

电动力学

第二章：镜像法与 Green 函数法

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

April 18, 2019

镜像法:

问题:

倘若求解电场的区域内分布有一个或几个点电荷, 如何求解静电势满足的 Poisson 方程?

答案是“**镜像法**”.

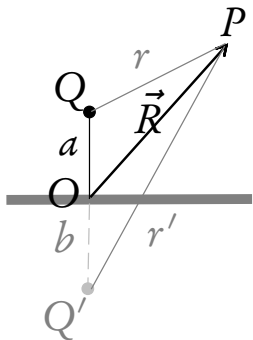
镜像法适用的情形是:

- 电场区域内存在一个或者少数几个点电荷;
- 区域边界是导体.

镜像法的要点是:

用处于区域外的一个或者几个假想的点电荷(称为镜像电荷)替代区域边界处的导体表面上的感应电荷分布, 保证区域内的静电势的边界条件.

典型例题 (一):



例: 接地无限大平面导体板上方空间中有一个点电荷 Q , 求空间中的电场.

解: 导体板上方空间中的电场可以看做是由点电荷 Q 和镜像点电荷 Q' 共同激发的.

如此, 场点 P 处的静电势为:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right)$$

以 Q 到导体板上的投影点 O 作为坐标原点, 建立直角坐标系, 则:

$$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad \vec{a} = a\hat{k}, \quad \vec{b} = -b\hat{k}$$

注意到:

$$r = |\vec{R} - \vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}, \quad r' = |\vec{R} - \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + b)^2}$$

场点 P 处的电势进一步表为:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} + \frac{Q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + b)^2}} \right]$$

由于导体板接地, 其电势约定为零: $\varphi(P)\Big|_{z=0} = 0$, 所以:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + b^2}} = -\frac{Q}{Q'}$$

此式应对导体板上的任一点 (即任意的 x, y 坐标) 都成立. 因此有:

$$b = a, \quad Q' = -Q$$

本题的结论是:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right]$$

① 导体板表面上的感应电荷面密度计算如下:

$$\begin{aligned}\sigma' &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right]_{z=0} \\ &= -\frac{aQ}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

感应电荷总量为:

$$\int \sigma' ds = -\frac{aQ}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = -Q = Q'$$

典型例题 (二):

例: 真空中有一个半径为 R 的接地导体球. 距球心为 a ($a > R$) 处有一点电荷 Q . 求球外空间中的电势分布.

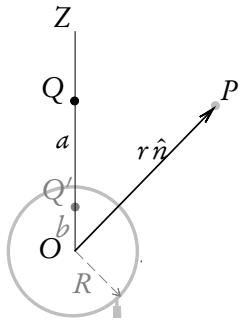
解:

假设可以用球内一个镜像电荷 Q' 来替代球面上感应电荷对于空间电场的作用.

由对称性, Q' 应放置在 OQ 连线上, Q' 到球心的距离为 b ($b < R$). 取 OQ 连线为 Z 轴, 其单位基矢为 \hat{k} .

球外空间任一点 P 处的静电势为:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\mathbf{r}\hat{n} - a\hat{k}|} + \frac{Q'}{|\mathbf{r}\hat{n} - b\hat{k}|} \right]$$



注意到球面上各点的电势为零，我们有：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Q}{|R\hat{n} - a\hat{k}|} + \frac{Q'}{|R\hat{n} - b\hat{k}|} \\ &= \frac{Q/R}{|\hat{n} - (a/R)\hat{k}|} + \frac{Q'/b}{|(R/b)\hat{n} - \hat{k}|} \\ &= \frac{Q/R}{\sqrt{1 - 2(a/R)\cos\theta + (a/R)^2}} + \frac{Q'/b}{\sqrt{(R/b)^2 - 2(R/b)\cos\theta + 1}} \end{aligned}$$

式中 $\cos\theta = \hat{n} \cdot \hat{k}$ 。上式对所有可能的 θ 角成立，意味着：

$$\frac{a}{R} = \frac{R}{b}, \quad \frac{Q}{R} + \frac{Q'}{b} = 0$$

解此代数方程组，即得镜像电荷的大小和位置：

$$Q' = -\frac{R}{a}Q, \quad b = \frac{R^2}{a}$$

所以，接地导体球球外空间 ($r \geq R$) 的静电势分布为：

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\hat{r}\hat{n} - a\hat{k}|} - \frac{RQ/a}{|\hat{r}\hat{n} - (R^2/a)\hat{k}|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{RQ/a}{\sqrt{r^2 + (R^2/a)^2 - 2r(R^2/a)\cos\theta}} \right]\end{aligned}$$

导体球表面上的感应电荷面密度计算如下：

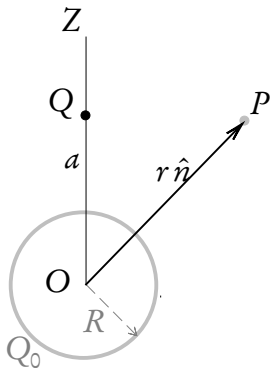
$$\sigma' = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{R - (a^2/R)}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}} \right]$$

感应电荷总量为：

$$\int \sigma' ds = \frac{QR^2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{R - (a^2/R)}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}} \right] \sin\theta d\theta = -\frac{RQ}{a} = Q'.$$

典型例题 (三):

例: 如上例, 但导体球不接地而带电量 Q_0 . 求球外电势分布, 并求点电荷 Q 所受的静电力.



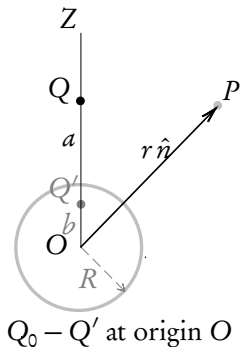
解:

静电平衡状态达到后,

- 导体球面为等势面;
- 导体球面所发出的电场强度总通量为 Q_0/ϵ_0 .

分析:

- ① 在导体球内放置镜像电荷 Q' , 其位置和大小如前例, $b = R^2/a$, $Q' = -QR/a$, 则导体球表面上电势处处为零;
- ② 进一步在导体球心放置一个假想的点电荷 $(Q_0 - Q')$, 则导体球所带总电荷为 Q_0 (正如期待), 同时导体球面仍为等势面, 其电势为 $(Q_0 - Q')/4\pi\epsilon_0 R$.

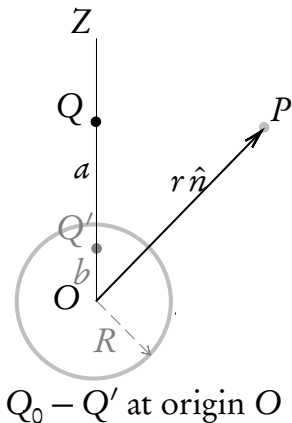


所以, 球外空间任一场点 P 处的静电势为:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_0 + (RQ/a)}{r} + \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{RQ/a}{\sqrt{r^2 + (R^2/a)^2 - 2r(R^2/a) \cos \theta}} \right]$$

现在求点电荷 Q 所受的电场力。

因为空间中的电场可以看做是由点电荷 Q 、镜像电荷 Q' 和位于导体球心的点电荷 $(Q_0 - Q')$ 共同激发，所以 Q 所受的电场力等于镜像电荷 Q' 和球心处的额外点电荷 $(Q_0 - Q')$ 对其施加的库仑力。

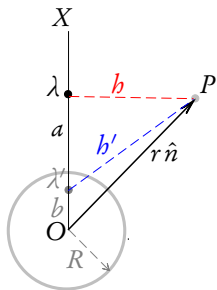


Q 所受的电场力方向沿 Z -轴，大小为：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(Q_0 - Q')}{a^2} + \frac{QQ'}{(a - b)^2} \right]$$

只要 Q 距离球面足够近，它就可能受到导体球的吸引力。

典型例题 (四):



例: 半径为 R 的无限长导体圆柱外部空间中存在着与之平行的无限长带电直线, 其电荷线密度为 λ , 到导体圆柱中心轴线的距离为 a ($a > R$). 计算导体圆柱外部空间的电势分布.

解: 假设可以用处于导体圆柱内部的一根无限长镜像线电荷 λ' 替代圆柱面上的感应电荷. 由对称性, λ' 应位于 $O\lambda$ 连线, 设其到 O 的距离为 b .

按电像法, 导体圆柱外场点 P 处的电势为:

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln b - \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln b' \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln |r\hat{n} - a\hat{i}| - \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln |r\hat{n} - b\hat{i}|\end{aligned}$$

即:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\lambda \ln(r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta) + \lambda' \ln(r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)]$$

式中 $\theta = \cos^{-1}(\hat{n} \cdot \hat{i})$. 静电平衡状态达到后, 导体圆柱面是等势面: $\varphi(P)|_{r=R} = C$.

不过, 由于对数函数的出现, 这个条件很难使用. 我们改用另一静电平衡性质: 导体外部空间的电力线与导体表面垂直, 即:

$\partial_\theta \varphi(P)|_{r=R} = 0$, 其显式为:

$$\frac{a\lambda}{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta} + \frac{b\lambda'}{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta} = 0$$

或者等价地,

$$\frac{(\lambda/a)}{1 + (R/a)^2 - 2(R/a) \cos \theta} + \frac{(\lambda'b/R^2)}{1 + (b/R)^2 - 2(b/R) \cos \theta} = 0$$

此式对导体圆柱面上的所有地点 (即对所有可能的 θ 角) 都成立. 所以,

$$b = R^2/a, \quad \lambda' = -\lambda.$$

导体圆柱外部空间的电势分布最终求得为:

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}{r^2 + (R^2/a)^2 - 2r(R^2/a) \cos \theta} \right]$$

式中 $R \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

❶ 显然, 导体圆柱面本身是等势面, 其电势的具体值为:

$$\varphi(r, \theta) \Big|_{r=R} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/R)$$

作业:

- ① 半径为 R 的导体球外充满了均匀绝缘介质 ϵ , 导体球接地, 离球心为 a 处 ($a > R$) 置一点电荷 Q . 试使用分离变量法求空间各点的静电势分布, 并验证所得结果与镜像法结果相同.
- ② 空心导体球的内外半径分别为 R_1 和 R_2 (约定 $R_1 < R_2$), 其携带的总电荷量为 Q . 现在球内离球心距离为 a ($a < R_1$) 的地点放置一个点电荷 q . 请使用镜像法计算导体球壳内外空间的静电势分布.
- ③ 有一点电荷 Q 位于两个相互垂直的接地导体板所围成的直角空间内, 其到两个导体板的距离分别为 a 和 b . 求此空间的静电势分布.

Green 函数:

一个处于 \vec{x}' 点上的单位点电荷所激发的电势 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 称为静电场的 Green 函数.

静电场 Green 函数服从如下 Poisson 方程:

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

单位点电荷的电荷体密度表为 $\rho(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$.

考虑包含源点 \vec{x}' 在内的空间区域 V , 其边界面记为 S .

- 若 $G(\vec{x}, \vec{x}')|_S = 0$, 则称其为第一类边值问题的 Green 函数.
- 若 $\partial_n G(\vec{x}, \vec{x}')|_S = -1/\epsilon_0$, 则称其为第二类边值问题的 Green 函数.

几种典型区域的 Green 函数:

1. 无界空间的 Green 函数:

位于 \vec{x}' 点上的单位点电荷在无界空间激发的静电势为,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}$$

注意到

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

我们有 $\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')/\epsilon_0$, 且:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0$$

故此处定义的 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 符合无界空间第一类边值问题 Green 函数的定义.

几种典型区域的 Green 函数(二):

2. 上半空间的 Green 函数: 无限大的导体平面存在时空间区域将被划分为上半空间 ($z \geq 0$) 与下半空间 ($z < 0$) 两部分. 以导体平面为 $z=0$ 的 XY 面、以导体平面的法线为 Z 轴建立直角坐标系, 则上半空间的 Green 函数为,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

式中 $\vec{x} = (x, y, z)$ 和 $\vec{x}' = (x', y', z')$ 分别是场点与源点的坐标. 显然, 此 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 除满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')/\epsilon_0$$

之外, 还满足边界条件:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') \Big|_{z=0} = 0.$$

几种典型区域的 Green 函数 (三):

Green 函数用柱坐标表达:

倘若取柱坐标, 则场点、源点的坐标可以重新表为 $\vec{x} = (r, \phi, z)$ 和 $\vec{x}' = (r', \phi', z')$.

注意到直角坐标与柱坐标之间的变换关系,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad x' = r' \cos \phi', \quad y' = r' \sin \phi',$$

可以将上半空间的 Green 函数重新表示为:

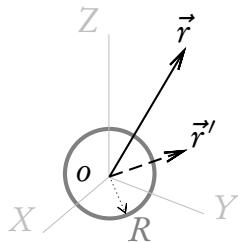
$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 + z'^2 - 2zz' - 2rr' \cos(\phi - \phi')}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 + z'^2 + 2zz' - 2rr' \cos(\phi - \phi')}} \right]$$

几种典型区域的 Green 函数 (四):

3. 球外空间的 Green 函数:

设半径为 R 的球面将空间划分为球内、球外两个区域. 球外空间的 Green 函数就是位置矢量为 \vec{r}' ($r' > R$) 的单位点电荷在球外空间激发的静电势. 按照电像法,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{(R/r')}{|\vec{r} - (R/r')^2 \vec{r}'|} \right]$$



显然,

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'),$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{r=R} = 0.$$

几种典型区域的 Green 函数 (五):

设 \vec{r} 与 \vec{r}' 之间的夹角为 Θ , $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \Theta$. 从数学物理方法知:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \Theta)$$

这里 $r_{>}(r_{<})$ 是 r 与 r' 中的较大者(较小者), 以及:

$$P_l(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

利用此二恒等式, 可以将球外空间的 Green 函数进一步写为:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{(2l+1)} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{r_{>}^{l+1} r_{<}^{l+1}} \right] \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

数学附录:

$Y_{lm}(\theta, \phi)$ 称为球谐函数. 其定义如下:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

前述公式

$$P_l(\cos \Theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

称为球谐函数的加法公式. 它在物理学的许多领域, 包括在电动力学和量子力学中皆有重要应用. 显然, 它是如下恒等式的推广:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \vec{n} \cdot \vec{n}' \\ &= \left[\vec{k} \cos \theta + \vec{i} \sin \theta \cos \phi + \vec{j} \sin \theta \sin \phi \right] \\ &\quad \cdot \left[\vec{k} \cos \theta' + \vec{i} \sin \theta' \cos \phi' + \vec{j} \sin \theta' \sin \phi' \right] \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

Green 函数法求解静电边值问题:

现在讨论运用 Green 公式求解静电 Poisson 方程 $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon$ 及其边值问题的具体方法.

回忆第二格林公式,

$$\int_V \Phi \nabla'^2 \Psi d^3x' = \int_V \Psi \nabla'^2 \Phi d^3x' + \oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n'} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right) ds'$$

若在此式中取 $\Psi(\vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$, $\Phi(\vec{x}') = \varphi(\vec{x}')$, 则:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \int_V G(\vec{x}', \vec{x}) \rho(\vec{x}') d^3x' \\ &\quad + \epsilon_0 \oint_S \left[G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} \right] ds' \end{aligned}$$

Green 函数法求解静电边值问题 (二):

① 在第一类边值问题中,

$$G(\vec{x}', \vec{x}) \Big|_S = 0$$

所以, 第一类边值问题中静电势的解是:

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}', \vec{x}) \rho(\vec{x}') d^3x' - \epsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} ds'.$$

② 在第二类边值问题中,

$$\frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} \Big|_S = -\frac{1}{\epsilon_0 S}$$

所以, 第二类边值问题中静电势的解是:

$$\varphi(\vec{x}) = \langle \varphi \rangle_S + \int_V G(\vec{x}', \vec{x}) \rho(\vec{x}') d^3x' + \epsilon_0 \oint_S G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} ds'.$$

举例:

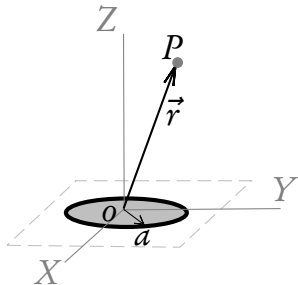
例: 在无限大导体平面上存在一半径为 a 的绝缘环, 环内导体板的电势为 V_0 , 环外导体板的电势为零. 求上半空间的电势分布.

解: 上半空间无电荷分布, 且 $z=0$ 平面上的电势为已知, 所以这是 Laplace 方程的第一类边值问题. 其解为:

$$\varphi(P) = -\epsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'} ds'$$

式中的边界面 S 是 $z'=0$ 的无限大平面, 法线沿 Z 轴负向, 且:

$$\varphi(\vec{r}') \Big|_S = \begin{cases} V_0, & \text{若 } r' < a; \\ 0, & \text{若 } r' > a. \end{cases}$$



于是，场点 P 处的电势进一步表为：

$$\varphi(P) = \epsilon_0 V_0 \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\partial G(r', \phi', z'; r, \phi, z)}{\partial z'} \bigg|_{z'=0}$$

上半空间第一类边值问题的 Green 函数用柱坐标写为：

$$\begin{aligned} G(r', \phi', z'; r, \phi, z) \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 + z'^2 - 2zz' - 2rr' \cos(\phi - \phi')}} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 + z'^2 + 2zz' - 2rr' \cos(\phi - \phi')}} \right] \end{aligned}$$

从而，

$$\frac{\partial G(r', \phi', z'; r, \phi, z)}{\partial z'} \bigg|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{[r^2 + z^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}}$$

结合上页最后一式与第一式，即得上半空间的静电势分布：

$$\varphi(r, \phi, z) = \frac{V_0}{2\pi} \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{[r^2 + z^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}}$$

设 $r^2 + z^2 \gg a^2$ ，我们有：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[r^2 + z^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} \\ & \approx \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \\ & \quad + \frac{15}{8} \frac{[r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')]^2}{(r^2 + z^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

利用此式，即可求得上半空间远场区电势分布的近似表达式：

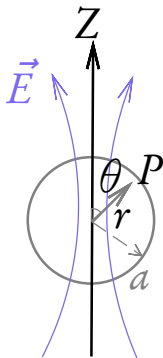
$$\varphi(r, \phi, z) \approx \frac{V_0}{2} \frac{a^2 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{r^2 + z^2} + \frac{15}{8} \frac{r^2 a^2}{(r^2 + z^2)^2} \right]$$

例： 半径为 a 的接地导体球置于均匀外电场 \vec{E}_0 中，求电势分布和导体表面上的电荷面密度。

解： 静电平衡达到后导体球体内及表面上各处电势相等。因导体球接地，我们有：

$$\varphi(r, \theta, \phi) = 0, \quad 0 \leq r \leq a.$$

所以，只需要求解导体球体外空间 V 中的静电势分布。



球外空间 V 中无自由电荷分布,

$$\rho(r', \theta', \phi') = 0, \quad a < r' < \infty$$

V 的边界 S 由两部分构成: 一部分是半径为 a 导体球表面 S_1 , 另一部分是半径 $b \rightarrow \infty$ 的球面 S_2 . 电势分布在 S_1 上处处为零, 但在 S_2 上它应为均匀外电场 \vec{E}_0 激发的静电势:

$$\varphi_\infty(b, \theta', \phi') = -E_0 b \cos \theta, \quad b \rightarrow \infty.$$

根据第一类边值问题的 Green 函数方法,

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}', \vec{x}) \rho(\vec{x}') d^3x' - \epsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial n'} ds'.$$

导体球外部空间 V 中的静电势分布应按下式计算:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = -\epsilon_0 \oint_{S_2} \varphi_{S_2}(b, \theta', \phi') \left[\frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial r'} \right]_{r' \rightarrow b} \cdot b^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \Big|_{b \rightarrow \infty}$$

注意到区域 V 的外边界面 S_2 位于无穷远, 球外空间中的 Green 函数应该替换为内外半径分别为 a 和 $b \rightarrow \infty$ 的球壳空间的格林函数¹:

$$G(\vec{x}', \vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')}{(2l+1)[1 - (a/b)^{2l+1}]} \cdot \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

式中 $a < r < \infty$ 且 $r' \rightarrow b \sim \infty$. 于是,

$$\left. \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{x})}{\partial r'} \right|_{r' \rightarrow b} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \frac{1}{b^{l+2}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

注意到球谐函数与勒让德多项式的关系:

$$Y_{n0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos \theta)$$

¹J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, P122.

S_2 上的静电势边界条件通过球谐函数可以重新表达为:

$$\varphi_{S_2}(b, \theta', \phi') = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 b Y_{10}^*(\theta', \phi')$$

将 φ_{S_2} 和 $\partial G / \partial r' |_{S_2}$ 的表达式代入到前述静电势的计算公式中, 可得:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \phi) = & -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) b^{1-l} \cdot Y_{lm}^*(\theta, \phi) \\ & \cdot \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' Y_{lm}(\theta', \phi') Y_{10}^*(\theta', \phi') \end{aligned}$$

利用球谐函数的正交归一条件知:

$$\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' Y_{lm}(\theta', \phi') Y_{10}^*(\theta', \phi') = \delta_{l1} \delta_{m0}$$

所以在导体球的外部空间 ($a \leq r < \infty$),

$$\varphi(r, \theta, \phi) = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) Y_{10}^*(\theta, \phi)$$

或者等价地,

$$\varphi(r, \theta, \phi) = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

正如对称性所暗示的, 这个电势分布具有“以外电场方向为对称轴的轴对称性”.

导体球表面上的自由电荷面密度计算如下:

$$\sigma_f = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

作业:

- ① 一半径为 R 的球面, 在球坐标 $0 < \theta < \pi/2$ 的上半球面上电势为 V (常数), 在球坐标 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的下半球面上电势为 $-V$. 请使用 Green 函数法计算空间各点的电势分布.
- ② 在介电常数为 ϵ_1 的均匀介质球的球心放置一自由电偶极子 \vec{p}_f , 球外充满了另一种线性介质 (设其介电常数为 ϵ_2). 请使用 Green 函数法求空间各点的电势和极化电荷分布.
- ③ 在均匀外电场 \vec{E}_0 中放置一带均匀电荷体密度 ρ_f 的绝缘介质球, 设其电容率为 ϵ . 请使用 Green 函数法计算空间各点的静电势分布.