第二篇 数 理 统 计

第六章 数理统计的基本概念【数学 1，3】

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

总体 个体 简单随机样本 统计量 样本均值 样本方差和样本矩 χ^2 分布 t 分布 F 分布 分位数 正态总体的常用抽样分布

考试要求

1. 理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念，其中样本方差定义为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

2. 了解 χ^2 的分布、t 分布和 F 分布的概念及性质，了解上侧 α 分位数的概念并会查表计算。
3. 了解正态总体的常用抽样方法。

本章导读　3 大分布 8 类枢轴量。

一、总体和样本

实际工程中，常常需要检测产品的某一个（或多个）数量指标（如研究 100 瓦灯泡的寿命这一数量指标）。需要检测产品的全体称为**总体**（如 6000 个 100 瓦的灯泡），**一个灯泡的**寿命检测数**据**记为 X；总体中的某一元素称为样品或**个体**（如一个 100 瓦灯泡）。我们不可能把全部 6000 个灯泡都测试，所以，需要从总体（6000 个灯泡）中随机抽取 n 个（如取 $n=50$）样品组成**样本**，称为**抽样**，n 称为样本**容量**，并把样本看成是 n 个相互独立且具有完全相同分布的随机变量（ 以后简称 “独立同” ），记为 $(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_{50})$，称为**简单随即样本**。显然，如果测试还没开始，则 $(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_{50})$ 就是一个 50 维随机变量，如果测试已经完成，则 $(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_{50})$ 就对应有一组具体值 $(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{50})$，称为样本观察值，即**样本值**。

样本（$X_1,X_2,\cdots,X_n$）每次测试的所有可能值的全体称**样本空间**，记为 Ω，一次测试所得的一组样本观察值 $(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ 是 Ω 中的一个**样本点**，容量为 n 的简单随机样本的数字特征及分布就代表了总体的特性，例如，研究 50 个灯泡的寿命就能代表 6000 个灯泡的寿命。

注意，若 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 相互独立，则 $Y_1=f(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 和 $Y_2=g(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 也相互独立。

二、样本函数和样本统计量

1. **统计量** 不含任何未知参数的 $g(X_1,\ X_2\cdots,\ X_n)$ 函数形式为样本统计量，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为相应样本值；含任何未知参数的 $g(X_1,X_2\cdots,X_n)$ 就称为样本函数。统计量与样本函数一般在测试前后可以相互转化角色。

如把样本观测值 $(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ 按照顺序排列成 $\left(x_{(1)},\ x_{(2)},\cdots,\ x_{(n)}\right)$，其中 $x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}$，记取值为 $x_{(k)}$ 的样本分量为 $X_{(k)}$，则称 $X_{(1)},\ X_{(2)},\cdots,\ X_{(n)}$ 为顺序统计量。

如最大顺序统计量与最小顺序统计量为：

$U=Max\{X_1, X_2\dots, X_n\}\Rightarrow F_U(u)=\left[F_X(u)\right]^n\Rightarrow f_U(u)=nf_X(u)\left[F_X(u)\right]^{n-1}$

$V=Min\{X_1, X_2\dots, X_n\}\Rightarrow F_V(v)=1-\left[1-F_X(v)\right]^n\Rightarrow f_V(v)=nf_X(v)\left[1-F_X(u)\right]^{n-1}$

2. 样本矩（也是一种样本函数，注意 n 是变量，$\overline{X}$ 是随机变量）

●原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$；　　●中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

3. 常用样本函数

① 样本均值　$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，为样本一阶原点矩。

② 样本方差　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$

注意区别于数字特征中的方差 σ^2，σ^2 只是某一个随机变量 X_i 的方差，而 S^2 是 n 个 X_i 的联合分布函数的方差。另外，严格地说，S^2 不是矩。

③ 样本标准差　$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i-1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]}$

④ 二阶样本中心矩　$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]=\frac{n-1}{n}S^2$ 与样本方差 S^2 是不同的概念。

相应统计量的观察值形式同上。

⑤ 样本函数中的必需记住的数字特征

$$E\left(\overline{X}\right)=\mu;\quad D\left(\overline{X}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$
$$E\left(S^2\right)=\sigma^2;\quad D\left(S^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$
$$E\left(B_2\right)=E\left(S^{*2}\right)=E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2;\quad D\left(B_2\right)=D\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2(n-1)\sigma^4}{n}$$

4. 经验（样本）分布函数

设样本 $\left(X_1, X_2,\cdots, X_n\right)$ 是取自总体 X，则经验分布函数定义为

$$\boxed{F_n(x)=\frac{1}{n}\left\{\left(X_1, X_2,\cdots, X_n\right)\text{中小于或等于 } x \text{ 的个数}\right\}=\frac{k}{n}}$$

【例 1】设从总体 X 中取容量为 3 的样本，样本观察值为 1，1，2。试求样本的经验分布函数 $F_3(x)$。

解：由经验分布函数的定义可知

$F_3(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{2}{3}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$。一般地 $F_5(x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)}\\ \frac{k}{n}, & x_{(k)}\le x<x_{(k+1)}\\ 1, & x\ge x_{(k)}\end{cases}$

评 注 常用的经验分布函数有 $\chi^2(n)$、$t(n)$ 和 $F(n_1, n_2)$ 三种抽样分布。

三、三种抽样分布

1. $\chi^2(n)$ 分布

设 $\{X_i\}$ 独立同，$X_i \sim N(0,1)$，则 $\boxed{Z=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)}$。

(1) 可加性 $\boxed{\chi^2(n_1)+\chi^2(n_2)+\cdots \sim \chi^2(n_1+n_2+\cdots)}$

(2) 期望与方差 $\boxed{E\left[\chi^2(n)\right]=n;\quad D\left[\chi^2(n)\right]=2n}$

证明：由于 $X_i \sim N(0,1) \Rightarrow E(X_i)=0;\ DX_i=1$

$$EX_i^2=D(X_i)+(EX_i)^2=1\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$EX_i^4=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3$$

$$DX_i^2=EX_i^4-(EX_i^2)^2=3-1=2$$

$$E\left[\chi^2(n)\right]=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} EX_i^2=n$$

$$D\left[\chi^2(n)\right]=D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i^2=2n$$

(4) 上分位点：$\chi_\alpha^2(n)$ 定义为 $\chi^2(n)$ 分布的分位点，则 $P\{\chi^2(n)\ge \chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f_{\chi^2(n)}(x)dx=\alpha$。

上分位点的特点是对应分布函数图形 $\chi_\alpha^2(n)$ 点的右边面积，对 $t(n)$ 和 $F(n_1, n_2)$ 分布有类似的结论。

2. $t(n)$ 分布

设 $\{X_i\}$ 独立同分布，$X_i \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n);\ X$ 和 Y 独立，则 $\boxed{T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)}$

(1) t 分布密度函数当 $n\to\infty \Rightarrow f_{t(n)}(x)\to N(0,1)$

(2) 上分位点：$t_\alpha(n)$ 定义为 $t(n)$ 分布的分位点，则 $\boxed{P\{t(n)\ge t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f_t(x)dx=\alpha}$

(3) 性质：T 分布具有对称性，$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n);\ n>45$ 时，$t_\alpha(n)\approx Z_\alpha$

其中 Z_α 为标准正态分布的下分位点，即 $\boxed{P\{\Phi(x)\le Z_\alpha\}=\int_{-\infty}^{Z_\alpha} N(0,\ 1)dx=\alpha}$

3. $F(m, n)$ 分布

设 X、Y 相互独立，$X \sim \chi^2(m);\ Y \sim \chi^2(n)$；则 $\boxed{F=\frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,\ n)}$

评 注 特别地，$\boxed{m=n=1 \Rightarrow F(1,\ 1)=\frac{1}{\pi(1+x)\sqrt{x}}}$。

【例 2】假定$\left(X_1,\ X_2\right)$来自正态整体$X\sim N\left(0,\ \sigma^2\right)$的一个样本，求$P\left[\dfrac{\left(X_1+X_2\right)^2}{\left(X_1-X_2\right)^2}<4\right]$。

解：$X_i\sim N\left(0,\ \sigma^2\right)\Rightarrow X_1+X_2\sim N\left(0,\ 2\sigma^2\right)$；$X_1-X_2\sim N\left(0,\ 2\sigma^2\right)$

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,\ 1);\quad \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,\ 1)\Rightarrow\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1);\quad\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

$$\Rightarrow\frac{\left(X_1+X_2\right)^2}{\left(X_1-X_2\right)^2}=\frac{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\Big/1}{\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\Big/1}\sim F(1,\ 1)=\frac{1}{\pi(1+x)\sqrt{x}}\Rightarrow P\left[\frac{\left(X_1+X_2\right)^2}{\left(X_1-X_2\right)^2}<4\right]=\int_0^4\frac{1}{\pi(1+x)\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\pi}\arctan 2.$$

① 上分位点　$F_\alpha(n,m)$定义为$F\left(m,\ n\right)$分布的分位点，则 $\boxed{P\{F\ge F_\alpha(n,m)\}=\int_{F_\alpha(n,m)}^{+\infty}f_F(x)dx=\alpha}$

② 性 质　$\boxed{F_{1-\alpha}(n,\ m)=\dfrac{1}{F_\alpha(m,\ n)};\quad F\left(n,\ m\right)=\dfrac{1}{F\left(m,\ n\right)}}$

$$\boxed{X\sim t(n)\Rightarrow X^2\sim F(1,\ n);\quad X\sim F(n,\ m)\Rightarrow\frac{1}{X}\sim F(m,\ n)}$$

● 证明结论 $t^2(n)\sim F(1,\ n)$如下

$$U\sim N(0,1),\quad V\sim\chi^2(n);\quad T=\frac{U}{\sqrt{V/n}}\sim t(n)$$

$$T^2=\frac{U^2}{V/n};\ \text{而}\ U^2\sim\chi^2(1)\ \text{时}\Rightarrow T^2\sim F(1,\ n)\Rightarrow t^2(n)\sim F(1,\ n)$$

● 证明结论 $F_{1-\alpha}(n,\ m)=\dfrac{1}{F_\alpha(m,\ n)}$如下：

$$P\left\{X\ge F_{1-\alpha}(m,\ n)\right\}=1-\alpha\Rightarrow P\left\{\frac{1}{X}\le\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,\ n)}\right\}=1-\alpha\Rightarrow P\left\{\frac{1}{X}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,\ n)}\right\}=\alpha$$

又根据分位数的定义，$\xrightarrow{X\sim F(m,\ n)Y=\frac{1}{X}\sim F(n,\ m)}P\left\{\dfrac{1}{X}\ge F_\alpha(n,\ m)\right\}=\alpha$

而连续分布对一点的概率取值为零，则

$$P\left\{\frac{1}{X}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,\ n)}\right\}=P\left\{\frac{1}{X}\ge F_\alpha(n,\ m)\right\}\Rightarrow F_\alpha(n,\ m)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,\ n)}$$

智轩第 10 技　8 大枢轴量贯穿考研数学数理统计的全部考点，务必理解牢记。

单正态 4 分布。知方差 标准型；

未知方差t差 1；知期望　χ^2（卡平方）　；

未知期望χ^2（卡）减 1。 双正态 估差比；

知方差 与单同；未知方差t减 2；

知期望　用F；未知期望F差 1。

含S，具特征；每个容量减去 1。

四、数理统计中 8 大样本函数的分布（枢轴量）的详细证明

1.　单个正态总体

设$\{X_n\}\sim N(\mu,\ \sigma^2)$为一系列简单随机样本，则有

(1) 若σ已知，需要估计μ的范围，则使用枢轴量 $\boxed{\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n});\quad \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$

证明一：　$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu;\ \ D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$ 。结论得证。

证明二：$E\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}E(\overline{X}-\mu)=0$；

$$D\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\frac{n}{\sigma^2}D(\overline{X}-\mu)=\frac{n}{\sigma^2}[E(\overline{X}-\mu)^2-E^2(\overline{X}-\mu)]$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}[E\left(\overline{X}^2+\mu^2-2\mu\overline{X}\right)-0]=\frac{n}{\sigma^2}\left(E\overline{X}^2+\mu^2-2\mu^2\right)=\frac{n}{\sigma^2}(E\overline{X}^2-\mu^2)=\frac{n}{\sigma^2}[(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n})-\mu^2]=1$$ 。

$\boxed{\text{评 注}}$　公式 ① 是标准化正态随机变量的方法，也是确定复合随机变量分布的基础。

(2)若μ未知，需要估计σ的范围，则使用枢轴量

$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2\sim\chi^2(n-1)\text{；且 }\overline{X}\text{ 与 }S^2\text{ 独立}}$　（$\overline{X}$是随机变量）

证　明：已知$X_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，且相互独立，

令 $Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\left(i=1,2,\cdots,n\right)\Rightarrow Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\sim N\left(0,1\right)$，且相互独立。

作下列正交变换：$$\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}}&\frac{1}{\sqrt{n}}&\cdots&\frac{1}{\sqrt{n}}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}$$

正交变换不改变向量组的秩，由于$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$相互独立，则$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$相互独立，且都服从$N\left(0,1\right)$。

记 $\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{\sigma}=\frac{\overline{X}}{\sigma}-\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{\mu}{\sigma}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}=n\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$

由上述变换矩阵等式易得：$Z_1=\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_2+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n=\sqrt{n}\overline{Y}\sim N\left(0,1\right)\Rightarrow\overline{Y}=\frac{Z_1}{\sqrt{n}}$

正交变换不改变向量的长度$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}Y_i^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$，所以

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma})^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2+\sum_{i=1}^{n}(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma})^2-2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2+n(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma})^2-2n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2-n\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2-Z_1^2=\sum_{i=2}^{n}Z_i^2\sim\chi^2(n-1)$$

评 注　$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$ 有重要的应用价值，如计算 $E\left(S^2\right)$；$D\left(S^2\right)$ 如下：

$$\because E\left(\chi^2(n-1)\right)=n-1,\quad D\left(\chi^2(n-1)\right)=2(n-1)$$

$$\Rightarrow E\left(S^2\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left(\chi^2(n-1)\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot(n-1)=\sigma^2$$

$$D\left(S^2\right)=\left[\frac{\sigma^2}{n-1}\right]^2D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}\right]^2\cdot D\left(\chi^2(n-1)\right)=\left[\frac{\sigma^2}{n-1}\right]^2\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

(3) 若 σ 未知，需要估计 μ 的范围，则使用枢轴量 $\boxed{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)}$

证明：$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}}\sim t(n-1)$。

(4) 若 μ 已知，需要估计 σ 的范围，则使用枢轴量 $\boxed{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(n)}$

证明：$Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；　$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\sim\chi^2(n)$。

2.　两个正态总体　（X 和 Y 独立同分布）

$$X\sim N(\mu,\sigma_1^2),\ \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i;\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),\ \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2$$

(5) 若 σ_1^2，σ_2^2 已知，需要估计 $\mu_1-\mu_2$ 的范围，则使用枢轴量 $\boxed{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)}$

证明：$\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)\sim N\left[0,\ \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\right]\ \Rightarrow\ \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$

(6) 若 σ_1^2，σ_2^2 未知，但 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 时，需要估计 $\mu_1-\mu_2$ 的范围，则使用枢轴量

$$\boxed{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)\xrightarrow{\text{当 } m=n}\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{n}}}\sim t(2n-2)}$$

证明：$\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)\sim N\left[0,\ \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right]$

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{N\left[0,\ \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right]}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{\frac{N\left[0,\ \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right]}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}$$

$$=\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)\sigma^2+\chi^2(m-1)\sigma^2}{n+m-2}}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)+\chi^2(m-1)}{n+m-2}}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n+m-2)}{n+m-2}}}\sim t(n+m-2)。$$

(7) 如 μ_1，μ_2 已知，需要估计 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的范围，则使用枢轴量 $\boxed{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n,m)}$

证明：$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{n\sigma_1^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{m\sigma_2^2}}=\frac{\frac{\chi^2(n)}{n}}{\frac{\chi^2(m)}{m}}\sim F(n,m)$$

根据 F 分布的意义，可以推知 $\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2/\sigma_1^2\sim\chi^2(n)\\ \sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2/\sigma_2^2\sim\chi^2(m)\end{cases}$

(8) 如 μ_1，μ_2 未知，需要估计 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的范围，则使用枢轴量 $\boxed{\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}\sim F(n-1,m-1)}$

证明：$$\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}=\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{(n-1)\sigma_1^2}}{\frac{(m-1)S_2^2}{(m-1)\sigma_2^2}}=\frac{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}{\frac{\chi^2(m-1)}{m-1}}\sim F(n-1,m-1)。$$

五、题型题法

智轩第 11 技　量纲法求复合统计量的分布函数。

3 种抽样源正态；量纲法则判类型。

根据定义凑模式；标准变量容量值。

■ $\chi^2(n)$分布题型题法

【例 3】$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(0, 1)$的简单随机样本，求$n\overline{X}^2+(n-1)S^2$的分布。

解：$X_i \sim N(0, 1) \Rightarrow \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow n\overline{X}^2=\left(\frac{\overline{X}}{\sqrt{1/n}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

$$(n-1)S^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{1^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow n\overline{X}^2+(n-1)S^2=\chi^2(1)+\chi^2(n-1)=\chi^2(n)$$

【例 4】设x_1, x_2, x_3, x_4来自正态总体$N(0, 2^2)$的简单随机样本，求a, b，使得

$$X=a(x_1-2x_2)^2+b(3x_3-4x_4)^2 \sim \chi^2。$$

解：$X=a(x_1-2x_2)^2+b(3x_3-4x_4)^2=\left[\sqrt{a}(x_1-2x_2)\right]^2+\left[\sqrt{b}(3x_3-4x_4)\right]^2$

$$\sqrt{a}(x_1-2x_2) \sim N\left[0, \ (\sqrt{a}\cdot 2)^2+(2\sqrt{a}\cdot 2)^2\right]=N[0, \ 20a] \Rightarrow a=\frac{1}{20}$$

$$\sqrt{b}(3x_3-4x_4) \sim N\left[0, \ (3\sqrt{b}\cdot 2)^2+(4\sqrt{a}\cdot 2)^2\right]=N[0, \ 100a] \Rightarrow b=\frac{1}{100}$$

$$X \sim \chi^2(2)$$

【例 5】设$Q=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2+d(X_7+X_8+X_9+X_{10})$ 服从χ^2分布，其中$\{X_i\} \sim N(0,2^2)$，求a, b, c, d和自由度m。

解：　$X_1 \sim N(0,2^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma}X_1=\frac{1}{2}X_1 \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{1}{4}X_1^2 \sim x^2(1)$

同理　$X_2+X_3 \sim N(0,8), \ X_1+X_5+X_6 \sim N(0,12), \ X_7+X_8+X_9+X_{10} \sim N(0,16)$

$$\frac{1}{8}(X_2+X_3)^2 \sim \chi^2(1)；\ \frac{1}{12}(X_4+X_5+X_6) \sim \chi^2(1)；\ \frac{1}{16}(X_7+X_8+X+X_{10}) \sim \chi^2(1)$$

由$\chi^2(n)$的可加性知　$Q \sim \chi^2(4)$

所以　$a=\frac{1}{4}$　$b=\frac{1}{8}$　$c=\frac{1}{12}$　$d=\frac{1}{16}$　$m=4$

【例 6】$X \sim N(0, 1), \ Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2, \ CY \sim \chi^2$。求$C$。

解：$X_1+X_2+X_3 \sim N(0, 3) \Rightarrow \frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0, 1)$

$$X_4+X_5+X_6\sim N(0,\ 3)\Rightarrow\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,\ 1)$$

$$\Rightarrow CY=C\left(X_1+X_2+X_3\right)^2+C\left(X_4+X_5+X_6\right)^2$$

$$=C\times 3\left[\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\sim\chi^2(2)\Rightarrow C=\frac{1}{3}$$

【例 7】设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N(0,\ 1)$ 的简单随机样本，且 $X=a\sum_{i=1}^{4}X_i^2+b\left(X_1X_2+X_3X_4\right)\sim\chi^2(n)$，求 $a,\ b$ 的值。

解：$X\sim\chi^2(n)$，则 $a\sum_{i=1}^{4}X_i^2+b\left(X_1X_2+X_3X_4\right)$ 必可以配成平方和形式。

当 $b=0$，$X=a\sum_{i=1}^{4}X_i^2$ 要保证归一化，必须 $a=1$，这时 $X=\sum_{i=1}^{4}X_i^2\sim\chi^2(4)$；

当 $b=1,\ a=2$，$X=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{X_1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{X_2}{\sqrt{2}}+\frac{X_3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{X_4}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{X_1}{\sqrt{2}}+\frac{X_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_3}{\sqrt{2}}+\frac{X_4}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$=\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_3+X_4}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\chi^2(2)。$$

■ $t(n)$ 分布题型题法

【例 8】设 $(X_1,\ X_2)$ 是来自整体 $X\sim N(0,\ \sigma^2)$ 的样本，求 $\frac{X_1+X_2}{\left|X_1-X_2\right|}$ 的分布。

解：$E\left(X_1+X_2\right)=0;\ D\left(X_1+X_2\right)=2\Rightarrow\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,\ 1)$

$$E\left(X_1-X_2\right)=0;\ D\left(X_1+X_2\right)=2\Rightarrow\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,\ 1)$$

$$\Rightarrow\frac{X_1+X_2}{\left|X_1-X_2\right|}=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{\left(X_1-X_2\right)^2}}=\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{1}}}\sim\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(1)}{1}}}\sim t(1)$$

【例 9】设 $X,\ Y$ 相互独立，都服从 $N\left(0,\ 3^2\right)$，则统计量 $U=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_9}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_9^2}}$ 服从什么分布。

解：　U 的分子是 N 分布，分母是 $\sqrt{\chi^2}$ 分布，则 U 必是 T 分布。

　　根据 T 分布定义，需要把分子和分母标准化 $N(0,\ 1)$，这需要利用公式①

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{9}\sim N(0,\ 1);\ \frac{Y_i}{3}\sim N(0,\ 1)\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}{9}=\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{3}\right)^2\sim\chi^2(9)$$

$$U=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_9}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_9^2}}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{9}}{\frac{1}{3}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{3}\right)^2}}\sim\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(9)}{9}}}=t(9)。$$

【例 10】设 $X\sim$ 正态分布，又设 $X_{n+1}\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，且 X_{n+1} 与 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 相互独立，求

$T=\frac{x_{n+1}-\overline{x}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布。

解：含有 S，可以预计容量应该是 $n-1$，分子量纲为 N 分布，分母 $S=\sqrt{S^2}$ 相当于 χ^2，根据量纲法，可以推知结果是 t 分布。

$$x_{n+1}-\overline{x}\sim N\left(0,\ \sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)=N\left(0,\ \frac{n+1}{n}\sigma^2\right)\Rightarrow\frac{x_{n+1}-\overline{x}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}}=\frac{x_{n+1}-\overline{x}}{\sigma\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,\ 1)$$

$$T=\frac{x_{n+1}-\overline{x}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{\frac{x_{n+1}-\overline{x}}{\sigma\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\cdot\sigma}{S}=\frac{\frac{x_{n+1}-\overline{x}}{\sigma\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}}}=\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}}\sim t(n-1)$$

【例 11】设 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，记 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，

$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$，$S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$。则下列正确的是（ ）。

$(A)\ t(n-1)=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_1}{\sqrt{n-1}}}$　　$(B)\ t(n-1)=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}}$

$(C)\ t(n-1)=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_3}{\sqrt{n}}}$　　$(D)\ t(n-1)=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_4}{\sqrt{n}}}$

解：由于容量为 $(n-1)$ 的分布含样本方差，而 $S_1^2,\ S_2^2$ 是样本方差，$S_3^2,\ S_4^2$ 不是，故立即可以否定 (C)，(D)。又只有 S_1^2 才是标准的样本方差，由标准的 $t(n-1)=\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 推知 (A) 不对。故选 (B)。事实上

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}{\sqrt{n-1}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sqrt{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}{\sqrt{n-1}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$$

【例 12】$\{X_i\}$是来自正态整体 X 的简单随机样本，已知 $Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots X_6)$，

$$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),\ S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_2)^2。\ 求 Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S} 分布。$$

解：$E(Y_1-Y_2)=E(Y_1)-E(Y_2)=\frac{1}{6}E(X_1+X_2+\cdots X_6)-\frac{1}{3}E(X_7+X_8+X_9)=0$

$$D(Y_1-Y_2)=D(Y_1)+D(Y_2)=\frac{1}{36}D(X_1+X_2+\cdots X_6)+\frac{1}{9}E(X_7+X_8+X_9)=\frac{1}{36}\times 6\sigma^2+\frac{1}{9}\times 3\sigma^2=\frac{\sigma^2}{2}$$

$$\Rightarrow Y_1-Y_2\sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{2}\right)\Rightarrow\frac{(Y_1-Y_2)-0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$$

$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim\frac{\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}}{\frac{S}{\sigma}}=\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}\sim\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}}}\sim\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}}\sim t(n-1)\ \ (n=2,\ 3,\cdots)$$

■ $F(n_1,\ n_2)$分布题型题法

【例 13】$X\sim N(0,\ 2^2)$，$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{15}$来自 X 的简单随机样本，则$Y=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots x_{10}^2}{2(x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots x_{15}^2)}$服从什么分布。

解：分子量纲为$N^2\to\chi^2$分布，分母量纲为也为$N^2\to\chi^2$分布，根据量纲法，可以推知结果是F分布。下面具体计算如下

$$Y=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots x_{10}^2}{2(x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots x_{15}^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{2}\right)^2+\cdots\left(\frac{x_{10}}{2}\right)^2}{\left(\frac{x_{11}}{2}\right)^2+\left(\frac{x_{12}}{2}\right)^2+\cdots\left(\frac{x_{15}}{2}\right)^2}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{\chi^2(10)}{\chi^2(5)}\sim\frac{\frac{\chi^2(10)}{10}}{\frac{\chi^2(5)}{5}}\sim F(10,\ 5)。$$

【例 14】$X\sim t(n)$，求$\frac{1}{X^2}$的分布。

解：$$X\sim t(n)\Rightarrow X\sim\frac{N(0,\ 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n)}{n}}}\Rightarrow\frac{1}{X^2}\sim\frac{\frac{\chi^2(n)}{n}}{N^2(0,\ 1)}\sim\frac{\frac{\chi^2(n)}{n}}{\chi^2(1)}\sim\frac{\frac{\chi^2(n)}{n}}{\frac{\chi^2(1)}{1}}\sim F(n,\ 1)。$$

■抽样分布综合题型题法

【例 15】$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$是来自总体$N(1,\ 1)$的简单随机样本，求$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left[\sum_{j=1}^{n}X_j^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right]\right\}$。

解：根据$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i=n\overline{X}$； $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2-n\overline{X}^2\right)$

而 $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立，$X_i \sim N(1,\ 1) \Rightarrow E\overline{X}=1,\ ES^2=1$

$$\Rightarrow E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]\right\}=E\left\{n\overline{X}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2-\frac{1}{n}\left(n\overline{X}\right)^2\right]\right\}$$

$$=E\left\{n\overline{X}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2-n\overline{X}^2\right]\right\}=E\left\{n\overline{X}\cdot(n-1)S^2\right\}=n(n-1)\text{。}$$

【例 16】$X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n \ge 2)$ 为来自 $N(0,\ 1)$ 的简单随机样本，则下列哪个正确。

$(A)\ n\overline{X} \sim N(0,\ 1)$　　$(B)\ nS^2 \sim \chi^2(n)$

$(C)\ \dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　$(D)\ \dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,\ n-1)$

解：选 (D)

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}\overline{X} \sim N(0,\ 1)$，故排除 (A)；

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$，故排除 (C)；

$\dfrac{(n-1)S^2}{1^2}=(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1) \not\Rightarrow nS^2 \sim \chi^2(n)$，故排除 (B)；

$\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2}=\dfrac{X_1^2}{\frac{\sum_{i=2}^{n} X_i^2}{n-1}} \sim \dfrac{\chi^2(1)}{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}} \sim F(1,\ n-1)$，故 (D) 正确。

【例 17】设总体 $X \sim N(0,\ 1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 是来自总体的简单随机样本，求下列分布。

$(1)\ Y_1=\dfrac{\sqrt{2n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{2n} X_i^2}}$；　$(2)\ Y_2=\dfrac{(2n-3)\sum_{i=1}^{3} X_i^2}{3\sum_{i=4}^{2n} X_i^2}$；　$(3)\ Y_3=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} X_i^2+\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}X_{2i}$

解：$(1)\ Y_1=\dfrac{\sqrt{2n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{2n} X_i^2}}=\dfrac{X_1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{2n} X_i^2}{2n-1}}} \sim \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(2n-1)}{2n-1}}} \sim t(2n-1)$

$$(2)\ Y_2=\frac{(2n-3)\sum_{i=1}^{3} X_i^2}{3\sum_{i=4}^{2n} X_i^2}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{3} X_i^2}{3}}{\frac{\sum_{i=4}^{2n} X_i^2}{2n-3}} \sim \frac{\frac{\chi^2(3)}{3}}{\frac{\chi^2(2n-3)}{2n-3}} \sim F(3,\ 2n-3)$$

$$(3) Y_3=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}X_{2i-1}X_{2i}$$

$$=\frac{1}{2}\left(X_1^2+\cdots+X_{2n}^2\right)+X_1X_2+X_3X_4+\cdots+X_{2n-1}X_{2n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(X_1+X_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(X_3+X_4\right)^2+\cdots+\frac{1}{2}\left(X_{2n-1}+X_{2n}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_{2i-1}+X_{2i}}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\sum_{i=1}^{n}\left[N_i(0,1)\right]^2\sim\chi^2(n).$$

【例 18】已知 $X\sim N\left(\mu_1,\ \sigma^2\right),\ Y\sim N\left(\mu_2,\ \sigma^2\right)$

求　(1) $\dfrac{(n-1)\left(S_1^2+S_2^2\right)}{\sigma^2}$；(2) $\dfrac{n\left[\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]^2}{S_1^2+S_2^2}$。

解：(1) $\dfrac{(n-1)\left(S_1^2+S_2^2\right)}{\sigma^2}\sim\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}+\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)+\chi^2(n-1)\sim\chi^2(2n-2)$

$$(2)\frac{n\left[\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)\right]^2}{S_1^2+S_2^2}=\frac{\left[\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}-\dfrac{\overline{X}-\mu_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]^2}{\dfrac{(n-1)\left(S_1^2+S_2^2\right)}{(n-1)\sigma^2}}\sim\frac{\left[N(0,2)\right]^2}{\dfrac{\chi^2(n-1)+\chi^2(n-1)}{(n-1)}}$$

$$\sim\frac{\left[\dfrac{N(0,2)}{\sqrt{2}}\right]^2}{\dfrac{\chi^2(2n-2)}{2(n-1)}}\sim\frac{\left[\dfrac{N(0,1)}{1}\right]^2}{\dfrac{\chi^2(2n-2)}{2(n-1)}}\sim F(1,\ 2n-2)$$

【例 19】$X\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，$S_1^2$ 和 S_2^2 独立，求 $D\left(S_1^2-2S_2^2\right)$。

解：$D\left(S_1^2-2S_2^2\right)=D\left(S_1^2\right)+4D\left(S_2^2\right)=\dfrac{2\sigma^4}{n_1-1}+\dfrac{8\sigma^4}{n_2-1}=2\left(\dfrac{1}{n_1-1}+\dfrac{4}{n_2-1}\right)\sigma^4$

【例 20】设 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，　$d=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|$，求 Ed 和 Dd。

解：记 $Y_i=X_i-\mu$，则 $Y_i\sim N\left(0,\ \sigma^2\right)$。

$$E\left|Y_i\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

$$D\left|Y_i\right|=EY_i^2-\left(E\left|Y_i\right|\right)^2=DY_i+\left(EY_i\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)^2=\sigma^2+0-\frac{2}{\pi}\sigma^2=\left(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sigma^2$$

$$\Rightarrow Ed=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left|Y_i\right|\right)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

$$Dd=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\left|Y_i\right|\right)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\left(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sigma^2=\left(1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

【例 21】已知 X 的密度函数 $f(x,\ \theta)=(\theta+1)x^{\theta}$　$\theta\ge 1$ $(0\le x\le 1)$ 未知，$\{X_i\}$ 独立同分布，求：

（1）$\{X_i\}$ 的联合密度函数。

（2）求 $E(\overline{X}),\ D(\overline{X}),\ E(S^2),\ D\left(S^2\right)$,。

解：（1） $f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n,\ \theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$

（2）$E(X)=\int_o^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$；　　$E(X^2)=\int_o^1 x^2(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+3}$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\theta+1}{(\theta+3)(\theta+2)^2}$$

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i\right)=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\theta+1}{n(\theta+3)(\theta+2)^2}$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(D(X_i)+E^2(X_i)\right)-n\left(D(\overline{X})+E^2(\overline{X})\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(D(X)+E^2(X)\right)-n\left(D(\overline{X})+E^2(\overline{X})\right)\right]=\frac{\theta+1}{(\theta+3)(\theta+2)^2}$$

$$D(S^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right)=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2D\chi^2(n-1)=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2}{n-1}\left[\frac{\theta+1}{(\theta+3)(\theta+2)^2}\right]^4$$

$\boxed{\text{评 注}}$ 类比法求任意分布的 $E(\overline{X}),\ D(\overline{X}),\ E(S^2),\ D\left(S^2\right)$。

1．对于正态分布 $X\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，我们已经知道

$$E\overline{X}=\mu;\quad D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},\quad ES^2=\sigma^2,\quad DS^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}。$$

2．对于其他分布。只要将相应的数字特征代入上述公式即可，比如

● $X\sim P(\lambda)\Rightarrow E\overline{X}=\lambda;\quad D\overline{X}=\dfrac{\lambda}{n},\quad ES^2=\lambda,\quad DS^2=\dfrac{2\lambda^2}{n-1}$

● $X\sim E(\lambda)\Rightarrow E\overline{X}=\dfrac{1}{\lambda};\quad D\overline{X}=\dfrac{1}{n\lambda^2},\quad ES^2=\dfrac{1}{\lambda^2},\quad DS^2=\dfrac{2}{(n-1)\lambda^2}$

● $X\sim B(n,\ p)\Rightarrow E\overline{X}=np;\quad D\overline{X}=p(1-p),\quad ES^2=np(1-p),\quad DS^2=\dfrac{2\left[np(1-p)\right]^2}{n-1}$

● $X\sim U(a,\ b)\Rightarrow E\overline{X}=\dfrac{a+b}{2};\quad D\overline{X}=\dfrac{(b-a)^2}{12n},\quad ES^2=\dfrac{(b-a)^2}{12},\quad DS^2=\dfrac{(b-a)^4}{72(n-1)}$

【例 22】设 $\overline{X}$ 和 S^2 分别来自正态总体 $N\left(0,\ \sigma^2\right)$，容量为 n，求 $\dfrac{n\overline{X}^2}{S^2}$ 的分布。

解：$\overline{X} \sim N\left(0,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \chi^2(1)$

$$\frac{n\overline{X}^2}{S^2}=\frac{\left(\dfrac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}{\dfrac{S^2}{\sigma^2}}=\frac{\chi^2(1)}{\dfrac{S^2}{\sigma^2}}=\begin{cases}\dfrac{\chi^2(1)}{\dfrac{(2-1)S^2}{\sigma^2}/1}\to\dfrac{\chi^2(1)}{\chi^2(1)}\sim F(1,\ 1), & n\le 2\\ \dfrac{\chi^2(1)}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}\to\dfrac{\chi^2(1)}{\chi^2(n-1)}\sim F(1,\ n-1), & n>2\end{cases}。$$

【例 23】设 X_1，X_2 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$，$S^2=\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2$，$Y=\sqrt{X_1X_2}$，求 $(1)\,X\sim E(\lambda)$，求 EY；$(1)\,X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，求 $E\left(\overline{X}^2S^4\right)$。

解：(1) $EY=E\sqrt{X_1X_2}=E\sqrt{X_1}\cdot E\sqrt{X_2}=\left(E\sqrt{X}\right)^2$

$$E\sqrt{X}=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx\xrightarrow[dx=2tdt]{\sqrt{x}=t}=2\lambda\int_0^{+\infty}t^2e^{-\lambda t^2}dx\xrightarrow{t=\frac{u}{\sqrt{2\lambda}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}ET^2\xrightarrow{T\sim N(0,\ 1)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left[DT+(EX)^2\right]=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\Rightarrow EY=\frac{\pi}{4\lambda}$$

(2) $$E\left(\overline{X}^2S^4\right)=E\left(\overline{X}^2\right)E\left(S^4\right)\xrightarrow{X\sim N\left(\mu,\ \frac{1}{2}\sigma^2\right)}=\left(\mu^2+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sigma^4E\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\right)^2=\sigma^4\left(\mu^2+\frac{1}{2}\sigma^2\right)E\left[\chi^2(1)\right]^2$$

$$=\sigma^4\left(\mu^2+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(D\chi^2(1)+\left[E\chi^2(1)\right]^2\right)=\sigma^4\left(\mu^2+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(2+1)=3\sigma^4\left(\mu^2+\frac{1}{2}\sigma^2\right)。$$

■8 大枢轴量基本题型题法

【例 24】设总体 X 服从 N（62，100），为使样本均值大于 60 的概率不小于 0.95，问 n 至少应取多大？

解：已知 $\sigma^2=100$，估计 μ，使用枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$

$$P(\overline{X}>60)=P\left\{\frac{\overline{X}-62}{10}\sqrt{n}>\frac{60-62}{10}\sqrt{n}\right\}=1-P\left\{\frac{\overline{X}-62}{10}\sqrt{n}\le -0.2\sqrt{n}\right\}$$

根据独立同中心极限定理　$\approx 1-[1-\Phi(+0.2\sqrt{n})]=\Phi(0.2\sqrt{n})\ge 0.95\approx\Phi(1.64)$

$\Rightarrow 0.2\sqrt{n}\ge 1.64\Rightarrow n\ge 67.24$　故 n 至少取 68。

【例 25】灯炮使用寿命 $X\sim N(1000,\sigma^2)$，随机抽取容量为 9 的样本，测得了其均值与方差，但事后只记得 $S^2=100^2$,试求 $P(\overline{X}>1062)$。

解：由于未知 σ^2，故使用枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

$$T=\frac{\overline{X}-1000}{100}\sqrt{9}\sim t(9-1)=t(8)$$

于是

$$\Rightarrow P\left[t\left(n-1\right)>t_{\alpha}\left(8\right)\right]=P\left(\frac{\overline{X}-1000}{100/3}>1.86\right)=\alpha$$

查表得　$1.86\approx t_{0.05}(8)$，故　$P(\overline{X}>1062)=0.05$

第六章 数理统计的基本概念习题精选

一．填空题

1. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的样本，则统计量

$$Y=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2$$ 服从______分布，参数为________.

2. 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 为来自总体 X～N(0,1)的一个样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^{\ 2}+X_4^{\ 2}}}$ 服从________分布，参数为_________.

3. 设 (X_1, X_2) 为来自总体 X～N(0, σ^2)的一个样本，则统计量 $\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 服从_______分布，参数为____________.

4. 设随机变量 X～F（n,n），则概率 P(X<1)=__________.

二．选择题

1. 设随机变量 X～N(1,4)，$(X_1, X_2, \cdots, X_{100})$ 为来自总体X的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，已知 Y＝$a\overline{X}+b$～N(0,1)，则

（A）$a=-5, b=5$　　（B）$a=5, b=5$

（C）$a=\frac{1}{5}, b=-\frac{1}{5}$　　（D）$a=-\frac{1}{5}, b=\frac{1}{5}$　　[　]

2. 设总体 X～N(μ, σ^2)，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体X的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

（A）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$　　（B）$\frac{n-1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$

（C）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$　　（D）$\frac{n-1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$　　[　]

3. 设 X_1, X_2 为取自总体X～N(μ, σ^2)的样本，则 X_1+X_2 与 X_1-X_2 必

（A）不相关　　（B）线性相关

（C）相关但非线性相关　　（D）不独立　　[　]

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体X～N(μ, σ^2)的一个样本，统计量 $Y=n(\frac{\overline{X}-\mu}{S})^2$，则

（A）$Y\sim \chi^2(n-1)$　　（B）Y～t(n-1)

（C）Y～F(n-1,1)　　（D）Y～F(1,n-1)　　[　]

5. 设随机变量 X～N(0,1)和 Y～N(0,2)，并且相互独立，则

（A）$\frac{1}{3}X^2+\frac{2}{3}Y^2$服从$\chi^2$分布　　（B）$\frac{1}{3}(X+Y)^2$服从$\chi^2$分布

（C）$\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2$服从$\chi^2$分布　　（D）$\frac{1}{2}(X+Y)^2$服从$\chi^2$分布　　[　]

三．解答题

1. 设总体 X～B(1, p)，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自 X 的样本，

（1）求$X_1,X_2,\cdots,X_n$的分布律；

（2）求$\sum_{i=1}^{n}X_i$的分布律；

（3）求$E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$。

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自正态总体$N(0,3^2)$的样本，求系数 a,b,c，　使统计量

$Y=a(X_1+X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2+c(X_6+X_7+X_8+X_9)^2$服从$\chi^2$分布，并求其自由度。

第六章 数理统计的基本概念习题精选答案

一．填空题

1. χ^2，2

2. t，2

3. F，（1,1）

4. $\dfrac{1}{2}$

二．选择题

1. （A）　　2. （C）　　3. （A）　　4. （D）　　5. （B）

三．解答题

1.（1）样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布律：

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = p^{\sum_{k=1}^{n} x_k}(1-p)^{\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)}$$

（2）$\sum_{i=1}^{n} X_i$的分布律为：$P\{\sum_{i=1}^{n} X_i = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 1,2,\cdots,n$

（3）$E(\overline{X}) = p, D(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}, E(S^2) = D(X) = p(1-p)$

2. $a = \dfrac{1}{18}, b = \dfrac{1}{27}, c = \dfrac{1}{36}$，自由度为 3.