析函数, 则  $(z-a)F(z)$  也是  $\bar{D}$  上的解析函数, 根据 Cauchy 积分公式, 就有  $\int_C F(z) dz = \int_C [(z-a)F(z)]/(z-a) dz = 2\pi i [(z-a)F(z)]|_{z=a} = 0$ , 这就是 Cauchy 积分定理.

**证明** 设  $D$  的边界是复围线  $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ .  $\forall z \in D$ , 以  $z$  为中心,  $\rho$  为半径作圆周  $\Gamma_\rho: |\zeta - z| = \rho$ , 使  $\Gamma_\rho$  在  $C_0$  的内部, 而在  $C_1, \cdots, C_n$  的外部. 今  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  在  $C + \Gamma_\rho^-$  所围成的区域 (即区域  $D$  挖去闭圆  $|\zeta - z| \leq \rho$  后所剩余的点集) 及其边界上解析. 由 Cauchy 积分定理和积分的基本性质, 有

$$0 = \int_{C+\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

所以

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

根据式 (7), 有

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z).$$

结合两式, 可得

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

于是

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| \leq \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_\rho} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta|.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D$  内解析, 故在  $\zeta = z$  处连续, 故  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $|\zeta - z| < \delta$  时, 有  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon/2\pi$ . 取  $\rho < \delta$ , 则上式在  $\Gamma_\rho$  上成立, 于是

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \int_{\Gamma_\rho} |d\zeta| = \varepsilon.$$

这就是说, 只要  $\rho$  足够小, 上式就成立. 但上式左边实际上与  $\rho$  无关, 所以它必须为 0, 如此即得式 (16). 证毕.

**例 1** 计算积分  $I = \int_C \frac{dz}{z^2 - 1}$ , 其中围线  $C$  是: (1)  $|z| = 1/2$ ; (2)  $|z - 1| = 1/2$ ; (3)  $|z + 1| = 1/2$ ; (4)  $|z| = 2$ .

解 (1) 由于被积函数在围线  $C$  及其内部解析, 故  $I = 0$ .

(2) 由式 (16'),

$$I = \int_{|z-1|=1/2} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z-1|=1/2} \frac{1/(z+1)}{z-1} dz = 2\pi i \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} = \pi i.$$

(3) 由式 (16'),

$$I = \int_{|z+1|=1/2} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z+1|=1/2} \frac{1/(z-1)}{z+1} dz = 2\pi i \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} = -\pi i.$$

(4) 由复通区域的 Cauchy 积分定理和 (2)、(3) 的结果,

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z-1|=1/2} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{|z+1|=1/2} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - \pi i = 0.$$

## §4.2 \*无界区域的 Cauchy 积分公式

既然解析函数在围线上的函数值可以决定其内部的函数值, 人们自然会问, 围线上的函数值是否也可以决定其外部的函数值? 答案就在下面的定理中.

**定理** (无界区域的 Cauchy 积分公式) 设函数  $f(z)$  在围线  $C$  及其外部的无界区域  $D$  上解析, 且当  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z) \Rightarrow 0$ , 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D, \quad (17)$$

其中积分取  $C$  的反方向, 实即  $\partial D$  的正方向.

**注** ①  $z \rightarrow \infty$  时  $f(z) \Rightarrow 0$  (一致趋于 0) 的大意是  $f(z) \rightarrow 0$  的速度与  $z$  的辐角无关. 精确地说, 就是  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_0 > 0$  与  $\theta$  无关, 当  $|z| > R_0$  时, 就有  $|f(z)| < \varepsilon$ . ② 这一定理的条件也可以减弱为  $f(z)$  在  $D$  内解析, 在  $D + C$  上连续. ③ 如果  $f(z)$  在围线  $C$  的内部也解析, 则式 (17) 中的被积函数在围线  $C$  及其内部解析, 根据 Cauchy 积分定理, 积分为 0. 换句话说, 在  $D$  上,  $f(z) = 0$ . 由  $f(z)$  的连续性, 在  $C$  上也有  $f(z) = 0$ . 再根据 Cauchy 积分公式, 则在  $C$  的内部也有  $f(z) = 0$ . 这就是说, 在整个  $z$  平面上,  $f(z) \equiv 0$ . 这是什么原因呢? 根据假定,  $f(z)$  在整个  $z$  平面上解析 (称为整函数, entire function), 又因为  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z) \Rightarrow 0$ , 所以它一定是有界的 ( $\forall \varepsilon > 0, \exists R_0 > 0$ , 当  $|z| > R_0$  时,  $|f(z)| < \varepsilon$ , 而在闭圆  $|z| \leq R_0$  上,  $\exists M_0 > 0$ , 使  $|f(z)| \leq M_0$ , 取  $M = M_0 + \varepsilon$ , 则在整个  $z$  平面上  $|f(z)| < M$ , 即有界), 根据 Liouville 定理, 有界整函数必为常数 (见后), 而条件  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z) \Rightarrow 0$  使得该常数为 0. ④ 该定理可以推广到多条围线外的情况, 只要将式 (17) 右边看作各围线的积分之和即可.

**证明** 作大圆  $\Gamma_R: |\zeta| = R$ , 使得围线  $C$  和点  $z$  均在  $\Gamma_R$  内部, 根据 Cauchy 积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (18)$$

由此

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z) - \int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (19)$$

由定理条件,  $\forall \varepsilon > 0, \exists R_0 > 0$ , 当  $R > R_0$  时, 在  $\Gamma_R$  上可有  $|f(\zeta)| < \varepsilon/4\pi$ , 今取  $R > \max\{R_0, 2|z|\}$ , 则在  $\Gamma_R$  上还成立  $|\zeta - z| > R - |z| > R/2$ , 于是  $1/|\zeta - z| < 2/R$ , 故

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{\Gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{2}{R} \int_{\Gamma_R} |d\zeta| = \varepsilon.$$

但由式 (19) 可知, 上式左边实际上与  $R$  无关, 所以它必须为 0, 代入式 (18), 即得式 (17). 证毕.



### §4.3 解析函数的高阶导数

我们在前面曾提到, 解析函数存在各阶导数, 即一次可微导致任意次可微, 这是复变函数所特有的结论. 而且, 边界上的函数值不仅确定了所围区域内的函数值, 也确定了其中各阶导数的函数值. 下面关于高阶导数的定理给出了这一结论的精确表述.

**定理** (Cauchy 高阶导数公式) 设区域  $D$  以围线或复围线  $C$  为边界, 函数  $f(z)$  在闭域  $\bar{D}$  上解析, 则  $f(z)$  在区域  $D$  内有各阶导数, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (20)$$

**注** ① 将 Cauchy 积分公式 (16) 两边求导, 对右边交换求导与积分的次序, 立得一阶导数的 Cauchy 公式. 继续求导, 重复同样的操作, 即得 Cauchy 高阶导数公式. 这样的做法显然是不严格的, 因为求导与积分交换次序的合法性并未得到证明. 然而, 这一做法能帮助我们熟悉高阶导数公式, 并使得我们能够在记得 Cauchy 积分公式的情况下立即将高阶导数公式“推导”出来. ② 让我们再看看怎样可以做得严格一些. 以  $n = 1$  为例, 对  $z$  和  $z + \Delta z$  分别用 Cauchy 积分公式, 可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta, \quad (21)$$

两边取  $\Delta z \rightarrow 0$  的极限, 对右边交换求极限与积分的次序, 立得一阶导数的 Cauchy 公式. 类似可得高阶导数公式. 必须指出, 这样的做法仍然是不严格的, 因为求极限与积分交换次序的合法性也未得到证明. 不过, 我们已经向严格证明的方向迈进了重要的一步. ③ 类似于 Cauchy 积分公式, Cauchy 高阶导数公式也可以用来计算某些积分. ④ 定理的条件可减弱为  $f(z)$  在区域  $D$  上解析, 在闭域  $\bar{D}$  上连续.

**证明** 以下只证明  $n = 1$  的情况, 用数学归纳法可以证明一般情况. 由式 (21),  $\forall z \in D$ , 有

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \frac{|\Delta z|}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta \right|.$$

我们的思路是证明左边当  $\Delta z \rightarrow 0$  时可以任意小, 这样它的极限就必须为 0. 由于右边含有因子  $|\Delta z|$ , 故主要需证明右边的积分有界. 由于  $f(z)$  在闭域  $\bar{D}$  上连续, 故在  $C$  上有界, 设  $\max_{\zeta \in C} |f(\zeta)| = M$  (如此则  $|f(\zeta)| \leq M, \forall \zeta \in C$ ). 又设  $z$  与边界  $C$  的距离为  $d$ , 即  $\min_{\zeta \in C} |\zeta - z| = d$  (如此则  $|\zeta - z| \geq d, \forall \zeta \in C$ ). 今暂取  $|\Delta z| < d/2$ , 则  $|\zeta - z - \Delta z| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| > d - d/2 = d/2$ . 于是

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)} d\zeta \right| \leq \int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z - \Delta z|} |d\zeta| \leq \frac{M}{d^3/2} \int_C |d\zeta| = \frac{2ML}{d^3},$$

其中  $L$  是  $C$  的长度, 而

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{ML}{\pi d^3} |\Delta z|,$$

上式当  $|\Delta z| < d/2$  时成立, 若同时又有  $|\Delta z| < \varepsilon \pi d^3 / ML$ , 则上式左边  $< \varepsilon$ . 取  $|\Delta z| < \min\{d/2, \varepsilon \pi d^3 / ML\}$ , 则上式左边  $< \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ , 于是

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

证毕.

### §4.4 \*Liouville 定理

Cauchy 积分公式和高阶导数公式有许多有趣的推论, 我们只介绍其中的一个, 即 Liouville 定理, 在下一小节中, 我们要用它来证明代数基本定理. 我们在前面曾提到整函数 (entire function), 下面正式给出定义.

**定义** (整函数) 在整个  $z$  平面上解析的函数称为整函数.

**例** 多项式、指数函数、正弦、余弦等函数都是整函数.

**定理** (Liouville) 有界整函数  $f(z)$  必为常数.

**注** 这一定理表明, 一个解析函数, 要么有奇点, 要么当  $z \rightarrow \infty$  时, 至少在某些方向是无限的, 除非是常数. 因此, 不存在什么处处解析、处处有限而非平庸的“理想”解析函数. 这使得我们对于解析函数的函数值分布的特性有了一个大致图象.

**证明** 由于  $f(z)$  有界, 故  $\exists M > 0, \forall z \in \mathbb{C}$ , 有  $|f(z)| \leq M$ . 今任取固定点  $z$ , 作圆周  $\Gamma_R: |\zeta - z| = R$ , 由高阶导数公式

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

故

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{R^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \int_{\Gamma_R} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

今  $\forall \varepsilon > 0$ , 只要  $R > M/\varepsilon$ , 就有  $|f'(z)| < \varepsilon$ , 但  $f'(z)$  实际上与  $R$  无关, 故  $f'(z) = 0$ , 又因为  $z$  是任意的, 故  $f(z)$  为常数. 证毕.

### §4.5 \*代数基本定理

在复变函数理论中, 可以很简单地证明代数基本定理, 这是复变函数理论的应用之一.

**定理** (代数基本定理) 在  $z$  平面上,  $n$  次多项式  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  至少有一个零点.

**证明** 设  $P_n(z)$  在  $z$  平面上没有零点, 则  $f(z) = 1/P_n(z)$  在  $z$  平面上解析, 即为整函数. 又

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n \sum_{k=0}^n a_k z^{-(n-k)}} = 0,$$

所以  $f(z)$  有界. 事实上, 由上面的极限可知,  $\exists R > 0$ , 当  $|z| > R$  时, 有  $|f(z)| < 1$ , 而由  $f(z)$  的连续性, 在  $|z| \leq R$  上,  $\exists M > 0$ , 使  $|f(z)| \leq M$ , 所以在  $z$  平面上,  $|f(z)| < M + 1$ , 即有界. 由 Liouville 定理, 在  $z$  平面上,  $f(z)$  为常数, 从而  $P_n(z)$  为常数, 这显然是不对的. 证毕.

**习题** 计算下列积分

$$1. \int_{|z|=2} \frac{1}{z^4 - 1} dz \quad 2. \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z-2)^2} dz.$$

## 补充习题

计算下列积分.

$$1. \int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^{n+1}} dz, \text{ 其中 } n = 1, 2, \dots.$$

答案:  $\pi i [1 + (-)^n]/n!$ .

$$2. \int_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z^4} dz.$$

答案: 0.

$$3. \int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}, \text{ 其中 } n = 1, 2, \dots.$$

答案:  $2\pi i C_{2n}^n$ .

$$4. \int_{|z|=2} \frac{\sin(e^z)}{z} dz.$$

答案:  $2\pi i \sin 1$ .

$$5. \int_{|z|=2} \frac{e^z}{\cosh z} dz.$$

提示:  $\pm i\pi/2$  是奇点, 将原积分化为  $z \mp i\pi/2 = \delta e^{i\theta}$  上的积分之和, 其中  $\delta$  很小, 然后作变换  $\zeta = e^z$ . 第五章补充习题 10 可与本题互相印证. 答案:  $4\pi i$ .

$$6. (1) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}, \quad (2) \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}, \quad (3) \int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}, \quad (4) \int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|.$$

答案:  $2\pi i, \quad 0, \quad 0, \quad 2\pi$ .