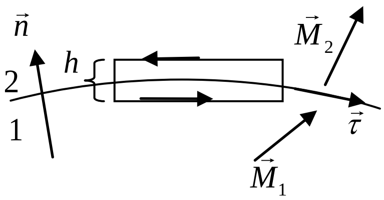
第四次

（4-1）无穷大平行板电容器内有两层介质，两极板上面电荷密度分别为正负σ_f，求电场和束缚电荷分布。

（4-2）在两种电介质的分界面上，由于极化程度的差异，产生了极化电荷的积累。



，$\nabla\times\vec{M}=\vec{J}_M$，积分形式：$\oint\vec{M}\cdot d\vec{l}=I_M$，，，，，

$$\vec{M}_1\Delta l\cdot\vec{\tau}-\vec{M}_2\Delta l\cdot\vec{\tau}=\Delta l\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)\cdot\vec{\tau}=\int\alpha_M dl=\vec{\alpha}_M\cdot\left(\vec{\tau}\times\vec{n}\right)\Delta l=\vec{\tau}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{\alpha}_M\right)\Delta l,$$

$$\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)=\left(\vec{n}\times\vec{\alpha}_M\right),\quad \vec{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)=\vec{\alpha}_M,$$

（4-3）先证明：$\oiint\varphi d\vec{s}=\iiint\limits_V\nabla\varphi dV'$，

令$\vec{C}$为任一常矢量，$\nabla\cdot\left(\vec{C}\varphi\right)=\left(\nabla\cdot\vec{C}\right)\varphi+\vec{C}\cdot\nabla\varphi=\vec{C}\cdot\nabla\varphi$，

$$\iiint\limits_V\nabla\cdot\left(\vec{C}\varphi\right)dV'=\vec{C}\cdot\iiint\nabla\varphi dV'=\oiint\left(\vec{C}\varphi\right)\cdot d\vec{s}=\vec{C}\cdot\oiint\varphi d\vec{s},$$

利用公式

$$\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)=\vec{x}'\times\left(\nabla\times\vec{M}\right)+\vec{M}\times\left(\nabla\times\vec{x}'\right)+\vec{M}\cdot\nabla\vec{x}'+\vec{x}'\cdot\nabla\vec{M}=\vec{x}'\times\left(\nabla\times\vec{M}\right)+\vec{M}+\vec{x}'\cdot\nabla\vec{M}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}'\vec{M}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{x}'\right)\vec{M}+\vec{x}'\cdot\nabla\vec{M}=3\vec{M}+\vec{x}'\cdot\nabla\vec{M},$$

即 $\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)-\nabla\cdot\left(\vec{x}'\vec{M}\right)=\vec{x}'\times\left(\nabla\times\vec{M}\right)-2\vec{M}$

$$\vec{m}_V=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\vec{x}'\times\vec{J}_M\left(\vec{x}'\right)dV'=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\vec{x}'\times\left(\nabla\times\vec{M}\right)dV'=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\left[\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)-\nabla\cdot\left(\vec{x}'\vec{M}\right)+2\vec{M}\right]dV'$$

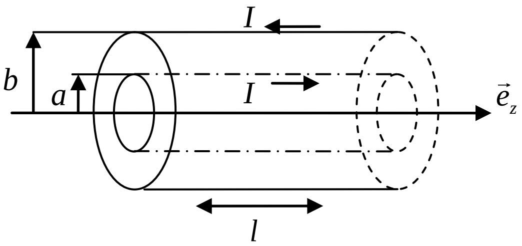
$$=\iiint\limits_V\vec{M}dV'+\frac{1}{2}\oiint d\vec{s}\cdot\left(\vec{x}'\vec{M}\right)-\frac{1}{2}\iiint\limits_V\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)dV'$$

$$=\iiint\limits_V\vec{M}dV'+\frac{1}{2}\oiint d\vec{s}\cdot\left(\vec{x}'\vec{M}\right)-\frac{1}{2}\oiint\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)d\vec{s}$$

而 $\vec{x}'\times\left(\vec{M}\times d\vec{s}\right)=\left(\vec{x}'\cdot d\vec{s}\right)\vec{M}-\left(\vec{M}\cdot\vec{x}'\right)$ M

$$\oiint \vec{x}'\times\left(\vec{M}\times d\vec{s}\right)=\oiint\left(\vec{x}'\cdot d\vec{s}\right)\vec{M}-\oiint\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)d\vec{s}=\oiint d\vec{s}\cdot\left(\vec{x}'\vec{M}\right)-\oiint\left(\vec{x}'\cdot\vec{M}\right)d\vec{s}$$

$$\vec{m}_V=\iiint_V \vec{M}dV'-\frac{1}{2}\oiint \vec{x}'\times\left(\vec{M}\times d\vec{s}\right)$$



（4-4）

(1) 设导线表面单位长度带带电荷量为τ，由对称性，利用高斯定理，$\vec{E}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r$，

$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$，$\vec{E}=\dfrac{U}{r\ln b/a}\vec{e}_r$，$\left(a<r<b\right)$，$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu I$，$B_\varphi\cdot 2\pi r=\mu I$，

$\vec{B}=\dfrac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$，$\left(a>r,r>b\right)$，$\vec{B}=0$，

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{I}{2\pi r^2}\frac{U}{\ln b/a}\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi=\frac{I}{2\pi r^2}\frac{U}{\ln b/a}\vec{e}_z ,$$

$$P=\iint \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}=\int_a^b\frac{I}{2\pi r^2}\frac{U}{\ln b/a}2\pi r dr=\frac{IU}{\ln b/a}\int_a^b\frac{1}{r}dr=IU\ ,,$$

(2) $\vec{E}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r+\dfrac{I}{\pi a^2\sigma}\vec{e}_z$，$\vec{S}=\dfrac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}=\dfrac{I}{2\pi r^2}\dfrac{U}{\ln b/a}\vec{e}_z+\dfrac{I}{\pi a^2\sigma}\dfrac{I}{2\pi r}\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi$，

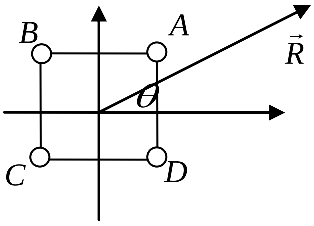
$\vec{S}_r\Big|_{r=a}=-\dfrac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\vec{e}_r$，$P=\left|\iint \vec{S}_r\cdot d\vec{\Sigma}\right|=\int_0^L\dfrac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}2\pi a dl=\dfrac{I^2L}{\pi a^2\sigma}=I^2R$

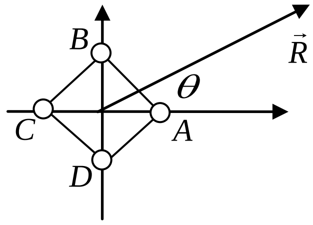
（4-5）$Q=q+q-q=q$，

$$\vec{P}=\sum_i q_i\vec{x}_i{}'=q\vec{x}_1+q\vec{x}_2-q\vec{x}_3=-2\frac{\sqrt{3}}{6}aq\cdot\vec{e}_y-\frac{\sqrt{3}}{3}aq\cdot\vec{e}_y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}aq\cdot\vec{e}_y ,$$

$$\varphi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}}{R^3}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R^3}\frac{2\sqrt{3}}{3}aq\vec{e}_y\cdot\vec{R}=-\frac{\sqrt{3}aq}{6\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta ,$$

$$\varphi\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}-\frac{\sqrt{3}aq}{6\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta$$





（ 4-6 ）

$$Q=\sum_i q_i = 2q+(-q)+0+q=2q \quad , \qquad \varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{R} \quad ,$$

$$\vec{P}=\sum_i q_i\vec{x}_i' = 2q\vec{r}_A - q\vec{r}_B - 0*\vec{r}_C + q\vec{r}_D = 2q\vec{r}_A + 2q\vec{r}_D = 2qa\vec{e}_x \ ,$$

$$\varphi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}}{R^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qa\vec{e}_x\cdot\vec{R}}{R^3}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa\cos\theta}{R^2} \ ,$$

$$D_{ij}=\sum_{k=1}^{4}3q_k\left(x_i'x_j'\right)_k \ , \quad \varphi^{(2)}=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\sum_{ij}D_{ij}\frac{\partial^2 1/R}{\partial x_i\partial x_i} \ ,,,$$

$$D_{xx}=2q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)-q\left(\frac{-a}{2}\cdot\frac{-a}{2}\right)+q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{aq}{2} \ ,$$

$$D_{yy}=2q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)-q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)+q\left(\frac{-a}{2}\cdot\frac{-a}{2}\right)=\frac{aq}{2} \ ,$$

$$D_{xy}=D_{yx}=2q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)-q\left(\frac{-a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)+q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{-a}{2}\right)=\frac{aq}{2} \ ,,,,$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0 R^5}\left[\left(3x^2-R^2\right)D_{xx}+\left(3y^2-R^2\right)D_{yy}+6xyD_{xy}\right]=\frac{aq}{48\pi\varepsilon_0 R^5}\left[3x^2+3y^2-2R^2+6xy\right]$$