一．和的分布

例 1

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

令：$Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的分布律.

例 1（续）

解：

由于X与Y的取值都是1，　2，　3，　4，

可知随机变量$Z=X+Y$的取值为2，　3，　4，　5，　6，　7，　8

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,\quad Y=1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=1,\quad Y=2\}+P\{X=2,\quad Y=1\}=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8};$$

$$P\{Z=4\}$$

$$=P\{X=1,\quad Y=3\}+P\{X=2,\quad Y=2\}+P\{X=3,\quad Y=1\}$$

$$=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24};$$

例 1（续）

$$P\{Z=5\}$$
$$=P\{X=1,\quad Y=4\}+P\{X=2,\quad Y=3\}$$
$$+P\{X=3,\quad Y=2\}+P\{X=4,\quad Y=1\}$$
$$=0+0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=6\}$$
$$=P\{X=2,\quad Y=4\}+P\{X=3,\quad Y=3\}+P\{X=4,\quad Y=2\}$$
$$=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=7\}=P\{X=3,\quad Y=4\}+P\{X=4,\quad Y=3\}=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

返回主目录

例 1（续）

$$P\{Z=8\}=P\{X=4,\quad Y=4\}=\frac{1}{16}.$$

由此得 $Z=X+Y$ 的分布律为

Z	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的 Poisson 分布，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的分布律.

解：

由随机变量 X 与 Y 的取值都是 0，1，2，$\cdots$,

可知随机变量 $Z = X + Y$ 的取值也是 0，1，2，$\cdots$,

而且，

$$P\{Z = n\} = P\{X + Y = n\} = P\left\{\bigcup_{k=0}^{n}(X = k,\ Y = n - k)\right\}$$

例 2（续）

$$=\sum_{k=0}^{n} P\{X=k,\quad Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}P\{Y=n-k\} \quad (\text{随机变量 } X \text{ 与 } Y \text{ 的独立性})$$

$$=\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k}$$

例 2（续）

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

即，

$$P\{Z=n\}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$(n=0,\quad 1,\quad 2,\quad \cdots)$$

由Poisson分布的定义，知$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的 Poisson 分布.

连续型随机变量和的分布

设$(X, \quad Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, \quad y)$，

令：$Z = X + Y$,

下面计算随机变量$Z = X + Y$的密度函数$f_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z = X + Y$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint_{x+y\le z} f(x, \quad y)dxdy$$

连续型随机变量和的分布

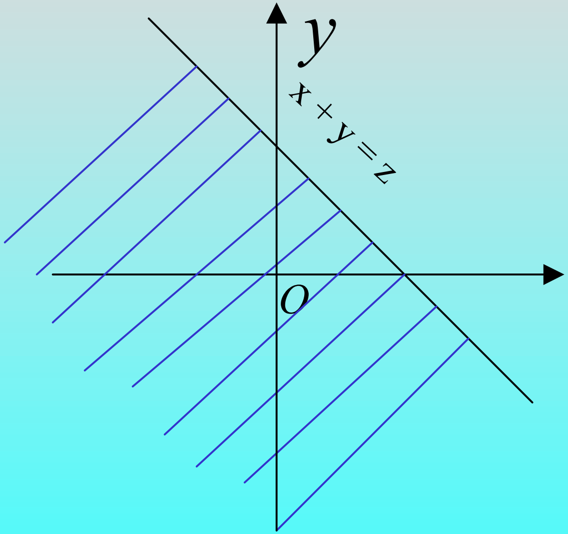
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, \quad y) dy$$

作变换：$y = u - x$

则有

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f(x, \quad u - x) du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad u - x) dx$$



连续型随机变量和的分布

注意里层的积分是u的函数：

$$g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ u-x)dx$$

即有 $$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} g(u)du$$

由分布函数与密度函数之间的关系，上式对z求导，可得$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z} g(u)du\right)=g(z)$$

连续型随机变量和的分布

即
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$$

注意到在前面的积分中

$$F_Z(z)=\iint_{x+y\le z} f(x,\ y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,\ y)dy$$

我们是先对y，后对x积分的，若将其改成先对x，后对y积分，通过类似的计算，有

连续型随机变量和的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,\ y)dy$$

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

或者

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

连续型随机变量和的分布

我们称上式为函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$ 的卷积，记作

$$f_X(x) * f_Y(y)$$

因此，我们有以下结论：

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则它们的和 $Z = X + Y$ 的密度函数等于 X 与 Y 密度函数的卷积：

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从区间 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

由题意，可知

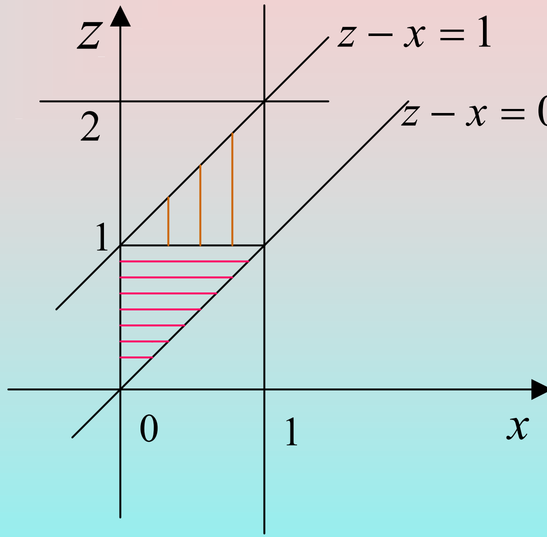
$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例 3（续）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$



$$0<x<1,\ 0<z-x<1$$

(1). 若$z\le 0$，或 $z\ge 2$，　$f_Z(z)=0$

(2). 若$0<z\le 1$，　$f_Z(z)=\int_0^z 1dx=z$

(3). 若$1<z<2$，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} 1dx=2-z$

综上所述，我们可得

$Z=X+Y$的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases} z & 0<z\le 1 \\ 2-z & 1<z<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

返回主目录

例 4

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，Y 服从 $\lambda = 1$ 的指数分布，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解:

由题意，可知

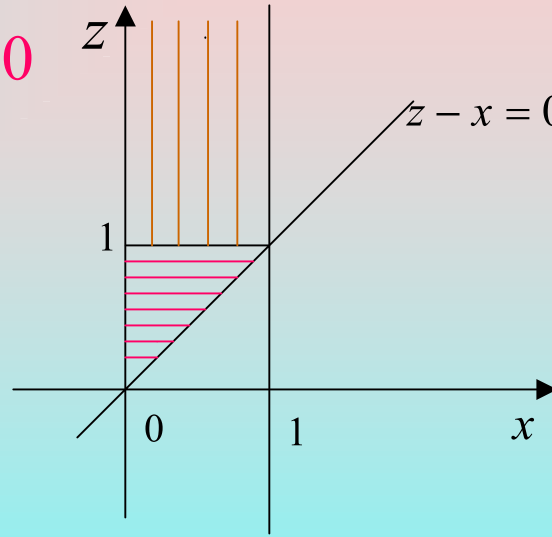
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

设随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

例 4（续）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx,\quad 0<x<1,\ z-x>0$$



(1). 若$z\le 0$， $f_Z(z)=0$

(2). 若$0<z\le 1$，

$$f_Z(z)=\int_0^z 1*e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^z e^x dx=1-e^{-z}$$

(3). 若$z>1$，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^1 e^x dx=e^{-z+1}-e^{-z}$$

例 4（续）

综上所述，我们可得 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 < z \le 1 \\ e^{-z+1} - e^{-z} & z > 1 \end{cases}$$

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

设随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,dx$$

例5（续）

在上式中e的指数上对x作配方法，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作积分变换$\frac{u}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}$，则有$\frac{du}{\sqrt{2}}=dx$，代入上式，有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

这表明，$Z\sim N(0,\ 2)$.

结　论

一般地，我们有如下结论：

如果随机变量X与Y相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$$

$$Z = X + Y,$$

则　$Z \sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

结　论

更一般地，我们有如下结论：

如果随机变量$X_1, \ X_2, \ \cdots, \ X_n$相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \ \sigma_i^2\right) \qquad \left(i=1, \ 2, \ \cdots, \ n\right)$$

又$a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_n$为$n$个实常数，

令：$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，

则 $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$

例 6

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

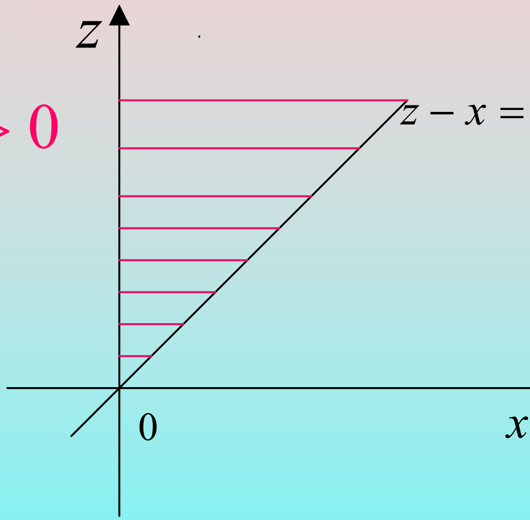
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

例 6（续）

设随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx \qquad x > 0,\ z - x > 0$$



(1) 当 $z \le 0$, $f_z(z) = 0.$

(2) 当 $z > 0$, $f_z(z) =$

$$= \int_0^z \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z-x}{2}}\,dx$$

例 6（续）

$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}(z-x)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

作积分变换 $t=\dfrac{x}{z}$，$dt=\dfrac{dx}{z}$

当 $x=0$时，$t=0$；当 $x=z$时，$t=1$.

例 6（续）

$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 (tz)^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}z\,dt$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}dt$$

由数学中B－函数的定义：

$$\mathrm{B}(s,\quad t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx\quad(s>0,\quad t>0)$$

以及B－函数与Γ－函数之间的关系：$\mathrm{B}(s,\quad t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

例 6（续）

可知， $f_Z(z)=\dfrac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

综上所述，我们有

例 6（续）

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

由此，我们得

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X\sim\chi^2(m),\ Y\sim\chi^2(n),$$

$Z=X+Y,$

则 $Z\sim\chi^2(m+n)$

二．商的分布

连续型随机变量商的分布

设$(X,\ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x,\ y)$，令：$Z=\dfrac{X}{Y}$，

下面计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数$f_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z=\dfrac{X}{Y}$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}$$

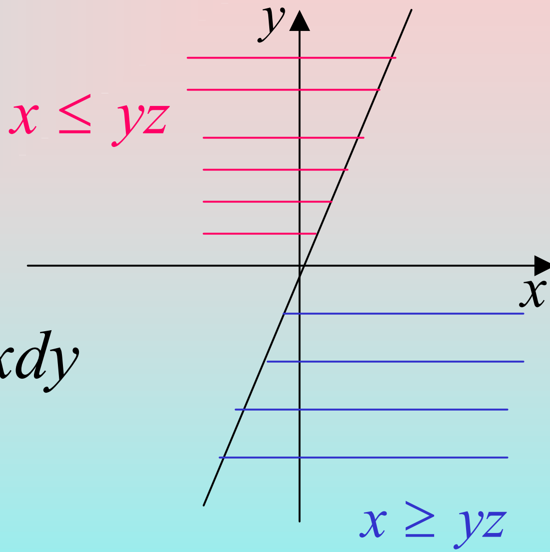
连续型随机变量商的分布

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z,\ y>0} f(x,\ y)dxdy+\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z,\ y<0} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x\le zy,\ y>0} f(x,\ y)dxdy+\iint\limits_{x\ge zy,\ y<0} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{zy} f(x,\ y)dx+\int_{-\infty}^{0}dy\int_{zy}^{+\infty} f(x,\ y)dx$$



连续型随机变量商的分布

在第一个积分 $\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, \quad y)dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$，当 $x = zy$ 时，$u = z$；

当 $x \to -\infty$ 时，注意到 $y > 0$，因而有 $u \to -\infty$；

$$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, \quad y)dx = \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z} f(uy, \quad y)ydu$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_0^{+\infty} yf(uy, \quad y)dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_0^{+\infty} |y| f(uy, \quad y)dy$$

连续型随机变量商的分布

同理，在第二个积分 $\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \quad y) dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$， 当 $x = zy$ 时， $u = z$；

当 $x \to +\infty$ 时，注意到 $y < 0$，因而有 $u \to -\infty$ ；

$$\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \quad y) dx = \int_{-\infty}^{0} dy \int_{z}^{-\infty} f(uy, \quad y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-y) f(uy, \quad y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| f(uy, \quad y) dy$$

连续型随机变量商的分布

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}|y|f(uy,\ y)dy+\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{0}|y|f(uy,\ y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(uy,\ y)dy\right)du$$

所以，由密度函数的定 义有

故

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,\ y)dy$$

连续型随机变量商的分布

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$f(x,\quad y)=f_X(x)f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$$

补充结论：

（1）设$(X,\ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x,\ y)$，令：$Z=X-Y$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,\ y)dy$$

（2）设$(X,\ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x,\ y)$，令：$Z=XY$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\ \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y},\ y\right)\frac{1}{|y|}dy$$

例 7

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的指数分布，令 $Z=\dfrac{X}{Y}$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

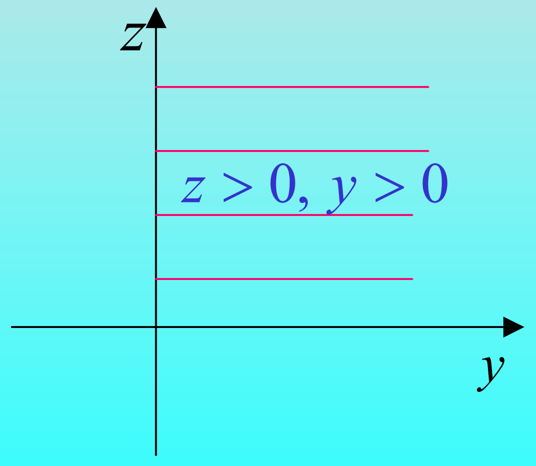
$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

例7（续）

设：$Z=\dfrac{X}{Y}$ 由随机变量 X 与 Y 相互独立性，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$$

$yz>0,\ y>0$



(1). 若 $z\le 0, f_Z(z)=0$.

(2). 若 $z>0$,

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}y\lambda_1e^{-\lambda_1yz}\lambda_2e^{-\lambda_2y}dy$$

例7（续）

$$=\lambda_1\lambda_2\int_0^{+\infty} y e^{-(\lambda_2+\lambda_1 z)y}\,dy=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2}$$

所以，$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1 z)^2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

三．其它的分布

本节的解题步骤

先求随机变量函数 $Z=g(X,\ Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$,

再求随机变量函数 $Z=g(X,\ Y)$ 的密度函数 $f_Z(z)=F'_Z(z)$,

例 8

设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，试求随机变量Z的密度函数.

解：

由题意，可知

$$f_X(x)=f_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

由于X与Y是相互独立的，所以,$(X,\ Y)$的联合密度函数为

例 8（续）

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (-\infty<x,\ y<+\infty)$$

所以，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$$

若 $Z\le 0$，则 $F_Z(z)=0$

若 $Z>0$，则 $F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,\ y)dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

例 8（续）

作极坐标变换 $x = r\cos\theta$， $y = r\sin\theta$， 则有

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr = \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

所以，$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z e^{-\frac{z^2}{2}} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

例 9

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim B(1,\ p)$，$Y \sim B(1,\ p)$ $(0 < p < 1)$，令 $\xi = \min(X,\ Y)$，$\eta = \max(X,\ Y)$，试求随机变量 ξ 与 η 的联合分布律及 ξ 与 η 各自的边缘分布律，并判断 ξ 与 η 是否相互独立？

解：

由随机变量 X 与 Y 的取值都为0与1，知

$$\xi = \min(X,\ Y),\quad \eta = \max(X,\ Y)$$

的取值也为0与1.

例 9（续）

$$P\{\xi=0,\quad \eta=0\}=P\{X=0,\quad Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$$

$$P\{\xi=0,\quad \eta=1\}=P\{X=0,\quad Y=1\}+P\{X=1,\quad Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=1\}+P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$=2p(1-p)$$

$$P\{\xi=1,\quad \eta=0\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{\xi=1,\quad \eta=1\}=P\{X=1,\quad Y=1\}$$

$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$$

例 9（续）

随机变量ξ与η的联合分布律及ξ与η各自的边缘分布律为，

$\xi \backslash \eta$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$1-p^2$
1	0	p^2	p^2
$p_{\cdot j}$	$(1-p)^2$	$1-(1-p)^2$	

由于 $0<p<1$，　所以，

$$P\{\xi=1,\quad \eta=0\}=0 \neq P\{\xi=1\}P\{\eta=0\}=p^2\cdot(1-p)^2$$

这表明，随机变量ξ与η不独立.

例 10

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的连续型随机变量，X_1 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$．令：

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

试求随机变量 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的密度函数．

解：

设随机变量 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x)$，密度函数为 $f_{(1)}(x)$.

例 10（续）

设随机变量 $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x)$，密度函数为 $f_{(n)}(x)$. 则

$$
\begin{aligned}
F_{(n)}(x) &= P\{X_{(n)} \le x\} \\
&= P\{\max(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) \le x\} \\
&= P\{\, X_1 \le x, \quad X_2 \le x, \quad \cdots, \quad X_n \le x \,\} \\
&= P\{X_1 \le x\} P\{X_2 \le x\} \cdots P\{X_n \le x\} \\
&= [F(x)]^n
\end{aligned}
$$

例 10（续）

所以，
$$f_{(n)}(x)=F'_{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left\{[F(x)]^n\right\}$$
$$=n[F(x)]^{n-1}F'(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$F_{(1)}(x)=P\{X_{(1)}\le x\}$$
$$=P\{\min(X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_n)\le x\}$$
$$=1-P\{\min(X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_n)>x\}$$
$$=1-P\{X_1>x,\quad X_2>x,\quad \cdots,\quad X_n>x\}$$

例 10（续）

$$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$$

$$=1-[1-P\{X_1\le x\}][1-P\{X_2\le x\}]\cdots[1-P\{X_n\le x\}]$$

$$=1-[1-F(x)]^n$$

所以，$$f_{(1)}(x)=F'_{(1)}(x)=\frac{d}{dx}\left\{1-[1-F(x)]^n\right\}$$

$$=n[1-F(x)]^{n-1}F'(x)$$

$$=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$$

例 11

设系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 $L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$ 并联而成，并且 L_i 的寿命为 X_i，它们都服从参数为 λ 的指数分布，试求系统 L 的寿命 Z 的密度函数.

解：

由于系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 $L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$ 并联而成，故有

$$Z = \max(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n),$$

又因为子系统 L_i 的寿命 X_i 服从参数为 λ 的指数分布，因此 X_i 的密度函数为

例 11（续）

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

X_i 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

所以，由例9知，

$$Z=\max(X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_n),$$

的密度函数为

$$f_Z(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}n\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

1 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质。
2 要理解二维随机变量的边缘分布以及与联合分布的关系，了解条件分布。
3 掌握二维均匀分布和二维正态分布。
4 要理解随机变量的独立性。
5 要会求二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布和函数的分布。

重点：随机变量的独立性、二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布函数的分布。

作业：P_{94} 1,3,5,7,9,11,14,17,18,19,20,21,23,26.