# 第三章 二阶非线性（三波混频）效应

# 总结与习题


教师：魏敦钊 （副教授）

邮箱：weidzh@mail.sysu.edu.cn

主页：spe.sysu.edu.cn/node/2973

# 第三章内容大纲（更新）

- 耦合波方程
  - 二阶非线性系数
    - 材料：块状晶体、二维材料、超表面等 （了解）
    - 对称性：非线性系数矩阵，表面对称性破缺等（掌握）
    - 系数选择：坐标简化，有效非线性系数（重点）
    - 频率依赖关系：是否靠近材料共振吸收区域（了解）
  - 入射与产生的光场
    - 和频、差频、光参量放大（应用：激光或单光子变频）（重点）
    - 光参量共振（应用：中红外光源、压缩源）（掌握）
    - 自发参量下转换（应用：纠缠源、预报性单光子源）（了解）
    - 光场近似：是否可以忽略泵浦光能量的变化（掌握）
  - 波矢失配量
    - 双折射相位匹配（重点）
    - 温度角度调控（掌握）
    - 基波损耗、走离效应、群速度色散（了解）
  - 二阶非线性系数&波矢失配量
    - 准相位匹配理论（重点）
    - 倒格矢设计（级联；脉冲频率转换等）（掌握）
    - 系数调控方式（电极化、飞秒激光直写等）（了解）

- 非线性光子晶体
  - 非线性菲涅尔惠根斯原理
  - 非线性全息理论

# 第2节作业①

简答题：

1. 什么是各向同性与各向异性？
2. 什么是色散？色散在耦合波方程中的影响是什么？
3. 损耗与$\overleftrightarrow{\chi}^{(1)}$的$\overleftrightarrow{\chi}^{(2)}$关系，为什么要考虑无损耗？

**问题2：色散（光学）**

In optics, **dispersion** is the phenomenon in which the phase velocity of a wave depends on its frequency

$$\frac{\partial \vec{E}_c}{\partial z} = \frac{i\omega_c}{2cn}\overleftrightarrow{\chi}^{(2)} \bullet \vec{E}_a \vec{E}_b e^{i\Delta kz}$$

**主要影响是波矢失配量**

**问题3：损耗**

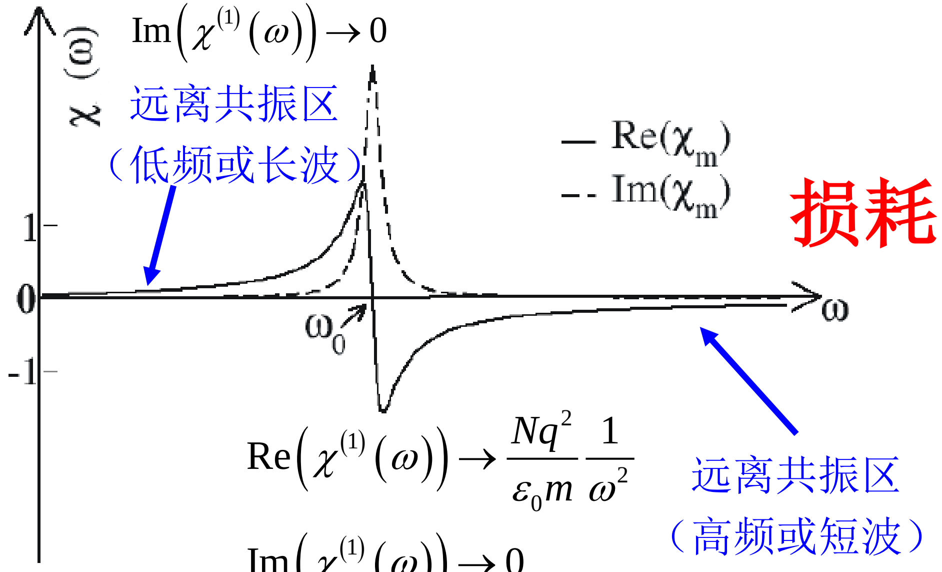
$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m D(\omega)} = \mathrm{Re}\left(\chi^{(1)}(\omega)\right) + i\cdot \mathrm{Im}\left(\chi^{(1)}(\omega)\right)$$

$$D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma,$$

$$\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2;\omega_1,\omega_2) = \frac{aNq^3}{\varepsilon_0 m^2}\frac{1}{D(\omega_1+\omega_2)D(\omega_1)D(\omega_2)}$$

$$\mathrm{Re}\left(\chi^{(1)}(\omega)\right) \to \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\chi^{(1)}(\omega)\right) \to 0$$




$$\mathrm{Re}\left(\chi^{(1)}(\omega)\right) \to \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\chi^{(1)}(\omega)\right) \to 0$$

**损耗 ≠ 色散**

# 第2节作业②

请从非线性时域波动方程推导出三波耦合方程，推导过程中需写出每一步近似的依据。

## 非线性时域波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\overrightarrow{E^{NL}}+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\bullet\overrightarrow{E^{NL}}=-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{P^{NL}}}{\partial t^2}$$

## 三波耦合方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dE_3(z)}{dz}=\dfrac{2id_{eff}\,\omega_3{}^2}{k_3c^2}E_1(z)E_2(z)e^{i\Delta kz}\\[2ex]\dfrac{dE_1(z)}{dz}=\dfrac{2id_{eff}\,\omega_1{}^2}{k_1c^2}E_3(z)E_2^*(z)e^{-i\Delta kz}\\[2ex]\dfrac{dE_2(z)}{dz}=\dfrac{2id_{eff}\,\omega_2{}^2}{k_2c^2}E_3(z)E_1^*(z)e^{-i\Delta kz}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta k=k_1+k_2-k_3\\ \omega_3=\omega_1+\omega_2\end{cases}$$

# 第2节作业②

各项异性非线性时域波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\overrightarrow{E^{NL}}+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\bullet\overrightarrow{E^{NL}}=-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{P^{NL}}}{\partial t^2}$$

$\Downarrow$

近似1：均匀介质 $\boxed{\nabla\bullet\vec{E}=0}$

$$-\nabla^2\overrightarrow{E^{NL}}+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\bullet\overrightarrow{E^{NL}}=-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{P^{NL}}}{\partial t^2}$$

$\Downarrow$

近似2：时谐电磁场

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}\left(\vec{r},t\right)&=\sum_n\vec{E}_n\left(\vec{r}\right)e^{-i\omega_n t}\\ \overrightarrow{P^{NL}}\left(\vec{r},t\right)&=\sum_n\overrightarrow{P^{NL}}_n\left(\vec{r}\right)e^{-i\omega_n t}\end{aligned}}$$

$$\nabla^2\vec{E}_n\left(\vec{r}\right)+\frac{\omega_n^2}{\varepsilon_0 c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\bullet\vec{E}_n\left(\vec{r}\right)=-\frac{\omega_n^2}{\varepsilon_0 c^2}\overrightarrow{P^{NL}}_n\left(\vec{r}\right)$$

近似3：单色平面波与二阶非线性过程

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_1\left(\vec{r},t\right)&=E_1\left(z\right)e^{i\left(k_1 z-\omega_1 t\right)}\\ \vec{E}_2\left(\vec{r},t\right)&=E_2\left(z\right)e^{i\left(k_2 z-\omega_2 t\right)}\end{aligned}}$$

$$\frac{d^2E_3\left(z\right)}{dz^2}+2ik_3\frac{dE_3\left(z\right)}{dz}=-\frac{4d_{eff}\,\omega_3^2}{\varepsilon_0 c^2}E_1\left(z\right)E_2\left(z\right)e^{i\Delta kz}$$

近似4：缓变近似与三波耦合（无损耗）

$$\boxed{\left|\frac{d^2E_3\left(z\right)}{dz^2}\right|\ll\left|k_3\frac{dE_3\left(z\right)}{dz}\right|}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dE_3\left(z\right)}{dz}&=\frac{2id_{eff}\,\omega_3^2}{k_3c^2}E_1\left(z\right)E_2\left(z\right)e^{i\Delta kz}\\ \frac{dE_1\left(z\right)}{dz}&=\frac{2id_{eff}\,\omega_1^2}{k_1c^2}E_3\left(z\right)E_2^*\left(z\right)e^{-i\Delta kz}\\ \frac{dE_2\left(z\right)}{dz}&=\frac{2id_{eff}\,\omega_2^2}{k_2c^2}E_3\left(z\right)E_1^*\left(z\right)e^{-i\Delta kz}\end{aligned}\right.$$

# 第2节作业③

从小信号近似下的二次谐波电场表达式推导出二次谐波功率表达式，并根据以下参数，计算二次谐波的功率：

$$E_2(z)=\frac{id_{eff}\omega_2^{\ 2}}{k_2c^2}E_1^{\ 2}\bullet\frac{2}{\Delta k}e^{i\Delta kL/2}\sin(\Delta kL/2)$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(L)=\frac{8d_{eff}^{\ \ 2}\omega_2^{\ 2}}{\varepsilon_0 n_1^{\ 2}n_2c^3}\frac{P_1^2}{S}\frac{\sin^2(\Delta kL/2)}{\Delta k^2}$$

$$d_{eff}=20\ \mathrm{pm}\cdot\mathrm{V}^{-1},\ \lambda_2=\frac{2\pi c}{\omega_2}=500\ \mathrm{nm}$$

$$n_1=2.2,\ n_2=2.3,\ c\approx3\times10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\varepsilon_0\approx8.854\times10^{-12}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

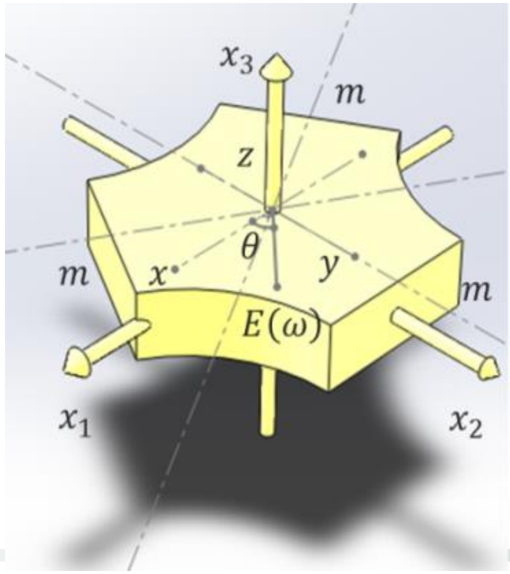
$$S=2\pi\ \mathrm{mm}^2,\ P_1=1\mathrm{W},\ \Delta kL=\pi$$

***P* 为功率，*S*为光斑很截面积** $\boxed{I_i=\frac{P_i}{S}}$ $\quad I_i=\frac{1}{2}n_i\varepsilon_0c|E_i|^2$ $\quad$ **$P_2\sim1.722*10^{-12}$**

# 第3节作业①

铌酸锂晶体（$LiNbO_3$）属于 3m对称性：一个yz对称平面和一个沿z轴的三次选择对称轴，请通过克莱门对称性和张量对称性操作，证明其二阶非线性系数矩阵为如下形式（哪些矩阵元为0，哪些矩阵元相等）：

$$\frac{1}{2}\chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (d_{31} = d_{15})$$




镜面操作（yz面）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad x' \to -x, y' \to y, z' \to z$$

对称操作

$$d_{i'j'k'} = (-1)^n d_{ijk} = d_{ijk}$$

根据晶体对称性的要求，包含一个$x'$或三个$x'$均为0，所以有

$$\boxed{d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{25} = d_{26} = d_{35} = d_{36} = 0}$$

（无论克莱门对称是否有效，该等式是成立的）

绕z轴120° 旋转操作

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x' \to -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' \to \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' \to z \end{cases}$$

# 第3节作业②

当入射电场为

$$\vec{E}=\begin{bmatrix}E_1(\omega)\\E_2(\omega)\\E_3(\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos\theta\cos\varphi\\-\cos\theta\sin\varphi\\\sin\theta\end{bmatrix}$$

求解非线性极化强度与电场的关系表达式

$$\overrightarrow{P^{(2)}}=\begin{bmatrix}P_1(2\omega)\\P_2(2\omega)\\P_3(2\omega)\end{bmatrix}=?$$

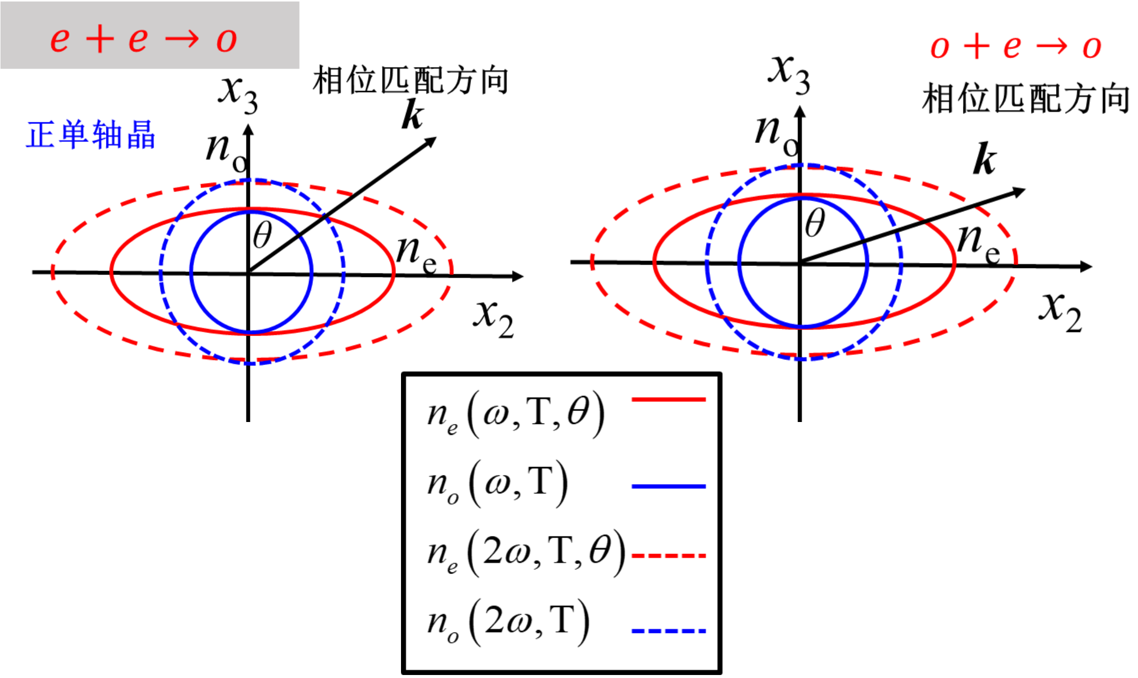
根据以下公式

$$\begin{bmatrix}P_1(2\omega)\\P_2(2\omega)\\P_3(2\omega)\end{bmatrix}=\varepsilon_0\begin{bmatrix}0&0&0&0&\chi_{15}&-\chi_{22}\\-\chi_{22}&\chi_{22}&0&\chi_{15}&0&0\\\chi_{31}&\chi_{31}&\chi_{33}&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1^{\,2}(\omega)\\E_2^{\,2}(\omega)\\E_3^{\,2}(\omega)\\2E_2(\omega)E_3(\omega)\\2E_2(\omega)E_3(\omega)\\2E_1(\omega)E_2(\omega)\end{bmatrix}$$

注意：O光和E光的电场表达式；矩阵不会让大家推导

# 第4节作业①

采用正单轴晶折射率曲面的x2-x3截面作图方式，可以确定倍频过程一类（e+e→o）和二类（e+o→o）相位匹配角，如下图所示：




请采用类似作图法，表示正单轴晶倍频过程的：

**1、一类匹配的非临界相位匹配；**

**2、二类匹配的非临界相位匹配；**

**3、双折射差（$n_e$和$n_o$的差值较小）不足以满足一类匹配；**

**4、仅支持一类匹配，但不支持二类匹配。**（纠正：存在一类匹配，不一定存在二类匹配，但存在二类匹配，一定存在一类匹配）

**注意**

- 首先要区分什么叫临界，什么叫非临界。
- 如果是负单轴晶？

# 第4节作业②

BBO(**3m** 点群)在倍频过程（$\omega$=532nm, 2$\omega$=266 nm）中的相关参数如下:
$d_{22}$=2.4pm/V;$d_{15}$=$d_{31}$=0.3pm/V;
$d_{33}$=0.4pm/V;
$n_e(\omega)$=1.5555, $n_o(\omega)$=1.6749;
$n_e(2\omega)$=1.6146, $n_o(2\omega)$=1.7571。

求解:

**1、一类相位匹配的匹配角θ、相位匹配时最大的有效非线性系数，以及对应的基频光电场分量;**

**2、二类相位匹配的匹配角θ、相位匹配时最大的有效非线性系数，以及对应的基频光电场（用列向量表示）；**

**3、简单对比一类和二类匹配的走离效应。**

**提示**:

1、根据主轴折射率确定一类和二类匹配的类型

2、找到对应公式计算匹配角θ

3、通过点群对称性，确定非线性系数矩阵，计算得到初步的有效非线性系数;

4、确定方位角，使非线性系数最大

5、由匹配角θ和方位角φ确定电场分量值。

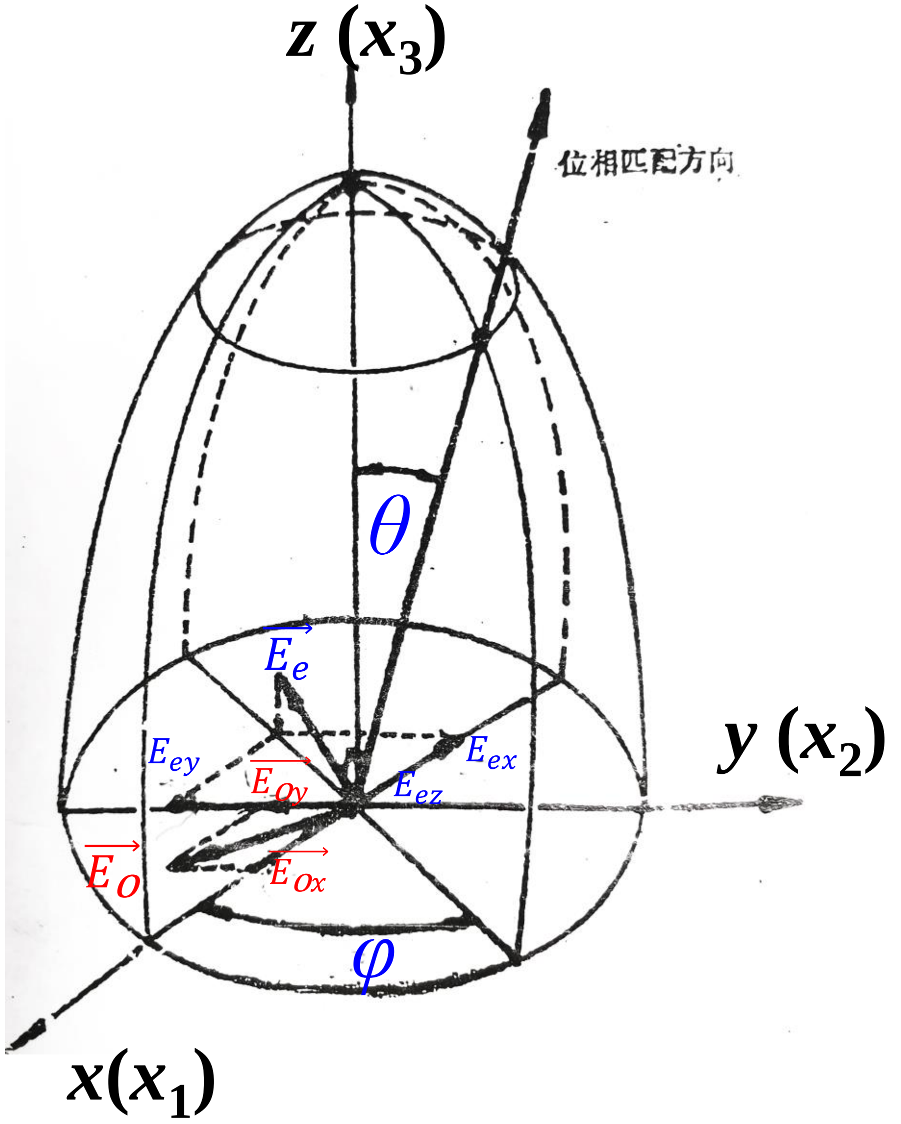
6、由走离效应公式，对比一类和二类匹配走离效应

# 第4节作业②

推导 KDP晶体（负单轴晶）在二次谐波产生过程中，一类（o+o→e）和二类(o+e→e)相位匹配的匹配角、走离角、和相应的有效非线性系数，并分析两种匹配情况下的最大有效非线性系数(假设**$d_{36}=3d_{14}$**)。

$$\chi^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&0&d_{14}&0&0\\0&0&0&0&d_{14}&0\\0&0&0&0&0&d_{36}\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E_{ox}\\E_{oy}\\E_{oz}\end{pmatrix}=E_o(\omega)\begin{pmatrix}\sin\varphi\\-\cos\varphi\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E_{ex}\\E_{ey}\\E_{ez}\end{pmatrix}=E_e(\omega)\begin{pmatrix}-\cos\theta\cos\varphi\\-\cos\theta\sin\varphi\\\sin\theta\end{pmatrix}$$




注意：有效非线性系数是与产生的二次谐波相关，而不只与非线性极化相关，所以还要再投影一次。

# 第4节作业②

$o + o \rightarrow e$

折射率

$$\begin{cases} n_e(\omega,\mathrm{T},\theta) = \dfrac{n_e(\omega,\mathrm{T})\, n_o(\omega,\mathrm{T})}{\left[n_o^{\ 2}(\omega,\mathrm{T})\sin^2\theta + n_e^{\ 2}(\omega,\mathrm{T})\cos^2\theta\right]^{1/2}} \\ n_o(\omega,\mathrm{T},\theta) = n_o(\omega,\mathrm{T}) \end{cases}$$

匹配角

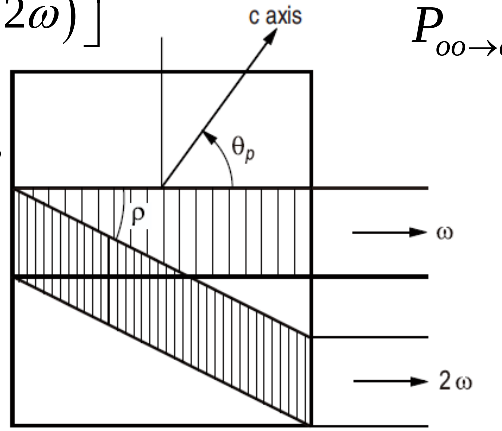
$$n_e(2\omega,\mathrm{T},\theta_p) = \frac{n_e(2\omega,\mathrm{T})\, n_o(2\omega,\mathrm{T})}{\left[n_o^{\ 2}(2\omega,\mathrm{T})\sin^2\theta_p + n_e^{\ 2}(2\omega,\mathrm{T})\cos^2\theta_p\right]^{1/2}} = n_o(\omega,\mathrm{T})$$

走离角

$$\tan\rho = \frac{1}{2} n_e^{\ 2}(2\omega,\theta)\sin 2\theta_p\left[\frac{1}{n_e^{\ 2}(2\omega)} - \frac{1}{n_o^{\ 2}(2\omega)}\right]$$

$$= \frac{n_o^{\ 2}(\omega)}{2}\left[\frac{1}{n_e^{\ 2}(2\omega)} - \frac{1}{n_o^{\ 2}(2\omega)}\right]\sin 2\theta_p$$

$$\approx \frac{\Delta n}{n}\sin 2\theta_p$$




有效非线性系数

$$P_{oo\to e}(2\omega) = 2\varepsilon_0 \begin{pmatrix} -\cos\theta_p\cos\varphi \\ -\cos\theta_p\sin\varphi \\ \sin\theta_p \end{pmatrix}^T \overleftrightarrow{\chi} \begin{bmatrix} \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin 2\varphi \end{bmatrix} E_o(\omega) E_o(\omega)$$

$$\boxed{d_{eff} = -d_{36}\sin 2\varphi\sin\theta_p}$$

# 第4节作业②

$o + e \rightarrow e$

**折射率**

$$\begin{cases} n_e(\omega,\mathrm{T},\theta) = \dfrac{n_e(\omega,\mathrm{T})\,n_o(\omega,\mathrm{T})}{\left[n_o^{\,2}(\omega,\mathrm{T})\sin^2\theta + n_e^{\,2}(\omega,\mathrm{T})\cos^2\theta\right]^{1/2}} \\ n_o(\omega,\mathrm{T},\theta) = n_o(\omega,\mathrm{T}) \end{cases}$$

**匹配角**

$$\frac{1}{2}\left[n_e(\omega,\mathrm{T},\theta_p) + n_o(\omega,\mathrm{T})\right] = n_e(2\omega,\mathrm{T},\theta_p)$$

**有效非线性系数**

$$P_{oe\to e}(2\omega) = 2\varepsilon_0 \begin{pmatrix} -\cos\theta_p\cos\varphi \\ -\cos\theta_p\sin\varphi \\ \sin\theta_p \end{pmatrix}^T \overleftrightarrow{\chi} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos\theta_p\sin 2\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\theta_p\sin 2\varphi \\ 0 \\ -\sin\theta_p\cos\varphi \\ \sin\theta_p\sin\varphi \\ \boxed{\cos\theta_p\cos 2\varphi} \end{bmatrix} E_o(\omega)E_e(\omega)$$

修正

$$\boxed{d_{eff} = \frac{1}{2}(d_{14}+d_{36})\sin 2\theta_p\cos 2\varphi}$$

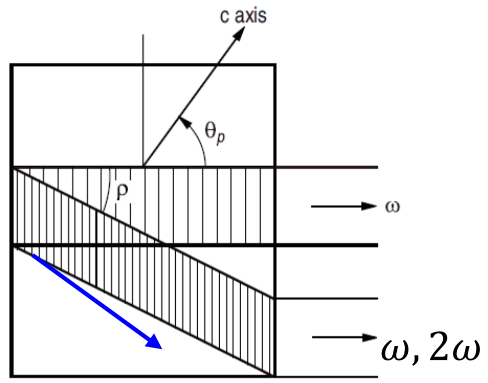
**走离角**

**倍频**

$$\tan\rho = \frac{1}{2}n_e^{\,2}(2\omega,\theta)\sin 2\theta_p\left[\frac{1}{n_e^{\,2}(2\omega)} - \frac{1}{n_o^{\,2}(2\omega)}\right]$$
$$= \frac{n_e^{\,2}(2\omega,\theta)}{2}\left[\frac{1}{n_e^{\,2}(2\omega)} - \frac{1}{n_o^{\,2}(2\omega)}\right]\sin 2\theta_p$$
$$\approx \frac{\Delta n}{n}\sin 2\theta_p$$

**基频**

$$\tan\rho = \frac{1}{2}n_e^{\,2}(\omega,\theta)\sin 2\theta_p\left[\frac{1}{n_e^{\,2}(\omega)} - \frac{1}{n_o^{\,2}(\omega)}\right]$$
$$= \frac{n_e^{\,2}(\omega,\theta)}{2}\left[\frac{1}{n_e^{\,2}(\omega)} - \frac{1}{n_o^{\,2}(\omega)}\right]\sin 2\theta_p$$
$$\approx \frac{\Delta n}{n}\sin 2\theta_p$$



# 第5节作业①

假设有效非线性系数为

$$d(z)=\begin{cases} d_a, z\in[n\Lambda, n\Lambda+\alpha\Lambda) \\ d_b, z\in[n\Lambda+\alpha\Lambda,(n+1)\Lambda) \end{cases} \quad \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

其傅里叶级数展开形式为

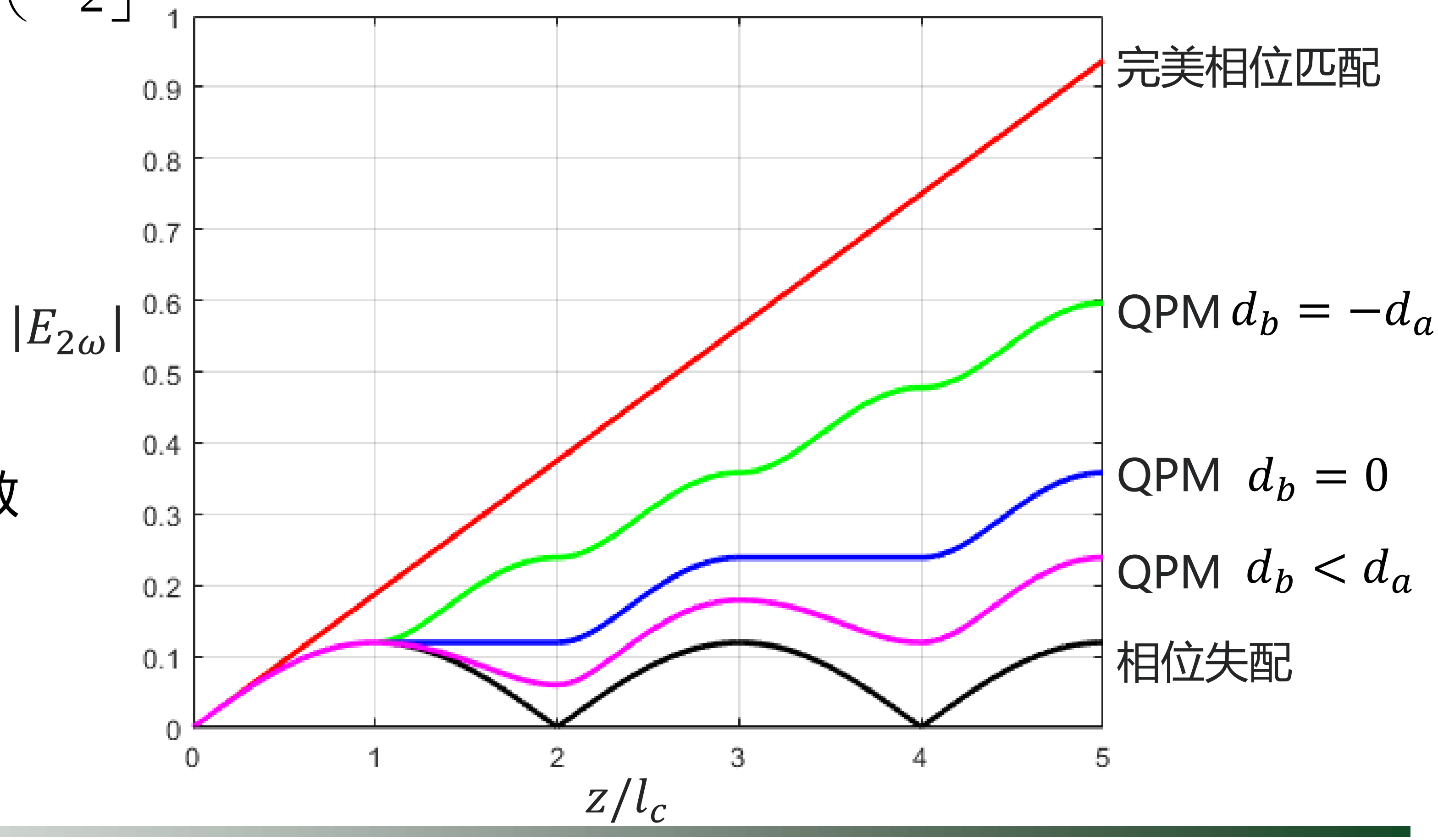
$$d(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(iG_m z),\quad G_m=\frac{2m\pi}{\Lambda}$$

$$c_m=\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} d(z)\exp(-iG_m z)dz$$

分别考虑以下三种情况，求解傅里叶系数$c_m$的表达式

$$d_b=-d_a, \alpha=\frac{1}{2};\quad d_b=0, \alpha=\frac{1}{2};$$

$$d_b=\frac{1}{2}d_a, \alpha=\frac{1}{4}$$



# 第5节作业①

假设晶体的二阶非线性系数为

$$d(z)=\begin{cases} d_a, z\in\left[n\Lambda,(n+1/2)\Lambda\right) \\ d_b, z\in\left[(n+1/2)\Lambda,(n+1)\Lambda\right) \end{cases}$$

其傅里叶展开

$$d(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(iG_m z)，\ G_m=\frac{2m\pi}{\Lambda}$$

求解傅里叶系数 $c_m$的表达式，并分别考虑 $d_a=d_{eff}$且$d_b=0$，和 $d_a=d_{eff}=-d_b$ 时， $c_m$的表达式

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} d(z)\exp(-iG_m z)dz \\
&= \frac{1}{\Lambda}\left[\int_0^{\Lambda/2} d_a\exp(iG_m z)dz + \int_{\Lambda/2}^{\Lambda} d_b\exp(iG_m z)dz\right] \\
&= \frac{d_a}{iG_m\Lambda}\left[\exp\left(i\frac{G_m\Lambda}{2}\right)-1\right]+\frac{d_b}{iG_m}\left[\exp(iG_m\Lambda)-\exp\left(i\frac{G_m\Lambda}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{id_a}{2m\pi}(\exp(im\pi)-1)-\frac{id_b}{2m\pi}(1-\exp(im\pi)) \\
&= \frac{i(d_a-d_b)}{2m\pi}(1-\exp(im\pi)) \\
&= \frac{i(d_a-d_b)}{2m\pi}(1-\cos(m\pi))
\end{aligned}$$

# 第6节作业①

从二次谐波耦合波方程出发（ $\Delta k \neq 0$ ）：

$$\begin{cases} \dfrac{dE_1(z)}{dz} = \dfrac{2id_{eff}\omega_1^2}{k_1c^2} E_2(z)E_1^*(z)e^{-i\Delta kz} \\ \dfrac{dE_2(z)}{dz} = \dfrac{id_{eff}\omega_2^2}{k_2c^2} E_1^2(z)e^{i\Delta kz} \end{cases}$$

采用以下变换：

$$\boxed{\begin{cases} E_1(z) = \left(\dfrac{2I}{n_1\varepsilon_0 c}\right)^{1/2} u_1(z)e^{i\varphi_1} \\ E_2(z) = \left(\dfrac{2I}{n_2\varepsilon_0 c}\right)^{1/2} u_2(z)e^{i\varphi_2} \end{cases}} \quad \boxed{\begin{cases} l = \left(\dfrac{n_2\varepsilon_0 c}{2I}\right)^{1/2} \dfrac{n_1 c}{2d_{eff}\omega_1} \\ \theta(z) = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz \\ \xi = z/l \end{cases}}$$

求解

$$\begin{cases} \dfrac{du_1(\xi)}{d\xi} = \\ \dfrac{du_2(\xi)}{d\xi} = \\ \dfrac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \end{cases}$$

并根据以下参数计算归一化距离$l$

$$d_{eff} = 20\ \mathrm{pm}\cdot\mathrm{V}^{-1},\ \lambda_1 = \frac{2\pi c}{\omega_1} = 1000\ \mathrm{nm},\ \langle P_1\rangle = 1\mathrm{W}$$

$$n_1 = 2.2,\ n_2 = 2.3,\ S = 2\pi\ \mathrm{mm}^2,\ \Delta t = 5\ \mathrm{ns},\ f = 20\mathrm{kHz}$$

$$\varepsilon_0 \approx 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{A\cdot s\cdot V^{-1}\cdot m^{-1}},\ c \approx 3\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

**脉冲光： E~$10^6$, $l$~1 cm**

**连续光：E~$10^4$ $l$~1m**

# 第6节作业②

1、由三波耦合方程组导出和频过程

$$E_1(z) \approx E_1(0), E_3(0) = 0, \Delta k = 0$$

的光场振幅表达式;

2、由三波耦合方程组导出差频（或光参量放大）过程

$$E_3(z) \approx E_3(0), E_2(0) = 0, \Delta k = 0$$

的光场振幅表达式;

3、简述和频与差频（或光参量放大）过程的不同之处

(光子能量转换、能量随传播距离的变化)

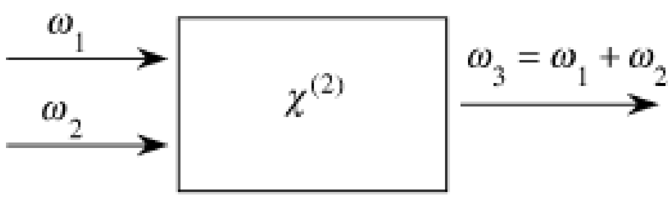
1、什么是光学参量振荡器?

2、阐述双共振和单共振参量振荡器的工作原理，并推导这两种参量振荡器的泵浦光阈值公式。

3、对比双共振和单共振两者的优缺点

# 第6节作业②

当满足准相位匹配条件时，小信号近似已经不再成立。下面考虑和频过程，假设$E_1$场保持不变，但$E_2$不满足小信号近似，随z变化，求解E2和E3的电场表达式




$$\begin{cases} \dfrac{dE_3(z)}{dz}=\dfrac{2id_{eff}\omega_3^{\ 2}}{k_3c^2}E_1(0)E_2(z) \\ \dfrac{dE_2(z)}{dz}=\dfrac{2id_{eff}\omega_2^{\ 2}}{k_2c^2}E_3(z)E_1^*(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2E_3(z)}{dz^2}=i\kappa_3E_1(0)\dfrac{dE_2(z)}{dz} \\ \dfrac{dE_2(z)}{dz}=i\kappa_2E_3(z)E_1^*(0) \end{cases}$$

定义和频增益系数，$g_{SF}$

$$\boxed{g_{SF}^{\ \ 2}=\kappa_3\kappa_2\left|E_1(0)\right|^2}$$

$$\frac{d^2E_3(z)}{dz^2}=-\kappa_3\kappa_2E_1^{\ 2}(0)E_3(z)$$

$$\frac{d^2E_3(z)}{dz^2}=-g_{SF}^{\ \ 2}E_3(z)$$

二阶微分方程一般解

$$\begin{cases} E_3(z)=C_3\cos(g_{SF}z)+D_3\sin(g_{SF}z) \\ E_2(z)=\dfrac{1}{i\kappa_3E_1(0)}\left[-C_3g_{SF}\sin(g_{SF}z)+D_3g_{SF}\cos(g_{SF}z)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_3(0)=C_3 \\ E_2(0)=\dfrac{D_3g_{SF}}{i\kappa_3E_1(0)} \end{cases}$$

# 第5节作业③

不考虑E3损耗，求解差频和光参量放大过程的场表达式，并给出E2(0)=0时的解。

（求解过程可参考和频尝试解的形式）

$$\begin{cases} \dfrac{dE_1(z)}{dz} = \dfrac{2id_{eff}\omega_1^2}{k_1c^2} E_3(0) E_2^*(z) e^{-i\Delta kz} \\ \dfrac{dE_2(z)}{dz} = \dfrac{2id_{eff}\omega_2^2}{k_2c^2} E_3(0) E_1^*(z) e^{-i\Delta kz} \end{cases}$$

---

$$\begin{cases} E_1(z) = \left[C_1 \cosh(g_{DF}z) + D_1 \sinh(g_{DF}z)\right] e^{-i\Delta kz/2} \\ E_2(z) = \left[C_2 \cosh(g_{DF}z) + D_2 \sinh(g_{DF}z)\right] e^{-i\Delta kz/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1(z) = \left(C_1 e^{g_{DF}z} + D_1 e^{-g_{DF}z}\right) e^{-i\Delta kz/2} \\ E_2(z) = \left(C_2 e^{g_{DF}z} + D_2 e^{-g_{DF}z}\right) e^{-i\Delta kz/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1(z) = \left\{ E_1(0)\cosh(g_{DF}z) + \left[\dfrac{i\Delta k}{2g_{DF}} E_1(0) + i\dfrac{\kappa_1}{g_{DF}} E_3(0) E_2^*(0)\right] \sinh(g_{DF}z) \right\} e^{-i\Delta kz/2} \\ E_2(z) = \left\{ E_2(0)\cosh(g_{DF}z) + \left[\dfrac{i\Delta k}{2g_{DF}} E_2(0) + i\dfrac{\kappa_2}{g_{DF}} E_3(0) E_1^*(0)\right] \sinh(g_{DF}z) \right\} e^{-i\Delta kz/2} \end{cases}$$

$$\boxed{\kappa_1 = \frac{2d_{eff}\omega_1^2}{k_1c^2}, \kappa_2 = \frac{2d_{eff}\omega_2^2}{k_2c^2}}$$

$$\boxed{g_{DF}^2 = \kappa_1\kappa_2 \left|E_3(0)\right|^2 - \frac{\Delta k^2}{4}}$$

---

$$\begin{cases} E_1(z) = \left[C_1 \cos(g_{DF}z) + D_1 \sin(g_{DF}z)\right] e^{-i\Delta kz/2} \\ E_2(z) = \left[C_2 \cos(g_{DF}z) + D_2 \sin(g_{DF}z)\right] e^{-i\Delta kz/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1(z) = \left(C_1 e^{ig_{DF}z} + D_1 e^{-ig_{DF}z}\right) e^{-i\Delta kz/2} \\ E_2(z) = \left(C_2 e^{ig_{DF}z} + D_2 e^{-ig_{DF}z}\right) e^{-i\Delta kz/2} \end{cases}$$

$$\boxed{\kappa_1 = \frac{2d_{eff}\omega_1^2}{k_1c^2}, \kappa_2 = \frac{2d_{eff}\omega_2^2}{k_2c^2}}$$

$$\boxed{g_{DF}^2 = \frac{\Delta k^2}{4} - \kappa_1\kappa_2 \left|E_3(0)\right|^2}$$

# 第十章 光孤子

# 习题课

教师：魏敦钊 （副教授）
邮箱：weidzh@mail.sysu.edu.cn
主页：spe.sysu.edu.cn/node/2973

# 第1节作业①

1. 假设有一个变换极限高斯脉冲，计算其脉冲半峰全宽为$\Delta \mathrm{t} = 10\ \mathrm{ns}, 10\mathrm{ps}, 100\mathrm{fs}$时，对应的频率带宽$\Delta v$、波长带宽$\Delta\lambda$和相干距离。（提示：$\lambda = 2\pi c/\omega = c/v$,计算时取中心波长$\lambda_0 = 1\mu\mathrm{m}$）（5分）
2. 有一根单模光纤，长度$L$=100km，$D$=17ps/nm·km。计算中心波长1550nm变换极限高斯脉冲（脉冲半峰全宽为$\Delta \mathrm{t} = 10\mathrm{ps}$）经过该单模光纤后的群时延。（5分）

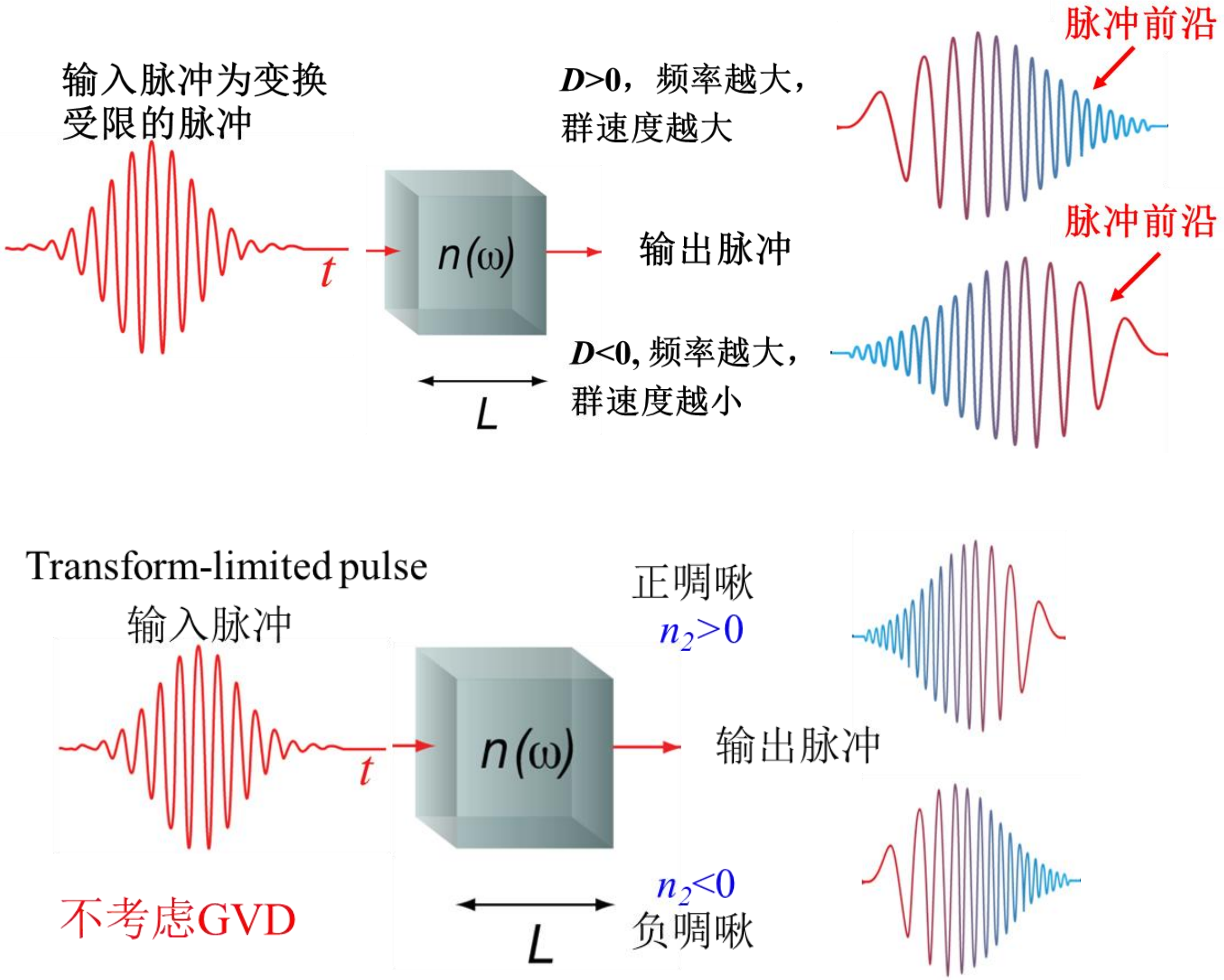
提示：

- 变换极限高斯脉冲 $\Delta v \Delta t = 0.441$
- 根据$\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{c}{v}$，求得$\Delta\lambda$
- 由$\Delta\tau(\lambda) = DL\Delta\lambda$，求得展宽后的脉冲

600 ps

# 第1节作业②

描述当$D$<0 且$n_2$<0时,群速度色散和自相位调制分别如何影响脉冲形貌。（要求：借助时域和频域光场分布图辅助说明）



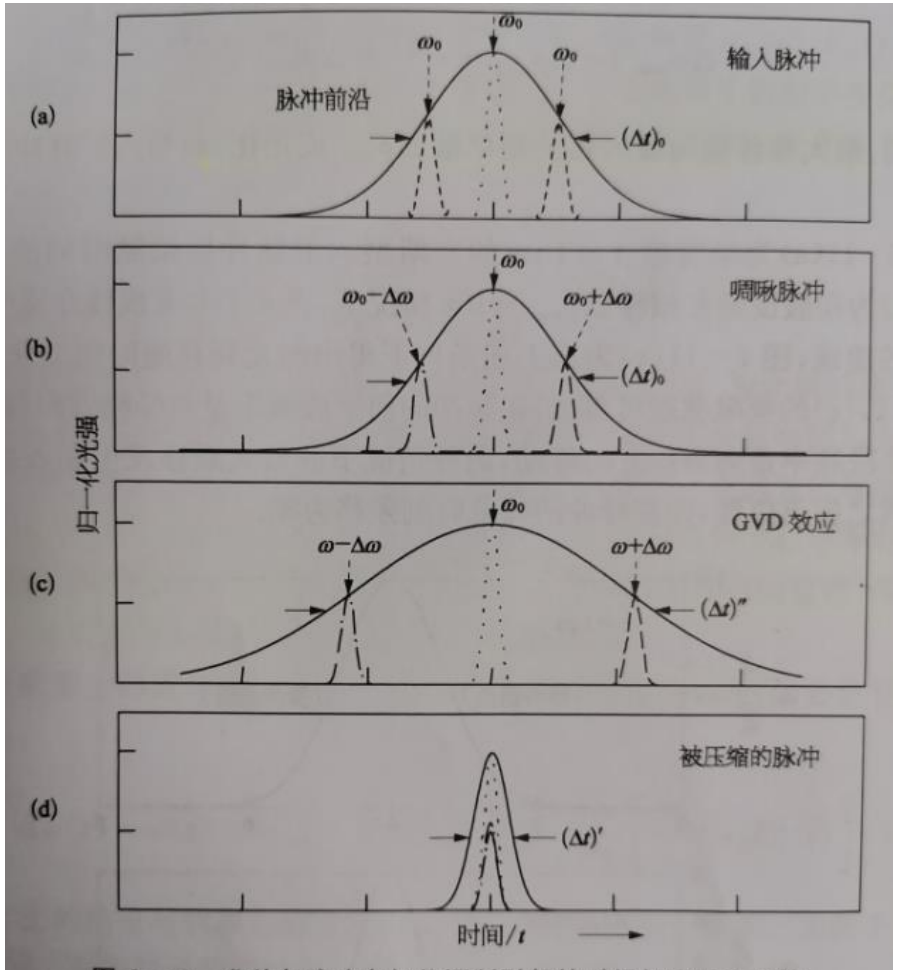



图 6-12 准单色脉冲自相位调制引起的时间加宽和再压缩

# 第1节作业③

由

$$E(z,t)=a(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$P^{(3)}(z,t)=P(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$\nabla^2 E-\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}$$

推导出平面波超短光脉冲的非线性波动方程

$$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a+i\frac{n_0 n_2\omega_0\varepsilon_0}{2}a=0$$

# 求解平面波超短光脉冲非线性波动方程

## 脉冲光电场包络表达式和及其产生的非线性极化

$$P^{(3)}=n_0{}^2\varepsilon_0{}^2 n_2 c|a|^2 a e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}=P(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$E(z,t)=a(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}=\frac{1}{2\pi}e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}\int d\Omega A(z,\Omega)e^{i\Omega t}$$

代入

$$\nabla^2 E-\frac{n_0{}^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i}{2\beta_0}\left[\beta^2(\omega)-\beta_0{}^2\right]A\right\}e^{i\Omega t}=\mu_0\frac{\partial^2 P(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}}{\partial t^2}$$

考虑

$$\begin{cases}\beta(\omega)\approx\beta_0+\beta_1\Omega+\frac{1}{2}\beta_2\Omega^2-\frac{i}{2}\alpha\\ \beta(\omega)+\beta_0\approx 2\beta_0\end{cases}$$

α为损耗系数

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\approx 0,\ \beta^2(\omega)=\frac{n_0{}^2\omega^2}{c^2},$$

$$\omega_0{}^2 P(z,t)\gg\omega_0\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}、\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}+i\left[\beta_1\Omega+\frac{1}{2}\beta_2\Omega^2-\frac{i}{2}\alpha\right]A\right\}e^{i\Omega t}=-\mu_0\omega_0{}^2 P(z,t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a+i\gamma|a|^2 a=0\qquad \gamma=\frac{n_0\varepsilon_0\omega_0 n_2}{2}$$

# 第1节作业④

假设 $n_2 > 0 \& \beta_2 < 0$ 由无损耗超短光脉冲非线性波动方程

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + i\gamma |a|^2 a = 0$$

通过变量替换

$$\tau = \frac{t - z/v_g}{T_0}$$ $T_0$为任意时间尺度因子

$$\xi = \frac{|\beta_2| z}{T_0^{\ 2}}$$ $\xi$为无量纲传输距离

$$a(z,\tau) = E_p u(z,\tau)$$ $E_p$为脉冲峰值场强

$$E_p^{\ 2} = \frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^{\ 2}} = \frac{2|\beta_2|}{n_0 \varepsilon_0 \omega_0 |n_2| T_0^{\ 2}}$$

证明

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + i\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + i|u|^2 u = 0$$

并证明以下结果是上述方程的解

$$u(\xi,\tau) = \mathrm{sech}(\tau)\exp\left(\frac{-i\xi}{2}\right)$$

# 第1节作业④

假设$n_2 > 0\&\beta_2 < 0$ 由无损耗非线性传播方程

$$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+i\gamma|a|^2 a=0$$

和变量替换

$$\tau=\frac{t-z/v_g}{T_0}$$ $T_0$为任意时间尺度因子

$$\xi=\frac{|\beta_2|z}{T_0^2}$$ $\xi$为无量纲传输距离

$$a(z,\tau)=E_p u(z,\tau)$$ $E_p$为脉冲峰值场强

$$E_p^2=\frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2}=\frac{2|\beta_2|}{n_0\varepsilon_0\omega_0|n_2|T_0^2}$$

证明
$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+i\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+i|u|^2 u=0$$

并证明以下结果是上述方程的解

$$u(\xi,\tau)=\text{sech}(\tau)\exp\left(\frac{-i\xi}{2}\right)$$

关键

$$\frac{\partial u}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial \tau},\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\to\frac{\partial u}{\partial \tau},\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to ?\ ?$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}=-\frac{1}{T_0 v_g}\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{|\beta_2|}{T_0^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{1}{T_0}\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{T_0}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t}=\frac{1}{T_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$$

# 第1节作业⑤

由

$$E(z,t)=a(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}u(x,y)$$

$$P^{(3)}=P(x,y,z)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$\nabla_T{}^2 E+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}$$

推导出波导中超短光脉冲的非线性波动方程

$$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a+i\kappa|a|^2 a=0$$

$$\boxed{\kappa=\frac{\omega_0 n_0 n_2 \varepsilon_0}{2}\frac{\iint |u|^4\,dxdy}{\iint |u|^2\,dxdy}}$$

# 第1节作业⑤

将非线性极化看做微扰项，先求解$\delta n_{NL}=0$的传播常数，波导中的电场（单色）可以表示成：

$$E(\omega)=u(x,y,\omega)e^{i(\omega t-\beta z)}$$

代入线性波动方程

$$\nabla_T{}^2E+\frac{\partial^2E}{\partial z^2}-\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=0$$

得到

$$\nabla_T{}^2u+\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2-\beta^2\right)u=0$$

这是波导中的线性传播方程。由于$u_r(x,y,\omega)$依赖于空间坐标，因此，第二项不再满足$\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega^2-\beta^2=0$。需结合第一项，修正波导中的传播常数$\beta$。对波动方程乘以$u^*$，并对$x$和$y$积分。

$$\iint u^*\nabla_T{}^2u\,dxdy=\iint\nabla_T\cdot\left(u^*\nabla_Tu\right)dxdy-\iint\left|\nabla_Tu\right|^2dxdy$$

由散度理论，积分边界为无穷远处，$u\to 0$

$$\iint\nabla_T\cdot\left(u^*\nabla_Tu\right)dxdy=\int u^*\nabla_Tu\cdot\hat{n}dS=0$$

$$\Downarrow$$

$$\iint u^*\nabla_T{}^2u\,dxdy+\iint\left(\mu_0\frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2-\beta^2\right)|u|^2dxdy=0$$

$$\Downarrow$$

$$-\iint\left|\nabla_Tu\right|^2dxdy+\iint\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2-\beta^2\right)|u|^2dxdy=0$$

$$\Downarrow$$

$$\beta^2(\omega)=\frac{\iint\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2|u|^2-\left|\nabla_Tu\right|^2\right)dxdy}{\iint|u|^2dxdy}$$

$$\boxed{\left|\nabla_Tu\right|^2>0\Rightarrow\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r{}^{cladding}<\beta^2(\omega)<\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r{}^{core}}$$

# 第1节作业⑤

为了减小非线性传播过程中导致的横向模式不稳定，波导结构常被设计常单模波导（仅支持一个模式）；另一方面，忽略空间的自聚焦效应。因此，下面考虑单模波导中的非线性传播方程。(**如果是多模式呢？**)

$$E(z,t)=a(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}u(x,y)$$

$$P^{(3)}=P(x,y,z)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

脉冲包络傅里叶变换

$$A(z,\Omega)=\int a(z,t)e^{-i\Omega t}dt,\quad \Omega=\omega-\omega_0$$

$$a(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int A(z,\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega,\quad \Omega=\omega-\omega_0$$

$$\nabla_T{}^2 E+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\nabla_T{}^2-\beta_0{}^2-2i\beta_0\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\omega^2\frac{\varepsilon_r}{c^2}\right\}Aue^{i(\Omega+\omega_0)t-i\beta_0 z}=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla_T{}^2 u+\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2-\beta^2\right)u=0,\ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\to 0}$$

$$\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\beta^2-\beta_0{}^2-2i\beta_0\frac{\partial}{\partial z}\right\}Au=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}e^{-i(\Omega+\omega_0)t+i\beta_0 z}$$

# 第1节作业⑤

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi}\left\{\beta^2-\beta_0{}^2-2i\beta_0\frac{\partial}{\partial z}\right\}Aue^{i(\Omega+\omega_0)t}e^{-i\beta_0 z}=\mu_0\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases}\beta(\omega)\approx\beta_0+\beta_1\Omega+\frac{1}{2}\beta_2\Omega^2-\frac{i}{2}\alpha\\ \beta(\omega)+\beta_0\approx 2\beta_0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi}\left\{i\left(\beta_1\Omega+\frac{1}{2}\beta_2\Omega^2-\frac{i}{2}\alpha\right)A+\frac{\partial A}{\partial z}\right\}ue^{i\Omega t}=\frac{i\mu_0}{2\beta_0}\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}e^{-i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$a(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int A(z,\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega,\quad \Omega=\omega-\omega_0$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a\right\}u=\frac{i\mu_0}{2\beta_0}\frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2}e^{-i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$\begin{aligned}P^{(3)}&=P(x,y,z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}\\&=n_0{}^2\varepsilon_0{}^2 n_2 c|a|^2|u|^2 uae^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a\right)\cdot\iint|u|^2dxdy+\frac{i\varepsilon_0\omega_0 n_0 n_2}{2}|a|^2a\cdot\iint|u|^4dxdy=0$$

**乘以u* 并两边对横向积分**

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial a}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}a+i\kappa|a|^2a=0$$

$$\kappa=\frac{\omega_0 n_0 n_2\varepsilon_0}{2}\frac{\iint|u|^4dxdy}{\iint|u|^2dxdy}$$

**描述波导中光脉冲的传播方程**

# 谢谢大家！