第二章　一维随机变量及其分布

2009 考试内容（本大纲为数学 1，数学 3 需要根据大纲作部分增删）

随机变量　随机变量分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

考试要求

1. 理解随机变量的概念，理解分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}(-\infty<x<+\infty)$ 的概念及性质，会计算与随机变量相联系的事件的概率。
2. 理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握 0—1 分布、二项分布 B（n,p）、几何分布、超几何分布、泊松（Poisson）分布 $P(\lambda)$ 及其应用。
3. 了解泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布。
4. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布 U（a,b）、正态分布 N（μ,σ^2）、指数分布及其应用，其中参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布 E（λ）的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$。
5. 会求随机变量函数的分布。

本章考点导读　本章的核心考点是 8 大分布函数及其对应的模型和如何根据定义求函数分布的一般方法。作者介绍了分布函数求一维分布的直角分割法，论述了如为什么要求分布函数必须右连续而无需左连续等问题，此类问题又是目前的教材和参考书所不能清晰描述的。

一、随机变量

随机试验的每一个可能的结果 e（即每一基本事件），对应样本间的集合 $\Omega=\{e\}$ 中每一元素，我们都可以设令一个实数 $X(e)$ 来表示该元素，显然，$X(e)$ 为实值单值函数 $X=X(e)$，称 X 为随机变量。对 e，我们试验前无法确定，也就无法事先确定 X 的值，只有在试验后才会知道 X 的值，但 X 取值一定服从某种确定的分布。

比如：将一枚硬币抛三次，以 X 表示三次投掷中出现正面(用 H 表示正面，T 表示反面)的总次数，那么，对于样本空间 $\Omega=\{e\}$ 中的每一个样本点 e，X 都有一个实数值与之对应，即

样本点	HHH	HHT		THH	HTT	THT	TTH	TTT
X 的值	3	2	2	2	1	1	1	0

随机变量的 3 个特征是：

第一，　随机变量定义域为样本空间的基本事件；

第二，　随机变量取值是随机的，它取每一个可能值有确定的概率（即分布函数）；

第三，　随即变量是随机事件的人为数量化，而且这种数值只是一种符号表示。

二、随机变量的分布函数

2.1 随机变量的普适分布函数（适合任何类型的随即变量）

智轩第 2 技 随机变量的分布函数的全新揭秘。

● 分布函数定义形式的渊源

一般情况下，人们只对某个区间内的概率感兴趣，即研究下列四种可能的区间的概率

$$P\{x_1 < X \le x_2\} \text{ 或 } P\{x_1 \le X \le x_2\} \text{ 或 } P\{x_1 \le X < x_2\} \text{ 或 } P\{x_1 < X < x_2\}$$

读者只要利用一维坐标轴就能容易得出下列结论

$$\text{当}\,\varepsilon \to 0 \Rightarrow \begin{cases} P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} \\ P\{x_1 \le X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1 - \varepsilon\} \\ P\{x_1 \le X < x_2\} = P\{X \le x_2 - \varepsilon\} - P\{X \le x_1 - \varepsilon\} \\ P\{x_1 < X < x_2\} = P\{X \le x_2 - \varepsilon\} - P\{X \le x_1\} \end{cases}$$

显然，我们只须定义一个 $P\{X \le x\}$ 形式就可以了，其他区间形式都可以用它表示出来。

于是定义 $\boxed{F(x) = P\{X \le x\} \text{ 为 } X \text{ 的分布函数}}$。它就是 X 落在任意区间 $(-\infty, x]$ 上的概率，本质上是一个**累积函数**，对于离散点，采用叠加，对于连续点，使用一元积分。

● $F(x)$ 的 4 个重要性质（$F(x)$ 是否为分布函数德充要条件，第一个性质已经包含在后 3 个性质中）：

(a) $0 \le F(x) \le 1$。

(b) **单调不减**；因为区间越大，概率越大。

(c) $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$。

(d) 右连续。

●**右连续分析**

$$\begin{cases} P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1) \\ P\{x_1 \le X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1 - \varepsilon\} = F(x_2) - F(x_1 - 0) \\ P\{x_1 \le X < x_2\} = P\{X \le x_2 - \varepsilon\} - P\{X \le x_1 - \varepsilon\} = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0) \\ P\{x_1 < X < x_2\} = P\{X \le x_2 - \varepsilon\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2 - 0) - F(x_1) \\ P\{X < x_0\} = F(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) \\ P\{X = x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - 0) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) \\ P\{X > x_0\} = 1 - P(X \le x_0) = 1 - F(x_0) \end{cases}$$

上述全部可能的表示中，只有 $F(x-0)$ 形式，但 $F(x-0) \ne F(x)$，因为如 $F(x_1 - 0) = F(x_1)$，那么，当离散型在 x_1 点的概率不为零时，等式 $P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{x_1 \le X \le x_2\}$ 就会出现矛盾，故 $F(x)$ 不可能左连续。**其中** $P(X = x_0) = F(x_0) - F(x_0 - 0) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x)$ **是计算离散型分布函数的重要公式**。

又，上式中根本不可能出现 $F(x+0)$ 的形式，$F(x+0) = F(x)$ 对上述 5 种关系没有任何影响，即 $F(x)$

右连续$\left[F(x_0+0)=F(x_0);\quad \text{且}\ F(x_0-0)\neq F(x_0)\right]$。当然，由于连续型在一点的概率恒为零，所以，连续型分布函数左连续和右连续同时成立。正是要求 $F(x)$ 右连续，才使 $F(x)$ 成为分布函数的**普适定义**。所以，在计算概率的问题中，等号一般和大于号放在一起，以保证右连续，请读者注意这个细节。

评 注 分布函数可以描述任何类型的随机变量，不仅可以描述连续型，还可以描述离散型及其他非连续型。对连续型任一点的概率等于零，而对非连续型任一点的概率不一定等于零。我们要重点掌握离散和连续两类随机变量的分布规律。另外，也存在既非离散型又非连续型的分布函数，如 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$。

【例 1】 设 $F_1(x),F_2(x)$ 都是分布函数，常数 $a>0,b>0,a+b=1$，证明 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$ 也是分布函数，并举例说明分布函数不只是离散与连续两种。

证明：分布函数的 4 个基本条件：

（1）$0\le F(x)\le 1$

（2）$x_1<x_2\Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

（4）$F(x+0)=F(x)$

$0\le F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)\le a+b=1$

$x_1<x_2\Rightarrow F_1(x_1)\le F_1(x_2),\ F_2(x_1)\le F_2(x_2)\Rightarrow F(x_1)=aF_1(x_1)+bF_2(x_1)\le aF_1(x_2)+bF_2(x_2)=F(x_2)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(aF_1(x)+bF_2(x)\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(aF_1(x)+bF_2(x)\right)=a+b=1$

$F(x+0)=aF_1(x+0)+bF_2(x+0)=aF_1(x)+bF_2(x)=F(x)$

所以，$F(x)$ 也是分布函数。如取：$a=b=\dfrac{1}{2}$，并令

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases},\quad F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}F_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1+x}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

由于 $F(x)$ 是不连续的分段函数，故即不是离散型，又不是连续型。

【例 2】设 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列可以作出分布函数的是（　）。

$(A)F(ax+b)\qquad (B)F(x^2+a)\qquad (C)F(x^3-a)\qquad (D)F(|x|)$

解：选(C)。

一般需要验证四个条件① $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$；② $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$；③$F(x)$单调不减；④$F(x)$右连续。

(A) 当$a<0$时，至少不满足①②； (B)不满足①；

(C) $F(x^3-a)$满足四个条件，故是分布函数。 (D)不满足①。

2．2 离散型随机变量的分布律（概率分布）

当随机变量所取的有限个或可列个值，并能够按照由小到大的顺序排列时，称为离散型随机变量。**当已知分布函数，求分布律（概率分布）的计算方法如下**

$$\boxed{P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_i-0)=F(x_i)-\lim_{x\to x_i-0}F(x)}。$$

设离散型随机变量X的可能取值为$x_k(k=1,2,\cdots)$，事件$\{X=x_k\}$的概率为$\boxed{P\{X=x_k\}=p_k}$，离散型分布函数称为**离散分布律，一般使用列表表示**。注意$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$。要求掌握的离散性分布律有 **5 种**：$0-1$分布，伯努利二项分布，泊松分布，几何分布和超几何分布。

评 注 离散分布函数$F(x)=P\{X\le x\}$一般为阶梯函数。已知离散分布函数$F(x)$，根据分布函数的性质，可以计算出离散分布律$P\{X=x_k\}$；反过来，已知离散分布律$P\{X=x_k\}$，根据一维直角分割法(后述)，可以计算出离散分布函数$F(x)$。

2.3 连续型随机变量的概率密度（分布密度）

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ （$f(t)\ge0$）称为连续分布函数，$\boxed{f(t)=F'(x)\text{称为概率密度，或分布密度}}$。

离散型分布函数反应在各个分布点上，而连续型分布点上的分布函数为 0，显然不能反应其分布本质，故而一般先求分布函数$F(x)$（就是计算事件$\{X\le x\}$的概率），然后对$F(x)$求导得其相应的**概率密度**$f(x)$或称**分布密度**来反应分布规律，这一点和离散分布率是不同的。

●连续型$F(x)$具有下列性质

(a) $\boxed{\text{连续型}F(x)\text{是连续函数（左右均连续），即}F(x\pm0)=F(x)}$

(b) $\boxed{\text{连续型}F(x)\text{几何意义是面积，且}F(x=x_0)\equiv0}$

(c) $\boxed{F(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1(\text{必然事件}),\quad F(-\infty)=\int_{-\infty}^{-\infty}f(t)dt=0(\text{不可能事件})}$

(d) $P\{a<X<b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}=F(a)-F(b)=\int_a^b f(t)dt$

(e) 要求掌握的连续型分布函共有 3 种：均匀分布，指数分布和正态分布。

智轩第 3 技 **常年考点用到的 5 个分布函数组合的重要结论。**

(1) 只有存在概率密度（不恒为零）的随机变量才称为连续型，但不能错误认为分布函数连续的随机变

量为连续型。如分布函数 $F(x)=100,\quad x\ge 1$ 就不是连续型。

(2) 若 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)$ 均是分布函数，则

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x)\left(a_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i=1\right)\text{和}\prod_{i=1}^{n} F_i(x)\text{仍然为分布函数}}$ 。

(3) 若 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 均是分布密度函数，则

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\left(a_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i=1\right)\text{仍然为分布密度函数，但}\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\text{不一定是分布密度函数}}$。

(4) 如果 X 为连续型，则 $Y=aX+b$ 也是连续型，且 $\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}$（由函数分布的导数公式直接导出）若如果 X 为离散型，则 $Y=aX+b$ 却不一定为同一类型的离散型，如 X 服从泊松分布，$Y=aX+b$ 就不再是泊松分布。

(5) 普适分布函数和离散型分布函数右连续，左不连续；连续型分布函数左右都连续；但密度函数不一定连续，而且一般规定：**区间端点（注意不是分界点）处密度函数值取零**。比如均匀分布，其密度函数一般写成 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，而不写成 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，同理对指数分布也一样，读者要注意这个细节。

【例 3】设 X_1 和 X_2 是任意两个独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$，$f_2(x)$；分布函数分别为 $F_1(x)$，$F_2(x)$，则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一 X 的概率密度。 (B) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 必为某一 X 的概率密度。
(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一 X 的分布函数。 (D) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 必为某一 X 的分布函数。

解：选 (D)。根据第 3 技直接得出。为了帮助读者具体理解，现分析如下

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx=1+1=2\ne 1\Rightarrow(A)\text{错误；}$$

$$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=1+1=2\ne 1\Rightarrow(C)\text{错误；}$$

$$\text{取 } f_1(x)=\begin{cases}1, & -2<x<-1\\ 0, & other\end{cases};\quad f_2(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & other\end{cases}\xrightarrow{x\in(-\infty,\ +\infty)} f_1(x)f_2(x)\equiv 0\ne 1\Rightarrow(B)\text{错误；}$$

$$\text{取 } X=Max\{X_1,\ X_2\}\Rightarrow F(x)=P\{X\le x\}=P\{Max\{X_1,\ X_2\}\le x\}$$
$$=P\{X_1\le x;\ X_2\le x\}=P\{X_1\le x\}P\{\ X_2\le x\}=F_1(x)F_2(x)\Rightarrow(D)\text{正确。}$$

【例 4】设随机变量 X, Y 独立，有相同的分布函数 $F(x)$， $Z=X+Y$，则 $F_Z(z)$ 的正确关系是 【D】

(A) $F_Z(2z)=2F_Z(z)$ (B) $F_Z(2z)=F_Z^2(z)$
(C) $F_Z(2z)\le F_Z^2(z)$ (D) $F_Z(2z)\ge F_Z^2(z)$

解：$F_Z(2z)=P\{Z\le 2z\}=P\{X+Y\le 2z\}$

由于当 $X\le z,\ Y\le z\Rightarrow X+Y\le 2z$，故 $\{X\le z,\ Y\le z\}\subset\{X+Y\le 2z\}$

$\Rightarrow P\{X\le z,\ Y\le z\}\le P\{X+Y\le 2z\}\Rightarrow F_Z(2z)\ge P\{X\le z\}P\{\ Y\le z\}=F_Z(z)F_Z(z)=F_Z^2(z)$。

2.4 离散型与连续型随机变量的关系

$$\boxed{P(X=x)\approx P(x<X\le x+dx)\approx f(x)dx}$$

可见，积分元 $f(x)dx$ 在连续型随机变量理论中与 $P\{X=x_k\}=p_k$ 在离散型随机变量理论中所起的作用地位相同，这与微元的几何意义完全一致。

2.5 一维分布函数的直角分割法

智轩第 4 技 〖直角分割法〗计算一维分布函数。

这是在已知分布列或概率密度情形下计算分布函数的有效方法。

如计算样本区间 $1\le x<2$ 的 $F(x)$，先在 $1<x<2$ 内任取一点 x，然后，由 x 点向数轴左边（往左边画是为了满足 $P(X\le x)$ 的分布函数定义）画一个直角区域，该直角区域与样本空间 $1\le x<2$ 的交集就是所求的 $F(x)$ 的积分区间，再把该直角区域包含全部样本点的概率相加，如为连续则相加变为积分，即可求出概率分布函数。**〖直角分割法〗也适应二维分布**，由 x 点向平面左下方画一个直角区域即可。

【例 5】设 X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\le x<1\\ 0.8, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，求 X 的概率分布。

解：由于 $F(x)$ 要求右连续，故等号必须加在 $>$ 号上。又由于每一区间的 $F(x)$ 为常数，故 X 具有离散型特征。$F(x)$ 在 $x=-1,\ 1,\ 3$ 处有第一类跳跃间断点，即 X 在这些点的概率不为零，即**正概率点**存在。根据 $P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$，计算如下

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.4-0=0.4$$
$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4$$
$$P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2$$

X 的概率分布（即离散分布律）为

X	-1	1	3
p_i	0.4	0.4	0.2

反过来，可以根据上述 X 的分布律采用**直角分割法**计算 X 的分布函数。

【例 6】设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x,\ x<0\\ \frac{1}{4},\ \ 0\le x<2\\ 0,\ \ \ x\ge 2\end{cases}$，求分布 $F(x)$。

解：下面利用直角分割法解答，读者好好参悟。

由题知数轴上有 3 个样本区间，即 $x<0$； $0\le x<2$；$x\ge 2$。先在 $x<0$ 区间内任取一点 x，然后由 x 点向数轴左边（往左边画是为了满足 $P(X\le x)$ 的分布函数定义）画一个直角区域，该直角区域与样本空间的交集就是该区间所求的 $F(x)$ 的积分区间，显然 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^x dx=\frac{1}{2}e^x$；同理，先在区间 $0\le x<2$ 区间内任取一点 x，然后由 x 点向数轴左边画一个直角区域，该直角区域与两个样本空间的交集就是该区间所求的 $F(x)$ 的积分区间，故有 $F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^x dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$；而对于区间 $x\ge 2$，由于直角区间完全包含了整个样本空间，故 $F(x)=1$。所以所求的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x,\ x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{4},\ \ 0\le x<2\\ 1,\ \ \ x\ge 2\end{cases}$。

反过来，对 $F(x)$ 求导可以得出 X 的概率密度。

三、 一维随机变量的 8 大分布（3 个离散分布 + 5 个连续分布）

1．两点分布（又称 0-1 分布）$B(1,\ p)$，离散分布。

模 型：试验变量 X 只有两种可能结果（对立事件），随机变量 X 使用 0 与 1 两种取值。如每次 A 发生的概率为 p，共试验了 1 次，求其中 A 发生的概率（放回抽样）。

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p=q$$

0-1 分布为 $\boxed{P(X=k)=C_1^k p^k(1-p)^{1-k}=p^k q^{k-1}\sim B(1,\ p),\quad k=0,\ 1.}$

伯努利 0-1 分布 $B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ 的幂分布同分布，比如 $X\sim B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，则 X^2，$X^3,\cdots$，$X^n\sim B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$。

2．伯努利二项分布 $B(n,\ p)$，离散分布。

模 型：随机试验结果只有两种，如每次 A 发生的概率为 p，共试验了 n 次独立试验，求其中 A 发生 k 次的概率（放回抽样）。

$$\boxed{P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k}\sim B(n,\ p),\quad k=0,1,2,\cdots,n}$$

【例 7】已知 $X\sim B(2,\ p)$，$Y\sim B(3,\ p)$，$P\{X\ge 1\}=\frac{5}{9}$，求 $P\{Y\ge 1\}$。

解：$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0(1-p)^3$

又，$P\{X=0\}=C_2^0(1-p)^2=1-P\{X\ge1\}=1-\frac{5}{9}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$； 故 $P\{Y\ge1\}=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$。

【例 8】设相互独立的随机变量 $X\sim B\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，$Y\sim f(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & other\end{cases}$，求 $P\left\{X+Y\le\frac{1}{3}\right\}$。

解：将 $X=0,\ 1$ 看成一个划分（完备事件组），并注意 $X,\ Y$ 相互独立，根据全概率公式

$$P\left\{X+Y\le\frac{1}{3}\right\}=P\{X=0\}P\left\{X+Y\le\frac{1}{3}\mid X=0\right\}+P\{X=1\}P\left\{X+Y\le\frac{1}{3}\mid X=1\right\}$$

$$=P\{X=0\}P\left\{0+Y\le\frac{1}{3}\mid X=0\right\}+P\{X=1\}P\left\{1+Y\le\frac{1}{3}\mid X=1\right\}$$

$$=P\{X=0\}P\left\{Y\le\frac{1}{3}\right\}+P\{X=1\}P\left\{Y\le-\frac{2}{3}\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{6}$$

【例 9】设 $X,\ Y$ 相互独立，且均服从 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，求 $\frac{X+Y+2}{2}$ 的分布。

解：$X,\ Y$ 可能取值为 $-1,\ 1$，故 $\frac{X+Y+2}{2}$ 可能取值为 $0,\ 1,\ 2$。

$$P\left\{\frac{X+Y+2}{2}=0\right\}=P\{X+Y=-2\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{\frac{X+Y+2}{2}=1\right\}=P\{X+Y=0\}=P\{X=1,\ Y=-1\}+P\{X=-1,\ Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P\left\{\frac{X+Y+2}{2}=2\right\}=P\{X+Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{4}$$

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_2^0(1-p)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

故 $\frac{X+Y+2}{2}\sim B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$。

评 注 由于本题满足"独重对等‘，故是伯努利概型，读者还可以验证 $k=1,2$ 情形。

3．泊松分布 $P(\lambda)$，离散分布。

模 型：满足下列条件的随机质点流（一串重复出现的事件）称为泊松流。

(1) 在时间 $(t,\ t+\Delta t)$ 内流过质点数的概率仅与 Δt 有关，而与 t 无关；

(2) 不相交的时间间隔内流过的质点数彼此独立；

(3) 在充分短的一瞬间只能流过一个或没有质点流过，要流过 2 个或 2 个以上质点几乎是不可能的。可以证明泊松流在单位时间内流过质点数便服从泊松分布。

例如：单位时间内放射性物质放射出的粒子数；单位时间内某电话交换台接到的呼唤次数； 单位时间内走进商店的顾客数等等，均可认为它们服从泊松分布。

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sim P(\lambda),\quad k=0,1,2,\cdots}$$

当 p 很小时，有 $P(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}B(n,p)$， 其中 $\lambda=np$，即泊松分布是伯努利二项分布的极限形式。

【例 10】某人进行射击，命中率 0.001，独立射击 5000 次，求射击中次数不少于两次的概率。

解：服从二项分布，但由于次数很大，可用泊松分布计算 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$\lambda=0.001\times 5000=5\Rightarrow P(X>2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{5^0}{0!}e^{-5}-\frac{5^1}{1!}e^{-5}=1-e^{-5}-5e^{-5}。$$

【例 11】设 $X,\ Y$ 相互独立，且均服从 $P(1)$，求 $P\{X=1|X+Y=2\}$。

解：$P\{X=1|X+Y=2\}=\dfrac{P\{X=1,\ X+Y=2\}}{P\{\ X+Y=2\}}$

$$P\{X=1,\ X+Y=2\}=P\{X=1,\ Y=1\}=P\{X=1\}P\{\ Y=1\}=e^{-2}$$

$$P\{\ X+Y=2\}=\sum_{k=0}^{2}P\{X=k,\ Y=2-k\}=\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}P\{\ Y=2-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{2}\frac{e^{-1}}{k!}\cdot\frac{e^{-1}}{(2-k)!}=e^{-2}\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!(2-k)!}=e^{-2}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=2e^{-2}$$

$$\Rightarrow P\{X=1|X+Y=2\}=\frac{1}{2}$$

4．几何分布 $G(p)$，离散分布。

模 型：随机试验结果只有两种，如每次 A 发生的概率为 p，试验一直继续，直到 A 发生为止，求第 k 次（放回抽样）A 才发生的概率。

$$\boxed{P(X=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}\sim G(p),\ k=1,2,3,\cdots}$$

【例 12】袋中有 a 个白球，b 个红球，从袋中先后取出 k 个球，放回，求第 k 次取到白球的概率。

解：服从几何分布，每次取到白球的概率为 $p=\dfrac{a}{a+b}$，则第 k 次取到白球的概率

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p=q^{k-1}p=\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1}\frac{a}{a+b}$$

【例 13】5 把钥匙，只有一把能开锁，如果某次打不开仍不扔掉（放回），求下列事件的概率。

（1）第一次打开；（2）第二次打开；（3）第三次打开；

解：服从几何分布。 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p=q^{k-1}p=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{k-1}\times\dfrac{1}{5},\quad k=1,2,3$。

【例 14】设 $X,\ Y$ 相互独立，且均服从 $G(p)$，求 $P\{X>Y\}$。

解：根据对称性知 $P\{X>Y\}=P\{X<Y\}=\dfrac{1-P\{X=Y\}}{2}$

$$P\{X=Y\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}P\{Y=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}p^2(1-p)^{2(k-1)}=p^2\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}$$

$$\Rightarrow P\{X>Y\}=\frac{1-\dfrac{p}{2-p}}{2}=\frac{1-p}{2-p}$$

5．**超几何分布** $H(n,\ M,\ N)$，离散分布。

模 型：N 个元素分为 N_1 和 N_2 两类，从中取 n 件（**不放回，如放回抽样则是二项分布模型**），其中含有 k 个第一类元素的概率为 $\dfrac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2,\cdots)$。一般地

$$\boxed{P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\sim H(n,\ M,\ N),\quad k=0,1,2,\cdots,\min(M,n)}$$

【例 15】袋中有 a 个白球，b 个红球，从袋中先后取 k 个球，求含有 k_1 个白球和 k_2 红球概率。

解：服从超几何分布

放回抽样：$P(X=k)=\dfrac{C_a^{k_1}C_b^{k_2}}{C_{a+b}^k}$，$k=0,1,2,\cdots,\min(a,b,k)$

不放回抽样：$P(X=k)=\dfrac{C_a^{k_1}C_b^{k_2}P_k^k}{P_{a+b}^k}=\dfrac{C_a^{k_1}C_b^{k_2}}{C_{a+b}^k}$，$k=0,1,2,\cdots,\min(a,b,k)$

6．**均匀分布** $U(a,\ b)$，连续分布。

模型：设随即变量 X 的值落在 $(a,\ b)$ 内，其内取值具有“等可能”性，即其密度分布 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上为常数 $\dfrac{1}{b-a}$，即

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & other\end{cases}\sim U(a,\ b)\ \text{注意区间为开区间，端点的分布密度值取零}}$$

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, & x<a\\ \int_a^x f(x)dx=\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}}$$

$$P(a\le x_1<X\le x_2\le b)=F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$$

【例 17】若 X 服从 $[1,\ 6]$ 上的均匀分布，求方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率。

解：x 有实根，则 $X^2-4\ge 0\Rightarrow X\ge 2\,\&\,X\le -2$（舍去）； 则 x 有实根的概率 $=\dfrac{6-2}{6-1}=\dfrac{4}{5}$。

【例 18】设 $X,\ Y$ 相互独立，且均服从 $U(-2,\ 3)$，求 $P\{1<Max(X,\ Y)\le 2\}$ 和 $P\{1<Min(X,\ Y)\le 2\}$。

解：注意 $Max(X,\ Y)$ 和 $Min(X,\ Y)$ 的概率表示方法，一般有规律：大全小，小全大。

$$
\begin{aligned}
&P\{1<Max(X,\ Y)\le 2\}=P\{Max(X,\ Y)\le 2\}-P\{Max(X,\ Y)\le 1\}\\
&=P\{X\le 2,\ Y\le 2\}-P\{X\le 1,\ Y\le 1\}\\
&=P\{X\le 2\}P\{Y\le 2\}-P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}\\
&P\{1<Min(X,\ Y)\le 2\}=P\{Min(X,\ Y)>1\}-P\{Min(X,\ Y)>2\}\\
&=P\{X>1,\ Y>1\}-P\{X>2,\ Y>2\}\\
&=P\{X>1\}P\{X>1\}-P\{X>2\}P\{X>2\}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}
\end{aligned}
$$

7．**指数分布 $E(\lambda)$**

模 型：在实践中，如果随机变量 X 表示某一随机事件发生所需等待的时间，则一般 $X\sim E(\lambda)$。例如，某电子元件直到损坏所需的时间（即寿命）；随机服务系统中的服务时间；在某邮局等候服务的等候时间等等均可认为是服从指数分布。

$$
\boxed{f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\sim E(\lambda)\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}}
$$

指数分布一个常用的基本结论是 $P\{X>x\}=P\{X\ge x\}=e^{-\lambda x}\ (x\ge 0)$。

指数分布计算中常用到 Γ 函数公式 $\boxed{\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=n!}$。

【例 19】指数分布的特点是“**无记忆性**”，即 $P(x_0<X<x_0+x\,|\,X>x_0)=P(X<x)$。试证明之。

证明：$P(x_0<X<x_0+x\,|\,X>x_0)=\dfrac{P(x_0<X<x_0+x,\ \ X>x_0)}{P(X>x_0)}=\dfrac{P(x_0<X<x_0+x)\cap P(\ X>x_0)}{P(X>x_0)}$

$$
=\frac{P(x_0<X<x_0+x)}{1-P(X\le x_0)}=\frac{F(x_0+x)-F(x_0)}{1-F(x_0)}=\frac{\left(1-e^{-\lambda(x_0+x)}\right)-\left(1-e^{-\lambda x_0}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda x_0}\right)}=1-e^{-\lambda x}=F(x)=P(X<x)
$$

8．**正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$**，连续分布。

● **模 型**：在实践中，如果随机变量 X 表示许许多多**均匀**微小随机因素的总效应，则它通常将近似地服从正态分布。如：测量产生的误差；弹着点的位置；噪声电压；产品的尺寸等等均可认为近似地服从正态分布。尽管它来源于连续型，但它是任何分布在样本数一般大于 45 时的极限分布。而且，根据中心极限定理，

若干个未知分布的随机变量之和近似地服从正态分布，它是数理统计的基础，是概率与数理统计中的**第一大分布**。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\sim N(\mu,\ \sigma^2),\quad x\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow Y=aX+b\sim N\left[(a\mu+b),\ (a\sigma)^2\right]$$

● 当 $\mu=0,\ \sigma=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sim N(0,1)$，称为**标准正态分布**。此时分布函数及其性质为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\Rightarrow\begin{cases}\Phi(-x)=1-\Phi(x)\\ \Phi(0)=\frac{1}{2}=P\{X>0\}=P\{X\le 0\}\\ \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\sim N(0,\ 1)\\ P(x_1<X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)\end{cases}$$

评 注 8 大分布产生的背景如下，伯努利试验产生的分布有：$0-1$ 分布，$B(n,\ p)$，$G(p)$，$H(n,\ M,\ N)$；泊松流产生的分布有：$P(\lambda)$，$E(\lambda)$；误差产生的分布有：$U(a,\ b)$，$N(\mu,\ \sigma^2)$。

【例 20】设 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，证明 $\boxed{\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\sim N(0,\ 1)}$（重要结论，务必记住）

证明：根据概率定义来证明。

设 $Y=\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$，大写 X 表示随机变量，小写 x 表示随机变量 X 取到的值。

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le y\right)=P(X\le\sigma y+\mu)=F_x(\sigma y+\mu)$$

$$f_y(y)=F_Y'(y)=\sigma F_x'(\sigma y+\mu)=\sigma f_x(\sigma y+\mu)=\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left[(\sigma y+\mu)-\mu\right]^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\sim N(0,\ 1)$$

【例 21】设 $X\sim N(0,\ 1)$，其分布函数为 $\Phi(x)$，$Y=Min\{X,\ 0\}$，求 $F_Y(y)$。

解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Min\{X,\ 0\}\le y\}=1-P\{Min\{X,\ 0\}>y\}=1-P\{X>y,\ 0>y\}$

$$\Rightarrow\begin{cases}y<0\Rightarrow P\{X>y,\ 0>y\}=P\{X>y\}\Rightarrow F(y)=1-P\{X>y\}=P\{X\le y\}=\Phi(y)\\ y\ge 0\Rightarrow P\{X>y,\ 0>y\}=0\Rightarrow F(y)=1\end{cases}$$

【例 22】设随机变量 X，Y 均服从 $N(0,\ \sigma^2)$，若概率 $P\{X\le 0,\ Y>0\}=\frac{1}{3}$，求 $P\{X>0,\ Y<0\}$。

解：令 $A=\{X\le 0\}$，$B=\{Y>0\}$，注意连续型 $P\{X=0\}=P\{Y=0\}=0$，则

$$\Rightarrow P(A)=P(B)=\frac{1}{2};\quad P(AB)=P\{X\le 0,\ Y>0\}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P\{X>0,\ Y<0\}=P\{X>0\}\cap P\{\ Y<0\}=P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A+B})$$

$$=1-P(A+B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}$$

【例 23】设随机变量 X, Y 相互独立， $X\sim N(0,\ 1)$， $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$， $Z=XY$，求 $F_Z(z)$。

解：如果 A,B 相互独立，则 $P(A|B)=P(A)$，且 B 中的值可以代入 A 中。

比如： X,Y 相互独立，则 $P\{XY\,|\,Y=1\}=P\{XY\}=P\{X\}$。下面利用这一结论来求解本题。

$$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{XY<z\}\xrightarrow{\text{全概率公式}}$$

$$=P\{XY<z\,|\,Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY<z\,|\,Y=1\}P\{Y=1\}\xrightarrow{X、Y\text{相互独立}}$$

$$=\frac{1}{2}P\{0<z\}+\frac{1}{2}P\{X<z\}=\frac{1}{2}P\{0<z\}+\frac{1}{2}\Phi_X(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi_X(z), & z\le 0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi_X(z), & z>0\end{cases}$$

【例 24】设 $X\sim N(15,\ 4)$，且 X 的值落入区间 $(-\infty,\ x_1)$，$(x_1,\ x_2)$，$(x_2,\ x_3)$，$(x_3,\ x_4)$，$(x_4,\ +\infty)$ 内的概率分别为 $0.07,\ 0.24,\ 0.38,\ 0.24,\ 0.07$，求 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 的值。可以查标准正态分布函数表。

解： $P\{X\le x_4\}=1-P\{X>x_4\}=1-0.07=0.93$

$$X\sim N(15,\ 4)\Rightarrow\frac{X-15}{2}\sim N(0,\ 1)$$

$$\Rightarrow P\{X\le x_4\}=P\left\{\frac{X-15}{2}\le\frac{x_4-15}{2}\right\}=\Phi\left(\frac{x_4-15}{2}\right)=0.93\Rightarrow\frac{x_4-15}{2}=1.5\Rightarrow x_4=18$$

$$P\{X\le x_3\}=1-P\{X>x_3\}=1-0.24-0.07=0.69$$

$$\Rightarrow P\{X\le x_3\}=P\left\{\frac{X-15}{2}\le\frac{x_3-15}{2}\right\}=\Phi\left(\frac{x_3-15}{2}\right)=0.69\Rightarrow\frac{x_3-15}{2}=0.5\Rightarrow x_3=16$$

由于对称性，x_1和x_4，x_2和x_3都关于15对称， 故：$x_1=15-(x_4-15)=12$，$x_2=15-(x_3-15)=14$。

四、概率与统计中 4 个分位数

如无特别说明，正态分布**专指下分位数**；三个抽样分布专指上分为数。

（1） 上分位数 $P(X>z_\alpha)=\alpha\Rightarrow\int_{z_\alpha}^{+\infty}N(\mu,\ \sigma^2)dx=\alpha$

（2） 下分位数 $P(X\le z_\alpha)=\alpha\Rightarrow\int_{-\infty}^{z_\alpha}N(\mu,\ \sigma^2)dx=\alpha$

$\boxed{\text{评 注}}$ 无论哪种分位数，对标准正态分布都有： $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

切 记：标准正态分布的查表中使用的 $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=P(Z\le z)$ 是下分位数

其他三种抽样分布的查表中则使用的是上分位数，即 $\begin{cases}P\{\chi^2(n)>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha\\ P\{t(n)>t_\alpha(n)\}=\alpha\\ P\{F(n_1,n_2)>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha\end{cases}$。

【例 25】设 $(X_1,\ X_2)$ 为来自总体 $X\sim N(0,\ 1)$ 的简单随机样本，常数 $\lambda>0$，$Z=\frac{1}{2\lambda}(X_1^2+X_2^2)$，求 $\chi_\alpha^2(2)$。

解：$Z=\frac{1}{2\lambda}(X_1^2+X_2^2)\Rightarrow 2\lambda Z=X_1^2+X_2^2\sim\chi^2(2)$，可以证明 Z 服从指数分布 $E(\lambda)$。

$$\begin{cases}EZ=E\left[\frac{1}{2\lambda}(X_1^2+X_2^2)\right]=\frac{1}{2\lambda}E\left[\chi^2(2)\right]=\frac{1}{2\lambda}\times 2=\frac{1}{\lambda}\\ DZ=D\left[\frac{1}{2\lambda}(X_1^2+X_2^2)\right]=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2D\left[\chi^2(2)\right]=\frac{1}{4\lambda^2}\times2\times2=\frac{1}{\lambda^2}\end{cases}\Rightarrow Z=\frac{1}{2\lambda}(X_1^2+X_2^2)\sim E(\lambda)$$

$$\alpha=P\{2\lambda Z\ge\chi_\alpha^2(2)\}=P\left\{Z\ge\frac{1}{2\lambda}\chi_\alpha^2(2)\right\}=\int_{\frac{1}{2\lambda}\chi_\alpha^2(2)}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda z}dz=e^{-\frac{1}{2}\chi_\alpha^2(2)}\Rightarrow\chi_\alpha^2(2)=-2\ln\alpha.$$

四、一维随机变量函数 $Y=f(X)$ 的分布的求法

4.1 离散型

【例 26】设随机变量 X 的分布为

X	-1	0	1	2	3
p_i	0.25	0.15	a	0.35	b

当 $a=0.2$ 时，求 X 的分布函数 $F(x)$ 和 $P(X^2>1),P(X\le0),P(X=1.2)$ 和 $Y=X^2-1$ 的分布。

解：上表显然为离散分布正概率点的值。

根据概率归一化：$1=a+b+0.25+0.15+0.35\Rightarrow b=0.25-a=0.05$

利用直角分割法，如计算区间 $1\le x<2$ 的 $F(x)$

$\Rightarrow F(x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0.6$，其余区间类推，故：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.25, & -1\le x<0\\ 0.4, & 0\le x<1\\ 0.6, & 1\le x<2\\ 0.95, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge3\end{cases}$$

评 注 由于分布函数右连续，故等号位置不能放在小于号上。

$P\left(X^2>1\right)=P\left(X>1\right)+P\left(X<-1\right)=P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=0.4$

$P\left(X\le 0\right)=P\left(X=-1\right)+P\left(X=0\right)=0.4$

$P\left(X=1.2\right)=0$

$X=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\Rightarrow Y=X^2-1=-1,\ 0,\ 3,\ 8$

$P\left(Y=-1\right)=P\left(X^2-1=-1\right)=P\left(X=0\right)=0.15$

$P\left(Y=0\right)=P\left(X^2-1=0\right)=P\left(X=-1\right)+P\left(X=1\right)=0.45$

$P\left(Y=3\right)=P\left(X^2-1=3\right)=P\left(X=2\right)+P\left(X=-2\right)=0.35$

$P\left(Y=8\right)=P\left(X^2-1=8\right)=P\left(X=3\right)+P\left(X=-3\right)=0.05$

$Y=X^2-1$	-1	0	3	8
p	0. 15	0.45	0.35	0.05

【例 27】已知随机变量 X 的分布律为

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0.2	0	0.1

求 $Y=SinX$ 的分布律。

解：∵ Y 的所有可能取值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，1（将 X 的所有取值代入 $Y=SinX$ 得到）

$$P\left(Y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=P\left(X=\frac{\pi}{4}\right)+P\left(X=\frac{3\pi}{4}\right)=0.3$$

$$P\left(Y=1\right)=P\left(X=\frac{\pi}{2}\right)=0.7$$

Y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.1
P	0.3	0.7

4.2 连续型

如果 X 具有连续概率密度 $f_X\left(x\right),\ x\in\left(-\infty,\ +\infty\right)$，$\boxed{g\left(x\right)\text{处处可导，且}\ g'\left(x\right)\text{不变号}}$，则

$Y=g\left(X\right)\Leftrightarrow X=g^{-1}\left(Y\right)$ 的概率密度为 $\boxed{f_Y\left(y\right)=\begin{cases} f_X\left[g^{-1}\left(y\right)\right]\left|\left[g^{-1}\left(y\right)\right]'\right|, & y\in\left(a,\ b\right) \\ 0, & other \end{cases}}$

评 注 上述解法由于条件苛刻，应用受到限制，而且一般的概率密度并非连续函数。所以

● $Y=g\left(X\right)$ 分布的一般的解法（又称分布函数法）是：

(a) 首先确定 Y 的值域 $[a,\ b]$，也可以是开区间或半开半闭区间。

(b) $y<a\Rightarrow F(y)=0;\qquad y\ge b\Rightarrow F(y)=1;$

(c) $a\le y<b$，根据分布函数定义求，即

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int\limits_{g(X)\le y} f(x)dx\Rightarrow f(y)=[F(y)]'$$

【例 28】设 Z 为连续型随机变量，分布函数为 $F(z)$，求 $Y=F(Z)$ 的分布函数。

解：由分布函数的性质知 $Y=F(Z)\Rightarrow Y\in[0,\ 1]$

$$y<0\Rightarrow F(y)=0;\qquad y\ge 1\Rightarrow F(y)=1;$$

当 $0\le y<1$ 时，$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(Z)\le y\}=P\{Z\le F^{-1}(y)\}=F[F^{-1}(y)]=y$

$$\Rightarrow F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\end{cases}\Rightarrow f(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & other\end{cases}\sim U(0,\ 1)。$$

【例 29】设随机变量 X，Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,\ y)\mid 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3\}$ 上的均匀分布，求 $U=|X-Y|$ 的概率密度。

解：$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 3\\ 0, & other\end{cases}$

根据 $X,Y\in[1,\ 3]\Rightarrow U=|X-Y|\in[0,\ 2]$（值域）。

(1) $u<0\Rightarrow F(u)=0$；

(2) $u\ge 2\Rightarrow F(u)=1$；

(3) $0\le u<2\Rightarrow F(u)=P\{U\le u\}=P\{|X-Y|\le u\}=\iint\limits_{|x-y|\le u}\dfrac{1}{4}dxdy=1-\dfrac{1}{4}(2-u)^2\Rightarrow f(u)=\dfrac{1}{2}(2-u)$

$$\Rightarrow f(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-u), & 0\le u<2\\ 0, & other\end{cases}$$（画图求面积）

● 注意，由于分布的概率密度函数不一定连续，故一般规定在**端点的密度函数值为零**，故一般来说 $y\in(a,\ b)$ 是个开区间。

【例 30】$X\sim f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$，求 $Y=2X+3$ 的 $f_y(y)$。

解：由于$Y=2X+3$不满足处处可导，故采用一般解法：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+3\le y)=P\left(X\le\frac{y-3}{2}\right)=F_X\left(\frac{y-3}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}}f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(\frac{y-3}{2}\right)'f_X\left(\frac{y-3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{y-3}{2}\cdot\left[1+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2\right]}$$

【例 31】设随机变量$X\sim U\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，求$Y=\sin X$的分布密度$f_Y(y)$。

解 法： 公式法

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\\ 0, & 其它\end{cases}$$，而$y=\sin x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$存在反函数$x=\arcsin y$

且$x_y'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，使用公式法

$$f_Y(x)=\begin{cases}f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|, & y\in[a,\ b]\\ 0, & other\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f_X(\arcsin y)|x'|=f_X(\arcsin y)\left|(\arcsin y)'\right|, & y\in(-1,\ 1)\\ 0, & other\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,\ 1)\\ 0, & other\end{cases}$$

【例 32】已知随机变量X的服从$[0,\ \pi]$上的均匀分布，求$Y=\sin X$的概率密度。

解:：分布函数定义法。X的概率密度为：$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in[0,\pi]\\ 0, & other\end{cases}$

先确定Y的值域为$Y\in[0,\ 1]$。故$y<0\Rightarrow F_Y(y)=0$; $y\ge1\Rightarrow F_Y(y)=1$;

当$0\le y<1$时，X的单调区域D有两个，即$D=\{x\,|\,0\le x\le\arcsin y\}\cup\{x\,|\,\pi-\arcsin y\le x\le\pi\}$，根据反函数的定义，$D$的两个单调区域存在反函数。使用一般法，得

$$F(y)=P(\sin X\le y)=\int_0^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{1}{\pi}dx,\quad 0<y<1$$

当$y\le0\Rightarrow F(y)=0$;

当$y\ge1\Rightarrow F(y)=1$;

当 $0<y<1\ \Rightarrow f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0\le y<1\\ 0, & other\end{cases}$

$\boxed{\text{评 注}}$ 如无特别指明，则$X\sim U(0,\ \pi)$，而本题为$X\sim U[0,\ \pi]$。

【例 33】$X\sim E(\lambda)$，求$Y=e^X$的概率密度函数。

解：因为指数分布要求$x>0$，故$Y=e^X$不仅处处可导，且存在反函数，可直接利用公式：

$$f_Y(x)=\begin{cases} f_Y\left[g^{-1}(y)\right]\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|, & y\in[a,\ b] \\ 0, & y\le 1\end{cases}=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\ln y}\left|[\ln y]'\right|, & y>1 \\ 0, & other\end{cases}=\begin{cases}\lambda y^{-(\lambda+1)}, & y>1 \\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

可见，在容易判断满足条件情形下，使用公式效率很高。

【例 34】X服从$N(0,\ 1)$，求$Y=e^X$，$Y=2X^2+1$，$Y=|X|$的概率密度。

解：(1) $X\sim N(0,\ 1)\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad -\infty<x<+\infty$

一般解法： 由$Y=e^X>0$恒成立，故，当$y\le 0\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{lny}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

故Y的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(ly)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$

公式解法：

$$f_Y(x)=\begin{cases} f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|, & y\in[a,\ b] \\ 0, & other\end{cases}=\begin{cases} f_Y(\ln y)\left|(\ln y)'\right|, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

(2) 由$Y=2X^2+1$知$X=\pm\sqrt{\dfrac{Y-1}{2}}$，当$y\le 1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$；

当$y>1$时，因为不存在反函数，故使用一般解法

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(2X^2+1\le y\right)=P\left(|X|\le\sqrt{(y-1)/2}\right)$$

$$=P\left(-\sqrt{(y-1)/2}\le X\le\sqrt{(y-1)/2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\sqrt{(y-1)/2}^2}{2}}\times\dfrac{1}{4\sqrt{(y-1)/2}}-e^{-\frac{(\sqrt{(y-1)/2})^2}{2}}\times\dfrac{-1}{4\sqrt{(y-1)/2}}\right), & y>1 \\ 0,\quad y\le 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1 \\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

(3) 由$Y=|X|$知，当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$，

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}-e^{-\frac{(-y)^2}{2}}\cdot(-1)\right) & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$ 。

【例 35】设 $X\sim E(2)$，证明：$Y=1-e^{-2X}\sim U(0,1)$。

证明：$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$\Rightarrow F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left(1-e^{-2x}\le y\right)=P\left(e^{-2x}\ge 1-y\right)=P\left(x\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)$$

又 $x\in(0,1)\Rightarrow 0<e^{-2x}<1\Rightarrow 0<y=1-e^{-2x}<1\ \Rightarrow P\left(e^{-2X}\ge 1-y\right)=\begin{cases}1, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$，

所以，只需考虑区间 $y\in(0,1)$ ，此时 $F_Y(y)=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}f_X(x)dx$

$$\Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2(1-y)}\cdot f_X\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]=\frac{1}{1-y}e^{\ln(1-y)}=1$$

故：$f_Y(y)\sim U(0,1)$。

【例 36】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8]\\ 0, & other\end{cases}$$ ，求 $Y=F(X)$ 的分布函数 $G_Y(y)$。

解：显然，$x<1\Rightarrow F(x)=0$; $x>8\Rightarrow F(x)=1$

当 $1\le x\le 8$ 时

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1$$

又，$F(1)=0,\ F(8)=1\Rightarrow y\in(0,1)$

显然，当 $y\le 0\Rightarrow G(y)=0$，$y\ge 1\Rightarrow G(y)=1$

当，$y\in(0,1)\Rightarrow G(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\left\{\sqrt[3]{X}-1\le y\right\}$

$$=P\left\{X\le(1+y)^3\right\}=F\left[(1+y)^3\right]=\sqrt[3]{(1+y)^3}-1=y$$

于是，$G(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<0\\ 1, & y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<0\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

【例 37】向平面区域 D: $0\le x\le 2$; $0\le y\le 4-x^2$ 随机投掷一点 (X,Y)，设 $A=\{X\le 1\}$，$B=\{Y\le 3\}$。求 (1) A, B 恰好发生一个的概率；(2) A, B 是否独立？ X，Y 是否独立？

解：D 的面积为 $S_D=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=\frac{16}{3}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{16}, & (x,y)\in D \text{（正概率点区域）}\\ 0, & 其它 \quad\text{（零概率点区域）}\end{cases}$$

$$P(A)=\iint_{\{x\le1\}\cap D} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{4-x^2}\frac{3}{16}dy=\frac{11}{16};\ P(B)=\iint_{\{y\le3\}\cap D} f(x,y)dxdy=\int_0^3 dy\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{3}{16}dx=\frac{7}{8}$$

$$P(AB)=\iint_{\{x\le1\}\cap\{y\le3\}\cap D} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^3\frac{3}{16}dx=\frac{9}{16}$$

(1) A，B 恰好发生一个的概率为 $P\left(\overline{A}B+A\overline{B}\right)$

又，$P(A+B)=P(A)+P\left(\overline{A}B\right)=P(B)+P\left(A\overline{B}\right)$

$$\Rightarrow 2P(A+B)=P(A)+P\left(\overline{A}B\right)+P(B)+P\left(A\overline{B}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]=P(A)+P(B)+P\left(\overline{A}B\right)+P\left(A\overline{B}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\overline{A}B\right)+P\left(A\overline{B}\right)=P(A)+P(B)-2P(AB)}$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A}B+A\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}B\right)+P\left(A\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}BA\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}B\right)+P\left(A\overline{B}\right)-0$$

$$=P(A)+P(B)-2P(AB)=\frac{11}{16}+\frac{7}{8}-2\times\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

(2) 显然 $P(AB)\ne P(A)P(B)$，故 A，B 不独立；

又 $P(AB)=\iint_{\{x\le1\}\cap\{y\le3\}\cap D} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^3\frac{3}{16}dx=F(1,3)=\frac{9}{16}$

$$P(A)=\iint_{\{x\le1\}\cap D} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{4-x^2}\frac{3}{16}dy=F_X(1)=\frac{11}{16}$$

$$P(B)=\iint_{\{y\le3\}\cap D} f(x,y)dxdy=\int_0^3 dy\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{3}{16}dx=F_Y(3)=\frac{7}{8}$$

$\Rightarrow F(1,3)\ne F_X(1)F_Y(3)$，故 X，Y 不独立。

评 注 求连续函数的概率时，积分区域为直角分割区域与概率密度分布的正概率点区域的交集。如果读者对二元分布及其边缘分布不熟悉，可以不看此题的 X，Y 是否独立的证明，以后再回头来研究。

第二章 随机变量及其分布模拟题

一．填空题

1． 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

则 $P(X^2=1)=$________。

2． 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}C+x, & -1<x<0,\\ C-x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则常数 C=__________。

3． 设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 以Y表示对X的三次独立重复观察中事件$\{X\le\frac{1}{2}\}$出现的次数，则 P（Y=2）=_________。

4． 设 X 服从[0，1]上的均匀分布，则概率 $P(X^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{8}\ge 0)=$________。

5． 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2), F(x)$ 为其分布函数，则对任意实数 a，有 $F(\mu+a)+F(\mu-a)=$____。

6． 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则 $P(\frac{1}{2}\le X<\frac{3}{2})=$____。

7． 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 又 a 为（0，1）中的一个实数，且 $P(X>a)=P(X<a)$，则 $a=$_______。

8． 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的密度函数 $f(x)$ 的两个拐点为________。

9． 设 X 服从参数为 $\sqrt{5}$ 的泊松分布，则使得 $P(X=k)$ 达到最大的 $k=$________。

10．设 X 服从[0，1]上的均匀分布，则随机变量 $Y=-2\ln X$ 的概率密度为_______，$Z=-2\ln(1-X)$ 的概率密度为________。

二．选择题

1．下列函数中能够作为分布函数的是

（A）$F(x)=\begin{cases}0, x<-1,\\ \dfrac{1}{3}, -1\le x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, x\ge 0.\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \dfrac{x+2}{5}, 0\le x<2,\\ 1, x\ge 2.\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \sin x, 0\le x<\pi,\\ 1, x\ge \pi.\end{cases}$　　[ ]

2．设随机变量 $X\sim N(2008, 2010^2)$, 而且 C 满足 $P(X>C)=P(X\le C)$，则 C 等于

（A）0　（B）2008　（C）1998　（D）2010　　[ ]

3．设 $f(x)=ke^{-x^2+2x}$ 为一概率密度，则 k 的值为

（A）$\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{\pi}}$　（B）$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　[ ]

4．下列命题正确的是

（A）连续型随机变量的密度函数是连续函数。

（B）连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 满足 $0\le f(x)\le 1$。

（C）连续型随机变量的分布函数是连续函数。

（D）两个概率密度函数的乘积还是密度函数。　　[ ]

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，则对于任意实数 a，有 $F(-a)=$

（A）F(a)　　（B）$\dfrac{1}{2}-F(a)$

（C）$2F(a)-1$　　（D）$1-F(a)$　　[ ]

6．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\mu<0$, $f(x)$为X的密度函数, 对于任何正数 $a>0$，有

（A）$f(a)<f(-a)$　　（B）$f(a)=f(-a)$

（C）$f(a)>f(-a)$　　（D）$f(a)+f(-a)=1$　　[ ]

7．设 $F_1(x)$和$F_2(x)$ 都是随机变量的分布函数，则为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某随机变量的分布函数，必须满足

（A）$a=\dfrac{3}{5}, b=-\dfrac{2}{5}$　　（B）$a=\dfrac{2}{3}, b=-\dfrac{2}{3}$

（C）$a=-\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{2}$　　（D）$a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{2}$　　[ ]

8．设 $F_1(x), F_2(x)$ 为随机变量的分布函数， $f_1(x), f_2(x)$ 是密度函数，则

（A） $f_1(x)+f_2(x)$ 是密度函数。

（B） $f_1(x)f_2(x)$ 是密度函数。

（C）对任何满足 $a+b=1$ 的实数 a,b， $af_1(x)+bf_2(x)$ 是密度函数。

（D） $F_1(x)F_2(x)$ 是分布函数。 [ ]

三．解答题

1．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3e^{-\frac{x^2}{2}}, x>0,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

求 X 的分布函数 F（X）和概率 $P(-2<X\le 4)$。

2．假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, 0\le x\le \pi,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，试求 Y 的分布律。

3．一个袋中有 5 只球，编号 1，2，3，4，5，在其中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，求 X 的分布律。

4．设 10 件产品中有 7 件正品、3 个次品，现随机地从中抽取产品，每次抽 1 件，直到抽到正品为止，求：

（1）有放回抽取下，抽取次数的分布律与分布函数；

（2）无放回抽取下，抽取次数的分布律与分布函数。

5．设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分计）服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, x>0\\ 0, 其他.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟，他就离开，他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求 Y 的分布律以及概率 $P(Y\ge 1)$。

6．设随机变量 Y 服从 $[a,\ 5]$ 上的均匀分布，$a>0$，且关于未知量 x 的方程 $x^2+Yx+\frac{3}{4}Y+1=0$ 没有实根的概率为 $\frac{1}{4}$，试求 a 的值。

7．已知 $X\sim B(n,p),\ Y=1+(-1)^X$，试求 Y 的分布律。

8．设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Y=X^2+1$的分布函数。

9．设随机变量 X 的分布函数$F_X(x)$为严格单调增加的连续函数，Y 服从[0，1]上的均匀分布，证明随机变量$Z=F_X^{-1}(Y)$的分布函数与 X 的分布函数相同。

10．设 X 服从区间（0，4）上的均匀分布，随机变量$Y=X^2-2X-3$，试求 Y 的密度函数。

第二章 随机变量及其分布模拟题答案

一．填空题

1. $\frac{3}{8}$　2. 1　3. $\frac{9}{64}$　4. $\frac{3}{4}$　5. 1　6. $\frac{3}{4}$　7. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$　8. $x=\mu\pm\sigma$　9. 2

10. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, y>0,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$ $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}, z>0,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

二．选择题

1.（C）　2.（B）　3.（A）　4.（C）　5.（D）　6.（A）　7.（A）　8.（D）

三．解答题

1. $F(x)=\begin{cases}1-(\frac{x^2}{2}+1)e^{-\frac{x^2}{2}}, x\ge 0,\\ 0, \qquad x<0.\end{cases}$

$P(-2<x\le 4)=F(4)-F(-2)=F(4)=1-9e^{-8}.$

2. $Y\sim B(4,\frac{1}{2}).$

3. 利用古典概型易得

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

4.（1）$P\{X=k\}=\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}\frac{7}{10}, k=1,2,3,\cdots.$

$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k=1}^{[x]}\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}\frac{7}{10}=1-\left(\frac{3}{10}\right)^{[x]}$

（2）

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ \frac{7}{10}, 1\le x<2,\\ \frac{28}{30}, 2\le x<3,\\ \frac{119}{120}, 3\le x<4,\\ 1, \quad x\ge 4.\end{cases}$$

5. $Y\sim B(5,p), p=P(X>10)=e^{-2}$. $P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5.$

6．由方程没有实根得 $-1<Y<4$, 于是 $P(-1<Y<4)=\dfrac{4-a}{5-a}=\dfrac{1}{4}$, 故 $a=\dfrac{11}{3}$（注意 a 为正数）。

7．

Y	0	2
P	$1-\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$	$\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]$

8．$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 2\sqrt{y-1}-y+1, & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$

9．利用分布函数的定义，反函数的定义以及均匀分布的分布函数即可得证。

10．$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{4+y}}, & -4<y<-3,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{4+y}}, & -3<y<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$