电动力学习题课（五）

December 14, 2012

1 Example 1

将频率为ω，z方向波矢为k_z的时谐场写成横向场t分量和纵向长z分量的线性叠加，在ϵ，μ的均匀介质中用纵向场$\mathbf{H}_z$和$\mathbf{E}_z$表示横向场$\mathbf{H}_t$和$\mathbf{E}_t$的一般表达式

由麦克斯韦方程

$$(\nabla_{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\mathbf{E_t} + \mathbf{E_z}) = i\omega\mu(\mathbf{H_t} + \mathbf{H_z}) \tag{1.1}$$

$$(\nabla_{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\mathbf{H_t} + \mathbf{H_z}) = -i\omega\epsilon(\mathbf{E_t} + \mathbf{E_z}) \tag{1.2}$$

分离横向和纵向场，可以得到

$$i\omega\mu\mathbf{H_z} = \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{E_z} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial z} \tag{1.3}$$

$$-i\omega\epsilon\mathbf{E_z} = \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H_z} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{H_z}}{\partial z} \tag{1.4}$$

$$i\omega\mu\mathbf{H_z} = \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{E_t} \tag{1.5}$$

$$-i\omega\epsilon\mathbf{E_z} = \nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{H_t} \tag{1.6}$$

注意到$\mathbf{E_z} = \hat{\mathbf{z}}E_z$ 以及$\mathbf{H_z} = \hat{\mathbf{z}}H_z$, 可以用纵向场表达横向场如下

$$\mathbf{E_t} = \frac{i}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\Big(k_z\nabla_{\mathbf{t}}E_z - \omega\mu\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\mathbf{t}}H_z\Big) \tag{1.7}$$

$$\mathbf{H_t} = \frac{i}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\Big(k_z\nabla_{\mathbf{t}}H_z + \omega\epsilon\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\mathbf{t}}E_z\Big) \tag{1.8}$$

2 Example 2

求证：两种线性各向同性均匀非导电介质的交界面，若入射电磁波是TE(TM)极化的单色平面波，则反射波和透射波也是TE(TM)极化的单色平面波。

证：建立坐标系，取介质的交界面为xy平面。
考虑TE极化波，不妨设入射波电场$\vec{E}$沿y方向，波矢$\vec{k}$在xz平面内，即：

$$\vec{E} = E_i\hat{e}_i \exp\{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\} \tag{2.1}$$

其中

$$\vec{k}_i = k_x\hat{x} + k_{zi}\hat{z} \tag{2.2}$$

$$\hat{e}_i = \hat{y} \tag{2.3}$$

$\hat{e}_i$为表示入射电场方向的单位矢量。类似可以写出反射波和透射波的电场$\vec{E}$：

$$\begin{aligned}\vec{k}_r &= k_x\hat{x} + k_{zr}\hat{z} && (2.4)\\ \hat{e}_r &= \sin\theta_r\cos\phi_r\hat{x} + \sin\theta_r\sin\phi_r\hat{y} + \cos\theta_r\hat{z} && (2.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{k}_t &= k_x\hat{x} + k_{zt}\hat{z} && (2.6)\\ \hat{e}_t &= \sin\theta_t\cos\phi_t\hat{x} + \sin\theta_t\sin\phi_t\hat{y} + \cos\theta_t\hat{z} && (2.7)\end{aligned}$$

然后写出$\vec{H}$场：

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\omega\mu_1}\vec{k}_i \times \vec{E}_i = \frac{E_i}{\omega\mu_1}\hat{h}_i \exp\{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r} - \omega t)\} \quad (2.8)$$

其中

$$\hat{h}_i = \vec{k}_i \times \hat{e}_i = -k_{zi}\hat{x} + k_x\hat{z} \quad (2.9)$$

类似写出反射波和透射波的$\vec{H}$场：

$$\begin{aligned}\hat{h}_r &= -k_{zr}\sin\theta_r\sin\phi_r\hat{x} + (k_{zr}\sin\theta_r\cos\phi_r - k_x\cos\theta_r)\hat{y} + k_x\sin\theta_r\sin\phi_r\hat{z} && (2.10)\\ \hat{h}_t &= -k_{zt}\sin\theta_t\sin\phi_t\hat{x} + (k_{zt}\sin\theta_t\cos\phi_t - k_x\cos\theta_t)\hat{y} + k_x\sin\theta_t\sin\phi_t\hat{z} && (2.11)\end{aligned}$$

下面考虑边界条件：

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{\parallel} &= \vec{E}_2^{\parallel} && (2.12)\\ \vec{H}_1^{\parallel} &= \vec{H}_2^{\parallel} && (2.13)\end{aligned}$$

得到：

$$\begin{aligned}E_r\sin\theta_r\cos\phi_r &= E_t\sin\theta_t\cos\phi_t && (2.14)\\ \frac{E_r}{\mu_1}(k_{zr}\sin\theta_r\cos\phi_r - k_x\cos\theta_r) &= \frac{E_t}{\mu_2}(k_{zt}\sin\theta_t\cos\phi_t - k_x\cos\theta_t) && (2.15)\end{aligned}$$

另外根据横波条件：

$$\vec{k}_r\cdot\vec{E}_r = \vec{k}_t\cdot\vec{E}_t = 0 \quad (2.16)$$

得到：

$$\begin{aligned}k_x\sin\theta_r\cos\phi_r + k_{zr}\cos\theta_r &= 0 && (2.17)\\ k_x\sin\theta_t\cos\phi_t + k_{zt}\cos\theta_t &= 0 && (2.18)\end{aligned}$$

联立Eq.(2.14,2.17,2.18)得：

$$k_{zr}E_r\cos\theta_r = k_{zt}E_t\cos\theta_t \quad (2.19)$$

联立Eq.(2.15,2.17,2.18)得：

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}E_r\cos\theta_r = \frac{k_2^2}{\mu_2}E_t\cos\theta_t \quad (2.20)$$

联立Eq.(2.19,2.20)得：

$$(\frac{k_1^2}{\mu_1}\frac{k_{zt}}{k_{zr}} - \frac{k_2^2}{\mu_2})E_t\cos\theta_t = 0 \quad (2.21)$$

那么

$$\cos\theta_t = 0 \Rightarrow \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad (2.22)$$

进而

$$\theta_r = \theta_t = \phi_r = \phi_t = \frac{\pi}{2} \quad (2.23)$$

换言之

$$\hat{e}_r = \hat{e}_t = \hat{y} \tag{2.24}$$

即反射波和透射波都是TE极化。

讨论：
1) Eq.(2.14,2.15)只用到了E_x, H_y两个分量连续的条件，而E_y, H_x连续则可以给出Fresnel公式，试证明之。
2) 类似TE极化的证明，试给出TM极化的证明。
3) 证明中其实用到了材料是各向同性、均匀、线性且非导电这些条件，试思考之。

3 Example 3

如Fig1所示，空间中有厚度为h的一层膜置于另外一种背景材料中，现有一束电磁波从介质1入射到体系中，求结构的反射系数。

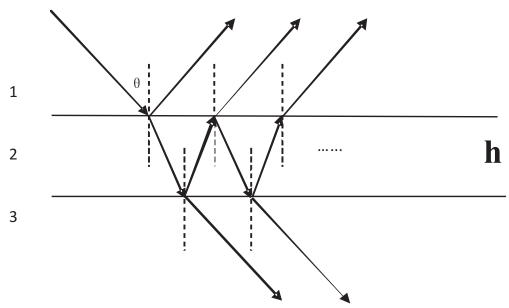

Figure 1: *例二示意图*

解： a) **定义：** 若光从介质i入射到介质i与j 的表面，记反射系数为r_{ij}, 透射系数为t_{ij}，类似地定义r_{ji}和t_{ji} (对于逆光路)。

b) 先考虑单个界面的反射和透射，如果反射波和透射波沿逆光路返回，那么体系应该和原来一致，即

$$r_{ji}t_{ij} + t_{ij}r_{ij} = 0 \tag{3.1}$$
$$r_{ij}r_{ij} + t_{ji}t_{ij} = 1 \tag{3.2}$$

进而得到斯托克斯倒逆关系：

$$t_{ij}t_{ji} - r_{ij}r_{ji} = 1 \tag{3.3}$$
$$r_{ij} = -r_{ji} \tag{3.4}$$

c) 计及多次反射和透射我们可以写出该体系的反射系数r:

$$\begin{aligned}
r &= r_{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} t_{21} r_{23}^{n} r_{21}^{n-1} t_{12} \exp(-i * 2nk_z h) \qquad (3.5) \\
&= r_{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} r_{23}^{n} r_{12}^{n-1} (1 - r_{12}^2) \exp(-i * 2nk_z h) \\
&= r_{23} \exp(-i * 2k_z h) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} r_{23}^{n-1} r_{12}^{n-1} \exp(-i * 2(n-1)k_z h) \\
&\quad + r_{12} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} r_{23}^{n} r_{12}^{n} \exp(-i * 2nk_z h) \\
&= \frac{r_{12} + r_{23}\exp(-i * 2k_z h)}{1 + r_{12} r_{23} \exp(-i * 2k_z h)} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

其中

$$k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta} \qquad (3.7)$$

注：推导中利用了下面的级数展开

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\bigg|_{x=0} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n n! (1+x)^{-(1+n)}\bigg|_{x=0} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \qquad (3.8)$$

讨论：

1) 根据Eq.(3.6)，思考是否在某些条件下体系是全反射或者全透射？

2) 这里的推导默认入射波是平面波，而实际中大部分光源是激光，因此如果将入射波改为高斯光束，结果如何？

4 Example 4：均匀各向异性介质的本征模

一束电磁波在均匀但各向异性的介质($\mu=\mu_0$)中传播，选取其主轴建立坐标系，那么$\epsilon_{ij}=\epsilon_{ii}\delta_{ij}$，设波矢$\vec{k}=k\hat{e}_k$，其中$\hat{e}_k$在主轴上的分量为$h_1,h_2,h_3$，求证：

$$\sum_{\ell=1}^{3}\frac{h_\ell^2}{v^2-v_\ell^2}=0 \tag{4.1}$$

其中$v=\omega/k$，$v_\ell=c/\sqrt{\epsilon_{\ell\ell}}$。

证：课件Eq.(8.5.9)：

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})+\mu_0\epsilon_0\omega^2\vec{D}=0 \tag{4.2}$$

将本构关系代入计算并化简得到：

$$k^2\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{E}=0 \tag{4.3}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}=\begin{pmatrix} h_1^2+\frac{v^2}{v_1^2}-1 & h_1h_2 & h_1h_3 \\ h_2h_1 & h_2^2+\frac{v^2}{v_2^2}-1 & h_2h_3 \\ h_3h_1 & h_3h_2 & h_3^2+\frac{v^2}{v_3^2}-1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Eq.(4.3)存在非零解的条件是：

$$\det\overleftrightarrow{T}=0 \tag{4.5}$$

简化便可以得到：

$$\sum_{\ell=1}^{3}\frac{h_\ell^2}{v^2-v_\ell^2}=0 \tag{4.6}$$

讨论：

1) 思考此题的极限情况。

2) 如果尝试去解Eq.(4.6)，会发现v^2有两个根，为什么？