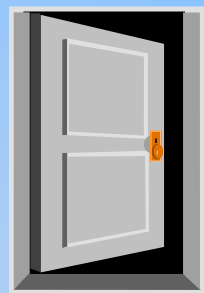
§2离散型随机变量

§2离散型随机变量

一. 离散型随机变量的概念与性质

离散型随机变量的定义

如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个，则称 X 为离散型随机变量.



返回主目录

离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_n, \quad \cdots$$

并设 $P\{X = x_n\} = p_n \qquad (n = 1, \ 2, \ \cdots)$

则称上式或

X	x_1	x_2	$\cdots,$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots,$	p_n	$\cdots$

为离散型随机变量 X 的分布律.

返回主目录

说　明

离散型随机变量可完全由其分布律来刻划.

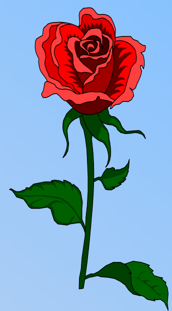
即离散型随机变量可完全由它的可能取值以及取这些值的概率唯一确定.

离散型随机变量分布律的性质:

(1). 对任意的自然数 n，有

$$p_n \geq 0$$

(2). $\sum\limits_{n} p_n = 1$



返回主目录

例 1

从1～10这10个数字中随机取出5个数字，令：

X：取出的5个数字中的最大值.

试求 X 的分布律.

解：　X 的取值为5，6，7，8，9，10.　并且

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}} \qquad (k=5,\ 6,\ \cdots,\ 10)$$

具体写出，即可得 X 的分布律：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

返回主目录

例 2

将 1 枚硬币掷 3 次，令：

X：出现的正面次数与反面次数之差.

试求 X 的分布律.

解： X 的取值为-3，-1，1，3. 并且

X	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

例 3

设离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则

$$P\{X \le 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

例 3（续）

$$P\{X>3\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7}{16}$$

$$P\{0.5\leq X<3\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$$

例 4

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$ 试求常数c.

解：由随机变量的性质，得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

该级数为等比级数，故有

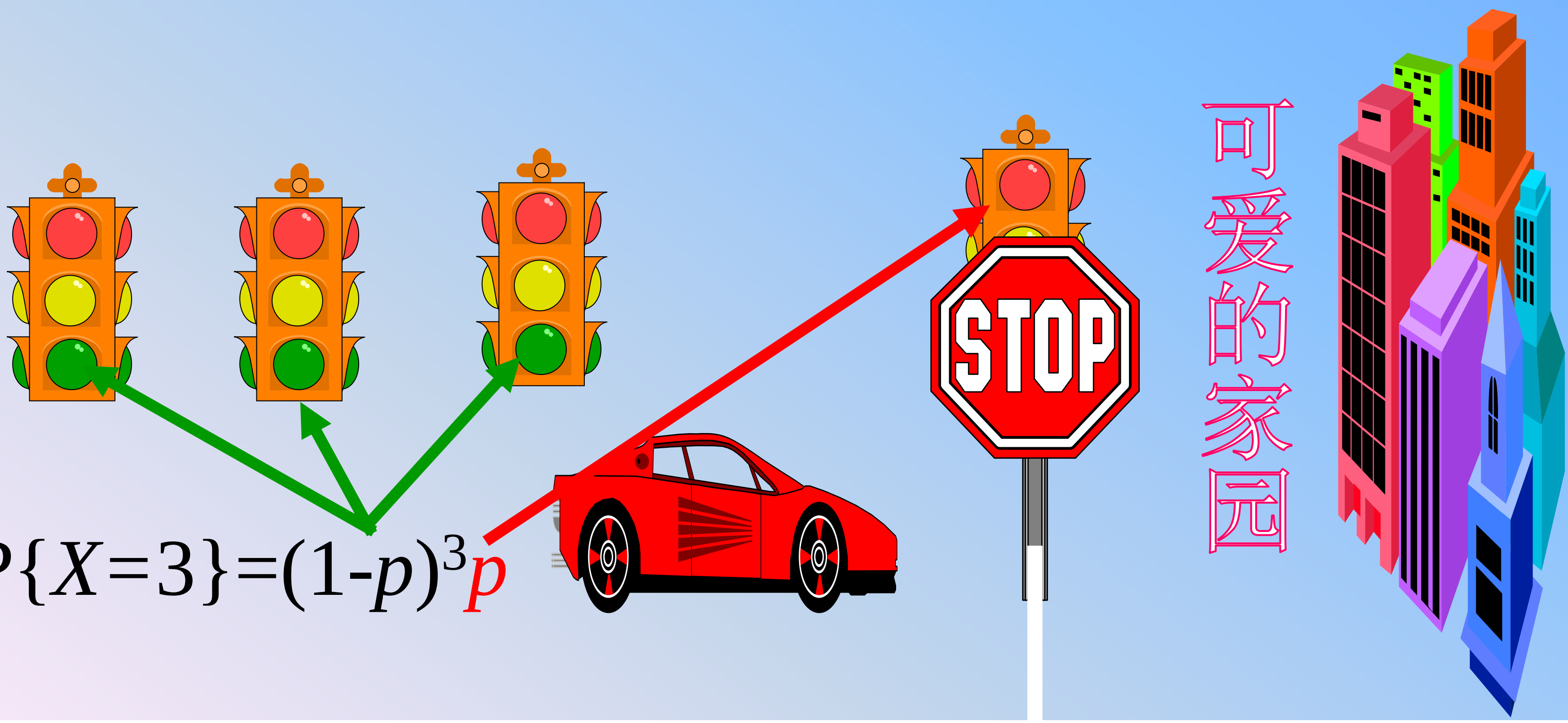
$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

所以　$c=3$.

例 5

§2离散型随机变量

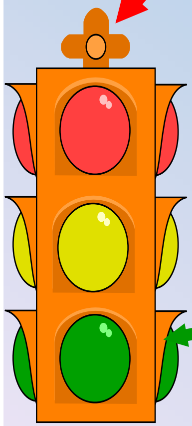
设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以 1/2 的概率允许或禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律. (信号灯的工作是相互独立的).



$$P\{X=3\}=(1-p)^3 p$$

例 5(续)

解：　以 p 表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则 X 的分布律为：



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$\underline{(1-p)}\,p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成 $P\{X=k\}=(1-p)^kp$，$k=0,1,2,3$

$$P\{X=4\}=(1-p)^4$$

返回主目录

例 5(续)

以 $p = 1/2$ 代入得：

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

二、一些常用的离散型随机变量

1) Bernoulli分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p\text{，}\quad P\{X=1\}=p$$

或

X	0	1
P	1-p	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 Bernoulli分布.

记作　$X \sim B(1,\quad p)$　　（其中 $0 \le p \le 1$ 为参数）

返回主目录

Bernoulli分布也称作 0-1 分布或二点分布.

Bernoulli分布的概率背景

进行一次Bernoulli试验，设：

$$P(A) = p\,, \qquad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

令：X：在这次Bernoulli试验中事件A发生的次数.

或者说：令

$$X = \begin{cases} 1 & \text{若事件}A\text{发生} \\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生} \end{cases}$$

则 $\quad X \sim B(1, p)$

返回主目录

例 6

15 件产品中有4件次品，11件正品．从中取出1件

令

X：取出的一件产品中的次品数．则 X 的取值为 0 或者 1，并且

$$P\{X=0\}=\frac{11}{15},\quad P\{X=1\}=\frac{4}{15}$$

即：$$X \sim B\left(1,\ \frac{4}{15}\right).$$

2）二 项 分 布

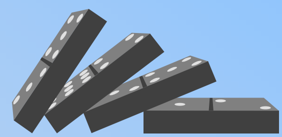
如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, \ 1, \ \cdots, \ n)$$

则称随机变量 X 服从参数为$(n, \ p)$的二项分布，

记作 $X \sim B(n, \ p)$

（其中n为自然数，$0 \le p \le 1$为参数）



返回主目录

说 明

显然，当 n=1 时

$$X \sim B(1, \quad p)$$

此时，X 服从 *Bernoulli* 分布.

这说明，*Bernoulli* 分布是二项分布的一个特例.

二项分布的概率背景

进行n重Bernoulli试验，设在每次试验中

$$P(A)=p\,,\qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

令　X：在这次Bernoulli试验中事件A发生的次数.

则　$$X\sim B(n,\ p)$$

分布律的验证

(1). 由于 $0 \le p \le 1$ 以及 n 为自然数，可知

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ge 0 \quad (k=0, \quad 1, \quad \cdots, \quad n)$$

(2). 又由二项式定理，可知

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1$$

所以

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, \quad 1, \quad \cdots, \quad n)$$

是分布律.

例7

一张考卷上有5道选择题，每道题列出4个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对4道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次Bernoulli试验，

$A=\{答对一道题\}$，则 $P(A)=\frac{1}{4}$

则答5道题相当于做5重Bernoulli试验．

设：X：该学生靠猜测能答对的题数 则 $X \sim B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$

返回主目录

例 7（续）

所以

$$P\{\text{至少能答对4道题}\} = P\{X \geq 4\}$$

$$= P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1}{64}$$

二项分布的分布形态

若 $X \sim B(n, p)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}$$

$$\begin{cases} >1, & k<(n+1)p \\ =1, & k=(n+1)p \\ <1, & k>(n+1)p \end{cases}$$

如果 $(n+1)p$ 是整数，则 $k=(n+1)p$ 或 $(n+1)p-1$ 时，

$P(X=k)$ 达到最大；

如果若 $(n+1)p$ 不是整数，则 $k=[(n+1)p]$ 时，

$P(X=k)$ 达到最大；

返回主目录

例8

对同一目标进行300次独立射击，设每次射击时的命中率均为0.44，试求300次射击最可能命中几次？其相应的概率是多少？

解：对目标进行300次射击相当于做300重Bernoulli试验．令：

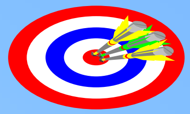
X： 300射击中命中目标的次数.

则由题意 $X \sim B(300, \ 0.44)$.

由于 $(300+1)\times 0.44 = 132.44$，它不是整数

返回主目录

例8（续）



因此，最可能射击的命中次数为

$$k_0 = [132.44] = 132$$

其相应的概率为

$$P\{X = 132\} = C_{300}^{132} \times 0.44^{132} \times 0.56^{168}$$
$$= 0.04636$$

3）Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$\left(\text{其中}\lambda>0\text{为常数}\right)$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的Poisson 分布.

记为$X\sim\pi(\lambda)$.

分布律的验证

(1) 由于 $\lambda > 0$ 可知对任意的自然数 k，有

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} > 0$$

(2) 又由幂级数的展开式，可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

是分布律.

Poisson分布的应用

- Poisson分布是概率论中重要的分布之一.
- 自然界及工程技术中的许多随机指标都服从Poisson分布.
- 例如，可以证明，电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数，放射物在某一时间间隔内发射的粒子数，容器在某一时间间隔内产生的细菌数，某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数，等等，在一定条件下，都是服从Poisson分布的.

例 9

设随机变量 X 服从参数为 λ 的Poisson分布，且已知

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}$$

试求 $P\{X=4\}$.

解:

随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

由已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$

例 9（续）

得
$$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$$

由此得方程
$$\lambda^2-2\lambda=0$$

得解
$$\lambda=2.$$

(另一个解$\lambda=0$不合题意，舍去)

所以，
$$P\{X=4\}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}$$
$$=0.09022$$

返回主目录

例 10

设一个人在一年内的感冒次数服从参数$\lambda=5$的 $Poisson$分布，现有一种预防感冒的药，它对30%的人来说，可将上述参数λ降为$\lambda=1$（疗效显著）；对另45%的人来讲，可将参数λ降为$\lambda=4$（疗效一般）；而对其余25%的人来讲，则是无效的．现某人服用此药一年，在这一年中，他得了3次感冒，试求此药对他“疗效显著”的概率．

返回主目录

例 10（续）

解：设 B={ 此人在一年中得3次感冒 }

$A_1=\{该药疗效显著\}$　　$A_2=\{该药疗效一般\}$

$A_3=\{该药无效\}$　　则由Bayes公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}}{0.30\times\frac{1^3}{3!}e^{-1}+0.45\times\frac{4^3}{3!}e^{-4}+0.25\times\frac{5^3}{3!}e^{-5}}$$

$$=0.1301$$

返回主目录

Poisson定理

设在$Bernoulli$试验中，以p_n代表事件A在试验中发生的概率，它与试验总数n有关．如果

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

则
$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

证明：　令：$np_n = \lambda_n$

则
$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

Poisson定理的证明(续)

$$=\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

对于固定的 k，有

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$　得　$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^k=\lambda^k$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\frac{n-k}{n}\cdot\lambda_n}=e^{-\lambda}$$

返回主目录

Poisson定理的证明(续)

所以

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\lambda_n^k\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Poisson定理的应用

由 Poisson 定理，可知

若随机变量 $X \sim B(n,\quad p)$,

则当n比较大，p比较小时，

令： $\lambda = np$

则有 $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

例 11

设每次射击命中目标的概率为0.012，现射击600次，

求至少命中3次目标的概率（用Poisson分布近似计算）.

解：设 B={ 600次射击至少命中3次目标 }

进行600次射击可看作是一600重Bernoulli试验.

X：600次射击命中目标的次数.

则 $X \sim B(600,\ 0.012)$.

用 $Poisson$分布近似计算，

取 $\lambda = 600 \times 0.012 = 7.2$.

返回主目录

例 11（续）

§2离散型随机变量

所以，

$$P(B)=P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}$$

$$=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}$$

$$=1-e^{-7.2}-7.2e^{-7.2}-\frac{7.2^2}{2}e^{-7.2}$$

$$=0.9745$$

Poisson分布的分布形态

若 $X \sim \pi(\lambda)$，则

$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}}=\frac{\lambda}{k}\begin{cases}>1, & k<\lambda\\=1, & k=\lambda\\<1, & k>\lambda\end{cases}$$

如果λ是整数，则 $k=\lambda$ 或 $\lambda-1$时，

$P(X=k)$达到最大；

如果 若λ不是整数，则 $k=[\lambda]$时，

$P(X=k)$达到最大；

返回主目录

例 12

为了保证设备正常工作，需配备适量的维修工人，现有同类型设备 300 台，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01. 在通常情况下，一台设备的故障可有一人来处理. 问至少需配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01？

解： 设需配备 N 人，记同一时刻发生故障的设备台数为 X，则 $X\sim b(300，0.01)$，需要确定最小的 N 的取值，使得：

$$P\{X > N\} \le 0.01.$$

返回主目录

$$P\{X > N\} \le 0.01.$$

$$P\{X \le N\} \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \ge 0.99.$$

$$1 - \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k e^{-3}}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \le 0.01.$$

查表可知，满足上式的最小的 N 是 8，因此至少需配备 8 个工人。

例 13

设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障能由一个人处理.考虑两种配备维修工人的方法：

其一，由 4人维护，每人负责 20 台

其二，由 3 人,共同维护 80 台.

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

例 13(续)

解：按第一种方法. 以 X 记 "第 1 人负责的 20 台中同一时刻发生故障的台数"，则 $X \sim b(20，0.01)$.

以 A_i 表示事件 "第 i 人负责的台中发生故障不能及时维修"， 则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\}.$$

$$\approx \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(0.2)^k e^{-0.2}}{k!} = 0.0175.$$

返回主目录

例 13(续)

按第二种方法．　以 Y 记 80 台中同一时刻发生故障的台数，　则 $Y\sim b(80,\ 0.01)$．　故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P\{Y \geq 4\} \approx \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(0.8)^k e^{-0.8}}{k!} = 0.0091.$$

第二种方法中发生故障而不能及时维修的概率小，且维修工人减少一人。运用概率论讨论国民经济问题，可以有效地使用人力、物力资源。

返回主目录

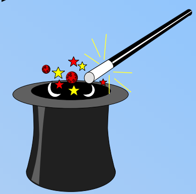
4）几 何 分 布

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\left(其中\ p\geq 0,\ q\geq 0,\ p+q=1\right)$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布.



返回主目录

分布律的验证

(1) 由条件 $p \geq 0$，$q \geq 0$，可知对任意的自然数 k，

有 $q^{k-1}p \geq 0$

(2) 由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

综上所述，可知

$$P\{X = k\} = q^{k-1}p \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

是一分布律.

几何分布的概率背景

在Bernoulli试验中，$P(A)=p,\quad P(\overline{A})=q=1-p$

试验进行到 A 首次出现为止.

令：X：所需试验次数.

则 X 服从参数为 p 的几何分布.

即 $P\{X=k\}=q^{k-1}p\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$

返回主目录

例 14

对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率为0.64，射击进行到击中目标时为止，令：

X：所需射击次数.

试求随机变量 X 的分布律，并求至少进行2次射击才能击中目标的概率.

解：　X 的取值为1，　2，　$\cdots$，　n，　$\cdots$

$$P\{X=n\}$$

$$=P\{\text{前}n-1\text{次射击均未击中，第}n\text{次射击时击中目标}\}$$

$$=P\{\text{前}n-1\text{次射击均未击中}\}\cdot P\{\text{第}n\text{次射击时击中目标}\}$$

例 14（续）

由独立性，得 X 的分布律为：

$$P\{X=n\}=0.36^{n-1}\times 0.64\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$P\{\text{至少射击2次才命中}\}=P\{X\geq 2\}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}0.36^{k-1}\times 0.64 \quad =0.64\times\frac{0.36}{1-0.36}$$

$$=0.36$$

5）超 几 何 分 布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n))$$

其中N，M，n均为自然数.

则称随机变量 X 服从参数为$(N,\ M,\ n)$的超几何分布.

超几何分布的概率背景

一批产品有 N 件，其中有 M 件次品，其余 N-M 件为正品．现从中取出 n 件．

令：　X：取出 n 件产品中的次品数．　则 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n))$$

此时，随机变量 X 服从参数为$(N,\ M,\ n)$的超几何分布

分布的逼近

二项式分布是超几何分布的逼近

若 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M}{N}=p$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$。

因此，一般当N很大，而n相对N较小时，有下列近似计算公式

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

Poisson分布是二项式分布的逼近

若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p_n{}^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

因此，一般当n很大，p很小，np不大时，有下列近似计算公式

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}.$$

返回主目录