第四讲

<u>上次课</u>

- 有用的公式：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\,,\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\vec{R})$
- 静电、静磁之间的完美对称
- Maxwell 对一般情况下的电磁理论的推广：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

<u>第四条公式</u>

如果在一般情况下我们仍然想将环路定理写成

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{G} \tag{1.4.6}$$

的形式，则有如下要求

1）矢量$\vec{G}$在静态时回到$\vec{j}$；

2）上式应与电荷守恒定律协调。

为了寻找$\vec{G}$的形式，我们将（1.4.6）式两边求散度，得到对$\vec{G}$的限制条件为

$$\nabla\cdot\vec{G}(\vec{r},t)=0 \tag{1.4.7}$$

再考察电荷守恒定律（1.4.1），注意到$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$（第一条方程），则有

$$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)=0$$

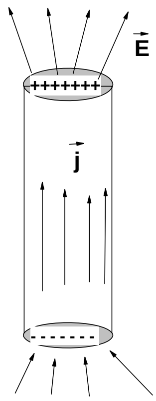
因此，一个自然的选择是$\vec{G}=\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$（显然上述定义使得$\vec{G}$在静态时回到$\vec{j}$）。故，安培环路定理可以推广为

$$\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}} \tag{1.4.8}$$

式中的$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$称为位移电流，与传导电流有着相同的量纲，但却不是实际的传导电流。可以把位移电流理解成电流线的延续。如下图所示，在一段有限长度的金属棒中激发电流，因电流遇到边界不能继续，必然在金属线的两端产生电荷积累，同时会导致电流的变化。电荷的产生就会在空间产生变化的电场，而其恰恰是补偿真实的传导电流的变化的。从**物理上讲，电流的非稳恒性与电荷的积累$\dot{\rho}$通过流守恒定律$\nabla\cdot\vec{j}+\dot{\rho}=0$相互关联，而后者又反映到空间电场的变化。**

根据上面的分析，Maxwell 总结出真空中电磁场的所满足的普遍规律为

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0 \\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\
\nabla\cdot\vec{B}=0 \\
\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}
\end{cases}
$$



在没有源（$\vec{j}=0,\rho=0$）的空间中，则 Maxwell 方程变为

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E}=0 \\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\
\nabla\cdot\vec{B}=0 \\
\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}
\end{cases}
$$

我们看到电场/磁场具有近乎完美的对称性，除了 2 点：

1）公式（2）与（4）在系数上仍有差异；

2）有个正负号的差异。

对第 1 点，后面我们会发现这是个历史的误会；对第 2 点，这个正负号的差异是至关重要的，没有这个符号的差别，电磁波就不复存在，世界就可能是另一个面目。位移电流的引入从另一个侧面深刻揭示了电场和磁场之间的联系：不仅变化的磁场激发电场，变化着的电场同样激发磁场，两者都以祸旋形式激发，并左右手对称。

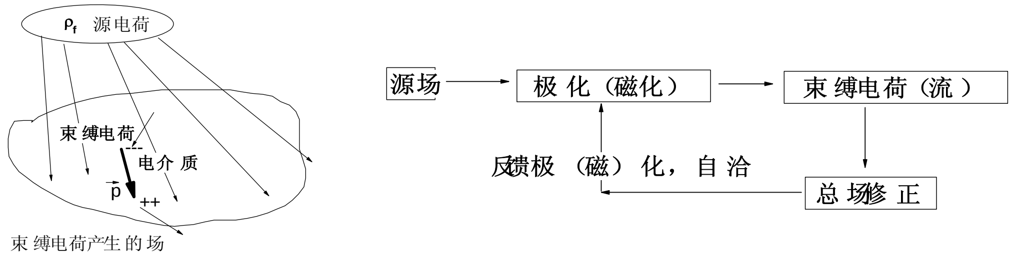
注：有人说 Maxwell 只干了引入位移电流这一件事，其他的 3.5 个方程都是别人的功劳，这非常不公平。从本节的学习中我们可以看到，Maxwell 方程组的每一条公式的建立都不是显而易见的，事实上，与其他静态时的实验定律（库伦定律、安培定律）不同，Maxwell 方程组的建立并没有坚实的实验基础， 而是 Maxwell 的一些合理的推广. 在这个意义上讲，Maxwell 建立这组方程时的勇气是巨大的。这个方程的直接预言是电磁波，Maxwell 试图自己做实验验证电磁波却没有成功。Maxwell 方程组的正确性直到几十年后 Hertz 的实验出来后才被证实。最后，Maxwell 方程的建立使得电磁现象与光学现象联系起来，从此人们对光学有了定量的认识。

§1.5 介质中的麦克斯韦方程组

前面我们了解了真空中的电磁理论。然而，人们更关心介质中的电磁场行为，其实，即使空气也是一种特殊的电磁介质。在我们仔细考虑电磁介质中的电磁理论之前，有一点核心问题必须澄清-

电磁场的最终来源是电荷及电流，只要空间某处存在某种电荷/电流（无论其起源），就有电磁场产生，而与那个地方有无物质/什么物质无关！

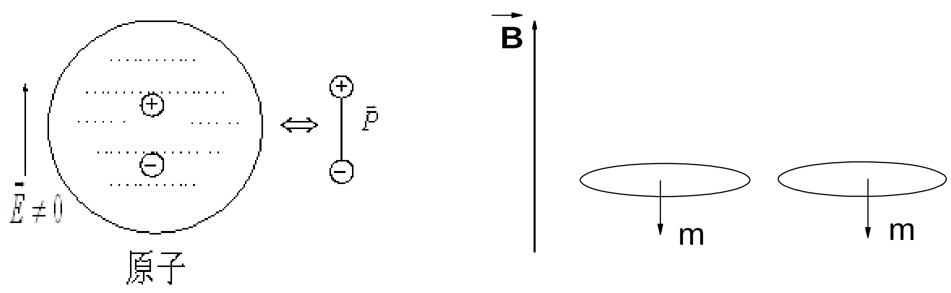
有了这点基本认识，我们研究电磁介质中的电磁场就归结为寻找当有电磁介质存在时的总的电荷/电流分布。在具体研究之前，首先理一理脉络。在空间施加由处于很远处的电荷（流）产生的电（磁）场，当在这个场中放入一块电（磁）介质时，电（磁）介质在外电（磁）场的作用下被极（磁）化，产生电（磁）偶极子。电（磁）偶极子的产生使得空间中不再为电（磁）中性，从而产生了束缚于电（磁）介质的极化（磁化）电荷（电流），这些束缚电荷（电流）与处于远处的自由电荷（电流）一样可以产生电磁场，因此它们一起产生了空间的总场。介质的极化（磁化）是由空间的总场决定的，因为场，无论是由源电荷产生的，还是由极（磁）化电荷（流）产生的，都会作用到介质中上。因此介质的极化（磁化）应与空间总场达到平衡。用图形可以表示为



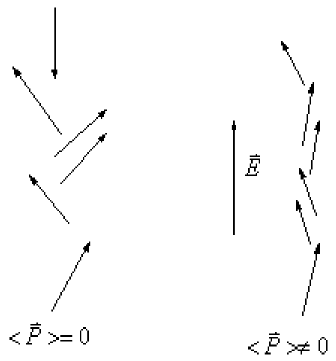
因此，理解了上图中所有的过程后，我们才能对介质中的电磁场有完整的理解。

1. 介质的极化及磁化

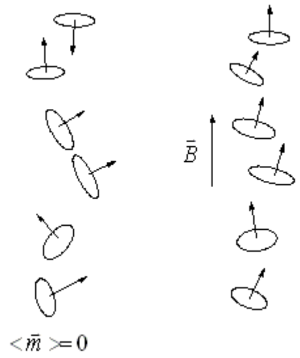
当电介质放置于电场中时，正负电荷被电场拉开，产生电偶极子，这个过程叫极化。同样，一个无磁性的磁介质被放置于外磁场中时，原本杂乱无章运动的电子在外磁场的作用下产生一个个分子环流（亦即磁偶极子），这个过程被称作磁化。



极化和磁化的过程还有另外的可能性。体系中的构成单元原本是带有固有电（磁）偶极距的，但在无外加电（磁）场的时候这些电（磁）极距杂乱排列，不显



水



顺磁介质

示出极（磁）性；当外加电（磁）场时，这些原本杂乱排列的电（磁）偶极子沿着电（磁）场排列，产生宏观电（磁）矩。为了描述极化（磁化）的大小，定义极化（磁化）强度两个宏观量，其定义为单位体积内的偶极子的大小（多少），

$$\vec{P}=\frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \qquad \vec{M}=\frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \tag{1.5.1}$$

显然，电（磁）场越大，极（磁）化强度也越大。对第一种情况上述结论显而易见，对第二种情况，只要考虑外场效应（趋向于使电磁矩平行排列）与温度效应（趋向于它们无规排列）之间的竞争即可以明白。在低场近似下，很多材料对电磁场程线性响应，即

$$\vec{P}(\vec{r},t)=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r},t), \qquad \vec{M}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B}(\vec{r},t) \tag{1.5.2}$$

其中，χ_e,χ_m 为极化（磁化）率。这就是介质极化（磁化）的基本图像，计算 χ_e,χ_m 要用到微观理论，即牛顿力学或者量子力学。***需要强调指出的是，这里 $\vec{E},\vec{B}$ 应当是介质分子在此处感受到的局域总场，因为只要是场，无论是源场还是极（磁）化电荷（流）产生的场，都可以对介质产生作用力。***

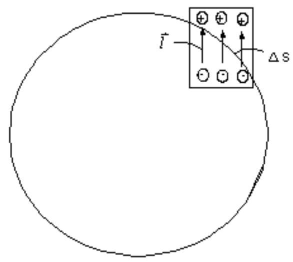
2．极（磁）化电荷（流）

（A）极化

极化电荷　由于极化，正负电荷间发生了相对位移，每处的正负电荷可能不完全抵消，这样就呈现出束缚在介质中的宏观电荷，称为**极化电荷**。

假设空间的极化强度分布为 $\vec{P}(\vec{r})$，我们在 **r** 点附近取一块宏观小微观大的区域τ，其边界由 $\vec{S}$ 给定，计算这中间包含的极化总电荷 Q_p。显然，完全处于区域内部或完全处于区域外部的偶极子对 Q_p 均没有贡献，只有那些穿过 $\vec{S}$ 的偶极子才有贡献。

若极化时正负电荷拉开的位移为 $\vec{l}$，取一小块边界 $d\vec{S}$，



则在体积$\vec{l}\cdot d\vec{S}$内的每一个偶极子都会因为穿过界面而在体积内部留下一个负的静电荷 q（如右图所示）。设介质此处的偶极子数密度为n，则这些偶极子对区域内的净电荷数为$dQ_P=-qn\vec{l}\cdot d\vec{S}=-\vec{P}\cdot d\vec{S}$。$\vec{P}$为此处的极化强度。考虑所有穿过界面的偶极子的贡献后，则留在τ区域内的总的束缚电荷为

$$Q_P=-\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S} \tag{1.5.3}$$

利用 Gauss 定理，容易得到

$$\boxed{\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}} \tag{1.5.4}$$

式中ρ_P称为**极化电荷密度**.

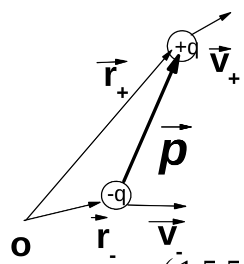
注：仔细思考后会发现（1.5.4）大有问题。比如对一个均匀极化的介质$P=const.$，（1.5.4）告知体内无极化电荷分布。然而实际上极化后每个分子都呈现为一个偶极子，因此细致到分子的尺度上，极化电荷的分布是非常不均匀的，不可能为 0。从数学上讲，（1.5.3）是正确的，但条件是积分区域必须是宏观大的。过渡到（1.5.4）就不是严格成立的了，因为 Gauss 定理可以使用的前提是（1.5.3）对任意积分区域都正确。但为什么我们还可以用（1.5.4）呢？这是因为在分子尺度上计算极化电荷以及其它物理量的分布是困难而且是没有必要的，因为我们所关心的（实验上所能测量的）是宏观小但微观大的一个区域内的物理量的平均值。因此，当我们考虑连续介质中的物理量时，一个空间的几何点是这样定义的：取这样一个区间 - 微观上足够大包含了许多极化后的偶极子，但宏观仍然足够小使得我们可以认为它是空间上的一个几何点，然后取这个区间内的微观量的平均值作为在这一几何点的场的数值。这事实上是电动力学处理连续介质的一个基本精髓。（1.5.2）及下面的所有处理、甚至是目前前沿的 Meta-material 的研究均基于这个基础。

极化电流　当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为**极化电流**，记为$\vec{j}_P$。考虑空间$\Delta\Omega$体积内存在有一个因极化而产生的偶极子，则极化电荷密度分布为$\rho_p(\vec{r})=\rho_++\rho_-=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_+)-q\delta(\vec{r}-\vec{r}_-)$。假设两个极化电荷的运动速度分别为$\vec{v}_+=\frac{d\vec{r}_+}{dt},\vec{v}_-=\frac{d\vec{r}_-}{dt}$，则运动引起的**极化电流密度为**

$$\vec{j}_P(\vec{r})=\rho_+\vec{v}_++\rho_-\vec{v}_-=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_+\vec{r}_++\rho_-\vec{r}_-\right]$$

注意到针对一个偶极子的空间极化强度为

$$\vec{P}=\frac{\vec{p}}{\Delta\Omega}=\frac{q(\vec{r}_+-\vec{r}_-)}{\Delta\Omega}=\rho_+\vec{r}_++\rho_-\vec{r}_-$$



所以

$$\boxed{\vec{j}_P=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}} \tag{1.5.5}$$

显然，根据叠加原理，上式在有许多偶极子存在时依然正确。同时我们注意到（1.5.5）与连续性方程一致。根据（1.5.4）和（1.5.5）可知

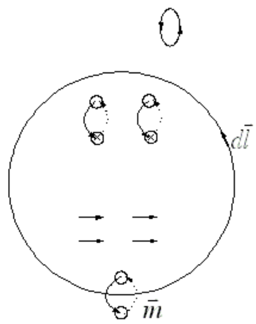
$$\nabla\cdot\vec{j}_P+\frac{\partial\rho_P}{\partial t}=\nabla\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{P}\equiv 0$$

与连续性方程一致

（B）磁化

磁化电流

介质被磁化后产生束缚于磁介质上的磁化电流。假设已知空间的磁化情况 $\vec{M}(\vec{r})$，我们来讨论磁化电流密度 $\vec{j}_M$。类似电介质的讨论，在一个具有磁化强度 $\vec{M}(\vec{r})$ 的磁介质中选取一个宏观大小的面 S，其边界由 $\oint d\vec{l}$ 描述，计算穿过 S 产生的总**磁化电流** I_M。磁化后产生大量的磁偶极子，每个磁偶极子对应一个分子环流。（1）若这些环流完全处于 S 内，则对 I_M 的贡献因环流 2 次穿过 S 而抵消；（2）若完全在 S 外，则根本没有贡献。*因此，只需计算那些与边界铰链的环流，因为它们只对 S 面内贡献一次电流。*考虑与一段边界 $d\vec{l}$ 铰链的分子环流。设每个分子环流电流为 i, 线圈面积为 $\Delta\vec{s}$，则显然在 $\Delta\vec{s}\cdot d\vec{l}$ 体积内的所有的磁偶极子都对 S 内的净电流有贡献。假设偶极子的体密度为 n. 则 $d\vec{l}$ 边界处对 I_M 的贡献为



$$dI_M=i\times\text{no. of m}=i\times n\Delta\vec{s}\cdot d\vec{l}=\vec{M}\cdot d\vec{l}$$

综合整个环路的贡献，得

$$I_m=\oint\vec{M}\cdot d\vec{l}\qquad（1.5.6）$$

利用 $I_M=\int\vec{j}_m\cdot d\vec{S}$ 及 Stokes 定理 $\oint\vec{M}\cdot d\vec{l}=\int\nabla\times\vec{M}\cdot d\vec{S}$，有

$$\boxed{\vec{j}_m=\nabla\times\vec{M}}\qquad（1.5.7）$$

其中 $\vec{j}_m$ 为描述束缚于磁介质内部的**磁化电流密度**。对上式两边取散度得

$$\nabla\cdot\vec{j}_m=0$$

这说明磁化电流不引起电荷的积累，因此不用考虑磁化电荷。

3. 介质中的 Maxwell 方程组

下面我们进行示意图中**第 3 步讨论** – 看看极（磁）化电流（荷）如何改变总电（磁）场。当介质存在时空间电荷包括自由电荷（源电荷）和极化电荷（束缚电荷），即

$$\rho_t = \rho_f + \rho_P = \rho - \nabla \cdot \vec{P},$$

式中 ρ_t 表示**总电荷**。介质中可能出现的电流有传导电流、极化电流和磁化电流，因此**总电流**为

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

在麦克斯韦方程组中，不管 ρ 和 j 的来源如何，只要是电荷或电流，它们都将在空间激发电场或磁场。所以，麦克斯韦方程组在介质存在的情况下应该修改成

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}\right) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu_0\left(\vec{j}_f + \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{P} + \nabla \times \vec{M}\right) \end{cases} \qquad (1.5.8)$$

原则上（1.5.8）不能求解，因为多了 2 个物理量，$\vec{P}, \vec{M}$。利用（1.5.2），我们可以将这 2 个物理量消除，则问题可以求解。因此，与真空中的电磁问题不同，介质中的电磁问题一定需要知道介质对外场的响应，如（1.5.2），不同的介质中的电磁行为完全不同！

然而（1.5.8）式中（1），（4）两式看似很复杂，右边即有原本的自由电荷（流）的“源”，又有极磁化后产生的新的场，物理意义不清晰。试图将所有的宏观量都表示成**自由电荷/电流**的函数，则引入两个辅助矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad (1.5.9)$$

代入方程组（1.5.8）式化简可得：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1.5.10)$$

其中新引入的辅助矢量 $\vec{D}$ 称为**电位移矢量**，$\vec{H}$ 称为**磁场强度**。***它们的导入使方***

程组只出现自由电荷和自由电流，仅仅是为了便于讨论问题。而它们本身不是真实的场，它们不会对身处其中的电荷/电流产生作用力。

4．本构关系

现在考虑示意图中最后一步：局域总场的改变是如何与极（磁）化程度自洽的。这就需要确定（1.5.8）中的极（磁）化强度等物理量如何与总电（磁）场自洽决定的。 换言之，必须确定麦克斯韦方程(1.5.10)导入量 $\vec{D},\vec{H}$ 与 $\vec{E},\vec{B}$ 之间的关系，才能求出方程组的解。这些关系式被称为<u>本构关系</u>，与具体的材料有关系 – 我们的世界之所以如此丰富多彩就是因为我们有各种各样的具有不同本构关系的介质。

对线性介质，其实我们已经知道了其对外加电磁场得响应（1.5.2），这本质上就是一种本构关系。进一步，利用（1.5.2）及（1.5.9）得

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{H} = \vec{B}/\mu, \end{cases} \tag{1.5.11}$$

其中

$$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \qquad \mu = \mu_r\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0 \tag{1.5.12}$$

叫做介电常数及磁导率，ε_r μ_r 称为相对介电常数及相对磁导率（无量纲量）。利用（1.5.9），可将（1.5.9）中第 2 式改写为 $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$，结合（1.5.11）可以看出，历史上以为 **H** 是基本量与 **E** 的地位相同，<u>**对磁化率的定义是针对 H 场的！**</u>将本构关系带入无源空间的 Maxwell 方程组，得

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

其中 E 和 H 完美对称。**另外需要指出的是：导体本身就是一种特殊的电磁介质，它的本构关系就是欧姆定律** $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

应当指出，这里我们给出的本构关系是最简单的一种（尽管是最常见的）- 极（磁）化对外场的响应呈现局域/即时/线形/各向同性的响应。更一般的情况下，本构关系可以非常丰富多彩：

（1） 在铁电和铁磁物质或强场情况下，$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$、$\vec{M}$ 与 $\vec{H}$ 之间将不再呈现线性关系；

（2） 对于各向异性的介质来说，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为 $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$；$B_i = \mu_{ik}H_k$；

（3） 在高频情况下，由于场变化得很快，以至于极化电荷和磁化电流跟不上场的变

化．这时的响应在最一般情形下可以写成 $\vec{D}(t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}(t')dt'$ *。但当外场随时间以频率* ω *简谐变化时，傅立叶分析显示对单频仍然有* $\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$ *。所以极化率和磁化率都将是频率的函数．因而* $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$, $\mu=\mu(\omega)$ *。*

（4） 有些材料响应是非局域的： $\vec{D}(\vec{r})=\int\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}')d\tau'$ *，也就是说，在* ***r'*** *处的扰动会在* ***r*** *出产生响应。这种效应又叫作空间色散。类似时间色散情形（3），对特定的以某一个* ***k*** *为波矢在空间变化的场，经过傅立叶变换可知，* $\vec{D}(\vec{k})=\varepsilon(\vec{k})\vec{E}(\vec{k})$ *此时* ε *是* ***k*** *的函数*

习题

P．31， 1.10， 1.11，1.19