模拟卷

一、单选题（共 7 小题，每小题 5 分，共 35分）

1. 下面哪个函数是$\mathbb{C}$上的解析函数？

A. $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$　　B. $\exp(z^3)$　　C. $\frac{\cos z}{z}$　　D. $\sin(z\bar{z})$

2. 设 $u=x^2-y^2$ 是解析函数 $f(z)$ 的实部。则 $f(z)$ 的一般表达式是哪个？

A. $z^3+iC,\ C\in\mathbb{R}$　B. $z^2+C,\ C\in\mathbb{R}$　C. $z^2+iC,\ C\in\mathbb{R}$　D. $z^3+C,\ C\in\mathbb{R}$

3. 设函数 $f(z)$ 在复平面上除有限个孤立奇点外处处解析。关于它的孤立奇点的说法正确的是哪个？

A. $f(z)$ 在可去奇点处的留数非零

B. 本性奇点的留数总是无穷大

C. $f(z)$ 在可去奇点 a 处的极限 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且有限

D. $f(z)$ 在单极点 a 处的极限 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且有限

4. 考虑双边幂级数 $S(z)\equiv\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$，下面说法正确的是哪个？

A. 一定存在一个收敛环 $R_2<|z|<R_1$（其中$R_1>R_2$）使得该级数在环内内闭一致收敛到某个和函数

B. 当所有 $a_n=1$，双边幂级数在单位圆周上处处收敛

C. 如果收敛环存在，该级数在收敛环内绝对收敛且内闭一致收敛到某个和函数

D. 当所有 $a_{n<0}=0$，该级数在整个复平面上收敛且求导和求和可以交换

5. 下面哪个方程可以用于描述波动或者弦的振动？

A. $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$　　B. $\frac{\partial^3u}{\partial t^3}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}=f$

C. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$　　　　D. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla\cdot\nabla u=0$

6. 关于球函数的下面哪个说法是错误的？

A. $\mathrm{P}_l(x)$ 的母函数是 $(r^2-2rx+1)^{-1/2}$

B. $\mathrm{P}_l(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上有 l 个一阶零点

C. 球谐函数在球面上是完备的

D. 通过 $\mathrm{P}_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$ 可以定义函数 $\mathrm{P}_l^{-m}(x),\, m\in\mathbb{N}$

7. 关于 Green 函数的以下哪个说法是正确的？

A. Laplace 方程 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=0$ 的 Green 函数满足 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$

B. Possion 方程第三边值问题不能用 Green 函数法求解

C. 在二维无界空间中，$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|}$ 是方程 $\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$ 的解

D. 使用镜像法制作 Green 函数时，像电荷可以放在求解区域内

二、填空题（共 3 小题，共 30 分）

1.（2 分；3 分）函数 $f(z)\equiv\dfrac{1}{z}$ 在去心邻域 $0<|z|<1$ 内以原点为中心的 Laurent 展开是 ___________；函数 $f(z)\equiv\dfrac{1}{z-a}$ 在去心邻域 $|a-b|<|z-b|<+\infty$ 内以 b（复数 $b\neq a$）为中心的 Laurent 展开是 __________。

2. （4 分；3 分；3 分）考虑定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{1+t}\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad(-\infty<x<+\infty,\ t>0),$$
$$u|_{t=0}=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty),\quad u|_{x=\pm\infty}=0.$$

对 x 作 Fourier 变换，设 $u(x,t)\leftrightarrow U(k,t)$，$f(x)\leftrightarrow F(k)$，则 $U(k,t)$ 满足的常微分方程初值问题为_______________，求得 $U(k,t)=$ _____________，定解问题的解为

$u(x,t)=$__________。

3. （5 分；5 分；5 分）将 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 代入 Hermite 方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0,$$

得到系数a_k之间的递推关系__________。可见，当 $\lambda=$________时可以使级数解退化为多项式。适当选取解中的任意常数，可使多项式解的最高次幂项具有$(2x)^n$的形式，这样的解就是 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_n(x)$。Hermite 多项式的显式为 $\mathrm{H}_n(x)=$________。

三、计算题（共 2 小题，共 35 分；须含必要的计算推导过程）

1. （15 分）利用留数定理计算以下积分主值。

(a)（5 分）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\qquad a>0$

(b)（5 分）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\epsilon\cos x}dx,\qquad 1>\epsilon>0$

(c)（5 分）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$

2. （20 分）考虑扇形内 Laplace 方程定解问题

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0\quad(\rho<a,\quad 0<\phi<\beta),$$
$$u|_{\phi=0}=0,\quad u|_{\phi=\beta}=0,$$
$$u|_{\rho=a}=2\cos^2\frac{\pi\phi}{\beta}\sin\frac{2\pi\phi}{\beta}-\sin\frac{2\pi\phi}{\beta}.$$

(a) （6 分）利用分离变量法，寻找 $u=R(\rho)\Phi(\phi)$ 形式的特解，推出 $R(\rho)$ 满足的常微分方程和 $\Phi(\phi)$ 满足的本征值问题。

(b) （4 分）求解 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题，得出相应的本征值和本征函数。

(c) （5 分）求解 $R(\rho)$，写出一般解 $u(\rho,\phi)$。

(d) （5 分）根据 $\rho=a$ 处的边界条件求出一般解的系数，写下定解问题的解。