电动力学 第六章

狭义相对论

相对论本不是什么一时冲动产生的头脑中的智力玩具，而是植根于自然的朴素产物，**它是电磁理论对时空的一种要求和规范，**只不过由于（以Galileo变换为特征）旧的绝对时空观理念一直以来在人们头脑里已经根深蒂固，习以为常，使得我们认为时间、空间分离是理所当然，而（以Lorentz变换为特征的）新的时空观则颠覆了传统的习以为常的观念，认为时间与空间不能截然分开，并且时间、空间的测量是与观测者自身的运动状态有关，由此引起了一系列广泛而深刻的物理变革。

我们从Maxwell方程组出发，基于物理学上的两个基本原理：**相对性原理**和**相位差不变性**，由此演绎出狭义相对论，而光速不变原理作为一个推论而自然得到。

20世纪理论物理学的三个主旋律： 量子化、对称、相位因子

电磁理论中的规范不变性（对称性）与相位因子有着密切关系。

归纳一下，我们的生活经验：

在不同的惯性参照系（地面、匀速火车、…..），时间的流逝是一样快慢的（绝对的）

在不同的惯性参照系（地面、匀速火车、…..），尺子长度标准都是一样的（绝对的）

我们把它视为金科玉律，理所当然，从不怀疑。

Galileo 变换和力学相对性原理:

- 绝对时空观:

在牛顿力学中,空间和时间不仅被看成为同物质一样独立存在,并且具有绝对的意义(与物体的运动无关). 一切物体的运动都可用空间和时间坐标来表示——称为参照系, 并且存在一种地位优越的参照系——惯性系.

- 力学相对性原理(Galileo,1632年)

(a)一切力学规律对一切惯性系都是等价的,不存在一个优越的绝对惯性系;

(b)力学规律在所有做相互匀速运动的惯性系都具有相同形式;

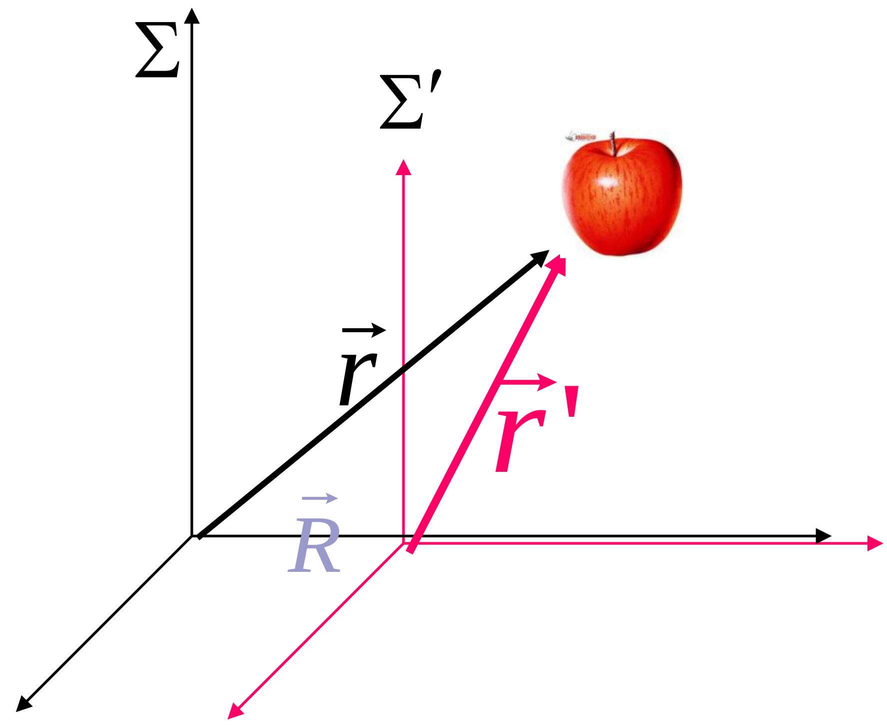
- 根据绝对时空观,

(i) 两个参考系的时间

(时间坐标是绝对的)

(ii) 在不同参照系中,长度是绝对的(共用一把尺)

- 设Σ 和Σ'互为惯性系,两个观察者分别这两个系中观察同一物体运动.



两个惯性系之间时空的变换____Galileo变换

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$t = t'$$

$$x = R + x'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

经典速度合成公式: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}\,'$

且加速度满足: $\vec{a} = \vec{a}\,'$

经典力学认为，无论两个惯性系的相对速度$\vec{V}$ 如何,均有:

$$m = m' = const$$
$$l = l'$$
$$t = t'$$

即质量、长度和时间的测量与运动无关

因此经典力学的基本定律－－－牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

对任意惯性系都有相同的形式－－－牛顿定律在Galileo 变换下具有协变性。

协变性－－－物理定律的数学形式保持不变

但是这个结论不能推广到电磁领域中，在Galileo变换下，电磁规律的形式走样了，（电磁规律在Galileo 变换下不具有协变性）。

旧时空观与电磁学的矛盾

Maxwell方程组

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E}=0\\ &\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ &\nabla\cdot\vec{B}=0\\ &\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}}$$

$\Longrightarrow$

电磁波动方程

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ &\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0\end{aligned}}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 km/s$$

电磁波的传播速度是一个常数，与惯性系的选择无关

结论：电磁波的速度不满足经典速度合成公式!!!

当一列波的相位变化了 2π ，相当于波完成一个循环振动，通俗来说就是波经历了一次大起大落，因此相位变化代表的是波动周期的计数，是一个客观反映波动状态循环的一个数。

不管观察者是面对静止波源来观察，还是迎向波源运动来观察，只要他接收到波的一次潮起潮落，他就能说观察到波的相位变化了 2π ，即不同的惯性系上的观察者都应该观测到这列波**相同**的相位变化，相位变化不应该随观测者所处参照系的不同而不同。

相位差不变性：

当波的传播经历若干个周期后，不同的参照系理应观测到相同的相位变化，它是一种物理对称性的体现，是物理学上的一个基本的理念。

以平面电磁波为例

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

色散关系： $\omega = kc$

在Galileo变换下，相位从一个惯性系变换到另一个惯性系

$$\phi = kx - \omega t = k\left(x' + vt'\right) - \omega t' = kx' - \omega t' + kvt' \neq kx' - \omega t' = \phi'$$

不能同时满足相位不变性和色散关系

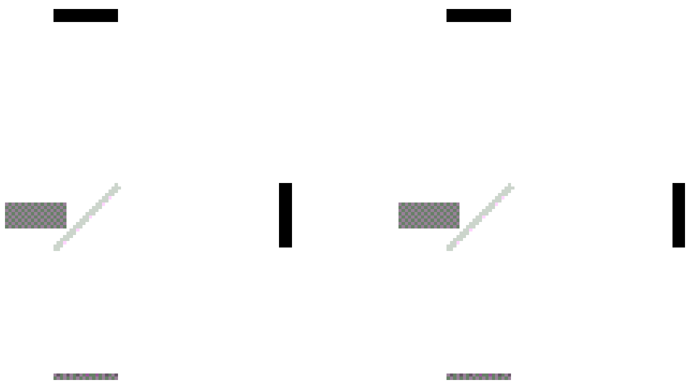
有三种可能（解决的途径）：

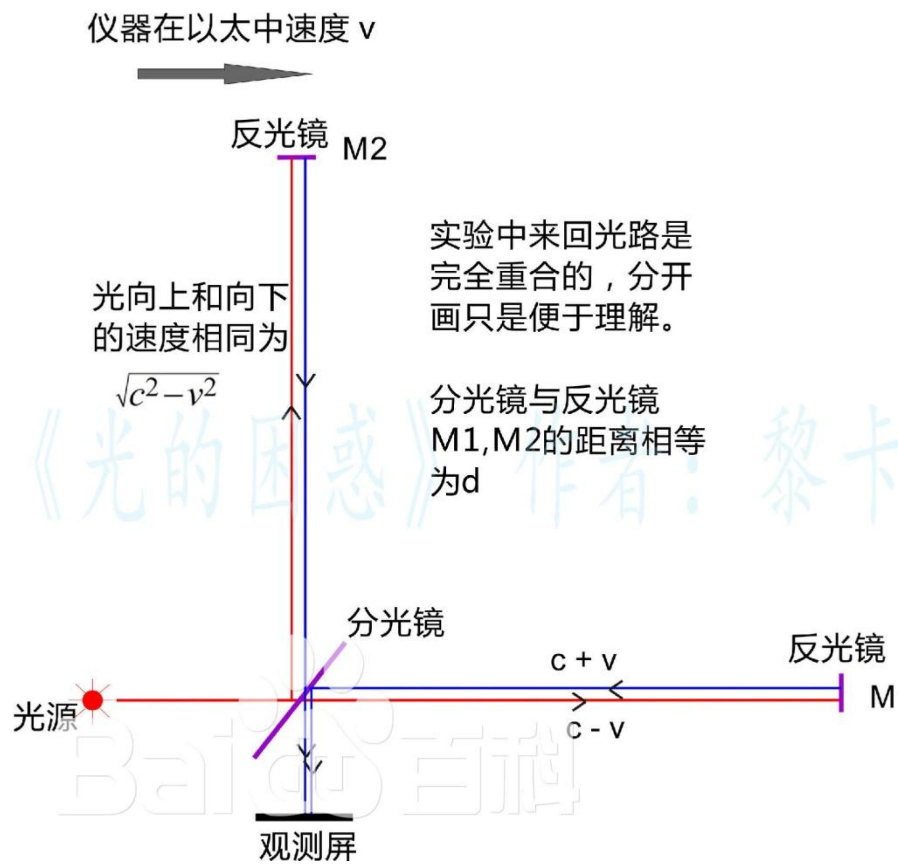
（1）Galileo变换是对的，Maxwell方程组是错的，真正的电磁学理论在Galileo变换下是不变的；

（2）Galilieo变换是对的，Maxwell方程组也是对的，但电磁学只使用于某个特殊参照系（称为以太参照系），亦即Maxwell方程组并不反映电磁现象的普遍规律；

（3）Maxwell方程组是对的，反映了电磁现象的普遍规律，Galileo变换是错的，存在一种既适用于经典力学又适用于电磁学的相对性原理；

Michelson-Morley实验原理





传统Lorentz变换的推导

相对性原理：

所有的物理定律在一切的惯性系中都具有相同的形式；

没有任何实验能够在不同的惯性系之间做作出本质的区分，这是强加于物理定律之上的约束，源自于高于物理定律的对称性要求。

光速不变性：

在任意的惯性系中光速都是相同的，并与惯性系的速度无关；

Lorentz变换的另一种推导

从一些更高的绝对不变的原则下推导出的不同惯性系下关于时间、空间量度的相互变换

对称性要求

这是强加于物理定律之上的约束，
源自于高于物理定律的对称性要求

相位差不变性

相对性原理

物理规律

Maxwell方程组

Lorentz变换

光速不变原理作为一个推论而自然得到

对称性要求 → 相位差不变性、相对性原理

物理规律 → Maxwell方程组

两惯性系观察到的波的相位差一定是相同的

两惯性系的时空变换一定是线性变换

波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = -\frac{\omega'^2}{c^2} + k'^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi &= kx - \omega t \\ \phi' &= k'x' - \omega' t' \\ \phi &= \phi' \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Lorentz 变换——满足相对性原理两假设的时空变换

（一）变换应满足惯性系概念的要求(时空是均匀的)——变换应是线性的

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{14}t \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= a_{41}x + a_{44}t
\end{aligned}
$$

在垂直于相对运动的方向上，空间变换是平庸的（长度没有变化）

假若变换是非线性的，设 $x' = x^2$

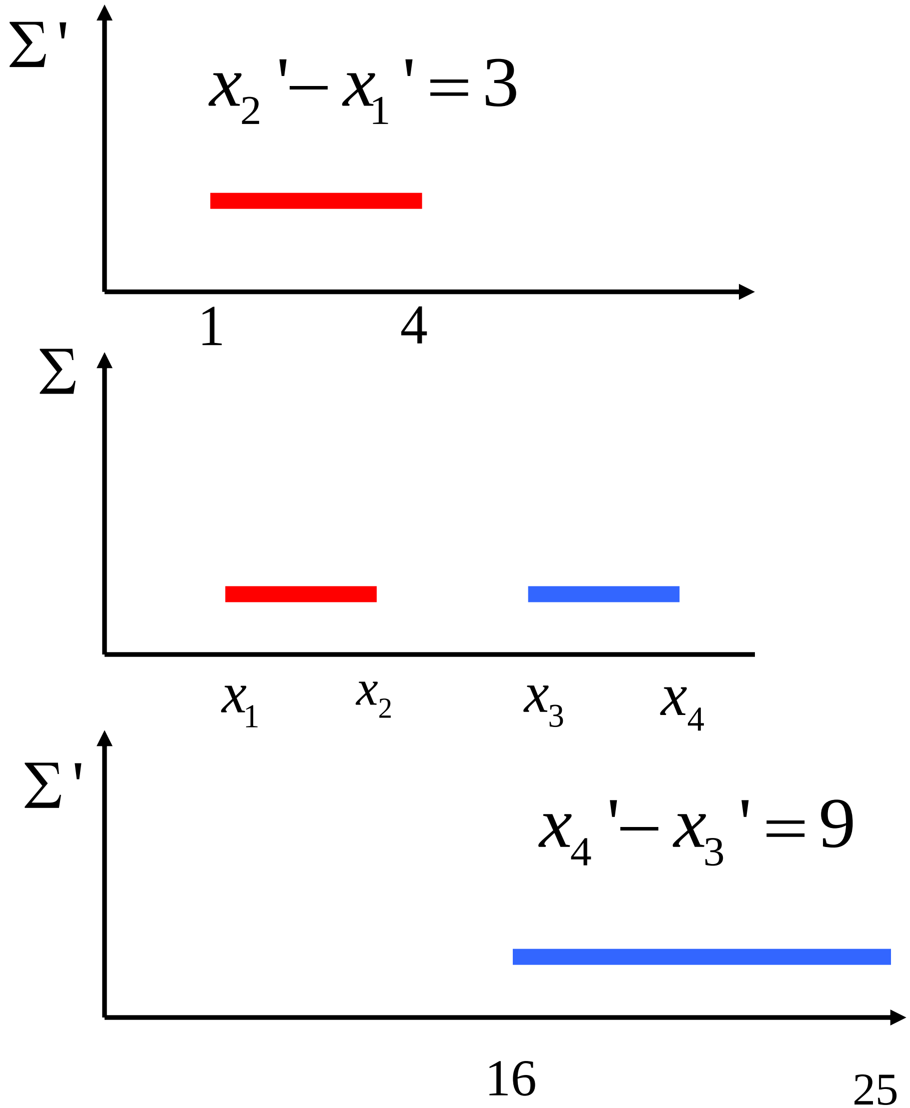
有一单位尺

- 若在 Σ 中端点放在 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

  则在Σ'中，有 $\begin{cases} x_1' = 1 \\ x_2' = 4 \end{cases}$

- 若在 Σ 中端点放在 $\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$

  则在Σ'中，有 $\begin{cases} x_3' = 16 \\ x_4' = 25 \end{cases}$



结论：测得的尺长与位置有关，即Σ'的空间结构不均匀

考虑一列沿 $\vec{k}$ 方向传播的平面电磁波

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

波矢可分解为： $\vec{k}=\vec{k}_x+\vec{k}_y+\vec{k}_z$ 我们生活的空间是三维的，因此波矢有三个分量

波的相位

$$\phi'=\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega' t'=k_x' x'+k_y' y'+k_z' z'-\omega' t'$$

变换到另一惯性系

$$\phi'=k_x'(a_{11}x+a_{14}t)+k_y' y+k_z' z-\omega'(a_{41}x+a_{44}t)=(k_x' a_{11}-\omega' a_{41})x+k_y' y+k_z' z-(a_{44}\omega'-k_x' a_{14})t$$

由相位不变性，于是得到在两套惯性系下频率和波矢的变换关系：

$$k_x=k_x' a_{11}-\omega' a_{41}$$

$$k_y=k_y'$$

$$k_z=k_z'$$

$$\omega=a_{44}\omega'-k_x' a_{14}$$

由波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}=\vec{E}_0\nabla^2\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)-\frac{\vec{E}_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)=-\vec{k}^2\vec{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}=0$$

即是要求 $$-\vec{k}^2+\frac{\omega^2}{c^2}=0$$

在 惯性系也有同样的要求

$$\nabla^2\vec{E}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial^2 t}=-\vec{k}'^2\vec{E}'+\frac{\omega'^2}{c^2}\vec{E}'=0 \qquad -\vec{k}'^2+\frac{\omega'^2}{c^2}=0$$

综合起来 $$\boxed{-\frac{\omega^2}{c^2}+k^2=-\frac{\omega'^2}{c^2}+k'^2}$$

电磁规律（Maxwell方程组、电磁波动方程）对于三维空间和时间的制约具体体现在要求 k,ω 的变换式是二次项的。

$$-\frac{\left(a_{44}\omega'-k_x'a_{14}\right)^2}{c^2}+\left(k_x'a_{11}-\omega'a_{41}\right)^2+\cancel{k_y'^2+k_z'^2}=-\frac{\omega'^2}{c^2}+k_x'^2+\cancel{k_y'^2+k_z'^2}$$

比较各项系数

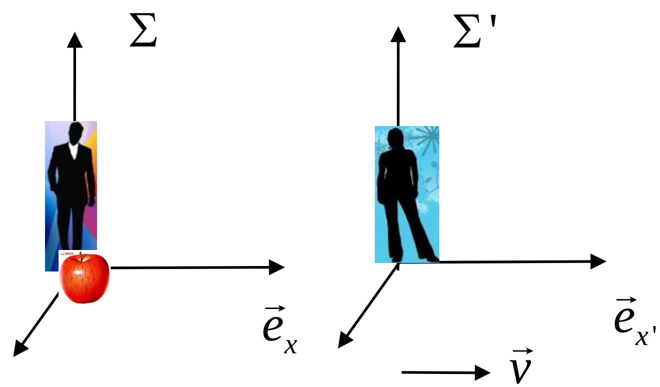
$$a_{11}^2-\frac{a_{14}^2}{c^2}=1 \qquad a_{44}^2-c^2a_{41}^2=1 \qquad \frac{1}{c^2}a_{14}a_{44}-a_{11}a_{41}=0$$

四个待定常数满足三条方程，从中解得：

$$a_{14}=\pm c^2a_{41}$$

$$a_{11}=\pm a_{44}$$

考虑相对速度为 $\vec{v}$ 的两个惯性系，对某事件（苹果）



$$x=0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x'&=a_{14}t \\ t'&=a_{44}t \\ x'&=-vt' \end{aligned}} \Rightarrow a_{14}=-va_{44}$$

解得：

$$a_{11}=\pm\gamma \qquad a_{14}=\pm\gamma v \qquad a_{41}=\pm\gamma\frac{v}{c^2} \qquad a_{44}=\pm\gamma$$

其中：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = a_{11}x + a_{14}t = \pm\gamma x \pm \gamma vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = a_{41}x + a_{44}t = \pm\gamma \frac{v}{c^2} x \pm \gamma t$$

物理上，对事件（苹果）而言，

若苹果放在 Σ 系 $x=0$ 处，则 Σ' 系观测结果应该是 $x'<0$ $t'>0$

因此取： $a_{14} = -\gamma v$ $a_{44} = \gamma$

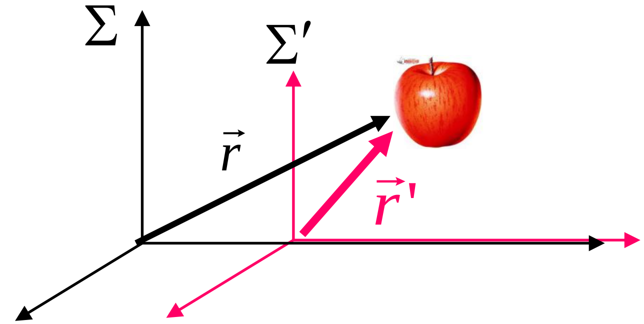
若苹果放在 Σ' 系 $x'=0$ 处，则 Σ 系观测结果应该是 $x>0$ $t>0$

因此取： $a_{11} = \gamma$ $a_{41} = -\gamma \frac{v}{c^2}$

Lorentz变换：
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= -\gamma \frac{v}{c^2} x + \gamma t \end{aligned}}$$

逆变换：
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma x' + \gamma vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma \frac{v}{c^2} x' + \gamma t' \end{aligned}}$$

相对论速度变换



Σ 系：$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ $\quad u_x=\dfrac{dx}{dt} \quad u_y=\dfrac{dx}{dt} \quad u_z=\dfrac{dx}{dt}$

Σ' 系：$\vec{u}\,'=(u_x',u_y',u_z')$ $\quad u_x'=\dfrac{dx'}{dt'} \quad u_y'=\dfrac{dy'}{dt'} \quad u_z'=\dfrac{dz'}{dt'}$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=\gamma x'+\gamma v t' \\ y&=y' \\ z&=z' \\ t&=\gamma\frac{v}{c^2}x'+\gamma t' \end{aligned}} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\begin{aligned} dx&=\gamma dx'+\gamma v dt' \\ dy&=dy' \\ dz&=dz' \\ dt&=\gamma\frac{v}{c^2}dx'+\gamma dt' \end{aligned}}$$

$$u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma dx'+\gamma v dt'}{\gamma\frac{v}{c^2}dx'+\gamma dt'}=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}=\frac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$$

$$u_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{\gamma dt'\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{u_y'}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)}$$

$$u_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{\gamma dt'\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}=\frac{u_z'}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)}$$

总结：

非相对论近似 $v \ll c$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u_x'\right)}$$

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u_x'\right)}$$

逆变换：

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \rightarrow u'_x = u_x - v$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \rightarrow u'_y = u_y$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \rightarrow u'_z = u_z$$

容易验证：

若：$\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} = c$ 则：$\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = c$ 光速不变性

新的时空观念

（一）同时的相对性

两事件发生的同时与否并不绝对，取决于观察者的运动状态

（二）时间的相对性——动钟延缓（时间膨胀效应）

由同时的相对性自然会推出时间间隔的相对性，即某一运动过程延续的时间在不同的参照系中测量值不同的。

	Σ	Σ'
事件1：	(x_1, t_1)	(x_1', t_1')
事件2：	(x_2, t_2)	(x_2', t_2')

固有时：同一地点发生的两事件的时间差 $\Delta\varsigma = t_2 - t_1 \quad (x_1 = x_2)$

$$t_1' = -\gamma\frac{v}{c^2}x_1 + \gamma t_1 \qquad t_2' = -\gamma\frac{v}{c^2}x_2 + \gamma t_2$$

$$\boxed{t_2' - t_1' = -\gamma\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) + \gamma(t_2 - t_1) = \gamma(t_2 - t_1) > \Delta\varsigma}$$

(三)长度的相对性——（运动尺缩效应）

两点之间的距离的测量，与参考系有关。

固有长度：在相对静止的惯性系测到的物体的长度 l_0

$$\boxed{l = \frac{l_0}{\gamma} < l_0}$$

狭义相对论带来最重要的变革的是时间、长度的测量相对性，它使我们意识到，时间再也不是绝对的，对同一个物理过程的持续时间，不同运动状态的观察者有着不同的结论；空间也不再是绝对的，原来是绝对的质量、力、加速度等都变成了相对的物理量，连电场、磁场都可以互相转变，于是似乎容易产生一种印象，认为相对论就是把一切都“相对化”了，其实，它还有“绝对化”的一面，它将物理定律绝对化了，使它在所有惯性系里都具有相同的形式，物理现象是相对的，但物理规律是绝对的，表面的相对性蕴藏着内在的绝对性。时间长度的测量是相对的，但两事件的间隔是绝对的，因果律也是绝对的；单个物理量是相对的，但一对物理量（例如波矢与频率、电场与磁场）的平方差组合又是不变的绝对量；

间隔不变性

	Σ	Σ'
事件1：	$(0,0,0,0)$	$(0,0,0,0)$
事件2：	(x,y,z,t)	(x',y',z',t')

两事件的**间隔**：$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2\gamma^2(\frac{v}{c^2}x'+t')^2 - \gamma^2(x'+vt')^2 - y'^2 - z'^2$$

$$= \gamma^2[(c^2-v^2)t'^2 - (1-\frac{v^2}{c^2})x'^2] - y'^2 - z'^2 = c^2t'^2 + x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

$$\boxed{s^2 = s'^2}$$

间隔不变性

在不同的惯性系中，虽然不同的观察者对两事件测量到的时间差、空间位置差是不一样的，但这两事件的间隔 却是一个与惯性系无关的不变量

时间、空间的测量是相对的（不再是绝对了），但是在它们之上还有间隔不变性这个更高层次上的绝对原则，或者说，狭义相对论的本质其实是间隔不变性这个绝对原则下的时空相对性。

间隔的微分：$ds^2 = (dct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$

固有时和推迟时

固有时（proper time）：同一地点发生的两事件的时间差 $\Delta\varsigma = t_2 - t_1 \quad (x_1 = x_2)$

$$ds^2 = (dct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2 d\varsigma^2$$

固有时微分 是一个与惯性系无关的不变量

波的相位 $\phi = kx - \omega t = -\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) = -\omega\tau$

推迟时（retarded time）： $\tau = t - \frac{1}{c}\cdot x$

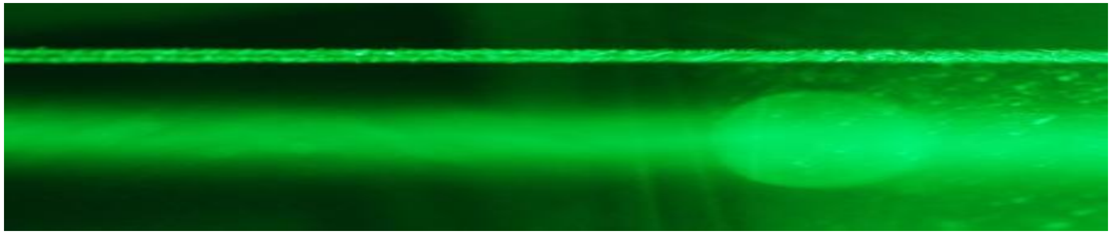
即是，在 τ 时刻坐标原点$(x=0)$ 处的波的状态（相位），要推迟到 t 时刻 $t > \tau$ 才能传播到 x 处，中间消耗掉了 x/c 的传播时间

时间是什么？

取一束光作为参照，当光经历一个周期时，相位变化 2π ，其振动经历了一个循环。如果以光波经历的一个振动循环作为某个物理过程的延续性的量度，则时间不是别的，正是光经历的振动循环个数。

- 例如以黄绿光（波长 $\lambda = 5000$ 埃）为基准参考光，

- 则一秒的时间，我们可以换一种说法是黄绿光振动 6×10^{14} 个周期所延续耗费的过程。



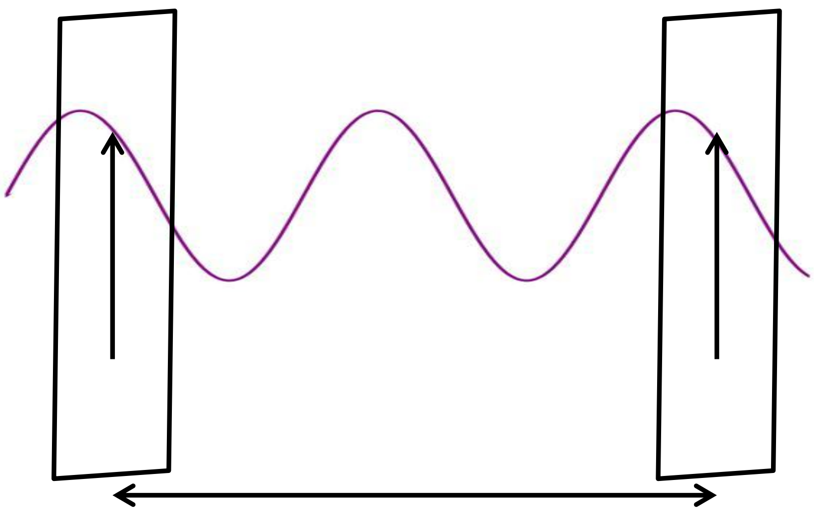
一秒有多长？

- 铯—133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应辐射的9192631770个周期的持续时间（1967年第十三届国际计量大会制定，精度达到了10^{-15} 的量级，2005年度的诺贝尔物理学奖授予的光学频率梳技术，有望提高这一精度到 10^{-18}）。

一米有多长？

- 同样的思路，我们也可以对长度有另外一种理解。如果以光波经历的一个振动循环后等相面所移动的位置距离作为某个物理系统的广延性的量度，则长度可以理解为光波振动若干周期后等相面所移动的距离。

- 一米的长度，我们可以换一种说法是黄绿色光振动 2×10^6 个周期后等相面所移动的距离。



等相面移动的距离

- 1983年第十七届国际计量大会通过：1米是光在真空中在1/299792458秒的时间间隔内所传播的路径长度。长度的单位实质上不再是独立的基本单位，而是由时间或频率通过光速来导出的单位。

如果接受了这样的理念，则理解狭义相对论中有关时间和空间的相对性就变得顺理成章了。只要我们更新一下观念，不再用原始的、根深蒂固（例如日出日落）的计时方式，而是以光速作为一种时间空间量度的标准，这样的话时空测量就有物质基础了。当我们测量到黄绿光的振幅变化了 6×10^{14} 个周期，那我们说时间过了一秒，当我们测量到黄绿光的振幅变化了 2×10^{6} 个周期，那我们说等相面移动的空间距离是一米。

进一步，既然时间和空间的量度是与光波的传播联系在一起的，同是一束光，如果相对于光源的运动状态不同，其测量的结果是不同的，简单来说，光是一种波，而波具有的一个重要的共性是存在Doppler（多普勒）效应（见下节），不同运动状态的人看到的同一束光的颜色不同，即是，在不同的惯性系中，对同一物理过程的时空测量有着不同的结果，例如，若观察者相对于参考光源不动，他能测量感受到的光振幅的变化（频率）与相对于参考光源运动的观察者感受到这种光振幅变化的快慢程度不一样，极端地说，若观察者随等相面一起同步运动（以光速相对于光源作背离运动），他就感受不到光振幅的变化了，也就是说，对他而言时间流动停滞了。

- 一句话概括，时间和空间的量度不是绝对的，而是依赖于测量者（观察者）的状态的，这就是狭义相对论的精髓。

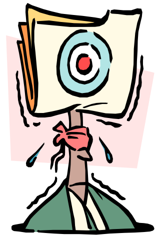
因果律的绝对性

存在因果关系的两事件，发生的先后次序在不同参考系观测结果的绝对性

时序: 两个事件发生的时间顺序。

事件1：

开枪



事件2：

死人

在地面参考系中，应先开枪后中靶。

在高速运动的参考系中，是否能先中靶，后开枪？

	Σ	Σ'
事件1：	(x_1, t_1)	(x_1', t_1')
事件2：	(x_2, t_2)	(x_2', t_2')

在Σ 系，先有因后有果，因此 $t_2 > t_1$；在 Σ' 系呢？

$$t_1' = -\gamma \frac{v}{c^2} x_1 + \gamma t_1 \qquad t_2' = -\gamma \frac{v}{c^2} x_2 + \gamma t_2$$

$$t_2' - t_1' = -\gamma \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) + \gamma(t_2 - t_1) = \gamma(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{v}{c^2}\cdot\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)\right] = \gamma(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{vu}{c^2}\right]$$

其中： $u = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ 子弹速度（信号传播速度）

若 $u > c$，则一定会存在某惯性系（相对地面速度 v），使得 $uv > c^2$，从而 导致 $t_2' - t_1' < 0$，破坏因果律的绝对性

若 $u \le c$，则对任何某惯性系（相对地面速度 v），都有 $uv < c^2$，从而 保证 $t_2' - t_1' > 0$，即因果律的绝对性得以维护

结论：

要维护因果律的绝对性（两事件的时间顺序不会颠倒），则物体的运动速度 u 不能大于光速，（不存在超光速运动）

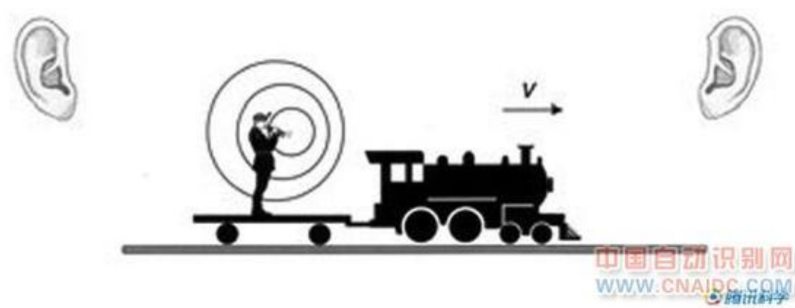
当然，无因果关系的两事件的时间顺序在不同的惯性系可以颠倒

多普勒(Doppler)效应

一切波源（包括光波、声波等等），如果波源与观察者有相对运动，观察者接收到的波源的频率与波源静止时发出的频率（固有频率）不同，在运动的波源的前面，波被压缩，波长变得较短，频率变得较高（蓝移），在运动的波源的后面，会产生相反的效应，波长变得较长，频率变得较低（红移），波源的速度越高，所产生的效应越大。

频率：单位时间（每秒）的来回往返的震动次数。

既然频率的观测与时间的观测是紧密联系的，由时间测量的相对性，可知频率的测量也是与观察者的运动状态有关的



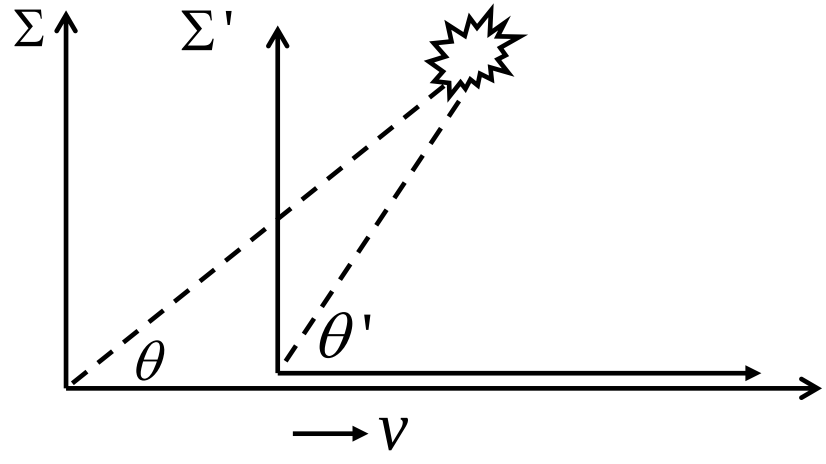
由相位不变性，在两套惯性系下频率和波矢的变换关系：

$$k_x = k_x' a_{11} - \omega' a_{41} = \gamma k_x' + \gamma \frac{v}{c^2}\omega'$$

$$k_y = k_y'$$

$$k_z = k_z'$$

$$\omega = a_{44}\omega' - k_x' a_{14} = \gamma\omega' + \gamma v k_x'$$



逆变换：

$$k_x' = \gamma k_x - \gamma \frac{v}{c^2}\omega$$

$$k_y' = k_y$$

$$k_z' = k_z$$

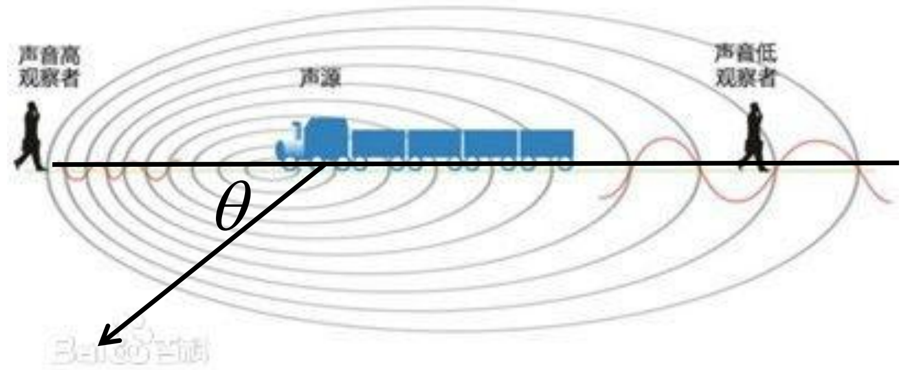
$$\omega' = \gamma\omega - \gamma v k_x$$

$$k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta \qquad k_x' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

$$\boxed{\omega' = \gamma\omega\left(1 - \beta\cos\theta\right)}$$

$$\boxed{tg\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \beta\right)}}$$

波源静止系测到的频率： ω_0



相对波源运动的观察者测到的频率：

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

夹角的变换关系： $$tg\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}$$

讨论：

当光源远离观察者运动时 $\theta = \pi$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1+\beta)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\beta)}\omega_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\omega_0 < \omega_0$$ （接收到的频率低于固有频率，红移）

当光源迎向观察者运动时 $\theta = 0$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\beta)} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\omega_0 > \omega_0$$ （接收到的频率高于固有频率，紫移）

在垂直于光源运动方向上观察时$\theta = \pi/2$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma} < \omega_0$$ （**横向Doppler效应**，接收到的频率小于固有频率，红移）

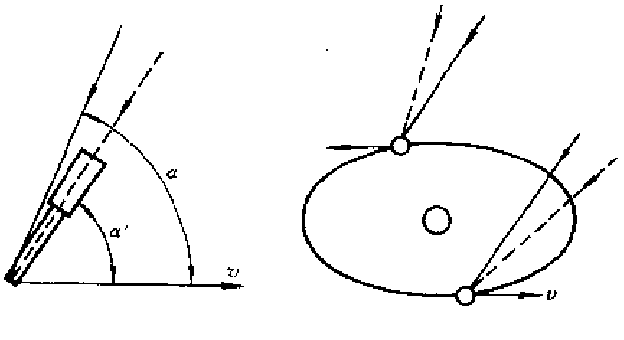
而经典Doppler效应给出 $\omega = \omega_0$

横向Doppler效应是相对论时间延缓效应的证据之一

光行差

Bradley在1728年天文观察发现

$$tg\alpha' \approx \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \beta}$$



(a) (b)

图 6-9

作业

1。（i）用相对论速度变换公式证明光速不变性，即：

如果 $\sqrt{u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z}=c$ ，则有：$\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}=c$

（ii）证明

$$\gamma_u=\gamma\cdot\gamma_{u'}\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right)$$

$$\gamma_u u_z=\gamma_{u'}\cdot u_z'$$

$$\gamma_u u_x=\gamma\left(\gamma_{u'}\cdot u_x'+\gamma_{u'}v\right)$$

其中：$\gamma_u=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ 　　$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

2。 光源S与接收器R相对静止，距离为，S-R装置浸泡在水里，已知静水的折射率为 n ，水流速度为 $\vec{v}$ ，在流水方向平行和垂直于S-R连线的两种情况下，分别计算光源发出讯号到接收器收到讯号的时间。

作业

3。 一平面镜以速度 $\vec{v}$ 自右向左运动，一束频率为 ω_0、与水平方向成 θ_0 角的平面光波自左向右传播，被镜子迎面反射，根据二次Doppler效应，求反射光波的频率及反射角 。