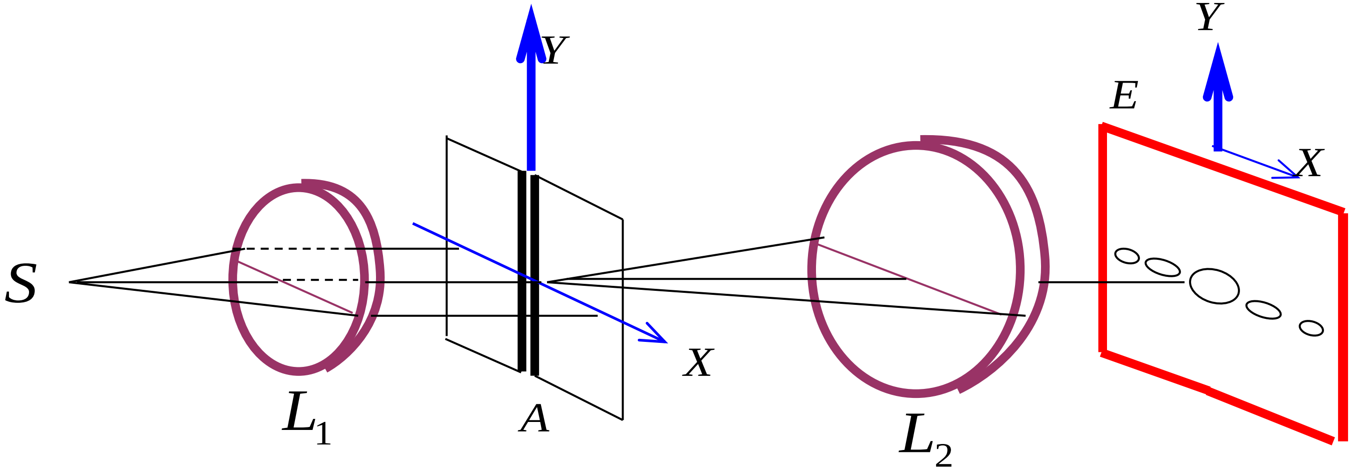
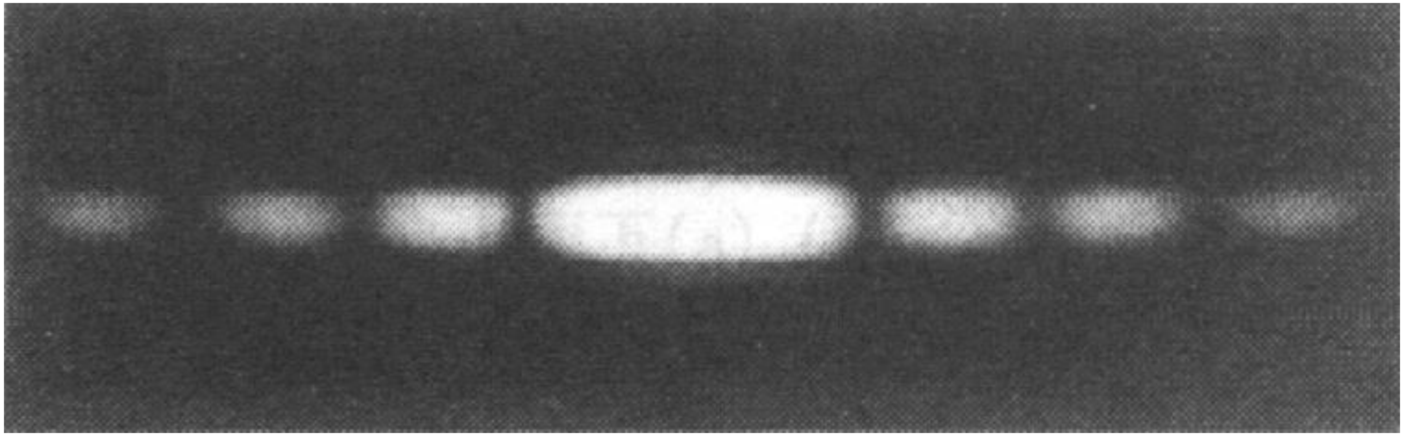
§4.4 单缝夫琅禾费衍射 P179

- 单缝夫琅和费衍射
  - 半波带法、矢量法
  - 单缝衍射因子的性质
  - 衍射曲线的性质

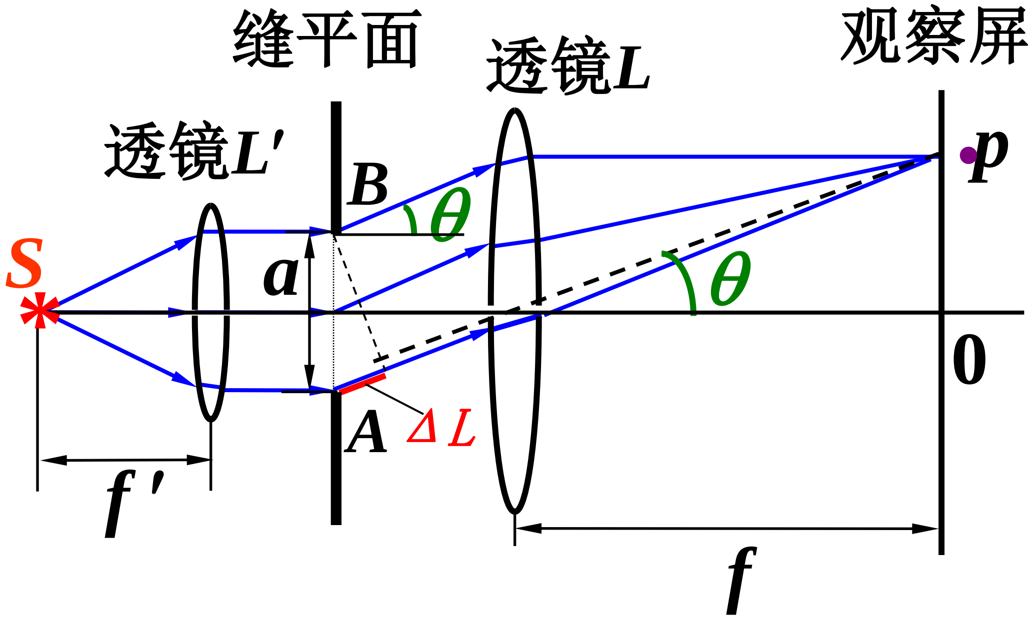
§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射





§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

- **装置和光路**



S：单色点/线光源

$\overline{AB} = a$（缝宽）

θ：衍射角

观察屏上任一点P的振动，可用积分法、半波带法和矢量图法求得

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

- i° 半波带法（自学）

$2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$

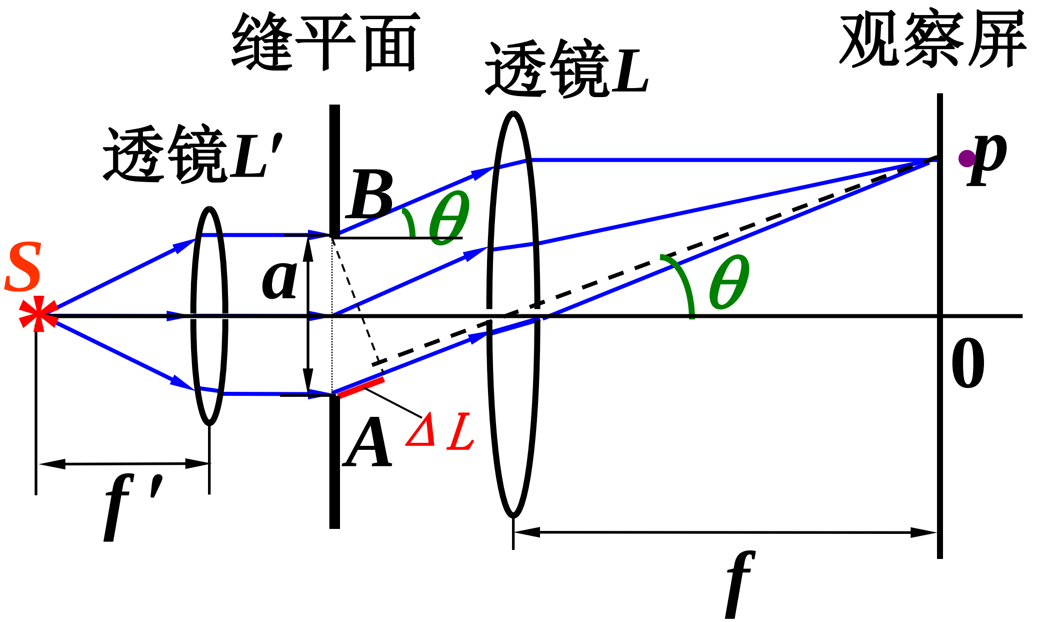
▲ $A \to p$和$B \to p$的

光程差为

$$\boxed{\Delta L = a\sin\theta}$$

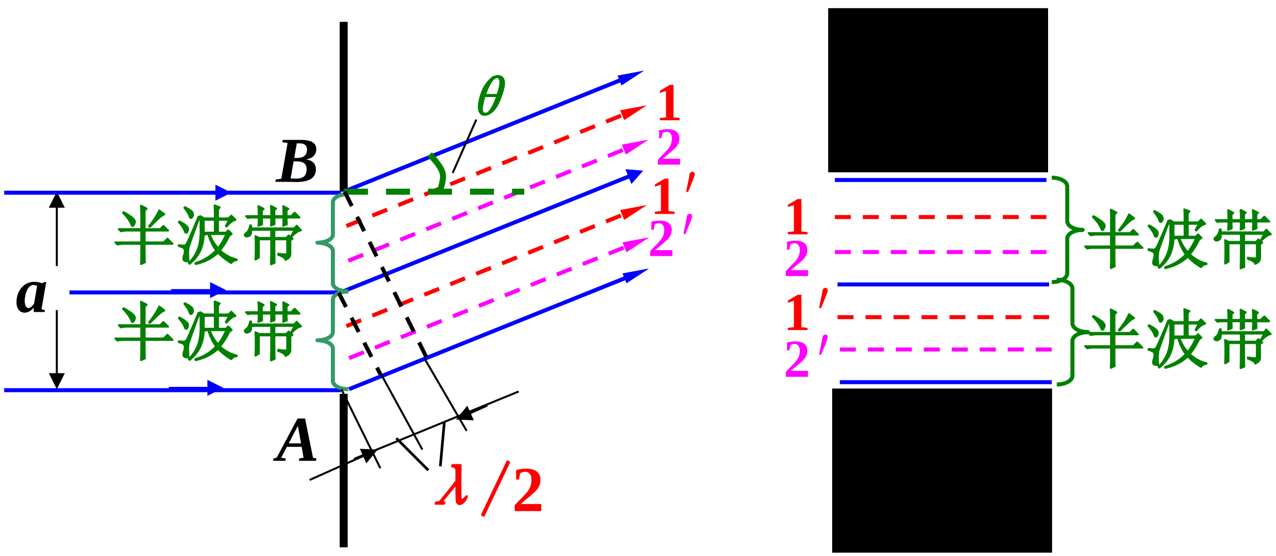
$\theta = 0$，$\Delta L = 0$

—— 中央明纹（中心）



§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

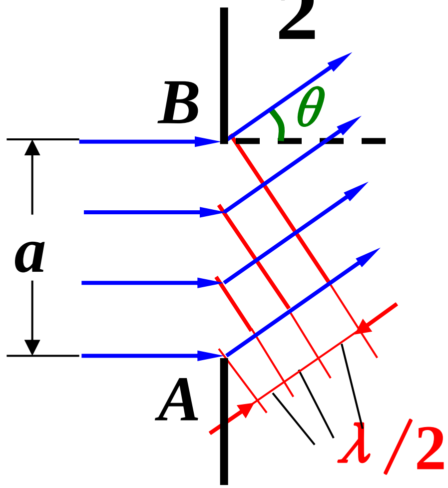
▲ 当$a\sin\theta=\lambda$ 时，可将缝分为两个“半波带”



两个“半波带”发的光在p处干涉相消形成暗纹。

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

▲当$a\sin\theta = \dfrac{3}{2}\lambda$时，可将缝分成三个“半波带”

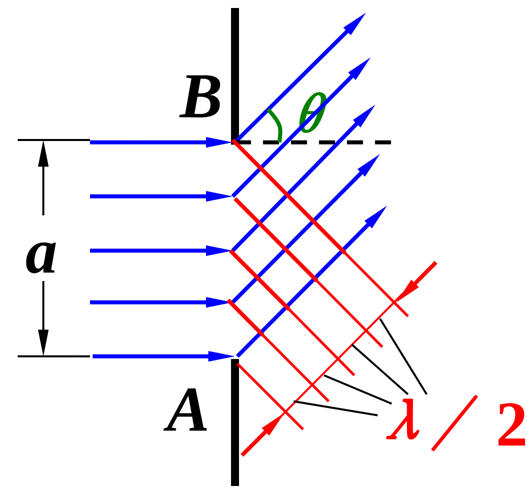


*P*处为明纹中心（近似）

▲当$a\ \sin\theta = 2\lambda$时，

可将缝分成四个“半波带”，

形成暗纹。



§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

- 一般情况:

$$a\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1,2,3\cdots$$

——暗纹

$$a\sin\theta = \pm(2k'+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k' = 1,2,3\cdots$$

——明纹（中心）

$$a\sin\theta = 0$$

——中央明纹（中心）

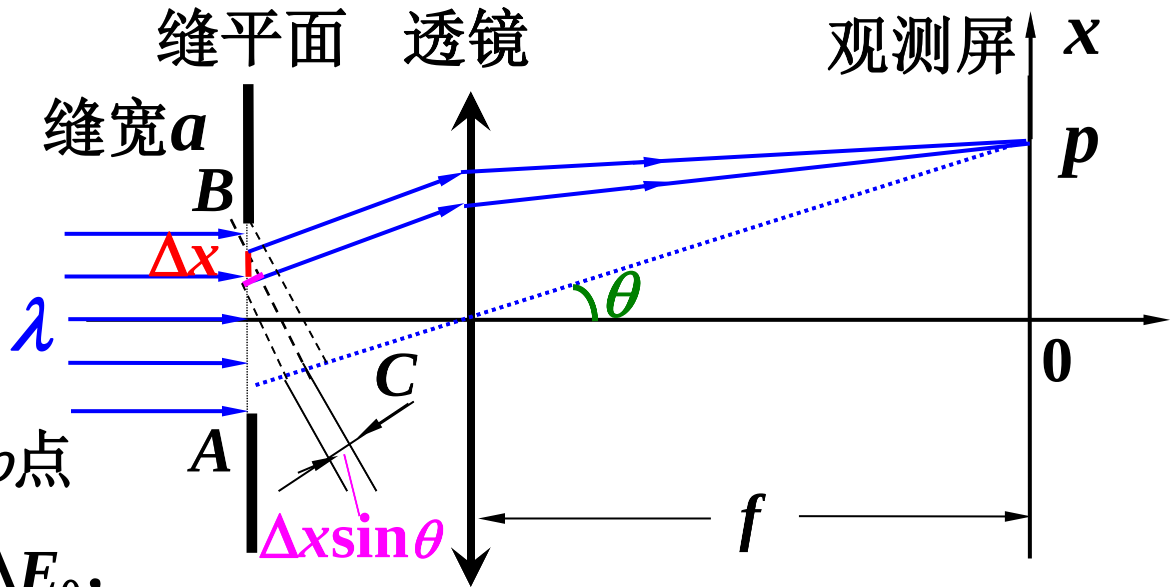
上述暗纹和中央明纹（中心）位置与实验是一致的；但其余明纹中心的位置与实验相比稍有偏离。

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

- ii° 矢量图法

将缝等分成 N 个窄带，每个窄带宽为：

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$



各窄带发的子波在 p 点振幅近似相等，设为 ΔE_0，

相邻窄带发的子波到 p 点的相位差为：

$$\Delta\phi = k\left(\Delta x \sin\theta\right) = \frac{a \cdot \sin\theta}{N} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad （N\text{通常很大}）$$

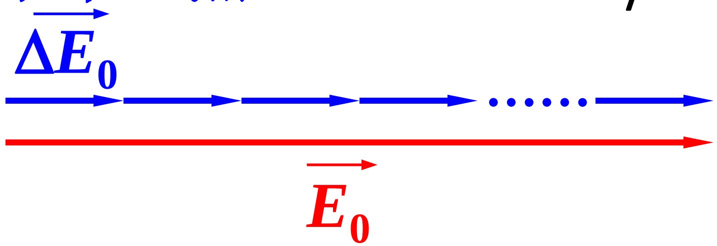
§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

$$\Delta\phi = k\left(\Delta x \sin\theta\right) = \frac{a\cdot\sin\theta}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$$

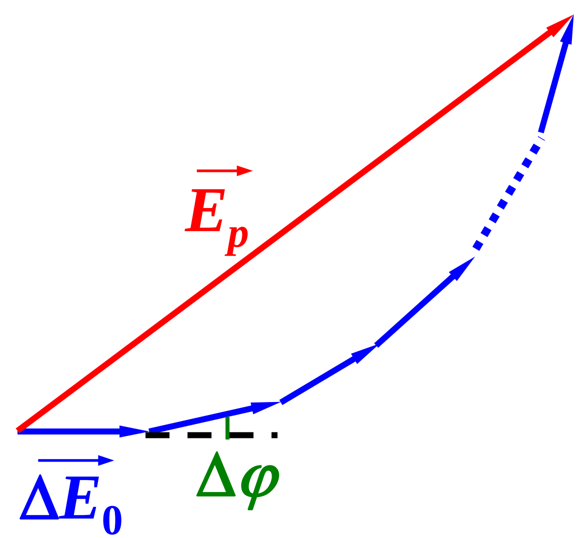
p点的合振幅E_p 就是各子波的振幅矢量和的模。

E_p 是多个同方向、同频率、同振幅、初相依次差一个恒量$\Delta\varphi$ 的电磁波相干叠加结果。

对于中心点：$\theta = 0$，$\Delta\varphi = 0$，　$E_0 = N\,\Delta E_0$ 。



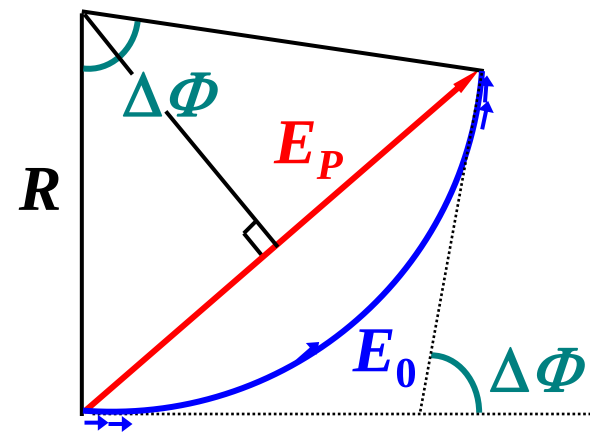
对于其他点 p: $\Delta\varphi \neq 0$，$E_p < E_0$ 。



当$N \to \infty$时，N个相接的折线将变为一个圆弧。

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

$$\Delta\Phi = N\Delta\varphi = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$



$$E_p = 2R\sin\frac{\Delta\Phi}{2}, \qquad E_0 = R\Delta\Phi$$

$$E_p = 2\frac{E_0}{\Delta\Phi}\sin\frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{E_0}{\Delta\Phi/2}\sin\frac{\Delta\Phi}{2}$$

令 $\alpha = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$, 有 $\boxed{E_p = E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$，单缝衍射复振幅

又 $I \propto E_p^2$ ，$I_0 \propto E_0^2$ ，

$\therefore$ p点的光强 $\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

$$\alpha = \frac{\pi\ a\sin\theta}{\lambda}$$

讨论： 由 $I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，可得到以下结果：

（1）主极大（中央明纹中心）位置：

$$\theta = 0\text{处，}\quad \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \rightarrow I = I_0 = I_{max}$$

（2）极小（暗纹）位置：

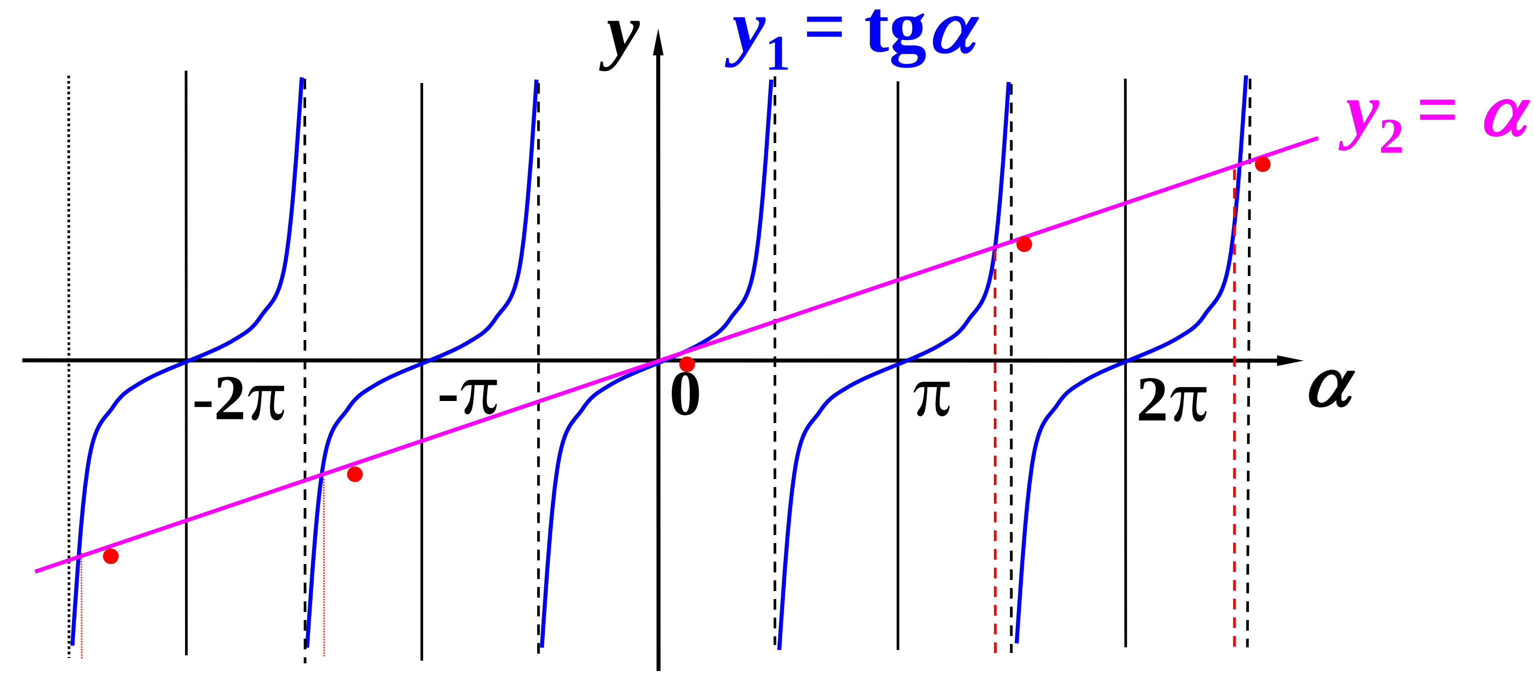
$$\alpha = \pm k\pi,\ k = 1,2,3\cdots\text{时，}\quad \sin\alpha = 0 \rightarrow I = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{由}\ \alpha = \dfrac{\pi\, a\sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi & \rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda \\ \text{或由}\quad N\Delta\varphi = \pm 2k\pi & \rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda \end{array}\right\}\ \text{一致}$$

这正是缝宽可以分成偶数个半波带的情形。

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

(3) 次极大位置： 满足 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=0 \ \rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=\alpha$

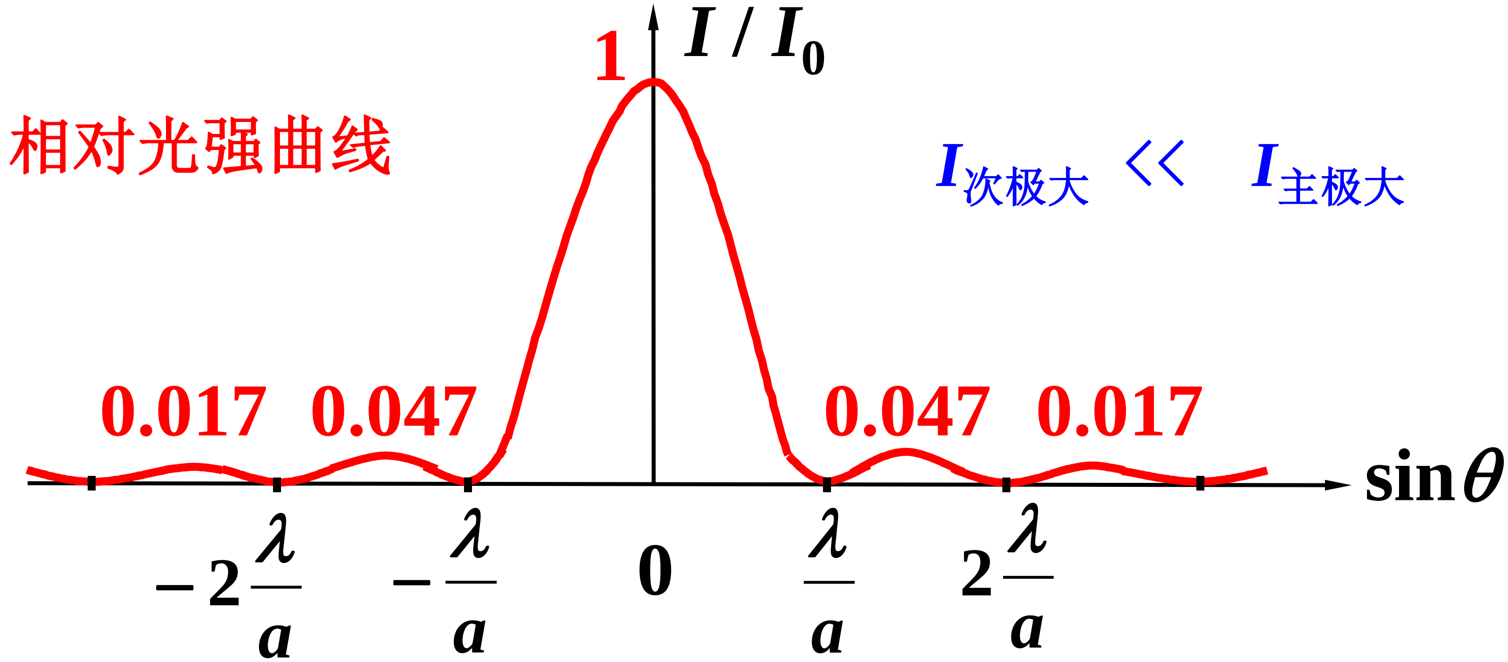


相应 ： $a\sin\theta = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \cdots$

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

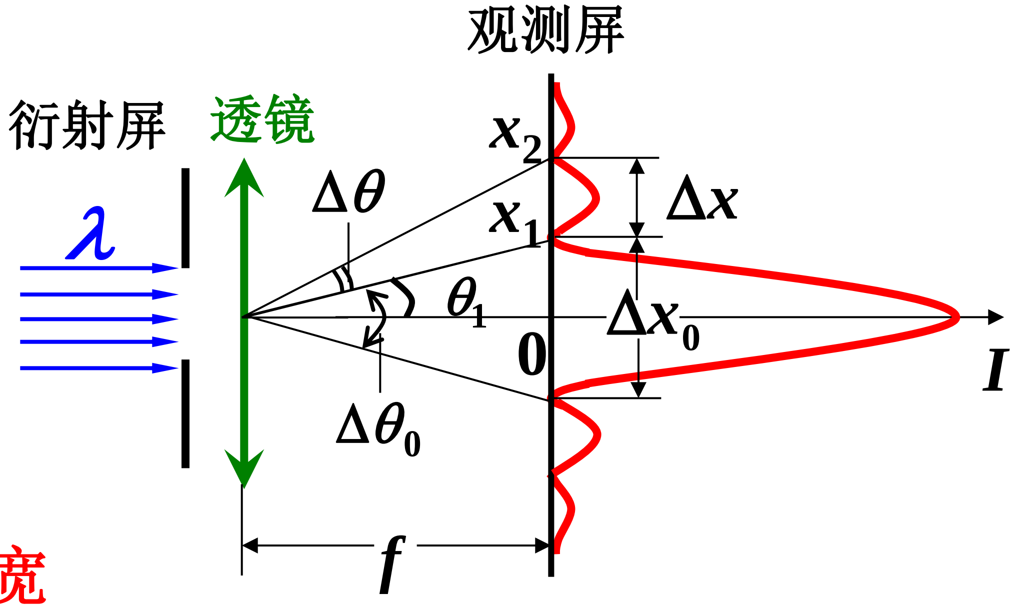
（4）光强： 将 $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

依次带入光强公式 $I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，得到从中央往外各次极大的光强依次为 $0.0472I_0$， $0.0165I_0$， $0.0083I_0$ $\cdots$



§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

(5) 条纹宽度



① 中央明纹宽度

对于近轴近似，

角宽度 $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\dfrac{\lambda}{a}$

中央亮纹的边缘对应的衍射角θ_1，称为中央亮纹的半角宽

线宽度 $\Delta x_0 = 2f\cdot\mathrm{tg}\,\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\dfrac{\lambda}{a} \propto \dfrac{\lambda}{a}$

② 其他明纹（次极大）宽度

$$x_k \approx f\sin\theta_k = f\frac{k\lambda}{a} \rightarrow \Delta x \approx f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$

单缝衍射明条纹宽度的特征

§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

（6）波长对条纹间隔的影响

$\Delta x \propto \lambda$ — 波长越长，条纹间隔越宽。

（7）缝宽变化对条纹的影响

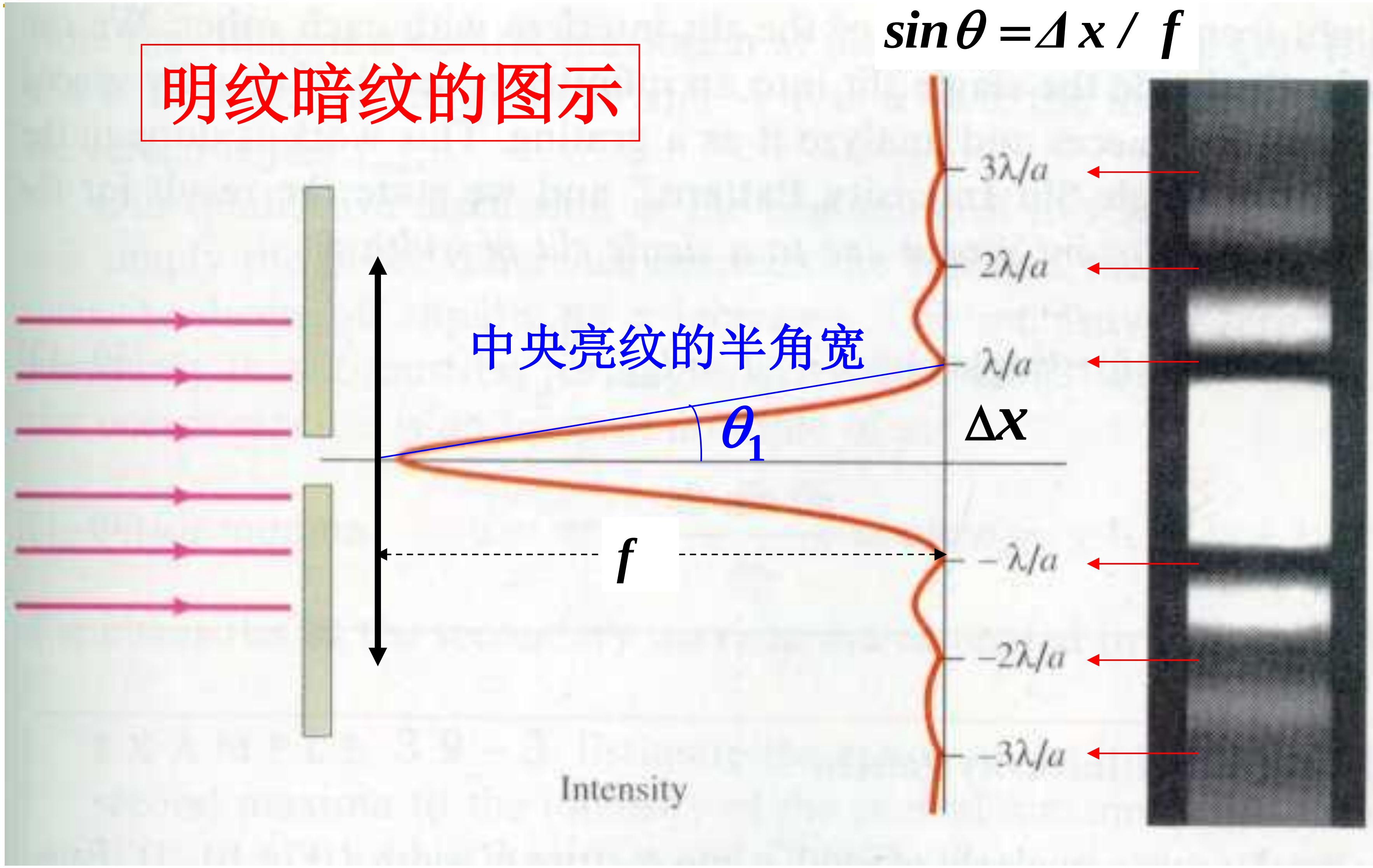
◆ 当缝极宽 $\frac{\lambda}{a} \to 0$ 时，各级明纹向中央靠拢，密集得无法分辨，只显出单一的亮条纹，这就是单缝的几何光学像。

此时光线遵从直线传播规律。

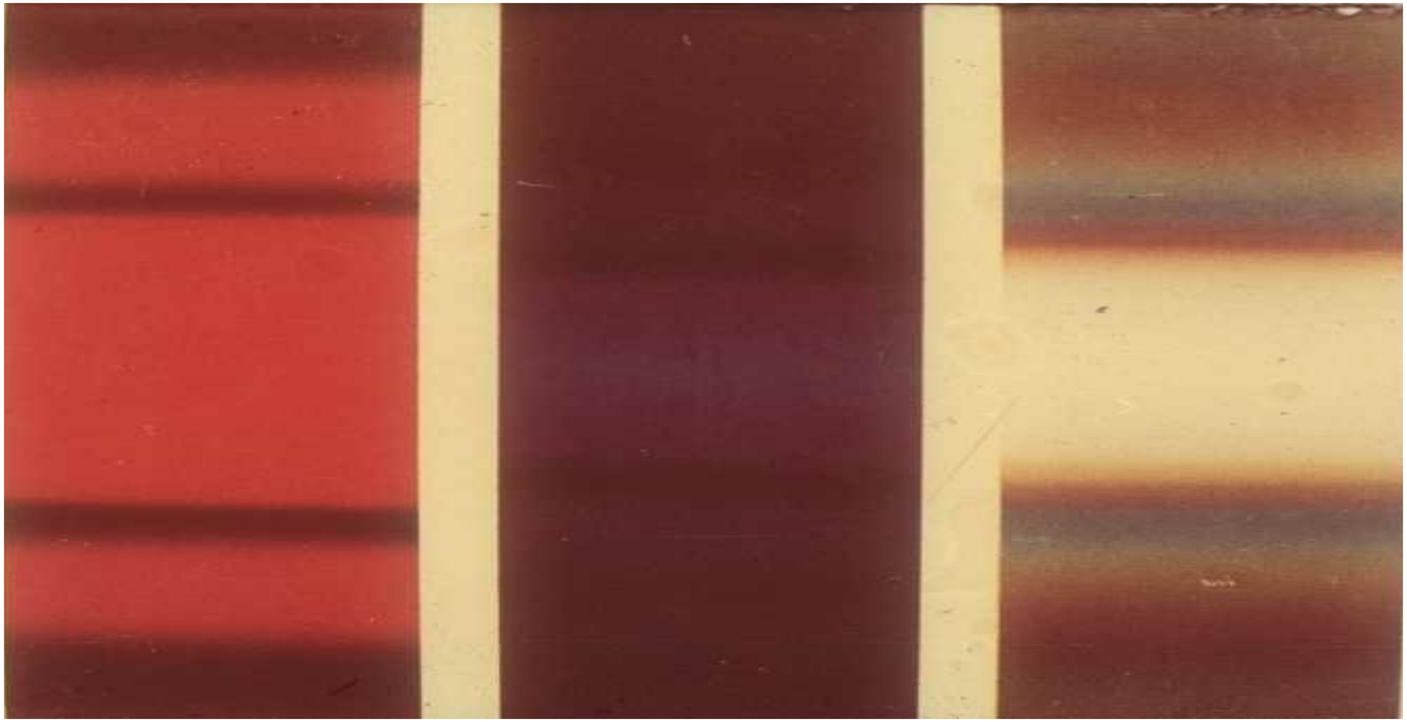
◆ 当缝极细（$a \approx \lambda$）时， $\sin\theta_1 \approx 1$， $\theta_1 \approx \pi/2$

衍射中央亮纹的两端延伸到很远很远的地方, 屏上只接到中央亮纹的一小部分(较均匀), 当然就看不到单缝衍射的条纹了。

$\sin\theta = \Delta x / f$



§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

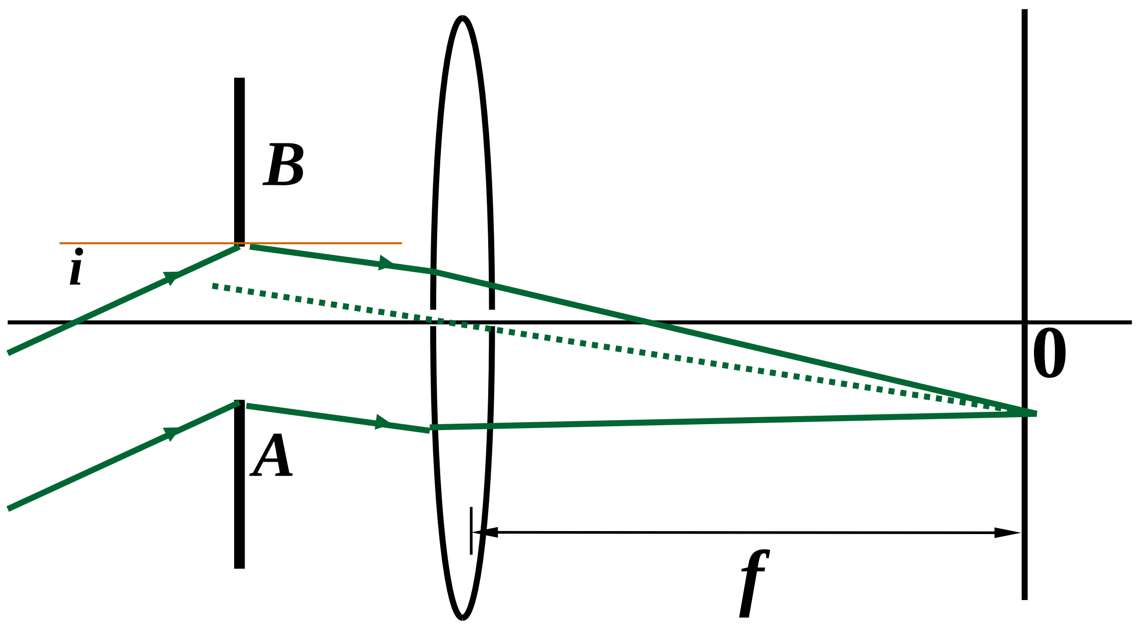


红光　　紫光　　白光

总的来说，其特点是：中央亮纹的宽度两倍于各次极大的亮纹宽度，且绝大部分能量集中在中央亮纹上。暗纹是等间隔的，而次极大是不等间隔的。

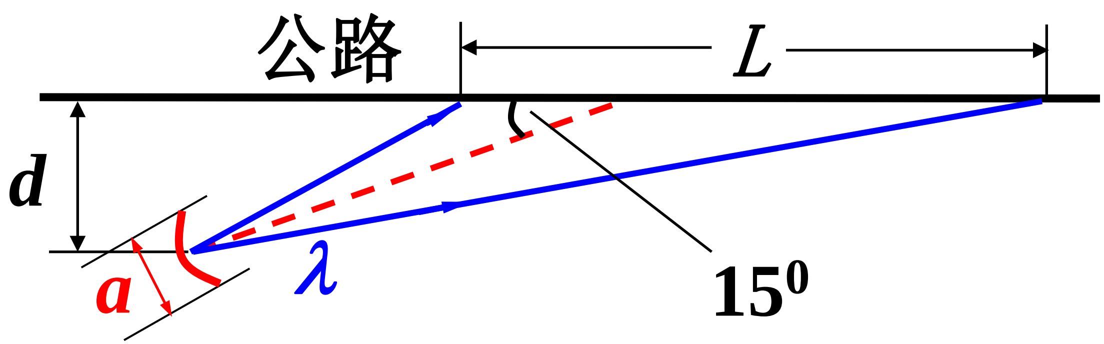
§4.4 单缝夫琅禾费衍射

（**8**）若光源偏离光轴，这时为平行光非垂直入射。在缝前造成的最大光程差为 $a\sin i$ ，其结果使得衍射条纹偏离光轴。



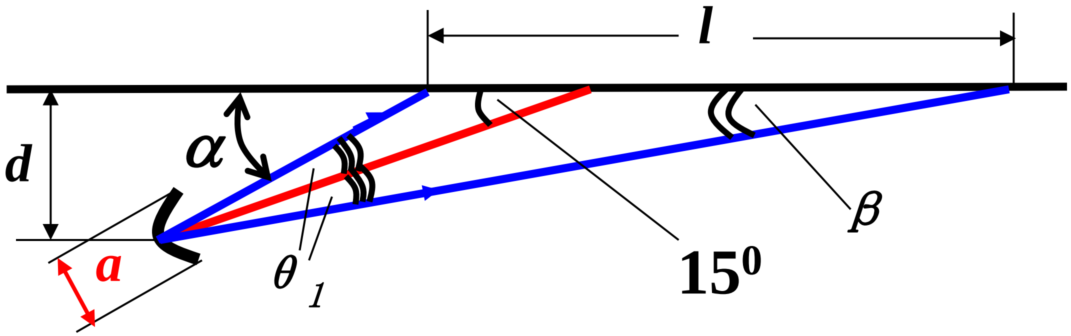
§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

已知：一波长为λ = 30mm的雷达在距离路边为 d =15m处，雷达射束与公路成15°角，天线宽度 a = 0.20m。求雷达监视范围内公路的长度L。



§ 4.4 单缝夫琅禾费衍射

$$\theta_1 \approx 8.63^{\circ}$$



【解】将雷达波束看成集中在单缝衍射的0级明纹上，

有 $\sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{30mm}{0.20m} = 0.15$

$$\longrightarrow \quad \theta_1 \approx 8.63^{\circ}$$

$$\therefore\ l = d(ctg\beta - ctg\alpha)$$

$$= 15(ctg6.37^{\circ} - ctg23.63^{\circ}) \approx 100m$$

- Homework 9 (submit on May 22)
- **P221 思考题4-14**