

# 第一章 电磁现象的普遍规律

在本章中,我们把电磁现象的实验定律总结提高为电磁场的普遍规律.

电磁场是物质存在的一种形态,它有特定的运动规律和物质属性,它和其他带电物质以一定形式发生相互作用.每一种物质的存在形态都有它的特殊本质和特殊规律,因此,和一般实物对比,场的存在形态也有它的特点.实物通常是定域在空间的确定区域内,而电磁场则弥漫于空间中.例如,在高压线附近存在着强大的电场;在我们周围的空间中传播着各种形式的电磁波.由此可见,场是作为空间中某种分布而存在,而且一般来说这种分布是随时间而变化的.按照电磁场的特点,我们用两个矢量函数——电场强度  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  和磁感应强度  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  来描述电磁场在时刻  $t$  的状态.在经典物理中,这两个矢量函数可以完全描述电磁场.电磁场的规律用数学形式表示出来就是这两个矢量场所满足的偏微分方程组.

我们先分析静电场和静磁场的实验定律,再研究变动情况下新的实验定律,由此总结出麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式.这些方程是宏观电磁场论的理论基础.在以后各章中将应用它们来解决各种与电磁场有关的问题.

## § 1 电荷和电场

### 1. 库仑定律

库仑(Coulomb)定律是静电现象的基本实验定律,它表述如下:真空中静止点电荷  $Q$  对另一个静止点电荷  $Q'$  的作用力  $\mathbf{F}$  为

$$\mathbf{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

式中  $\mathbf{r}$  为由  $Q$  到  $Q'$  的径矢,  $\epsilon_0$  是真空电容率(真空介电常量).

库仑定律只是从现象上给出两电荷之间作用力的大小和方向,它并没有解决这作用力的物理本质问题.对库仑定律(1.1)式可以有不同的物理解释.一种观点认为两电荷之间的作用力是直接的超距作用,即一个电荷把作用力直接施加于另一电荷上;另一种观点是相互作用通过场来传递的观点,这种观点认为两电荷之间的相互作用是通过电场来传递的,而不是直接的超距作用.若只局限于静电的情况,这两种描述是等价的,它们都给出相同的计算结果,但是我们不能单纯由静电现象判断哪一种描述是正确的.在运动电荷的情况下,特别是在电荷

发生迅变的情况下,两种观点就显示出不同的物理内容.实践证明通过场来传递相互作用的观点是正确的.场概念的引入在电动力学发展史上起着重要的作用,在现代物理学中关于场的物质形态的研究也占有重要地位.通过本课程的学习,我们将会不断加深对场的认识,并逐步认识电磁场的物质性,这是本课程的主要任务之一.

既然我们要把库仑定律提高为描述电磁现象的一条普遍规律,因此需要从场的观点出发来讨论这定律的含义.我们假设,一个电荷周围的空间存在着一种特殊的物质,称为电场.另一电荷处于该电场中,就受到电场的作用力.对电荷有作用力是电场的特征性质,我们就利用这性质来描述该点上的电场.由库仑定律可知,处于电场内的电荷  $Q'$  所受的力与  $Q'$  成正比.因此,我们用一个单位试验电荷在场所受的力来定义电荷所在点  $x$  上的电场强度  $E(x)$ . 电荷  $Q'$  在电场  $E$  中所受的力  $F$  为

$$F = Q'E \quad (1.2)$$

由库仑定律(1.1)式,一个静止点电荷  $Q$  所激发的电场强度为

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3)$$

由实验知道,电场具有叠加性,即多个电荷所激发的电场等于每个电荷所激发的电场的矢量和.设第  $i$  个电荷  $Q_i$  到  $P$  点的矢径为  $r_i$ ,则  $P$  点上的总电场强度  $E$  为

$$E = \sum_i \frac{Q_i r_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \quad (1.4)$$

在许多实际情况下可以把电荷看作连续分布于某一区域内.例如在真空管的阴极和板极之间就充满了由自由电子构成的电荷分布.如图 1-1,设电荷连续分布于区域  $V$  内.在  $V$  内某点  $x'$  上取一个体积元  $dV'$ ,在  $dV'$  内所含的电荷  $dQ$  等于该点上的电荷密度  $\rho(x')$  乘以体积  $dV'$ :

$$dQ = \rho(x')dV'$$

设由源点  $x'$  到场点  $x$  的矢径为  $r$ ,则  $P$  点上的电场强度  $E$  为

$$E(x) = \int_V \frac{\rho(x')r}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' \quad (1.5)$$

式中积分遍及电荷分布区域.

(1.5)式是静电场的电场强度分布的积分形式.为了反映出相互作用在场中传递的特点,我们还必须再深入一步,研究一个电荷

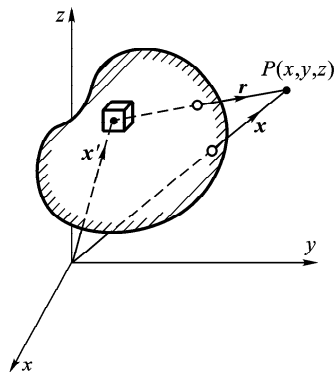


图 1-1

和它邻近的电场是怎样相互作用的,一点上的电场和它邻近的电场又是怎样联系的,即要找出静电场规律的微分形式. 下面我们通过库仑定律来分析这些规律性.

## 2. 高斯定理和电场的散度

首先我们研究一个电荷与它邻近的电场的关系. 在电磁学中我们知道,一个电荷  $Q$  发出的电场强度通量总是正比于  $Q$ ,与附近有没有其他电荷存在无关. 因此,一个电荷激发的电场强度通量表示着电荷对电场作用的基本数量关系. 设  $S$  表示包围着电荷  $Q$  的一个闭合曲面,  $d\mathbf{S}$  为  $S$  上的定向面元,以外法线方向为正向. 通过闭合曲面  $S$  的电场强度  $\mathbf{E}$  的通量定义为面积分

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

由库仑定律可以推出关于电场强度通量的高斯(Gauss)定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

式中  $Q$  为闭合曲面内的总电荷. 高斯定理证明如下:如图 1-2,设曲面内有一电荷  $Q$ ,其电场强度通过面元  $d\mathbf{S}$  的通量为

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cos \theta dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dS$$

式中  $\theta$  为  $d\mathbf{S}$  与  $\mathbf{r}$  的夹角,  $dS \cos \theta$  为面元投影到以  $r$  为半径的球面上的面积,  $\cos \theta dS/r^2$  为面元  $d\mathbf{S}$  对电荷  $Q$  所张开的立体角元  $d\Omega$ . 因此,  $\mathbf{E}$  对闭合曲面  $S$  的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

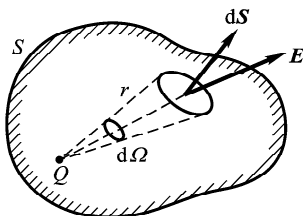


图 1-2

如果电荷在闭合曲面外,则它发出的电场线穿入该曲面后再穿出来,因而对该闭合曲面的电场强度通量没有贡献. 在一般情况下,设空间中有多多个电荷  $Q_i$ ,则  $\mathbf{E}$  通过任一闭合曲面  $S$  的总通量等于  $S$  内的总电荷除以  $\epsilon_0$ ,而与  $S$  外的电荷无关:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (Q_i \text{ 在 } S \text{ 内}) \quad (1.6')$$

如果电荷连续分布于空间中,则  $\mathbf{E}$  对闭合曲面  $S$  的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.7)$$

式中  $V$  为  $S$  所包围的体积. 上式右边的积分是  $V$  内的总电荷,与  $V$  外的电荷分布无关.

(1.6)或(1.7)式是高斯定理的积分形式. 为了求出电荷与电场的局域关系,即在空间无穷小区域内的关系,我们把(1.7)式中的体积  $V$  不断缩小,根据矢量

场散度的定义(附录 I.4 式), (1.7) 式左边趋于电场  $\mathbf{E}$  的散度乘上体积元  $dV$ , 而右边趋于  $\frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$ , 由  $dV$  的任意性, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

这就是高斯定理的微分形式, 它是电场的一个基本微分方程. 上式指出, 电荷是电场的源, 电场线从正电荷发出而终止于负电荷. 在没有电荷分布的地点,  $\rho(\mathbf{x})=0$ , 因而在该点上  $\nabla \cdot \mathbf{E}=0$ , 表示在该处既没有电场线发出, 也没有电场线终止, 但是可以有电场线连续通过该处.

(1.8) 式反映电荷对电场作用的局域性质: 空间某点邻域上场的散度只和该点上的电荷密度有关, 而和其他地点的电荷分布无关; 电荷只直接激发其邻近的场, 而远处的场则是通过场本身的内部作用传递出去的. 只有在静电情况下, 远处的场才能以库仑定律形式表示出来, 而在一般运动电荷情况下, 远处的场不能再用库仑定律(1.3)式表出, 但实验证明更基本的局域关系(1.8)式仍然成立.

### 3. 静电场的旋度

散度是矢量场性质的一个方面, 要确定一个矢量场, 还需要给出其旋度. 旋度所反映的是场的环流性质. 从直观图像来看, 静电场的电场线分布没有旋涡状结构, 因而可以推想静电场是无旋的. 下面我们用库仑定律来证明这一点.

先计算一个点电荷  $Q$  所激发的电场强度  $\mathbf{E}$  对任一闭合回路  $L$  的环量:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

式中  $d\mathbf{l}$  为  $L$  的线元(图 1-3). 由库仑定律得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{l}$$

设  $d\mathbf{l}$  与  $\mathbf{r}$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r \cos \theta dl = r dr$ , 因而上式化为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right)$$

右边被积函数是一个全微分. 从  $L$  的任一点开始, 绕  $L$  一周之后回到原地点, 函数  $1/r$  亦回到原来的值,

因而  $d\left(\frac{1}{r}\right)$  的回路积分为零. 由此得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.9)$$

以上证明了一个点电荷的电场环量为零. 对于一般的静止电荷分布, 每一个电荷元所激发的电场环量为零, 由场的叠加性, 总电场  $\mathbf{E}$  对任一回路的环量恒为零, 即(1.9)式对任意静电场和任一闭合回路都成立.

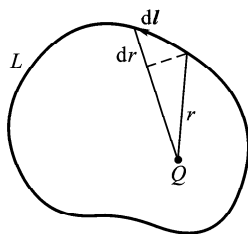


图 1-3

把(1.9)式化成微分形式就可以求出静电场的旋度. 为此把回路  $L$  不断缩小, 使它包围着一个面元  $d\mathbf{S}$ . 根据旋度的定义(附录 1.5 式), (1.9)式左边趋于  $\nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ , 由  $d\mathbf{S}$  的任意性得

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.10)$$

这就证明了静电场的无旋性. 实践表明, 无旋性只在静电情况下成立. 在一般情况下电场是有旋的, 在第三节中我们再说明一般情况下电场的旋度.

(1.8)和(1.10)式给出静电场的散度和旋度, 它们表示电荷激发电场以及电场内部联系的规律性, 是静电场的基本规律. 它们所反映的物理图像是: 电荷是电场的源, 电场线从正电荷发出而终止于负电荷, 在自由空间中电场线连续通过; 在静电情形下电场没有旋涡状结构.

**例** 电荷  $Q$  均匀分布于半径为  $a$  的球体内, 求各点的电场强度, 并由此直接计算电场的散度.

**解** 作半径为  $r$  的球(与电荷球体同心). 由对称性, 在球面上各点的电场强度有相同的数值  $E$ , 并沿径向. 当  $r > a$  时, 球面所围的总电荷为  $Q$ , 由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

因而

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

写成矢量式得

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (r > a) \quad (1.11)$$

若  $r < a$ , 则球面所围电荷为

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{Qr^3}{a^3}$$

应用高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3}$$

由此得

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (r < a) \quad (1.12)$$

现在计算电场的散度. 当  $r > a$  时  $\mathbf{E}$  应取(1.11)式, 在这区域  $r \neq 0$ , 由直接计算可得

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (r \neq 0)$$

因而

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (r > a)$$

当  $r < a$  时  $\mathbf{E}$  应取(1.12)式,由直接计算得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (r \leq a)$$

由这例子我们看出散度概念的局域性质. 虽然对任一个包围着电荷的曲面都有电通量,但是散度只存在于有电荷分布的区域内,在没有电荷分布的空间中电场的散度为零.

## § 2 电流和磁场

本节讨论磁场的基本规律. 磁场是和电流相互作用的,在讨论磁场之前,先说明电流分布的规律性.

### 1. 电荷守恒定律

导线上的电流通常用通过导线截面的总电流  $I$  描述. 很多情况下,我们不但要知道总电流,而且要知道电流在导体内是怎样分布的. 例如直流电通过一根导线时,在导线截面上,电流是均匀分布的. 但是高频交流电通过同一根导线时,电流在截面上不再是均匀分布,而是几乎集中到导线表面上. 因此,我们必须引入电流密度来描述电流的分布情况.

如图 1-4, 设  $d\mathbf{S}$  为某曲面上的一个面元, 它与该点上的电流方向有夹角  $\theta$ . 定义电流密度  $\mathbf{J}$ , 它的方向沿着该点上的电流方向, 它的数值等于单位时间垂直通过单位面积的电荷量, 从而通过面元  $d\mathbf{S}$  的电流  $dI$  为

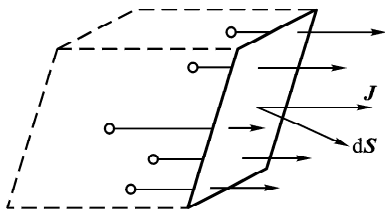


图 1-4

$$dI = J dS \cos \theta = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1)$$

通过任一曲面  $S$  的总电流  $I$  为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2)$$

如果电流由一种运动带电粒子构成, 设带电粒子的电荷密度为  $\rho$ , 平均速度为  $\mathbf{v}$ , 则电流密度为

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (2.3a)$$

如果有几种带电粒子,其电荷密度分别为  $\rho_i$ , 平均速度为  $\mathbf{v}_i$ , 有

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \quad (2.3b)$$

现在我们研究电磁理论的一条最基本的实验定律——电荷守恒定律. 我们知道, 物体所带的电荷是构成物体的粒子(电子、质子等)的一个属性. 不论发生任何变化过程, 如化学反应、原子核反应甚至粒子的转化, 一个系统的总电荷严格保持不变. 这是到目前为止人们所知道的自然界精确规律之一. 电荷守恒定律在数学上用连续性方程表示. 考虑空间中一确定区域  $V$ , 其边界为闭合曲面  $S$ . 当物质运动时, 可能有电荷进入或流出该区域. 根据电荷守恒定律, 如果有电荷从该区域流出的话, 区域  $V$  内的电荷必然减小. 通过界面流出的总电流应该等于  $V$  内的电荷减小率, 即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.4)$$

这是电荷守恒定律的积分形式. 应用高斯定理把面积分变为体积分

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV$$

即得微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

上式称为电流连续性方程, 它是电荷守恒定律的微分形式.

如果在(2.4)式中的  $V$  是全空间,  $S$  为无穷远界面, 由于在  $S$  上没有电流流出, 因而(2.4)式左边的面积分为零, 由此式得

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

表示全空间的总电荷守恒.

以上公式是对任意变化电流成立的. 在恒定电流情况下, 一切物理量不随时间而变, 因而  $\partial \rho / \partial t = 0$ , 因此由(2.5)式得

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{恒定电流}) \quad (2.6)$$

上式表示恒定电流的连续性. 恒定电流分布是无源的, 其流线必为闭合曲线, 没有发源点和终止点. 换句话说, 恒定电流(直流电)只能够在闭合回路中通过, 电路一断, 直流电就不能通过, 这是我们熟知的事实.

## 2. 毕奥-萨伐尔定律

下面我们研究电流和磁场的相互作用. 实验测出两个电流之间有作用力. 和静电作用一样, 这种作用力也需要通过一种物质来传递, 这种特殊物质称为磁场. 电流激发磁场, 另一个电流处于该磁场中, 就受到磁场对它的作用力. 对电流

有作用力是磁场的特征性质,我们就利用这一特性来描述磁场.实验指出,一个电流元  $I d\mathbf{l}$  在磁场中所受的力可以表为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2.7)$$

矢量  $\mathbf{B}$  描述电流元所在点上磁场的性质,称为磁感应强度.

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔(Biot - Savart)定律给出.设  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$  为源点  $\mathbf{x}'$  上的电流密度,  $\mathbf{r}$  为由  $\mathbf{x}'$  点到场点  $\mathbf{x}$  的矢径,则场点上的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (2.8a)$$

式中  $\mu_0$  为真空磁导率,积分遍及电流分布区域.如果电流集中于细导线上,以  $d\mathbf{l}$  表示闭合回路  $L$  上的线元,  $dS_n$  为导线横截面元,则电流元  $\mathbf{J}dV' = \mathbf{J}dS_n d\mathbf{l} = JdS_n d\mathbf{l}$ ,对导线截面积分后得  $I d\mathbf{l}$ .因此,细导线上恒定电流激发磁场的毕奥-萨伐尔定律写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.8b)$$

毕奥-萨伐尔定律是恒定电流激发的磁场分布规律的积分形式.为了反映磁作用在场中传递的特点,我们还需再深入一步,找出一个电流和它邻近的磁场的关系,以及一点上的磁场和邻近点上的磁场的关系,即要找出磁场规律的微分形式.下面我们先从电磁学总结出的定律得到磁场的旋度和散度公式,然后在第5小节中再由毕奥-萨伐尔定律给出这些公式的一般推导.

### 3. 磁场的环量和旋度

在电磁学中我们知道,载电流导线周围磁场的磁感线总是围绕着导线的一些闭合曲线.磁场沿闭合曲线的环量与通过闭合曲线所围曲面的电流  $I$  成正比,

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (2.9)$$

式中  $L$  为任一闭合曲线,  $I$  为通过  $L$  所围曲面的总电流. (2.9) 式称为安培(Ampère)环路定律,它可以由毕奥-萨伐尔定律导出.现在我们先就一特例验证(2.9)式.

如图1-5,设有一根无穷长直线导线,载有电流  $I$ .用毕奥-萨伐尔定律可以求出这电流激发的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

式中  $r$  为场点到导线的垂直距离,磁感线是围绕该导线的圆周.若选半径为  $r$  的圆

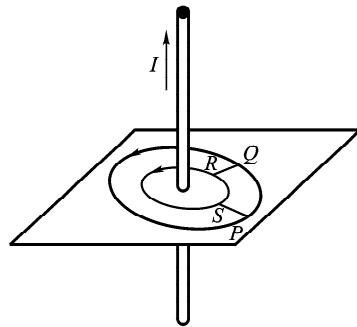


图 1-5



周作为闭合回路  $L$ , 有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

如果所选的闭合曲线内没有电流通过, 如图 1-5 中的回路  $PQRSP$ , 可以证明沿此回路的磁场环量等于零. 事实上, 沿此回路的积分可分四段计算. 沿径向的  $SP$  和  $QR$  段, 由于  $\mathbf{B}$  与  $d\mathbf{l}$  方向正交, 因此这两段积分为零. 设圆弧  $PQ$  的半径为  $r_2$ , 弧长为  $l_2$ , 圆弧  $RS$  的半径为  $r_1$ , 弧长为  $l_1$ , 这两段积分值为

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} l_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} l_1$$

由于  $l_2/r_2 = l_1/r_1$ , 因此上式为零. 由此, 对闭合回路  $PQRSP$  的磁场环量为零, 即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

总言之, 在安培环路定律(2.9)式中,  $I$  为通过闭合曲线  $L$  所围曲面的总电流, 不通过  $L$  所围曲面的电流对环量没有贡献. 因此, 环路定律可以用来导出电流与其邻近磁场的关系, 和其他地方流过的电流无关.

对于连续电流分布  $\mathbf{J}$ , 在计算磁场沿回路  $L$  的环量时, 只需考虑通过以  $L$  为边界的曲面  $S$  的电流, 在  $S$  以外流过的电流没有贡献. 因此, 环路定律表为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.10)$$

(2.9)或(2.10)式是电流与磁场关系的积分形式. 为了求得微分形式, 我们把回路  $L$  不断缩小, 使它围绕着一个面元  $d\mathbf{S}$ . 这时(2.10)式左边趋于  $\nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , 右边趋于  $\mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ . 由  $d\mathbf{S}$  的任意性得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.11)$$

上式是恒定磁场的一个基本微分方程。

#### 4. 磁场的散度

为了确定磁场, 除了给出旋度外, 还需要给出它的散度. 由电磁学的知识, 我们知道由电流激发的磁感应线总是闭合曲线. 因此, 磁感应强度  $\mathbf{B}$  是无源场. 表示  $\mathbf{B}$  无源性的积分形式是  $\mathbf{B}$  对任何闭合曲面的总通量为零

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.12)$$

微分形式是

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.13)$$

$\mathbf{B}$  的无源性也可以由毕奥-萨伐尔定律直接证明. 这里我们把它作为磁场分布的一条基本规律引入, 在下一小节中再证明(2.11)和(2.13)式可以毕奥-萨伐尔定律导出.

由电流所激发的磁场都是无源的. 但是, 自然界中是否存在与电荷相对应的

磁荷作为磁场的源呢? 如果磁荷存在的话, 和电荷作为电场的源一样, 磁荷也作为磁场的源, 这时一般来说  $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ . 近年来对于磁单极子(孤立的磁荷)存在的可能性有不少讨论, 实验上也一直在找寻带有磁荷的粒子. 但是, 到现在还没有任何关于磁单极子存在的确实证据. 因此, 在假定磁荷不存在的前提下, 我们可以把(2.13)式作为磁场的一条基本规律. (2.11)和(2.13)式是恒定磁场的基本微分方程.

### 5. 磁场旋度和散度公式的证明

现在我们用毕奥—萨伐尔定律推导(2.11)和(2.13)式. 由(2.8a)式, 有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \nabla \frac{1}{r} dV'$$

注意算符  $\nabla$  是对  $\mathbf{x}$  的微分算符, 与  $\mathbf{x}'$  无关, 由附录(I.20)式可得

$$\nabla \times \left[ \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{1}{r} \right] = \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

因此

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} dV' = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.14)$$

式中

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{r} \quad (2.15)$$

由附录(I.15)式, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

(2.13)式得证.

再计算  $\mathbf{B}$  的旋度. 由(2.14)式和附录(I.25)式, 有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.16)$$

先计算  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . 由(2.15)式和附录(I.19)式, 注意  $\nabla$  不作用于  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$  上, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[ \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{1}{r} \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \frac{1}{r} dV'$$

由于  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ , 因而对  $r$  的函数而言, 对  $\mathbf{x}$  微分与对  $\mathbf{x}'$  微分仅差一负号, 因此上式可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} dV'$$

用附录(I.19)式得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[ \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{1}{r} \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

上式右边第一项可以化为面积分, 由于积分区域  $V'$  包括所有电流在内, 没有电流通过区域的界面  $S$ , 因而这面积分为零. 在右边第二项中, 由恒定电流的连续



性有  $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ , 故这积分亦等于零. 因此有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.17)$$

再计算  $\nabla^2 \mathbf{A}$ . 由 (2.15) 式, 有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{r} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV'$$

由直接计算, 当  $r \neq 0$  时  $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ , 因此上式的被积函数只可能在  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  点上不为零, 因而体积分仅需对包围  $\mathbf{x}$  点的小球积分. 这时可取  $\mathbf{J}(\mathbf{x}') = \mathbf{J}(\mathbf{x})$ , 抽出积分号外, 而

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV' = - \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV' = - \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}'$$

注意  $\mathbf{r}$  是由源点  $\mathbf{x}'$  指向场点  $\mathbf{x}$  的矢径, 它和面元  $d\mathbf{S}'$  反向, 因此上式为

$$- \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}' = \oint_S \frac{1}{r^2} dS' = \oint d\Omega = 4\pi$$

因此得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.18)$$

把 (2.17) 式和 (2.18) 式代入 (2.16) 式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.11)$$

由以上推导可见, 磁场的微分方程 (2.11) 和 (2.13) 式是毕奥—萨伐尔定律的推论. 毕奥—萨伐尔定律只在恒定电流情况下成立. 实践证明,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  在一般变化磁场下也是成立的, 而  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  只在恒定情况下成立, 在一般情况下需要推广.

**例** 电流  $I$  均匀分布于半径为  $a$  的无穷长直导线内, 求空间各点的磁场强度, 并由此计算磁场的旋度.

**解** 在与导线垂直的平面上作一半径为  $r$  的圆, 圆心在导线轴上. 由对称性, 在圆周各点的磁感强度有相同数值, 并沿圆周环绕方向. 当  $r > a$  时, 通过圆内的总电流为  $I$ , 用安培环路定律得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

因而  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , 在柱坐标系中写成矢量式为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (r > a) \quad (2.19)$$

式中  $\mathbf{e}_\phi$  为圆周环绕方向单位矢量.

若  $r < a$ , 则通过圆内的总电流为

$$\pi r^2 J = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2} I$$

应用安培环路定律得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2}$$

因而

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi \quad (r < a) \quad (2.20)$$

用柱坐标的公式(附录 I.36)求  $\mathbf{B}$  的旋度, 当  $r > a$  时由(2.19)式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\phi) \mathbf{e}_z = 0 \quad (r > a) \quad (2.21)$$

当  $r < a$  时由(2.20)式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z = \mu_0 \mathbf{J} \quad (r < a) \quad (2.22)$$

注意旋度概念的局域性, 即某点邻域上的磁感强度的旋度只和该点上的电流密度有关. 虽然对任何包围着导线的回路都有磁场环量, 但是磁场的旋度只存在于有电流分布的导线内部, 而在周围空间中的磁场是无旋的.

### § 3 麦克斯韦方程组

以上两节由实验定律总结了恒定电磁场的基本规律. 随着交变电流的研究和广泛应用, 人们对电磁场的认识有了一个飞跃. 由实验发现不但电荷激发电场, 电流激发磁场, 而且变化着的电场和磁场可以互相激发, 电场和磁场成为统一的整体——电磁场.

和恒定场相比, 变化电磁场的新规律主要是:

- (1) 变化磁场激发电场(法拉第电磁感应定律);
- (2) 变化电场激发磁场(麦克斯韦位移电流假设).

下面分别讨论这两问题.

#### 1. 电磁感应定律

自从发现了电流的磁效应之后, 人们跟着研究相反的效应, 即磁场能否导致电流? 开始人们企图探测处于恒定磁场中的固定线圈上的感应电流, 这些尝试都失败了, 最后于 1831 年法拉第(Faraday)发现当磁场发生变化时, 附近闭合线圈中有电流通过, 并由此总结出电磁感应定律: 闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比, 其方向关系在下面说明. 如图 1-6, 设  $L$  为闭合线圈,  $S$  为  $L$  所围的一个曲面,  $dS$  为  $S$  上的一个面元. 按照惯例, 我们规定  $L$  的

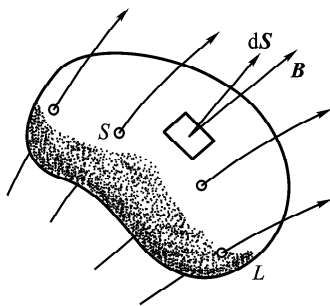


图 1-6

围绕方向与  $d\mathbf{S}$  的法线方向成右手螺旋关系. 由实验测定, 当通过  $S$  的磁通量增加时, 在线圈  $L$  上的感应电动势  $\mathcal{E}$  与我们规定的  $L$  围绕方向相反, 因此用负号表示. 电磁感应定律表为

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1)$$

线圈上的电荷是直接受到该处电场作用而运动的, 线圈上有感应电流就表明空间中存在着电场. 因此, 电磁感应现象的实质是变化磁场在其周围空间中激发了电场, 这是电场和磁场内部相互作用的一个方面.

感应电动势是电场强度沿闭合回路的线积分, 因此电磁感应定律(3.1)式可写为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.2)$$

若回路  $L$  是空间中的一条固定回路, 则上式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

化为微分形式后得

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

这是磁场对电场作用的基本规律. 由(3.3)式可见, 感应电场是有旋场. 因此在一般情况下, 表示静电场无旋性的(1.10)式必须代以更普遍的(3.3)式.

## 2. 位移电流

上面我们研究了变化磁场激发电场问题, 进一步我们要问, 变化电场是否激发磁场? 在回答这个问题之前, 我们先分析非恒定电流分布的特点.

在第二节中我们指出恒定电流是闭合的, 故

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{恒定电流})$$

在交变情况下, 电流分布由电荷守恒定律(2.5)式制约, 它一般不再是闭合的. 例如带有电容器的电路实质上是非闭合的回路. 在电容器两板之间是绝缘介质, 自由电子不能通过. 电荷运动到板上时, 由于不能穿过介质, 就在板上积聚起来. 在交流电路中, 电容器交替地充电和放电, 但在两板之间的介质内始终没有传导电流通过. 所以, 电流  $\mathbf{J}$  在该处实际上是中断的. 一般来说, 在非恒定情况下, 由电荷守恒定律有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

现在我们考察电流激发磁场的规律(2.11)式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

两边取散度, 由于  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$ , 因此上式只有当  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  时才可能成立. 在恒定

情况, 电流  $\mathbf{J}$  是闭合的,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , (2.11) 式在理论上是没有矛盾的. 但是, 在非恒定情形下, 一般有  $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$ , 因而 (2.11) 式与电荷守恒定律发生矛盾. 由于电荷守恒定律是精确的普遍规律, 而 (2.11) 式仅是根据恒定情况下的实验定律导出的特殊规律, 在两者发生矛盾的情形下, 我们应该修改 (2.11) 式使它服从普遍的电荷守恒定律的要求.

把 (2.11) 式推广的一个方案是假设存在一个称为位移电流的物理量  $\mathbf{J}_D$ , 它和电流  $\mathbf{J}$  合起来构成闭合的量, 即满足

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) = 0 \quad (3.4)$$

并假设位移电流  $\mathbf{J}_D$  与电流  $\mathbf{J}$  一样产生磁效应, 即把 (2.11) 修改为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \quad (3.5)$$

此式两边的散度都等于零, 因而理论上就不再有矛盾.

由条件 (3.4) 式可导出  $\mathbf{J}_D$  的可能表示式. 由电荷守恒定律 (2.5) 式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

电荷密度  $\rho$  与电场散度有关系式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.7)$$

两式合起来得

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.8)$$

与 (3.4) 式比较即得  $\mathbf{J}_D$  的一个可能表示式:

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.9)$$

从数学上来说, 单由条件 (3.4) 式是不能唯一确定  $\mathbf{J}_D$  的. 从物理上考虑, (3.9) 式是满足条件 (3.4) 式的最简单的物理量, 而且既然变化磁场能激发电场, 则变化电场激发磁场也是比较合理的假设. 由 (3.9) 式, 位移电流实质上是电场的变化率, 它是麦克斯韦 (Maxwell) 首先引入的. 位移电流假设的正确性由以后关于电磁波的广泛实践所证明.

### 3. 麦克斯韦方程组

至此我们已经把电磁学中最基本的实验定律概括、总结和提高到一组在一般情况下互相协调的方程组

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

这组方程称为麦克斯韦方程组,它反映一般情况下电荷电流激发电磁场以及电磁场内部运动的规律.在 $\rho$ 和 $\mathbf{J}$ 为零的区域,电场和磁场通过本身的互相激发而运动传播.电磁场的相互激发是它存在和运动的主要因素,而电荷和电流则以一定形式作用于电磁场.

麦克斯韦方程组最重要的特点是它揭示了电磁场的内部作用和运动.不仅电荷和电流可以激发电磁场,而且变化的电场和磁场也可以互相激发.因此,只要某处发生电磁扰动,由于电磁场互相激发,它就在空间中运动传播,形成电磁波.麦克斯韦首先从这方程组在理论上预言了电磁波的存在,并指出光波就是一种电磁波.以后的赫兹(Hertz)实验和近代无线电的广泛实践完全证实了麦克斯韦方程组的正确性.

麦氏方程组不仅揭示了电磁场的运动规律,更揭示了电磁场可以独立于电荷之外而存在,这样就加深了我们对电磁场物质性的认识.以后我们还将讨论电磁场的物质属性,逐步丰富对电磁场物质性的认识.

#### 4. 洛伦兹力公式

自然界的事物都是互相联系、互相制约的.电磁场与带电物质之间有密切的联系.麦氏方程组反映了电荷激发场以及场内部运动的方面,至于场反过来对电荷体系的作用,在库仑定律和安培定律中已经在一定条件下反映出来:静止电荷 $Q$ 受到静电场作用力 $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ ,恒定电流元 $\mathbf{J}dV$ 受到磁场作用力 $d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}dV$ .若电荷为连续分布,其密度为 $\rho$ ,则电荷系统单位体积所受的力密度 $\mathbf{f}$ 为

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.11)$$

洛伦兹(Lorentz)把这结果推广为普遍情况下场对电荷系统的作用力,因此上式称为洛伦兹力密度公式.对于带电粒子系统来说,若粒子电荷为 $q$ ,速度为 $\mathbf{v}$ ,则 $\mathbf{J}$ 等于单位体积内 $q\mathbf{v}$ 之和.把电磁作用力公式应用到一个粒子上,得到一个带电粒子受电磁场的作用力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.12)$$

这公式称为洛伦兹力公式.洛伦兹假设这公式适用于任意运动的带电粒子.近代物理学实践证实了洛伦兹公式对任意运动的带电粒子都是适用的.现代带电粒子加速器、电子光学设备等都是以麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式作为设计的理论基础.

总结了实验结果,又经过以后的实践检验的麦氏方程组和洛伦兹力公式,正确地反映了电磁场的运动规律以及它和带电物质的相互作用规律,成为电动力的理论基础.至于其他有关电磁现象的实验定律,如欧姆定律、介质的极化和磁化规律等,原则上都可以在这基础上结合物质结构的模型用量子力学推导出来.例如欧姆定律就是导体内部自由电子受外电场作用力和受晶格电场作用力而运动的结果,可以根据一定的导体微观结构模型推算出电导率.但是这种推算在很

大程度上依赖于人们对物质微观结构和动力学机制的认识,目前还不可能做到完全精确。因此,在宏观电动力学中,除了基本的麦氏方程组和洛伦兹力公式外,还需要唯象地补充一些关于介质电磁性质的实验定律。下一节将研究这些问题。

## § 4 介质的电磁性质

### 1. 关于介质的概念

下面讨论介质存在时电磁场和介质内部的电荷电流相互作用问题。

介质由分子组成。分子内部有带正电的原子核和绕核运动的带负电的电子。从电磁学观点看来,介质是一个带电粒子系统,其内部存在着不规则而又迅速变化的微观电磁场。在研究宏观电磁现象时,我们所讨论的物理量是在一个包含大数目分子的物理小体积内的平均值,称为宏观物理量。

由于分子是电中性的,而且在热平衡时各分子内部的粒子运动一般没有确定的关联,因此,当没有外场时介质内部一般不出现宏观的电荷电流分布,其内部的宏观电磁场亦为零。有外场时,介质中的带电粒子受场的作用,正负电荷发生相对位移,有极分子(原来正负电中心不重合的分子)的取向以及分子电流的取向亦呈现一定的规则性,这就是介质的极化和磁化现象。由于极化和磁化的原因,介质内部及表面上便出现宏观的电荷电流分布,我们把这些电荷、电流分别称为束缚电荷和磁化电流。这些宏观电荷电流分布反过来又激发起附加的宏观电磁场,叠加在原来外场上而得到介质内的总电磁场。介质内的宏观电磁现象就是这些电荷电流分布和电磁场之间相互作用的结果。

### 2. 介质的极化

存在两类电介质。一类介质分子的正电中心和负电中心重合,没有电偶极矩。另一类介质分子的正负电中心不重合,有分子电偶极矩,但是由于分子热运动的无规性,在物理小体积内的平均电偶极矩为零,因而也没有宏观电偶极矩分布。在外场作用下,前一类分子的正负电中心被拉开,后一类介质的分子电偶极矩平均有一定取向性,因此都出现宏观电偶极矩分布。宏观电偶极矩分布用电极化强度矢量  $\mathbf{P}$  描述,它等于物理小体积  $\Delta V$  内的总电偶极矩与  $\Delta V$  之比:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (4.1)$$

式中  $\mathbf{p}_i$  为第  $i$  个分子的电偶极矩,求和符号表示对  $\Delta V$  内所有分子求和。

由于极化,分子正负电中心发生相对位移,因而物理小体积  $\Delta V$  内可能出现净余的正电或负电,即出现宏观的束缚电荷分布。我们现在首先要求出束缚电荷密度  $\rho_p$  和电极化强度  $\mathbf{P}$  之间的关系。



我们用一个简化模型来描述介质中的分子. 设每个分子由相距为  $l$  的一对正负电荷  $\pm q$  构成, 分子电偶极矩为  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ . 图 1-7 所示为介质内某曲面  $S$  上的一个面元  $d\mathbf{S}$ . 介质极化后, 有一些分子电偶极子跨过  $d\mathbf{S}$ . 由图可见, 当偶极子的负电荷处于体积  $l \cdot d\mathbf{S}$  内时, 同一偶极子的正电荷就穿出界面  $d\mathbf{S}$  外边. 设单位体积分子数为  $n$ , 则穿出  $d\mathbf{S}$  外面的正电荷为

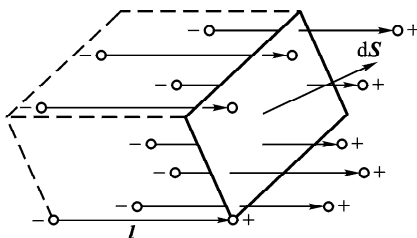


图 1-7

$$nql \cdot d\mathbf{S} = n\mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2)$$

对包围区域  $V$  的闭合界面  $S$  积分, 则由  $V$  内通过界面  $S$  穿出去的正电荷为

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

由于介质是电中性的, 这量也等于  $V$  内净余的负电荷. 这种由于极化而出现的电荷分布称为束缚电荷. 以  $\rho_P$  表示束缚电荷密度, 有

$$\int_V \rho_P dV = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

把右边的面积分化为体积分, 可得上式的微分形式:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.3)$$

非均匀介质极化后一般在整个介质内部都出现束缚电荷; 在均匀介质内, 束缚电荷只出现在自由电荷附近以及介质界面处. 现在我们说明两介质分界面上的面束缚电荷的概念. 图 1-8 所示为介质 1 和介质 2 分界面上的一个面元  $d\mathbf{S}$ . 在分界面两侧取一定厚度的薄层, 使分界面包含在薄层内. 在薄层内出现的束缚电荷与  $d\mathbf{S}$  之比称为分界面上的束缚电荷面密度. 由 (4.2) 式, 通过薄层右侧面进入介质 2 的正电荷为  $\mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{S}$ , 由介质 1 通过薄层左侧面进入薄层的正电荷为  $\mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{S}$ . 因此, 薄层内出现的净余电荷为  $-(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S}$ . 以  $\sigma_P$  表示束缚电荷面密度. 有

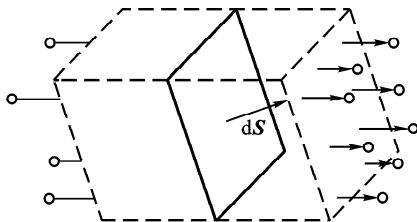


图 1-8

$$\sigma_P dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S}$$

由此,

$$\sigma_P = -\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (4.4)$$

$\mathbf{e}_n$  为分界面上由介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量. 由以上推导可见, 所谓面束缚电荷不是真正分布在一个几何面上的电荷, 而是在一个含有相当多分子层的薄层内的效应.

介质内的电现象包括两个方面. 一方面电场使介质极化而产生束缚电荷分布, 另一方面这些束缚电荷又反过来激发电场, 两者是互相制约的. 介质对宏观电场的作用就是通过束缚电荷激发电场. 因此, 若在麦克斯韦方程组中电荷密度  $\rho$  包括自由电荷密度  $\rho_f$  和束缚电荷密度  $\rho_P$  在内, 则在介质内麦克斯韦方程组 (3.10) 式仍然成立:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_P \quad (4.5)$$

在实际问题中, 自由电荷比较容易受实验条件的直接控制或观测, 而束缚电荷则不然. 因此, 在基本方程中消去  $\rho_P$  比较方便. 把 (4.3) 式代入 (4.5) 式得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (4.6)$$

引入电位移矢量  $\mathbf{D}$ , 定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.7)$$

(4.6) 式便可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (4.8)$$

在此式中已消去了束缚电荷, 但引进了一个辅助场量  $\mathbf{D}$ . 由 (4.5) 和 (4.8) 式看出,  $\mathbf{E}$  的源是总电荷分布, 它是介质中的总宏观电场强度, 是电场的基本物理量; 而  $\mathbf{D}$  并不代表介质中的场强, 它只是一个辅助物理量.

由于在基本方程 (4.8) 中引入了辅助场量  $\mathbf{D}$ , 我们必须给出  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  之间的实验关系才能最后解出电场强度. 实验指出, 各种介质材料有不同的电磁性能,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的关系也有多种形式. 对于一般各向同性线性介质, 极化强度  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{E}$  之间有简单的线性关系:

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.9)$$

$\chi_e$  称为介质的极化率. 由 (4.7) 式得

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.10)$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (4.11)$$

$\epsilon$  称为介质的电容率,  $\epsilon_r$  为相对电容率.

### 3. 介质的磁化

介质分子内的电子运动构成微观分子电流, 由于分子电流取向的无规性, 没有外场时一般不出现宏观电流分布. 在外磁场作用下, 分子电流出现有规则取向, 形成宏观磁化电流密度  $\mathbf{J}_M$ .

分子电流可以用磁偶极矩描述. 若把分子电流看作载有电流  $i$  的小线圈, 线圈面积矢量为  $\mathbf{a}$ , 则与分子电流相应的磁矩可表示为

$$\mathbf{m} = i\mathbf{a} \quad (4.12)$$

介质磁化后, 出现宏观磁偶极矩分布, 用磁化强度  $\mathbf{M}$  表示, 它定义为物理小体积  $\Delta V$  内的总磁偶极矩与  $\Delta V$  之比:

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad (4.13)$$

现在我们求磁化电流密度  $\mathbf{J}_M$  与磁化强度  $\mathbf{M}$  的关系. 如图 1-9, 设  $S$  为介质内部的一个曲面, 其边界线为  $L$ . 为了求出磁化电流密度, 我们计算从  $S$  的背面流向前面的总磁化电流  $I_M$ . 由图可见, 若分子电流被边界线  $L$  链环着, 这分子电流就对  $I_M$  有贡献. 在其他情形下, 或者分子电流根本不通过  $S$ , 或者从  $S$  背面流出来后再从前面流进, 所以对  $I_M$  都没有贡献. 因此, 通过  $S$  的总磁化电流  $I_M$  等于边界线  $L$  所链环着的分子数目乘上每个分子的电流  $i$ .

图 1-10 所示为边界线  $L$  上的一个线元  $d\mathbf{l}$ . 设分子电流圈的面积为  $\mathbf{a}$ . 由图可见, 若分子中心位于体积为  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$  的柱体内, 则该分子电流就被  $d\mathbf{l}$  所穿过. 因此, 若单位体积分子数为  $n$ , 则被边界线  $L$  链环着的分子电流数目为

$$\oint_L n \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$$

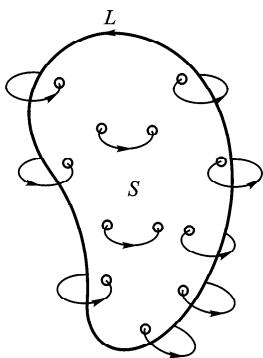


图 1-9

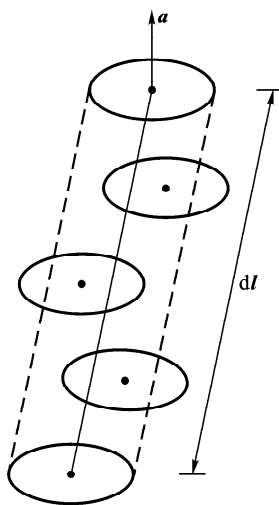


图 1-10

此数目乘上每个分子的电流  $i$  即得从  $S$  背面流向前面的总磁化电流:

$$I_M = \oint_L n i \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L n \mathbf{m} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

以  $\mathbf{J}_M$  表示磁化电流密度,有

$$\int_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

把线积分变为  $\nabla \times \mathbf{M}$  的面积分,由  $S$  的任意性可得微分形式:

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.14)$$

除了磁化电流之外,当电场变化时,介质的极化强度  $\mathbf{P}$  发生变化,这种变化产生另一种电流,称为极化电流. 设  $\Delta V$  内每个带电粒子的位矢为  $\mathbf{x}_i$ , 电荷为  $e_i$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\sum_i e_i \mathbf{x}_i}{\Delta V} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} &= \frac{\sum_i e_i \mathbf{v}_i}{\Delta V} = \mathbf{J}_P \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\mathbf{J}_P$  称为极化电流密度. 磁化电流  $\mathbf{J}_M$  和极化电流  $\mathbf{J}_P$  之和是介质内的总诱导电流密度.

介质内的磁现象也包括两个方面,一方面电磁场作用于介质分子上产生磁化电流和极化电流分布,另一方面这些电流又反过来激发磁场,两者也是互相制约的. 介质对宏观磁场的作用是通过诱导电流 ( $\mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P$ ) 激发磁场. 因此,若在麦氏方程(3.10)式中的  $\mathbf{J}$  包括自由电流密度  $\mathbf{J}_f$  和介质内的诱导电流密度  $\mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P$  在内,那么麦克斯韦方程组在介质中仍然成立:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.16)$$

在实际问题中,自由电流分布  $\mathbf{J}_f$  可以直接受实验条件控制和测定,而  $\mathbf{J}_M$  和  $\mathbf{J}_P$  则不然. 因此,在基本方程中消去  $\mathbf{J}_M$  和  $\mathbf{J}_P$  比较方便. 把(4.14)和(4.15)式代入(4.16)式,并利用(4.7)式得

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.17)$$

引入磁场强度  $\mathbf{H}$ , 定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (4.18)$$

则(4.17)式写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.19)$$

在此式中已消去了诱导电流  $\mathbf{J}_M$  和  $\mathbf{J}_P$ , 但引进了辅助场量  $\mathbf{H}$ . 由(4.16)和(4.19)式看出,  $\mathbf{B}$  描述所有电流分布激发的场, 因此它代表介质内的总宏观磁场, 是基本物理量, 而  $\mathbf{H}$  并不代表介质内的场强, 它仅是一个辅助物理量. 为了解出磁场, 还需要定出  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{B}$  的关系. 实验指出, 对于各向同性非铁磁物质, 磁化强度

$\mathbf{M}$  和  $\mathbf{H}$  之间有简单的线性关系:

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (4.20)$$

$\chi_M$  称为磁化率. 把(4.20)式代入(4.18)式得

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.21)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad \mu_r = 1 + \chi_M \quad (4.22)$$

$\mu$  称为磁导率,  $\mu_r$  为相对磁导率.

从物理本质上看,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  是场的基本物理量, 而  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  是辅助物理量. 历史上由于人们对磁场曾有不正确的认识, 把  $\mathbf{H}$  称为磁场强度而和电场强度  $\mathbf{E}$  对比. 现在人们知道这种看法是错误的, 但由于历史原因, 仍保留着  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的原来名称. 在实践上, 物理量  $\mathbf{H}$  有一定的重要性, 这是因为  $\mathbf{H}$  与自由电流分布  $\mathbf{J}_f$  有关, 而  $\mathbf{J}_f$  是直接受实验条件控制的.

#### 4. 介质中的麦克斯韦方程组

从现在起, 我们略去  $\rho_f$  和  $\mathbf{J}_f$  的下角标  $f$ , 除特殊说明外, 以后公式中出现的  $\rho$  和  $\mathbf{J}$  都代表自由电荷和自由电流分布. 介质中的麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

其中第二式和第三式已在上面讨论过. 至于第一式和第四式, 它们本来就是电磁场内部的规律, 两式中只出现总电场和总磁场, 与电荷电流没有直接关系, 因此在介质中仍然成立.

解实际问题时, 除了这组基本方程外, 还必须引入一些关于介质电磁性质的实验关系. 上面我们举出了这些关系中最简单的形式:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.25)$$

在导电物质中还有欧姆定律

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.26)$$

$\sigma$  为电导率. 这些关系称为介质的电磁性质方程, 它们反映各向同性线性介质的宏观电磁性质.

必须指出, (4.24) — (4.26) 式只适用于某些介质. 实验指出存在许多不同类型的介质. 例如许多晶体属于各向异性介质, 在这些介质内某些方向容易极化, 另一些方向较难极化, 使得  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  一般具有不同方向, 它们的关系就不再是 (4.24) 式, 而是较复杂的张量式. 在这些介质中,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的一般线性关系为

$$\begin{aligned}
D_1 &= \epsilon_{11}E_1 + \epsilon_{12}E_2 + \epsilon_{13}E_3 \\
D_2 &= \epsilon_{21}E_1 + \epsilon_{22}E_2 + \epsilon_{23}E_3 \\
D_3 &= \epsilon_{31}E_1 + \epsilon_{32}E_2 + \epsilon_{33}E_3
\end{aligned} \tag{4.27}$$

(指标 1, 2, 3 代表  $x, y, z$  分量). 上式可简写为

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.27a}$$

这情况下电容率不是一个标量  $\epsilon$ , 而是一个 2 阶张量  $\epsilon_{ij}$ .

在强场作用下许多介质呈现非线性现象, 这情形下  $\mathbf{D}$  不仅与  $\mathbf{E}$  的一次式有关, 而且与  $\mathbf{E}$  的二次式、三次式等都有关系. 在非线性介质中,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的一般关系为

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} E_j E_k + \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijkl} E_j E_k E_l + \cdots \tag{4.28}$$

除第一项外, 其他各项都是非线性项. (4.28) 式在非线性光学中有重要的应用.

铁磁性物质的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的关系也是非线性的, 而且是非单值的. 一定的  $\mathbf{H}$  所对应的  $\mathbf{B}$  值依赖于磁化过程. 一般用磁化曲线和磁滞回线表示铁磁性物质的  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{H}$  的关系.

由以上的例子可以看出物质的电磁性质是多样的, 这种多样性使得各种物质材料有多方面的特殊应用. 为了研究各种物质的电磁性质, 必须从物质的微观结构着手. 这超出了本课程的学习范围, 本书不准备详细讨论这些问题.

## § 5 电磁场边值关系

麦克斯韦方程组可以应用于任何连续介质内部. 但是, 在两介质分界面上, 由于一般出现面电荷电流分布, 使物理量发生跃变, 微分形式的麦克斯韦方程组不再适用. 因此, 在介质分界面上, 我们要用另一种形式描述界面两侧的场强以及界面上电荷电流的关系.

在电场作用下, 介质界面上一般出现面束缚电荷和电流分布. 这些电荷电流的存在又使得界面两侧场量发生跃变. 例如图 1-11(a) 所示的介质与真空分界的情形, 在外电场  $\mathbf{E}_0$  作用下, 介质界面上产生面束缚电荷, 这些束缚电荷本身激发的电场在介质内与  $\mathbf{E}_0$  反向, 在真空中与  $\mathbf{E}_0$  同向. 束缚电荷激发的电场与外电场  $\mathbf{E}_0$  叠加后得到的总电场如图 1-11(b) 所示, 由图看出两边的电场  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  在界面上发生跃变. 边值关系就是描述两侧场量与界面上电荷电流的关系. 由于场量跃变的原因是面电荷电流激发附加的电磁场, 而积分形式的麦克斯韦方程组可以应用于任意不连续分布的电荷电流所激发的场, 因此研究边值关系的基础是积分形式的麦克斯韦方程组. 下面我们分别求出场量的法向分量和切向分量的跃变.

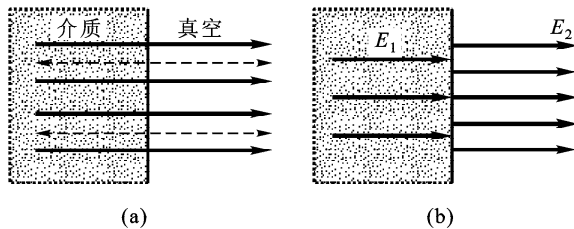


图 1-11

## 1. 法向分量的跃变

麦克斯韦方程组(4.23)式的积分形式为

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q_f \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

式中  $I_f$  为通过曲面  $S$  的总自由电流,  $Q_f$  为闭合曲面内的总自由电荷. 把这组方程应用到界面上可以得到两侧场量的关系.

为了弄清楚边值关系的物理意义, 我们先把总电场的麦克斯韦方程

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_f + Q_p \quad (5.2)$$

应用到两介质边界上的一个扁平状柱体(图 1-12). 上式左边的面积分遍及柱体的上下底和侧面,  $Q_f$  和  $Q_p$  分别为柱体内的总自由电荷和总束缚电荷, 它们等于相应的电荷面密度  $\sigma_f$  和  $\sigma_p$  乘以底面积  $\Delta S$ . 当柱体的厚度趋于零时, 对侧面的积分趋于零, 对上下底积分得  $(E_{2n} - E_{1n})\Delta S$ . 由(5.2)式得

$$\epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma_f + \sigma_p \quad (5.3)$$

由(4.4)式有

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_p \quad (5.4)$$

两式相加, 利用  $D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} + P_{1n}$ ,  $D_{2n} = \epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$ , 得

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \quad (5.5)$$

由(5.3)~(5.5)式看出, 极化矢量法向分量  $P_n$  的跃变与束缚电荷面密度相关,  $D_n$  的跃变与自由电荷面密度相关,  $E_n$  的跃变与总电荷面密度相关.

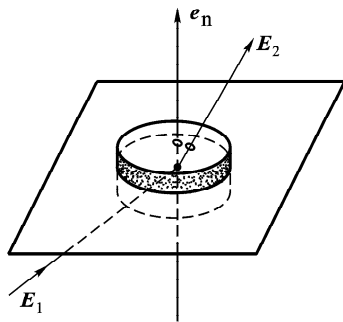


图 1-12

由上面的推导我们可以看清楚面自由电荷和面束缚电荷在边值关系中所起的作用. 由于在通常情形下只给出自由电荷, 因此实际上主要应用到边值关系(5.5)式, 即  $D_n$  的跃变式.  $D_n$  的跃变式可以较简单地由麦克斯韦方程组的积分形式直接得出. 把(5.1)第三式直接用到图 1-12 的扁平状区域上, 由于侧面的积分趋于零, 得

$$(D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_f \Delta S$$

由此立刻可得(5.5)式.

对于磁场  $\mathbf{B}$ , 把(5.1)第四式应用到边界上的扁平状区域上, 重复以上推导可以得到

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (5.6)$$

## 2. 切向分量的跃变

面电荷分布使界面两侧电场法向分量发生跃变. 下面我们证明面电流分布使界面两侧磁场切向分量发生跃变. 为此先说明表面电流分布的概念.

我们知道, 高频电流有所谓趋肤效应, 即高频电流只分布在导体表面很薄的一层上. 根据所研究问题性质的不同, 对这种电流分布可以有两种不同的描述方法. 一种是对它作比较细致的描述, 即把它作为体电流分布  $\mathbf{J}$  而研究它如何在薄层内变化. 另一种描述是对它作整体的描述, 即不讨论它如何在薄层内分布, 而把薄层看作几何面, 把薄层内流过的体电流看作集中在几何面上的面电流. 这两种描述方法在不同情况下都会应用到.

面电流分布的另一例子是磁性物质表面上的磁化电流. 例如一根沿轴向均匀磁化的铁棒, 其内部分子磁矩都有一定取向. 如图 1-13, 在铁棒内部, 分子电流互相抵消, 但在靠近棒侧面上的分子电流则构成宏观的磁化电流面分布.

由这些例子可见, 面电流实际上是在靠近表面的相当多分子层内的平均宏观效应. 设想薄层的厚度趋于零, 则通过电流的横截面变为横截线. 定义电流线密度  $\alpha$ , 其大小等于垂直通过单位横截线的电流. 图 1-14 表示界面的一部分, 其上有面电流, 其线密度为  $\alpha$ ,  $\Delta l$  为横截线. 垂直流过  $\Delta l$  段的电流为

$$\Delta I = \alpha \Delta l \quad (5.7)$$

由于存在面电流, 在界面两侧的磁场强度发生跃变. 如图 1-15, 在界面两旁取一狭长形回路, 回路的一长边在介质 1 中, 另一长边在介质 2 中. 长边  $\Delta l$  与面电流  $\alpha$  正交. 把麦克斯韦方程组(5.1)第二式应用到狭长形回路上. 取回路上、下边深入到足够多分子层内部, 使面电流完全通过回路内部. 从宏观来说回路短边的长度仍可看作趋于零, 因而有

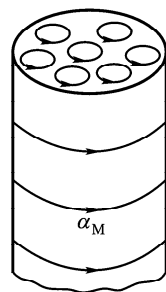


图 1-13



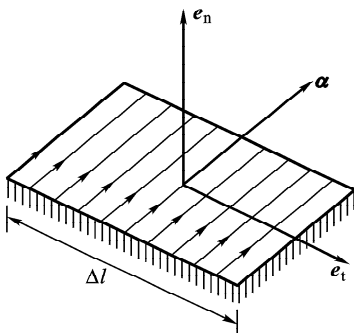


图 1-14

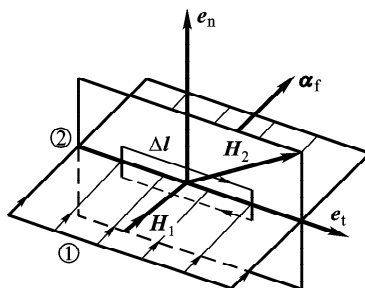


图 1-15

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{2t} - H_{1t}) \Delta l$$

其中  $\mathbf{e}_t$  表示沿  $\Delta l$  方向的单位矢量. 通过回路内的总自由电流为

$$I_f = \alpha_f \Delta l$$

由于回路所围面积趋于零, 而  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  为有限量, 因而

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

把这些式子代入(5.1)第二式中得

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f \quad (5.8)$$

上式可以用矢量形式表示. 设  $\Delta l$  为界面上任一线元,  $\mathbf{e}_n$  为界面的法线方向单位矢量. 流过  $\Delta l$  的自由电流为

$$I_f = \mathbf{e}_n \times \Delta l \cdot \boldsymbol{\alpha}_f = \boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{e}_n \cdot \Delta l$$

对狭长形回路用麦克斯韦方程组(5.1)第二式得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \Delta l = I_f = \boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{e}_n \cdot \Delta l$$

由于  $\Delta l$  为界面上任一矢量, 因此

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{e}_n$$

式中  $//$  表示投射到界面上的矢量. 上式再用  $\mathbf{e}_n$  矢乘, 注意到  $\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ , 而且  $\mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_f = 0$ , 得

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f \quad (5.9)$$

这就是磁场切向分量的边值关系.

同理, 由(5.1)第一式可得电场切向分量的边值关系:

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (5.10)$$

此式表示界面两侧  $\mathbf{E}$  的切向分量连续.

以后在公式中出现的  $\sigma$  和  $\boldsymbol{\alpha}$ , 除特别声明者外, 都代表自由电荷面密度和自

由电流线密度,不再写出下角标 f. 总括我们得到的边值关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

$\mathbf{e}_n$  是从介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量. 这组方程和麦克斯韦方程组(5.1)式一一对应. 边值关系表示界面两侧的场与界面上电荷电流的制约关系, 它们实质上是边界上的场方程. 由于实际问题往往含有几种介质以及导体在内, 因此, 边值关系的具体应用对于解决实际问题是十分重要的.

**例** 无穷大平行板电容器内有两层介质(图 1-16), 极板上电荷密度为  $\pm\sigma_f$ , 求电场和束缚电荷分布.

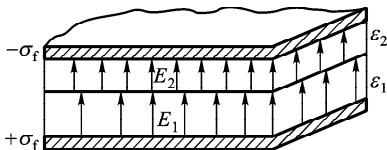


图 1-16

**解** 由对称性可知电场沿垂直于平板的方向. 把(5.11)式应用于下板与介质 1 界面上, 因导体内场强为零, 故得

$$D_1 = \sigma_f$$

同样, 把(5.11)式应用到上板与介质 2 界面上得

$$D_2 = \sigma_f$$

由这两式得

$$E_1 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_2}$$

束缚电荷分布于介质表面上. 在两介质界面处,  $\sigma_f = 0$ , 由(5.3)式得

$$\sigma_P = \epsilon_0 (E_2 - E_1) = \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right) \sigma_f$$

在介质 1 与下板分界处, 由(5.3)式得

$$\sigma'_P = -\sigma_f + \epsilon_0 E_1 = -\sigma_f \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right)$$

在介质 2 与上板分界处

$$\sigma''_P = \sigma_f - \epsilon_0 E_2 = \sigma_f \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right)$$

容易验证,  $\sigma_P + \sigma'_P + \sigma''_P = 0$ , 介质整体是电中性的.

## § 6 电磁场的能量和能流

电磁场是一种物质,它具有内部运动.电磁场的运动和其他物质运动形式相比有它特殊性的一面,但同时也有普遍性的一面,即电磁场运动和其他物质运动形式之间能够互相转化.这种普遍性的反映是各种运动形式有共同的运动量度——能量.我们对一种新的运动形态的认识是通过它和已知的运动形态的能量守恒定律来得到的.下面我们将通过电磁场和带电物体相互作用过程中,电磁场的能量和带电物体运动的机械能相互转化来求出电磁场的能量表达式.

### 1. 场和电荷系统的能量守恒定律的一般形式

下面我们先一般地考虑怎样描述场的运动能量问题.以天线辐射电磁波的过程为例,在这个过程中,电磁能量随着电磁波的运动不断地从天线传向远方.在空间各点上,都可以接收到电磁波的能量,但是同一接收器在不同点上的接收功率是不同的,它与离天线的距离有关,而且也方向有关.由此可见,能量是按一定方式分布于场内的,而且由于场在运动着,场能量不是固定地分布于空间中,而是随着场的运动而在空间中传播.因此,我们需要引入两个物理量来描述电磁场的能量:

(1) 场的能量密度  $w$ ,它是场内单位体积的能量,是空间位置  $\mathbf{x}$  和时间  $t$  的函数,  $w = w(\mathbf{x}, t)$ ;

(2) 场的能流密度  $\mathbf{S}$ ,它描述能量在场内的传播.  $\mathbf{S}$  在数值上等于单位时间垂直流过单位横截面的能量,其方向代表能量传输方向.

场和电荷相互作用时,能量就在场和电荷之间转移.例如在接收电磁波的过程中,电磁场作用于接收天线的自由电荷上,引起天线上的电流,电磁波的一部分能量即转化为接收系统上的电磁能量.由此,场和电荷之间,场的一区域与另一区域之间,都可能发生能量转移.在转移过程中总能量是守恒的.

考虑空间某区域  $V$ ,其界面为  $S$ .设  $V$  内有电荷电流分布  $\rho$  和  $\mathbf{J}$ .能量守恒定律要求单位时间通过界面  $S$  流入  $V$  内的能量等于场对  $V$  内电荷作功的功率与  $V$  内电磁场能量增加率之和.

以  $\mathbf{f}$  表示场对电荷作用力密度,  $\mathbf{v}$  表示电荷运动速度,则场对电荷系统所作的功率为

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV$$

$V$  内场的能量增加率为

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV$$

通过界面  $S$  流入  $V$  内的能量为

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

(为避免混淆,面元改写为  $d\boldsymbol{\sigma}$ ,式中的负号是由于我们规定界面的法线向外所致). 能量守恒定律的积分形式是

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \frac{d}{dt} \int_V w dV \quad (6.1)$$

相应的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (6.2)$$

若  $V$  包括整个空间,则通过无限远界面的能量应为零. 这时(6.1)式左边的面积分为零,因而

$$\int_{\infty} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} w dV \quad (6.3)$$

此式表示场对电荷所作的总功率等于场的总能量减小率,因此场和电荷的总能量守恒.

## 2. 电磁场能量密度和能流密度表示式

下面我们根据场和电荷相互作用的规律——麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式来求出电磁场的能量密度和能流密度的具体表示式. 由洛伦兹力公式得

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (6.4)$$

把此式与(6.2)式比较,为了求得  $\mathbf{S}$  和  $w$ ,需要用麦克斯韦方程组把  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  全部用场量表出. 由麦克斯韦方程组(4.23)的第二式,即

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

得

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.5)$$

用矢量分析公式(附录 I.21 式)及麦克斯韦方程组得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.6)$$

代入(6.5)式得

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

和(6.2)式比较得到能流密度  $\mathbf{S}$  和能量密度变化率  $\partial w / \partial t$  的表示式

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.9)$$

能流密度  $\mathbf{S}$  也称为坡印亭 (Poynting) 矢量, 是电磁波传播问题的一个重要物理量.

下面我们分两种情形讨论所得的结果.

(1) 真空中电荷分布情形. 这情况下相互作用的物质是电磁场和自由电荷, 能量在两者之间转移. 在真空中:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ \omega &= \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$\omega$  是真空中电磁场的能量密度.

(2) 介质内的电磁能量和能流. 介质 (包括导电物质) 内既有自由电荷也有束缚电荷. 这情况下相互作用的系统包括三个方面: 电磁场、自由电荷和介质. 场对自由电荷所作的功率密度为  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ , 它或者变为电荷的动能, 或者变为焦耳热. 场对介质中束缚电荷所作的功转化为极化能和磁化能而储存于介质中, 也可能有一部分转化为分子热运动 (介质损耗). 当外场变化时, 极化能和磁化能亦发生变化, 如果不计及介质损耗, 则这种变化是可逆的. 介质的极化和磁化状态由介质电磁性质方程确定, 一定的宏观电磁场对应于一定的介质极化和磁化状态, 因此我们把极化能和磁化能归入场能中一起考虑, 成为介质中的总电磁能量. (6.8) 式和 (6.9) 式中的  $\mathbf{S}$  和  $\omega$  就是代表这种电磁能量的能流密度和能量密度. 由 (6.9) 式, 介质中场能量的改变量为

$$\delta \omega = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (6.11)$$

在线性介质情形,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , 上式可以积分得场能量密度表示式为

$$\omega = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.12)$$

但必须注意此式仅适用于线性介质. 在一般情况下, 必须应用普遍的公式 (6.11).

### 3. 电磁能量的传输

在电磁波情形中, 能量在场中传播的实质, 一般是容易理解的. 但是在恒定电流或低频交流电情况下, 由于通常只需解电路方程, 不必直接研究电磁场量, 人们往往忽视能量在场中传播的实质. 事实上, 在这种情形下, 电磁能量也是在场中传输的, 在电路中, 物理系统的能量包括导线内部电子运动的动能和导线周围空间中的电磁场能量. 我们先看电子运动的动能. 导线内的电流密度为

$$\mathbf{J} = \sum e \mathbf{v} = ne \bar{\mathbf{v}}$$

式中 $\Sigma$ 号表示对单位体积内自由电子求和,  $n$  为单位体积自由电子数,  $\bar{v}$  为电子运动平均漂移速度. 一般金属导体内有  $n \sim 10^{23}/\text{cm}^3$ , 对于  $1 \text{ A/mm}^2$  的电流密度来说,  $J = 10^6 \text{ A/m}^2$ , 电子电荷  $e \sim 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 把这些数值代入上式得  $\bar{v} \sim 6 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ . 由此可见, 导体内自由电子的平均漂移速度是很小的, 相应的动能也很小. 而且, 在恒定情况下, 整个回路(包括负载电阻上), 电流  $I$  都有相同的值, 因此, 电子运动的能量并不是供给负载上消耗的能量. 在负载上以及在导线上消耗的功率完全是在场中传输的. 导线上的电流和周围空间或介质内的电磁场互相制约, 使电磁能量在导线附近的电磁场中沿一定方向传输. 在传输过程中, 一部分能量进入导线内部变为焦耳热损耗; 在负载电阻上, 电磁能量从场中流入电阻内, 供给负载所消耗的能量. 在第三章我们再详细讨论导体上的电流和导体周围电磁场的相互制约关系. 下面举一例说明恒定情况下的电磁能量传输问题.

**例** 同轴传输线内导线半径为  $a$ , 外导线半径为  $b$ , 两导线间为均匀绝缘介质(图 1-17). 导线载有电流  $I$ , 两导线间的电压为  $U$ .

(1) 忽略导线的电阻, 计算介质中的能流密度  $\mathbf{S}$  和传输功率;

(2) 计及内导线的有限电导率, 计算通过内导线表面进入导线内的能流, 证明它等于导线的损耗功率.

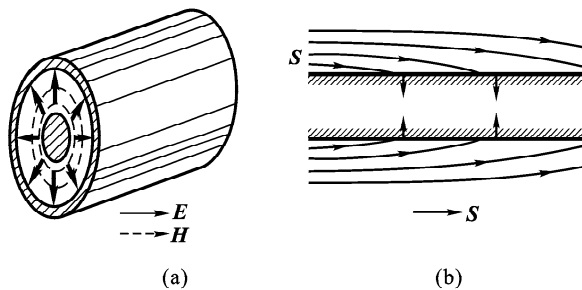


图 1-17

**解** (1) 以距对称轴为  $r$  的半径作一圆周 ( $a < r < b$ ), 应用安培环路定律, 由对称性得  $2\pi r H_\phi = I$ , 因而

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

导线表面上一般带有电荷, 设内导线单位长度的电荷(电荷线密度)为  $\tau$ , 应用高斯定理, 由对称性可得  $2\pi r E_r = \tau/\epsilon$ , 因而

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}$$

能流密度为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_r H_\phi \mathbf{e}_z = \frac{I\tau}{4\pi^2 \epsilon r^2} \mathbf{e}_z$$

式中  $\mathbf{e}_z$  为沿导线轴向单位矢量.

两导线间的电压为

$$U = \int_a^b E_r dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

因而

$$\mathbf{S} = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_z$$

把  $\mathbf{S}$  对两导线间圆环状截面积分得传输功率为

$$P = \int_a^b \mathbf{S} \cdot 2\pi r dr = \int_a^b \frac{UI}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} dr = UI$$

$UI$  即为通常在电路问题中的传输功率表示式, 这功率是在场中传输的.

(2) 设内导线的电导率为  $\sigma$ , 由欧姆(Ohm)定律, 在导线内部有

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \mathbf{e}_z$$

由于电场切向分量是连续的, 因此在紧贴内导线表面的介质内, 电场除有径向分量  $E_r$  外, 还有切向分量  $E_z$ :

$$E_z \Big|_{r=a} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

因此, 能流  $\mathbf{S}$  除有沿  $z$  轴传输的分量  $S_z$  外, 还有沿径向进入导线内的分量  $-S_r$ :

$$-S_r = E_z H_\phi \Big|_{r=a} = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}$$

流进长度为  $\Delta l$  的导线内部的功率为

$$-S_r \cdot 2\pi a \Delta l = I^2 \frac{\Delta l}{\pi a^2 \sigma} = I^2 R$$

式中  $R$  为该段导线的电阻,  $I^2 R$  正是该段导线内的损耗功率. 在有损耗的同轴线芯线附近能流密度如图 1-17(b) 所示.

## 习 题

1. 根据算符  $\nabla$  的微分性与矢量性, 推导下列公式:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

2. 设  $u$  是空间坐标  $x, y, z$  的函数, 证明:

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du}$$

3. 设  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  为源点  $\mathbf{x}'$  到场点  $\mathbf{x}$  的距离,  $\mathbf{r}$  的方向规定为从源点指向场点.

(1) 证明下列结果, 并体会对源变数求微商  $(\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'})$  与对场变数求微商  $(\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z})$  的关系:

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (r \neq 0)$$

(最后一式在  $r=0$  点不成立, 见第二章 §5).

(2) 求  $\nabla \cdot \mathbf{r}, \nabla \times \mathbf{r}, (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r}, \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), \nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  及  $\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ , 其中  $\mathbf{a}, \mathbf{k}$  及  $\mathbf{E}_0$  均为常矢量.

4. 应用高斯定理证明

$$\int_V dV \nabla \times \mathbf{f} = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f}$$

应用斯托克斯(Stokes)定理<sup>①</sup>证明

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi = \oint_L d\mathbf{l} \varphi$$

5. 已知一个电荷系统的偶极矩定义为

$$\mathbf{p}(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{x}' dV'$$

利用电荷守恒定律  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  证明  $\mathbf{p}$  的变化率为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) dV'$$

6. 若  $\mathbf{m}$  是常矢量, 证明除  $R=0$  点以外, 矢量  $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}$  的旋度等于标量  $\varphi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$  的梯度的负值, 即

① 数学上, 斯托克斯定理即用曲面积分来表示曲线积分:

$$\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi \quad (R \neq 0)$$

其中  $R$  为坐标原点到场点的距离, 方向由原点指向场点.

7. 有一内外半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的空心介质球, 介质的电容率为  $\epsilon$ . 使介质内均匀带静止自由电荷密度  $\rho_f$ , 求

(1) 空间各点的电场;

(2) 极化体电荷和极化面电荷分布.

答案:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{(r_2^3 - r_1^3)\rho_f}{3\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & (r > r_2) \\ \frac{(r^3 - r_1^3)\rho_f}{3\epsilon r^3} \mathbf{r} & (r_1 < r < r_2) \\ 0 & (r < r_1) \end{cases}$$

$$\rho_p = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\rho_f \quad (r_1 < r < r_2)$$

$$\sigma_p = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3r_2^2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\rho_f \quad (r = r_2)$$

$$\sigma_p = 0 \quad (r = r_1)$$

8. 内外半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的无穷长中空导体圆柱, 沿轴向流有恒定均匀自由电流  $\mathbf{J}_f$ . 导体的磁导率为  $\mu$ . 求磁感应强度和磁化电流.

答案:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0(r_2^2 - r_1^2)}{2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r} & (r > r_2) \\ \frac{\mu(r^2 - r_1^2)}{2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r} & (r_1 < r < r_2) \\ 0 & (r < r_1) \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\mathbf{J}_f \quad (r_1 < r < r_2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_M = -\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2} \mathbf{J}_f \quad (r = r_2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_M = 0 \quad (r = r_1)$$

9. 证明均匀介质内部的极化电荷体密度  $\rho_p$  总是等于自由电荷体密度  $\rho_f$  的  $-\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$  倍.

10. 证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等, 方向相反(但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律).

11. 平行板电容器内有两层介质, 它们的厚度分别为  $l_1$  和  $l_2$ , 电容率为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ , 今在两板接上电动势为  $\mathcal{E}$  的电池, 求:

(1) 电容器两板上的自由电荷面密度  $\omega_f$ ;

(2) 介质分界面上的自由电荷面密度  $\omega_f$ .

若介质是漏电的, 电导率分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 当电流达到恒定时, 上述两问题的结果如何?

答案:

介质绝缘时,

$$\omega_{f1} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{l_1}{\epsilon_1} + \frac{l_2}{\epsilon_2}} = -\omega_{f2}$$

介质分界面上,

$$\omega_{f3} = 0$$

介质漏电时,

$$\omega_{f1} = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 \mathcal{E}}{\sigma_2 l_1 + \sigma_1 l_2}$$

$$\omega_{f2} = \frac{-\epsilon_2 \sigma_1 \mathcal{E}}{\sigma_2 l_1 + \sigma_1 l_2}$$

介质分界面上,

$$\omega_{f3} = \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \sigma_2 \epsilon_1}{\sigma_2 l_1 + \sigma_1 l_2} \mathcal{E} \quad (\omega_{f1} + \omega_{f2} + \omega_{f3} = 0)$$

12. 证明

(1) 当两种绝缘介质的分界面上不带面自由电荷时, 电场线的曲折满足

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

其中  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  分别为两种介质的介电常数,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为界面两侧电场线与法线的夹角.

(2) 当两种导电介质内流有恒定电流时, 分界面上电场线的曲折满足

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

其中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为两种介质的电导率.

13. 试用边值关系证明: 在绝缘介质与导体的分界面上, 在静电情况下, 导体外表面的电场线总是垂直于导体表面; 在恒定电流情况下, 导体内表面电场线总是平行于导体表面.

14. 内外半径分别为  $a$  和  $b$  的无限长圆柱形电容器, 单位长度荷电为  $\lambda_f$ , 板间填充电导率为  $\sigma$  的非磁性物质.

(1) 证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消, 因此内部无磁场.

(2) 求  $\lambda_f$  随时间的衰减规律.

(3) 求与轴相距为  $r$  的地方的能量耗散功率密度.

(4) 求长度为  $l$  的一段介质总的能量耗散功率, 并证明它等于这段的静电能减少率.

答案:

$$(2) \lambda_f = \lambda_{f0} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

$$(3) \sigma \left( \frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon r} \right)^2$$

$$(4) \frac{l\sigma\lambda_f^2}{2\pi\epsilon^2} \ln \frac{b}{a}$$