第二章　复变函数的积分*

目　录

本章的 Cauchy 积分定理是整个解析函数理论的基础.

§1 复积分的定义和基本性质

一 曲线的方向

本书提到的曲线一般都指光滑或逐段光滑的平面曲线. 若一段曲线的方程为 $y = f(x)$，则光滑指的是 $f'(x)$ 连续. 若其方程为参数方程 $x = x(t)$、$y = y(t)$，则光滑指的是 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续. 由有限条光滑曲线衔接而成的曲线称为逐段光滑曲线. 折线就是最简单的逐段光滑曲线. 曲线的方向定义如下.

1. 简单曲线：没有重点的曲线称为简单曲线. 图 1 中的 a 是简单曲线，而 b 则不是. 简单曲线的方向由起点指向终点. 所以规定了起点和终点就确定了它的方向.

2. 围线（contour）：逐段光滑的简单闭曲线称为围线. 图 1 中的 c 是简单闭曲线，而 d 则不是.

如果沿着围线走，其所包围的区域在左边，则该方向称为正方向，其实就是逆时针方向.

二 复积分的定义与存在性

一元实变函数的积分定义在 x 轴上的有限区间内（无限区间的广义积分通过极限过程得到），而复变函数的积分（简称复积分）总是定义在曲线上，参看图 2.

定义（复积分） 设函数 $f(z)$ 沿曲线 C：$z = z(t)$（$\alpha \le t \le \beta$）有定义，在 C 上沿参数增加的方向从 $a = z(\alpha)$ 到 $b = z(\beta)$ 取分点

$$a = z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{k-1},\ z_k,\ \cdots,\ z_{n-1},\ z_n = b$$

将 C 分为 n 个弧段，在 z_{k-1} 至 z_k 的弧段上任取一点 ζ_k，作和数

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 若 $n \to \infty$ 且 $\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k| \to 0$ 时，$S_n \to I$，则称 $f(z)$ 沿 C 可积，并称 I 为 $f(z)$ 沿 C 的积分，记作

$$I = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

C 称为积分路径，沿相反方向的积分记作 $\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z$.

注 以上定义中指定参数 t 增加的方向，这对于明确积分的方向是很重要的. 因为当 $b = a$，即 C 为围线时，仅仅说“从 a 到 b”并不能确定方向. 不过应该注意，当 C 为围线时，参数 t 增加的方向不一定是逆时针方向. 比如，圆周 $z = z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$（$0 \le t \le 2\pi$），参数 t 增加的方向是逆时针方向，而圆周 $z = z(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$（$0 \le t \le 2\pi$），参数 t 增加的方向却是顺时针方向. 今后，如果没有指明参数，也没有其它特别说明，则沿围线 C 积分总是指逆时针方向的积分.

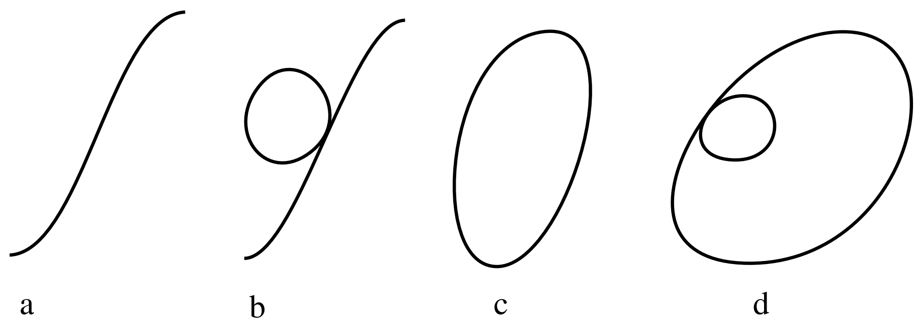

图 1 a 是简单曲线，而 b 不是；c 是简单闭曲线，而 d 不是

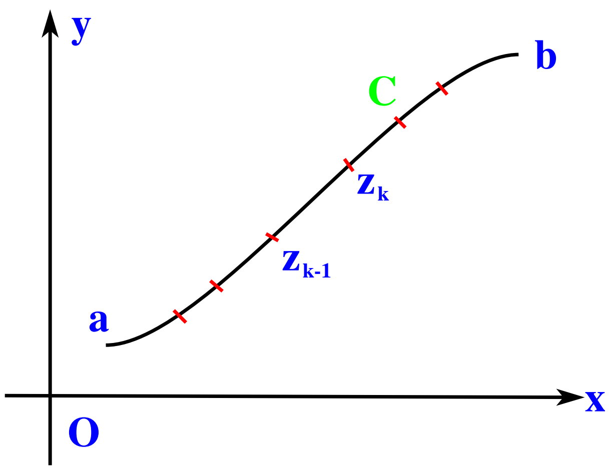

图 2 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分

以上积分的定义与实变函数积分的定义是很类似的. 在复变函数论中，积分理论具有非常基本的地位. 事实上，关于复积分的 Cauchy 积分定理是解析函数理论的基础. 解析函数的微分性质的证明大都是由这个定理出发的.

定义了复积分，首先遇到的问题是，给定函数和曲线，如何判断积分是否存在. 与实变情况类似，我们有下述

定理（积分存在） 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

注 形式上，只要将 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 和 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y$ 代入左边，分开实部和虚部，即可得到右边的结果. 这可以帮助我们把握这一公式，虽然不能用这种方法来证明它.

证明 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$，记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$，则 $\Delta z_k=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k$. 又设 $\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k$，记 $u_k=u(\xi_k,\eta_k)$，$v_k=v(\xi_k,\eta_k)$，则 $f(\zeta_k)=u_k+\mathrm{i}v_k$，于是

$$\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k),$$

由于 $f(z)$ 沿 C 连续，故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 沿 C 连续，所以上式右边两项均有极限，于是左边也有极

限，即 $f(z)$ 沿 C 可积. 上式的极限正是式 (1). 证毕.

式 (1) 同时也给出了复积分的计算方法，它把复积分的计算转化为实变函数的曲线积分的计算，我们将在下一节进一步讨论.

三 复积分的基本性质

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 沿 C 连续，复积分有下列基本性质.

1. $\displaystyle\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \beta \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$

2. $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$

3. $\displaystyle\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

4. $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s.$

最后一个积分中的 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}z|$ 就是弧长的微分. 这些性质都可以直接由积分的定义来证明. 比如，利用三角不等式，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k|,$$

取极限即得性质 4.

§2 复积分的计算

本节讨论复积分的计算，这有三方面的目的. 第一，加深对复积分的了解；第二，通过计算获得一些有用的具体结果；第三，建立 Cauchy 积分定理的特例，从而对这一抽象的定理获得感性认识.

一 *用定义计算

对于比较简单的函数，可以直接用定义来计算. 下面就计算两个例子.

例 1 C 是 a 到 b 的任一简单曲线，求 $\int_C \mathrm{d}z$.

解 $f(z) = 1$，则 $f(\zeta_k) = 1$. 按定义作和数，有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a,$$

故当 $n \to \infty$、$\max\limits_{1\leq k\leq n} |\Delta z_k| \to 0$ 时，$S_n \to b - a$，即

$$\int_C \mathrm{d}z = b - a. \tag{2}$$

例 2 C 是 a 到 b 的任一简单曲线，求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$.

解 $f(z)=z$，则 $f(\zeta_k)=\zeta_k$. 按定义作和数，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k(z_k-z_{k-1}),$$

先取 $\zeta_k=z_k$，得 $S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}z_k(z_k-z_{k-1})$，再取 $\zeta_k=z_{k-1}$，得 $S_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}z_{k-1}(z_k-z_{k-1})$. 由于 $f(z)=z$ 是连续函数，按上节定理，积分存在，记作 I，则当 $n\to\infty$、$\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0$ 时，应有 $S_n^{(1)}\to I$，$S_n^{(2)}\to I$，于是 $S_n^{(1)}+S_n^{(2)}\to 2I$. 另一方面，

$$S_n^{(1)}+S_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}(z_k+z_{k-1})(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(z_k^2-z_{k-1}^2)=z_n^2-z_0^2=b^2-a^2,$$

因此，$S_n^{(1)}+S_n^{(2)}\to b^2-a^2$. 比较即得 $I=(b^2-a^2)/2$，即

$$\int_C z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}(b^2-a^2). \tag{3}$$

二　曲线积分方法

从上一小节看到，直接用定义来计算复积分，即使对于象 $f(z)=z$ 这样简单的函数，都需要一定的技巧. 对于较复杂的函数，这种方法显然是不现实的. 注意到上节的定理不仅解决了积分的存在性问题，而且式 (1) 同时也给出了计算复积分的一种方法，即把复积分转化为实变函数的曲线积分来计算. 在简单情况下，可以找到曲线积分的原函数，这时就很容易得到结果. 为了叙述方便，我们把这种方法称为曲线积分方法.

例 3 用曲线积分方法重新计算例 1.

解 $f(z)=1$，即 $u(x,y)=1$，$v(x,y)=0$. 按式 (1)，有

$$\int_C \mathrm{d}z=\int_C \mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_C \mathrm{d}y=x|_a^b+\mathrm{i}y|_a^b=(x+\mathrm{i}y)|_a^b=z|_a^b=b-a.$$

例 4 用曲线积分方法重新计算例 2.

解 $f(z)=z$，即 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=y$. 按式 (1)，有

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z&=\int_C x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_C \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]+\mathrm{i}\int_C \mathrm{d}(xy)\\&=\frac{1}{2}(x^2-y^2+\mathrm{i}2xy)\Big|_a^b=\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y)^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}z^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}(b^2-a^2).\end{aligned}$$

由以上两例看到，积分的结果只与起点和终点有关，而与路径无关，这是与被积函数的解析性紧密相关的. 事实上，这一方法可以用于任何具体的解析函数，如指数、三角函数等，并得到类似的结果. 后面将会看到，对于解析函数，存在着与实变积分类似的 Newton–Leibniz 公式.

如果被积函数不是解析的，比如 $\bar{z}$，其积分一般都依赖于路径，而不仅仅是起点和终点. 这时用上面的曲线积分方法并不方便. 实际上，实变函数中的曲线积分在一般情况下还是要化成定积分来计算的. 所以，下面就讨论计算复积分的参数方程法.

三 参数方程法

设曲线 C 的参数方程为 $z=z(t)$（$\alpha\le t\le\beta$），$f(z)$ 沿 C 连续，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

这一公式将复积分化为实变数 t 的定积分. 形式上，只要将 $z=z(t)$ 和 $\mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t$ 代入左边，即可得到右边的结果. 当然这不是证明. 右边的定积分可能需要分开实部和虚部来计算，但若能直接找到原函数，也可以不必分开.

式 (4) 证明如下. 由式 (1) 出发，将 $x=x(t)$ 和 $\mathrm{d}x=x'(t)\mathrm{d}t$ 等代入，得到

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta[u(t)x'(t)-v(t)y'(t)]\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta[v(t)x'(t)+u(t)y'(t)]\,\mathrm{d}t,$$

其中 $u(t)=u[x(t),y(t)]$，$v(t)=v[x(t),y(t)]$，上式可以改写为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta[u(t)+\mathrm{i}v(t)][x'(t)+\mathrm{i}y'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

这就是式 (4).

利用式 (4)，马上可以得到例 1 和例 2 的结果. 它们是下述更一般结果的特例.

例 5 由于 $z^n(t)z'(t)$ 的原函数显然是 $z^{n+1}(t)/(n+1)$，故有

$$\int_a^b z^n\,\mathrm{d}z=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}),\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{5}$$

结果与曲线 C 的细节无关，而只依赖于起点和终点. 如果 C 是围线，即 $b=a$，则

$$\int_C z^n\,\mathrm{d}z=0,\quad n=0,1,2,\cdots,\forall\text{ 围线 }C. \tag{6}$$

式 (6) 可由式 (5) 经 $b\to a$ 的极限过程得到. 也可以将围线 C 分为两段，再由式 (5)，两段的积分互相抵消，从而得到式 (6). 注意式 (6) 对任意围线成立.

注 由式 (6) 容易推知，对于任意多项式 $P_n(z)$ 和围线 C，均有 $\int_C P_n(z)\,\mathrm{d}z=0$. 由此我们可以推测，对于一般的解析函数 $f(z)$，亦有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$，这基本上就是 Cauchy 积分定理了.

下面再计算一个例子.

例 6 计算积分 $\displaystyle\int_{|z-a|=\rho}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}$，其中 $n\in\mathbb{Z}$，$a\in\mathbb{C}$.

解 当 $n\le 0$，由式 (6) 可知结果为 0，这与下面的结果一致. 圆周 $|z-a|=\rho$ 的参数方程为 $z(\theta)=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（$0\le\theta\le 2\pi$），这里我们将参数写作 θ，因为它是角度. 按式 (4)，有

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}=\frac{\mathrm{i}}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

如果 $n \neq 1$，易得原函数为 $-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}/(n-1)\rho^{n-1}$，代入上下限，结果为 0. 若 $n=1$，则结果显然为 $2\pi\mathrm{i}$. 所以

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & (n=1), \\ 0, & (n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1), \end{cases} \tag{7}$$

这是一个重要的结果.

注 ① 这一结果与 a 和 ρ 的数值无关. ② 后面将证明，这一结果对任何包围 a 点的围线成立. ③ $n=1$ 时结果不为 0，这是因为被积函数在积分围线内存在奇点 $z=a$. 由此可以进一步推测，Cauchy 积分定理中的 $f(z)$ 应该在围线 C 及其内部解析，而不仅仅是在围线 C 上解析. ④ 虽然 $n=2,3,\cdots$ 时，结果也为 0，但这只是一个具体的结果，没有必然性.

习题 1. 计算 $\int_{C_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z$ 和 $\int_{C_2} \bar{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C_1 是上半单位圆（$z=1 \to z=-1$），C_2 是下半单位圆（$z=1 \to z=-1$）.

习题 2. 设 $f(z)$ 在原点的邻域内连续，试证 $\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi f(0)$.

§3 Cauchy 积分定理

一 *Cauchy* 积分定理

由上节看到，对于简单的解析函数 $f(z)=z^n$，式 (6) 对任意围线成立. 实际上，这是下面定理的一个特例.

定理（Cauchy 积分定理） 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，C 为 D 内的任一围线，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{8}$$

这是复变函数论中最基本的定理.

如果假定 $f'(z)$ 连续，则上述定理的证明是很容易的. 这时 u、v 的一阶偏导数连续，可将 Green 公式应用于式 (1) 而得

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 G 是围线 C 所包围的区域. 由 CR 条件，上式右边两个积分都为 0，故得式 (8). 但我们知道，$f(z)$ 解析的定义只是 $f'(z)$ 存在，并不一定连续，所以上面证明的只是一种特殊情况. 下一小节将介绍严格的证明，供有兴趣的读者参考.

值得注意的是，Cauchy 在 1825 年给出上述定理，那时候 $f(z)$ 解析的定义是 $f'(z)$ 连续，所以上面的证明是严格的. 1900 年，Goursat 发表了新的证明，免去了 $f'(z)$ 连续的条件. 也就是说，只要 $f'(z)$ 存在，Cauchy 积分定理就成立. 此后 $f(z)$ 解析的定义才改为现在的样子. 这无疑是一个实质性的进步，但期间经历了七十多年的时间.

Cauchy 积分定理也可以表述为

定理（Cauchy 积分定理的等价表述） C 为复平面上的围线，D 是 C 所包围的单通区域，函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D+C$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

这与上面的形式是等价的. 但从这一形式容易看出它和下面强化的形式有什么区别.

定理（Cauchy 积分定理的强化形式） C 为复平面上的围线，D 是 C 所包围的单通区域，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}=D+C$ 上连续，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

应当指出，即使证明了上面的定理，要得到这一强化形式也并不是轻而易举的.

二 **Cauchy* 积分定理的证明

先证明下面的

引理 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续，Γ 是 D 内的简单曲线或围线，则 $\forall\,\varepsilon>0$，总可找到内接于 Γ 且完全位于 D 内的折线 P，使得

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z-\int_P f(z)\,\mathrm{d}z\right|<\varepsilon. \tag{9}$$

注 ① 这一引理的大意是沿曲线的积分总可以用沿折线的积分来任意逼近. ② 这里只要求 $f(z)$ 连续，而不必解析. ③ 区域 D 也不必是单通的.

证明 设曲线 Γ 的长度为 L. 在区域 D 内取区域 G，使 $\bar{G}\subset D$ 而 Γ 完全在 G 内. 由于 $f(z)$ 在区域 D 内连续，故在 $\bar{G}$ 上一致连续. 也就是说，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得对于 $\bar{G}$ 内的任意两点 z' 和 z''，只要 $|z'-z''|<\delta$，就有 $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon/2L$. 今在 Γ 上从起点 a 到终点 b 取分点

$$a=z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{k-1},\ z_k,\ \cdots,\ z_{n-1},\ z_n=b.$$

依次连接各分点作成折线 P，如图 3a 所示. 我们将 Γ 上从 z_{k-1} 到 z_k 的弧段记作 Γ_k，相应的线段记作 P_k，并记 Γ_k 的长度为 L_k. 只要分点取得足够密，就可以使所有 $L_k<\delta$，并使所有 P_k 完全落在 G 内. 这样，对任意 k，Γ_k 上的任意点 z 都满足 $|f(z)-f(z_k)|<\varepsilon/2L$，$P_k$ 上的任意点亦然. 由上节例 1，

$$\int_{\Gamma_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z=\int_{P_k} f(z_k)\,\mathrm{d}z=f(z_k)(z_k-z_{k-1}),$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z-\int_P f(z)\,\mathrm{d}z\right| &=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\Gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z-\sum_{k=1}^n\int_{P_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\\
&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\Gamma_k}[f(z)-f(z_k)]\,\mathrm{d}z-\sum_{k=1}^n\int_{P_k}[f(z)-f(z_k)]\,\mathrm{d}z\right|\\
&\le\sum_{k=1}^n\left|\int_{\Gamma_k}[f(z)-f(z_k)]\,\mathrm{d}z\right|+\sum_{k=1}^n\left|\int_{P_k}[f(z)-f(z_k)]\,\mathrm{d}z\right|\\
&\le\sum_{k=1}^n\int_{\Gamma_k}|f(z)-f(z_k)|\,|\mathrm{d}z|+\sum_{k=1}^n\int_{P_k}|f(z)-f(z_k)|\,|\mathrm{d}z|
\end{aligned}$$

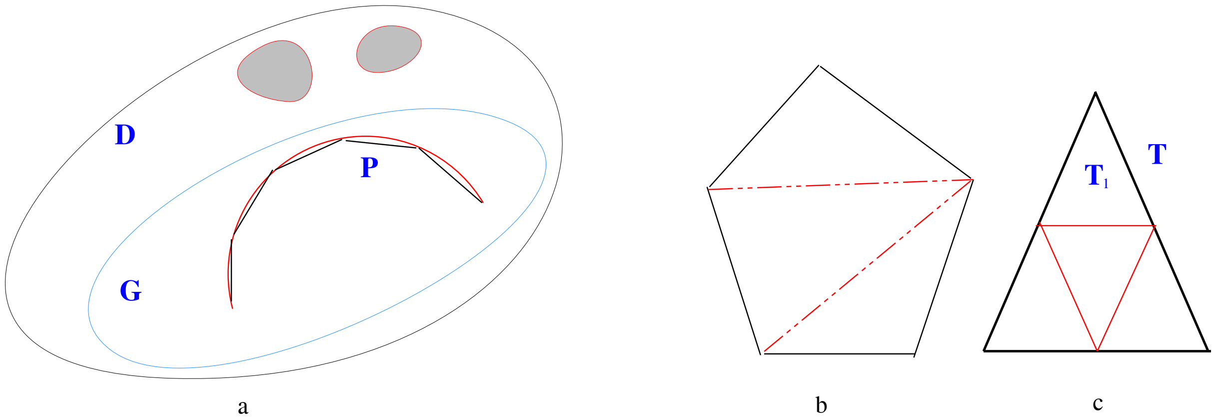

图 3 Cauchy 积分定理的证明

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{2L}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k}|\mathrm{d}z| + \sum_{k=1}^{n}\int_{P_k}|\mathrm{d}z|\right) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2L}2L = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

其中第三步用了三角不等式，第四步用了积分的性质 4，第五步用了 $|f(z)-f(z_k)|<\varepsilon/2L$（在 Γ_k 或 P_k 上均成立），最后一步用了 $\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k}|\mathrm{d}z| = \int_{\Gamma}|\mathrm{d}z| = L$，而 $\sum_{k=1}^{n}\int_{P_k}|\mathrm{d}z| \le L$. 证毕.

现在证明 Cauchy 积分定理. C 是单通区域 D 内的任一围线，由于 $f(z)$ 在 D 内解析，故必在 D 内连续，根据上述引理，$\forall\,\varepsilon>0$，总可找到内接于 C 且完全位于 D 内的闭折线 P（即多边形），使 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_P f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$. 如果能够证明，对于 D 内的任意闭折线 P，都有

$$\int_P f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{10}$$

则上式变成 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$，但 ε 是任意的，故 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0$. 反过来，如果 Cauchy 积分定理成立，则式 (10) 也应该成立，因为 P 也是 D 内的围线. 因此问题归结为证明式 (10).

由于 D 是单通区域，所以 P 及其内部都完全在 D 内. 今适当连接 P 的各顶点作对角线，将 P 所包围的多边形分解为若干三角形，如图 3b 所示，则沿各三角形边界的积分都存在，且其和等于沿 P 的积分，这是因为在和式中，沿各对角线的积分都出现两次，而且方向相反，所以互相抵消. 如果能证明沿 D 内任一三角形边界 T 的积分为 0：

$$\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{11}$$

则式 (10) 成立. 反过来，如果式 (10) 成立，则式 (11) 也应成立，因为 T 就是最简单的闭折线. 因此问题归结为证明式 (11). 为此，记

$$M = \left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right|,$$

只要证明 $M=0$ 即可.

由于 D 是单通区域，所以 T 及其内部都完全在 D 内. 将 T 及其内部所构成的闭域，即闭三角形，记作 $\triangle$，则 $\triangle\subset D$. 今连接三角形各边中点，将 $\triangle$ 分解为四个三角形，如图 3c 所示，将其边界记作 T_1、T_2、T_3、T_4，则 $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{4}\int_{T_i} f(z)\,\mathrm{d}z$，而 $M = \left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sum_{i=1}^{4}\left|\int_{T_i} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$，因此，右边各项中必有一项不小于 $M/4$，记该项所在的三角形为 $T^{(1)}$，所包围的闭域为 $\triangle_1$，则

$$M_1 \equiv \left|\int_{T^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ge \frac{M}{4}.$$

再将 $\triangle_1$ 分解为四个三角形，重复上面的论证，然后继续同样的过程，我们就可以得到一系列的三角形

$$\triangle,\ \triangle_1,\ \triangle_2,\ \cdots,\ \triangle_n,\ \cdots,$$

其边界为

$$T,\ T^{(1)},\ T^{(2)},\ \cdots,\ T^{(n)},\ \cdots,$$

在这些边界上的积分满足

$$M_n \equiv \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{M_{n-1}}{4} \geq \frac{M}{4^n}, \quad n=1,2,\cdots, \tag{12}$$

其中 $M_0 \equiv M$.

记 $\triangle$ 的周长为 L，则 $\triangle_n$ 的周长为 $L_n = L/2^n$，显然，

$$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \cdots \supset \triangle_n \supset \cdots,$$

而 $L_n \to 0$（$n \to \infty$），故存在唯一一点 z_0 属于所有的 $\triangle_n$（这里用到了一个定理，称为闭集套定理，又称 Cantor 定理，但这一结论是相当直观的），当然 $z_0 \in D$. 今 $f(z)$ 在 z_0 解析，则存在有限导数 $f'(z_0)$，成立

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right] = 0,$$

换句话说，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon,$$

或

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon|z-z_0|.$$

由于 $L_n \to 0$（$n \to \infty$），故当 n 足够大时，有 $L_n < \delta$，这时，对于 $T^{(n)}$ 上的任意点 z，都满足 $|z-z_0| < L_n < \delta$，故上面的不等式在 $T^{(n)}$ 上成立. 由上节例 1 和例 2 知道，$\int_{T^{(n)}} f(z_0)\,\mathrm{d}z = 0$，$\int_{T^{(n)}} f'(z_0)(z-z_0)\,\mathrm{d}z = 0$，因此

$$\begin{aligned}
M_n = \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{T^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)]\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \int_{T^{(n)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)||\mathrm{d}z| \\
&< \int_{T^{(n)}} \varepsilon|z-z_0|\,|\mathrm{d}z| < \varepsilon L_n \int_{T^{(n)}} |\mathrm{d}z| = \varepsilon L_n^2 = \frac{L^2\varepsilon}{4^n}.
\end{aligned} \tag{13}$$

比较式 (12) 和式 (13)，可得 $M/4^n \leq M_n < L^2\varepsilon/4^n$，即 $M < L^2\varepsilon$，但 ε 可以任意小，故 $M = 0$. 这样就完成了 Cauchy 积分定理的证明.

三 ***Cauchy*** 积分定理的推论

由 Cauchy 积分定理，马上可以得到以下

推论 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，$z_1, z_2 \in D$，则积分 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ 与 z_1 到 z_2 的路径无关.

证明 任取 D 内由 z_1 到 z_2 的两条路径 C_1 和 C_2，有

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1+C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

其中前两步都是用积分的基本性质，最后一步用了 Cauchy 积分定理，因为 $C_1 + C_2^-$ 构成 D 内的围线. 证毕.

现在我们将积分的起点固定在 z_0，而让终点 z 变化，这就是变上限积分. 由上面的推论，这一变上限积分是 z 的单值函数，类似于实变函数的情况，我们有下述结论

定理（变上限积分） 设函数 $f(z)$ 在单通 区域 D 内解析，$z_0 \in D$ 是定点，则由 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 定义的函数在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$.

注 在一元实变函数的相应定理中，只要求被积函数 $f(x)$ 连续，而不必可导，但这里必须要求 $f(z)$ 解析，否则积分与路径有关，就不是上限 z 的单值函数了. 另外，所考虑的区域必须是单通的，这一点也很重要.

证明 考虑 $z \in D$，任取 z_0 到 z 的路径，记作 C_1，又任取 z_0 到 $z + \Delta z$ 的路径，记作 C_2，当然 C_1 和 C_2 都应在 D 内. 又记 z 到 $z + \Delta z$ 的线段为 P，只要 Δz 足够小，P 也必在 D 内. 今

$$F(z) = \int_{C_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad F(z+\Delta z) = \int_{C_2} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

由上面的推论，$\int_{C_2} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{C_1} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_P f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，则

$$\Delta F \equiv F(z+\Delta z) - F(z) = \int_P f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

由上节例 1，又有 $\int_P f(z)\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\Delta z$，故

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_P [f(\zeta) - f(z)]\,\mathrm{d}\zeta,$$

而

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_P [f(\zeta) - f(z)]\,\mathrm{d}\zeta\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_P |f(\zeta) - f(z)|\,|\mathrm{d}\zeta|.$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，故必在 D 内连续，所以，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 今取 $|\Delta z| < \delta$，则线段 P 上的各点均满足 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$，于是

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\int_P |\mathrm{d}\zeta| = \varepsilon,$$

也就是说，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z), \quad z \in D.$$

证毕.

类似于实变积分，下面引入原函数的概念.

定义（原函数） 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，若有函数 $\Phi(z)$ 满足 $\Phi'(z) = f(z)$，则 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个*不定积分*或*原函数*.

注 ① 本来在这一定义中并没有必要要求 $f(z)$ 解析，但后面我们会看到，若 $\Phi(z)$ 解析（因为 $\Phi'(z) = f(z)$ 存在），则 $\Phi'(z)$ 亦必解析，从而 $f(z) = \Phi'(z)$ 也解析. 换句话说，如

果 $f(z)$ 不解析，它也不可能存在原函数. 所以上述定义只针对解析函数就是很自然的了. ② 原函数显然不是唯一的，因为如果 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数，则 $\Phi(z)+c$ 也是它的原函数，其中 c 是复常数. 但任意两个原函数也只能相差一个常数，因为如果 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 都是 $f(z)$ 的原函数，则 $[\Psi(z)-\Phi(z)]'=0$，由此易证 $\Psi(z)-\Phi(z)=c$.

定义了原函数，就可以给出一个计算积分的公式，但仍然要注意它的条件.

定理（Newton–Leibniz 公式） 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析，$\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的任一原函数，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\Phi(z)-\Phi(z_0),\quad z,z_0\in D \tag{14}$$

证明 记 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，则 $F'(z)=f(z)$，又已知 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数，则 $\Phi'(z)=f(z)=F'(z)$，于是 $\Phi(z)=F(z)+c$. 以 z_0 代入，可得 $\Phi(z_0)=F(z_0)+c=c$，所以 $F(z)=\Phi(z)-c=\Phi(z)-\Phi(z_0)$，此即式 (14). 证毕.

例 1 利用这一公式，马上可以得到式 (5).

例 2 在不包含原点的单通区域内计算积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$，其中 $b\neq a$.

解 $1/z$ 在去掉原点的复平面上是解析的，但这是复通区域，在其中积分可能与路径有关. 上节例 6 证实了这一点. 这样，如果不指定路径，则积分就没有意义. 但在不包含原点的单通区域内，比如右半平面，则积分与路径无关. $1/z$ 的原函数是 $\mathrm{Ln}\,z$，根据上面的公式 (14)，

$$\int_a^b \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Ln}\,b-\mathrm{Ln}\,a.$$

在所考虑的单通区域内，$\mathrm{Ln}\,z$ 可以分出单值分支，所以结果是确定的，而且与所取的分支无关. 事实上，取定一个单值分支，其中 a 和 b 的辐角分别为 θ_a 和 θ_b，则

$$\int_a^b \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\ln|b|-\ln|a|+\mathrm{i}(\theta_b-\theta_a).$$

若取定另一分支，其中 a 和 b 的辐角分别为 $\theta_a+2k\pi$ 和 $\theta_b+2k\pi$（$k\in\mathbb{Z}$），易见结果不变.

但是，对于不同的单通区域，结果却可能不同. 比如当 $a=\mathrm{i}$，$b=-\mathrm{i}$，在单通区域 $0<\mathrm{Arg}\,z<2\pi$ 内（即去掉 x 轴正半轴的复平面），$\theta_b-\theta_a=\pi$，积分结果为 $\pi\mathrm{i}$；但在单通区域 $-\pi<\mathrm{Arg}\,z<\pi$ 内（即去掉 x 轴负半轴的复平面），$\theta_b-\theta_a=-\pi$，积分结果为 $-\pi\mathrm{i}$.

以上结果可以这样理解，在单通区域 $0<\mathrm{Arg}\,z<2\pi$ 内，沿各种可能路径的积分等于沿左半单位圆由 i 到 $-\mathrm{i}$ 的积分，记作 I_1，而在单通区域 $-\pi<\mathrm{Arg}\,z<\pi$ 内，沿各种可能路径的积分等于沿右半单位圆由 i 到 $-\mathrm{i}$ 的积分，记作 I_2，I_1-I_2 等于沿单位圆正向的积分，由上节例 6，它等于 $2\pi\mathrm{i}$，所以 $I_1\neq I_2$ 就是很自然的. 而且，上面的计算也给出 $I_1-I_2=2\pi\mathrm{i}$，与上节例 6 一致，如所期望.

四 复通区域的 *Cauchy* 积分定理

上节讨论 Cauchy 积分定理及其相关结论时，我们多次强调单通区域，因为在复通区域内，它一般是不能成立的. 不过在复通区域 D 内，只要围线 C 及其内部完全在 D 内，它还是成立的. 比如 $1/z$ 在去掉原点的复平面上是解析的，这是复通区域，在其中 Cauchy 积分

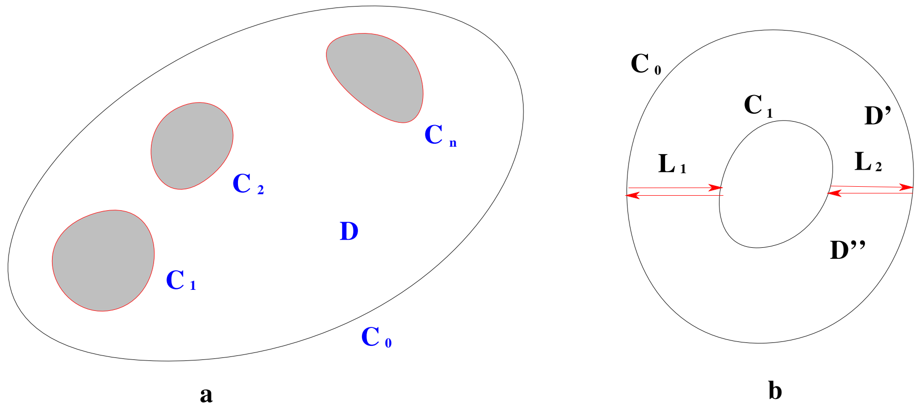

图 4 复通区域及其 Cauchy 积分定理的证明

定理不能成立，因为沿单位圆的积分就不为 0，但对于不包围原点的围线，比如右半平面上的围线，积分为 0. 另一方面，我们知道，$1/z$ 在以原点为圆心的一切圆周上，其积分结果相同. 这是复通区域的 Cauchy 积分定理的一个特例. 本小节就是要讨论 Cauchy 积分定理在复通区域内的推广形式.

考虑 $n+1$ 条围线 C_0、C_1、$\cdots$、C_n，其中 C_1、$\cdots$、C_n 全在 C_0 内部，且互不相交也互不包含，如图 4a. 在 C_0 内部而在 C_1、$\cdots$、C_n 外部的点集构成一个复通区域 D，它的边界包括以上各围线，称为复围线 C，即

$$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-,$$

其中 C_0 取正向，而 C_1、$\cdots$、C_n 取反向，以便沿边界绕行时，其所包围的区域 D 总在左边.

定理（复通区域的 Cauchy 积分定理） 设 D 是由复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 围成的复通区域，函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{15a}$$

或

$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{15b}$$

注 定理的条件可以减弱为 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续.

证明 考虑只有两条围线 C_0 和 C_1 的情况. 如图 4b，作线段 L_1 和 L_2 连接 C_0 和 C_1，这样区域 D 就被分为 D' 和 D''（但注意 $D \neq D' \cup D''$），显然 D' 和 D'' 都是单通区域，而且 $f(z)$ 在 $\bar{D}'$ 和 $\bar{D}''$ 上解析，根据 Cauchy 积分定理，有

$$\int_{\partial D'} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{\partial D''} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

所以

$$\int_{\partial D' + \partial D''} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

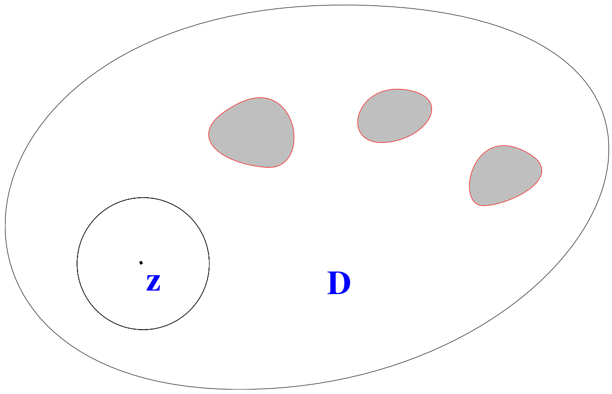

图 5 Cauchy 积分公式的证明

但 $\partial D' + \partial D'' = C_0 + C_1^- + L_1 + L_2 + L_1^- + L_2^-$，而 $\int_{L_1+L_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，$\int_{L_2+L_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，所以

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

此即式 (15a)，由积分的基本性质易得式 (15b)．对于有多条围线的情况，可以类似证明．证毕．

以后我们说到 Cauchy 积分定理，就包括复通区域的情况．比较式 (15a) 与 Cauchy 积分定理的等价表述，可以看出，只要积分路径包括全部的边界，那么复通与单通情况下的 Cauchy 积分定理在形式上并没有什么区别．

例 3 由上面的定理和前面的结果 (7) 可知

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & (n=1), \\ 0, & (n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1), \end{cases}$$

其中 C 是包围 a 点的任一围线．

如果围线 C 不包围 a 点，则积分显然为 0．于是，当 $n \neq 1$ 时，无论围线 C 是否包围 a 点，积分都是 0．但是必须注意，对于 $n > 1$，围线不能经过 a 点，否则积分不存在．

§4 Cauchy 积分公式及其推论

一 *Cauchy* 积分公式

由 Cauchy 积分定理，可以推出下面的 Cauchy 积分公式，我们把它写成定理．

定理（Cauchy 积分公式） 设区域 D 的边界是围线或复围线 C，函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D. \tag{16}$$

注 ① Cauchy 积分公式表明，对于解析函数，只要边界上的函数值给定，则区域内的函数值也就完全确定了．这说明函数值在各点的分布是互相牵制、紧密关联的，其实 Cauchy 积分定理也表明了这种关联．而上一章的 CR 条件则表明解析函数的实部和虚部也互相牵

制、紧密关联，给定了其中一个，另一个也就确定了（最多可以差一常数项）. 可见解析性对于复变函数是一个很强的限制. 在实变函数中，没有任何类似的结论，无论要求函数多么光滑，其变化都还是可以相当任意的，区间端点的函数值完全不能决定区间内部的函数值. ② 将公式改写为

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(a), \quad a \in D \tag{16'}$$

则可以用来计算某些积分. ③ 定理的条件可以减弱为 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续. ④ 由 Cauchy 积分定理可以推出 Cauchy 积分公式（见下面的证明），反过来，由 Cauchy 积分公式也可以推出 Cauchy 积分定理，所以两者是等价的. 事实上，设 $F(z)$ 是 $\bar{D}$ 上的任意解析函数，则 $(z-a)F(z)$ 也是 $\bar{D}$ 上的解析函数，根据 Cauchy 积分公式，就有 $\int_C F(z)\,\mathrm{d}z = 0 = \int_C [(z-a)F(z)]/(z-a)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(z-a)F(z)|_{z=a} = 0$，这就是 Cauchy 积分定理.

证明 设 D 的边界是复围线 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$. $\forall z \in D$，以 z 为中心，ρ 为半径作圆周 Γ_ρ：$|\zeta - z| = \rho$，使 Γ_ρ 在 C_0 的内部，而在 C_1、$\cdots$、C_n 的外部. 令 $f(\zeta)/(\zeta - z)$ 在 $C + \Gamma_\rho^-$ 所围成的区域（即区域 D 挖去闭圆 $|\zeta - z| \le \rho$ 后所剩余的点集）及其边界上解析. 由 Cauchy 积分定理和积分的基本性质，有

$$0 = \int_{C+\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

所以

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

根据式 (7)，有

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i} f(z).$$

结合两式，可得

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i} f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

于是

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i} f(z)\right| \le \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma_\rho} |f(\zeta) - f(z)|\,|\mathrm{d}\zeta|.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 D 内解析，故在 $\zeta = z$ 处连续，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon/2\pi$. 取 $\rho < \delta$，则上式在 Γ_ρ 上成立，于是

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i} f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}\int_{\Gamma_\rho} |\mathrm{d}\zeta| = \varepsilon.$$

这就是说，只要 ρ 足够小，上式就成立. 但上式左边实际上与 ρ 无关，所以它必须为 0，如此即得式 (16). 证毕.

例 1 计算积分 $I = \displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1}$，其中围线 C 是：(1) $|z| = 1/2$；(2) $|z-1| = 1/2$；(3) $|z+1| = 1/2$；(4) $|z| = 2$.

解 (1) 由于被积函数在围线 C 及其内部解析，故 $I=0$.

(2) 由式 $(16')$，

$$I=\int_{|z-1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z-1|=1/2}\frac{1/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{z+1}\bigg|_{z=1}=\pi\mathrm{i}.$$

(3) 由式 $(16')$，

$$I=\int_{|z+1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z+1|=1/2}\frac{1/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{z-1}\bigg|_{z=-1}=-\pi\mathrm{i}.$$

(4) 由复通区域的 Cauchy 积分定理和 (2)、(3) 的结果，

$$I=\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{|z-1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}+\int_{|z+1|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=0.$$

二 *无界区域的 *Cauchy* 积分公式

既然解析函数在围线上的函数值可以决定其内部的函数值，人们自然会问，围线上的函数值是否也可以决定其外部的函数值？答案就在下面的定理中.

定理（无界区域的 Cauchy 积分公式） 设函数 $f(z)$ 在围线 C 及其外部的无界区域 D 上解析，且当 $z\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D, \tag{17}$$

其中积分取 C 的反方向，实即 ∂D 的正方向.

注 ① $z\to\infty$ 时 $f(z)\rightrightarrows 0$（一致趋于 0）的大意是 $f(z)\to 0$ 的速度与 z 的辐角无关. 精确地说，就是 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,R_0>0$ 与 θ 无关，当 $|z|>R_0$ 时，就有 $|f(z)|<\varepsilon$. ② 这一定理的条件也可以减弱为 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $D+C$ 上连续. ③ 如果 $f(z)$ 在围线 C 的内部也解析，则式 (17) 中的被积函数在围线 C 及其内部解析，根据 Cauchy 积分定理，积分为 0. 换句话说，在 D 上，$f(z)=0$. 由 $f(z)$ 的连续性，在 C 上也有 $f(z)=0$. 再根据 Cauchy 积分公式，则在 C 的内部也有 $f(z)=0$. 这就是说，在整个 z 平面上，$f(z)\equiv 0$. 这是什么原因呢？根据假定，$f(z)$ 在整个 z 平面上解析（称为整函数，entire function），又因为 $z\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$，所以它一定是有界的（$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,R_0>0$，当 $|z|>R_0$ 时，$|f(z)|<\varepsilon$，而在闭圆 $|z|\le R_0$ 上，$\exists M_0>0$，使 $|f(z)|\le M_0$，取 $M=M_0+\varepsilon$，则在整个 z 平面上 $|f(z)|<M$，即有界），根据 Liouville 定理，有界整函数必为常数（见后），而条件 $z\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$ 使得该常数为 0. ④ 该定理可以推广到多条围线外的情况，只要将式 (17) 右边看作各围线的积分之和即可.

证明 作大圆 Γ_R: $|\zeta|=R$，使得围线 C 和点 z 均在 Γ_R 内部，根据 Cauchy 积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{18}$$

由此

$$\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}f(z)-\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{19}$$

由定理条件，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,R_0>0$，当 $R>R_0$ 时，在 Γ_R 上可有 $|f(\zeta)|<\varepsilon/4\pi$，今取 $R>\max\{R_0,2|z|\}$，则在 Γ_R 上还成立 $|\zeta-z|>R-|z|>R/2$，于是 $1/|\zeta-z|<2/R$，故

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right|\le\int_{\Gamma_R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|}\,|\mathrm{d}\zeta|<\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{2}{R}\int_{\Gamma_R}|\mathrm{d}\zeta|=\varepsilon.$$

但由式 (19) 可知，上式左边实际上与 R 无关，所以它必须为 0，代入式 (18)，即得式 (17). 证毕.

三 解析函数的高阶导数

我们在前面曾提到，解析函数存在各阶导数，即一次可微导致任意次可微，这是复变函数所特有的结论. 而且，边界上的函数值不仅确定了所围区域内的函数值，也确定了其中各阶导数的函数值. 下面关于高阶导数的定理给出了这一结论的精确表述.

定理（Cauchy 高阶导数公式） 设区域 D 以围线或复围线 C 为边界，函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析，则 $f(z)$ 在区域 D 内有各阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta, \quad z \in D, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{20}$$

注 ① 将 Cauchy 积分公式 (16) 两边求导，对右边交换求导与积分的次序，立得一阶导数的 Cauchy 公式. 继续求导，重复同样的操作，即得 Cauchy 高阶导数公式. 这样的做法显然是不严格的，因为求导与积分交换次序的合法性并未得到证明. 然而，这一做法能帮助我们熟悉高阶导数公式，并使得我们能够在记得 Cauchy 积分公式的情况下立即将高阶导数公式做出来. ② 让我们再看看怎样可以做得严格一些. 以 $n = 1$ 为例，对 z 和 $z + \Delta z$ 分别用 Cauchy 积分公式，可得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} \mathrm{d}\zeta, \tag{21}$$

两边取 $\Delta z \to 0$ 的极限，对右边交换求极限与积分的次序，立得一阶导数的 Cauchy 公式. 类似可得高阶导数公式. 必须指出，这样的做法仍然是不严格的，因为求极限与积分交换次序的合法性也未得到证明. 不过，我们已经向严格证明的方向迈进了重要的一步. ③ 类似于 Cauchy 积分公式，Cauchy 高阶导数公式也可以用来计算某些积分. ④ 定理的条件可减弱为 $f(z)$ 在区域 D 上解析，在闭域 $\bar{D}$ 上连续.

证明 以下只证明 $n = 1$ 的情况，用数学归纳法可以证明一般情况. 由式 (21)，$\forall\, z \in D$，有

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta \right| = \frac{|\Delta z|}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)} \mathrm{d}\zeta \right|.$$

我们的思路是证明左边当 $\Delta z \to 0$ 时可以任意小，这样它的极限就必须为 0. 由于右边含有因子 $|\Delta z|$，故主要需证明右边的积分有界. 由于 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上连续，故在 C 上有界，设 $\max\limits_{\zeta \in C} |f(\zeta)| = M$（如此则 $|f(\zeta)| \le M, \forall\, \zeta \in C$）. 又设 z 与边界 C 的距离为 d，即 $\min\limits_{\zeta \in C} |\zeta - z| = d$（如此则 $|\zeta - z| \ge d, \forall\, \zeta \in C$）. 今暂取 $|\Delta z| < d/2$，则 $|\zeta - z - \Delta z| \ge |\zeta - z| - |\Delta z| > d - d/2 = d/2$. 于是

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)} \mathrm{d}\zeta \right| \le \int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z - \Delta z|} |\mathrm{d}\zeta| \le \frac{M}{d^3/2} \int_C |\mathrm{d}\zeta| = \frac{2ML}{d^3},$$

其中 L 是 C 的长度，而

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta \right| \le \frac{ML}{\pi d^3} |\Delta z|,$$

上式当 $|\Delta z| < d/2$ 时成立，若同时又有 $|\Delta z| < \varepsilon \pi d^3 / ML$，则上式左边 $< \varepsilon$. 取 $|\Delta z| < \min\{d/2, \varepsilon \pi d^3/ML\}$，则上式左边 $< \varepsilon$，$\forall\, \varepsilon > 0$，于是

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta.$$

证毕.

四 **Liouville* 定理

Cauchy 积分公式和高阶导数公式有许多有趣的推论，我们只介绍其中的一个，即 Liouville 定理，在下一小节中，我们要用它来证明代数基本定理．我们在前面曾提到整函数（entire function），下面正式给出定义．

定义（整函数） 在整个 z 平面上解析的函数称为整函数．

例 多项式、指数函数、正弦、余弦等函数都是整函数．

定理（Liouville） 有界整函数 $f(z)$ 必为常数．

注 这一定理表明，一个解析函数，要么有奇点，要么当 $z \to \infty$ 时，至少在某些方向是无限的，除非是常数．因此，不存在什么处处解析、处处有限而非平庸的“理想”解析函数．这使得我们对于解析函数的函数值分布的特性有了一个大致的图象．

证明 由于 $f(z)$ 有界，故 $\exists\ M > 0$，$\forall\ z \in \mathbb{C}$，有 $|f(z)| \leq M$．今任取固定点 z，作圆周 Γ_R: $|\zeta - z| = R$，由高阶导数公式

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta,$$

故

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{R^2}\,|\mathrm{d}\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2} \int_{\Gamma_R} |\mathrm{d}\zeta| = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

今 $\forall\, \varepsilon > 0$，只要 $R > M/\varepsilon$，就有 $|f'(z)| < \varepsilon$，但 $f'(z)$ 实际上与 R 无关，故 $f'(z) = 0$，又因为 z 是任意的，故 $f(z)$ 为常数．证毕．

五 *代数基本定理

在复变函数理论中，可以很简单地证明代数基本定理，这是复变函数理论的应用之一．

定理（代数基本定理） 在 z 平面上，n 次多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 至少有一个零点．

证明 设 $P_n(z)$ 在 z 平面上没有零点，则 $f(z) = 1/P_n(z)$ 在 z 平面上解析，即为整函数．又

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{P_n(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k z^k} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-(n-k)}} = 0,$$

所以 $f(z)$ 有界．事实上，由上面的极限可知，$\exists\, R > 0$，当 $|z| > R$ 时，有 $|f(z)| < 1$，而由 $f(z)$ 的连续性，在 $|z| \leq R$ 上，$\exists\, M > 0$，使 $|f(z)| \leq M$，所以在 z 平面上，$|f(z)| < M + 1$，即有界．由 Liouville 定理，在 z 平面上，$f(z)$ 为常数，从而 $P_n(z)$ 为常数，这显然是不对的．证毕．

习题 计算下列积分

1. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4 - 1}\,\mathrm{d}z$ 2. $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$.

补充习题

计算下列积分.

1. $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cosh z}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$，其中 $n=1,2,\cdots$.

   答案：$\pi\mathrm{i}[1+(-)^n]/n!$.

2. $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin^2 z}{z^4}\,\mathrm{d}z$.

   答案：0.

3. $\displaystyle\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}$，其中 $n=1,2,\cdots$.

   答案：$2\pi\mathrm{i}C_{2n}^n$.

4. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin(\mathrm{e}^z)}{z}\,\mathrm{d}z$.

   答案：$2\pi\mathrm{i}\sin 1$.

5. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{\cosh z}\,\mathrm{d}z$.

   答案：$4\pi\mathrm{i}$.

6. (1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$, (2) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}$, (3) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$, (4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$.

   答案：$2\pi\mathrm{i}$, 0, 0, 2π.