第六章　复习

20200625

6.1 离散时间傅里叶级数

- ◆ 周期信号的离散时间傅里叶级数
- ◆ 周期信号的频谱

6.2 非周期信号的傅里叶变换

- ◆ 非周期信号的傅里叶积分表示
- ◆ 傅里叶频谱特性
- ◆ 离散时间傅里叶变换性质

6.3 几种傅里叶变换的关系

- ◆ 连续时间傅里叶变换
- ◆ 连续时间傅里叶级数
- ◆ 离散时间傅里叶变换
- ◆ 离散时间傅里叶级数

6.4 离散LTI系统的频域分析

- ◆ 系统响应的频域表示
- ◆ 单位样值响应
- ◆ 滤波特性

第六章 本章要点

1、周期信号离散傅里叶级数

傅立叶级数形式、性质、频谱特点

2、非周期信号傅里叶变换

傅立叶变换与反变换

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n} \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

常用信号的频谱函数 见表7.1 p203

离散时间傅里叶变换的性质-见下页

3. 离散LTI系统的频域分析

离散LTI系统的频率响应

滤波器

非周期信号的傅里叶变换的性质

1. 线性 $$ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$$

2. 时域翻转 $$x(-n)\leftrightarrow X(-\Omega)$$

3. 时移 $$x(n+n_0)\leftrightarrow X(\Omega)e^{jn_0\Omega}$$

4. 频移 $$e^{j\Omega_0 n}x(n)\leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$$

5. 频域微分 $$nx(n)\leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

6. 时域卷积 $$x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow X_1(\Omega)\cdot X_2(\Omega)$$

7. 频域卷积 $$x_1(n)x_2(n)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)$$

8. Parseval定理 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega$$

LTI系统的分析方法

系统分析研究的主要问题就是对于给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。具体来说就是：建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法
- 输入输出法 （外部法） -单输入单输出
- 状态变量法 （内部法） -多输入多输出

外部法
- 时域分析
  - 连续系统--- 微分方程，卷积积分
  - 离散系统--- 差分方程，卷积和
- 变换域分析
  - 连续系统--- 频域法和复频域法
  - 离散系统--- 频域法和z域法

系统特性： 系统函数-系统的稳定性

外部法： 状态变量法

连续时间系统和离散时间系统分析

连续

傅里叶变换

拉普拉斯变换

微分方程 → 代数方程

★单边拉氏变换

因果信号

因果系统

离散

离散时间傅里叶变换

z变换

差分方程 → 代数方程

★双边z变换

单边z变换

因果与非因果信号

因果与非因果系统

z变换的发展史

◆ 早在1730年英国数学家棣莫弗(De Moivre)提出生成函数（generating function）的概念用于概率理论的研究，这种生成函数的形式与z变换相同；

◆ 从19世纪的拉普拉斯(P. S.Laplace)到20世纪的沙尔（H. L. Seal）等人, 在这方面继续深入研究；

◆ 1950s到1960s，抽样数据控制系统、数字计算机、离散信号处理以及数字信号处理的研究与实践，使得z变换得到了广泛的应用；

◆ 离散信号与系统的理论研究中z变换成为了一种重要的数学工具

第七章 离散时间信号与系统的z域分析

7.1 z变换

- 双边z变换
- 单边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质

7.2 z反变换

- z反变换
- 幂级数展开法
- 部分分式展开法

7.3 LTI系统的z域分析

- 差分方程的z域求解
- 系统函数分析

7.4 系统的图形表示方法

- 系统框图
- 信号流图
- 梅森公式
- 系统模拟

7. 1 z变换

一. 双边z变换

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

1.从离散时间傅里叶变换到z变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$x(n)=a^nu(n)\ |a|>1$的离散时间傅里叶变换？

不存在！原因？解决办法？

将该信号x(n)乘以指数信号r^{-n}，使得$x(n)r^{-n}$满足绝对可和条件，然后再求傅里叶变换。

$$\text{DTFT}[x(n)r^{-n}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

$$Let\quad z=re^{j\Omega}\quad\Rightarrow\quad \boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}}$$

7.1 z变换

一. 双边z变换

1.从离散时间傅里叶变换到z变换

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$\Big\Downarrow\; z=re^{j\Omega}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\int_{0}^{2\pi}X(z)z^{n-1}dz$$

$$x(n)r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X\left(re^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}d\Omega$$

So： $dz=jre^{j\Omega}d\Omega=jzd\Omega$

$$x(n)=\frac{r^n}{2\pi}\oint X(z)\frac{z^n}{r^n}\frac{1}{jz}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{0}^{2\pi}X(z)z^{n-1}dz$$

双边z变换： $\boxed{x(n)\leftrightarrow X(z)}$

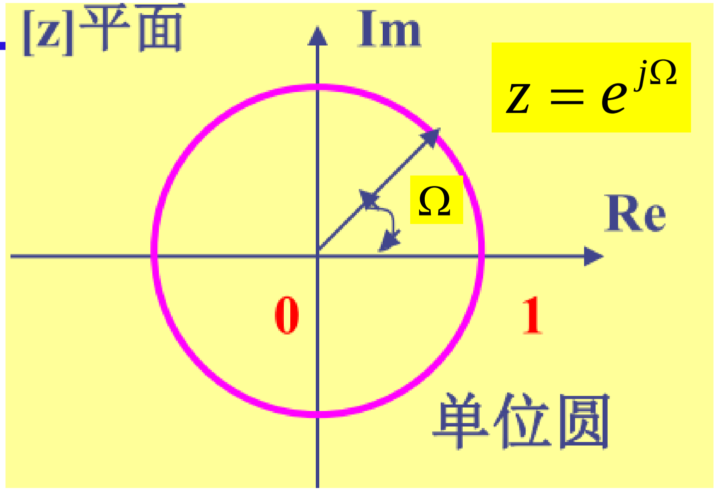
7.1 z变换

一． 双边z变换

1.从离散时间傅里叶变换到z变换

$$X(j\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}$$ **虚轴**

$$X(\Omega)=X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$ **单位圆**



$$z=re^{j\Omega}$$

$x(n)$的z变换$X(z)$是$x(n)r^{-n}$的离散时间傅里叶变换(DTFT)。

离散时间傅里叶变换是z平面中半径为1的圆上的z变换。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

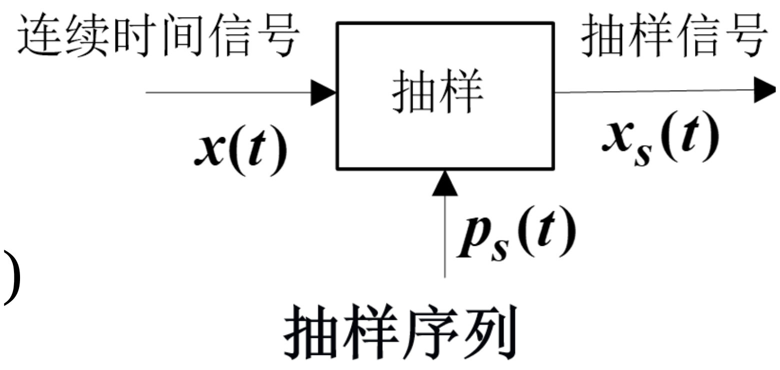
$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\int_{0}^{2\pi}X(z)z^{n-1}dz$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

7. 1 z变换

一. 双边z变换

2.从拉普拉斯变换到z变换



$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}$$

$$z = e^{sT}$$

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

7.1 z变换

二. 单边z变换

实际问题中经常遇到的是因果序列，**n≥0,** 定义：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

称为单边z变换。可简记为：

$$x(n)u(n)\leftrightarrow X(z)$$

- 当信号为因果信号时，其单边和双边z变换相等，否则二者不等。
- 离散时间非因果信号与系统也有很多应用，所以双边z变换也非常重要。

7.1 z变换

三. z变换的收敛域

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

1.收敛域定义

- 选择合适的 r 值，才能使得 $x(n)r^{-n}$ 满足绝对可和条件。
- z变换的定义式无穷幂级数之和，只有当幂级数收敛时，满足绝对可和的条件，它是序列存在z变换的**充分条件**。

收敛域的定义：

双边 单边

对于序列x(n),满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$

所有z值组成的集合称为z变换X(z)的收敛域。

三. z变换的收敛域

1.收敛域定义

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

级数收敛的判别方法:

1）比值法:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho<1$$

2）根值法:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho<1$$

7.1 z变换

三．z变换的收敛域

有限序列

2.求收敛域

例1：求信号$x(n)=\delta(n)$的z变换。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

全平面收敛

$n=0$

例2：求信号$x(n)=\{1,1,1,\underset{\downarrow}{1},1,1,1\}$的z变换。

全平面收敛，但不包含原点和/或无穷远点。

双边 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=z^{3}+z^{2}+z^{1}+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$$

$0<|z|<\infty$

单边 $$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$$

$0<|z|$

7.1 z变换

三. z变换的收敛域

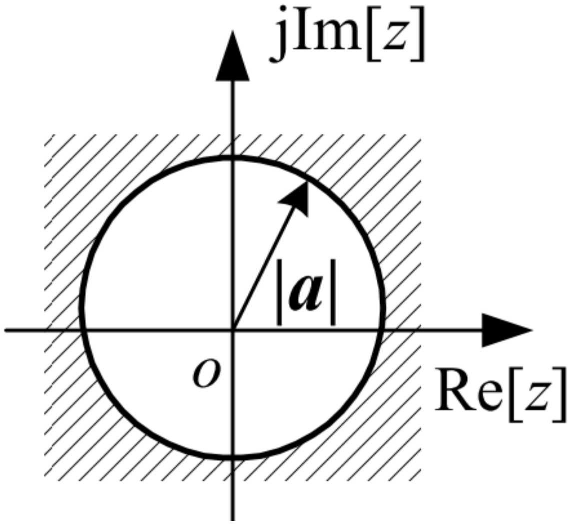
右边序列

2.求收敛域

例3：求因果序列信号$x(n)=a^n u(n)$的z变换。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}$$

$\left|\frac{a}{z}\right|<1$即$|z|>|a|$时，$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$



$$a^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$$

收敛域：$|z|>a$

三. z变换的收敛域

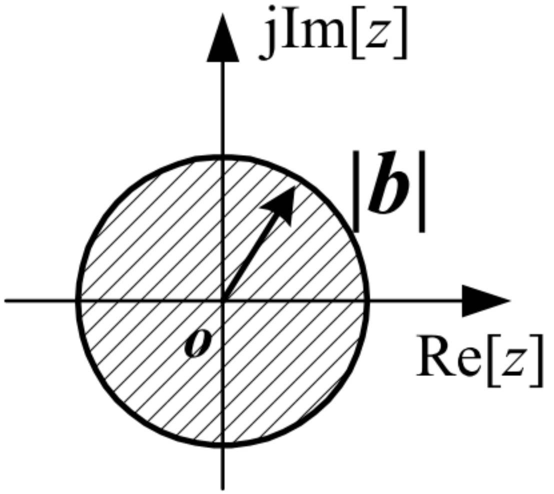
左边序列

2.求收敛域

例4：求非因果序列信号$x(n)=-b^n u(-n-1)$的z变换。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\left(b^{-1}z\right)$$

$\left|\frac{b}{z}\right|>1$即$|z|<|b|$时，$X(z)=\frac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z}=\frac{z}{z-b}$



$$\Rightarrow \quad -b^n u(-n-1)\leftrightarrow\frac{z}{z-b}$$

收敛域：$|z|<b$

7.1 z变换

三. z变换的收敛域

双边序列

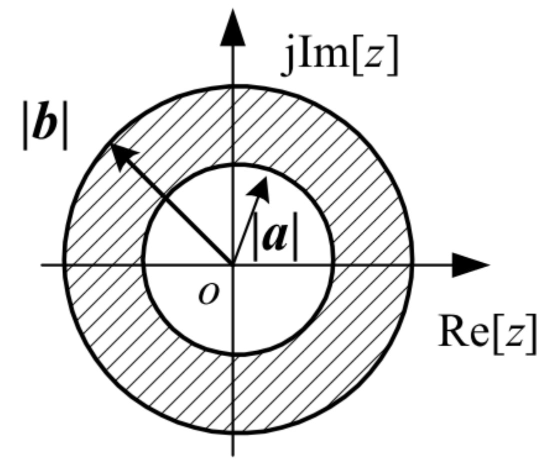
2.求收敛域

例4：求信号$x(n)=a^n u(n)+b^n u(-n-1)$的z变换。

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

$$b^n u(n) \leftrightarrow -\frac{z}{z-b} \qquad |z|<b$$

$$x(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-b}=\frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}$$



收敛域：$a<|z|<b$

三. z变换的收敛域

3. z平面与s平面的映射关系

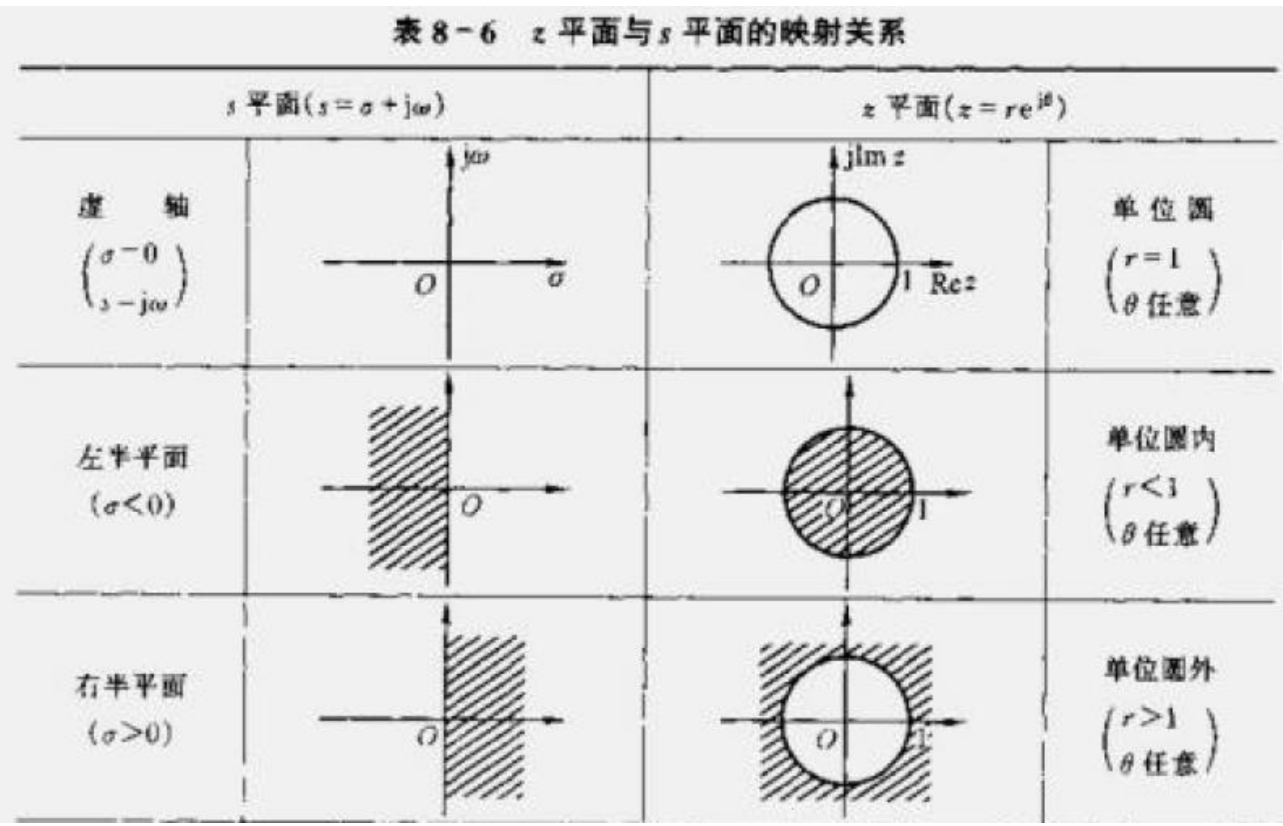


表 8-6 z平面与s平面的映射关系

s平面($s=\sigma+j\omega$)		z平面($z=re^{j\theta}$)	
虚轴 ($\sigma=0$, $s=j\omega$)			单位圆 ($r=1$, θ任意)
左半平面 ($\sigma<0$)			单位圆内 ($r<1$, θ任意)
右半平面 ($\sigma>0$)			单位圆外 ($r>1$, θ任意)

$$z = e^{sT} \qquad s = \frac{1}{T}\ln z$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = \rho e^{j\theta}$$

T为序列时间间隔$\dfrac{2\pi}{\omega_s}$

$$s = \frac{1}{T}\ln z = \frac{1}{T}\ln\rho + j\frac{\theta+2m\pi}{T},$$

$$m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\rho e^{j\theta} = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

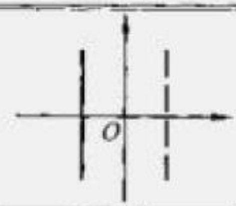
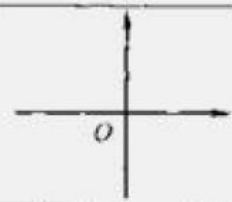
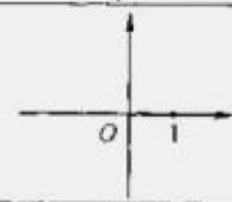
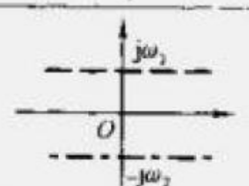
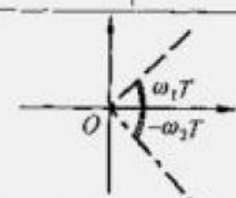
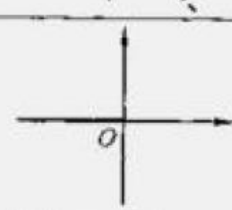
$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T \end{cases}$$

7.1 z变换

三. z变换的收敛域

3. z平面与s平面的映射关系

表 8-6 z 平面与 s 平面的映射关系

s 平面($s=\sigma+j\omega$)		z 平面($z=re^{j\theta}$)	
平行于虚轴的直线 (σ 为常数)			圆 $\begin{pmatrix}\sigma>0,\ r>1\\ \sigma<0,\ r<1\end{pmatrix}$
实轴 $\begin{pmatrix}\omega=0\\ s=\sigma\end{pmatrix}$			正实轴 $\begin{pmatrix}\theta=0\\ r\ 任意\end{pmatrix}$
平行于实轴的直线 (ω 为常数)			始于原点的辐射线 $\begin{pmatrix}\theta\ 为常数\\ r\ 任意\end{pmatrix}$
通过 $\pm j\frac{k\omega_s}{2}$ 平行于实轴的直线 ($k=1,3,\cdots$)			负实轴 $\begin{pmatrix}\theta=\pi\\ r\ 任意\end{pmatrix}$

$$z=e^{sT} \qquad s=\frac{1}{T}\ln z$$

$$s=\sigma+j\omega$$

$$z=\rho e^{j\theta}$$

T为序列时间间隔$\dfrac{2\pi}{\omega_s}$

$$s=\frac{1}{T}\ln z=\frac{1}{T}\ln\rho+j\frac{\theta+2m\pi}{T},$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\rho e^{j\theta}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

$$\begin{cases}\rho=e^{\sigma T}\\ \theta=\omega T\end{cases}$$

7.1 z变换

三. z变换的收敛域

Z变换	拉氏变换
1. X(z)的收敛域(ROC)是在z平面内以原点为中心的圆环；	1. X(s)的收敛域(ROC)是在s平面上由平行于虚轴的带状区域组成的；
2. 有理z变换，ROC不包含任何极点，否则z变换不收敛；	2. 有理拉氏变换，ROC不包含任何极点，否则积分不收敛；
3. 有限长序列，ROC是整个z平面，可能包含或者不包含零点和无穷点；	3. 若信号实现，且绝对可积，则X(s)的ROC是整个s平面；
4. 右边序列信号为圆外收敛；当为因果序列时，ROC包括无穷远点；	4. 右边信号，X(s)的ROC一定在其最右边极点的右边带状区域；
5. 左边序列信号为圆内收敛；当为反因果序列时，ROC包括零点；	5. 左边信号，X(s)的ROC一定在其最左边极点的左边带状区域；
6. 双边序列信号为环状区域收敛；	6. 双边信号，X(s)的ROC是带状区域；

三. z变换的收敛域

注意：对双边z变换必须表明收敛域，否则其对应的原序列将不唯一；

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$ 收敛域：$|z|>a$

$$-b^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-b}$$ 收敛域：$|z|<b$

对单边z变换，其收敛域比较简单，一定是某个圆以外的区域。可以省略。

双边z变换： $x(n) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} X(z)+$收敛域

单边z变换： $x(n) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} X(z)$

7.1 z变换

三. z变换的收敛域

例5：求双边序列$x(n)=b^{|n|}$，$b>0,-\infty<n<\infty$的z变换。

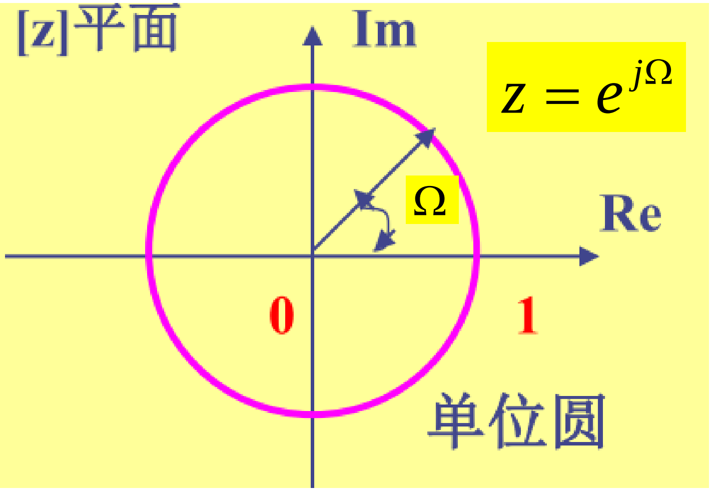
$$x(n)=b^{|n|}=b^{n}u(n)+b^{-n}u(-n-1)$$

$|z|>b$ $\quad \dfrac{1}{1-bz^{-1}}$ $\qquad\qquad \dfrac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$ $\quad |z|<b^{-1}$

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}+\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}=\frac{z}{(z-b)\left(z-b^{-1}\right)} \qquad b<|z|<b^{-1}$$

$$b<1$$

7. 1 z变换



一. 双边z变换

1.从离散时间傅里叶变换到z变换

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} X(z) z^{n-1} dz$$

$$z = re^{j\Omega}$$

$$X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

2.从拉普拉斯变换到z变换

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} \xrightarrow{z = e^{sT}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

3. z变换的收敛域 – z平面到s平面的映射

7.1 z变换—— 常用离散序列的z变换

变换对 **收敛域：**

$\delta(n) \leftrightarrow 1$ 全z平面

$a^n u(n) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$ $\quad |z| > a \quad \Rightarrow \quad u(n) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1} \quad |z| > 1$

$-b^n u(-n-1) \leftrightarrow \dfrac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z} = \dfrac{z}{z-b}$ $\quad |z| < b \quad \Rightarrow \quad -u(-n-1) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1} \quad |z| < 1$

$e^{\pm j\beta n}u(n) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{\pm j\beta}z^{-1}} = \dfrac{1-z^{-1}\cos\beta \pm z^{-1}j\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$ $\quad |z| > 1$

$\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \dfrac{1-z^{-1}\cos\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$ $\quad |z| > 1$

$\sin(\beta n)u(n) \leftrightarrow \dfrac{z^{-1}\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$ $\quad |z| > 1$

四. z变换性质

1. 线性特性

若

$$x_1(n) \longleftrightarrow X_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$$

$$x_2(n) \longleftrightarrow X_2(z) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

则：

$$ax_1(n) + bx_2(n) \longleftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$$

收敛域：至少是二者收敛域的公共部分

例：$$e^{\pm j\beta n}u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{\pm j\beta}z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}\cos\beta \pm z^{-1}j\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}} \qquad |z|>1$$

$$\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}\cos\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}} \qquad |z|>1$$

7.1 z变换

四. z变换性质

2. 时移特性

双边和单边z变换的时移特性有明显的区别，因为它们的求和下限不同。

双边z变换：

$$x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \beta$$

则：$x(n \pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m} X(z) \quad \alpha < |z| < \beta, \quad m > 0$整数

证明：$x(n+m) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m) z^{-n}$

$$\overset{k=n+m}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \cdot z^{m} = z^{m} X(z)$$

7.1 z变换

四. z变换性质

单边z变换：

$$x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad |z| > \alpha \text{正实数}$$

2. 时移特性

则：

左移

$$\begin{cases} x(n+1) \longleftrightarrow zX(z) - zx(0) \\ x(n+2) \longleftrightarrow z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x(n+m) \longleftrightarrow z^m\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right] \end{cases}$$

证明：$x(n+1) \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-m}z$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} - x(0)\right)z$$

$$= zX(z) - x(0)$$

7.1 z变换

四. z变换性质

单边z变换：

$$x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad |z| > \alpha \text{正实数}$$

2. 时移特性

右移：

$$\begin{cases} x(n-1) \longleftrightarrow z^{-1}X(z) + x(-1) \\ x(n-2) \longleftrightarrow z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x(n-m) \longleftrightarrow z^{-m}\left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right] \end{cases}$$

因果序列

$$x(n-m) \longleftrightarrow z^{-m}X(z)$$

证明：

$$x(n-1) \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)z^{-m}z^{-1}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} + zx(-1)\right)z^{-1}$$

$$= z^{-1}X(z) + x(-1)$$

7.1 z变换

四. z变换性质

3. z域尺度变换特性 $x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

则： $a^n x(n) \longleftrightarrow X(\frac{z}{a}), \qquad |a|\alpha < |z| < |a|\beta$

If $a = -1$, then $(-1)^n x(n) \longleftrightarrow X(-z)$， $\alpha < |z| < \beta$

例：求$a^n \cos(\beta n) u(n)$的z变换

因为： $\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \dfrac{1 - z^{-1}\cos\beta}{1 - 2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}} \qquad |z| > 1$

$$a^n \cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{1-(z/a)^{-1}\cos\beta}{1-2(z/a)^{-1}\cos\beta+(z/a)^{-2}} = \frac{1-az^{-1}\cos\beta}{1-2az^{-1}\cos\beta+a^2z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

四. z变换性质

4. 时域翻转（双边z变换） $x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

则： $x(-n) \longleftrightarrow X(z^{-1}), \qquad \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}$

例：求$a^{-n}u(-n-1)$的z变换

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad -b^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-b}$$

$$a^{-n}u(-n) \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} = \frac{1}{1-az}, |z| < \frac{1}{|a|}$$

右移

$$a^{n-1}u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z-a}, |z| > |a|$$

左移

$$a^{-n-1}u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{1-az} = \frac{-\frac{1}{a}z}{z-\frac{1}{a}}$$

翻转

$$a^{-n}u(-n-1) \leftrightarrow \frac{-z}{z-\frac{1}{a}}, \quad |z| < \frac{1}{|a|}$$

7.1 z变换

四. z变换性质

5. 卷积定理

若

$$x_1(n) \longleftrightarrow X_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$$

$$x_2(n) \longleftrightarrow X_2(z) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

则： $x_1(n) * x_2(n) \longleftrightarrow X_1(z) X_2(z)$

收敛域：至少是二者收敛域的公共部分

例：求单边序列$(n+1)u(n)$和 $(n+1)a^n u(n)$的z变换

$$a^n u(n) * b^n u(n) = \begin{cases} b^n \dfrac{1-(a/b)^{n+1}}{1-a/b} u(n), & a \neq b \\ b^n (n+1) u(n), & a = b \end{cases}$$

$$(n+1)u(n) \longleftrightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^2, |z| > 1 \qquad (n+1)a^n u(n) \longleftrightarrow \left(\frac{z}{z-a}\right)^2, |z| > |a|$$

四. z变换性质

6. 部分和

若 $x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

则: $g(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} x(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z) \qquad \max(\alpha, 1) < |z| < \beta$

证明:

$$x(n) * u(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) u(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{n} x(i)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{n} x(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z)$$

四. z变换性质

例：求序列$\sum_{i=0}^{n} a^i$(a为实数)的z变换

由于$\sum_{i=0}^{n} a^i = \sum_{i=-\infty}^{n} a^i u(i)$，　　$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z|>|a|$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a}, |z| > \max(|a|, 1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i \longleftrightarrow \frac{1}{1-a}\left[u(n) - a a^n u(n)\right] = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}, \quad |z| > \max(|a|, 1)$$

四. z变换性质

7. z域微分

若 $x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

则： $nx(n) \longleftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}X(z)$

$$n^2 x(n) \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right] \qquad \alpha < |z| < \beta$$

…………

$$n^m x(n) \longleftrightarrow \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m X(z)$$

四. z变换性质

例：求序列$n^2u(n), \dfrac{n(n+1)}{2}u(n)$和$\dfrac{n(n-1)}{2}u(n)$的$z$变换

解：

$$nu(n) \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}, |z|>1$$

$$n^2u(n) \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, |z|>1$$

$$\frac{z}{(z-1)^3}, |z|>1$$

移位

$$(n+1)u(n+1) \longleftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}, |z|>1 \Rightarrow (n+1)u(n) \longleftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}, |z|>1$$

微分

$$\frac{n(n+1)u(n)}{2} \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}, |z|>1$$

也可以应用线性特性

四. z变换性质

8. z域积分

若 $x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \beta$

设有整数m,且$n+m>0$,则:

$$\frac{x(n)}{n+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{\infty} \frac{X(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta, \quad \alpha < |z| < \beta$$

证明:

$$\int_z^{\infty} \frac{X(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_z^{\infty} \eta^{-(n+m+1)} d\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{\eta^{-(n+m)}}{-(n+m)} \right]_z^{\infty}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{n+m} z^{-n} z^{-m}$$

四. z变换性质

$$\frac{x(n)}{n+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{\infty} \frac{X(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta, \quad \alpha < |z| < \beta$$

例：求序列$\dfrac{u(n)}{n+1}$的z变换

解：

$$u(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$\frac{u(n)}{n+1} \longleftrightarrow z\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta = z\int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta}\right) d\eta$$

$$= z\ln\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)\Bigg|_z^{\infty} = z\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\frac{u(n)}{n+1} \longleftrightarrow z\ln\left(\frac{z}{z-1}\right), |z| > 1$$

四. z变换性质

9. 初值定理

初值定理只适用于右边序列(或称为有始序列)，即$n < M, x(n) = 0$ 的序列。

如果序列在$n < M$时, $x(n) = 0$ 的序列，即 $x(n) \longleftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \infty$

$$x(M) = \lim_{z \to \infty} z^M X(z)$$

$$x(M+1) = \lim_{z \to \infty} \left[z^{M+1} X(z) - x(M) \right]$$

$$x(M+2) = \lim_{z \to \infty} \left[z^{M+2} X(z) - z^2 x(M) - zx(M+1) \right]$$

因果序列，

即$M = 0$;

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$

$$x(1) = \lim_{z \to \infty} \left[zX(z) - zx(0) \right]$$

$$x(2) = \lim_{z \to \infty} \left[z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) \right]$$

四. z变换性质

10. 终值定理

终值定理只适用于右边序列

如果序列在$n<M$时, $x(n)=0$ 的序列，即

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \alpha<|z|<\infty \text{且} 0 \leq \alpha<1$$

$$x(\infty)=\lim_{n \to \infty} x(n)=\lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} X(z)=\lim_{z \to 1}(z-1) X(z)$$

证明:

$$x(n)-x(n-1) \longleftrightarrow \left(1-z^{-1}\right) X(z)=\lim_{N \to \infty} \sum_{n=M}^{N}[x(n)-x(n-1)] z^{-n}$$

$$\lim_{z \to 1}\left(1-z^{-1}\right) X(z)=\lim_{z \to 1} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=M}^{N}[x(n)-x(n-1)] z^{-n}$$

$$=\lim_{N \to \infty} \lim_{z \to 1} \sum_{n=M}^{N}[x(n)-x(n-1)] z^{-n}=\lim_{N \to \infty} \sum_{n=M}^{N}[x(n)-x(n-1)]=\lim_{N \to \infty} x(N)$$

四. z变换性质

例：因果序列的z变换为$\dfrac{z}{z-a}, z \geq |a|$，求$x(1), x(\infty)$

解：初值 $$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z-a} = 1$$

终值 $$x(\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-a} = 0, \quad |a| < 1$$

z变换的性质

1. 线性特性

$$ax_1(n)+bx_2(n)\longleftrightarrow aX_1(z)+bX_2(z)$$

2. 时移特性

$$x(n-1)\longleftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$x(n+1)\longleftrightarrow zX(z)-zx(0)$$

$$x(n\pm m)\longleftrightarrow z^{\pm m}X(z)$$

3. 尺度变换特性 $a^n x(n)\longleftrightarrow X(\frac{z}{a})$

4. 时域翻转 $x(-n)\longleftrightarrow X(z^{-1})$

5. 卷积定理 $x_1(n)*x_2(n)\longleftrightarrow X_1(z)X_2(z)$

6. 部分和 $\sum_{i=-\infty}^{k} x(i)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}X(z)$

7. z域微分 $n^m x(n)\longleftrightarrow \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m X(z)$

8. z域积分 $\frac{x(n)}{n+m}\longleftrightarrow z^m\int_z^{\infty}\frac{X(\eta)}{\eta^{m+1}}d\eta$

9. 初值定理 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$

10. 终值定理 $x(\infty)=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)X(z)$

7.1 z变换—— 常用离散序列的z变换

$\delta(n) \leftrightarrow 1$，全z平面

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| > a \quad \Rightarrow \quad u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$-b^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z} = \frac{z}{z-b}, |z| < b \quad \Rightarrow \quad -u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$e^{\pm j\beta n} u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{\pm j\beta} z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}\cos\beta \pm z^{-1} j\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}, |z| > 1$$

$$\cos(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}\cos\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$$

$$\sin(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{z^{-1}\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$$

$|z| > 1$

$$a^n \cos(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{1-az^{-1}\cos\beta}{1-2az^{-1}\cos\beta + a^2 z^{-2}}$$

$$a^n \sin(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{az^{-1}\sin\beta}{1-2az^{-1}\cos\beta + a^2 z^{-2}}$$

$|z| > |a|$

$$\sum_{i=-\infty}^{n} a^i \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a}, \quad |z| > \max(|a|, 1)$$

7.1 z变换—— 常用离散序列的z变换

$$na^{n-1}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, |z|>|a| \qquad nu(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}, |z|>1$$

$$n^2a^{n-1}u(n) \leftrightarrow \frac{z(z+a)}{(z-a)^2}, |z|>|a| \qquad n^2u(n) \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, |z|>1$$

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^3}, |z|>|a| \qquad \frac{n(n-1)u(n)}{2} \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^3}, |z|>1$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, |z|>|a|$$

$$(n+1)a^nu(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-a)^2}, |z|>|a| \qquad (n+1)u(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}, |z|>1$$

$$\frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!}a^nu(n) \leftrightarrow \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}, |z|>|a| \qquad \frac{n(n+1)u(n)}{2} \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^3}, |z|>1$$

7.1 z变换

练习: 8.1-4（2-3）

(2): $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=0$

$$f(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{(z-1)z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{(z-1)z}{(z-1)(z-0.5)}=2$$

$$\frac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=\frac{z}{(z-1)(z-0.5)}=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-0.5}\leftrightarrow 2u(n)-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

(3): $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}=1$

$\because X(z)$有极点$z=2$, $\therefore$ 无终值

$$\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{1+z+z^2}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}+\frac{-3z}{z-1}+\frac{7z/2}{z-2}\leftrightarrow\frac{1}{2}\delta(n)-3u(n)+\frac{7}{2}2^n u(n)$$

第七章 离散时间信号与系统的z域分析

7.1 z变换

- 双边z变换
- 单边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质

7.2 z反变换

- z反变换
- 幂级数展开法
- 部分分式展开法

7.3 LTI系统的z域分析

- 差分方程的z域求解
- 系统函数分析

7.4 系统的图形表示方法

- 系统框图
- 信号流图
- 梅森公式
- 系统模拟

7.2 z反变换

一. z反变换

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

1. z反变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{0}^{2\pi} X(z) z^{n-1} dz$$

上式两边乘以z^{k-1}，k为整数，在$X(z)z^{k-1}$ 的收敛域内作围线积分：

$$\oint_C X(z) z^{k-1} dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \oint_C z^{-n+k-1} dz$$

柯西积分公式：$f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi j} \oint_C \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$ $\Rightarrow$ $\oint_C z^{-n+k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$

z反变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

计算方法：

1. 留数法
2. 幂级数展开法
3. 部分分式展开法

7. 2 z反变换

二. 幂级数展开法

双边z变换：$x(n) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} X(z)+\text{收敛域}$

单边z变换：$x(n) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} X(z)$

双边序列：$x(n)=x_1(n)+x_2(n)=x(n)u(n)+x(n)u(-n-1)$

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$ $\quad\updownarrow\quad$ $|z|>a$ $\qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$ $\quad\updownarrow\quad$ $|z|<b$

7.2 z反变换

二. 幂级数展开法

例：已知象函数$X(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$，分别求其对应的原序列$x(n)$。

其收敛域如下： (1)$|z|>2$; (2)$|z|<1$; (3)$1<|z|<2$

解：（1）收敛域在半径为2的圆外，因果序列，为负幂级数

$$X(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$$

$$=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\cdots \\
\hline
z^2-z-2 & z^2 \\
 & z^2-z-2 \\
\cline{2-2}
 & z+2 \\
 & z-1-2z^{-1} \\
\cline{2-2}
 & 3+2z^{-1} \\
 & \cdots
\end{array}$$

7. 2 z反变换

二. 幂级数展开法

例：已知象函数$X(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$，分别求其对应的原序列$x(n)$。

其收敛域如下： $(1)\ |z|>2;\quad (2)\ |z|<1;\quad (3)\ 1<|z|<2$

解：（2）收敛域在半径为1的圆，反因果序列，为正幂级数

$$X(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}$$

$$=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdot$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots \\
\hline
-2-z+z^2 & z^2 \\
 & z^2+\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4 \\
\cline{2-2}
 & -\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^4 \\
 & -\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{4}z^5 \\
\cline{2-2}
 & \frac{3}{4}z^4-\frac{1}{4}z^5 \\
 & \cdots
\end{array}
$$

7.2 z反变换

二. 幂级数展开法

例：已知象函数$X(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$，分别求其对应的原序列$x(n)$。

其收敛域如下：　$(1)|z|>2$;　$(2)|z|<1$;　$(3)1<|z|<2$

解：（3）收敛域为环形区域，双边序列

$$X(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2},1<|z|<2$$

$$X(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots$$

$$+\cdots-\frac{1}{12}z^3-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{3}z$$

三. 部分分式展开法

如果$X(z)$是z的实系数**有理分式**，式中$m < n$，可写为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

式中$A(z)$称为$X(z)$的特征多项式，方程$A(z)=0$称为**特征方程**，它的根z_i称为特征根，也称为$X(z)$的极点。

需要结合常用z变换对求原函数，因此X(z)展开如下的形式比较好

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{B(z)}{zA(z)}=\frac{B(z)}{z\left(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0\right)}$$

7.2 z反变换

三. 部分分式展开法

1. $X(z)$有单极点(特征根为单根)

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{k_0}{z}+\frac{k_1}{z-z_1}+\frac{k_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{k_i}{z-z_i}+\cdots+\frac{k_n}{z-z_n}$$

$$k_i=\frac{X(z)}{z}(z-z_i)\Big|_{z=z_i},\ z_0=0 \quad \Rightarrow \quad X(z)=k_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i z}{z-z_i}$$

根据给定的收敛域以及已知的变换对，如 $\delta(n)\leftrightarrow 1$ 全平面收敛

$$a^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$$ 收敛域：$|z|>a$

$$-b^n u(-n-1)\leftrightarrow\frac{z}{z-b}$$ 收敛域：$|z|<b$

7.2 z反变换

二. 部分分式展开法

2. $X(z)$有r重极点(特征根为重根)

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{k_1}{z-z_1}+\frac{k_2}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{k_r}{(z-z_1)^r}+\frac{k_{r+1}}{z-z_{r+1}}+\cdots+\frac{k_n}{z-z_n}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}k_i\left(z-z_i\right)^{-i}+\sum_{i=r+1}^{n}k_i\left(z-z_i\right)^{-1}$$

$$(z-z_1)^r\frac{X(z)}{z}=\sum_{i=1}^{r}k_i\left(z-z_i\right)^{r-i}+\sum_{i=r+1}^{n}k_i(z-z_1)^r\left(z-z_i\right)^{-1}$$

$$k_i=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{dz^{r-i}}[(z-z_1)^r X(z)]\Big|_{z=z_1}\qquad i=1,2,\cdots,r$$

$$k_i=(z-z_i)X(z)\Big|_{z=z_i}\qquad i=r+1,r+2,\cdots,n$$

7.2 z反变换

三. 部分分式展开法

例：已知象函数$X(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$，分别求其对应的原序列$x(n)$。

其收敛域如下： $(1)|z|>2;$ $(2)|z|<1;$ $(3)1<|z|<2$

解： $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{z}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{1/3}{z+1}+\dfrac{2/3}{z-2}$ ⇒ $X(z)=\dfrac{z/3}{z+1}+\dfrac{2z/3}{z-2}$

（1）因果序列：

$$x(n)=\left[\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}2^n\right]u(n)$$

（2）非因果序列：

$$x(n)=\left[-\frac{1}{3}(-1)^n-\frac{2}{3}2^n\right]u(-n-1)$$

（3）双边序列：

$$x(n)=\frac{1}{3}(-1)^n u(n)-\frac{2}{3}2^n u(-n-1)$$

7.2 z反变换

例：用部分分式展开法求原函数

$$(1)X(z)=\frac{z^3+2z^2+1}{z^3-1.5z^2+0.5z}，(|z|>1)\quad (2)X(z)=\frac{2z^3-5z^2+z+3}{z^2-3z+2}，(|z|>2)$$

解: (1)

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{z-0.5}$$

$$B=\left[\frac{d}{dz}\frac{z^3+2z^2+1}{(z-0.5)(z-1)}\right]\Bigg|_{z=0}=\frac{(3z^2+4z)(z^2-1.5z+0.5)-(z^3+2z^2+1)(2z-1.5)}{(z^2-1.5z+0.5)^2}=6$$

$$A=\frac{z^3+2z^2+1}{(z-0.5)(z-1)}\Bigg|_{z=0}=2$$

$$C=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-0.5)}\Bigg|_{z=1}=8$$

$$D=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)}\Bigg|_{z=0.5}=-13$$

$$X(z)=\frac{2}{z}+6+\frac{8z}{z-1}+\frac{-13z}{z-0.5}$$

$$x(n)=2\delta(n-1)+6\delta(n)+8u(n)-13(0.5)^n u(n)$$

7. 2 z反变换

例：用部分分式展开法求原函数

$$(1)X(z)=\frac{z^3+2z^2+1}{z^3-1.5z^2+0.5z}，(|z|>1) \quad (2)X(z)=\frac{2z^3-5z^2+z+3}{z^2-3z+2}，(|z|>2)$$

解: (2)

$$X(z)=2z+1+\frac{1}{z^2-3z+2}$$

$$X_1(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}\Rightarrow\frac{X_1(z)}{z}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2(z-2)}$$

$$\therefore X(z)=2z+1+\frac{1}{2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{2(z-2)}$$

$$x(k)=2\delta(n+1)+\frac{3}{2}\delta(n)-u(n)+\frac{1}{2}(2)^n u(n)$$

第七章 离散时间信号与系统的z域分析

7.1 z变换

- 双边z变换
- 单边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质

7.2 z反变换

- z反变换
- 幂级数展开法
- 部分分式展开法

7.3 LTI系统的z域分析

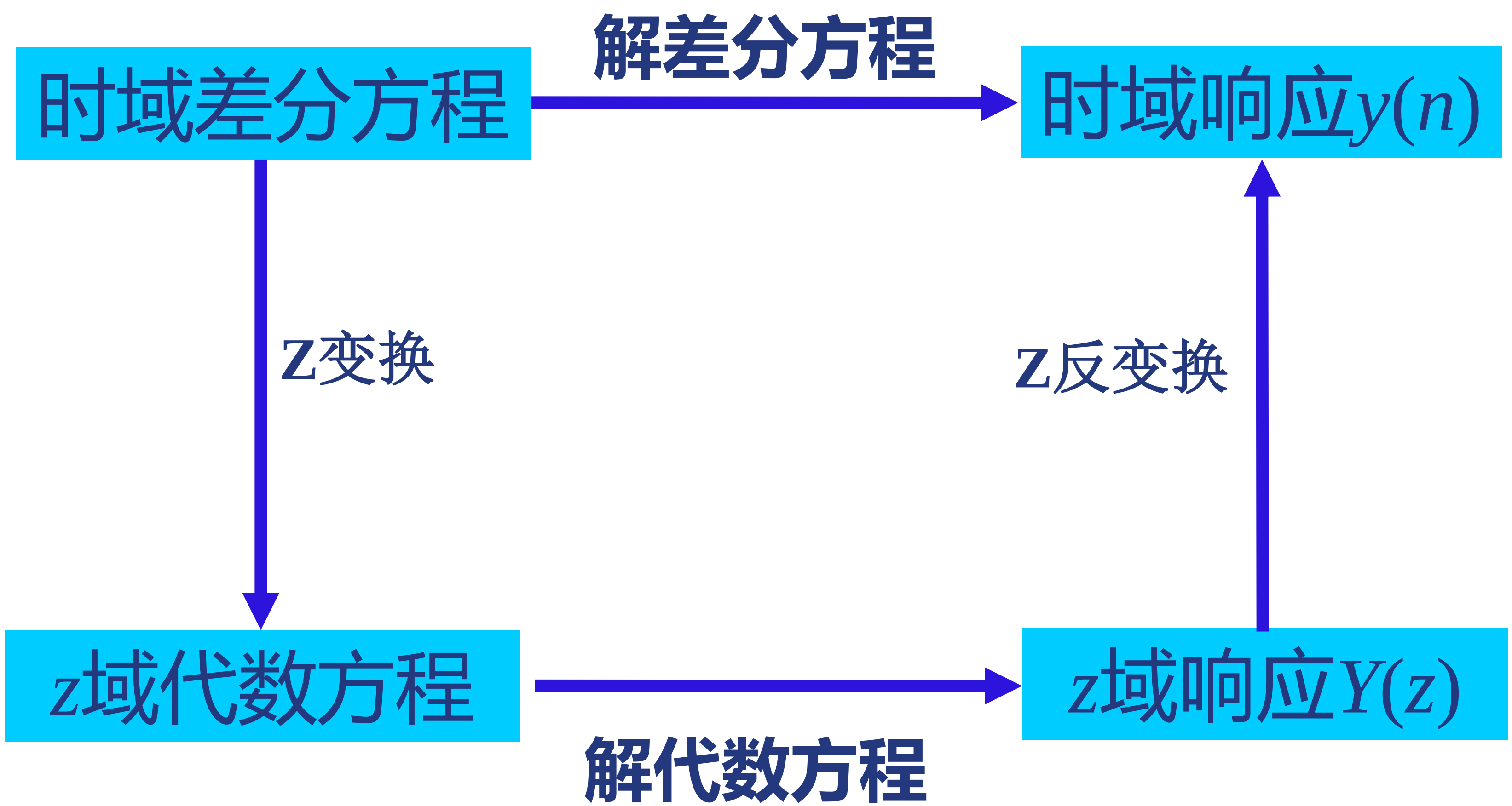
- 差分方程的z域求解
- 系统函数分析

7.4 系统的图形表示方法

- 系统框图
- 信号流图
- 梅森公式
- 系统模拟

一. 差分方程的z域求解

差分方程描述系统的z域分析



一. 差分方程的z域求解

离散LTI系统用*k*阶常系数**差分方程描述：**

$$y(n)+a_{k-1}y(n-1)+\cdots+a_1y(n-k+1)+a_0y(n-k)$$
$$=b_mx(n)+b_{m-1}x(n-1)+\cdots+b_1x(n-m+1)+b_0x(n-m)$$

系数为实数，$x(n)$在$n=0$ 时接入，初始状态为$y(-1),y(-2),\cdots,y(-n)$ 。

$$\Longrightarrow\quad \sum_{i=0}^{k}a_{k-i}y(n-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}x(n-j)$$

令$x(n)\leftrightarrow X(z)$，　$y(n)\leftrightarrow Y(z)$，两边取z变换：

$$\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}\left[z^{-i}Y(z)+\sum_{n=0}^{i-1}y(n-i)z^{-n}\right]=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}\left[z^{-j}X(z)\right]$$

一. 差分方程的z域求解

$$\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} y(n-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} x(n-j)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} z^{-i}\right) Y(z) + \sum_{i=0}^{k} a_{k-i}\left[\sum_{n=0}^{i-1} y(n-i) z^{-n}\right] = \left(\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j}\right) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{M(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)} X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}\left[\sum_{n=0}^{i-1} y(n-i) z^{-n}\right]}{\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} z^{-i}} + \frac{\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j}}{\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} z^{-i}} X(z)$$

系统函数： $H(z) = \dfrac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \dfrac{B(z)}{A(z)}$

$y(n)$与$x(n)$之间关系的差分方程 $\Rightarrow$ $Y(z)$与$X(z)$之间关系的代数方程，并且初始状态已自然地包含在其中，可以直接求解系统的全响应。

7.3 LTI系统的z域分析

一. 差分方程的z域求解

1. 二阶系统响应的z域求解

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

已知 $x(n)$，$y(-1)$，$y(-2)$，求$y(n)$。

求解步骤：

(1) 经z变换将时域差分方程变换为z域代数方程；

(2) 求解z域代数方程，求出$Y_{zi}(z)$, $Y_{zs}(z)$；

(3) z反变换，求出响应的时域表示式。

$$y(n) \qquad a_1 y(n-1) \qquad a_2 y(n-2)$$

$$Y(z)+a_1[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+a_2\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]$$

$$=b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)+b_2z^{-2}X(z)$$

$$b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

$$Y(z)=\frac{-a_1y(-1)-a_2y(-2)-a_2y(-1)z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}+\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z)$$

$$Y_{zi}(z) \qquad Y_{zs}(z)$$

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=Z^{-1}\{Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)\}$$

7.3 LTI系统的z域分析

例：求下列离散系统的完全响应，零输入响应以及零状态响应

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\quad y(-1)=0, y(-2)=1/2, x(n)=2^n u(n)。$$

解：零输入响应的一般形式为

$$y_n(n)=A(-1)^n+B(-2)^n$$

初始条件：

$$y_{zi}(-1)=y(-1)=0,$$
$$y_{zi}(-2)=y(-2)=1/2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A-0.5B=0 \\ A+0.25B=0.5 \end{cases}$$

解得A=1，B=-2，因此，

$$y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n$$

复习

零状态响应满足：

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=2^n u(n)$$

因此，

$$y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+2^0=1$$

$$y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+2^1=-1$$

7.3 LTI系统的z域分析

例：求下列离散系统的完全响应，零输入响应以及零状态响应

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\quad y(-1)=0, y(-2)=1/2, x(n)=2^n u(n)。$$

复习

解：<u>零状态响应</u>：$y_{zs}(n)= C\left(-1\right)^n+D\left(-2\right)^n+ 2^n/3$

初始条件：　$y_{zs}(0)=1,\quad y_{zs}(1)=-1$

$$\begin{cases} C+D+1/3=1 \\ -C-2D+2/3=-1 \end{cases}$$

解得C=-1/3，D=1

完全响应

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=\underbrace{\overbrace{\left(-1\right)^n-2\left(-2\right)^n}^{\text{零输入响应}}\overbrace{-\frac{1}{3}\left(-1\right)^n+\left(-2\right)^n}}_{\text{固有响应}}\overbrace{+\underbrace{\frac{1}{3}\left(2\right)^n}_{\text{强迫响应}}}^{\text{零状态响应}}$$

$$y(n)=y_n(n)+y_f(n)=\overbrace{\frac{2}{3}\left(-1\right)^n-\left(-2\right)^n}^{\text{固有响应}}+\overbrace{\frac{1}{3}\left(2\right)^n}^{\text{强迫响应}}$$

7.3 LTI系统的z域分析

例：求下列离散系统的完全响应，零输入响应以及零状态响应

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\quad y(-1)=0, y(-2)=1/2, x(n)=2^n u(n)。$$

解：对方程两端取z变换，可得

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+2\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]=X(z)$$

$$Y(z)=\frac{-3y(-1)-2y(-2)-2y(-1)z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}+\frac{X(z)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$Y(z)=\frac{-z^2}{z^2+3z+2}+\frac{z^2}{z^2+3z+2}\frac{z}{z-2}$$

$$Y(z)=\left(\frac{z}{z+1}+\frac{-2z}{z+2}\right)+\left(\frac{-z/3}{z+1}+\frac{z}{z+2}+\frac{z/3}{z-2}\right)$$

例：求下列离散系统的完全响应，零输入响应以及零状态响应

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\quad y(-1)=0,y(-2)=1/2,x(n)=2^n u(n)。$$

解：

$$Y(z)=\underbrace{\left(\frac{z}{z+1}+\frac{-2z}{z+2}\right)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\left(\frac{-z/3}{z+1}+\frac{z}{z+2}+\frac{z/3}{z-2}\right)}_{\text{零输入响应}}=\underbrace{\frac{2z/3}{z+1}+\frac{-z}{z+2}}_{\text{固有响应}}+\underbrace{\frac{z/3}{z-2}}_{\text{强迫响应}}$$

取z反变换，可得

$$y(n)=\underbrace{\left[(-1)^n-2(-2)^n\right]u(n)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\left[-\frac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{3}(2)^n\right]u(n)}_{\text{零输入响应}}=\underbrace{\left[\frac{2}{3}(-1)^n-(-2)^n\right]u(n)}_{\text{固有响应}}+\underbrace{\frac{1}{3}(2)^n u(n)}_{\text{强迫响应}}$$

Y(z)的极点有两部分组成，一部分是特征根形成的极点，称为固有频率，构成系统的固有响应，另一部分是激励信号的象函数X(z)形成的极点，构成强迫响应。

7.3 LTI系统的z域分析

一. 差分方程的z域求解

二阶系统响应的z域求解

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

已知 $x(n)$，$y(-1)$，$y(-2)$，求$y(n)$。

如果已知 $x(n)$，$y(0)$，$y(1)$，求$y(n)$。

(1) 由于在0时刻激励已经接入，而零状态响应及其移位项可能不等于0

(2) 不易分辨零输入和零状态响应的起始状态；

(3) 需要先有起始状态求得初始状态，即0+到0-时刻的值；

7.3 LTI系统的z域分析

例：求下列离散系统的完全响应，零输入响应以及零状态响应

$y(n)+4y(n-1)+3y(n-2)=4x(n)+2x(n-1),\quad y(0)=9, y(1)=-33, x(n)=\left(-2\right)^n u(n)$。

解：**设定零状态，对方程两端取z变换，可得**

$$Y_{zs}(z)+4z^{-1}Y_{zs}(z)+3z^{-2}Y_{zs}(z)=4X(z)+2z^{-1}X(z)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{4+2z^{-1}}{1+4z^{-1}+3z^{-2}}X(z)=\frac{4z^2+2z}{z^2+4z+3}\frac{z}{z+2}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{z}{z+1}+\frac{15z}{z+3}+\frac{-12z}{z+2}$$

$$\Rightarrow\quad y_{zs}(n)=\left[\left(-1\right)^n-12\left(-2\right)^n+15\left(-3\right)^n\right]u(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y_{zs}(0)=4,\quad y_{zs}(1)=-22$$

$$\Leftarrow$$

$$y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=9-4=5$$

$$y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)=-33+22=-11$$

7.3 LTI系统的z域分析

例：求下列离散系统的完全响应，零输入响应以及零状态响应

$$y(n)+4y(n-1)+3y(n-2)=4x(n)+2x(n-1),\quad y(0)=9, y(1)=-33, x(n)=(-2)^n u(n)。$$

解：

$$y_{zs}(n)=\left[(-1)^n-12(-2)^n+15(-3)^n\right]u(n)\qquad Y_{zs}(z)=\frac{4z^2+2z}{z^2+4z+3}\frac{z}{z+2}$$

零输入响应的一般形式为

$$y_{zi}(0)=5$$

$$y_{zi}(1)=-11$$

$$y_n(n)=A(-1)^n+B(-3)^n$$

$$\begin{cases}A+B=5\\-A-3B=-11\end{cases}$$

解得$A=2$，$B=3$，

$$y_{zi}(n)=\left[2(-1)^n+3(-3)^n\right]u(n)$$

因此，完全响应为：

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=\left[3(-1)^n-12(-2)^n+18(-3)^n\right]u(n)$$

第七章 离散时间信号与系统的z域分析

7.1 z变换

- 双边z变换
- 单边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质

7.2 z反变换

- z反变换
- 幂级数展开法
- 部分分式展开法

7.3 LTI系统的z域分析

- 差分方程的z域求解
- 系统函数分析

7.4 系统的图形表示方法

- 系统框图
- 信号流图
- 梅森公式
- 系统模拟

7.3 LTI系统的z域分析

二. 系统函数分析

1. 系统函数:

系统在零状态条件下，输出的z变换式与输入的z变换式之比，记为$H(z)$。

$$H(z)=\frac{Z[y_{zs}(n)]}{Z[x(n)]}=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y_{zs}(n)=x(n)*h(n)$$

$$H(z)=\frac{Z[y_{zs}(n)]}{Z[x(n)]}=\frac{Z[x(n)*h(n)]}{Z[x(n)]}=\frac{Z[x(n)]\cdot Z[h(n)]}{Z[x(n)]}=Z[h(n)]$$

$$H(z)=Z[h(n)],\qquad h(n)=Z^{-1}[H(z)]$$

三. 系统函数分析

2. 系统函数表示

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} z^{-i}\right) Y_{zs}(z) = \left(\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j}\right) X(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_{m-j} z^{-j}}{\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} z^{-i}} = \frac{b_m z + b_{m-1} z^{-1} + \cdots + b_1 s^{-(m-1)} + b_0 z^{-m}}{a_k + a_{k-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-(k-1)} + a_0 z^{-k}}$$

- **系统零状态响应的象函数与激励象函数之比为系统函数；**
- **可以利用差分方程写出该系统的系统函数，反之亦然；**
- 系统函数只与描述系统的差分方程的系数有关；

7.3 LTI系统的z域分析

三. 系统函数分析

3. 系统零点和极点

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}=K\frac{(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

其中K为常数

极点：分母多项式$X(z)=0$的根$p_k,(k=1,2,3,\cdots,n)$

零点：分子多项式$Y_{zs}(z)=0$的根$r_k,(k=1,2,3,\cdots,m)$

- **极点和零点可能为实数或者复数；**
- **如果H(z)表示一个实系统，则$X(z),Y_{zs}(z)$中的系数都是实数，其复数零点或极点必成对出现；**
- **如果不考虑常数K，为系统函数H(z)可有系统的零极点确定，因此零极点图可以表示一个系统，常用来分析系统特性。**

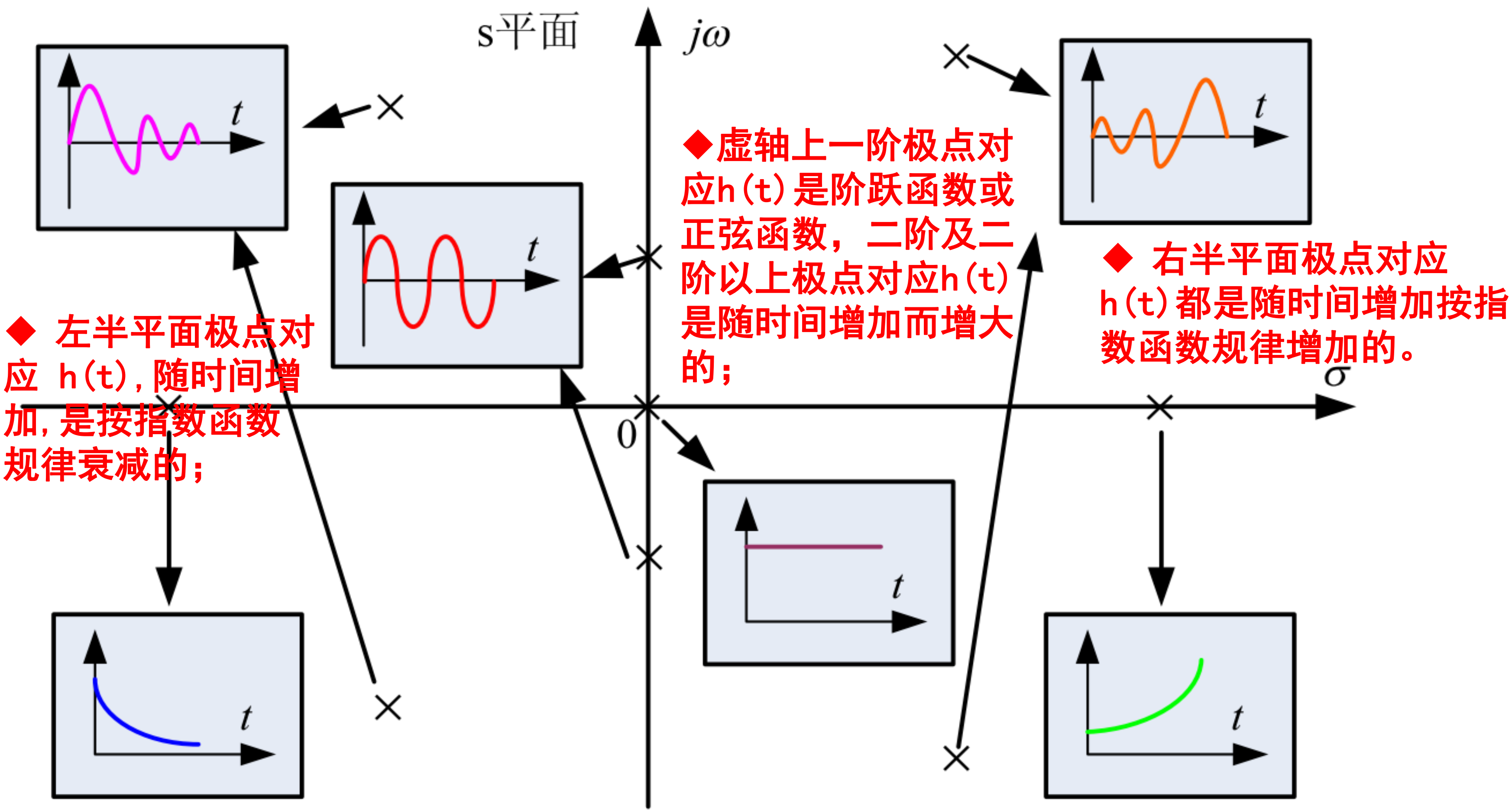
7.3 LTI系统的z域分析

复习

三. 系统函数分析

3. 系统零点和极点

连续时间系统$H(s)$ 的一阶极点与所对应的响应函数



7.3 LTI系统的z域分析

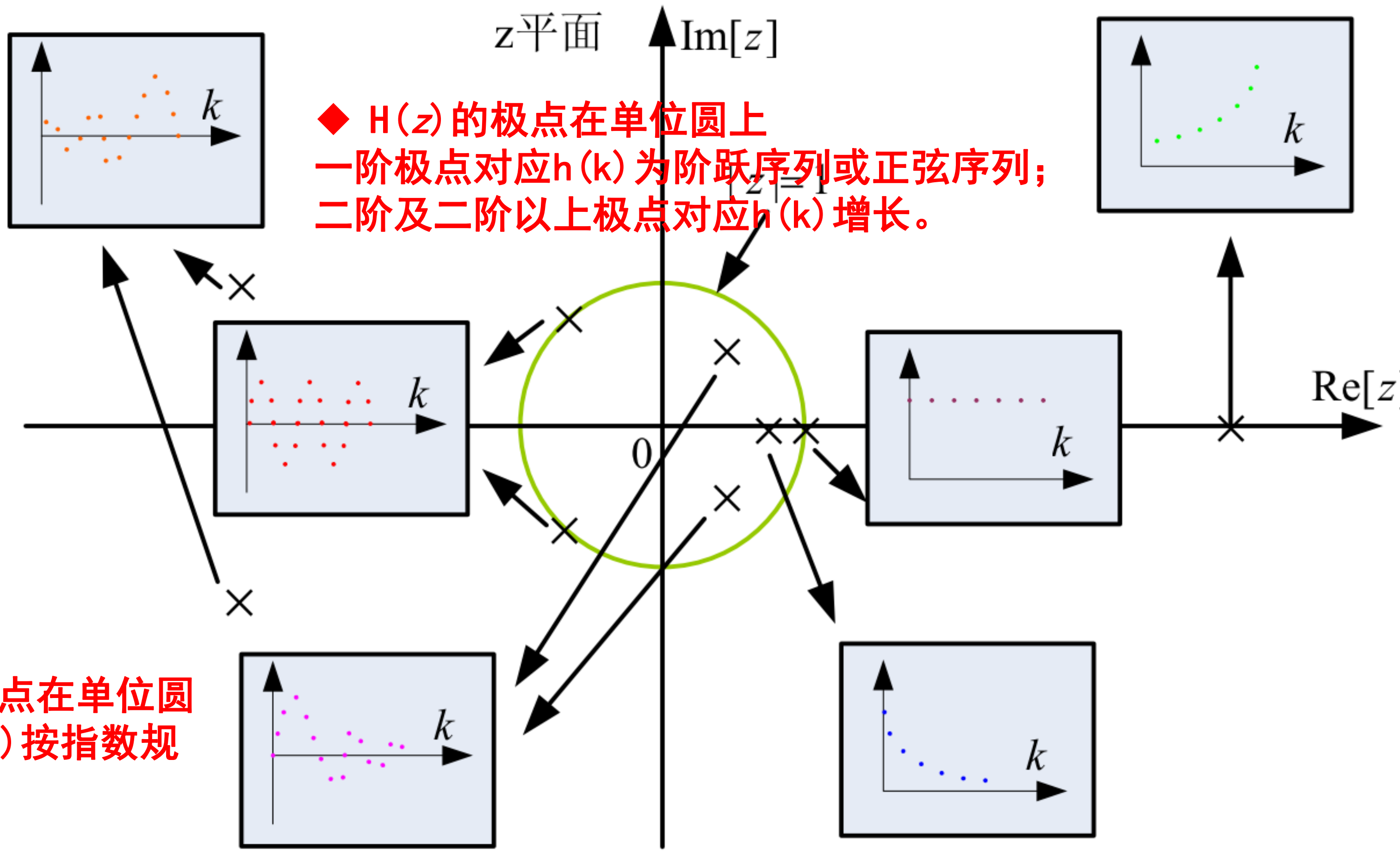
三. 系统函数分析

3. 系统零点和极点

离散时间系统*H*(*z*) 的一阶极点与所对应的响应函数

◆ H(z)的极点在单位圆外，对应h(k)按指数规律增长

◆ H(*z*)的极点在单位圆上
一阶极点对应h(k)为阶跃序列或正弦序列；
二阶及二阶以上极点对应h(k)增长。



◆ H(z)的极点在单位圆内，对应h(k)按指数规律衰减；

三. 系统函数分析

4. 系统的因果性和稳定性分析

1) 因果性

时域：因果系统的充要条件：单位样值响应$h(n)=0, n<0$；

z域：　系统函数的收敛域为$|z|>\rho_0$, 即极点都在收敛圆的内部。

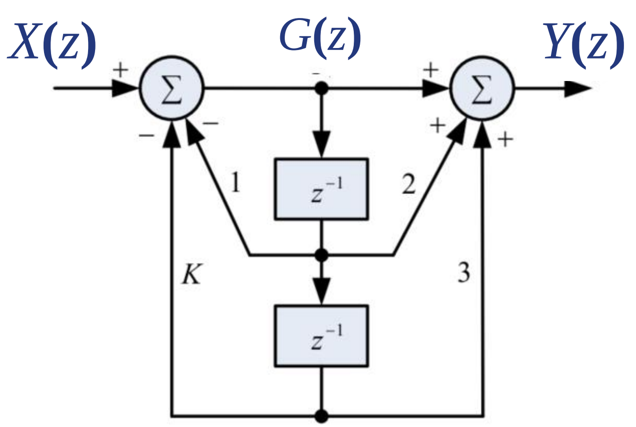
2) 稳定性

时域：稳定系统的充要条件：系统的冲激序列响应绝对可和；

z域：　系统函数H(z)的极点均在单位圆内；

7.3 LTI系统的复频域分析

例题： 图示LTI离散系统，*K*满足什么条件时，系统稳定?



解：左端加法器方程：

$$G(z)=(-z^{-1}-Kz^{-2})G(z)+X(z)$$

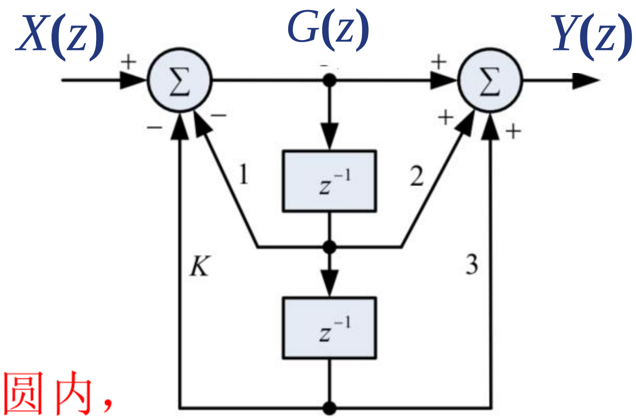
右端加法器方程：

$$Y(z)=(1+2z^{-1}+3z^{-2})G(z)$$

因此系统函数为：$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+z^{-1}+Kz^{-2}}=\frac{z^2+2z+3}{z^2+z+K}$$

极点为：$$p_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4K}}{2}$$

例题：图示LTI离散系统，*K*满足什么条件时，系统稳定？



解:

极点为：$$p_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4K}}{2}$$

★ 当$1-4K\geq 0$，即$K\leq\dfrac{1}{4}$时为实极点，为使极点在单位圆内，必须同时满足不等式

$$\frac{-1+\sqrt{1-4K}}{2}<1,\qquad \frac{-1-\sqrt{1-4K}}{2}>-1 \quad\Rightarrow\quad 0<K\leq\frac{1}{4}$$

★ 当$1-4K<0$，即$K>\dfrac{1}{4}$时为复极点，可写为

$$p_{1,2}=\frac{-1\pm j\sqrt{4K-1}}{2}$$

极点在单位圆内

$$\frac{(1)^2+\left(\sqrt{4K-1}\right)^2}{4}<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}<K<1$$

综合以上结果可知：

$0<K<1$ 时系统是稳定的。

第七章 离散时间信号与系统的z域分析

7.1 z变换
- 双边z变换
- 单边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质

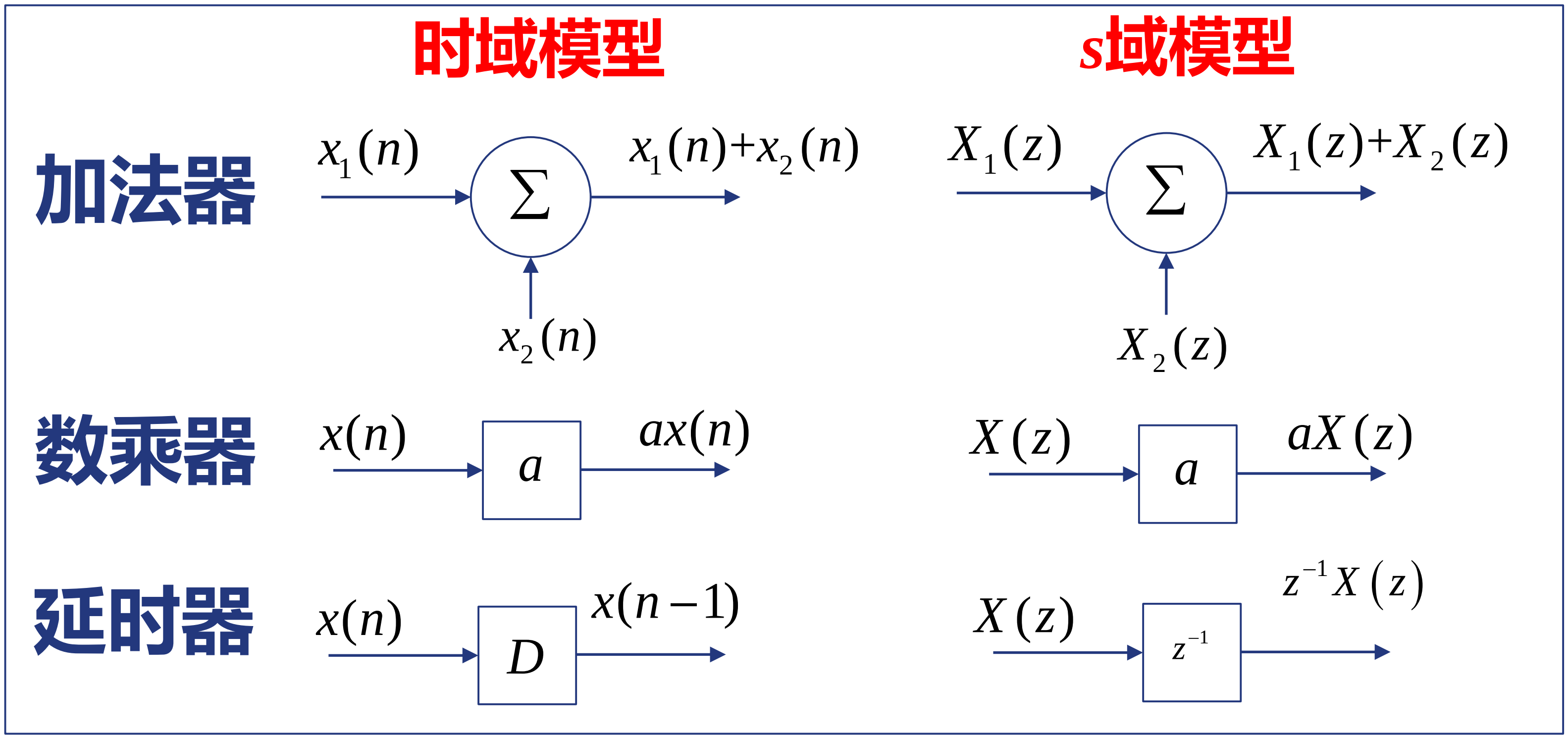
7.2 z反变换
- z反变换
- 幂级数展开法
- 部分分式展开法

7.3 LTI系统的z域分析
- 差分方程的z域求解
- 系统函数分析

7.4 系统的图形表示方法
- 系统框图
- 信号流图
- 梅森公式
- 系统模拟

7.4 系统的图形表示

一. 系统框图

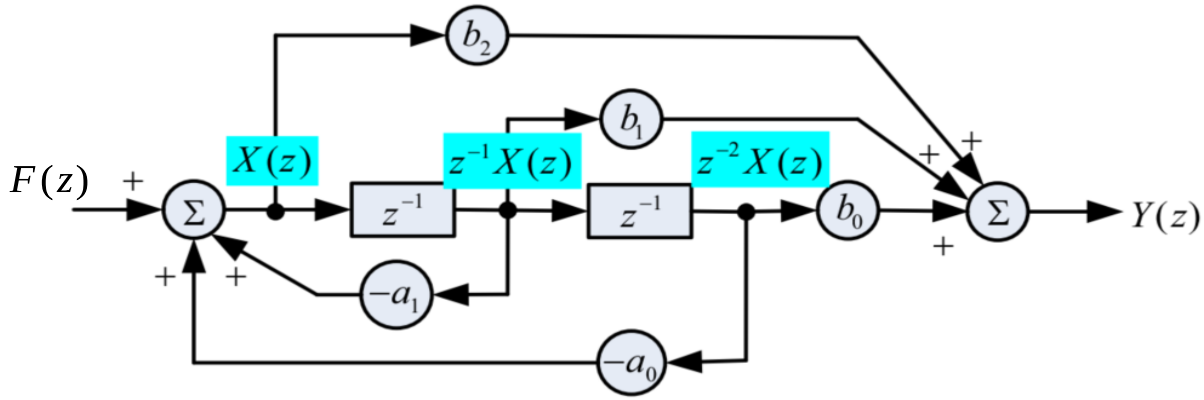


系统时域框图→差分方程→时域或z域方法求解

系统时域框图→系统z域框图→ z域代数方程→z反变换，时域表达式

7.4 系统的图形表示

例1：如图所示离散系统，求系统的差分方程



解：根据两个加法器列出方程：

$$X(z) = -a_1 z^{-1} X(z) - a_0 z^{-2} X(z) + F(z) \Rightarrow X(z) = \frac{F(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

$$Y(z) = b_2 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_0 z^{-2} X(z)$$

$$\Rightarrow \left(1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}\right) Y(z) = \left(b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}\right) F(z)$$

$$\Rightarrow y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 f(n) + b_1 f(n-1) + b_2 f(n-2)$$

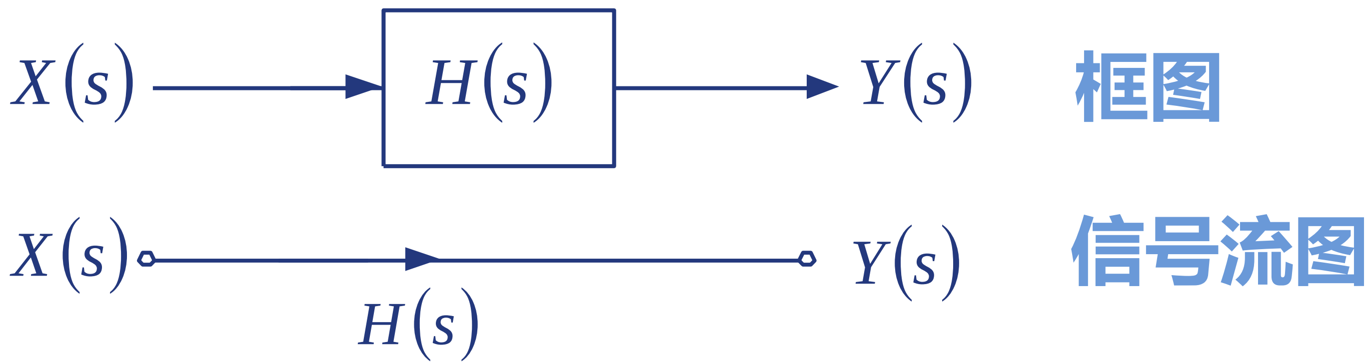
7.4 系统的图形表示

复习

二. 信号流图

1.信号流图概述

概述：信号流图是系统s域或z域框图的一种简化画法，与系统框图描述并无实质区别，信号流图是由若干节点和连接这些节点的有向支路组成的信号传递网络。



$X(s)$、$Y(s)$ 称为结点

线段表示信号传输的路径，称为支路

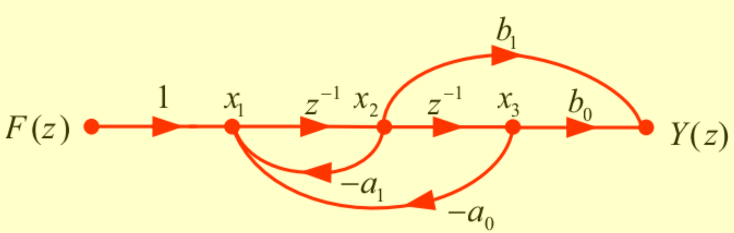
结点和支路是信号流图的基本组成部件。

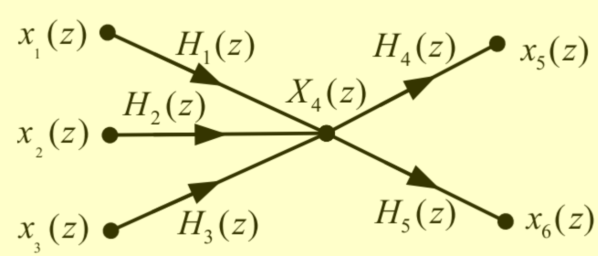
7.4 系统的图形表示

二. 信号流图

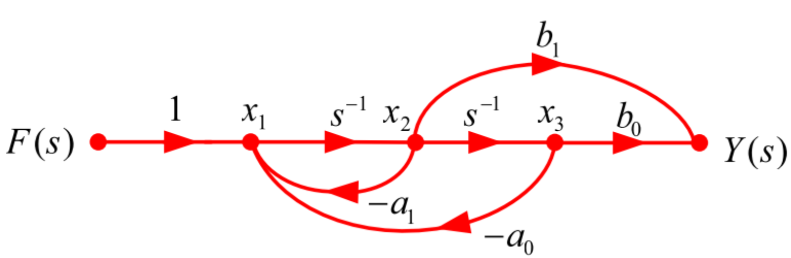
2.信号流图基本性质

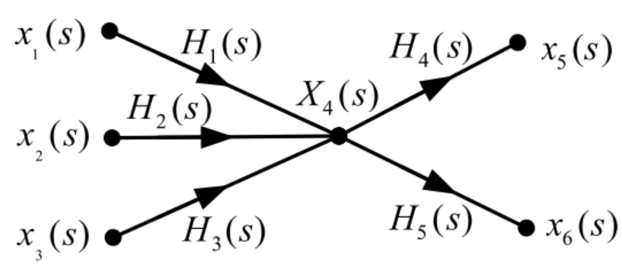
- 信号只能沿箭头指向传播，支路输出值=输入节点变量×支路增益；
- 当节点有多个输入时，节点将所有汇入支路信号相加，将和信号传送到与该节点相连的所有出支路。





$$
\begin{aligned}
x_4(z) &= H_1(z)x_1(z) \\
&\quad + H_2(z)x_2(z) \\
&\quad + H_3(z)x_3(z) \\
x_5(z) &= H_4(z)x_4(z) \\
x_6(z) &= H_5(z)x_4(z)
\end{aligned}
$$





$$
\begin{aligned}
x_4(s) &= H_1(s)x_1(s) \\
&\quad + H_2(s)x_2(s) \\
&\quad + H_3(s)x_3(s) \\
x_5(s) &= H_4(s)x_4(s) \\
x_6(s) &= H_5(s)x_4(s)
\end{aligned}
$$

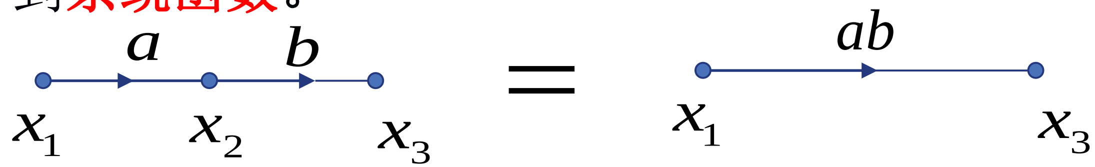
7.4 系统的图形表示

二. 信号流图

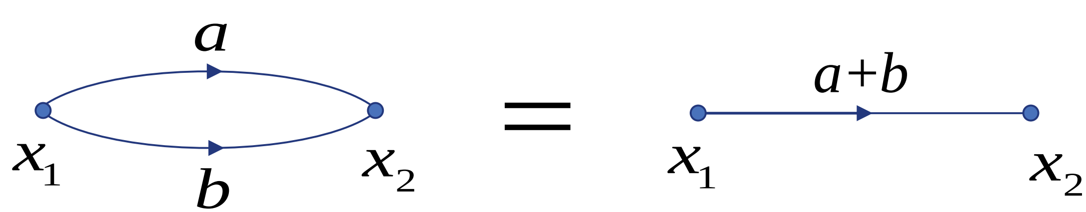
3.信号流图化简基本规则 - 连续和离散系统都适用

信号流图描述的是经过拉氏变换的线性方程组，可以按照代数规则化简使得复杂的信号流图简化为只有一个原点和一个汇点的信号流图，从而得到系统函数。

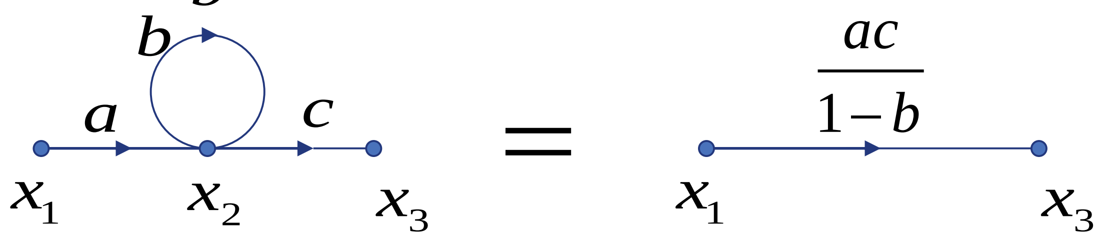
(1)支路串联



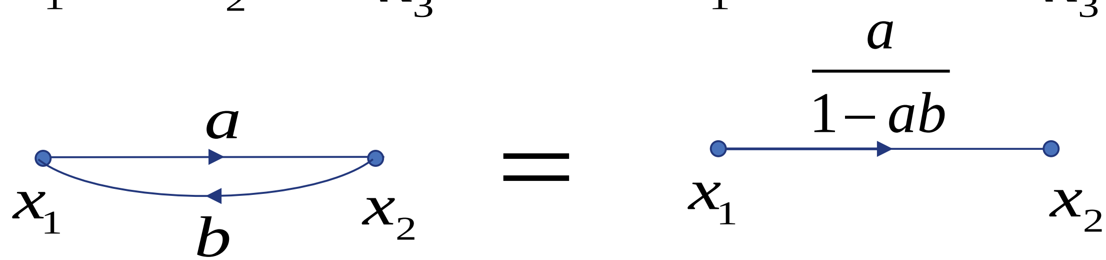
(2)支路并联



(3)自环

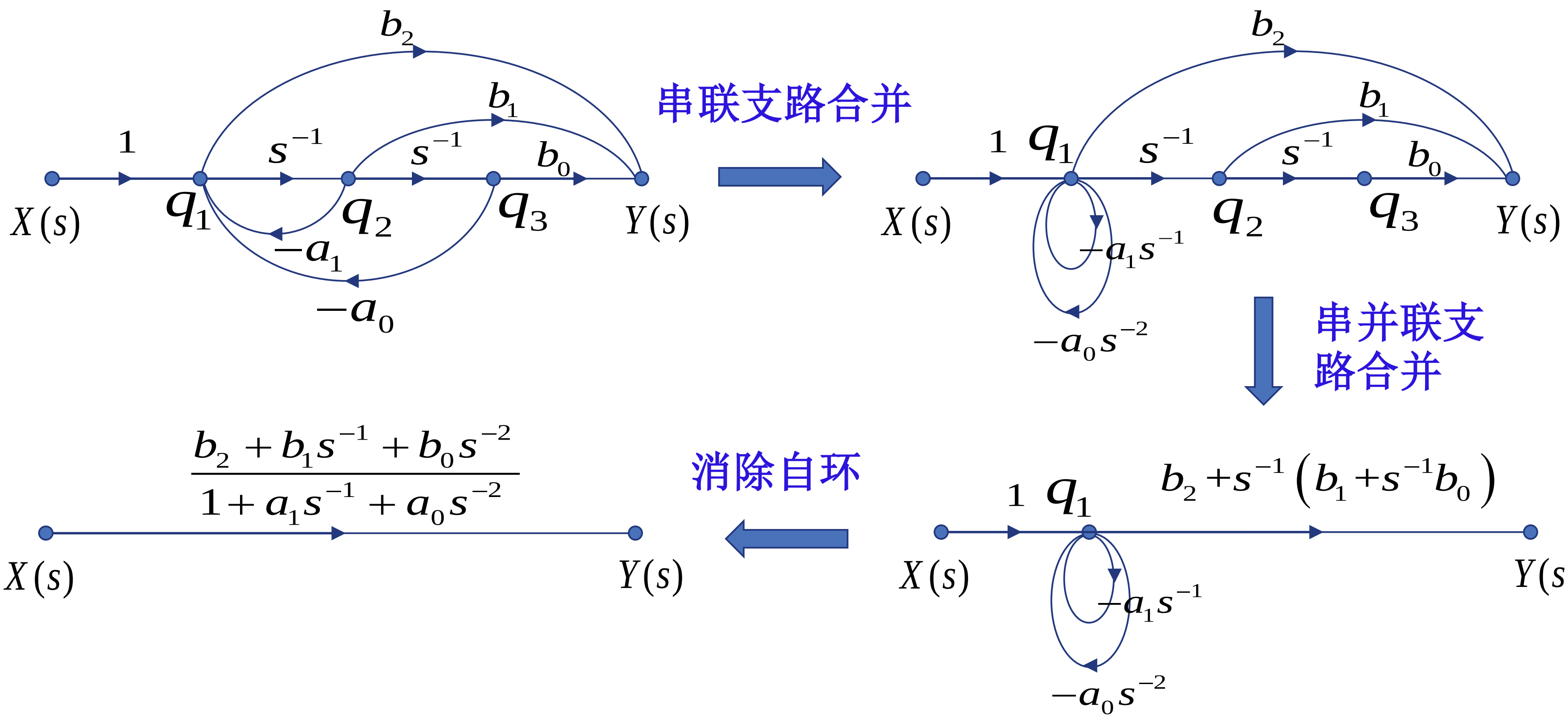


(4)反馈支路



复习

例：求如图所示信号流图的系统函数



对应分微分方程为：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 f''(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

7.4 系统的图形表示

三.梅森公式

利用梅森公式可以根据信号流图很方便地得到输入输出间的系统函数。

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{\Delta}\sum_i p_i\Delta_i \qquad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{\Delta}\sum_i p_i\Delta_i$$

Δ称为信号流图的特征行列式 $\Delta=1-\sum_j L_j+\sum_{m,n}L_mL_n-\sum_{p,q,r}L_pL_qL_r+\cdots$

$\sum_j L_j$： 流图中所有回路增益之和；

$\sum_{m,n} L_mL_n$： 流图中所有两两互不接触回路的增益乘积之和；

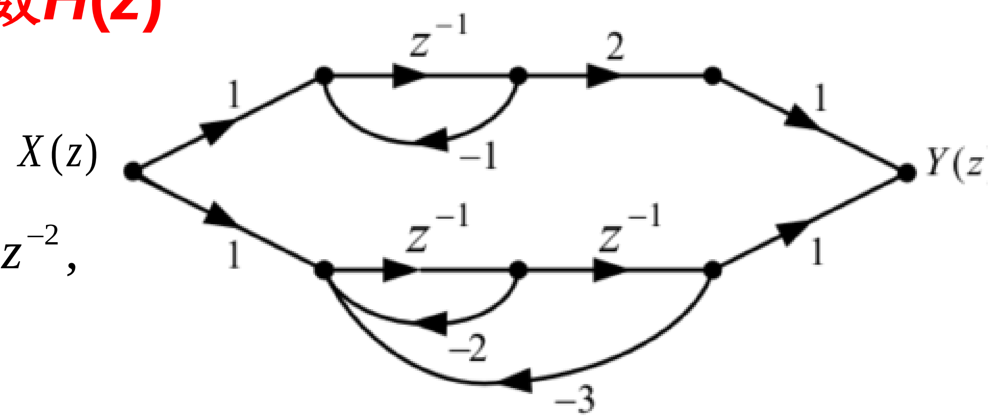
$\sum_{p,q,r} L_pL_qL_r$：流图中所有三个都互不接触回路的增益乘积之和；

p_i： 由$X(s)$到$Y(s)$的第i条开路的总增益(传输函数)

Δ_i： 除去第i条开路，剩余流图的流图行列式。

7.4 系统的图形表示

例：图示离散系统，求系统函数*H(z)*



解：流图具有三条环路

$$L_1 = -z^{-1},\ L_2 = -2z^{-1},\quad L_3 = -3z^{-2},$$

两两互不接触回路：

$$L_{12} = L_1 L_2 = 2z^{-2},\ L_{13} = L_1 L_3 = 3z^{-3},$$

特征行列式： $\Delta = 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \cdots = 1 - \left(-z^{-1} - 2z^{-1} - 3z^{-2}\right) + \left(2z^{-2} + 3z^{-3}\right)$

总共有2条通路

$$p_1 = 2z^{-1},\qquad \Delta_1 = 1-(L_2 + L_3) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$p_2 = z^{-2},\qquad \Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\Delta}\sum_i p_i \Delta_i = \frac{2z^2 + 5z + 7}{z^3 + 3z^2 + 5z + 3}$$

四.系统模拟

为了对信号进行某种处理，比如滤波，就必须构造出合适的实际结构（硬件实现结构），对于同样的系统函数往往有多种不同的实现方案。

H(z) → 信号流图 → 系统框图

1. 直接形式

例1: $$H(z)=\frac{2z+3}{z^3+3z^2+2z+2}=\frac{2z^{-2}+3z^{-3}}{1-(-3z^{-1}-2z^{-2}-2z^{-3})}$$

由梅森公式：流图包含两条开路,三个相互接触的环路

$$L_1=-3z^{-1},\quad L_2=-2z^{-2},\quad L_3=-2z^{-3},$$

$$p_1=2z^{-2},\quad \Delta_1=1\qquad p_2=3z^{-3},\quad \Delta_2=1$$

7.4 系统的图形表示

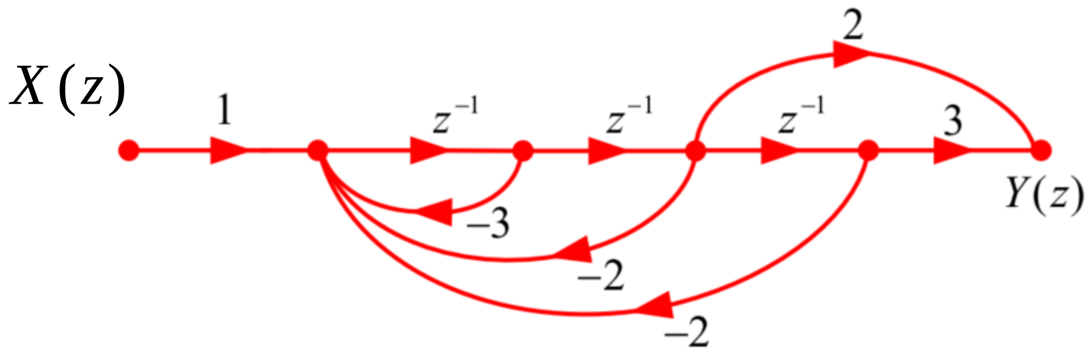
四.系统模拟

1. 直接形式

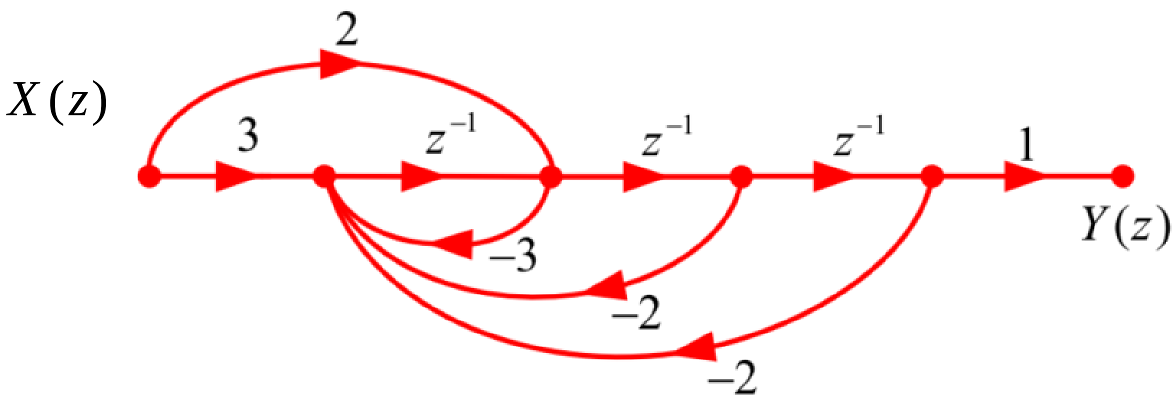
例:

$$H(z)=\frac{2z+3}{z^3+3z^2+2z+2}=\frac{2z^{-2}+3z^{-3}}{1-(-3z^{-1}-2z^{-2}-2z^{-3})}$$

形式一



形式二

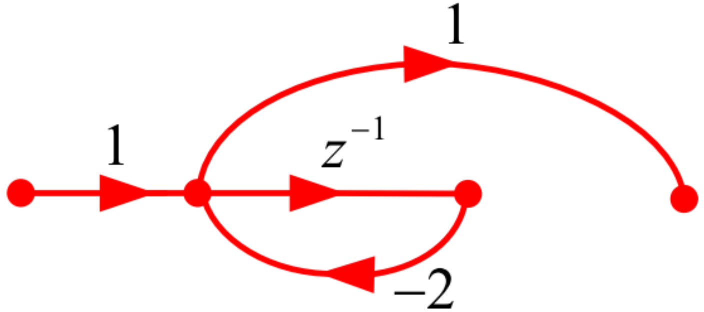


四.系统模拟

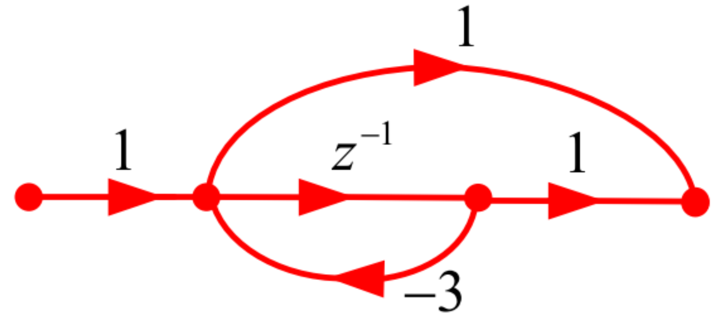
2. 串联形式

例： $$H(z)=\frac{z^2+z}{z^2+5z+6}=\frac{z}{z+2}\cdot\frac{(z+1)}{(z+3)}=H_1(z)\cdot H_2(z)$$

$$H_1(z)=\frac{z}{z+2},\ H_2(z)=\frac{z+1}{z+3}$$



$H_1(z)$



$H_2(z)$

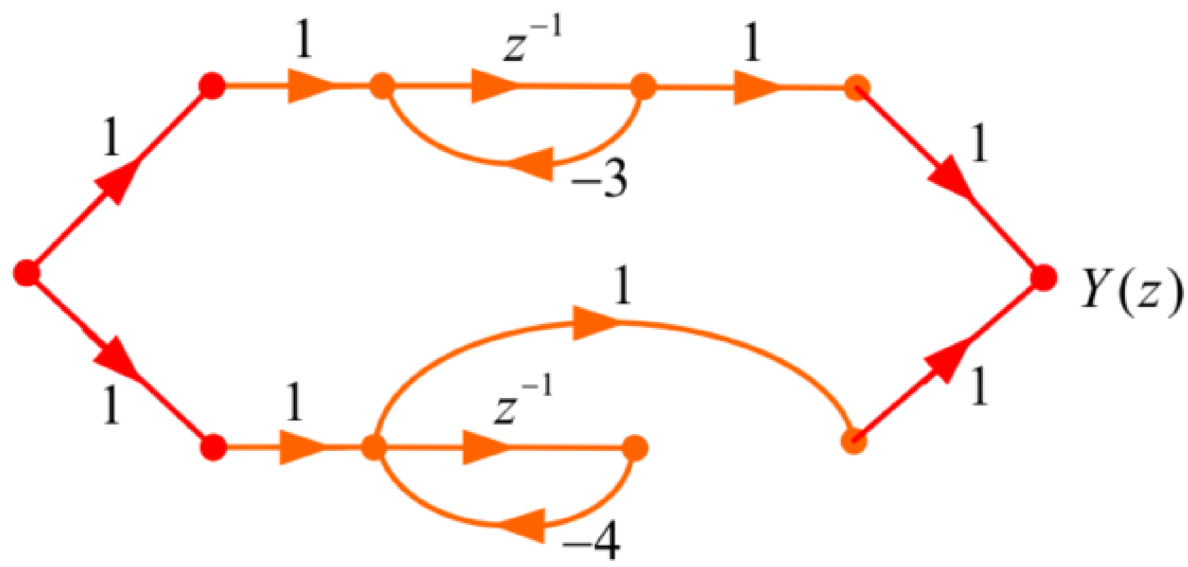
四.系统模拟

3.并联形式

例： $$H(z)=\frac{z^2+4z+4}{z^2+7z+12}=\frac{1}{z+3}+\frac{z}{z+4}=H_1(z)+H_2(z)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{z+3},\quad H_2(z)=\frac{z}{z+4}$$

由梅森公式：流图包含一条开路，一个环路



LTI系统的分析方法

系统分析研究的主要问题就是对于给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。具体来说就是：建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法
- 输入输出法 （外部法） -单输入单输出
- 状态变量法 （内部法） -多输入多输出

外部法
- 时域分析
  - 连续系统--- 微分方程，卷积积分
  - 离散系统--- 差分方程，卷积和
- 变换域分析
  - 连续系统 --- 频域法和复频域法
  - 离散系统 --- 频域法和z域法

系统特性： 系统函数-系统的稳定性

外部法： 状态变量法

第六&七章 离散LTI的频域分析和z域分析

频域分析

DTFS & DTFT

$$z = re^{j\Omega}$$

z域分析

z变换

DTFS： 连续信号抽样，具有周期性

DTFT:

- 绝对可和条件
- 只能求系统的零状态响应

z变换：

- 引入初始条件，求系统的全响应；
- 差分运算转变为代数运算；
- 对信号的适应性比较强，

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi} X(z) z^{n-1} dz$$

基本信号的DTFT变换，以及DTFT的性质

基本信号z变换，z变换的性质

离散LTI系统的频域分析

离散LTI系统的z域分析

系统函数分析

滤波特性

系统零极点分布

因果性，稳定性

系统图形表示与系统模拟

z变换的性质

1. 线性特性

$$ax_1(n)+bx_2(n)\longleftrightarrow aX_1(z)+bX_2(z)$$

2. 时移特性

$$x(n-1)\longleftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$x(n+1)\longleftrightarrow zX(z)-zx(0)$$

$$x(n\pm m)\longleftrightarrow z^{\pm m}X(z)$$

3. 尺度变换特性 $a^n x(n)\longleftrightarrow X(\frac{z}{a})$

4. 时域翻转 $x(-n)\longleftrightarrow X(z^{-1})$

5. 卷积定理 $x_1(n)*x_2(n)\longleftrightarrow X_1(z)X_2(z)$

6. 部分和 $\sum_{i=-\infty}^{k} x(i)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}X(z)$

7. z域微分 $n^m x(n)\longleftrightarrow \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m X(z)$

8. z域积分 $\frac{x(n)}{n+m}\longleftrightarrow z^m\int_z^{\infty}\frac{X(\eta)}{\eta^{m+1}}d\eta$

9. 初值定理 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$

10. 终值定理 $x(\infty)=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)X(z)$

常用离散序列的z变换

$$\delta(n) \leftrightarrow 1,\ \text{全}z\text{平面}$$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| > a \quad \Rightarrow \quad u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$-b^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z} = \frac{z}{z-b}, |z| < b \quad \Rightarrow \quad -u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$e^{\pm j\beta n}u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{\pm j\beta}z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}\cos\beta \pm z^{-1} j\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}, |z| > 1$$

$$\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}\cos\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$$

$$\sin(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{z^{-1}\sin\beta}{1-2z^{-1}\cos\beta + z^{-2}}$$

$$|z| > 1$$

$$a^n\cos(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{1-az^{-1}\cos\beta}{1-2az^{-1}\cos\beta + a^2z^{-2}}$$

$$a^n\sin(\beta n)u(n) \leftrightarrow \frac{az^{-1}\sin\beta}{1-2az^{-1}\cos\beta + a^2z^{-2}}$$

$$|z| > |a|$$

$$\sum_{i=-\infty}^{n} a^i \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a}, \quad |z| > \max(|a|,1)$$

常用离散序列的z变换

$$na^{n-1}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, |z|>|a| \qquad nu(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}, |z|>1$$

$$n^2a^{n-1}u(n) \leftrightarrow \frac{z(z+a)}{(z-a)^2}, |z|>|a| \qquad n^2u(n) \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, |z|>1$$

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^3}, |z|>|a| \qquad \frac{n(n-1)u(n)}{2} \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^3}, |z|>1$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, |z|>|a|$$

$$(n+1)a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-a)^2}, |z|>|a| \qquad (n+1)u(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}, |z|>1$$

$$\frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}, |z|>|a| \qquad \frac{n(n+1)u(n)}{2} \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^3}, |z|>1$$

Thank You !