Lecture 5
第五讲

Definite Integrals
定积分

Zhenglu Jiang
姜正禄

Department of Mathematics, Sun Yat-sen University
Guangzhou 510275, China
中山大学数学系，广州 510275

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

目录

一、定义

设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的有界函数，并满足下列三点:

- 分割，即将该闭区间$[a,b]$任意分割成n个小闭区域$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$，其中$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$;
- 求和，即在每个小闭区间$[x_{i-1},x_i]$上任意取一点ξ_i，计算和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，其中$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，它表示$[x_{i-1},x_i]$的长度;

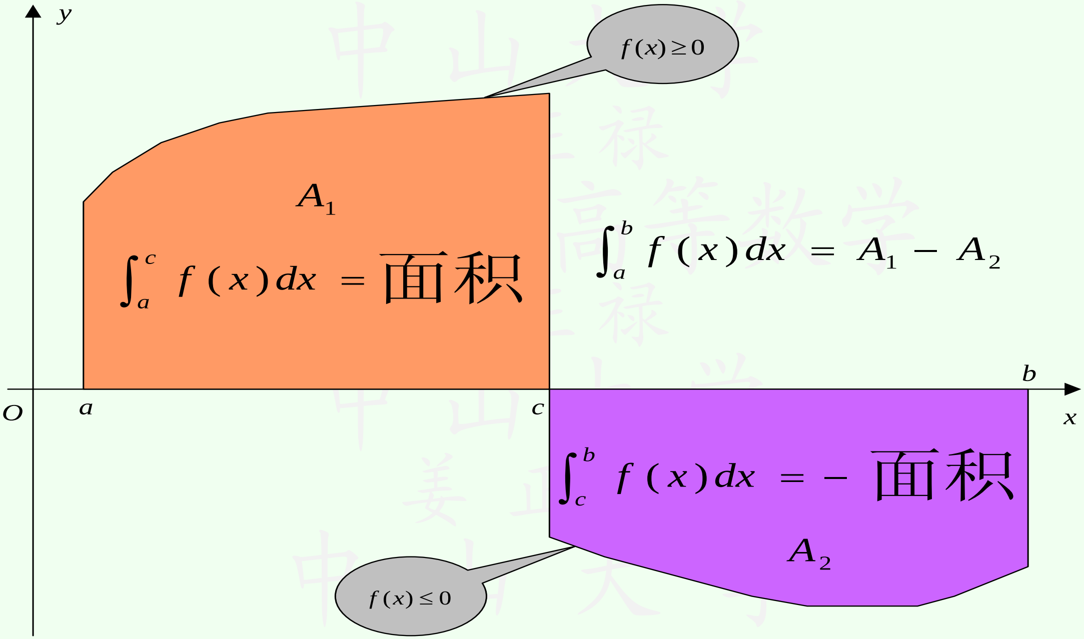
- **取极限**, 即对任意分割$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$和任意取点$\xi_i$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在且相等, 其中$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

则称该极限为$f(x)$在该闭区间$[a, b]$上的定积分. 记为$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

$$\int_a^b f(x)dx \quad \Leftarrow \boxed{\text{积分表达式} f(x)dx}$$

二、几何意义

平面上不同的曲边梯形面积的代数和



三、存在定理

定理1

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

定理2

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

定理3

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界，且单调上升或下降，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。

四、性质

线性运算, 可加性, 保序性, 积分中值定理

线性运算

$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都可积, α和β均为常数

$\Downarrow$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

可加性

$\boxed{f(x)\text{是}[a,b]\text{上的可积函数, } c\text{是}[a,b]\text{的分点}}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

保序性

$\boxed{f(x)\text{和}g(x)\text{是}[a,b]\text{上的可积函数, } f(x) \le g(x)}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)d(x) \le \int_a^b g(x)d(x)}$$

积分中值定理

$\boxed{f(x)\text{是闭区间}[a,b]\text{上的连续函数}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{至少有一点}\xi\in[a,b],\text{使得}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)}$

证明

$\boxed{\text{闭区间}[a,b]\text{上的连续函数}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{最值定理}\Rightarrow\text{介值定理}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{积分中值定理}}$

五、变上限积分

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积。称$\int_a^x f(t)dt$为自变量$x\in[a,b]$的变上限积分。

原函数存在定理

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则变上限积分所确定的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在区间(a,b)内可导且$\Phi'(x)=f(x)$，即$\Phi(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数。

微积分基本定理

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

称之为牛顿(Newton)—莱布尼茨(Leibniz)公式。

或记作

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

六、计算方法

定义、几何意义、换元法、分部积分

换元法

记$u=g(x)$，或$x=g^{-1}(u)$，$[a,b]\xrightarrow{g}[\alpha,\beta]$，

$[a,b]\xleftarrow{g^{-1}}[\alpha,\beta]$，且$\alpha=g(a)$，$\beta=g(b)$，则

$$\underbrace{\int f(g(x))g'(x)dx}_{\mathrm{I}}=\underbrace{\int f(u)du}_{\mathrm{II}}$$

已知II求I，是第一换元法；

已知I求II，是第二换元法.

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = H(x) + C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int f(u)du = H(g^{-1}(u)) + C.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du}$$

分部积分

$$\int_a^b v du = uv|_a^b - \int_a^b u dv$$

偶函数

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

奇函数

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

周期函数

$$\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{a}^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_{0}^{n}(x-[x])dx = ?$$

七、广义积分

无穷限的广义积分

定义1　设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，取$b>a$，若极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx。$$

这时也称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；若上述极限不存在，称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

类似地，若极限$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$收敛，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx。$$

设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，如果广义积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$和$\int_{-\infty}^0 f(x)dx$都收敛，则称上述两个广义积分之和为函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上的广义积分，记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} f(x)dx+\int_{-\infty}^0 f(x)dx,$$

也称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛；否则就称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$发散。上述广义积分统称为无穷限的广义积分。

无界函数的广义积分

定义2 设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，而在点a的右领域内无界，取$\varepsilon > 0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

存在，则称此极限为函数$f(x)$在$(a,b]$上的广义积分，仍然记作$\int_a^b f(x)dx$，这时也称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛。类似地，设函数$f(x)$在

$[a,b]$上除点$c(a<c<b)$外连续，而在点c的领域内无界，如果两个广义积分$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$都收敛，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

否则，就称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

八、应用

曲线的弧长

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

旋转体的体积与侧面积

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

$$V=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

曲线弧的质心与转动惯量

平面图形的面积

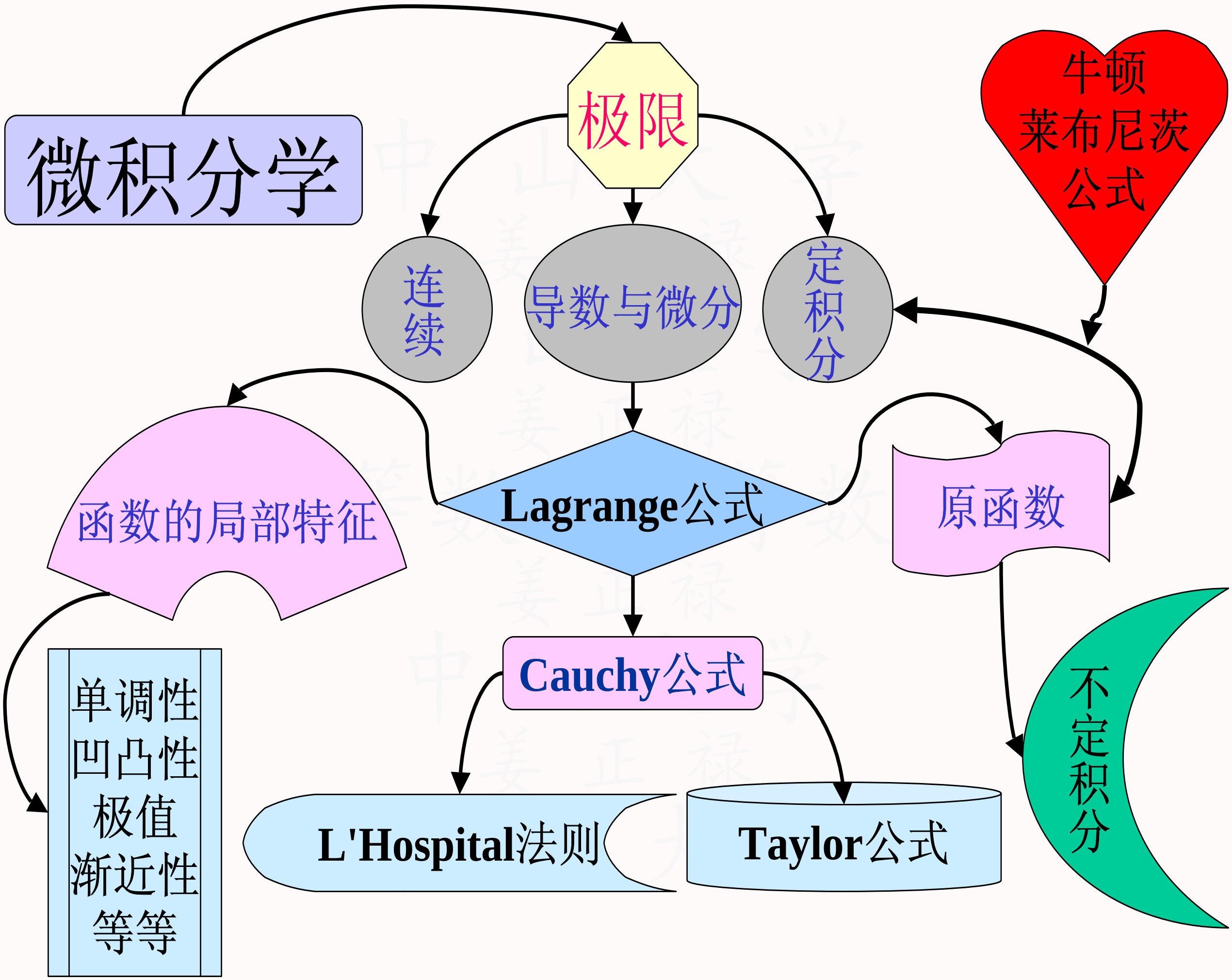
变力所作的功

小结

定积分、广义积分

$\Downarrow$

定义, 意义, 性质, 计算方法及其应用


微积分学
极限
牛顿
莱布尼茨
公式
连续
导数与微分
定积分
Lagrange公式
函数的局部特征
原函数
Cauchy公式
单调性
凹凸性
极值
渐近性
等等
不定积分
L'Hospital法则
Taylor公式

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!

中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY