第十章 二阶线性常微分方程的级数解法和一般本征值问题*

目 录

对偏微分方程分离变量后，马上需要解决的就是常微分方程及其本征值问题的求解. 本书遇到的都是二阶线性常微分方程，因为它们来源于二阶线性偏微分方程. 虽然常微分方程比偏微分方程简单，但也并不存在什么普遍有效的解析求解的程式. 我们知道，一阶线性常微分方程的解可以用系数和非齐次项的积分表出，尽管这些积分不一定能积出来（即其原函数不一定是初等函数）. 但对于二阶线性常微分方程，并不存在类似的结果. 除了常系数情况和少数特殊类型（比如 Euler 方程）可以用初等函数求解之外，级数解法可能就是最好的选择了. 级数解法可以算是比较系统的一种方法，因为对于那些能够用初等函数求解的简单情况，级数解法通常也一样有效. 不过，应该指出，能够用级数解法求解的方程也是非常有限的，这取决于方程的系数的性质，通过具体问题的研究，可以逐步看清这一点.

§1 常点邻域的级数解法

二阶线性齐次常微分方程的一般形式是

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \tag{1}$$

对于物理和工程问题中导出的微分方程，x 通常是实数，$p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知函数，$y(x)$ 是未知函数，它们的函数值也都是实数. 为了应用复变函数理论来研究微分方程的解，可以把 x 看作复数，并仍记作 x，相应地，$p(x)$、$q(x)$ 和 $y(x)$ 就成为复变函数，它们在实轴上取相应的实函数值. 方程 (1) 可以附加初始条件

$$y(x_0)=c_0,\quad y'(x_0)=c_1. \tag{2}$$

如果不附加初始条件，则通解中含有两个任意常数.

显然，方程 (1) 的解的行为取决于系数的行为. 我们假定在复平面的某区域 D 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的. 级数解法就是在 D 内某点 x_0 的邻域或去心邻域内将 $y(x)$ 展开为幂级数，即 Taylor 级数、Laurent 级数或更一般的幂级数（见后）. 展开式的形式取决于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质. 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 解析，则 x_0 称为方程的常点（regular point）. 如果 x_0 是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的极点或本性奇点，它也就称为方程的奇点.

本节研究常点的级数解法，其理论基础是下面的

定理 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在圆 $|x-x_0|<R$ 内解析，则在该圆内满足方程 (1) 和初始条件 (2) 的解是存在、唯一而且解析的.

定理的大意是，如果系数是解析的，则方程的解也是解析的. 这一结论非常直观，但证明起来却并不容易，所以我们不去深究定理的证明，而是把注意力集中在计算方法上.

既然 $p(x)$、$q(x)$ 和 $y(x)$ 都在圆内解析，那么就可以展开为 Taylor 级数：

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-x_0)^k,\quad q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-x_0)^k,\quad y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k, \tag{3}$$

其中的展开系数 p_k 和 q_k 是已知的，而 a_k 是未知的. 将这些展开式代入方程 (1)，合并同幂项，将左边整理成一个幂级数，由于右边为零，故所有 $(x-x_0)^k$ 的系数均必须为零，由

此可得 a_k 间的一系列代数方程．求解这些代数方程即可用 a_0 和 a_1 表出 $a_2, a_3, \cdots$，从而得到级数解．容易看出，$a_0 = c_0$，$a_1 = c_1$．如果不给定初始条件，则级数解中含有两个任意常数 a_0 和 a_1，所以是方程 (1) 的通解．

下面补充讨论两个有关问题．它们与级数解法无关，也与常点或奇点无关．

首先，如果我们已经求得方程 (1) 的一个解 $y_1(x)$（不管用什么方法），则第二解就可以用积分表出．事实上，令 $y_2(x) = C(x)y_1(x)$，其中 $C(x)$ 是未知函数．代入方程 (1)，容易得到 $y_1C'' + (2y_1' + py_1)C' = 0$，这是 $C'(x)$ 的一阶线性方程，容易求出 $C'(x)$，再积分一次即得 $C(x)$，最后得到

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{1}{y_1^2(u)}\exp\left(-\int^u p(v)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u. \tag{4}$$

这里包含两次不定积分，所以结果中有两个任意常数，因而已是方程 (1) 的通解．如果采用固定下限，则得到的是第二解．后面会用到这个结果．

其次，考虑非齐次方程

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x). \tag{5}$$

如果已经求得相应的齐次方程 (1) 的两个线性无关解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$（不管用什么方法），则非齐次方程的一个特解 $Y(x)$ 也可以用积分表出．事实上，令 $Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$，其中 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$ 是未知函数，满足附加条件

$$y_1C_1' + y_2C_2' = 0, \tag{6a}$$

代入非齐次方程 (5)，利用附加条件以及 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 满足齐次方程的事实，易得

$$y_1'C_1' + y_2'C_2' = f. \tag{6b}$$

由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关，故 $\Delta \equiv y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$（否则可以证明 $y_1(x) \propto y_2(x)$，则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关，矛盾）．于是可以解得 $C_1' = -fy_2/\Delta$，$C_2' = fy_1/\Delta$，积分即得 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$，最后得到

$$Y(x) = y_2(x)\int^x \frac{f(u)y_1(u)}{\Delta(u)}\mathrm{d}u - y_1(x)\int^x \frac{f(u)y_2(u)}{\Delta(u)}\mathrm{d}u. \tag{7}$$

这里包含两个不定积分，所以结果中有两个任意常数，因而已是非齐次方程 (5) 的通解．如果采用固定下限，则得到的是一个特解．

§2 Legendre 方程及其本征值问题

一 *Legendre* 方程的级数解

现在考虑 Legendre 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \tag{8}$$

我们无法找到这一方程的简单解法，所以只能考虑级数解．与标准形式 (1) 比较可见

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2}. \tag{9}$$

显然，$x = 0$ 是常点．又容易看出，$p(x)$ 和 $q(x)$ 在复平面上只有两个奇点 $x = \pm 1$，所以，它们在圆 $|x| < 1$ 内解析．按上节定理，在该圆内方程的解是解析的，故可设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{10}$$

容易得到下列各式：

$$xy'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k, \quad x^2 y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k, \tag{11a}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k, \tag{11b}$$

代入方程并整理得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+1)a_k + \lambda a_k] x^k = 0. \tag{12}$$

比较两边，即得递推关系

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

由此递推关系，所有 a_{2k}（$k \in \mathbb{N}^+$）均可由 a_0 确定，所有 a_{2k+1}（$k \in \mathbb{N}^+$）均可由 a_1 确定，于是得到级数解

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x), \tag{14}$$

其中

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}, \quad y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}, \tag{15}$$

而 $c_{2k} = a_{2k}/a_0$，$c_{2k+1} = a_{2k+1}/a_1$，它们都只是 k 和 λ 的函数，而与 a_0、a_1 无关．显然，$y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 是线性独立的，而 $y(x)$ 就是方程 (8) 的通解．

由于

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} \right| = 1, \tag{16}$$

所以两个级数解的收敛半径都是 1，如所期望．但可以证明（从略），$y_0(\pm 1) = \infty$（这是简化的写法，表示 $y_0(x)$ 在 $x = \pm 1$ 两点均发散），$y_1(\pm 1) = \infty$．这一结果对于下面确定本征值问题的解非常重要．

令 $\lambda = \nu(\nu + 1)$，则递推关系 (13) 可以写作

$$a_{k+2} = \frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

注意给定 λ，方程 $\lambda = \nu(\nu+1)$ 有两个解，记任何一个解为 ν，则另一解为 $-\nu - 1$．容易看出，上面的递推关系在变换 $\nu \to -\nu - 1$ 下不变，以下其它结果亦然．所以取任何一个解代入，结果都是一样的．重复利用递推关系可得

$$a_{2k} = \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(-\frac{\nu}{2}\right)_k \left(\frac{\nu+1}{2}\right)_k a_0, \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} \left(\frac{-\nu+1}{2}\right)_k \left(\frac{\nu+2}{2}\right)_k a_1, \tag{18}$$

其中引入了记号

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \tag{19}$$

于是，式 (15) 中两个解的显式为

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(-\frac{\nu}{2}\right)_k \left(\frac{\nu+1}{2}\right)_k x^{2k}, \tag{20a}$$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} \left(\frac{-\nu+1}{2}\right)_k \left(\frac{\nu+2}{2}\right)_k x^{2k+1}. \tag{20b}$$

下面的讨论并不需要用到这一显式，所以读者能否掌握它都无关紧要.

二 *Legendre* 方程的本征值问题

由上章的讨论知道，物理上要求 Legendre 方程的解满足自然边界条件

$$|y(\pm 1)| < \infty. \tag{21}$$

一般情况下，上面得到的两个解均不满足这一条件，所以，唯一的出路是让它们中断为多项式. 由递推关系 (13) 可以看出，只要 λ 取值恰当，这是可能的. 这样同时也就确定了本征值.

如果 $\lambda = 2n(2n+1)$（$n \in \mathbb{N}$），则由递推关系 (13) 可以看出，$a_{2n+2} = a_{2n+4} = \cdots = 0$，从而 $y_0(x)$ 中断为 $2n$ 次多项式，而另一个解 $y_1(x)$ 仍为无穷级数，不满足边界条件 (21).

如果 $\lambda = (2n+1)(2n+2)$（$n \in \mathbb{N}$），则由递推关系 (13) 可以看出，$a_{2n+3} = a_{2n+5} = \cdots = 0$，从而 $y_1(x)$ 中断为 $2n+1$ 次多项式，而另一个解 $y_0(x)$ 仍为无穷级数，不满足边界条件 (21).

综合起来，如果 $\lambda = l(l+1)$（$l \in \mathbb{N}$），两个线性独立解中就有一个中断为 l 次多项式，它当然满足边界条件 (21)，而另一个解仍为无穷级数，不满足边界条件.

适当选取 a_0（当 $l = 2n$）或 a_1（当 $l = 2n+1$），使多项式解的最高次幂系数为

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

这样得到的解称为 l 次 Legendre 多项式，记作 $\mathrm{P}_l(x)$.

将 $\lambda = l(l+1)$ 代入递推关系 (13)，并将它改写为

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{(k-l-2)(k+l-1)}\, a_k, \tag{23}$$

反复应用这一递推关系，可以归纳出一般系数

$$a_{l-2k} = (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}, \tag{24}$$

然后可以用数学归纳法加以证明. 显然，k 的取值应该使得 $l-2k \geq 0$，故 $k \leq l/2$，于是

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

这就是 Legendre 多项式的显式，它的各种性质将在下一章详细讨论.

总结起来，Legendre 方程 (8) 在自然边界条件 (21) 下的本征值是 $\lambda = l(l+1)$，相应的本征函数是 l 次 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$.

当 $\lambda = l(l+1)$，与 $\mathrm{P}_l(x)$ 线性独立的另一个解可以取为剩下的一个无穷级数解，也可以取为后者与 $\mathrm{P}_l(x)$ 的线性组合，这个解有标准的取法，记作 $\mathrm{Q}_l(x)$，它在 $x = \pm 1$ 处具有 $\ln(1 \mp x)$ 的奇性，此处不作详细讨论.

读者可能想到的一个问题是：当 $\lambda \neq l(l+1)$ 时，虽然 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 均不满足自然边界条件 (21)，但是否存在其适当的线性组合可以满足呢？假定存在适当的系数 a_0 和 a_1（不全为零）使得式 (14) 满足 $|y(\pm 1)| < \infty$，那么 a_0 和 a_1 必定都不为零，否则与已知结论 $y_0(\pm 1) = \infty$，$y_1(\pm 1) = \infty$ 矛盾. 注意到 $y_0(x)$ 是偶函数，而 $y_1(x)$ 是奇函数，就容易推出

$$y_0(x) = \frac{y(x) + y(-x)}{2a_0}, \quad y_1(x) = \frac{y(x) - y(-x)}{2a_1}. \tag{26}$$

于是得到 $|y_0(\pm 1)| < \infty$，$|y_1(\pm 1)| < \infty$，与已知结论矛盾. 所以，不存在任何无穷级数解满足自然边界条件 (21). 也可以说，不存在任何异于 $l(l+1)$ 的本征值.

习题 归纳出 a_{l-2k} 的表达式，并用归纳法加以证明.

§3 正则奇点邻域的级数解法

现在再看方程 (1). 我们已经假定在复平面的某区域 D 内，$p(x)$ 和 $q(x)$ 除有限个孤立奇点外是单值解析的. 所以，如果 D 内某点 x_0 是 $p(x)$ 和（或）$q(x)$ 的奇点，那就只能是极点或本性奇点（而不会是支点，至于可去奇点则可当作常点，因为此时系数的展开式实际上是 Taylor 级数），所以一般有

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \quad 0 < |x - x_0| < R. \tag{27}$$

当然，如果 x_0 是极点，则上面 Laurent 展开式中只有有限个负幂项. 可以证明，这时方程 (1) 的两个解具有下列形式：

$$y_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, \quad y_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0). \tag{28}$$

上式中 s_1 和 s_2 通常不是整数（最一般情况下可以是复数），所以 x_0 一般来说是解的支点. 当 $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$，可能 $\beta \neq 0$，即第二解中可能出现对数函数，否则 $\beta = 0$. 将上面的解式代入方程 (1)，可以得到一系列递推关系，由这些递推关系原则上可以确定 s_1、s_2 和系数 a_k、b_k、β 等. 但是，由于每个递推关系都涉及无穷多个系数，所以实际计算是困难的甚至是不可能的.

比较简单的一种情况是上面的解式中只有有限个负幂项，这时适当调整 s_1 和 s_2，总可

以将它们写成

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0, \tag{29a}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln(x - x_0), \quad b_0 \neq 0 \quad \text{或} \quad \beta \neq 0. \tag{29b}$$

这样的解称为*正则解*. 方程 (1) 是否有正则解，有几个（一个或两个）正则解，显然取决于 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的性质. 对此，我们有下列

定理（Fuchs） 方程 (1) 在 x_0 处有两个正则解的充要条件是：$(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 解析.

上述条件就是说，$p(x)$ 以 x_0 为不高于一阶的极点，$q(x)$ 以 x_0 为不高于二阶的极点，这样的奇点称为方程的*正则奇点*. 所以，Fuchs 定理也可以叙述为：方程 (1) 在 x_0 处有两个正则解的充要条件是：x_0 是方程的正则奇点.

我们不去研究这一定理的证明，但补充以下几点：① s_1 和 s_2 称为正则奇点或正则解的指标，$\operatorname{Re} s_1 \geq \operatorname{Re} s_2$，即第一解表示指标实部较大者，它总不包含对数函数. ② 若 $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \cdots$，则 $\beta = 0$，即第二解必定不包含对数函数. ③ 若 $s_1 = s_2$，则 $\beta \neq 0$，即第二解必定包含对数函数. ④ 若 $s_1 - s_2 \in \mathbb{N}^+$，则第二解可能包含对数函数，也可能不包含.

将正则解的形式和 $p(x)$、$q(x)$ 的 Laurent 展开式代入方程，即可得到一系列递推关系，从而确定正则解中的系数和指标.

下面分析一下求解的过程，这可以帮助我们理解上面几点补充结论. 为书写方便，下面令 $x_0 = 0$，这并不失一般性.

因 $x_0 = 0$ 是正则奇点，故

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1}, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^{k-2}, \quad 0 < |x| < R. \tag{30}$$

将方程 (1) 两边同乘以 x^2，得

$$x^2 y''(x) + xp(x) \cdot xy'(x) + x^2 q(x) \cdot y(x) = 0. \tag{31}$$

采用第一解的形式

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}, \quad a_0 \neq 0, \tag{32}$$

易得

$$x^2 y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1) a_k x^{k+s},$$

$$xp(x) \cdot xy'(x) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l x^l \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} (n+s) p_{k-n} a_n \right] x^{k+s},$$

$$x^2 q(x) \cdot y(x) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} q_{k-n} a_n \right] x^{k+s},$$

全部代入上式，整理即得递推关系

$$(k+s)(k+s-1)a_k + \sum_{n=0}^{k}[(n+s)p_{k-n}+q_{k-n}]a_n = 0. \tag{33}$$

令 $k=0$，由于 $a_0 \neq 0$，故得

$$s(s-1)+p_0 s+q_0 = 0. \tag{34}$$

这就是决定指标的方程，它有两个根，记实部较大的根为 s_1，较小的为 s_2. 当 $k>0$，递推关系可以写为

$$[(k+s)(k+s-1)+p_0(k+s)+q_0]a_k = -\sum_{n=0}^{k-1}[(n+s)p_{k-n}+q_{k-n}]a_n. \tag{35}$$

以 $s=s_1$ 代入，可由 a_0 推出所有的系数，即得第一解. 显然，a_k 与 a_0 成正比，可以写作 $a_k = a_0 f(k,s_1)$，其中 $f(k,s_1)$ 是 k 和 s_1 的函数，当然还依赖于 $p_0, q_0, p_1, q_1, \cdots, p_k, q_k$，但与 a_0 无关. 因此第一解的形式为

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s_1} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} f(k,s_1) x^{k+s_1}, \quad a_0 \neq 0, \quad f(0,s_1)=1. \tag{36}$$

这是上面的补充结论 ①. 若 $s_1 - s_2 \neq 0, 1, 2, \cdots$，以 $s=s_2$ 代入，亦可由 a_0 推出所有的系数，将系数 a_k 改写为 b_k，即得第二解，其形式为

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+s_2} = b_0 \sum_{k=0}^{\infty} f(k,s_2) x^{k+s_2}, \quad b_0 \neq 0, \quad f(0,s_2)=1. \tag{37}$$

这是上面的补充结论 ②. 若 $s_1 = s_2$，式 (36) 与 (37) 实质上相同，所以用上面的方法只能求得一个解，第二解需要用其它方法求出，下面将看到，它包含对数函数. 这是上面的补充结论 ③. 下面分析补充结论 ④.

当 $s_1 - s_2 = m \in \mathbb{N}^+$，在用递推关系计算第二解的系数时可能会遇到困难. 按上面的做法，将第二解的系数写作 b_k，则递推关系 (35) 成为

$$[(k+s_2)(k+s_2-1)+p_0(k+s_2)+q_0]b_k = -\sum_{n=0}^{k-1}[(n+s_2)p_{k-n}+q_{k-n}]b_n, \tag{38}$$

其中已代入 $s=s_2$. 利用上式可以由 b_0 推出 $b_1, b_2, \cdots, b_{m-1}$，但计算 b_m 时，左边的系数成为 $(m+s_2)(m+s_2-1)+p_0(m+s_2)+q_0 = s_1(s_1-1)+p_0 s_1+q_0 = 0$，这时需要分开两种情况来讨论.

如果这时式 (38) 右边不为零，则出现矛盾，这说明第二解不可能具有形式 (31)，而需要用其它方法求出，下面将看到，它包含对数函数.

如果这时式 (38) 右边也为零，则 b_m 可以任意，取 $b_m = 0$，即可求出第二解. 显然，所有系数均与 b_0 成正比，可表为 $b_k = b_0 g(k)$，故第二解的形式为

$$y_2(x) = b_0 \sum_{k=0}^{\infty} g(k) x^{k+s_2}, \quad b_0 \neq 0, \quad g(0)=1, \quad g(m)=0. \tag{39}$$

当 $k \leq m-1$，$g(k) = f(k,s_2)$，但 $k \geq m$ 后则不成立.

如果不取 $b_m = 0$，则自 b_{m+1} 以后，递推关系成为

$$\begin{aligned}&[(k+s_1)(k+s_1-1)+p_0(k+s_1)+q_0]b_{k+m} \\ &\qquad = -\sum_{n=0}^{m-1}[(n+s_2)p_{k+m-n}+q_{k+m-n}]b_n - \sum_{n=0}^{k-1}[(n+s_1)p_{k-n}+q_{k-n}]b_{m+n}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{40}$$

显然，所有系数均为 b_0 与 b_m 的线性组合．注意到 $b_m = 0$ 时已经有 $b_k = b_0 g(k)$，则 $b_{m+k} = b_0 g(m+k) + b_m \tilde{f}(k)$．当 $b_0 = 0$，上式成为 $b_{m+k} = b_m \tilde{f}(k)$．但 $b_0 = 0$ 时式 (40) 变成

$$[(k+s_1)(k+s_1-1)+p_0(k+s_1)+q_0]b_{k+m} = -\sum_{n=0}^{k-1}[(n+s_1)p_{k-n}+q_{k-n}]b_{m+n}, \quad k \geq 1. \tag{41}$$

即由 b_m 递推 b_{m+k} 的方程与由 a_0 递推 a_k 的方程完全一样，所以 $b_{m+k} = b_m f(k, s_1)$，从而 $\tilde{f}(k) = f(k, s_1)$．于是

$$b_{m+k} = b_0 g(m+k) + b_m f(k, s_1), \quad k \geq 0. \tag{42}$$

注意上式对 $k = 0$ 亦成立．故第二解为

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+s_2} = b_0 \sum_{k=0}^{\infty} g(k) x^{k+s_2} + b_m \sum_{k=0}^{\infty} f(k, s_1) x^{k+m+s_2} \\ &= b_0 \sum_{k=0}^{\infty} g(k) x^{k+s_2} + b_m \sum_{k=0}^{\infty} f(k, s_1) x^{k+s_1}. \end{aligned} \tag{43}$$

易见其中第二部分求和与第一解 $y_1(x)$ 成正比，所以上式已经是通解．因此，上面取 $b_m = 0$ 而得第二解是恰当的．

最后讲一下式 (32) 失效时如何求出第二解．由于已知第一解总具有式 (36) 的形式，故可由式 (4) 求出第二解．下面作积分时，可以适当选取积分常数．由式 (30)，有

$$\int^u p(v) \mathrm{d}v = p_0 \ln u + \sum_{k=0}^{\infty} r_k u^k,$$

其中 $r_k = p_k/k$（$k \neq 0$），r_0 为积分常数，故

$$\exp\left(-\int^u p(v)\,\mathrm{d}v\right) = u^{-p_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k, \quad c_0 \neq 0.$$

而

$$y_1^2(u) = u^{2s_1} \sum_{k=0}^{\infty} d_k u^k, \quad d_0 \neq 0,$$

所以

$$\frac{1}{y_1^2(u)} \exp\left(-\int^u p(v)\,\mathrm{d}v\right) = u^{-2s_1-p_0} \sum_{k=0}^{\infty} e_k u^k = u^{-m-1} \sum_{k=0}^{\infty} e_k u^k = \sum_{k=0}^{\infty} e_k u^{k-m-1}, \quad e_0 \neq 0,$$

其中利用了 $s_1 + s_2 = -p_0 + 1$ 以及 $2s_1 + p_0 = s_1 + s_2 + m + p_0 = m + 1$．下面积分时要分开两种情况．

若 $m = 0$，即两个指标相等，积分得

$$\int^x \frac{1}{y_1^2(u)} \exp\left(-\int^u p(v)\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u = \beta \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad \beta = e_0 \neq 0,$$

其中 $f_k = e_k/k$（$k > 0$），f_0 是积分常数，故

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+s_1} + \beta y_1(x) \ln x, \quad \beta \neq 0, \tag{44}$$

其中 b_0 可以为零，但因为 $\beta \neq 0$，第二解一定包含对数函数.

若 $m > 0$，积分得

$$\int^x \frac{1}{y_1^2(u)} \exp\left(-\int^u p(v)\,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u = \beta \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k-m}, \quad f_0 = -\frac{e_0}{m} \neq 0,$$

其中 $\beta = e_m$ 可能为零，也可能不为零，$f_k = e_k/(k-m)$（$k \neq m$），f_m 为积分常数. 故

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+s_2} + \beta y_1(x) \ln x, \quad b_0 \neq 0. \tag{45}$$

这一解可能包含对数函数，也可能不包含.

§4 Bessel 方程

一 *Bessel* 方程的级数解

上章已经看到，在柱坐标下对 Laplace 方程分离变量，会遇到 Bessel 方程及其本征值问题. 对波动或热传导方程分离变量，也会遇到类似的问题. Bessel 方程也没有简单的解法，所以只能考虑级数解.

数学上，Bessel 方程的一般形式是

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{46}$$

其中 ν 称为 Bessel 方程的阶，它可以是复数. 若将 ν 换为 $-\nu$，上式不变，故可设 $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$ 而不失一般性. 与标准形式 (1) 比较可见

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}. \tag{47}$$

显然，$x = 0$ 是方程的正则奇点. 又容易看出，在复平面上方程没有其它奇点. 在 $x = 0$ 的去心邻域内，可设解的形式为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}, \quad a_0 \neq 0. \tag{48}$$

将式 (46) 改写为

$$Ly \equiv \left(x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2 - \nu^2\right) y = x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \tag{49}$$

其中引入算符 L 只是为了后面书写方便. 容易求出

$$x^2 y'' + x y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1) a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+s) a_k x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)^2 a_k x^{k+s}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
Ly &= \sum_{k=0}^{\infty}[(k+s)^2-\nu^2]a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s+2} \\
&= (s^2-\nu^2)a_0x^s + [(s+1)^2-\nu^2]a_1x^{s+1} + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+s)^2-\nu^2]a_kx^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+s+2} \\
&= (s^2-\nu^2)a_0x^s + [(s+1)^2-\nu^2]a_1x^{s+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\{[(k+s+2)^2-\nu^2]a_{k+2}+a_k\}x^{k+s+2}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

上式必须为零，故各项系数均为零．由于 $a_0 \neq 0$，即得 $s^2-\nu^2=0$，这是决定指标的方程，因 $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$，故其解为

$$s_1 = \nu, \quad s_2 = -\nu. \tag{51}$$

于是 $s_1 - s_2 = 2\nu$，暂时假定 ν 不等于整数或半整数，则 $s_1 - s_2$ 不为整数，按上节的一般理论，两个解均不包含对数函数．ν 为整数或半整数的情况将在随后各小节中加以讨论．

首先讨论第一解，对应于 $s_1 = \nu$．容易得到 $a_1 = 0$ 和递推关系

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+\nu+2)^2-\nu^2} = -\frac{a_k}{(k+2\nu+2)(k+2)}. \tag{52}$$

由此递推关系和 $a_1 = 0$ 可以推出

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{53}$$

反复利用递推关系又可推出

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= -\frac{a_{2k-2}}{(2\nu+2k)\cdot 2k} = (-)^2\frac{a_{2k-4}}{(2\nu+2k)(2\nu+2k-2)\cdot 2k(2k-2)} = \cdots \\
&= (-)^k\frac{a_0}{(2\nu+2k)(2\nu+2k-2)\cdots(2\nu+2)\cdot 2k(2k-2)\cdots 2} \\
&= (-)^k\frac{a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\cdot k!} \\
&= (-)^k\frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

最后一步将分子分母同乘以 $\Gamma(\nu+1)$ 并利用了 Γ 函数的性质 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$．于是得到第一解为

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k+\nu}. \tag{55}$$

取 $a_0 = 1/2^{\nu}\Gamma(\nu+1)$，这样得到的解称为 ν 阶 Bessel 函数，记作 $\mathrm{J}_\nu(x)$，即 $y_1(x) = \mathrm{J}_\nu(x)$，其形式为

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{56}$$

应该强调的是，第一解对任何 ν 值都是适用的．

其次讨论第二解，对应于 $s_2=-\nu$. 此时 $x^{s+1}=x^{-\nu+1}$ 项的系数为 $[(s_2+1)^2-\nu^2]a_1=[(-\nu+1)^2-\nu^2]a_1=(-2\nu+1)a_1$，它应该为零. 由于现在 $\nu\neq 1/2$，故 $a_1=0$ 仍成立. 重复第一解的推导过程，将其中的 ν 换为 $-\nu$，即得第二解为 $y_2(x)=\mathrm{J}_{-\nu}(x)$，后者仍由式 (56) 给出，只是将其中的 ν 换为 $-\nu$，只要 ν 不为整数，$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 的定义就是恰当的.

总结起来，当 ν 不等于整数或半整数时，Bessel 方程的两个线性独立解为

$$y(x)=\{\mathrm{J}_\nu(x),\mathrm{J}_{-\nu}(x)\}. \tag{57}$$

显然，$x=0$ 是 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 的支点. 将 $\mathrm{J}_\nu(x)$（或 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$）中的 x^ν（或 $x^{-\nu}$）因子提出来，剩下的因子是一个幂级数，由递推关系 (52) 容易看出，该幂级数的收敛半径为无穷大，故 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 在沿 $x=0$ 至 $x=\infty$ 适当割破的 x 平面上是单值解析的.

习题 从头推导 Bessel 方程的第二解 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$，设 ν 不等于整数或半整数.

二 半整数阶 *Bessel* 方程

本小节考虑 $\nu=(2l-1)/2$，$l\in\mathbb{N}^+$ 的情况. 此时 $s_1-s_2=2l-1\in\mathbb{N}^+$，根据上节的一般理论，第二解可能会包含对数函数. 但具体求解可以发现，第二解实际上是不包含对数函数的.

以 $\nu=1/2$ 为例. 第一解当然就是 $y_1(x)=\mathrm{J}_{1/2}(x)$. 对第二解，$s_2=-\nu=-1/2$，此时由 $x^{s+1}=x^{-\nu+1}=x^{1/2}$ 项的系数为零得 $0=[(s_2+1)^2-\nu^2]a_1=[(-\nu+1)^2-\nu^2]a_1=(-2\nu+1)a_1=0\cdot a_1$. 由此可见，$a_1$ 可以任取. 那么取 $a_1=0$ 显然是最方便的. 这样就可以象上一小节一样求得第二解为 $y_2(x)=\mathrm{J}_{-1/2}(x)$. 如果不取 $a_1=0$，那么求得的解将包含两个任意常数 a_0 和 a_1，计算可以发现（或参考上节小字部分的一般讨论），包含 a_1 的部分与 $\mathrm{J}_{1/2}(x)$ 成正比，所以这个解已经是通解. 由此可见，取 $a_1=0$ 而得第二解是恰当的.

当 $l\geq 2$，即 $\nu\geq 3/2$，第一解仍然是 $y_1(x)=\mathrm{J}_\nu(x)$. 对第二解，有 $a_1=0$，由递推关系 $(k+2)(k-2l+3)a_{k+2}=-a_k$ 可得 $a_3=a_5=\cdots=a_{2l-3}=0$，然后就是 $0\cdot a_{2l-1}=-a_{2l-3}=0$，于是 a_{2l-1} 可以任取. 如前取 $a_{2l-1}=0$，则所有 $a_{2k+1}=0$（$k\in\mathbb{N}$），这样也就可以象上一小节一样求得第二解为 $y_2(x)=\mathrm{J}_{-\nu}(x)$.

总结起来，当 ν 为半整数时，Bessel 方程的两个线性独立解仍由式 (57) 给出，只需将相应的 ν 值代入即可.

以后我们会证明，半整数阶的 Bessel 函数都是初等函数. 这里证明 $\mathrm{J}_{\pm1/2}(x)$ 是初等函数.

将 $\nu=\pm1/2$ 代入式 (56) 并利用 $\Gamma(k+1/2)=\sqrt{\pi}(2k)!/2^{2k}k!$, $\Gamma(k+3/2)=\sqrt{\pi}(2k+1)!/2^{2k+1}k!$，整理即得

$$\mathrm{J}_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1},\quad \mathrm{J}_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-)^k}{(2k)!}x^{2k},$$

即

$$\mathrm{J}_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad \mathrm{J}_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{58}$$

三　整数阶 *Bessel* 方程

本小节考虑 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 的情况．此时 $s_1 - s_2 = 2m$ 为自然数或零．当 $m = 0$ 时，$s_1 = s_2 = 0$，我们只能求得一个形如 (48) 的解，即 $y_1(x) = \mathrm{J}_0(x)$，根据上节的一般理论，第二解必定包含对数函数．当 $m \in \mathbb{N}^+$ 时，第一解为 $y_1(x) = \mathrm{J}_m(x)$．对于第二解，将 $\nu = m$ 和 $s_2 = -m$ 代入式 (50) 并令各项系数为零，即得 $a_1 = 0$ 和递推关系 $(k+2)(k-2m+2)a_{k+2} = -a_k$，由此即可推出所有 $a_{2k+1} = 0$（$k \in \mathbb{N}$），并用 a_0 表出 a_{2k}（$k = 1, 2, \cdots, m-1$），然而当 $k = 2m-2$ 时，递推关系给出 $0 \cdot a_{2m} = -a_{2m-2}$，但 $a_{2m-2} \propto a_0$ 不为零，所以导致矛盾，于是第二解不可能具有式 (48) 的形式，因而也包含对数函数．令

$$y(x) = \beta \mathrm{J}_m(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-m}, \tag{59}$$

代入式 (49)（其中 $\nu = m$），适当选取其中可以任取的两个常数（$m = 0$ 时是 β 和 a_0，$m \in \mathbb{N}^+$ 时是 β 和 a_{2m}，参看后面的求解）可以求得第二解 $y_2(x) = \mathrm{N}_m(x)$，称为 m 阶 Neumann 函数，其形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_m(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_m(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+m)!}[\psi(k+m+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}.\end{aligned} \tag{60}$$

当 $m = 0$ 时，规定去掉其中第二项有限和．上式中出现的 ψ 函数定义为 Γ 函数的对数微商，即 $\psi(x) = \mathrm{d}\ln\Gamma(x)/\mathrm{d}x = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$，这里我们只需要知道 $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$（来源于 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$）和 $\psi(1) = -\gamma$，而 $\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 901\cdots$ 称为 Euler 常数，定义为

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right). \tag{61}$$

在不同的书上，Neumann 函数的形式略有不同，但实质上是一样的．

总结起来，当 $\nu = m$ 时，Bessel 方程的两个线性独立解为

$$y(x) = \{\mathrm{J}_m(x), \mathrm{N}_m(x)\}. \tag{62}$$

物理上最常遇到的就是这种情况，注意 $\mathrm{N}_m(x)$ 在 $x = 0$ 处有奇性，所以，如果求解区域包括 $x = 0$ 点，就应该舍弃 $\mathrm{N}_m(x)$．

四　*Neumann* 函数的一般定义

对一般的 ν 值，我们可以定义 ν 阶 Neumann 函数为

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{63}$$

当 $\nu \neq m \in \mathbb{N}$，它显然与 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 线性独立，故此时 Bessel 方程的两个线性独立解亦可取为 $y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)\}$．当 $\nu \to 0$ 时，上式成为 $0/0$ 型．而当 $\nu \to m \in \mathbb{N}^+$ 时，$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 的表

达式中，$k \le m-1$ 各项对求和没有贡献，这是因为对这样的 k 值，$\Gamma(k-\nu+1) \to \infty$. 因此，$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 中的求和实际上从 $k=m$ 开始，于是

$$\mathrm{J}_{-m}(x) \equiv \lim_{\nu\to m} \mathrm{J}_{-\nu}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = (-)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m},$$

其中最后一步作了变换 $k = k' + m$ 并在变换后将求和指标 k' 重新换为 k，易见右边的和式正是 $\mathrm{J}_m(x)$，于是

$$\mathrm{J}_{-m}(x) = (-)^m \mathrm{J}_m(x), \tag{64}$$

可见当 $\nu \to m \in \mathbb{N}^+$ 时，式 (63) 亦成为 0/0 型. 用 L' Hospital 法则求出极限，可以发现，

$$\lim_{\nu\to m} \mathrm{N}_\nu(x) = \mathrm{N}_m(x), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{65}$$

其中右边由式 (60) 给出. 证明可参看后面第七小节.

总结起来，对于任何 ν 值，Bessel 方程的两个线性独立解总可以取为

$$y(x) = \{\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)\}. \tag{66}$$

容易看出，当 ν 为半整数时，$\mathrm{N}_\nu(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 只相差一个常数因子.

五　***Neumann*** 函数的常规级数解法

首先考虑 $m=0$ 的情况，将 $y(x) = \beta \mathrm{J}_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 代入式 (49)（其中 $\nu = 0$）可得

$$a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)^2 a_{k+2} + a_k] x^{k+2} + 2\beta x \mathrm{J}_0'(x) + \beta [x^2 \mathrm{J}_0''(x) + x \mathrm{J}_0'(x) + x^2 \mathrm{J}_0(x)] \ln x = 0,$$

因为 $\mathrm{J}_0(x)$ 是式 (49)（其中 $\nu=0$）的解，故上式中最后一项为零，代入 $\mathrm{J}_0(x)$ 的级数表式，上式可化为

$$a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} [(2k+1)^2 a_{2k+1} + a_{2k-1}] x^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k)^2 a_{2k} + a_{2k-2} + \frac{(-)^k \beta}{2^{2k-2}(k-1)!k!} \right] x^{2k} = 0.$$

上式对 a_0 没有限制，故 a_0 可以任取. 由上式第一项和第二项立得

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{67}$$

而由第三项可得递推关系

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2 k}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \tag{68}$$

由此可以看出，β 也是任意常数. 反复利用这一递推关系可得

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r}, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

利用 ψ 函数，上式可以写作

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k}(k!)^2} [\psi(k+1) - \psi(1)], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

注意最后的表式对于 $k=0$ 也成立. 于是得到级数解

$$y(x)=\beta \mathrm{J}_0(x)\ln x-\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}[\psi(k+1)-\psi(1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{70}$$

容易看出，最后一项求和正是第一解 $\mathrm{J}_0(x)$，因此上式已经是通解；同时我们看到，如果取 $\beta=0$，则只能得到第一解，所以，第二解一定包含对数函数. 我们当然可以取 $a_0=0$ 和 $\beta=1$ 而得到第二解，但习惯上是取

$$\beta=\frac{2}{\pi},\quad a_0=-\frac{2}{\pi}[\ln 2+\psi(1)], \tag{71}$$

这样得到的第二解就是 $y_2(x)=\mathrm{N}_0(x)$，其形式已经在前面给出. 这里系数的取法是为了使得结果与式 (63) 的极限一致.

其次考虑 $m\in\mathbb{N}^+$ 的情况，将式 (59) 代入式 (49)（其中 $\nu=m$）可得

$$\begin{aligned}(1-2m)a_1x^{1-m}+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+2-2m)a_{k+2}+a_k]x^{k+2-m}+2\beta x\mathrm{J}'_m(x)&\\ +\beta[x^2\mathrm{J}''_m(x)+x\mathrm{J}'_m(x)+(x^2-m^2)\mathrm{J}_m(x)]\ln x=0,&\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{J}_m(x)$ 是式 (49)（其中 $\nu=m$）的解，故上式中最后一项为零. 将上式两边同乘以 x^m，代入 $\mathrm{J}_m(x)$ 的级数表式，整理得

$$\begin{aligned}(1-2m)a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}[(2k+1)(2k+1-2m)a_{2k+1}+a_{2k-1}]x^{2k+1}&\\ +\sum_{k=1}^{\infty}[(2k)(2k-2m)a_{2k}+a_{2k-2}]x^{2k}+2\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(2k+m)}{2^{2k+m}k!(k+m)!}x^{2k+2m}=0,&\end{aligned}$$

将上式第三项拆成两部分，第一部分从 $k=1$ 到 $k=m-1$ 求和，第二部分是从 $k=m$ 开始的无穷级数，对第二部分作指标变换 $k=k'+m$，再将 k' 改写为 k，并与最后一项求和合并，得到

$$\begin{aligned}(1-2m)a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}[(2k+1)(2k+1-2m)a_{2k+1}+a_{2k-1}]x^{2k+1}+\sum_{k=1}^{m-1}[(2k)(2k-2m)a_{2k}+a_{2k-2}]x^{2k}&\\ +\sum_{k=0}^{\infty}\left[(2k)(2k+2m)a_{2k+2m}+a_{2k+2m-2}+2\beta\frac{(-)^k(2k+m)}{2^{2k+m}k!(k+m)!}\right]x^{2k+2m}=0,&\end{aligned} \tag{72}$$

上式对 a_0 不构成限制，因此 a_0 可以任取. 由上式第一项和第二项立得

$$a_{2k+1}=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{73}$$

由第三项可得递推关系

$$a_{2k}=\frac{a_{2k-2}}{2^2k(m-k)},\quad k=1,2,\cdots,m-1, \tag{74}$$

反复利用这一递推关系可得

$$a_{2k}=\frac{(m-k-1)!}{2^{2k}k!(m-1)!}a_0,\quad k=0,1,\cdots,m-1. \tag{75}$$

注意最后的表式对于 $k=0$ 也成立. 由式 (72) 的最后一项可得（由 $k=0$ 项系数为零）

$$\beta=-2^{m-1}(m-1)!a_{2m-2}=-\frac{a_0}{2^{m-1}(m-1)!} \tag{76}$$

和递推关系

$$a_{2k+2m}=-\frac{a_{2k+2m-2}}{2^2k(k+m)}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k+m+1}k!(k+m)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+m}\right),\quad k\in\mathbb{N}^+. \tag{77}$$

由此可以看出，a_{2m} 也是任意常数．反复利用这一递推关系可得

$$a_{2k+2m}=\frac{(-)^k m!a_{2m}}{2^{2k}k!(k+m)!}-\frac{(-)^k\beta}{2^{2k+m+1}k!(k+m)!}[\psi(k+m+1)+\psi(k+1)-\psi(m+1)-\psi(1)],\quad k\in\mathbb{N}. \tag{78}$$

注意最后的表式对于 $k=0$ 也成立．由于式 (76)，任意常数 a_0 也可以用 β 表出，故可将式 (75) 改写为

$$a_{2k}=-\frac{(m-k-1)!}{2^{2k-m+1}k!}\beta,\quad k=0,1,\cdots,m-1. \tag{79}$$

于是得到级数解

$$\begin{aligned}y(x)=\beta\mathrm{J}_m(x)\ln x&-\frac{\beta}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}\\&-\frac{\beta}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+m)!}[\psi(k+m+1)+\psi(k+1)-\psi(m+1)-\psi(1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}\\&+2^m m!a_{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}.\end{aligned} \tag{80}$$

容易看出，最后一项求和正是第一解 $\mathrm{J}_m(x)$，因此上式已经是通解；同时我们看到，如果取 $\beta=0$，则只能得到第一解，所以，$m\in\mathbb{N}^+$ 时的第二解也一定包含对数函数．我们当然可以取 $a_{2m}=0$ 和 $\beta=1$ 而得到第二解，但习惯上是取

$$\beta=\frac{2}{\pi},\quad a_{2m}=-\frac{1}{2^m m!\pi}[\psi(m+1)+\psi(1)+2\ln 2], \tag{81}$$

这样得到的第二解就是 $y_2(x)=\mathrm{N}_m(x)$，其形式已经在前面给出．这里系数的取法也是为了使得结果与式 (63) 的极限一致．

六 ****Neumann*** 函数的 ***Frobenius*** 级数解法

本小节介绍另一种求第二解的方法，称为 Frobenius 方法，这种方法也可以用于求解其它方程在正则奇点处的第二解，尤其是第二解包含对数函数的情况．对于第二解不包含对数函数的情况，常规的级数解法是方便的．所以我们只考虑 $\nu=m\in\mathbb{N}$ 的情况．

首先考虑 $m=0$ 的情况，将 $\nu=0$ 代入式 (50) 可得

$$Ly=s^2a_0x^s+(s+1)^2a_1x^{s+1}+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+s+2)^2a_{k+2}+a_k]x^{k+s+2}. \tag{82}$$

暂时不确定 s，取 a_0 为与 s 无关的任意常数，$a_1=0$，而其它系数由下列递推关系确定

$$(k+s+2)^2a_{k+2}=-a_k, \tag{83}$$

这样得到的级数

$$y(x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}(s)x^{2k+s}=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\Gamma^2(s/2+1)}{2^{2k}\Gamma^2(s/2+k+1)}x^{2k+s} \tag{84}$$

满足

$$Ly(x,s)=s^2a_0x^s. \tag{85}$$

显然 $Ly(x,0)=0$，即 $y(x,0)$ 是解，容易看出 $y(x,0)=a_0\mathrm{J}_0(x)$，取 $a_0=1$ 即得 $y_1(x)=\mathrm{J}_0(x)$，这是熟知的第一解．将上式两边对 s 求导，可得

$$L\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}=2sa_0x^s+s^2a_0x^s\ln x. \tag{86}$$

显然，

$$L\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=0}=0,$$

所以 $[\partial y(x,s)/\partial s]|_{s=0}$ 也是方程的解，此即第二解．易得

$$\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}(s)x^{2k+s}\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}(s)\frac{\partial\ln a_{2k}(s)}{\partial s}x^{2k+s},$$

算出第二项中的导数，然后在各项中代入 $s=0$，可得

$$\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=0}=a_0\mathrm{J}_0(x)\ln x-a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}[\psi(k+1)-\psi(1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

取 $a_0=2/\pi$，得第二解

$$y_2(x)=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_0(x)\ln x-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\psi(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\frac{2}{\pi}\psi(1)\mathrm{J}_0(x). \tag{87}$$

对上式加上 $-(2/\pi)[\psi(1)+\ln 2]\mathrm{J}_0(x)$ 即得 $\mathrm{N}_0(x)$．

其次考虑 $m\in\mathbb{N}^+$ 的情况，将 $\nu=m$ 代入式 (50) 可得

$$Ly=(s^2-m^2)a_0x^s+[(s+1)^2-m^2]a_1x^{s+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\{[(k+s+2)^2-m^2]a_{k+2}+a_k\}x^{k+s+2}. \tag{88}$$

暂时不确定 s，取 a_0 为与 s 无关的任意常数，$a_1=0$，而其它系数由下列递推关系确定

$$[(k+s+2)^2-m^2]a_{k+2}=-a_k, \tag{89}$$

这样得到的级数

$$y(x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}(s)x^{2k+s}=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k\Gamma\big((s+m)/2+1\big)\Gamma\big((s-m)/2+1\big)}{2^{2k}\Gamma\big((s+m)/2+k+1\big)\Gamma\big((s-m)/2+k+1\big)}x^{2k+s} \tag{90}$$

满足

$$Ly(x,s)=(s-m)(s+m)a_0x^s. \tag{91}$$

显然 $Ly(x,\pm m)=0$，即 $y(x,m)$ 和 $y(x,-m)$ 都是解．容易看出 $y(x,m)=2^mm!a_0\mathrm{J}_m(x)$，取 $a_0=1/2^mm!$ 即得 $y_1(x)=\mathrm{J}_m(x)$，这是熟知的第一解．然而，当我们将 $s=-m$ 代入式 (90) 计算 $y(x,-m)$ 的具体形式时，就会遇到困难．当 $k\le m-1$ 时，$a_{2k}(-m)$ 的分子和分母都是无穷大，如果取 $s\to -m$ 的极限，还可以得到有限的结果，但当 $k\ge m$ 时，$a_{2k}(-m)$ 的分母为有限，而分子是无穷大．

解决上述困难的方法是取一个无穷小的 a_0，比如

$$a_0=(s+m)c_0, \tag{92}$$

其中 c_0 是与 s 无关的常数. 这样可以避免 $k \geq m$ 时 $a_{2k}(-m)$ 成为无穷大，但 $k \leq m-1$ 时，$a_{2k}(-m)$ 就必然成为零，所以求和实际上是从 $k=m$ 项开始，而得到的解 $y(x,-m)$ 与 $y_1(x)=\mathrm{J}_m(x)$ 成正比（见下），所以并不是线性独立的第二解. 这与我们已经知道的结果 (64) 基本上是一回事.

按式 (92) 的取法，a_0 已经成为 s 的函数，于是式 (91) 变成

$$Ly(x,s)=(s-m)(s+m)^2c_0x^s. \tag{93}$$

将上式两边对 s 求导，可得

$$L\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}=(s+m)^2c_0x^s+2(s-m)(s+m)c_0x^s+(s-m)(s+m)^2c_0x^s\ln x. \tag{94}$$

显然，

$$L\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=-m}=0,$$

所以 $[\partial y(x,s)/\partial s]|_{s=-m}$ 也是方程的解，此即第二解. 如前

$$\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}(s)x^{2k+s}\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}(s)\frac{\partial\ln a_{2k}(s)}{\partial s}x^{2k+s}, \tag{95}$$

按式 (90) 和 (92)，

$$a_{2k}(s)=c_0\frac{(-)^k(s+m)\Gamma\big((s+m)/2+1\big)\Gamma\big((s-m)/2+1\big)}{2^{2k}\Gamma\big((s+m)/2+k+1\big)\Gamma\big((s-m)/2+k+1\big)}, \tag{96}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln a_{2k}(s)}{\partial s}=\frac{1}{s+m}&+\frac12\psi\left(\frac{s+m}{2}+1\right)+\frac12\psi\left(\frac{s-m}{2}+1\right)\\&-\frac12\psi\left(\frac{s+m}{2}+k+1\right)-\frac12\psi\left(\frac{s-m}{2}+k+1\right).\end{aligned} \tag{97}$$

现在需要计算 $s\to -m$ 时式 (95) 中的各项系数. 注意到宗量为零或负整数时，Γ 函数和 ψ 函数都有奇性，所以在计算时需要引用下面的公式：

$$\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\Gamma(x)\sin\pi x},\quad \psi(1-x)=\psi(x)+\pi\cot\pi x, \tag{98}$$

其中后者来源于前者，前者证明从略. 计算可得当 $k\leq m-1$ 时，

$$a_{2k}(s)\to\frac{(s+m)\Gamma(m-k)}{2^{2k}k!\Gamma(m)}c_0\to 0, \tag{99a}$$

$$\frac{\partial\ln a_{2k}(s)}{\partial s}\to\frac{1}{s+m}+\frac12[\psi(1)+\psi(m)-\psi(k+1)-\psi(m-k)]\to\infty, \tag{99b}$$

$$a_{2k}(s)\frac{\partial\ln a_{2k}(s)}{\partial s}\to\frac{\Gamma(m-k)}{2^{2k}k!\Gamma(m)}c_0, \tag{99c}$$

而当 $k\geq m$ 时，

$$a_{2k}(s)\to\frac{(-)^{k-m+1}}{2^{2k-1}k!(k-m)!\Gamma(m)}c_0, \tag{100a}$$

$$\frac{\partial\ln a_{2k}(s)}{\partial s}\to\frac12[\psi(1)+\psi(m)-\psi(k+1)-\psi(k-m+1)]. \tag{100b}$$

于是得到

$$\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=-m}=-\frac{2c_0}{2^m\Gamma(m)}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-)^{k-m}}{k!(k-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}\ln x+\frac{c_0}{2^m\Gamma(m)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$
$$+\frac{c_0}{2^m\Gamma(m)}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-)^{k-m}}{k!(k-m)!}[\psi(k+1)+\psi(k-m+1)-\psi(1)-\psi(m)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}. \tag{101}$$

其中的第一项如果去掉 $\ln x$ 因子就是 $y(x,-m)$，容易看出其中的求和正是 $\mathrm{J}_m(x)$，这就是前面提到的结论. 取 $c_0=-2^m\Gamma(m)/\pi$，并对第一项和第三项作求和指标变换 $k=k'+m$，再将 k' 重新写成 k，即得

$$y_2(x)=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_m(x)\ln x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+m)!}[\psi(k+m+1)+\psi(k+1)-\psi(1)-\psi(m)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}. \tag{102}$$

对上式加上 $-(1/\pi)[\psi(1)+\psi(m)+2\ln 2]\mathrm{J}_m(x)$ 即得 $\mathrm{N}_m(x)$.

由上述求解过程可以看出，用 Frobenius 级数解法求 $\mathrm{N}_0(x)$ 比较简单，但求 $\mathrm{N}_m(x)$ 则并不比常规解法来得方便.

七 *一般 *Neumann* 函数的整数阶极限

本小节补充证明式 (65).

由式 (63) 和 L' Hospital 法则可得

$$\lim_{\nu\to m}\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to m}\left[\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(x)}{\partial\nu}-(-)^m\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]. \tag{103}$$

由式 (56) 易得

$$\lim_{\nu\to m}\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(x)}{\partial\nu}=\mathrm{J}_m(x)\ln\frac{x}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+m)!}\psi(k+m+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \tag{104}$$

而

$$\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}\ln\frac{x}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\psi(k-\nu+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

对上式取 $\nu\to m$ 的极限时，需要注意 Γ 函数和 ψ 函数的奇性. 首先看第一项，当 $k\le m-1$ 时，$\Gamma(k-\nu+1)\to\infty$，故求和实际上从 $k=m$ 项开始，不难求得该项的极限为 $-(-)^m\mathrm{J}_m(x)\ln(x/2)$. 再看第二项，当 $k\le m-1$ 时，$\Gamma(k-\nu+1)\to\infty$，同时 $\psi(k-\nu+1)\to\infty$，利用式 (98) 可以求出有限的结果，不过需要注意，当 $m=0$ 时这一部分是不存在的；当 $k\ge m$ 时，各因子均无奇性. 结果为

$$\lim_{\nu\to m}\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}=-(-)^m\mathrm{J}_m(x)\ln\frac{x}{2}+(-)^m\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$
$$+(-)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+m)!}\psi(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}. \tag{105}$$

将以上结果代入式 (103)，结果即为式 (60) 给出的 $\mathrm{N}_m(x)$，当 $m=0$ 时，需去掉其中第二项有限和.

§5 Sturm–Liouville 本征值问题

一 *Sturm–Liouville* 本征值问题的一般提法

二阶线性齐次常微分方程的一般形式由式 (1) 给出. 为了下面符号上的方便，这里将它改写为

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=0. \tag{106}$$

从数理方程分离变量得到的常微分方程一般含有待定常数，记作 λ，如果将含有 λ 的项单独写出来，方程的形式通常是

$$y''(x)+P(x)y'(x)-\tilde{Q}(x)y(x)+\lambda\tilde{\rho}(x)y(x)=0. \tag{107}$$

两边同乘以

$$k(x)\equiv\exp\left(\int_{x_0}^{x}P(\xi)\mathrm{d}\xi\right), \tag{108}$$

则得

$$k(x)y''(x)+k(x)P(x)y'(x)-k(x)\tilde{Q}(x)y(x)+\lambda k(x)\tilde{\rho}(x)y(x)=0.$$

显然，$k(x)P(x)=k'(x)$，故上式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0,\quad (a<x<b) \tag{109}$$

其中 $q(x)=k(x)\tilde{Q}(x)$，$\rho(x)=k(x)\tilde{\rho}(x)$，$(a,b)$ 为求解区间. 上式称为 Sturm–Liouville 型方程，其中 $\rho(x)$ 称为权函数. 以上推导说明一般形式 (106) 与 Sturm–Liouville 形式是等价的. 后者对于本节的讨论是方便的.

由于方程 (109) 是由数理方程分离变量得到的，所以在区间端点 a、b 通常附有边界条件，满足边界条件的解并不一定存在，除非 λ 取某些特定值，这样的 λ 值称为*本征值*，相应的解称为*本征函数*. Sturm–Liouville 方程与边界条件一起构成的问题称为 *Sturm–Liouville 本征值问题*.

本征值问题的类型决定于边界条件的类型，主要有以下几种.

1. 第一、二、三类边界条件. 比如以下本征值问题：

$$y''(x)+\lambda y(x)=0,\quad (a<x<b) \tag{110a}$$

$$(\alpha y'-\beta y)|_{x=a}=0,\quad (\gamma y'+\delta y)|_{x=b}=0, \tag{110b}$$

其中 α、β、γ、$\delta\geq 0$，但 $\alpha^2+\beta^2\neq 0$，$\gamma^2+\delta^2\neq 0$. 与 Sturm–Liouville 方程比较可知 $k(x)=1$，$q(x)=0$，$\rho(x)=1$.

2. 自然边界条件. 比如 Legendre 方程的本征值问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0,\quad (-1<x<1) \tag{111a}$$

$$|y(\pm 1)|<\infty. \tag{111b}$$

其中的边界条件即是自然边界条件. 与 Sturm–Liouville 方程比较可知 $k(x)=1-x^2$，$q(x)=0$，$\rho(x)=1$. 注意 $k(\pm1)=0$，而 $x=\pm1$ 处均有自然边界条件.

又比如 Bessel 方程的本征值问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{m^2}{x}y+\lambda xy=0,\quad(0<x<a) \tag{112a}$$

$$y(0)=0\quad\text{或}\quad|y(0)|<\infty,\quad\alpha y'(a)+\beta y(a)=0, \tag{112b}$$

其中 α、$\beta\geq0$，但 $\alpha^2+\beta^2\neq0$；$x=0$ 处的边界条件即是自然边界条件. 与 Sturm–Liouville 方程比较可知 $k(x)=x$，$q(x)=m^2/x$，$\rho(x)=x$. 注意 $k(0)=0$，而 $x=0$ 处有自然边界条件.

另一个例子是球 Bessel 方程的本征值问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\lambda_l y+\lambda x^2y=0,\quad(0<x<a) \tag{113a}$$

$$y(0)=0\quad\text{或}\quad|y(0)|<\infty,\quad\alpha y'(a)+\beta y(a)=0, \tag{113b}$$

其中 α、$\beta\geq0$，但 $\alpha^2+\beta^2\neq0$；$x=0$ 处的边界条件即是自然边界条件. 与 Sturm–Liouville 方程比较可知 $k(x)=x^2$，$q(x)=\lambda_l$，$\rho(x)=x^2$. 注意 $k(0)=0$，而 $x=0$ 处有自然边界条件. 又注意与上章的记号比较，这里 x 代表径向球坐标 r，$y(x)$ 代表径向函数 $R(r)$，λ_l 相当于上章的 λ，它由角向方程、即球函数方程的本征值问题决定，而 λ 相当于上章的 k^2，它才是径向方程的本征值.

一般来说，端点 a（或 b）处出现自然边界条件的充要条件是 $k(a)=0$（或 $k(b)=0$）.

Sturm–Liouville 方程 (109) 可以改写为

$$y''(x)+\frac{k'(x)}{k(x)}y'(x)+\frac{\lambda\rho(x)-q(x)}{k(x)}y(x)=0,$$

与一般形式 (106) 比较可知 $P(x)=k'(x)/k(x)$，$Q(x)=[\lambda\rho(x)-q(x)]/k(x)$. 从以上各例看到，在求解区间上，$\rho(x)\geq0$ 且性质良好；$q(x)\geq0$，只在端点可能有奇性，且最多为一阶极点；$k(x)\geq0$，没有奇性，只在端点可能为零，且最多为二阶零点. 而且，当端点为 $k(x)$ 的一阶零点时，$q(x)$ 最多以其为一阶极点；当端点为 $k(x)$ 的二阶零点时，$q(x)$ 在该处性质良好. 这样若端点为方程的奇点，则必为正则奇点. 物理上遇到的情况大致如此.

不失一般性，以左端点 a 为例，现在基本上可以断定，如果 $k(a)=0$，则 a 处必有自然边界条件. 反之，如果 $k(a)\neq0$，则 a 处不会有自然边界条件. 由于 a 是方程的常点或正则奇点，我们可以按式 (30) 的形式展开 $P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-a)^{k-1}$，$Q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-a)^{k-2}$，然后按具体情况讨论如下.

首先，若 a 是 $k(x)$ 的一阶零点，则它最多是 $q(x)$ 的一阶极点. 于是有 $k(x)=(x-a)\varphi(x)$，$q(x)=\psi(x)/(x-a)$，其中 $\varphi(a)>0$ 而 $\psi(a)\geq0$. 易得 $p_0=[(x-a)P(x)]|_{x=a}=[1+(x-a)\varphi'(x)/\varphi(x)]|_{x=a}=1$，$q_0=[(x-a)^2Q(x)]|_{x=a}=[\lambda(x-a)\rho(x)/\varphi(x)-\psi(x)/\varphi(x)]|_{x=a}=-\psi(a)/\varphi(a)\leq0$，于是指标方程 (34) 变成 $s^2+q_0=0$，其中 q_0 为实数且 $q_0\leq0$，所以两根一正一负或均为零. 若两根一正一负，则对应于 s_2 的解含有 $(x-a)^{s_2}$ 项而在 $x=a$ 处发散；若两根均为零，则对应于 s_2 的解含有 $\ln(x-a)$ 项而在 $x=a$ 处发散. 对于物理问题，应该排除在 $x=a$ 处有奇性的解，因而 $x=a$ 处有自然边界条件.

其次，若 a 是 $k(x)$ 的二阶零点，则 $k(x)=(x-a)^2\varphi(x)$，其中 $\varphi(a)>0$，而 $q(x)$ 在 a 处性质良好．易得 $p_0=[2+(x-a)\varphi'(x)/\varphi(x)]|_{x=a}=2$．对于 q_0，难以得到一般结论，但物理上遇到的通常是 Helmholtz 方程或中心力场中的定态 Schrödinger 方程在球坐标系中分离变量后得到的径向方程（前者对应的径向方程即上面的球 Bessel 方程），这时 $\rho(a)=0$．对于这种满足 $\rho(a)=0$ 的情况，易得 $q_0=[\lambda\rho(a)-q(a)]/\varphi(a)=-q(a)/\varphi(a)\le 0$，于是指标方程变成 $s^2+s+q_0=0$，其中 q_0 为实数且 $q_0\le 0$，由此易知其两根满足 $s_1\ge 0$，$s_2<0$，于是对应于 s_2 的解含有 $(x-a)^{s_2}$ 项而在 $x=a$ 处发散，因而 $x=a$ 处有自然边界条件．

最后，如果 $k(a)\neq 0$，则容易推出 $p_0=0$，$q_0=0$，于是指标方程变成 $s(s-1)=0$，其两根为 $s_1=1$，$s_2=0$，所以两个解在 a 处性质良好，不需要排除有奇性的解，因而在 a 处也就不会有自然边界条件．

3．周期性边界条件．如果 $k(a)=k(b)$，$q(a)=q(b)$，$\rho(a)=\rho(b)$，则可以对 Sturm–Liouville 方程附加周期性边界条件 $y(a)=y(b)$，$y'(a)=y'(b)$．比如下列本征值问题：

$$y''(x)+\lambda y(x)=0,\quad (0<x<2\pi) \tag{114a}$$

$$y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi). \tag{114b}$$

其中方程与式 (110a) 相同，故 $k(x)=1$，$q(x)=0$，$\rho(x)=1$．

我们以前用的周期性边界条件是 $y(x+2\pi)=y(x)$，由此容易推出式 (114b)．反过来，由后者虽然不能推出前者，但结合方程 (114a)，易得 $y^{(n)}(0)=y^{(n)}(2\pi)$（$n=0,1,2,\cdots$），于是可得

$$y(x+2\pi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(2\pi)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n=y(x).$$

当然，这里假定 $y(x)$ 具有良好的解析性质，从而可以展开为 Taylor 级数．

二　***Sturm–Liouville*** 本征值问题的一般结论

对于物理问题，Sturm–Liouville 方程 (109) 中的系数满足 $k(x)\ge 0$，$q(x)\ge 0$，$\rho(x)\ge 0$（上面所举的例子均满足这些条件）．在这样的前提下，Sturm–Liouville 本征值问题有以下一般结论．

1. 所有本征值都是非负的，即 $\lambda\ge 0$．

注　有了这一结论，以后求解本征值问题时，只要方程的系数满足上述条件，就可以立即排除 $\lambda<0$ 的可能性．对于象式 (110) 这样的本征值问题，这并不一定能减少多大的工作量，但是对于方程比较复杂的情况，比如 Bessel 方程的本征值问题，由此带来的方便是非常明显的．

证明　将式 (109) 两边同乘以 $y^*(x)$，得

$$y^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)y^*(x)y(x)+\lambda\rho(x)y^*(x)y(x)=0,$$

对 x 由 a 到 b 积分，可得

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b \rho(x)|y(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b q(x)|y(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_a^b y^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b q(x)|y(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b k(x)|y'(x)|^2\,\mathrm{d}x - k(x)y^*(x)y'(x)\big|_a^b \\ &\geq k(x)y^*(x)y'(x)\big|_b^a = k(a)y^*(a)y'(a) - k(b)y^*(b)y'(b).\end{aligned}$$

其中第二步作了分部积分，第三步是因为第二步中的两项积分均非负．因为 $y(x)$ 是本征函数，所以除了可能的若干零点外应不为零，而 $\rho(x)\geq 0$ 而且一般只在端点处才可能为零，所以上式左边的积分是正数．现在我们只需证明右边非负就行了．先看右边第一项，如果 $x=a$ 处是第一类边界条件，则 $y(a)=0$，若是第二类边界条件，则 $y'(a)=0$，若是第三类边界条件 $\alpha y'(a)-\beta y(a)=0$，其中 α、$\beta>0$，则 $k(a)y^*(a)y'(a)=(\beta/\alpha)k(a)|y(a)|^2>0$，若是自然边界条件，则 $k(a)=0$，因此在以上各种边界条件下，总有 $k(a)y^*(a)y'(a)\geq 0$，同理也有 $-k(b)y^*(b)y'(b)\geq 0$．若是周期性边界条件，则由于 $y(a)=y(b)$，$y'(a)=y'(b)$，且 $k(a)=k(b)$，故 $k(a)y^*(a)y'(a)-k(b)y^*(b)y'(b)=0$．因此，不论何种边界条件，上式右边总是非负的．证毕．

2. 存在无穷多分立的本征值：$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n\leq\lambda_{n+1}\leq\cdots$，且 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$．除了周期性边界条件的情况，本征值都是非简并的，且 $y_{n+1}(x)$ 比 $y_n(x)$ 多一个零点．

这一结论的证明很困难，读者只要直接承认就可以了．应该指出，由于我们考虑的是二阶常微分方程，所以如果本征值有简并，其简并度只能是 2．

下面说明一下为什么除了周期性边界条件的情况，本征值都是非简并的．

假设对于某个本征值 λ 存在两个线性独立的本征函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，则两者均满足方程 (109)，且其中的 λ 是相同的．对 $y_1(x)$ 的方程乘以 $y_2(x)$，对 $y_2(x)$ 的方程乘以 $y_1(x)$，所得两式相减，可得

$$y_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y_2(x)}{\mathrm{d}x}\right]-y_2(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x}\right]=0,$$

这可以化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y_1(x)y_2'(x)-k(x)y_2(x)y_1'(x)]=0,$$

于是

$$k(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)]=C,$$

其中 C 是与 x 无关的常数．现在根据一个端点，比如左端点 a 的边界条件来确定常数 C．如果 a 处有自然边界条件，则 $k(a)=0$，于是得 $C=0$．如果 a 处是第一、二、三类边界条件，则 $\alpha y_1'(a)-\beta y_1(a)=0$，$\alpha y_2'(a)-\beta y_2(a)=0$，由于 α、β 不全为零，故系数行列式为零，即 $y_1(a)y_2'(a)-y_2(a)y_1'(a)=0$，于是得 $C=0$．所以，除了周期性边界条件，总有

$$k(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)]=0,$$

但 $k(x)$ 只在端点才可能为零，于是得到

$$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0,$$

由此可以证明 $y_1(x) \propto y_2(x)$，即 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关，这与假设矛盾. 如果是周期性边界条件，则不能推出以上结果，因此可能存在简并. 实际上，我们已经知道周期性边界条件下是有简并的.

3. 对应于不同本征值的本征函数在区间 $[a,b]$ 上带权正交：

$$\int_a^b y_m^*(x)y_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad (\lambda_m \neq \lambda_n). \tag{115}$$

注 ① 本征函数族的正交性对于后面计算广义 Fourier 级数的系数非常重要. 有时候，通过直接计算来验证本征函数族的正交性有一定的困难，所以上述结论给我们带来了很大的方便. ② 与三角函数族的正交性相比，这里有两点推广：一是多了权函数 $\rho(x)$，如果 $\rho(x)=1$，就是普通正交；二是考虑了本征函数是复值函数的情况（注意自变量仍是实数，只是函数值可取复数，故并非复变函数），比如本征值问题 (114) 的本征函数族 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\}$，其中 $0 \le x \le 2\pi$，而 $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. ③ 对应于同一本征值的两个本征函数（如果有简并）不一定相互正交，但我们总可以取其适当的线性组合（线性组合后的函数仍是对应于同一本征值的本征函数）使得它们相互正交，通过这样的做法（称为 Schmidt 正交化），可以使所有的本征函数相互正交.

证明 将 $y_n(x)$ 的方程，即式 (109) 两边同乘以 $y_m^*(x)$，得

$$y_m^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y_n(x)}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)y_m^*(x)y_n(x) + \lambda_n\rho(x)y_m^*(x)y_n(x) = 0,$$

对上式交换 m 和 n，并取复共轭，得到

$$y_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y_m^*(x)}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)y_m^*(x)y_n(x) + \lambda_m\rho(x)y_m^*(x)y_n(x) = 0.$$

两式相减并从 a 到 b 积分得

$$\begin{aligned}(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m^*(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \{y_m^*(x)[k(x)y_n'(x)]' - y_n(x)[k(x)y_m'^*(x)]'\}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [k(x)y_m^*(x)y_n'(x) - k(x)y_m'^*(x)y_n(x)]'\,\mathrm{d}x \\ &= k(x)[y_m^*(x)y_n'(x) - y_m'^*(x)y_n(x)]\big|_a^b.\end{aligned}$$

对周期性边界条件，上式右边显然为零. 对其它边界条件，以 a 或 b 代入分别为零. 以 $x=b$ 为例，若为自然边界条件，则 $k(b)=0$；若为第一、二、三类边界条件，则 $\gamma y_n'(b)+\delta y_n(b)=0$，$\gamma y_m'^*(b)+\delta y_m^*(b)=0$，其中第二式取了复共轭并利用了 γ 和 δ 都是实数的事实. 由于 γ 和 δ 不全为零，故系数行列式为零，即 $y_m^*(b)y_n'(b) - y_m'^*(b)y_n(b) = 0$. 因此，总有 $k(b)[y_m^*(b)y_n'(b) - y_m'^*(b)y_n(b)] = 0$. 于是上式右边为零，考虑到 $\lambda_m \neq \lambda_n$，即得式 (115).

4. 本征函数族 $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在区间 $[a,b]$ 上是完备的. 这就是说，区间 $[a,b]$ 上的任意函数 $f(x)$，只要解析性质良好且与本征函数族满足相同的边界条件，就一定可以用 $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 展开为广义 Fourier 级数：

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n y_n(x), \tag{116}$$

其中展开系数为

$$f_n = \frac{\int_a^b y_n^*(x) f(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y_n^*(x) y_n(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{117}$$

注 我们已经知道，本征函数族的完备性是分离变量法的理论基础. 所以，这一结论的重要性是显而易见的.

这一性质的证明也比较困难，读者只要掌握结论就可以了. 不过，只要承认式 (116)，即承认本征函数族的完备性，就很容易推出展开系数. 事实上，将式 (116) 中的求和指标 n 换为 k，然后两边同乘以 $y_n^*(x)\rho(x)$ 并积分，由于正交性（假设简并的本征函数也已经正交化），右边的积分对求和有贡献的只有 $k=n$ 一项，由此立得式 (117). 这与我们以前的做法是一致的，只是现在多了权函数 $\rho(x)$，并且出现了本征函数的复共轭.

如果 $y_n(x)$ 是本征函数，则 $u_n(x) = Cy_n(x)$（其中 $C \neq 0$ 是常数）也是本征函数，仍然对应于同一个本征值. 只要取 $C = [\int_a^b y_n^*(x) y_n(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x]^{-1/2}$，就可使

$$\int_a^b u_n^*(x) u_n(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{118}$$

$u_n(x)$ 称为*归一化* 的本征函数. 如果在展开式 (116) 中采用归一化的本征函数 $u_n(x)$，则展开系数 (117) 的分母为 1（当然分子中的 $y_n(x)$ 应代以 $u_n(x)$）. 在量子力学中经常需要计算涉及本征函数的积分，所以采用归一化的本征函数能带来很大的方便. 在本课程里，由于相关的计算并不多，所以我们没有强调本征函数的归一化.

假设简并的本征函数也已经正交化，则正交性和归一化关系可以统一写成

$$\int_a^b u_m^*(x) u_n(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}. \tag{119}$$

这称为*正交归一关系*，简称*正一关系*（orthonormal relation）.

在展开式 (116) 中采用归一化的本征函数 $u_n(x)$，并将展开系数的表式代回展开式中，可以得到

$$f(x) = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n^*(x') \rho(x')\right] f(x')\,\mathrm{d}x',$$

由于 $f(x)$ 是任意函数，故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) u_n^*(x') \rho(x') = \delta(x - x'). \tag{120}$$

这是*完备性关系*（completeness relation）的数学表式.

习题 长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，左端保持恒定温度零度，右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量，即右端边界条件为 $(u + h\partial u/\partial x)|_{x=l} = 0$（其中 $h > 0$），已知 $u|_{t=0} = \varphi(x)$. 求杆上温度的变化规律.

补充习题

1. 在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解 Hermite 方程 $y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0$. 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式? 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式的最高次幂项具有形式 $(2x)^n$，这些多项式称为 Hermite 多项式，记作 $\mathrm{H}_n(x)$. 写出前几个 Hermite 多项式.

2. 在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解 Laguerre 方程 $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$. 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式? 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式的最高次幂项具有形式 $(-x)^n$，这些多项式称为 Laguerre 多项式，记作 $\mathrm{L}_n(x)$. 写出前几个 Laguerre 多项式.

3. 在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解超几何方程（Gauss 方程）$x(x-1)y'' + [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$.

4. 在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解合流超几何方程（Kummer 方程）$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$.

5. 将上述各题中的微分方程化为 Sturm–Liouville 型.