

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限: 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^2(1+x^2)} dx$; 2. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$; 3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$;

4. 求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx$, 并求此积分.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1. 设 $u(x, y) = \ln \sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $du|_{(1,2)}$.

2. 已知 $f(x, y, z) = 2xy - z^2$ 及点 $A(2, -1, 1), B(3, 1, -1)$, 求函数 $f(x, y, z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数, 并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 给出, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1. 已知点 $A(2, 2, 2), B(4, 4, 2), C(4, 2, 4)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 的夹角.

2. 求经过直线 $L_1: \begin{cases} x+y=0, \\ x-y-z-2=0, \end{cases}$ 且平行于直线 $L_2: x=y=z$ 的平面方程.

五.(7 分)求函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的极值.

六.(12 分)设函数 $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求(1)函数的单调区间于极值点;(2)函数的凹凸区间与拐点;(3)函数的渐近线.

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1. 求证: $1 + x \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 求证:

(1) 存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得 $f(\alpha) = 1 - \alpha$;

(2) 存在两个不同的点 $\xi \in (0, 1), \eta \in (0, 1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.