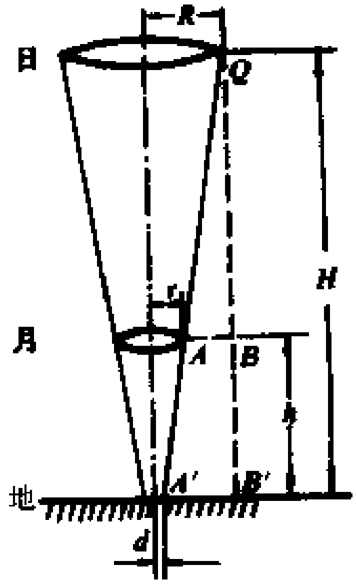
目　录

第一章　几何光学

§1　几何光学基本定律

1．　太阳与月球的直径分别是1.39×10^{6}km和3.5×10^{3}km，设日全蚀时太阳到地面的距离为1.50×10^{8}km，月球到地面的距离为3.8×10^{5}km。试计算地面上能见到日全蚀区域的面积（可把该区域的地面视为平面）。

解　忽略地球大气层对阳光的折射，按光的直线传播定律作几何投影图（如图所示），则地面上出现日全蚀的区域是半径为d的圆形面积，



题1图

由相似三角形的比例关系

$$\frac{\overline{QB'}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

得

$$\frac{H}{H-h}=\frac{R-d}{R-r}$$

$$d=R-\frac{H(R-r)}{H-h}$$

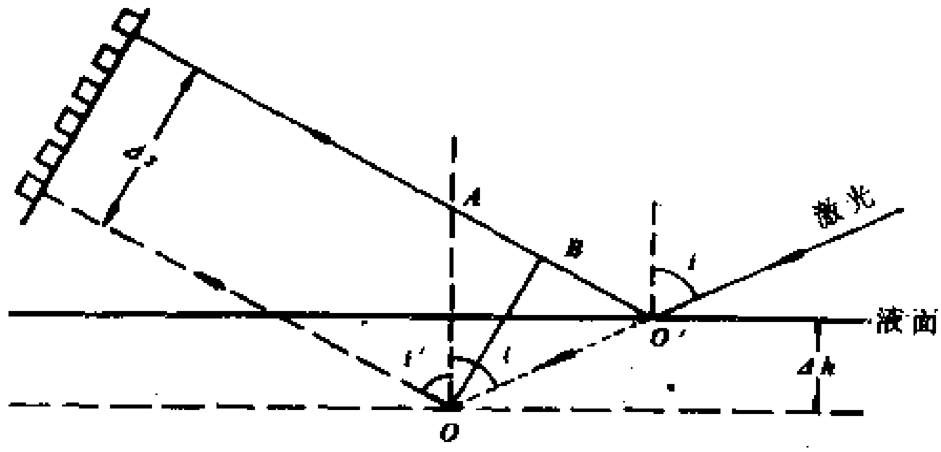
以 $R=0.695\times10^6\text{km}$，$r=1.75\times10^3\text{km}$，$H=1.5\times10^9\text{km}$，$h=3.8\times10^5\text{km}$代入上式，算得

$$d=1.6\times10^3\text{km}$$

所以日全蚀区域的面积为

$$S=\pi d^2=7.8\times10^6\text{km}^2$$

*2. 附图所示为一种液面激光控制仪。当液面升降时，反射光斑移动，为不同部位的光电转换元件所接收，变成电讯号输入控制系统。试计算液面升高 Δh 时反射光斑移动的距离 Δs。



题 2 图

解 按光的反射定律作光路于附图，则由图可得反射光线的位移量为

$$\Delta s=\overline{OB}=\overline{OO'}\sin2\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$$

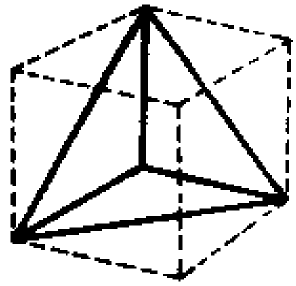
又

$$\overline{OO'}=\frac{\Delta h}{\cos i}$$

于是得

$$\Delta s=2\Delta h\sin i$$

*3. 由立方体的玻璃切下一角制成的棱镜称为四面直角体，如附图（a）所示，证明从斜面射入的光线经其它三面反射后，出射线的方向总与入射线相反。设想一下，这样的棱镜可以在什么场合发挥作用。



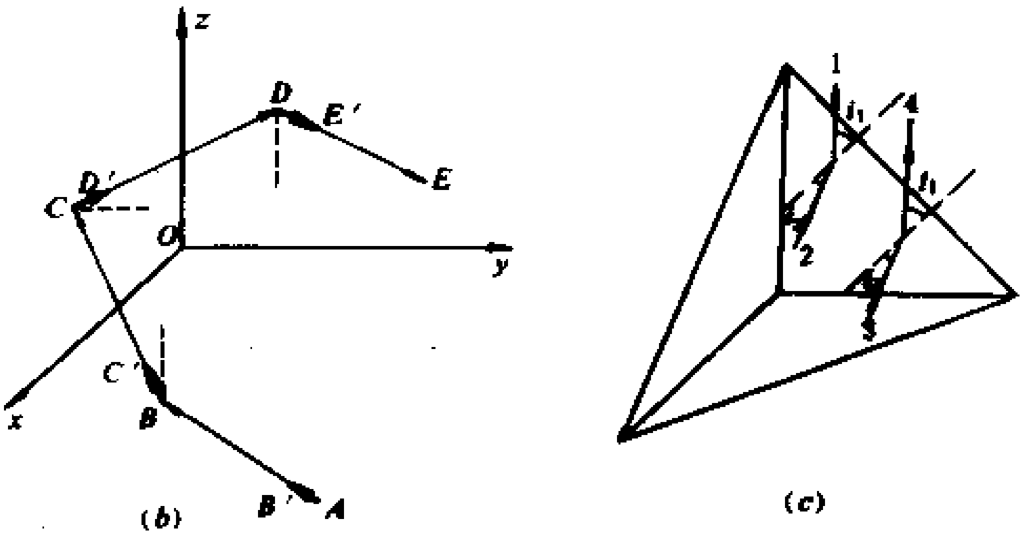
（a）

题 3 图

证 从斜面入射的光线经三个直角面反射后仍从斜面出射，其间光线共经历了三个直角面的三次反射和斜面往返的二次折射。证明出射线和入射线方向相反可分两步进行：

（1）先证明任意一根经三个直角面反射以后的光线总是和入射光线平行且方向相反。

用矢量的概念证明这个结论比较简单。如附图（b）所示，设三个直角面分别为xy 平面、xz 平面和 yz 平面，入射光线 AB



（b）　　　（c）

题 3 图

先后经三个平面反射后出射光线为 DE。并设 AB'、BC'，CD'、DE' 分别为光线 AB，BC，CD，DE 的单位矢量，则

$$AB' = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

式中α，β，γ为AB'的方向角。由于BC为AB经xy平面的反射线，根据反射定律显然有

$$BC'=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos(\pi-\gamma))$$

同理

$$CD'=[\cos\alpha,\ \cos(\pi-\beta),\ \cos(\pi-\gamma)]$$

$$DE'=[\cos(\pi-\alpha),\ \cos(\pi-\beta),\ \cos(\pi-\gamma)]$$
$$=(-\cos\alpha,\ -\cos\beta,\ -\cos\gamma)$$

因此

$$AB'=-DE'$$

即光线AB和DE反向平行。

（2）再证明斜面的出射线和入射线平行且方向相反。

如附图（c）所示，设光线1以入射角i_1入射到斜面上，其折射光线2的折射角为i_2。则根据（1）的证明，光线2经三个直角面反射后的光线3必以入射角i_2入射到斜面上，再次折射后的光线4的折射角也必为i_1。因此出射光线4必和入射光线1反向平行。

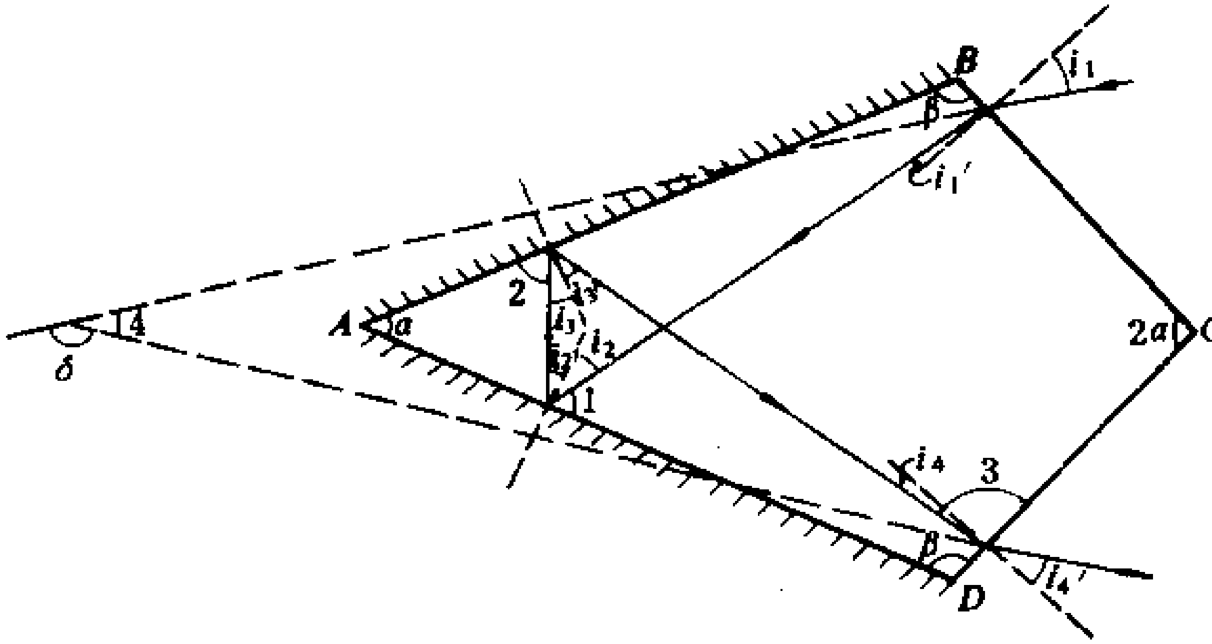
由（1）、（2）证明可知，经直角四面体棱镜二次折射和三次反射的出射线和入射线方向相反。如果入射线（即入射面）垂直于某个直角交棱，则此时光线只经过二次折射和二次反射，但显然可见出射线与入射线方向相方的结论仍然成立。

四面直角体棱镜又叫直角锥棱镜。直角锥棱镜出射线与入射线方向相反的这一特性，可以有效地利用来进行远距离激光测距。设想登月飞船把一个由多只直角锥棱镜组成的反射器送到月球表面，则地球上许多国家就可以选择反射器中的某些直角锥作为自己的“合作目标”，用激光束测量月—地距离。

*4. 光线射入如附图所示的棱镜，经两次折射和反射后射出。

（1）证明偏向角与入射方向无关，恒等于2α；

（2）在此情况下能否产生色散？



题 4 图

证 两次折射和反射的入射角，折射角，反射角分别示于图中。由几何关系和反射定律可得

$$i_2 = \frac{\pi}{2} - \angle 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[2\pi - \left(2\alpha - \beta - \frac{\pi}{2} + i_1'\right)\right]$$

$$= -\pi + 2\alpha + \beta + i_1'$$

$$i_2' = i_2$$

$$i_3 = \frac{\pi}{2} - \angle 2$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - i_2'\right)\right]$$

$$= \alpha - i_2'$$

$$i_3' = i_3$$

$$i_4 = \angle 3 - \frac{\pi}{2}$$

$$=\left[2\pi-\left(2\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-i'_3\right)\right]-\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi-2\alpha-\beta+i'_3$$

逐次以 i'_3，i_3，i'_2，i_2 代入得

$$i_4=\pi-2\alpha-\beta+i_3$$

$$=\pi-2\alpha-\beta+(\alpha-i'_2)$$

$$=\pi-\alpha-\beta-i'_2$$

$$=\pi-\alpha-\beta-(-\pi+2\alpha+\beta+i'_1)$$

$$=2\pi-3\alpha-2\beta-i'_1$$

$$=-i'_1$$

又根据折射定律有

$$\sin i_1=n\sin i'_1,\qquad \sin i'_4=n\sin i_4$$

于是得
$$i_1=-i'_4$$

式中 n 为棱镜的折射率。因此偏向角为

$$\delta=\pi-\angle A$$

$$=\pi-\left[2\pi-\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}+i'_4+\frac{\pi}{2}+i_1\right)\right]$$

$$=2\alpha+i'_4+i_1$$

$$=2\alpha$$

偏向角恒等于 2α，它与入射角和折射率 n 均无关，即与波长也无关。这种棱镜虽然使光受到两次折射而仍无色散，因此，可用于要求无色散的光路偏转系统。

5． 试证明：当一条光线通过平行平面玻璃板时，出射光线方向不变，只产生侧向平移。当入射角 i_1 很小时，位移为

$$\Delta x=\frac{n-1}{n}i_1 t$$

式中 n 为玻璃板的折射率，t 为其厚度

证 对平行平板上下表面分别两次运用折射定律，并考虑到

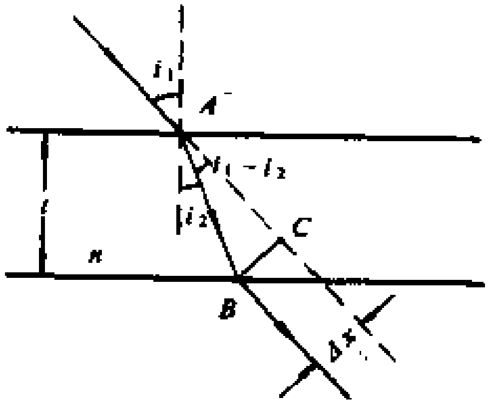
平板上下是同一介质，使可证明最后出射光线与当初入射光线的方向一致

如附图所示，根据几何关系可得侧向位移量为

$$\Delta x = \overline{AB}\sin(i_1-i_2)$$

$$=\frac{t}{\cos i_2}(\sin i_1\cos i_2-\cos i_1\sin i_2)$$

$$=t(\sin i_1-\frac{\cos i_1\sin i_2}{\cos i_2})$$



题 5 图

利用折射定律

$$\sin i_1=n\sin i_2$$

上式可改写为

$$\Delta x=t\sin i_1(1-\frac{\cos i_1}{n\cos i_2})$$

在 $i_2<i_1\ll 1$ 的条件下，取小角近似

$$\sin i_1\approx i_1,\quad \cos i_1\approx\cos i_2\approx 1$$

于是有

$$\Delta x\approx\frac{n-1}{n}i_1 t$$

6． 证明：光线相继经过几个平行分界面的多层媒质时，出射光线的方向只与入射方向及两边的折射率有关，与中间各层媒质无关。

证 因为界面都是平行的，所以光线在同一层媒质中上界面的折射角与下界面的入射角相等。如图所示，由折射定律有

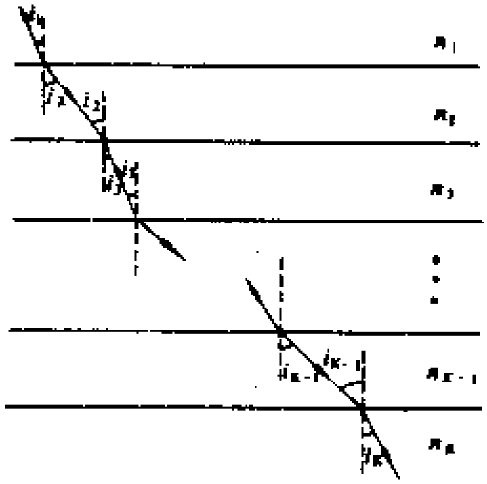
$$\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i_1$$

$$\sin i_3=\frac{n_2}{n_3}\sin i_2=\frac{n_1}{n_3}\sin i_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin i_k=\frac{n_{k-1}}{n_k}\sin i_{k-1}=\frac{n_1}{n_k}\sin i_1$$

由此可见，最后出射光线的方向只与当初入射方向及两边介质的折射率有关。



题 6 图

*7. 顶角α很小的棱镜称为光楔。证明光楔使垂直入射的光线产生偏向角$\delta=(n-1)\alpha$，其中n是光楔的折射率

证 由于光线垂直入射，故光线在第一个界面不发生折射，仅在第二个界面有折射。

如图，根据折射定律

$$n\sin i_2=\sin i_2'$$

以及几何关系$i_2=\alpha$，故

$$n\sin\alpha=\sin i_2'$$

当α很小时，有

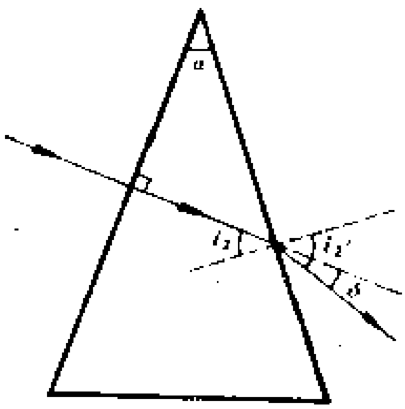
$$\sin\alpha\approx\alpha,\quad \sin i_2'\approx i_2'$$

则上式可写成

$$n\alpha=i_2'$$

所以偏向角为

$$\delta=i_2'-i_2=n\alpha-\alpha=(n-1)\alpha$$

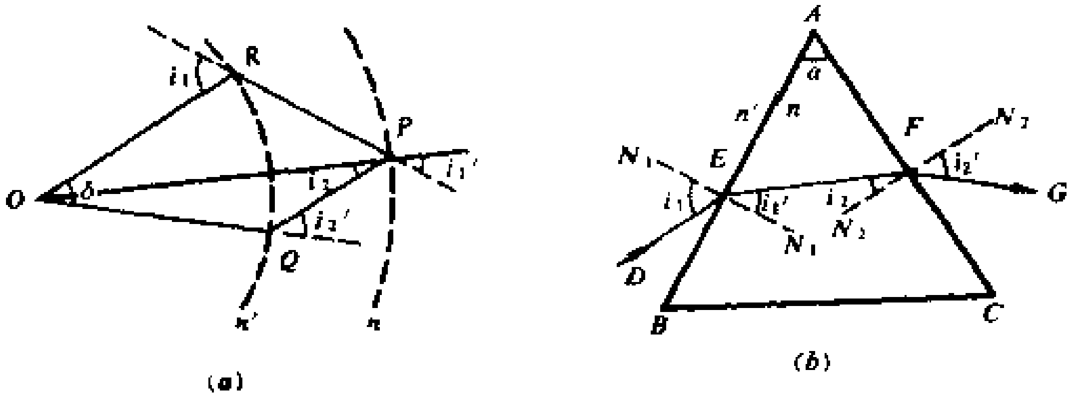


题 7 图

这个近似公式，在干涉、衍射、偏振中经常要用到，我们应当记住它

8. 附图所示是一种求折射线方向的追迹作图法。例如为了求光线通过棱镜的路径，如图（b）所示，可如图（a）以O为

中心作二圆弧，半径正比于折射率n，n'（设$n>n'$）。作OR平行于入射线DE，作RP平行于棱镜第一界面的法线N_1N_1，则OP的方向即为第一次折射后光线EF的方向。再作QP平行于第二界面的法线N_2N_2，则OQ的方向即为出射线FG的方向，从而$\angle ROQ=\delta$为偏向角。试论证此法的依据。



题 8 图

证 如图所示，由题意知图（a）中i_1，i_1'，i_2，i_2'分别为第一界面与第二界面的入射角和折射角。故只需论证i_1，i_1'和i_2，i_2'分别满足折射定律即可。

应用正弦定理于ΔORP，则有

$$\frac{\sin(\pi-i_1)}{\sin i_1'}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{n}{n'}$$

即

$$n'\sin i_1=n\sin i_1'$$

应用正弦定理于ΔOPQ，则有

$$\frac{\sin(\pi-i_2')}{\sin i_2}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{n}{n'}$$

即

$$n'\sin i_2'=n\sin i_2$$

故i_1，i_1'和i_2，i_2'分别满足折射定律。由于$OR\parallel DE$、$OQ\parallel FG$，δ即为偏向角。

9. 利用上题的图，证明最小偏向角的存在，并证明棱镜折射率的计算公式为

$$n = n' \frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}$$

式中 δ_m 为最小偏向角。

证 在上题图（b）中，有几何关系

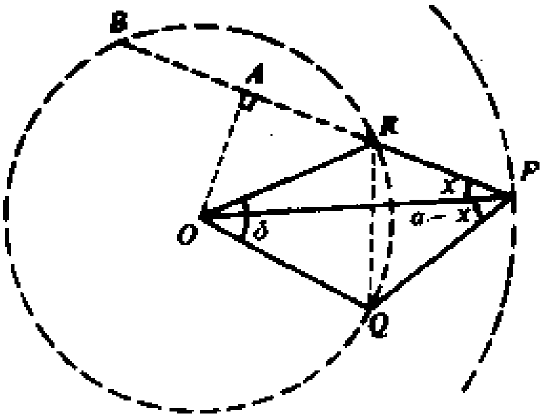
$$i_1' + i_2 = \alpha$$

因此上题光线追迹图（a）中

$$\angle RPQ = \alpha$$

如本题附图所示，在光线追迹图中 $\angle RPQ$ 是恒定的，它正是棱镜顶角 α。设 $\angle RPO = x$，则 $\angle OPQ = \alpha - x$。由于两圆弧的半径正比于折射率 n，n'，即

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{n}{n'}$$



题 9 图

设

$$\overline{OP} = n,\quad \overline{OR} = n'$$

$$\overline{RP} = l_1 = l_1(x)$$

$$\overline{QP} = l_2 = l_2(x)$$

则由余弦定理可得连接 R、Q 两点的弦长为

$$\Delta(x) = \overline{RQ} = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos\alpha$$

由几何关系（参见本题附图）可得上式中

$$l_1 = \overline{AP} - \overline{AR}$$

$$= n\cos x - \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 x} \qquad (a)$$

$$l_2 = n\cos(\alpha - x) - \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(\alpha - x)} \qquad (b)$$

产生最小偏向角时（即 $\angle ROQ = \delta_m$ 时）Δ 取极小值，其必要条

件是

$$\frac{d\Delta}{dx}=0$$

即

$$2l_1\frac{dl_1}{dx}+2l_2\frac{dl_2}{dx}-2l_2\cos\alpha\frac{dl_1}{dx}-2l_1\cos\alpha\frac{dl_2}{dx}=0$$

整理得

$$(l_1-l_2\cos\alpha)\frac{dl_1}{dx}+(l_2-l_1\cos\alpha)\frac{dl_2}{dx}=0 \qquad (c)$$

注意到

$$\frac{dl_1}{dx}=-n\sin x+\frac{n^2\sin x\cos x}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 x}} \qquad (d)$$

$$\frac{dl_2}{dx}=-\left[-n\sin(\alpha-x)+\frac{n^2\sin(\alpha-x)\cos(\alpha-x)}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2(\alpha-x)}}\right] \qquad (e)$$

当 $x=\alpha/2$ 时，由式（a），（b）得

$$l_1=l_2$$

由式（d），（e）得

$$\frac{dl_1}{dx}=-\frac{dl_2}{dx}$$

把以上两式代入式（c）得

$$\left.\frac{d\Delta}{dx}\right|_{x=\frac{\alpha}{2}}=0$$

可以证明 $\left.\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right|_{x=\frac{\alpha}{2}}>0$，故 $x=\frac{\alpha}{2}$既是产生最小偏向角的必要条件，也是产生最小偏向角的充分条件。即

$$x=\frac{\alpha}{2}\text{ 时，}\delta=\delta_m$$

从追迹图上题图(a)所示可知，当 $x = \angle RPO = \alpha/2$ 时，有

$$i_1 = i_2' = \frac{1}{2}(\delta_m + \alpha)$$

$$i_1' = i_2 = \frac{1}{2}\alpha$$

把以上两式代入折射定律表达式

$$n' \sin i_1 = n \sin i_1'$$

则得

$$n = n' \frac{\sin[(\alpha + \delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}$$

10. 已知棱镜顶角为60°，测得最小偏向角为53°14′，求棱镜的折射率。

解 把数据代入上题所得公式，并取 $n' = 1$，即得

$$n = \frac{\sin\dfrac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\dfrac{60° + 53°14'}{2}}{\sin\dfrac{60°}{2}} = 1.670$$

11. 顶角为50°的三棱镜的最小偏向角是35°，如果把它浸入水中，最小偏向角等于多少？（水的折射率为1.33）。

解 设棱镜的折射率为 n，水的折射率为 n'，先求得

$$n = \frac{\sin\dfrac{50° + 35°}{2}}{\sin\dfrac{50°}{2}} = 1.60$$

再由 $n = n' \dfrac{\sin\dfrac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ 得

$$\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\frac{n}{n'}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1.60}{1.33}\sin 25^\circ$$

$$=0.5080$$

$$\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\sin^{-1}0.5080=30^\circ 32'$$

最后求出此棱镜放在水中的最小偏向角为

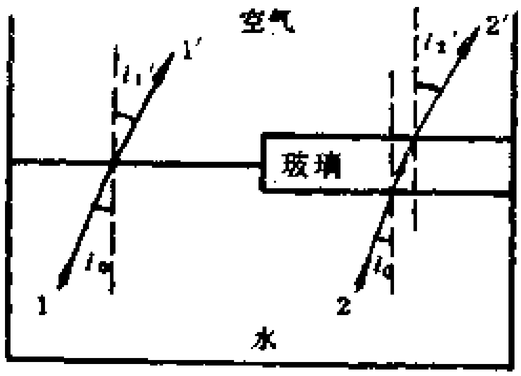
$$\delta_m=11^\circ 4'$$

12. 如附图所示，在水中有两条平行光线 1 和 2，光线 2 射到水和平行平板玻璃的分界面上。问：

（1）两光线射到空气中是否还平行？

（2）如果光线 1 发生全反射，光线 2 能否进入空气？

解　由题 6 结论光线经平行分界面的多层介质时，出射方向只与两边的折射率有关。可知本题光线 1 和 2 射到空气中仍保持平行。



题 12 图

如图所示，当 $i_1'=90^\circ$ 时，也有 $i_2'=90^\circ$，所以光线 1 发生全反射时，光线 2 也不能进入空气，光线 2 在玻璃与空气的界面上发生全反射

13. 计算光在下列媒质之间穿行时的全反射临界角：（1）从玻璃到空气，（2）从水到空气，（3）从玻璃到水。

解　设空气、水、玻璃的折射率分别为 $n_1=1.000$，$n_2=1.333$，$n_3=1.516$。

则

（1）$i_{1c}=\sin^{-1}\dfrac{n_1}{n_3}=\sin^{-1}\dfrac{1.000}{1.516}=41^\circ 16'$

（2）$i_{2c}=\sin^{-1}\dfrac{n_1}{n_2}=\sin^{-1}\dfrac{1.000}{1.333}=48^\circ 36'$

（3）$i_{3c}=\sin^{-1}\dfrac{n_2}{n_3}=\sin^{-1}\dfrac{1.333}{1.516}=61^\circ 33'$

*14． 设光导纤维玻璃芯和外套的折射率分别为 n_1 和 n_2（$n_1>n_2$），垂直端面外媒质的折射率为 n_0（见附图）。试证明，能使光线在纤维内发生全反射的入射光束的最大孔径角 θ_1 满足下式：

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

（$n_0\sin\theta_1$ 称为纤维的数值孔径）。

题14图

解 根据折射定律，得到

$$n_0\sin\theta_1=n_1\sin\theta_1'=n_1\cos\theta_2$$
$$=n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_2}$$

因为光线在玻璃芯和外套的界面上发生全反射的条件为

$$\sin\theta_2\geqslant\frac{n_2}{n_1}$$

所以，欲使光线在纤维内发生全反射，θ_1 必需满足

$$n_0\sin\theta_1\leqslant n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

故数值孔径为

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

光导纤维的数值孔径反映集光本领，是导光传象的重要性能参数之一。

15． 光导纤维外套由折射率为1.52的冕玻璃做成，芯线由折射率为1.66的火石玻璃做成，求垂直端面的数值孔径。

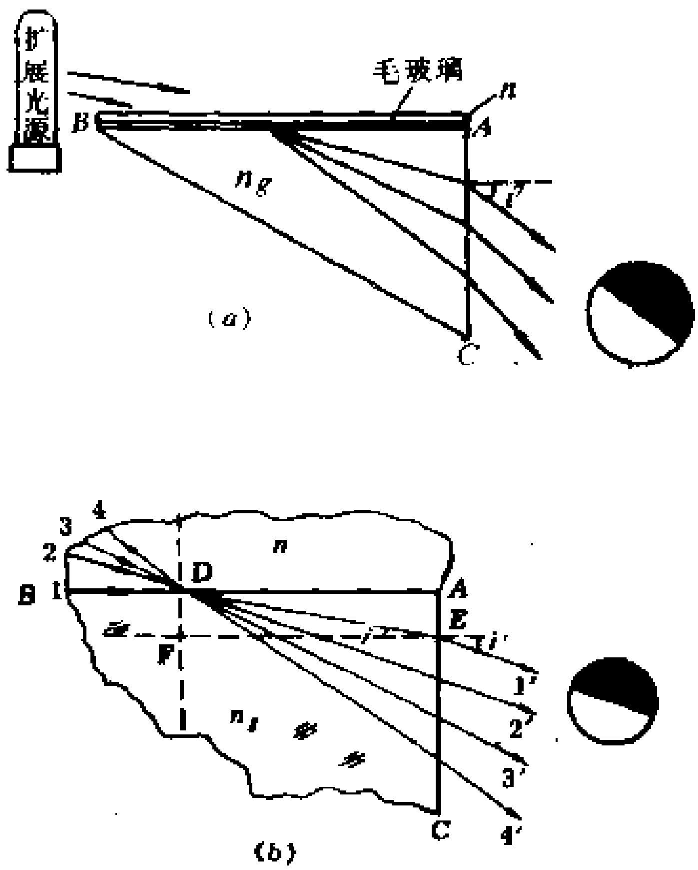
解 据上题给出的光导纤维数值孔径公式，算出

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\sqrt{1.66^2-1.52^2}$$
$$=0.667$$

*16． 极限法测液体折射率的装置如附图（a）所示，ABC 是直角棱镜，其折射率 n_g 为已知。将待测液体涂一薄层于其上表面 AB，再覆盖一块毛玻璃。用扩展光源在掠入射的方向照明。从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一下限 i'。如用望远镜观察，则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区。试证明，待测液体的折射率 n 可按下式算出：

$$n = \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i'}$$

用这种方法测液体的折射率，测量范围受到什么限制?



题16图

证 毛玻璃的作用是增加散射，以使液层上表面处处为散射源。如图(b)所示，在AB面入射角较小的光线，在AC面出射时折射角较大。以折射角下限i'出射的光线1'，其共轭光线1在AB面的入射角为90°。出射方向观察用的是一架接收平行光用的望远镜，它能接收从AC面出射的一系列不同方向的平行光束，同一方向的平行光在望远镜中会聚于一点。由于AC面出射光线的折射角有一下限i'，因此在视场中出现有明显分界线的半明半暗区。

对图（b）中的E点写出折射定律为

$$n_g \sin\angle DEF = \sin i'$$

对图（b）中的D点写出折射定律为

$$n_g \sin\angle EDF = n\sin 90°$$

又因为

$$\angle EDF = 90° - \angle DEF$$

故由以上三式得

$$n = n_g \sin\angle EDF = n_g \cos\angle DEF$$

$$= n_g \sqrt{1 - \sin^2\angle DEF} = n_g \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_g^2}}$$

$$= \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i} < n_g$$

$n < n_g$是极限法测液体折射率的限制条件。如果液体相对棱镜是高折射率，经AB面一次折射后就有各种方向的平行光束，它们在AC面出射时就不可能在望远镜中出现有明显分界线的半明半暗区。

§2　惠更斯原理

1．　在空气中钠黄光的波长为5893 Å，问：

（1）其频率为多少？

（2）在折射率为1.52的玻璃中其波长为多少？

解　（1）光频

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3\times10^{10}}{5893\times10^{-8}}$$

$$= 5.09\times10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

式中λ_0为光谱线的真空波长。

（2）同一谱线在介质中的光波长

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{5893}{1.52}$$

$$= 3877\ \text{Å}$$

2．　在熔凝石英中波长为5500 Å的光频率为多少？已知折射率为1.460。

解　光频

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{n\lambda} = 3.74\times10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

3．　填充下表中的空白：

谱　线	F	线	D	线
媒　质	真　空	水	真　空	水
折射率	(1)	1.337	(1)	1.333
波长(Å)	4861	(3636)	5893	(4421)
频率(Hz)	(6.17×10^{14})	(6.17×10^{14})	(5.09×10^{14})	5.09×10^{14}
光速(m/s)	(3×10^{8})	(2.24×10^{8})	(3×10^{8})	(2.25×10^{8})

解　设 f，c，v，λ_0，λ，n 分别为光的频率、真空中光速、介质中光速、真空中波长、介质中波长、介质的折射率。根据下列关系式：

$$f=\frac{c}{\lambda_0},\qquad \lambda=\frac{\lambda_0}{n},\qquad v=\frac{c}{n}$$

代入表中所给有关数据，把计算结果填入表中空白(括号内数据)。

从以上三题的数字计算中我们应该看到：

(1) 可见光波段的光频很高，量级达10^{14} Hz相当于光扰动的周期为10^{-2} Ps量级。对于如此高频的振荡，目前尚无接收器能瞬时响应，这就导致光讯号接收时的一系列统计平均问题。

(2) 波速等于频率乘以波长的公式，对任何波动都是普遍成立的，它是波动的一个运动学公式，不涉及波动的动力学机制，因而与介质无关。但是波速的具体取值却与介质性质有关。那么，当波速随介质而改变时，是频率变而波长不变，还是波长变而频率不变，或者是频率和波长都要变呢？须知，对于线性介质来说，波场中的扰动频率取决于波源，它反映波源的固有属性，而与介质无关。空间波长这个物理量正是反映波动与介质的相互作用，它是与介质有关的，自然也就与频率有关了。总之，波源(光源)所激发的某条谱线，其时间频率与介质无关，空间波长随介质而变，因而波速随介质而变，这是物理分析的结果。

(3) 光频极高，光速极大(即使在介质中)，真空光速恒

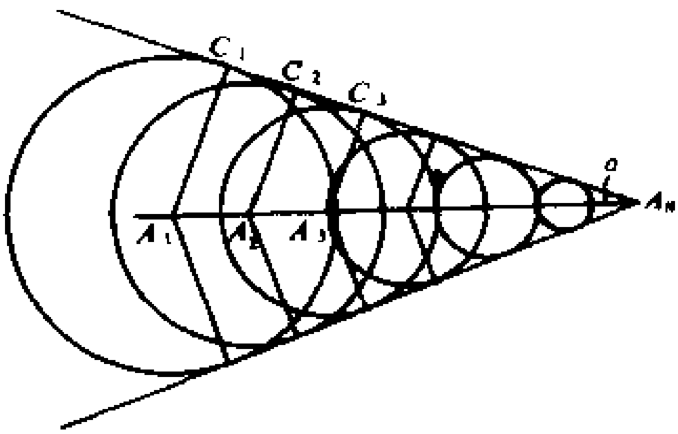
为常数（与光频无关）等是光波的特点。由于接收器时间响应能力的限制，至今所有光频的数据都是通过光波长的测量再加上折射率因素而间接获得的。

*4. 拖着棒的一端在水中以速度 v 移动，v 比水波的速率 u 大。用惠更斯作图法证明，在水中出现一圆锥形波前，其半顶角 α 由下式给出：

$$\sin\alpha=\frac{u}{v}$$

船后的弓形波，超音速飞机在空气中产生的冲击波，都是这样产生的。

证 由于棒对水的撞击（压缩），使棒端沿途各点先后成为水波源。如附图所示，设棒端在水中依次经过 A_1，A_2，$A_3\cdots A_n$点，则当棒端到达 A_n 点时，A_1，A_2，$A_3\cdots$发出的水波面分别是半径为 $u\frac{\overline{A_1A_n}}{v}$，$u\frac{\overline{A_2A_n}}{v}$，$u\frac{\overline{A_3A_n}}{v}\cdots$的球面。作这些球面的包络面，即为宏观波面（总扰动的水波面）。设总扰动的水波面与次波面分别相切于 C_1，C_2，$C_3\cdots$各点，则



题 4 图

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1A_n}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2A_n}}=\frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{A_3A_n}}=\cdots=\frac{u}{v}$$

即宏观波面是以端点 A_n 为顶点的锥面，称为“马赫锥”，锥角大小由

$$\sin\alpha=\frac{u}{v}$$

确定。

§3　费马原理

*1．　证明反射光束的方向是等光程方向。即证明附图中

$$L(A_1B_1C_1) = L(A_2B_2C_2)$$

证　如图，分别由入射点 B_1，B_2向光线 1，$2'$ 作垂线，垂足标为A_1'，C_2'。显然

$$\overline{A_2B_2} = \overline{A_1A_1'},$$

$$\overline{C_2'C_2} = \overline{B_1C_1}$$

又根据反射定律可证△$A_1'B_2B_1$与△$C_2'B_2B_1$是两个全等三角形，即

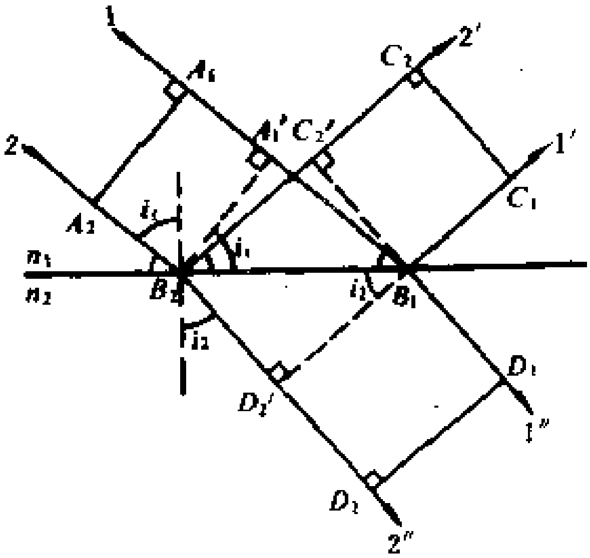
$$\overline{B_2C_2'} = \overline{A_1'B_1}$$

所以光程

$$L(A_1B_1C_1) = n_1(\overline{A_1A_1'} + \overline{A_1'B_1} + \overline{B_1C_1})$$

$$L(A_2B_2C_2) = n_1(\overline{A_2B_2} + \overline{B_2C_2'} + \overline{C_2'C_2})$$

是相等的。



题 1 图

这表明反射定律给出的反射光束的方向，正好与等光程（从入射光算起）要求的方向是一致的。

§2．　证明折射光束的方向是等光程方向。即证明上题附图中

$$L(A_1B_1D_1) = L(A_2B_2D_2)$$

证　如图，由次波源 B_1 向光线 $2''$ 作垂线，垂足标为D_2'，显然

$$\overline{D_2'D_2} = \overline{B_1D_1}$$

再比较 $\overline{A_1'B_1}$，$\overline{B_2D_2'}$两段的光程，在直角三角形△$A_1'B_1B_2$，

$\triangle D_2' B_1 B_2$中，有

$$\overline{A_1' B_1} = \overline{B_1 B_2} \quad \sin i_1, L(\overline{A_1' B_1}) = \overline{B_1 B_2} n_1 \sin i_1$$

$$\overline{B_2 D_2'} = \overline{B_1 B_2} \quad \sin i_2, L(\overline{B_2 D_2'}) = \overline{B_1 B_2} n_2 \sin i_2$$

由折射定律可知

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

于是 $\quad L(A_1' B_1) = L(B_2 D_2')$

所以光程

$$L(A_1 B_1 D_1) = n_1 \overline{A_1 A_1'} + n_1 \overline{A_1' B_1} + n_2 \overline{B_1 D_1}$$

$$L(A_2 B_2 D_2) = n_1 \overline{A_2 B_2} + n_2 \overline{B_2 D_2'} + n_2 \overline{D_2' D_2}$$

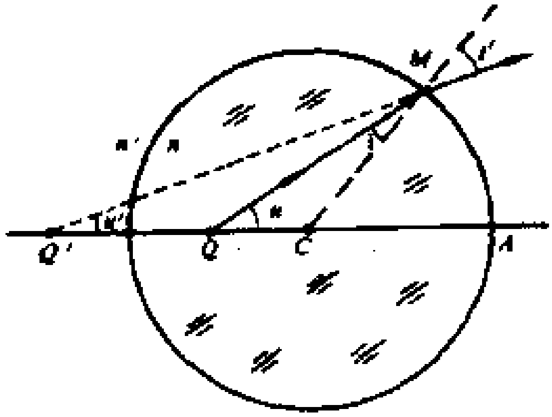
是相等的。

这表明折射定律给出的折射光束的方向，正好与等光程（从入射光算起）要求的方向是一致的。

§4 成 象

*1. 试导出，球面折射宽光束严格成象的一对共轭点（齐明点）的位置公式。

解 如图，设球面半径为R，物象方折射率分别为n、n'，按我们的符号法则，由顶点A算起的距离$\overline{AQ} = s$，$\overline{AQ'} = -s'$，$\overline{AC} = -R$，由球心算起的距离$\overline{CQ} = s_0$，$\overline{CQ'} = -s'_0$，于是



题1图

$$s = s_0 + (-R)$$

$$s' = s_0' + R$$

在$\triangle CMQ$，$\triangle CMQ'$中分别应用正弦定理，则有

$$\frac{\sin u}{\sin i} = \frac{-R}{s_0} = \frac{-R}{s+R}$$

$$\frac{\sin u'}{\sin i'}=\frac{-R}{-s_0'}=\frac{-R}{-s'+R}$$

解得

$$s_0=-R\frac{\sin i}{\sin u}$$

$$s_0'=R\frac{\sin i'}{\sin u'}$$

又据根折射定律

$$n\sin i=n'\sin i'$$

以及角度关系 $u=u'+(i'-i)$，进一步得到

$$s_0=-\frac{n'}{n}\frac{\sin i'}{\sin u}R$$

$$s_0'=R\frac{\sin i'}{\sin(u+i-i')}$$

$$=-\frac{n}{n'}\frac{\sin u}{\sin(u+i-i')}S_0$$

由此可见，一般情况下 Q' 位置是 Q 点位置 s_0 和出射角 u 的复杂函数，只在 $u=i'$ 的特殊条件下才有

$$s_0=-\frac{n'}{n}R,\quad s_0'=\frac{n}{n'}R$$

此时 Q' 位置与出射角 u 无关，使 Q，Q' 成为宽光束严格成象的一对共轭点，同时还有

$$u=i',\quad u'=i$$

以及

$$\frac{-s'}{s}=\frac{\sin u}{\sin u'}$$

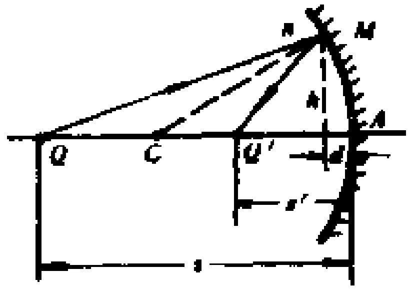
等关系成立。

2、　由费马原理导出傍轴条件下球面反射近似成象，以及物象距公式。

解 本题要求我们不是利用反射定律，而是利用费马原理去证明在傍轴条件下，球面反射可以近似成象，并由此导出物象距公式。

如附图所示，设轴上物点Q发出的光线经球面M点后的反射光线交光轴于Q′点，则光程

$$L(QMQ') = n\overline{QM} + n\overline{MQ'}$$



题 2 图

设球面反射镜的曲率半径为r，则$\overline{AC} = \overline{MC} = -r$（曲率半径为负），由几何关系可得

$$h^2 = d(2|r| - d) = -d(2r+d)$$

$$\overline{QM} = [(s-d)^2 + h^2]^{\frac{1}{2}} = [(s-d)^2 - d(2r+d)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [s^2 - 2d(r+s)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{MQ'} = [(s'-d)^2 + h^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [s'^2 - 2d(r+s')]^{\frac{1}{2}}$$

在$d \ll s, s', |r|$的傍轴条件下，略去二阶以上无穷小量得

$$\overline{QM} \approx s\left[1 - \frac{d(r+s)}{s^2}\right]$$

$$\overline{MQ'} \approx s'\left[1 - \frac{d(r+s')}{s'^2}\right]$$

从而

$$L(QMQ') = ns\left[1 - \frac{d(r+s)}{s^2}\right] + ns'\left[1 - \frac{d(r+s')}{s'^2}\right]$$

要求等光程，即令

$$L(QMQ') = L(QAQ')$$

得方程

$$ns\left[1 - \frac{d(r+s)}{\ }\right] + ns'\left[1 - \frac{d(r+s')}{s'^2}\right] = ns + ns'$$

解出

$$s' = -\frac{rs}{r+2s}$$

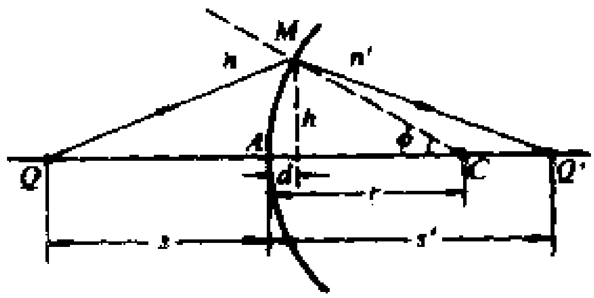
可见 s' 只与 s 有关，与 d 无关。这表明在傍轴范围内，无论入射光线的高度如何，等光程要求下的 s' 有解。根据费马原理的推论——物象等光程性，可知Q点成象于Q′点。Q′的位置公式 $s' = -\frac{rs}{(r+2s)}$ 可以改写成

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}$$

上式就是球面反射傍轴成象的物象距公式。

*3．　由费马原理导出傍轴条件下球面折射近似成象，以及物象距公式。

解一　如附图所示，轴上物点Q发出的光线与折射球面相遇于 M，折射后交光轴于Q′。设球面的半径为 r，则 $r = \overline{AC} = \overline{MC}$（曲率半径为正）。与上题同理可得光程



题 3 图

$$L(QMQ') = n\overline{QM} + n'\overline{MQ'}$$

$$\approx ns\left[1 + \frac{d(r+s)}{s^2}\right] + n's'\left[1 + \frac{d(r-s')}{s'^2}\right]$$

要求等光程，即令

$$L(QMQ') = L(QAQ')$$

得方程

$$ns\left[1 + \frac{d(r+s)}{s^2}\right] + n's'\left[1 + \frac{d(r-s')}{s'^2}\right] = ns + n's'$$

如果上式所列方程对 s' 有解，而且Q′的位置 s' 与 d 无关，则由费马原理的推论——物象等光程性，表明Q经球面折射成象于Q′。化简上式得

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$$

可见在傍轴条件下Q'的位置s'与d无关，只与Q的位置s有关，表明Q成象于Q'。上式即为球面折射傍轴成象的物象距公式。

解二 如附图所示，轴上Q点发出的光线经球面M点折射后，折射光线交光轴于Q'。半径MC与光轴的夹角为ϕ，设球面的半径为r，则$r=\overline{MC}$（曲率半径为正）。光程

$$
\begin{aligned}
L(QMQ') &= n\overline{QM}+n'\overline{MQ'} \\
&= n\sqrt{r^2+(r+s)^2-2r(r+s)\cos\phi} \\
&\quad + n'\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\phi}
\end{aligned}
$$

根据费马原理，有

$$d L(QMQ') = d L(\phi) = 0$$

即

$$
n\frac{2r(r+s)\sin\phi}{2\sqrt{r^2+(r+s)^2-2r(r+s)\cos\phi}}d\phi
+ n'\frac{-2r(s'-r)\sin\phi}{2\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\phi}}d\phi = 0
$$

在傍轴条件下，$\phi \ll 1$，$\cos\phi\approx 1$，上式可化简为

$$\left(n\frac{r+s}{s}+n'\frac{r-s'}{s'}\right) r\sin\phi\, d\phi = 0$$

进一步化简得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

可见Q'的位置s'与ϕ无关，只与Q的位置s有关。说明Q经球面折射傍轴成象于Q'。上式即为物象距公式。

§5　共轴球面组傍轴成象

*1. 根据反射定律推导球面反射镜的物象距公式和焦距

公式。

解 如附图所示，设入射角为i，反射角为i'，入射线、反射线、半径CM与光轴的夹角分别为u、u'、ϕ，Q成象于Q'，则

$$i = \phi - u$$
$$i' = u' - \phi$$

在傍轴条件下有

$$\phi \approx \frac{h}{-r},\quad u \approx \frac{h}{s},\quad u' \approx \frac{h}{s'}$$

又根据反射定律$i = i'$，所以

$$\frac{h}{-r} - \frac{h}{s} = \frac{h}{s'} - \frac{h}{-r}$$

整理上式即得球面反射镜的物象距公式为

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}$$

令$s' = \infty$，$s = f$和$s = \infty$，$s' = f'$得球面反射镜焦距公式为

$$f = f' = -\frac{r}{2}$$

2. 物体放在凹面反射镜前何处，可产生大小与物体相等的倒立实象？

解 设物距为s，根据题意，球面反射镜的横向放大率

$$V = -\frac{s'}{s} = -1$$

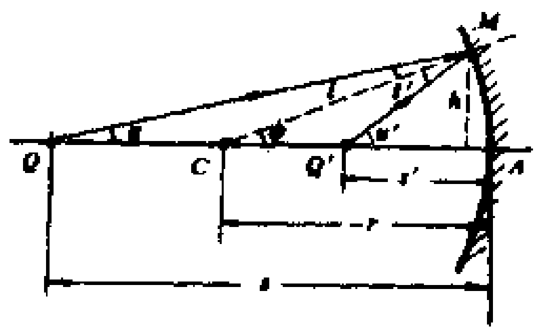
则得象距

$$s' = -sv = s$$

再代入反射球面成象公式解得

$$s = -r$$

故物体应放在凹球面反射镜前球心处。



题 1 图

3. 凹面镜的半径为40 cm，物体放在何处成放大两倍的实象？放在何处成放大两倍的虚象？

解 实物形成两倍实象时，球面反射镜的横向放大率 $V_1 = -2$，实物形成两倍虚象时 $V_2 = +2$。联立反射镜物象距公式及横向放大率公式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = -\dfrac{2}{r} \\ s' = -Vs \end{cases}$$

解得

$$s = \frac{1-V}{2V} r$$

按题意，以 $r = -40\text{cm}$，$V_1 = -2$，$V_2 = +2$ 代入，分别算出

$$s_1 = +30\text{cm}$$

$$s_2 = +10\text{cm}$$

即物体应分别置于凹面镜前30 cm和10 cm处。

4. 要把球面反射镜前10 cm处的灯丝成象于3 m处的墙上，镜形应是凸的还是凹的？半径应有多大？这时象放大了多少倍？

解 以物距 $s = +10\text{cm}$，象距 $s' = +300\text{cm}$ 代入球面反射镜物象距公式和横向放大率公式，分别求得球面镜的曲率半径和横向放大率为

$$r = -19.4\text{cm}$$

$$V = -30$$

这说明，为了满足象距要求应选用一块凸面镜，此时得到的是一个放大了30倍的倒立的实象。

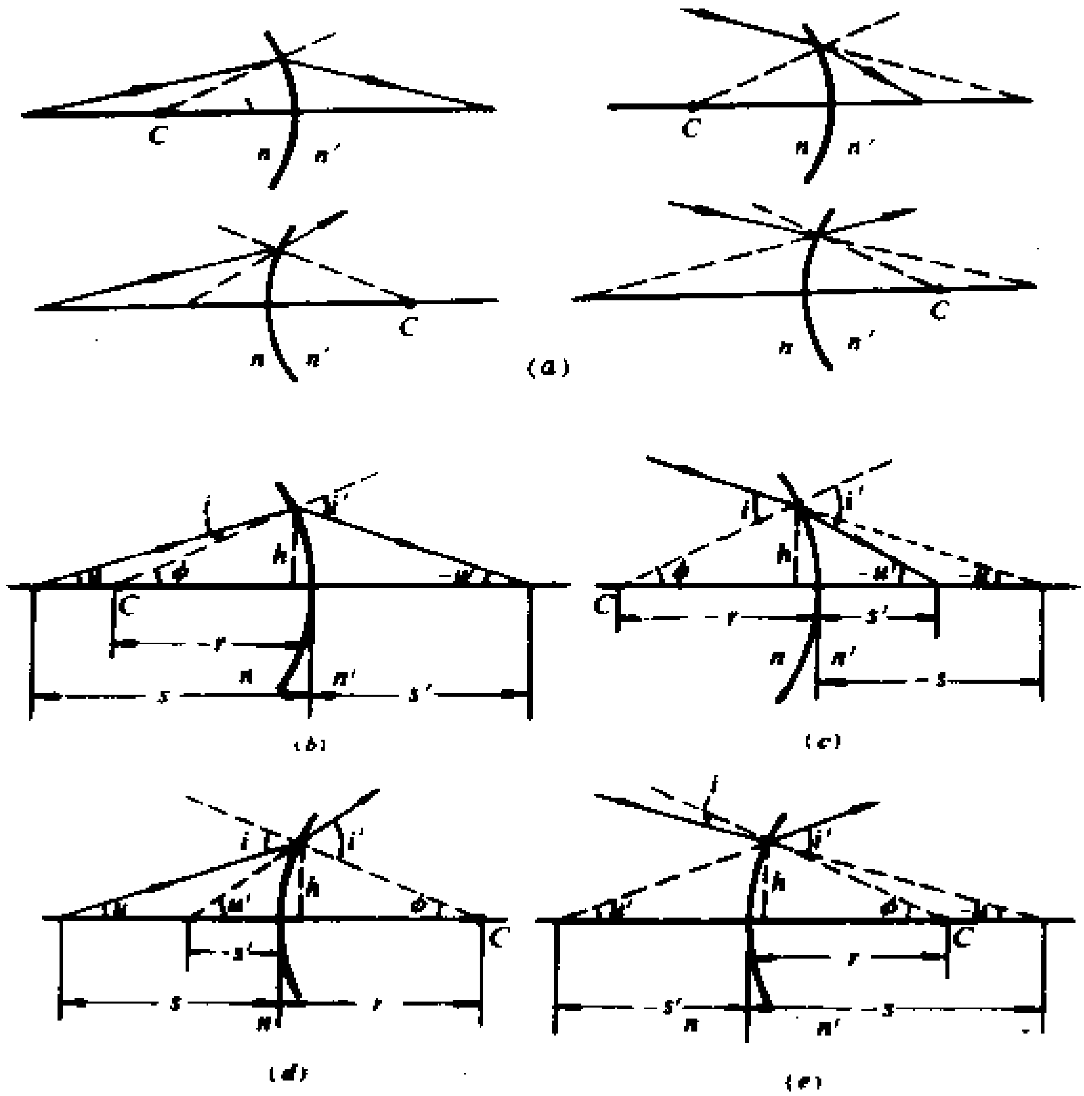
5. 一凹面镜的曲率半径为24 cm，填充下表中的空白（表中物距 s 为已知），并作出相应的光路图。

物距 s (cm)	−24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
象距 s' (cm)	8.0	6.0	4.0	0	−12	∞	24	18
横向放大率 V	1/3	1/2	2/3	1	2	∞	−1	−1/2
象的虚实	实	实	实	虚	虚	实	实	实
象的正倒	正	正	正	正	正	倒	倒	倒

解 分别把数据代入球面反射镜物象距公式和横向放大率公式，把计算结果填于表中空白。光路图从略。

6. 按我们约定的正负号法则（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）（Ⅳ）（Ⅴ）等，标出附图（a）各图中的物距 s、象距 s'、曲率半径 r、光线倾角 u，u'的绝对值。比较各图中折射率 n，n'的大小，指明各图中物、象的虚实。

解 结果示于图（b）、（c）、（d）、（e）中。



题6图

（b） n n'，实物，实象

（c） n n'，虚物，实象

（d）　$n > n'$，实物，虚象

（e）　$n > n'$，虚物，虚象

*7.　分别据上题各图推导球面折射成象公式。

解　书中已就图（b）的情况导出傍轴条件下球面折射成象的物象距公式

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

此式是否普遍，是否适用于其它如图（c），（d），（e）等三种情况，这是需要论证的。此题意图就在于此。下面分别推导（c），（d），（e）各图在傍轴条件下的成象公式。

在图（c）情况下，考虑傍轴近似，折射定律可写成

$$ni \approx n'i' \qquad (a)$$

又有

$$-u \approx \frac{h}{-s}, \quad -u' \approx \frac{h}{s'}$$

$$\phi = \frac{h}{-r}$$

由几何关系得

$$i = \phi + (-u)$$

$$i' = \phi + (-u')$$

从而

$$i = h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{-s}\right)$$

$$i' = h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right)$$

代入式（a）有

$$nh\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{-s}\right) = n'h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right)$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

同理，对图（d）情况，在傍轴条件下有

$$i=\phi+u=\frac{h}{r}+\frac{h}{s}$$

$$=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)$$

$$i'=\phi+u'=\frac{h}{r}+\frac{h}{s'}$$

$$=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

代入本题式（a）得

$$n\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

在图（e）情况下，考虑傍轴近似有

$$i=\phi-(-u)=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{-s}\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)$$

$$i'=\phi+u'=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{-s'}\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

代入本题式（a）有

$$n\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

至此，证明了以上四种情况下的物象距公式采取同一形式，不同之处在于公式中各量的正负号有所区别，这种区别由事先约定的一套正负号规则来判断。这种处理方法是符合人们记忆习惯的。反之，如果我们采取所有量都取正号，那么以上四种情况下就有四种不同形式的物象距公式，它不便于记忆。任何一本几何光学书中必须交代清楚自己的正负号约定，不同书中的正负号约定将可能不同，因此物象距等一套公式在形式上也将不同，阅读时应当予以注意。

8. 若空气中一球形透明体能将平行光束会聚于其背面的顶点上，此透明体的折射率应等于多少？

解 由球面折射成象的焦距公式

$$f'=\frac{n'r}{n'-n}$$

得

$$n'=\frac{f'n}{f'-r}$$

按题意 $f'=2r$，$n=1.00$ 代入上式得

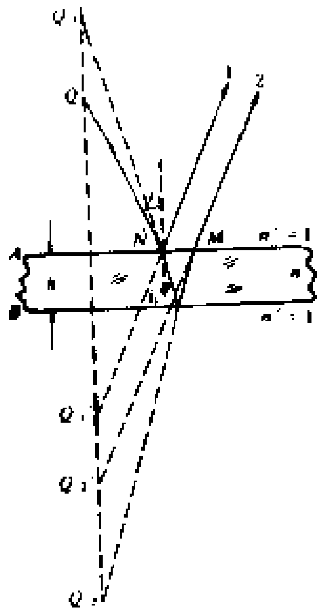
$$n'=\frac{2rn}{2r-r}=2n=2.00$$

即此透明体的折射率二倍于周围介质的折射率。

9. 如附图，一平行平面玻璃板的折射率为n，厚度为h，点光源Q发出的傍轴光束（即接近于正入射的光束）经上表面反射，成象于Q_1'；穿过上表面后在下表面反射，再从上表面折射的光束成象于Q_2'。证明Q_1'、Q_2'间的距离为$2h/n$。

（提示：把平面看成$r\to\infty$的球面，并利用球面折射公式计算。）

证一 Q_1'是由Q经上表面A反射成象所得。Q_2'是Q经A面折射、B面反射、再经A面折射三次成象所得（如图）。先计算Q_2'的位置，设Q离A面的距离为s_1，Q第一次经A面折射成象有



题 9 图

$$\frac{n}{s_1'}+\frac{n'}{s_1}=0$$

解得

$$s_1'=-\frac{n}{n'}s_1=-ns_1$$

即象Q_1在A面上方距A面ns_1处，距离B面（ns_1+h）。第二次经B面反射成象Q_2，按镜象对称知道象Q_2在B面下方距B面（ns_1+h）处，距A面（ns_1+2h）。第三次再经A面折射成象

$$\frac{1}{s_3'}+\frac{n}{s_3}=0$$

$$s_3=ns_1+2h$$

解得

$$s_3'=-\frac{s_3}{n}=-\left(s_1+\frac{2h}{n}\right)$$

即象Q_2'在A面下方距A面（s_1+2h/n）处。

Q经A面反射成象Q_1'在A面下方s_1处，所以$Q_1'Q_2'$间的距离为

$$\Delta s=\left(s_1+\frac{2h}{n}\right)-s_1$$

$$=\frac{2h}{n}$$

证二 如附图，设在A面的入射角为i_1，折射角为i_1'，则

$$\overline{NM} = 2h\,\mathrm{tg}\,i_1'$$

$$\overline{Q_1Q_2} = \frac{\overline{NM}}{\mathrm{tg}\,i_1} = 2h\frac{\mathrm{tg}\,i_1'}{\mathrm{tg}\,i_1} = 2h\frac{\sin i_1'}{\sin i_1}\cdot\frac{\mathrm{con}\,i_1}{\cos i_1'}$$

$$= \frac{2h}{n}\,\frac{\cos i_1}{\cos i_1'}$$

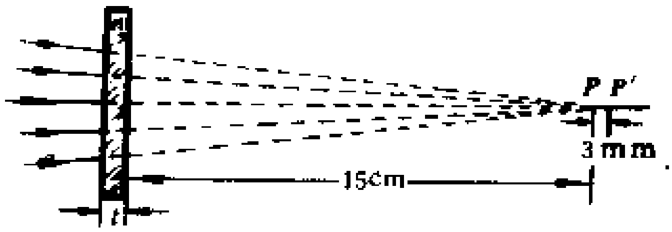
在傍轴条件下 $\cos i_1 \approx \cos i_1' \approx 1$，所以

$$\overline{Q_1Q_2} = \frac{2h}{n}$$

由此可见，象位移值与物点高度无关，只与平行平板的厚度和折射率有关。

10. 如附图，一会聚光束本来交于 P 点，插入一折射率为 1.50的平面平行玻璃板后，象点移至 P'。求玻璃板的厚度 t。

解 本题是 P 点经两次平面（半径为无穷大的球面）折射成象于 P' 点。联立物象距公式(令 $r \to \infty$)



题10图

$$\frac{1}{s_1} = \frac{n}{s_1'}$$

$$\frac{n}{s_2} = \frac{1}{s_2'}$$

并注意到 $s_2 = -(s_1' - t)$，解出

$$s_2' = -\frac{(ns_1 - t)}{n}$$

须知物象之间的位移值

$$\overline{PP'} = (s_2' - t) - (-s_1)$$

$$= \frac{n-1}{n}t$$

所以

$$t=\frac{n}{n-1}\overline{PP'}$$

与物点P的远近无关，原题中的数据15cm不是必要的。以$n=1.50$，$\overline{PP'}=3$ mm代入上式算出

$$t=9$$

§6 薄透镜

*1. 某透镜用$n=1.50$的玻璃制成，它在空气中的焦距为10.0cm，它在水中的焦距为多少？（水的折射率为4/3）

解 设薄透镜材料的折射率为n_L，物象方（同一介质）的折射率为n_0，则薄透镜的焦距公式应当为

$$f=\frac{1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

如设该透镜在空气中和在水中的焦距分别为f_1，f_2，按上式有

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{n_L-1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)}$$

则

$$f_2=\frac{1.50-1}{\frac{3}{4}\times1.50-1}f_1=4f_1=40\,\text{cm}$$

2. 一薄透镜折射率为1.500，焦度为500屈光度。将它浸入某液体，焦度变为-1.00屈光度。求此液体的折射率。

解 焦距f（米）与焦度P（屈光度）的关系为

$$P=\frac{1}{f}$$

所以薄透镜（折射率为 n_L）在介质（折射率为 n_0）中的焦度公式应当写成

$$P=\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

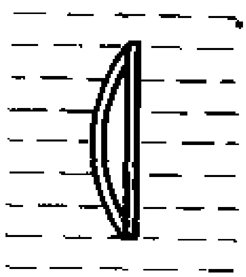
如果薄透镜分别置于两种介质（折射率分别为 n_1 和 n_2）中，则其焦度之比为

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{n_L}{n_2}-1\right)\bigg/\left(\frac{n_L}{n_1}-1\right)$$

按题意 $(P_2/P_1)=-1/500$，$n_L=1.500$，$n_1=1.000$，由此算出第二种介质（液体）的折射率为

$$n_2=\frac{n_L}{0.999}=1.502$$

3． 用一曲率半径为20 cm的球面玻璃和一平面玻璃粘合成空气透镜（见附图）。设玻璃壁厚可忽略，水和空气的折射率分别为 4/3 和 1，求此浸于水中透镜的焦距 f。此透镜是会聚的还是发散的？



题 3 图

解 以 $n_L=1$，$n_0=4/3$，$r_1=20$ cm，$r_2=\infty$ 代入薄透镜焦距公式（见题 1 解），算出该空气薄透镜（置于水中）的焦距为

$$f=-80\text{ cm}$$

它是发散透镜。由此可见，笼统地说“凸透镜是会聚透镜”是不对的，这句话只在周围介质折射率小于透镜折射率时是正确的。

4． 一凸透镜的焦距为12 cm，填充下表中的空白，物距 s 为已知，并作出相应的光路图。

物距 s (cm)	−21	12	6.0	0	6.0	12	24	36
象距 s' (cm)	8	6	4	0	12	∞	24	18
横向放大率 V	1/3	1/2	2/3	1	2	−∞	−1	−1/2
象的虚实	实	实	实		虚	实	实	实
象的正倒	正	正	正	正	正	倒	倒	倒

解　根据薄透镜的物象距高斯公式和横向放大率公式，分别代入数据把计算结果填于表中空白中。光路图从略。

5.　一凹透镜的焦距为12 cm，填充下表中的空白（物距 s 为已知），并作出相应的光路图。

物距 s (cm)	24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
象距 s' (cm)	24	∞	12	0	−4	6	8	9
横向放大率 V	1	∞	2	1	2/3	1/2	1/3	1/4
象的虚实	虚	实	实		虚	虚	虚	虚
象的正倒	倒	正	正	正	正	正	正	正
图号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

解　根据薄透镜的物象距高斯公式和横向放大率公式，分别代入数据把计算结果填于表中空白内。光路图略。

6.　在5 cm焦距的凸透镜前放一小物，要想成虚象于25 cm到无穷远之间，物应放在什么范围里？

解　在薄透镜物象公式的高斯形式中，令象距

$$-\infty < s' < 25\ \text{cm}$$

得物距

$$4.2\ \text{cm} < s < 5\ \text{cm}$$

即物应放在透镜前4.2 cm至5 cm处。

7.　一光源与屏间的距离为1.6m，用焦距为30 cm的凸透镜插在二者之间，透镜应放在什么位置，才能使光源成象于屏上？

解　设光源离透镜距离为 s，则屏离透镜的距离为 $s' = l - s$，

$l = 160\text{cm}$。由高斯公式求得物距有两个解，即

$$s_1 = 120\text{cm}$$

$$s_2 = 40\text{cm}$$

即透镜放在光源后120cm处和40cm处均能使光源成实象于屏上。当$s_1 = 120\text{cm}$时，物成缩小实象；当$s_2 = 40\text{cm}$时物成放大实象。

8. 屏幕放在距物100cm处，二者之间放一凸透镜。当前后移动透镜时，我们发现透镜有两个位置可以使物成象在屏幕上。测得这两个位置之间的距离为20.0cm，求：

（1）这两个位置到幕的距离和透镜的焦距；

（2）两个象的横向放大率。

解 在物象距离（大于4倍焦距）一定的条件下，利用光的可逆性原理可以证明，两次成象的物象距满足对易关系，即第一次成象的物距正是第二次成象的象距，第一次成象的象距正是第二次成象的物距。这个结论也可以由高斯公式求得。令$l = s + s'$，应用高斯公式得

$$s^2 - ls + lf = 0$$

解出

$$s = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

即

$$s_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad s_1' = l - s_1 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

$$s_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad s_2' = l - s_2 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

由此可见，两次物距差为

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \sqrt{l^2 - 4lf}$$

已知 $l = 100$ cm，$\Delta s = 20.0$ cm，于是透镜焦距

$$f = \frac{l^2 - (\Delta s)^2}{4l} = 24.0\ \text{cm}$$

两次象距分别为

$$s_1' = 40\ \text{cm}\quad,\ s_2' = 60\ \text{cm}$$

横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{2}{3},\quad V_2 = -\frac{3}{2}$$

且有

$$V_1 V_2 = 1$$

9． 如上题，在固定的物与幕之间移动凸透镜。证明：要使透镜有两个成象位置，物和幕之间的距离必须大于4倍焦距。

证 设物与幕距离为 l，上题已经解出

$$s = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

欲使透镜有两个成象位置，物距应有两个实数解，也即必须要求

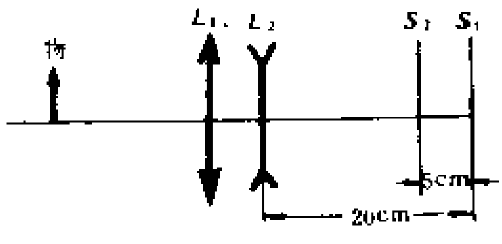
$$l^2 - 4lf > 0$$

即

$$l > 4f$$

***10．** 如附图，L_1，L_2分别为凸透镜和凹透镜。前面放一小物，移动屏幕到L_2后20cm的s_1处接收到象。现将凹透镜L_2撤去，将屏幕移前5cm至s_2处，重新接收到象。求凹透镜L_2的焦距。

解 这是测定发散透镜焦距的一种实用方法（物距－象距法），其中会聚透镜是这种方法所要求的一个辅助透镜。按题意无凹透镜时所成的实象正是凹透镜引入后的虚物。此



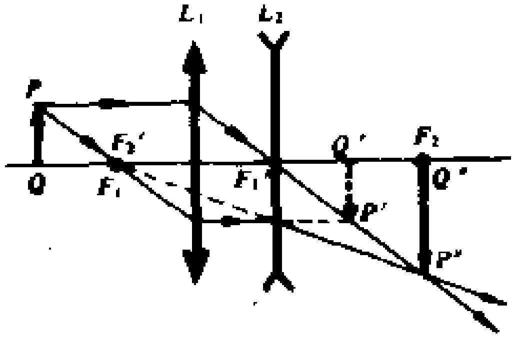
题10图

时对凹透镜来说，物距 $s = -(20-5) = -15$ cm，象距 $s' = 20$ cm。

由高斯公式算出凹透镜焦距

$$f = -60\text{ cm}$$

11. 一光学系统由一焦距为5.0cm的会聚透镜L_1和一焦距为10.0cm的发散透镜L_2组成，L_2在L_1之右5.0cm。在L_1之左10.0cm处置一小物，求经此光学系统后所成的象的位置和横向放大率。用作图法验证计算结果。



题11图

解 这是两次成象问题，设对L_1的物距、象距分别为s_1、s_1'，对L_2的物距、象距分别为s_2、s_2'，并注意到$s_2 = -(s_1' - d)$，d是L_2在L_1右方的距离。把数据代入高斯公式得

$$\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{10.0} = \frac{1}{5.0}$$

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{1}{(s_1' - 5.0)} = \frac{1}{-10.0}$$

解得

$$s_1' = 10.0\text{ cm}, \quad s_2' = 10.0\text{ cm}$$

并有

$$s_2 = 5.0\text{cm}$$

所以经此光学系统象成在L_2之右10.0cm处。横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{10.0}{10.0} = -1.0$$

$$V_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -\frac{10.0}{-5.0} = 2.0$$

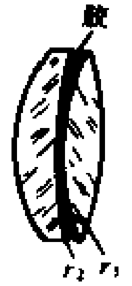
总放大率为

$$V = V_1 V_2 = -2.0$$

作图法验证如附图所示。

***12.** 当粘合两薄透镜时，若相接触的表面曲率半径r_2，

r_3不吻合（见附图），复合透镜的焦距公式应如何修改?



题 12 图

解 这里的粘合剂又可以看为一个两侧为空气的透镜，于是复合透镜相当于三个透镜的密接，其合成焦距公式为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_0}+\frac{1}{f_2}$$

式中 f_1，f_2 分别为原来两个透镜（两侧是空气）的焦距，f_0是胶透镜的焦距，它应当为

$$f_0=\frac{1}{(n_0-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)}$$

式中 n_0 为胶的折射率。由此可见，当 $r_2=r_3$，即两透镜吻合时，$f_0\to\infty$，即使有一层胶，合成焦距公式仍为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

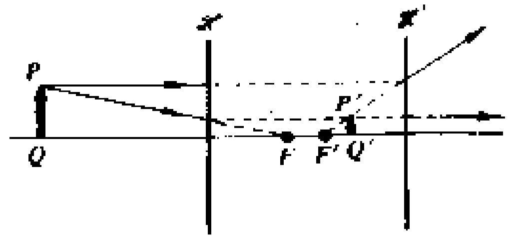
§7 理想光具组理论

1．如图所示，已知光具组的主面和焦点用作图法求各图中 Q 点的象（入射线从左到右）。

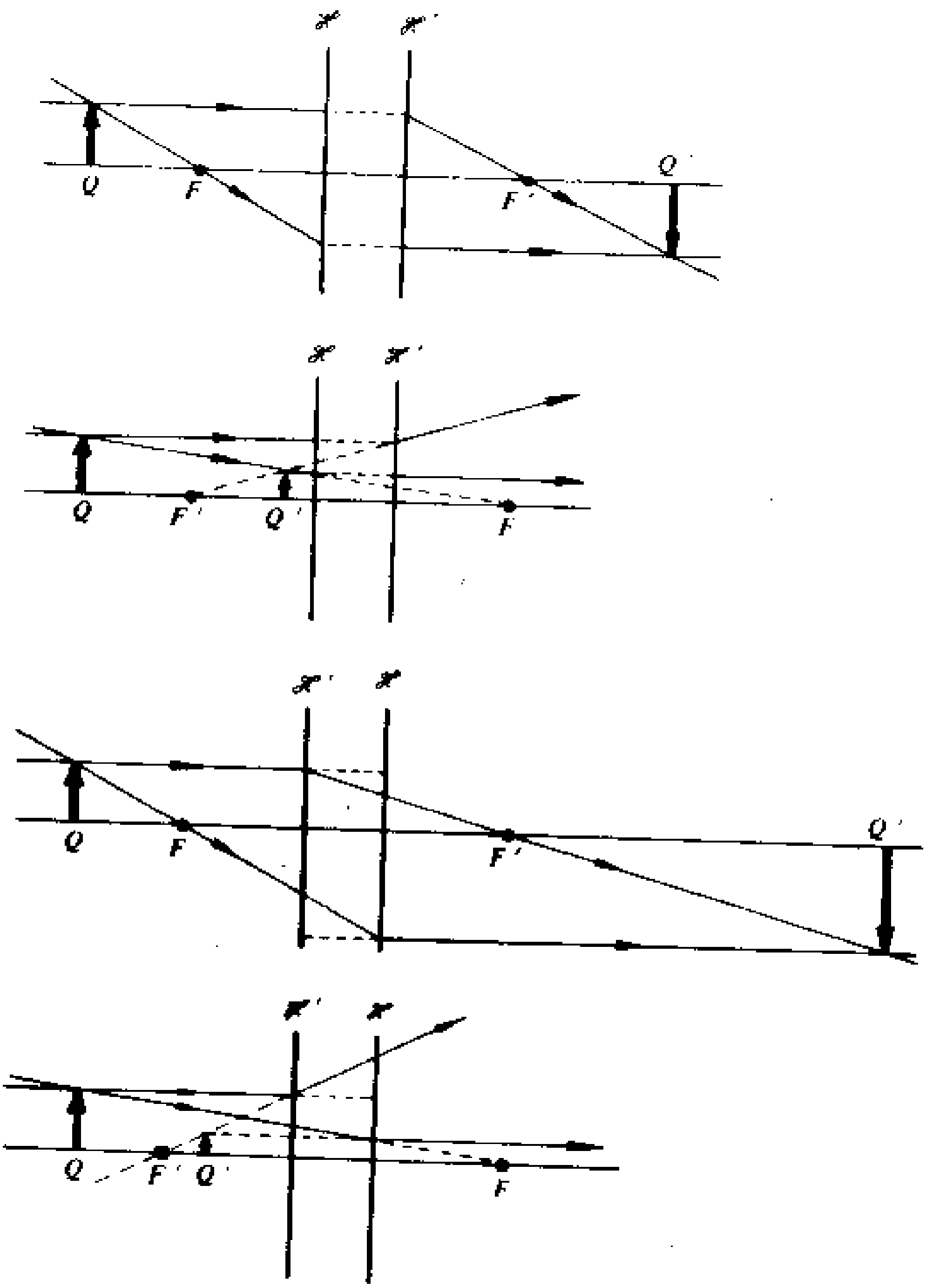
解 分别用作图法求得 Q 点的象为 Q'，如附图所示。

2．如图所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求 PQ 的象（入射线从左到右）。

解 如图所示，作图得 PQ 的象为 $P'Q'$。

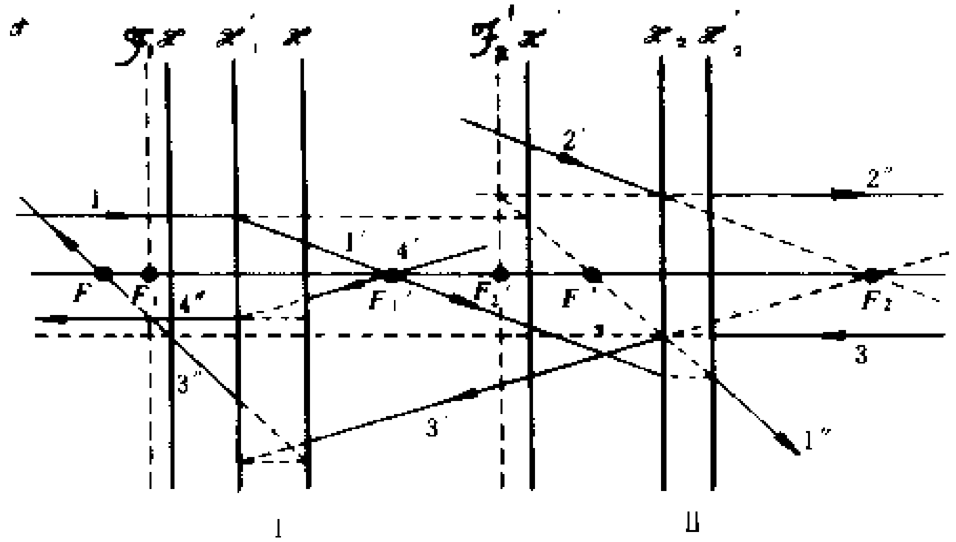


题 2 图



题 1 图

3． 附图所示的联合光具组中，已知光具组Ⅰ的主面为 $\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}_1'$，焦点为 F_1，F_1'；光具组Ⅱ的主面为 $\mathscr{H}_2$，$\mathscr{H}_2'$，焦点为 F_2，F_2'。用作图法求联合光具组的主面和焦点。



题 3 图

解 如附图所示，作图得 $\mathscr{H}$，$\mathscr{H}'$ 和 F，F' 即分别为该联合光具组的主面和焦点。作图步骤简述如下：

（1） 作光线1平行光轴，则过光具组Ⅰ后的共轭光线1′必过 F_1'；

（2） 过 F_2' 作光具组Ⅱ的象方焦面 $\mathscr{F}_2'$，过 F_2 作辅助光线 2′ 平行于1′，则过光具组Ⅱ后的共轭光线 2″与 1″必交于 $\mathscr{F}_2'$ 上一点。光线 1 与光线 1″的交点决定的平面 $\mathscr{H}'$ 即为联合光具组的象方主面，光线 1″与光轴的交点 F' 即为联合光具组的象方焦点。

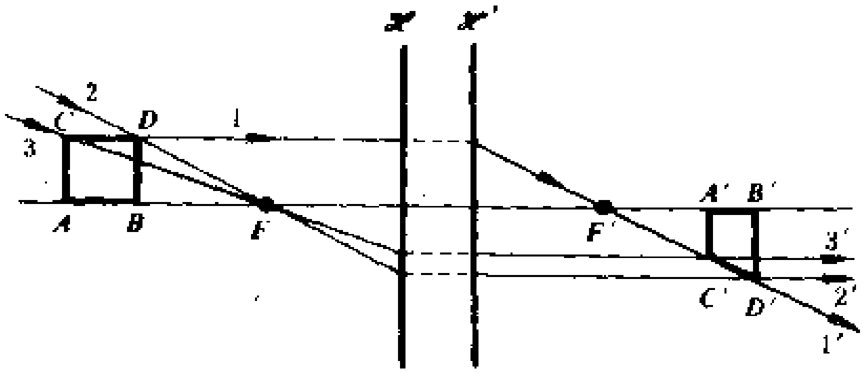
（3） 令光线从右到左入射，作光线 3 平行光轴，则过光具组Ⅱ后的共轭光线 3′必过 F_2；

（4） 过 F_1 作光具组Ⅰ的物方焦面 $\mathscr{F}_1$（相对于入射线从右到左时为象方焦面），过 F_1' 作辅助光线4′平行于3′，则过光具组Ⅰ后的共轭光线4″与3″必交于 $\mathscr{F}_1$ 上一点。光线 3 与3″的交点决定的平面 $\mathscr{H}$ 即为联合光具组的物方主面，光线 3″与光轴的交点 F 即为联合光具组的物方焦点。

4． 如图所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求正方

形 $ABCD$ 的象。

解 如附图所示，作图得 $A'B'C'D'$ 为正方形 $ABCD$ 的象。



题 4 图

5. （1）试用公式计算冉斯登目镜（f_1：f_2：d = 1∶1∶1）的主面和焦点的位置；

（2）试用公式计算改进型冉斯登目镜（f_1：f_2：d = 1∶1∶2/3）的主面和焦点位置。

解 （1）按题意可令

$$f_1 = f_1' = f_2 = f_2' = d$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -d$$

由光具组联合公式得目镜焦距

$$f = f' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = d$$

主面位置

$$x_H = x_H' = f_1 \frac{d}{\Delta} = -d$$

即 $\mathscr{H}$ 在向场镜 L_1 之右 d 处，正好与接目镜 L_2 重合。$\mathscr{H}'$ 在 L_2 之左 d 处，正好与透镜 L_1 重合。同时焦点 F、F' 也正好落在两个透镜的光心位置。这些结果与精确绘图所得结果是一致的。

（2）可令

$$f_1 = f_1' = f_2 = f_2' = \frac{3}{2}d$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -2d$$

因此

$$x_H = x_H' = -\frac{3}{4}d$$

$$f = f' = \frac{9}{8}d$$

即$\mathscr{H}$在L_1之右$3d/4$处，$\mathscr{H}'$在L_2之左$3d/4$处；F在$\mathscr{H}$之左$9d/8$处，F'在$\mathscr{H}'$之右$9d/8$处，这与精确作图所得结果一致。

6. 求下列厚透镜的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃的折射率为1.500，两界面顶点间的距离为1.00 cm，透镜放在空气中。

序　号	形　　状	r_1 (cm)	r_2 (cm)
(1)	双　凸	10.0	10.0
(2)	凸　凹	10.0	20.0
(3)	凹　凸	−15.0	20.0

解 厚透镜是两个折射球面组成的光具组。在傍轴条件下，这两个折射球面能很好成象，且主点H_1、H_1'和H_2，H_2'分别与前后两个球面的顶点重合。设前后两个折射球面的焦距分别为f_1，f_1'和f_2，f_2'。取空气的折射率为$n_0 = 1.00$，则

(1)
$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = 20.0\,\text{cm}$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = 30.0\,\text{cm}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = 30.0\,\text{cm}$$

$$f_2' = \frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = 20.0\,\text{cm}$$

两个折射面的光学间隔

$$\Delta = \overline{F_1'F_2} = d - f_1' - f_2 = -59.0\ \text{cm}$$

利用理想光具组的联合公式，得厚透镜系统的焦距为

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = 10.2\ \text{cm}$$

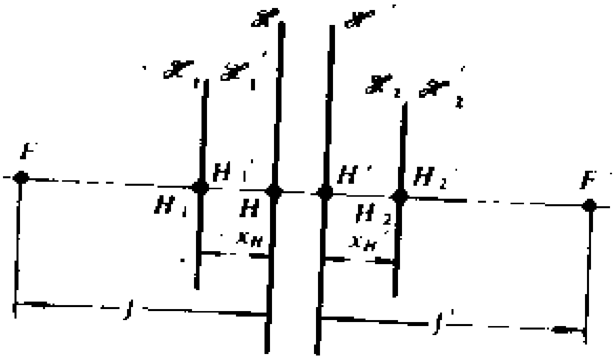
$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 10.2\ \text{cm}$$

主点位置

$$x_H = \overline{H_1 H} = f_1 \frac{d}{\Delta} = -0.34\text{cm}$$

$$x_{H'} = \overline{H_2' H'} = f_2' \frac{d}{\Delta} = -0.34\text{cm}$$

即物方主面$\mathscr{H}$在H_1之右0.34 cm处，象方主面$\mathscr{H}'$在H_2'之左0.34 cm处。物方焦点F在物方主点H之左10.2 cm处，象方焦点F'在象方主点H'之右10.2 cm处，如附图（a）所示。



题 6 图（a）

（2）

$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = 20.0\ \text{cm}$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = 30.0\ \text{cm}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = -60.0\ \text{cm}$$

$$f_2' = \frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = -40.0\ \text{cm}$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = 31.0\ \text{cm}$$

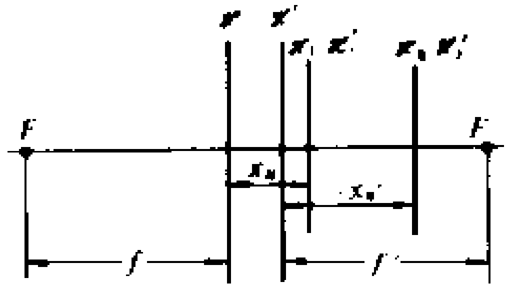
因此

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = 38.7\ \text{cm}$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 38.7\ \mathrm{cm}$$

$$x_H = f_1 \frac{d}{\Delta} = 0.65\ \mathrm{cm}$$

$$x_{H'} = -f_2' \frac{d}{\Delta} = 1.29\ \mathrm{cm}$$



题 6 图（b）

主面、焦点位置如图（b）所示。

（3）

$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = -30.0\ \mathrm{cm}$$

$$f_1' = -\frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = -45.0\ \mathrm{cm}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = 60.0\ \mathrm{cm}$$

$$f_2' = -\frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = 40.0\ \mathrm{cm}$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -14.0\ \mathrm{cm}$$

因此

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = -128.6\ \mathrm{cm}$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 128.6\ \mathrm{cm}$$

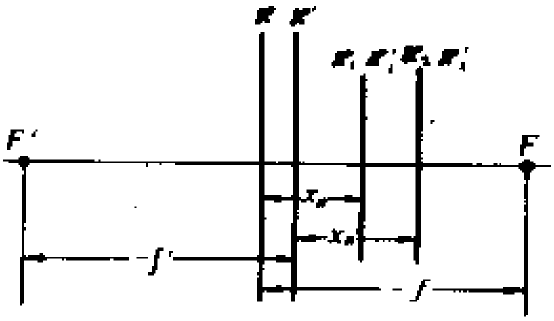
$$x_H = f_1 \frac{d}{\Delta} = 2.14\ \mathrm{cm}$$

$$x_{H'} = f_2' \frac{d}{\Delta} = -2.86\ \mathrm{cm}$$

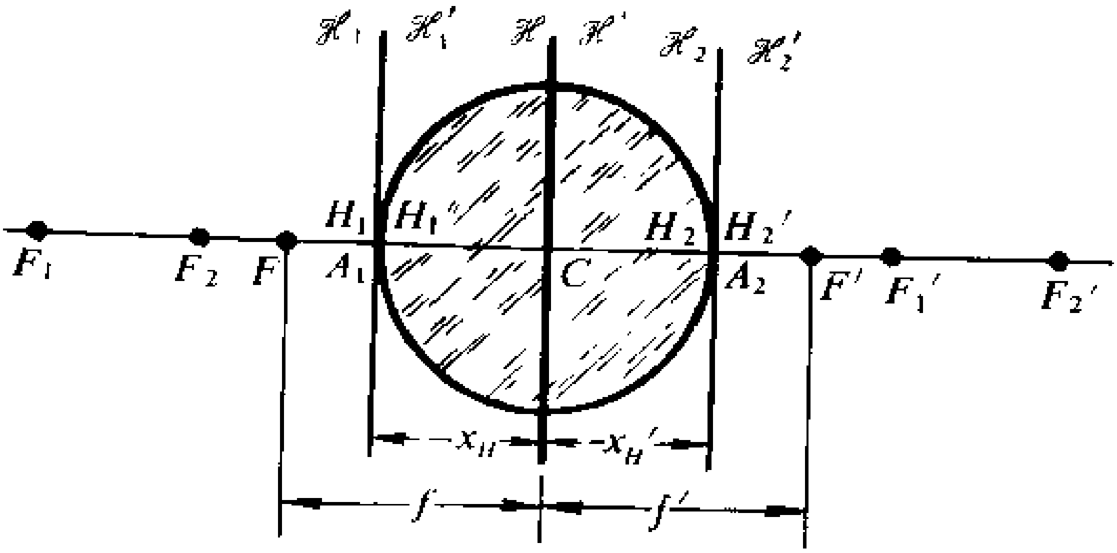
主面、焦点位置如图（c）所示。

7. 求放在空气中玻璃球的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃球的半径为2.00 cm，折射率为1.500。

解 在傍轴条件下，玻璃球是由两个折射成象球面组成的共轴光具组。如图所示 H_1，H_1' 与 A_1 重合，H_2，H_2' 与 A_2 重合，且 $r_1 = \overline{A_1C} = 2.00\ \text{cm}$，$r_2 = -\overline{CA_2} = -2.00\ \text{cm}$。先求出单球面的焦距分别为



题 6 图（c）



题 7 图

$$f_1 = 4.00\ \text{cm}$$
$$f_1' = 6.00\ \text{cm}$$
$$f_2 = 6.00\ \text{cm}$$
$$f_2' = 4.00\ \text{cm}$$

而且

$$\Delta = -\overline{F_1'F_2} = -8.00\ \text{cm}$$
$$d = \overline{A_1A_2} = 4.00\ \text{cm}$$

因此

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = 3.00\ \text{cm}$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 3.00\ \text{cm}$$

$$x_H = f_1\frac{d}{\Delta} = -2.00\ \text{cm}$$

$$x_H' = f_2'\frac{d}{\Delta} = 2.00\ \text{cm}$$

即$\mathscr{H}$在 A_1 之右2.00cm处，$\mathscr{H}'$在 A_2之左2.00 cm处。F在 A_1之左1.00 cm处，F'在 A_2之右1.00 cm处，其位置分别标于附图。由此可见H和H'重合，均在球心C处。

8. 上题中玻璃球面上有一斑点，计算从另一侧观察此斑点象的位置和放大率，并用作图法验证之。

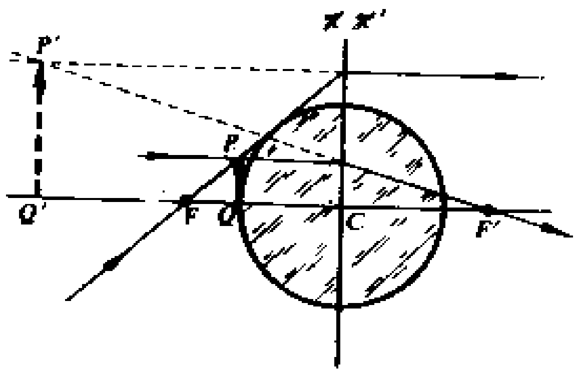
解 把玻璃球看作一个光具组。根据上题的结果，按题意物距 $s = 2.00$ cm 。代入高斯公式得象距

$$s' = 6.00\ \text{cm}$$

放大率为

$$V = -\frac{s'}{s} = 3.00$$

作图法验证如图。



题 8 图

9. （1）如图所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求光线 1 的共轭线；

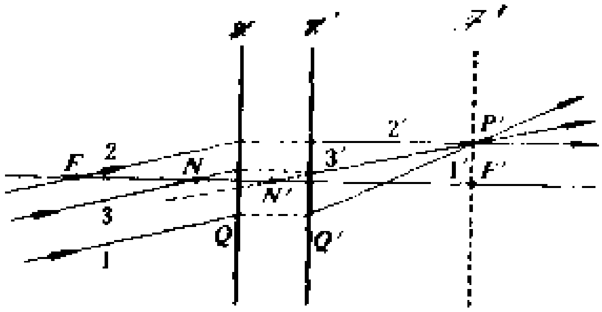
（2）在图上标出光具组节点N，N'的位置。

解 如图所示，先过 F'作象方焦面$\mathscr{F}'$。

（1）过F作光线 2 平行于光线 1，则光线 2 的共轭光线 2′与光线 1 的共轭光线1′必交于$\mathscr{F}'$上某一点 P'。入射线 1 与$\mathscr{H}$面交点为Q，在$\mathscr{H}'$面上取等高点Q'，则连接Q'，P'的光线 1′便是光

线1的共轭光线。

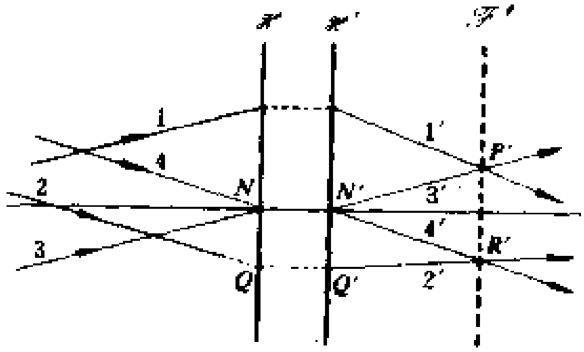
（2）如图所示，过P'点作平行于光线2的光线3′与光轴相交一点，即为象方节点N'，再作3′的共轭光线3，它与光轴的交点即为物方节点N。



题9图

10. 如图所示，已知光具组的主面和节点，1—1′是一对共轭光线，求光线2的共轭光线。

解 如图所示，先找系统的后焦面。为此，过N点作光线3平行1，其共轭光线3′过N'点且与光线3平行，3′与1′的交点P'必在焦面$\mathscr{F}'$之中。作光线4平行2，其共轭光线4′与$\mathscr{F}'$面交于R'点。入射光线2交$\mathscr{H}$面于Q，在$\mathscr{H}'$面上取等高点Q'。那么，连接Q'，R'的光线2′必定是入射光线2的共轭光线。



题10图

***11.** 对一光具组，测得当物距改变Δx时，象距改变$\Delta x'$，同时横向放大率由V_1变到V_2，试证明此光具组的焦距为

$$f=\frac{\Delta x}{\dfrac{1}{V_1}-\dfrac{1}{V_2}},\quad f'=\frac{\Delta x'}{V_1-V_2}$$

（这里提供了一种测焦距的方法，它与测焦点位置的方法配合起

来，可以确定光具组的主面）。

证 由横向放大率公式

$$V=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}$$

得
$$V_1=-\frac{f}{x_1}=-\frac{x_1'}{f'}\quad,\ V_2=-\frac{f}{x_1+\Delta x}=-\frac{x_1'+\Delta x'}{f'}$$

所以

$$\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}=-\frac{\Delta x}{f}\quad,\qquad V_2-V_1=-\frac{\Delta x'}{f'}$$

即
$$f=\frac{\Delta x}{\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}},\qquad f'=\frac{\Delta x'}{V_1-V_2}$$

应注意上述两个公式中的 Δx，$\Delta x'$ 是含有正负号的，实验时应按标尺的同一方向为坐标来读数。

§8 光学仪器

1．一架幻灯机的投影镜头焦距为7.5 cm，当幕由 8m 移至10m 远时，镜头需移动多少距离？

解 由物象距关系的牛顿公式

$$x_1=\frac{f^2}{x_1'},\quad x_2=\frac{f^2}{x_2'}$$

得物位移量 Δx 与象位移量 $\Delta x'$ 的关系为

$$\Delta x=x_2-x_1=-\frac{\Delta x'}{x_2'x_1'}f^2$$

考虑到投影系统的特点是象距远远大于焦距，取近似

$$x_1'\approx s_1'=8\text{ m}$$

$$x_2'\approx s_2'=10\text{m}$$

则
$$\Delta x'=x_2'-x_1'\approx s_2'-s_1'=2\text{m}$$

所以
$$\Delta x=-0.014\text{ cm}$$

即投影镜头应移近画片0.014 cm。

2． 某照相机可拍摄物体的最近距离为1 m，装上2屈光度的近拍镜后，能拍摄的最近距离为多少？（假设近拍镜与照相机镜头是密接的。）

解 用二次成象概念分析，在象平面（底板最远位置）不变的条件下，先后两次的物象关系应当是：相对近拍镜来说，近拍物距s所对应的象距正是无近拍镜时的近拍距离s'，按题意$s' = -1$m，$P = 2\ \mathrm{m}^{-1}$。由高斯公式得

$$s = -\frac{s'}{Ps'-1} = \frac{1}{3}\mathrm{m}$$

***3．** 某人对2.5 m以外的物看不清，需配多少度的眼镜？另一个人对1 m以内的物看不清，需配怎样的眼镜？

解 对2.5 m以外的物看不清者，其远点在2.5 m远处，当为近视眼，应配发散镜，使无穷远之物成象于2.5 m处，这相当于此发散镜的焦距为

$$f_1 = -2.5\ \mathrm{m}$$

商品度数为

$$P_1 = \frac{1}{f_1} = -0.4\text{屈光度} = -40\text{度}$$

对1 m以内物看不清者，即其近点在1 m处，当为远视眼，应配会聚镜，使明视距离0.25m之物成象于1m处。由高斯公式算出

$$f_2 = \frac{1}{3}\mathrm{m}$$

商品度数为

$$P_2 = \frac{1}{f_2} = 3\text{屈光度} = 300\text{度}$$

***4．** 计算2×，3×，5×，10×放大镜或目镜的焦深。

解 放大镜（或目镜）的工作距离是要使得物体处在第一焦点附近稍靠里一些的小范围内，这样才能形成一个明视距离s'_0以

远的放大虚象供正常人眼观察。所谓“焦深”就是指的上述小范围的纵向间隔 Δx；此值也正是与明视距离相对应的物距。令象距 $x' = -(S_0 + f)$，由牛顿公式得

$$x = -\frac{f^2}{x'} = -\frac{f^2}{s_0 + f}$$

须知视角放大率 $M = s_0/f$，替换上式中的焦距 f 得

$$x = -\frac{s_0}{M(M+1)}$$

焦深

$$\Delta x = |x| = \frac{s_0}{M(M+1)}$$

由此算出

$$M = 2\times, \quad \Delta x = 4.17\,\text{cm}$$
$$M = 3\times, \quad \Delta x = 2.08\,\text{cm}$$
$$M = 5\times, \quad \Delta x = 0.83\,\text{cm}$$
$$M = 10\times, \quad \Delta x = 0.23\,\text{cm}$$

由此可见，高倍放大镜或目镜的焦距很短，焦深也随之缩短，要求实验调节更要精细。

5. 一架显微镜，物镜焦距为 4 mm，中间象成在物镜象方焦点后面160 mm处，如果目镜是20×的，显微镜的总放大率是多少？

解 物镜的横向放大率为

$$V_0 = -\frac{x_0'}{f_0} = -\frac{160}{4} = -40$$

显微镜的总放大率为

$$M = V_0 M_E = -40 \times 20 = -800$$

6. 一架显微镜的物镜和目镜相距20.0cm，物镜焦距7.0mm，目镜焦距5.0mm。把物镜和目镜都看成是薄透镜，求：

（1）被观察物到物镜的距离；

（2） 物镜的横向放大率；

（3） 显微镜的总放大率；

（4） 焦深。

解 （1） 显微镜的工作距离应使小物成放大的实象（中间象）于目镜第一焦点附近（靠里一些），故按题意此显微镜中间象对物镜的距离为

$$s'_o = 200 - 5.0 = 195\text{mm}$$

由高斯公式求得小物到物镜的距离为

$$s_o = 7.3\text{mm}\ 。$$

（2） 物镜的横向放大率为

$$V_o = -\frac{s'_o}{s_o} = -26.7 \approx -27倍$$

（3） 显微镜的总（角）放大率可取物镜横向（线）放大率与目镜（角）放大率之乘积，而目镜的（角）放大率 M_e 等于明视距离除以目镜焦距。

$$M_e = \frac{250}{5} = 50倍$$

所以

$$M = V_o M_e = (-26.7) \times 50 = -1335倍$$

（4） 目镜的焦深（参见4题解）为

$$\Delta x_e = \frac{250\ \text{mm}}{M_e(M_e+1)} \approx 0.1\text{mm}$$

与此相应的物镜焦深可通过牛顿公式微分运算（取绝对值）求得

$$x_o x'_o = f_o^2$$

$$\Delta x_o = \frac{f_o^2}{x_o'^2}\Delta x'_o = \frac{f_o^2}{x_o'^2}\Delta x_e$$

以 $f_o = 7$ mm，$\Delta x_e = 0.1$ mm，$x'_o = s'_o - f_o = 188$ mm代入算出

$$\Delta x_o = 0.0001\text{mm}$$

焦深几乎为零，这说明在目镜位置（相对镜筒）固定的情况下，

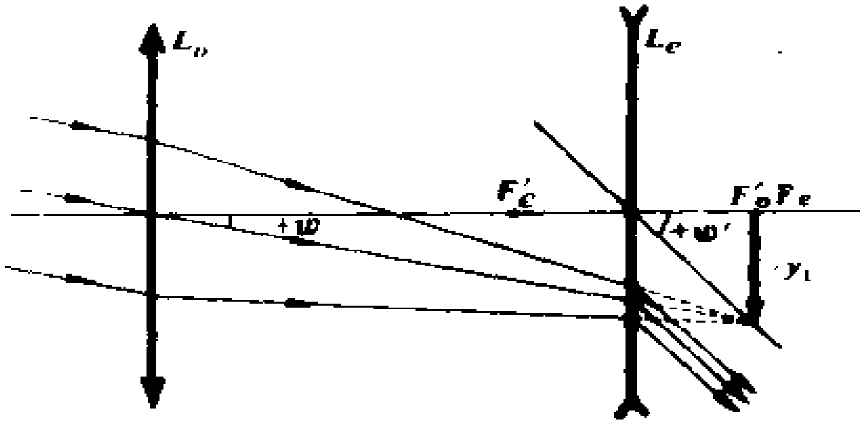
显微镜的工作距离（物镜头与小物之间的距离）被严格确定，几乎没有什么调节余地。

7． 物镜、目镜皆为会聚的望远镜称为开普勒望远镜；物镜会聚而目镜发散的望远镜称为伽里略望远镜．

（1） 画出伽里略望远镜的光路；

（2） 伽里略型望远镜的物镜和目镜相距12cm．若望远镜的放大率为 4 ×，物镜和目镜的焦距各为多少？

解 （1） 伽里略型望远镜的光路如附图所示．



题 7 图

（2） 望远镜的角放大率

$$M = -\frac{f_o}{f_e}$$

再考虑到筒长

$$d = f_o + f_e$$

解得

$$f_o = \frac{M}{M-1}d$$

$$f_e = -\frac{d}{M-1}$$

以 $M = +4$，$d = 12$ cm 代入算出此望远镜物镜和目镜的焦距分别为

$$f_o = 16\text{cm}，f_e = -4\text{cm}$$

8． 拟制一个 3 × 的望远镜，已有一个焦距为50 cm 的物镜，问在（1）开普勒型（2）伽里略型中目镜的光焦度以及物镜、目镜的距离各为多少？

解 （1）按题意在开普勒型望远镜中应取 $M = -3$，由物镜焦距 $f_o = +50$ cm 可以算出目镜焦距

$$f_e = \frac{f_o}{M} = 17 \text{ cm}$$

焦度

$$P_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{0.17 \text{ m}} = +6 \text{ 屈光度}$$

望远筒长

$$d = 50 + 17 = 67 \text{ cm}$$

（2）按题意在伽里略型望远镜中应取 $M = +3$，由此算出

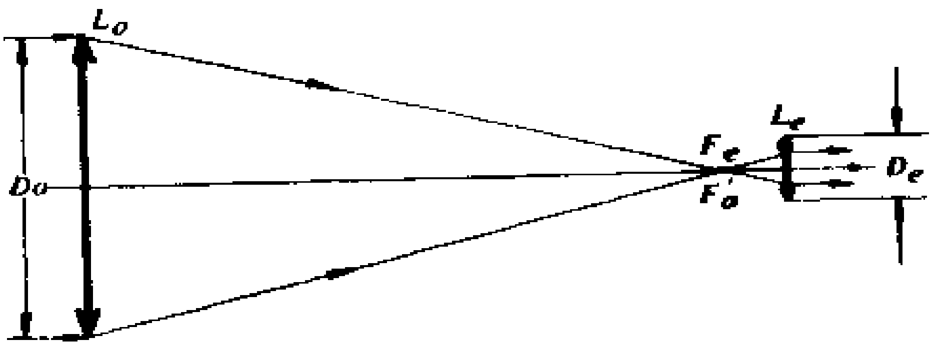
$$f_e = -17 \text{ cm}$$

$$P_e = -6 \text{ 屈光度}$$

$$d = 50 + (-17) = 33 \text{ cm}$$

§9 光 阑

1． 一望远镜的物镜直径为5.0 cm，焦距为20 cm，目镜直径为1.0cm,焦距为2.0 cm．，求此望远镜的入射光瞳和出射光瞳的位置和大小。



题 1 图

解 如图所示，由几何关系易得孔径光阑即为物镜L_o的边框。所以入射光瞳即为物镜本身。出射光瞳为物镜对目镜在象方的共轭象。由高斯公式得

$$-\frac{1}{s_e'}+\frac{1}{22}=-\frac{1}{2.0}$$

解得

$$s_e'=2.2\ \text{cm}$$

即出射光瞳的位置在目镜后2.2cm处。由横向放大率公式

$$V_e=-\frac{s_e'}{s_e}=-\frac{2.2}{22}=-0.1$$

所以出射光瞳的直径为

$$D'=D_o\left|V_e\right|=5.0\times0.1=0.5\,\text{cm}=5.0\,\text{mm}$$

*2. 望远镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明出射光瞳直径D'与物镜直径D_o之关系为

$$D'=\frac{D_o}{|M|}$$

式中$M=-\frac{f_o}{f_e}$是望远镜的视角放大率

解 （1）出射光瞳为物镜（孔径光阑）对目镜所成的象，此时物距$s=f_o+f_e$，由高斯公式求得象距（出射光瞳与目镜的距离）

$$s'=\left(1+\frac{f_e}{f_o}\right)f_e$$

$$\approx f_e\qquad(f_o\gg f_e)$$

（2）设物镜直径为D_o，出射光瞳直径为D'，在目镜与物镜的前后焦点重合的情况下，由作图法提供的相似三角形的比例关系很容易说明

$$\frac{D_o}{D'}=\frac{f_o}{f_e}$$

又

$$M = -\frac{f_o}{f_e}$$

则得

$$D' = \frac{D_o}{|M|}$$

3． 将望远镜倒过来可作激光扩束之用。设一望远镜的物镜焦距30 cm，目镜焦距1.5 cm，它能使激光束的直径扩大几倍？

解 这时通过望远镜出射光瞳的激光束都能通过入射光瞳，由题 2 可知

$$\frac{D_o}{D'} = |M| = \frac{f_o}{f_e} = 20$$

使用这台倒望远镜时，激光束直径扩大了20倍。

***4．** 显微镜的孔径光阑和入射光瞳通常是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明在傍轴近似下出射光瞳的直径 D' 与入射孔径角 u_0 的关系是

$$D' \approx \frac{2s_0 n u_0}{|M|}$$

式中 $s_0 = 25\text{cm}$ 是明视距离，M 是显微镜的视角放大率，n 是物方折射率。

解 （1）出射光瞳为物镜（孔径光阑）对目镜所成的象，由高斯公式得出射光瞳离目镜的距离（象距）

$$s' = \left(1 + \frac{f_e}{f_o' + \Delta}\right) f_e$$

$$\approx f_e \quad (\Delta \gg f_e)$$

式中 $\Delta = \overline{F_o' F_e}$ 为显微镜的光学筒长。

（2）以物镜为物，目镜的横向放大率为

$$V_e = -\frac{f_e}{f_o' + \Delta}$$

故出射光瞳的直径为

$$D' = V_e D = -\frac{f_e}{f_0' + \Delta} D$$

式中 D 为物镜直径，在傍轴条件下

$$D \approx 2 f_0 u_0$$

改写 D' 为

$$D' = -\frac{f_0 f_e}{f_0' + \Delta} 2 u_0$$

考虑到显微镜总的（角）放大率

$$M = -\frac{s_0 \Delta}{f_0' f_e}$$

再改写 D' 为

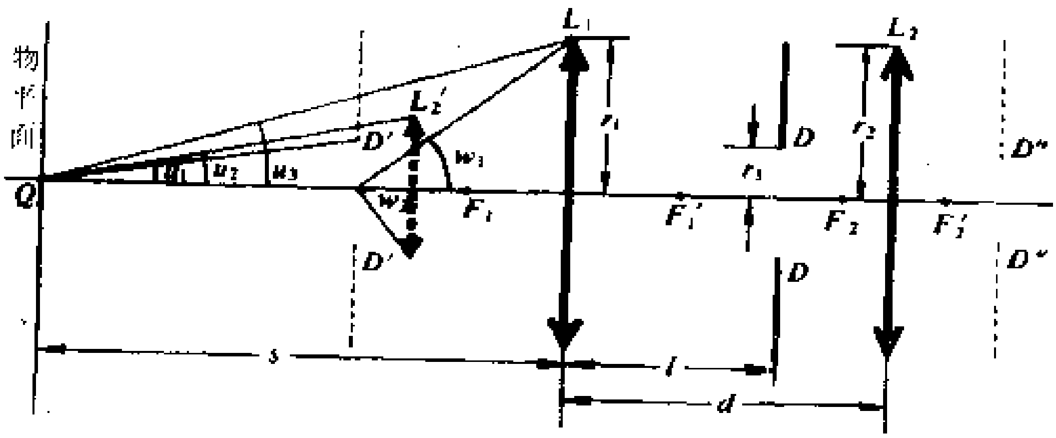
$$D' = \frac{f_0}{f_0'} \frac{\Delta}{f_0' + \Delta} \frac{2 s_0 u_0}{M}$$

考虑到

$$\frac{f_0}{f_0'} = n, \quad \frac{\Delta}{f_0' + \Delta} \approx 1$$

最后得

$$D' \approx \frac{2 n s_0 u_0}{M}$$



题 5 图

凡是显微镜中的问题，应注意到它的特点是短焦距，筒长远远大于焦距值；它工作于齐明点时，对物镜来说满足阿贝正弦条件。

5． 附图中 L_1，L_2 是两个会聚透镜，Q 是物点，DD 是光阑，已知焦距 $f_1=2a$，$f_2=a$，图中标示各距离为 $s=10a$，$l=4a$，$d=6a$，此外透镜与光阑半径之比是 $r_1=r_2=3r_3$，求此光具组的孔径光阑、入射光瞳、出射光瞳、入射窗和视场光阑的位置和大小。

解 （1）确定孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳。

先将 DD 对 L_1 成象到系统物空间去。这时 $s=l=4a$，求得

$$s'=\frac{sf_1}{s-f_1}=\frac{4a\times 2a}{4a-2a}=4a$$

$$V=-\frac{s'}{s}=-\frac{4a}{4a}=-1$$

$$r_3'=r_3\left|V\right|=r_3$$

式中 r_3' 为 DD 的象 $D'D'$ 的半径（如图）。

再将 L_2 对 L_1 成象到系统的物空间去。这时 $s=d=6a$，求得

$$s'=\frac{sf_1}{s-f_1}=\frac{6a\times 2a}{6a-2a}=3a$$

$$V=-\frac{s'}{s}=-\frac{3a}{6a}=-\frac{1}{2}$$

$$r_2'=r_2\left|V\right|=\frac{1}{2}r_2=\frac{3}{2}r_3$$

式中 r_2' 为 L_2 的象 L_2'（如图）的半径。

现在比较 $D'D'$，L_2'，L_1 对轴上物点 Q 的张角 u_1，u_2，u_3 的大小：

$$\operatorname{tg}u_1=\frac{r_3'}{10a-4a}=\frac{1}{6}\frac{r_3}{a}$$

$$\operatorname{tg}u_2=\frac{r_2'}{10a-3a}=\frac{3}{14}\frac{r_3}{a}$$

$$\operatorname{tg} u_3 = \frac{r_1}{10a} = \frac{3}{10}\,\frac{r_3}{a}$$

可见$u_1 > u_2 > u_3$。因此光阑DD为孔径光阑，它在物空间的象$D'D'$即为入射光瞳，位置在L_1之左$4a$处，大小与DD一样。

把DD对L_2成象到系统的象空间去，即得出射光瞳$D''D''$（如图）。这时$s = d - l = 2a$，求得

$$s' = \frac{s f_2}{s - f_2} = \frac{2a \times a}{2a - a} = 2a$$

$$V = -\frac{s'}{s} = -\frac{2a}{2a} = -1$$

$$r_3'' = r_3 \left| V \right| = r_3$$

式中r_3''为$D''D''$的半径。出射光瞳在L_2之右$2a$处，大小与DD一样。

（2）确定视场光阑和入射窗。

比较L_1和L_2'对入瞳$D'D'$中心的张角ω_1, ω_2（如图）的大小：

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{r_1}{4a} = \frac{3}{4}\,\frac{r_3}{a}$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \frac{r_2'}{4a - 3a} = \frac{3}{2}\,\frac{r_3}{a}$$

$\omega_1 < \omega_2$，所以L_1的边框即为视场光阑，并兼为入射窗。

6．惠更斯目镜的结构如附图所示。（用理想光具组的联合公式可以证明系统的物方焦点F在向场镜L_1之右$1.5a$处，物平面在F内侧附近。）今在两透镜间放一光阑AA，设透镜L_1、L_2和光阑的直径分别为D_1，D_2和D。证试：

（1）向场镜L_1成为孔径光阑的条件是

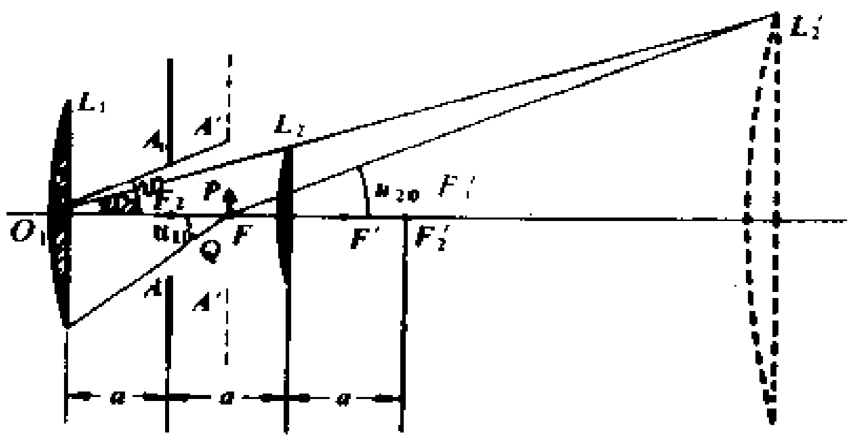
$$D_1 < D_2$$

（2）光阑AA成为视场光阑的条件是

$$D < \frac{1}{2} D_2$$

（3）这时对F_2'点计算的出射孔径角u_0'由下式确定：

$$\operatorname{tg} u_0' = D_1 / 2a$$



题 6 图

证 要确定光学系统的孔径光阑，必须首先将所有光学元件对物方成象，并确定这些象的孔径线度；然后明确物点的位置，须知对不同物点来说，谁是孔径光阑将可能发生变化。要确定系统的视场光阑，就应当在上述确定孔径光阑的基础上，再以入射光瞳中心为顶点向物平面横扫，看谁在物方的（象面）孔径对横向范围限制最厉害，它就是视场光阑。

（1）为确定孔径光阑，需把 AA 和 L_2 的边框通过 L_1 属于物方空间的象 $A'A'$ 和 L_2' 求出。由高斯公式可以求得 $A'A'$ 正好与物平面重合，如图所示，因此 AA 不可能为孔径光阑。现以物点 Q 为顶点，向场镜 L_1 所张的角为

$$u_{10} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{D_1}{2\times1.5a} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{D_1}{3a}$$

接目镜 L_2 在物方共轭 L_2' 所张的角为

$$u_{20} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{D_2'}{2(s_2'-1.5a)}$$

式中 s_2' 是 L_2' 对 L_1 的象距绝对值、D_2' 为 L_2' 的孔径。由高斯公式和横向放大率公式算得 $s_2' = 6a$，$D_2' = 3D_2$，所以

$$u_{20} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{D_2}{3a}$$

由此可见，要使向场镜成为孔径光阑，必须满足

$$D_1 < D_2$$

（2）如图，若惠更斯目镜的向场镜 L_1 是孔径光阑，则同时也是入射光瞳。以 O_1 为顶点，AA 或 $A'A'$ 所张的角设为 ω、L_2 或 L_2' 所张的角设为 ω_2，则

$$D_2 > 2D\text{时，}\ \omega_2 > \omega$$

$$D_2 = 2D\text{时，}\ \omega_2 = \omega$$

$$D_2 < 2D\text{时，}\ \omega_2 < \omega$$

所以，AA 为视场光阑的条件是

$$D < \frac{1}{2}D_2$$

（3）这里所谓的"出射孔径角"是指出射光瞳对 F_2' 所张的角 u_0'，为此首先确定孔径光阑 L_1 在象方共轭 L_1' 的纵向位置和横向孔径。据题意，对 L_2 来说焦距 $f_2' = a$，物距 $s = 2a$，算出此时象距 $s' = 2a$，$x' = a$，横向放大率 $V = -1$，即 L_1' 的孔径 $D_1' = VD_1 = -D_1$，所以

$$\operatorname{tg} u_0' = \left|\frac{D_1'}{2x'}\right|$$

$$= D_1/2a$$

* 7． 试用两个薄透镜组装一台简易的望远镜，要求：

（1）该望远镜能分辨100m远物面上1mm间隔的两条刻线；

（2）镜筒长度（指物镜与目镜之间的距离）为62cm。

试求：

（1）物镜的口径应选多大？

（2）物镜焦距与目镜焦距应选多长？

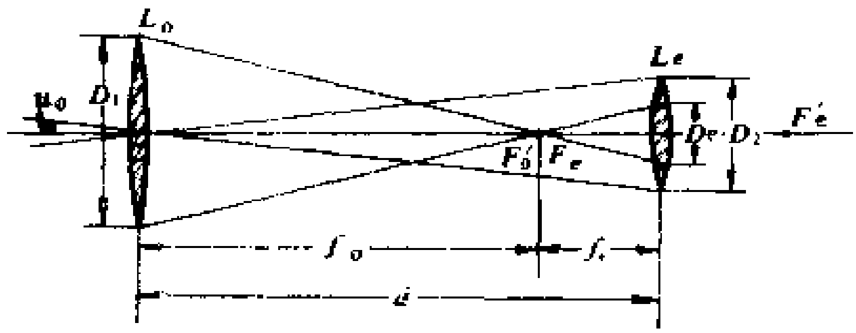
（3）指明这台望远镜的出射光瞳的位置；

（4）当目镜口径选为3 cm时，这台望远镜的入射视场角为多少？

解 简易望远镜光路如图所示。

（1）按题意应要求此望远镜的最小分辨角为

联立解出



题 7 图

$$\delta\theta_m = \frac{1\ \text{mm}}{10^5\ \text{mm}} = 10^{-5}\text{rad}\ （弧度）$$

根据望远镜分辨角公式

$$\delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

物镜口径应不小于

$$D_o = 1.22\frac{\lambda}{\delta\theta_m} = 1.22\frac{0.55\,\mu\text{m}}{10^{-5}}$$

$$= 6.7\ \text{cm}$$

（2）考虑到眼睛的最小分辨角为

$$\delta\theta_e = 1' \approx 3\times10^{-4}\text{rad}$$

应使望远镜的视角放大率满足

$$M = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m} = 30倍$$

此为正常放大率值，而放大率与焦距的关系为

$$M = \frac{f_o}{f_e} = 30$$

又

$$f_o + f_e = 62\,\text{cm}$$

联立解出

$$f_o = 60\text{cm}$$

$$f_e = 2\ \text{cm}$$

（3）望远镜的孔径光阑就是物镜口径本身，它对目镜（短焦距）来说为远物，所以物镜在象方的象位于目镜后焦点F_2'附近，此为出射光瞳位置所在。于是目镜口径便是视场光阑，也是出射窗。它对物镜中心所张的角u_0就是入射视场角，u_0角由下式决定：

$$u_0=\mathrm{tg}^{-1}\frac{D_2}{2d}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{41}\approx 0.024\ \mathrm{rad}=1^\circ 23'$$

§10　象　差

***1．**　阿贝正弦条件

$$ny\sin u=n'y'\sin u'$$

与理想光具组理论中的亥姆霍兹公式

$$ny\,\mathrm{tg}\,u=n'y'\,\mathrm{tg}\,u'$$

是否矛盾？这说明了什么？并证明一对齐明点附近不可能有另一对齐明点。

证　我们知道，齐明点满足的阿贝正弦条件为

$$ny\sin u=n'y'\sin u'$$

或

$$\frac{\sin u'}{\sin u}=\frac{ny}{n'y'}=\frac{fy}{f'y'}=C\quad（常数）$$

而理想光具组理论中的亥姆霍兹公式（正切条件）为

$$ny\,\mathrm{tg}\,u=n'y'\,\mathrm{tg}\,u'$$

或

$$\frac{\mathrm{tg}\,u'}{\mathrm{tg}\,u}=\frac{ny}{n'y'}=\frac{fy}{f'y'}=C\quad（常数）$$

在出射角u变化的情况下，如果要同时满足以上两式，势必

$$\frac{\sin u'}{\sin u}=\frac{\mathrm{tg}\,u'}{\mathrm{tg}\,u}$$

于是得

$$\frac{\cos u'}{\cos u}=1$$

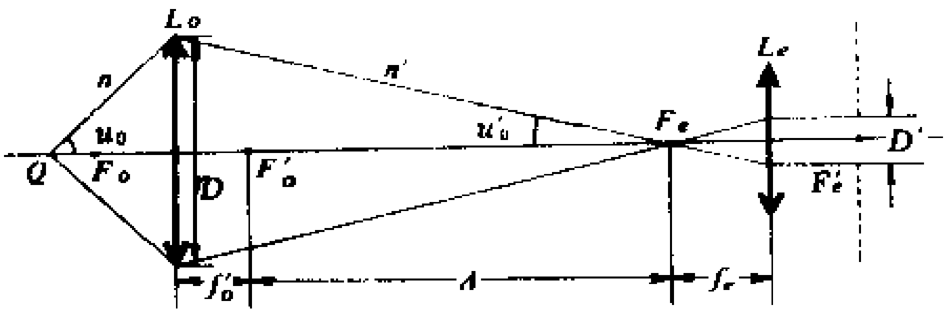
其解　　　　$u' = u$

是唯一的，这正是平面镜的情况。除此之外的一般情况是 $u' \neq u$，则正弦条件和正切条件是不能同时满足的。在此我们还必须进一步弄清楚两个问题：在两者之中究竟是哪一个在物理上得以实现？两者不能同时实现说明了什么？须知，理想光具组的一整套理论是纯几何理论，它不涉及物理上是否得以实现的可能性。而齐明点满足的阿贝正弦条件是由折射定律出发如实分析而得到的。换句话说，对于共轴球面系统来说，确实可以找到一对共轭点（齐明点）满足阿贝正弦条件，从而在消除球差的基础上同时消除了彗差，使傍轴小物宽光束很好地成象。此时正切条件不被满足。

既然正切条件是理想光具组点点宽光束理想成象的必要条件之一，也必定是傍轴小物理想成象的必要条件之一。而正弦条件的成立使这一条件不被满足，这意味着对共轴球面系统来说，沿纵向（光轴）各点都做到傍轴小物很好成象是不可能的。如果在一对齐明点附近又能导出另一对齐明点，那么利用递推法就能导出纵向各点都能使傍轴小物很好成象。根据以上逻辑这是做不到的。

*2． 试证明，显微镜出射光瞳直径 D' 由下式决定：

$$D' = \frac{2s_0 n\sin u_0}{|M|} = 2s_0\frac{N.A.}{|M|}$$



题 2 图

即 D' 正比于数值孔径 $N.A. = n\sin u_0$，反比于视角放大率 M。（$s_0 = 25$cm，是明视距离。）

证　如附图所示，显微镜的特点是 $\Delta \gg f'_o, f_e$，小物位于 F_o

点附近齐明点时对物镜来说满足阿贝正弦条件，中间象落在 F_e 点附近，出射光瞳在 F_e' 点附近。

据此，由横向放大率公式得

$$D' \approx -\frac{f_e}{f_o'+\Delta}D$$

又由显微镜的视角放大率

$$|M| = \frac{\Delta s_0}{f_o' f_e}$$

得

$$f_e = \frac{\Delta s_0}{f_o'|M|}$$

又

$$D = 2(\Delta + f_o')\,\mathrm{tg}\,u_0' \approx 2(\Delta + f_o')\sin u_0'$$

再由阿贝正弦条件

$$ny\sin u_0 = n'y'\sin u_0'$$

和物镜的横向放大率

$$V_o = \frac{y'}{y} = -\frac{\Delta}{f_o'}$$

得

$$\sin u_0' = \frac{ny\sin u_0}{n'y'} = -\frac{f_o'}{\Delta}\frac{n}{n'}\sin u_0$$

$$= \frac{f_o'}{\Delta}n\sin u_0 \qquad (n'=1)$$

将各式代入 D' 表达式得

$$D' = \left(\frac{-1}{f_o'+\Delta}\right)\left(\frac{\Delta s_0}{f_o'|M|}\right)2(\Delta + f_o')\left(\frac{-f_o'}{\Delta}n\sin u_0\right)$$

$$= 2s_0\frac{n\sin u_0}{|M|}$$

由此可见，出瞳孔径与放大率成反比。显微镜倍率越高，则出瞳

越小，以致小于眼瞳，此时对眼睛来说，其有效入瞳口径就由显微镜的出瞳口径限制，从而降低了眼睛的相对孔径，使象场变暗。

*3. 拟用玻璃K9（$n_D=1.5163$，$n_F=1.5220$，$n_C=1.5139$）和重火石玻璃F4（$n_D=1.6199$，$n_F=1.6321$，$n_C=1.6150$）来做消色差粘合透镜，焦距100 mm，若已确定其负透镜的非粘合面为平面，试求其余各面的曲率半径。

解 联立下列二方程

$$P_D=(n_{1D}-1)k_1+(n_{2D}-1)k_2$$

$$=\frac{1}{100\times10^{-3}}=10.0\text{屈光度}$$

$$P_F-P_C=(n_{1F}-n_{1C})k_1+(n_{2F}-n_{2C})k_2$$

$$=0$$

以 $n_{1D}=1.5163$，$n_{2D}=1.6199$，$n_{1F}=1.5220$，$n_{1C}=1.5139$，$n_{2F}=1.6321$，$n_{2C}=1.6150$代入解得

$$k_1=44.90$$

$$k_2=-21.27$$

即

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=44.90$$

$$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}=-21.27$$

令 $r_4=\infty$，$r_2=r_3$，算出

$$r_1=15.1\ \text{mm}$$

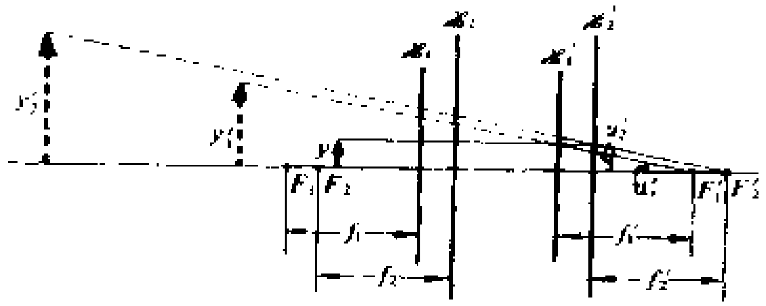
$$r_2=-47.0\ \text{mm}$$

式中 r_1 为正透镜非粘合面曲率半径，r_2为粘合面曲率半径。

*4. 试论证：对助视光学仪器来说，消除焦距色差就能消除视角色差。

证 对薄透镜来说，由于不同波长的主面仍然重合于过透镜光心的平面，所以一旦消除了焦距色差，也必定同时消除了焦点色差。

但是对厚透镜或透镜组来说，由于不同波长的主面并不重合（如图），所以即使消除了焦距色差使 $f_1(\lambda_1)=f_2(\lambda_2)$，两个焦点 F_1 与 F_2，F_1' 与 F_2' 并不重合，从而横向放大率色差和纵向位置色差依然存在。不过，此时两种不同颜色的象虽然大小和位置均不同，但它们各自对后焦点 F_1'、F_2' 所张的角度 u_1'、u_2' 是相等的，这一点从图上看得很清楚。须知对于助视光学仪器来说，出瞳位置正在后焦点附近，此处是眼瞳最佳位置，故 $u_1'=u_2'$ 表明两种颜色的象的视角是相等的，在视网膜上便能很好重叠一致，从而消除了视角色差。



题 4 图

从图中还可以算出，有仪器时的视角

$$\operatorname{tg} u_1'=\operatorname{tg} u_2'=\frac{y}{f_1'}=\frac{y}{f_2'}$$

而无仪器时的视角

$$\operatorname{tg} u_0=\frac{y}{s_0}\quad（s_0\text{ 为明视距离}）$$

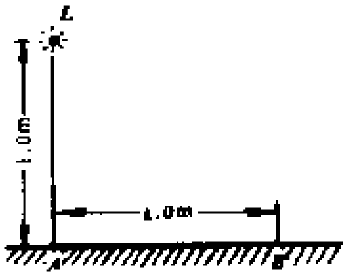
故视角放大率

$$M=\frac{\operatorname{tg} u_1'}{\operatorname{tg} u_0}=\frac{s_0}{f'}$$

与焦点位置无关，仅由焦距决定，只要眼睛置于目镜后焦点附近，上式总是成立的。

§ 11　光度学基本概念

1．　在离桌面1.0m处有盏100坎德拉的电灯L，设L可看作是各向同性的点光源，求桌面上A、B两点的照度（见附图）。



题 1 图

解　按点光源照明时的照度公式

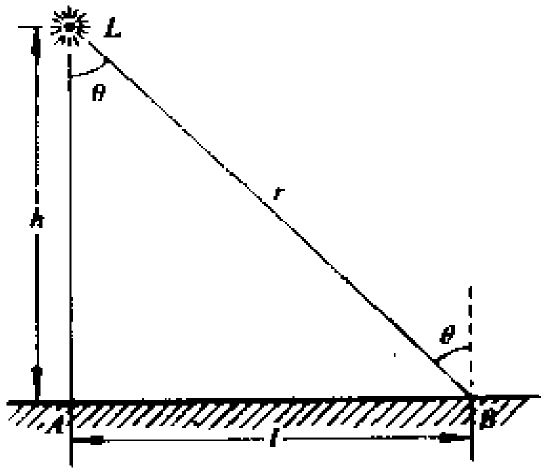
$$E=\frac{I\cos\theta}{r^2}$$

并以$I=100cd$（坎德拉），$\cos\theta_A=\cos 0^\circ=1$，$r_A=1.0\text{m}$，$\cos\theta_B=\cos 45^\circ=1/\sqrt{2}$，$r_B=\sqrt{2}\,r_A$代入分别算出$A$，$B$两点的照度为

$E_A=100\,\text{lx}$（勒克斯）

$E_B=35\,\text{lx}$

2．　若上题中电灯L可以垂直上下移动，问怎样的高度使B点的照度最大。



题 2 图

解　如图，设照明处B与灯泡垂足A的距离为l，灯泡位于不同高度将同时改变距离r和倾角θ，选θ为变量，则$r=l/\sin\theta$，照度公式改写为

$$E=\frac{I\cos\theta}{r^2}=\frac{I}{l^2}\cos\theta\sin^2\theta$$

对上式求导得

$$\frac{dE}{d\theta}=\frac{I}{l^2}\sin\theta(2-3\sin^2\theta)$$

令$\dfrac{dE}{d\theta}=0$，解得

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

则可得

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}}l$$

此时横向固定距离处的照度最大。以 $l=1.0$m 代入得

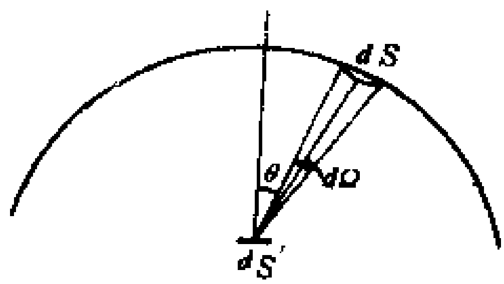
$$h=0.7\,\mathrm{m}$$

* **3．** （1）设天空为亮度均匀的朗伯体，其亮度为 B，试证明，在露天水面上的照度 $E=\pi B$。

（2）在上面的计算中，与我们假设天空是怎样形状的发光面有无关系？与被照射面的位置有无关系？

（3）试证明，一个理想漫射体受到照度为 E 的辐射时，反射光的亮度 $B=E/\pi$。

证 （1）如附图(a)，若天空为朗伯体，由互易关系，亮度为 B 的天空照射在水平面元 dS' 上的光通量 $\Delta\Phi'$ 等于亮度为 B 的面 dS' 发射于整个天空上的光通量 $\Delta\Phi$，于是水平面元的照度为



题 3 图(a)

$$E=\frac{\Delta\Phi'}{dS'}=\frac{\Delta\Phi}{dS'}=\frac{1}{dS'}\iint B\,dS'\cos\theta\,d\Omega$$

$$=\iint B\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

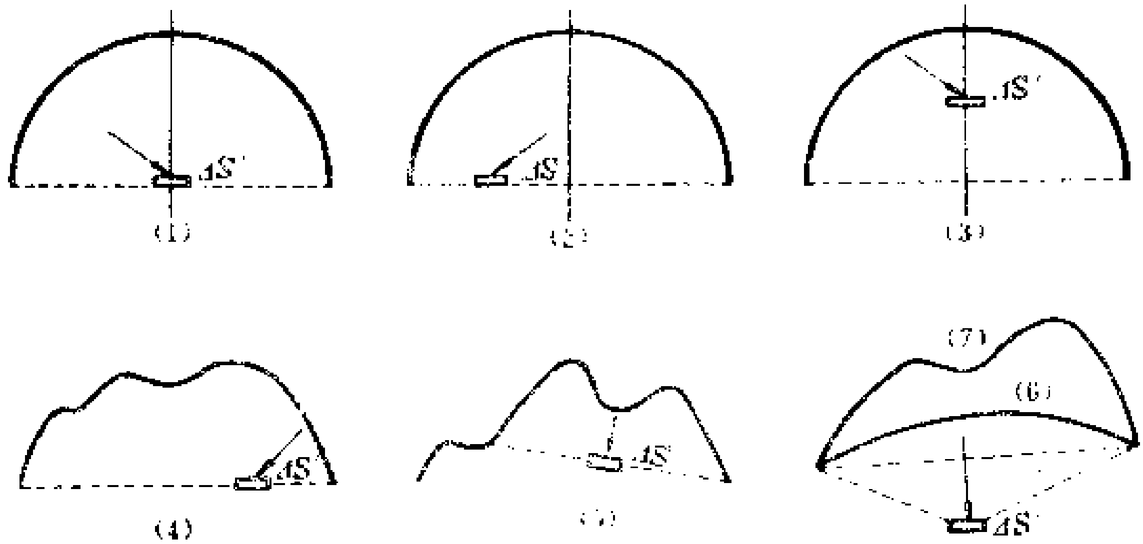
$$=B\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\pi B$$

（2）以上论证表明，面元的照度决定于投射于该面元的总光通量，也就决定于亮度为 B 的假想面元向实际面光源所张立

体角范围内所发射的光通量，显然，这个光通量数值与实际朗伯体的形状无关，而与立体角的大小有关。因此上面的计算结果与天空形状和水平被照面的位置均无关。按这个概念就可以对图(b)几种情况下的照度大小作出正确的判断。结果应当是

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = \pi B \neq E_6 = E_7$$



题3图(b)

(3) 如果引入面发光度的概念，此题更易于证明。对于一个面光源来说，某处 dS 面元向外辐射的总光通量为 $\Delta\Phi$，则定义

$$R = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}$$

为面光源该处的面发光度。对于朗伯体来说，如果亮度为 B，则

$$\Delta\Phi = \iint B\,dS\cos\theta\,d\Omega = B\,dS\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \pi B\,dS$$

所以亮度 B 与面发光度 R 的关系为

$$R = \pi B$$

当然，面光源既可以是真实的发光体，也可以是被照明的反射物。如果忽略吸收，反射物的照度便等于它作为光源的面发光度，即 $R = E$。如果它又是一个漫射体，当作朗伯体处理，则其亮度

$$B = \frac{R}{\pi} = \frac{E}{\pi}$$

4. 阳光垂直照射地面时，照度为1.5×10^5 lx。若认为太阳的亮度与光流方向无关，并忽略大气对光的吸收，且已知地球轨道半径为1.5×10^8 km，太阳的直径为1.4×10^6 km，求太阳的亮度。

解一 设地面的照度为E，地球的轨道半径为z，太阳的半径为r。由球对称性知太阳的总光通量为

$$\Phi = E\,4\pi z^2$$

太阳的面发光度为

$$R = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{E z^2}{r^2}$$

由面发光度与亮度的关系得太阳的亮度为

$$B = \frac{R}{\pi} = \frac{E z^2}{\pi r^2}$$

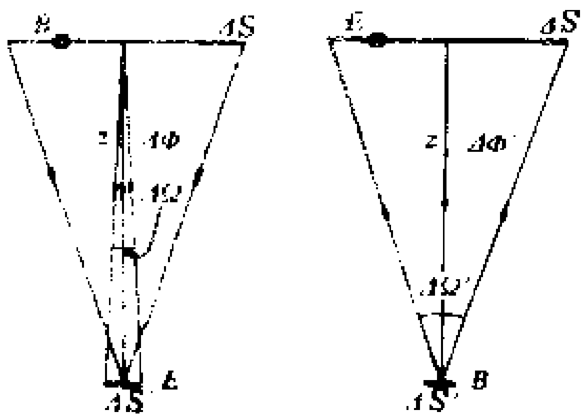
$$= 1.5\times10^9\ \mathrm{lm\cdot m^{-2}\cdot sr^{-1}}\ (\text{流明·米}^{-2}\text{·球面度}^{-1})$$

$$= 1.5\times10^5\ \text{熙提}$$

如果考虑到光功当量为$K_m = 683$ lm/W，则太阳的亮度也可以表示为

$$B = 2.2\times10^6\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot sr^{-1}}\ (\text{瓦·米}^{-2}\text{·球面度}^{-1})$$

如果对大气层的吸收（以致地面照度降低）作修正，并考虑到太阳辐射了整个波段（不限于可见光范围）的功率，那么太阳辐射亮度值自然比以上数值还要高。目前在大气层上边界所取的太阳辐射亮度值为$2\times10^7\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot sr^{-1}}$。



题4图

解二 如附图，根据

互易关系，亮度为 B 的太阳照射在地球面元 $\Delta S'$ 上的光通量等于亮度为 B 的面元 $\Delta S'$ 照射在太阳上的光通量，即

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi' = B\Delta S'\Delta\Omega'$$

现已知太阳光投射于地球的照度 $E = \Delta\Phi/\Delta S'$，又由太阳的半径和太阳至地球的距离可以算出太阳对地球所张的立体角 $\Delta\Omega' \approx \pi r^2/z^2$，解出

$$B = \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta S'}\right)\left(\frac{z^2}{\pi r^2}\right) = \frac{Ez^2}{\pi r^2}$$

$$= 1.5\times10^5 \text{熙提}$$

§12 象的亮度、照度和主观亮度

*1. 太阳表面的辐射亮度为 $2\times10^7\,\mathrm{W/m^2\cdot sr}$。用相对孔径 $D/f = 1.5$ 的放大镜将阳光聚集成光斑的最大辐射照度是多少？

解 在光能被聚焦，用于点火、钻孔、熔化、烧毁等过程中，起作用的光度学量是照度，而不是光源本身的亮度。利用远物（成象于聚光透镜的焦面附近）成象的照度公式

$$E = \frac{\pi}{4}B\left(\frac{D}{f}\right)^2$$

以 $B = 2\times10^7\,\mathrm{W/m^2\cdot sr}$，$D/f = 1.5$ 代入算出太阳象斑的最大辐射照度值为

$$E = 3.5\times10^7\,\mathrm{W/m^2}$$

整个光斑集中的光功率 $\Delta W'$ 为

$$\Delta W' = E\Delta S'$$

式中 $\Delta S'$ 为光斑面积（忽略衍射效应），

$$\Delta S' = V^2\Delta S = \left(\frac{f}{z}\right)^2\Delta S$$

设 $f = 1\,\mathrm{m}$，取太阳面积 $\Delta S = \pi r^2 = \pi(1.4\times10^6/2)^2\,\mathrm{km^2}$，地球

到太阳的平均距离 $z = 1.5 \times 10^8 \mathrm{km}$，求得

$$\Delta S' = \pi \frac{r^2}{z^2} f^2 = 0.68 \mathrm{cm}^2$$

如仍保持相对孔径为1.5，即选取透镜口径 $D = 1.5\mathrm{m}$（够大的了！），则

$$\Delta W' = 2.4 \times 10^3 W$$

通过以上讨论，应强调指出，远物成象的照度正比于相对孔径的平方，或象斑的面积正比于焦距平方。据此判断，相传古代阿基米德曾用长焦距镜面会聚日光烧毁远处敌舰的传说，只是一种没有科学根据的妄说。与长焦距匹配，应有足够大的镜面，才能获得较大的照度。

2．一屏放在离烛100cm处，把一会聚透镜放在烛和屏之间，透镜有两个位置可以在屏上得到烛的象，这两个位置相距20 cm，在屏上烛的两个象的照度相差多少倍？

解 这两对共轭物象满足互易关系，即物距 s_1 及其象距 s_1'，物距 s_2 及其象距 s_2' 满足

$$s_2 = s_1'$$
$$s_2' = s_1$$

又

$$s_1 + s_1' = s_1 + s_2 = l = 100\mathrm{cm}$$
$$s_1 - s_2 = \Delta S = 20\mathrm{cm}$$

解出

$$s_1 = 60\mathrm{cm}, \qquad s_1' = 40\mathrm{cm}$$
$$s_2 = 40\mathrm{cm}, \qquad s_2' = 60\mathrm{cm}$$

对于朗伯体，两种情况下象面接收的光通量 $\Delta\Phi_1$，$\Delta\Phi_2$ 之比为

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2} = \frac{k\pi B\sigma \sin^2 u_{10}}{k\pi B\sigma \sin^2 u_{20}} \approx \frac{u_{10}^2}{u_{20}^2} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2$$

式中 k, B 和 σ 分别为透镜的透光系数，光源的亮度和面积，u_{10}，u_{20} 分别为两种情况下的入射孔径角。成象面积 σ_1，σ_2 之比为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{s_1'}{s_1} \cdot \frac{s_2}{s_2'}\right)^2$$

所以象的照度之比

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2\left(\frac{s_2'}{s_2} \cdot \frac{s_1}{s_1'}\right)^2$$

$$= \left(\frac{s_2'}{s_1'}\right)^2 = \left(\frac{60}{40}\right)^2 = 2.25\text{倍}$$

即小象照度大。

3. 望远镜物镜的直径为75 mm，求放大率为（1）20倍、（2）25倍、（3）50倍时，望远镜中月亮的象的主观亮度与天然主观亮度之比。设眼瞳的直径为3.0 mm。

解 天然主观亮度是无仪器时视网膜上象的照度，计算公式为

$$H_0 = \frac{k\pi B}{4}\left(\frac{De}{f'}\right)^2$$

有仪器时的视网膜上象的照度称为主观亮度，计算公式为

$$H = \frac{k\pi B}{4}\left(\frac{De'}{f'}\right)^2$$

式中 De' 为有效眼瞳直径。当望远镜出瞳直径 $D' > De$ 时，应取 $De' = De$，此时主观亮度与天然主观亮度相等，当 $D' < De$ 时，应取 $De' = D'$，主观亮度小于天然主观亮度，两者之比为

$$\frac{H_0}{H} = \left(\frac{De}{D'}\right)^2 = \left(\frac{DeM}{D}\right)^2$$

讨论 $De = 3.0$ mm，$D = 75$ mm 时的情况：

（1）当 $M = 25$ 时，则

$$D' = \frac{D}{M} = 3.75\ \mathrm{mm} > De = 3.0\ \mathrm{mm}$$

此时

$$\frac{H_0}{H} = 1$$

（2）当 $M = 25$ 时，则

$$D' = \frac{D}{M} = 3.0\ \mathrm{mm} = De$$

此时

$$\frac{H_0}{H} = 1$$

（3）当 $M = 50$ 时，则

$$D' = \frac{D}{M} = 1.5\ \mathrm{mm} < De$$

此时

$$\frac{H_0}{H} = \left(\frac{De\,M}{D}\right)^2 = \left(\frac{3.0 \times 50}{75}\right)^2 = 4.0$$

4. 一天文望远镜的物镜直径等于18 cm，透光系数为0.50，已知肉眼可直接观察到六等星。求：

（1）用此望远镜所能看到的最高星等；

（2）最适宜观察星的放大率（正常放大率）；

（3）当放大率为10倍时可见到星的等次。设眼睛的瞳孔直径可取3.0 mm。

[注：星等增加一等，其亮度减少到 $1/\sqrt[5]{100} \approx 1/2.5$。]

解 （1）此题应将星体当作点光源处理，视网膜上象点的亮度直接取决于进入眼瞳的全部光通量。无望远镜时，进入眼瞳的光通量为

$$\Delta\Phi_0 \propto D_e^2$$

有望远镜时，进入物镜的光通量为

$$\Delta\Phi \propto D^2$$

考虑系统的透光系数 k ，从出瞳通过的光通量减为

$$\Delta\Phi' = k\Delta\Phi \propto kD^2$$

当 $D' \leqslant D_e$ 时，显然从望远镜出瞳通过的光通量全部进入眼瞳，故此时

$$\frac{\Delta\Phi'}{\Delta\Phi_0} = k\left(\frac{D}{D_e}\right)^2 = 0.50 \times \left(\frac{180}{3.0}\right)^2 = 1800$$

按天文学上关于星等划分标准，此时所能看到的最高星等（弱星）为

$$N = N_0 + \log_{2.5} 1800 = 6 + 8$$
$$= 14\text{等}$$

（2）为满足 $D' \leqslant D_e$ 条件，合理的设计应是望远镜的放大率 M 满足

$$D' = \frac{D}{M} = D_e$$

算出

$$M = \frac{D}{D_e} = \frac{180}{3.0} = 60\text{倍}$$

（3）若放大率过小，以致 $D' > D_e$ ，显然从望远镜出瞳通过的光通量只有部分进入眼瞳，按比例应为

$$\Delta\Phi'' \propto k\left(\frac{D_e}{D'}\right)^2 D^2$$

故

$$\frac{\Delta\Phi''}{\Delta\Phi_0} = kM^2$$

当该望远镜的放大率 $M = 10$ 时，$D' = D/10 = 18\ \text{mm} > D_e$，故按上式算出

$$\frac{\Delta\Phi''}{\Delta\Phi_0} = 50\text{倍}$$

此时可见到的星等为

$$N' = N_0 + \log_{2.5}50 = 6 + 4.3 \approx 10\text{等}$$

*5. 求数值孔径为1.5的显微镜的正常放大率，设瞳孔直径为3.0 mm

解 显微镜的数值孔径、放大率、出瞳孔径三者之间有一个简单关系：

$$D' = 2s_0\frac{N\cdot A\cdot}{|M|}$$

式中 s_0 为明视距离。显微镜的合理设计应使出瞳孔径 D' 等于眼瞳直径 D_e，在数值孔径 $N\cdot A\cdot$ 确定条件下，此时放大率（正常放大率）

$$|M_e| = \frac{2s_0 N\cdot A\cdot}{D_e} = \frac{2\times250\times1.5}{3.0} = 250\text{倍}$$

第二章　波动光学基本原理

§1　定态光波与复振幅描述

1．钠黄光（D双线）包含的波长为$\lambda_1=5890\,\text{Å}$和$\lambda_2=5896\,\text{Å}$，设$t=0$时两波列的波峰在O点重合，问：

（1）自O点起算，沿传播方向多远的地方两波列的波峰还会重合？

（2）经过多长时间以后，在O点又会出现两列波的波峰重合的现象？

解　（1）波峰再重合时传播距离应为λ_1和λ_2的公倍数，即

$$l=k\lambda_2=(k+n)\lambda_1$$

式中k，n为满足上式之正整数．由上式得

$$k=n\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}=\frac{n}{3}\times 2945$$

因此，当$n=3$时，$k=2945$，得最小公倍数

$$l_m=n\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta\lambda}=2945\lambda_2\approx 0.1736\,\text{cm}$$

即为再次重合时的传播距离．

有人认为再次重合时应满足$k'\lambda_2=(k'+1)\lambda_1$，则得

$$k'=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\approx 981.7$$

$$l'=k'\lambda_2\approx 0.05788\,\text{cm}$$

由此可见，k' 并非整数，这时两列波波峰并不严格重合。上述第一种考虑是可靠的，计算结果是符合题意的。

（2）这是关于扰动时间周期性的讨论，不妨设光波长为 λ_1 的时间周期为 $T_1=\lambda_1/c$，光波长为 λ_2 的时间周期为 $T_2=\lambda_2/c$，仿照上面关于扰动空间周期性的讨论，找出 T_1 和 T_2 的最小公倍数，即为原点重新出现两种扰动峰值的时间间隔 t_m。不过，利用波动所具有的时间周期性和空间周期性的互相联系，可以直接由(1)题求得的同时刻两波峰再次重合的纵向距离 l_m 算出同地点（原点）两波峰再次重合的时间间隔

$$t_m=\frac{l_m}{c}\approx 5.7879\ \mathrm{ps}\text{（微微秒）}$$

它远远大于两种扰动本身的周期（3000倍左右）。

以上两题告诉我们，两个非同频的简谐量的叠加结果仍然是一种周期性函数，其周期长短与频差（或波长差、或周期差）成反比，频差越小，则周期越长。“拍频”现象就是如此。

2．写出沿 z 轴传播的平面波的复振幅。

解　沿 z 方向传播的平面波的位相分布为

$$\varphi(P)=kz+\varphi_0$$

其复振幅为

$$\tilde{U}(P)=A\exp i(kz+\varphi_0)$$

3．写出在 xz 平面内沿与 z 轴成 θ 角的方向传播的平面波的复振幅。

解　如图，该平面波波矢的三个分量分别为

$k_x=k\sin\theta$，$k_y=0$，$k_z=k\cos\theta$，

其复振幅为

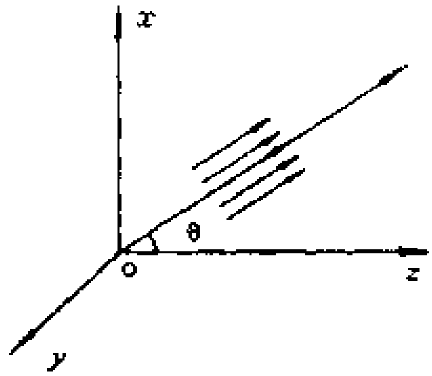
$$\tilde{U}(P)=A\exp i[k(x\sin\theta+z\cos\theta)+\varphi_0]$$

4． 如附图，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ，设 $x=0$ 点的位相 $\varphi_0=0$。

（1）写出沿 x 方向波的位相分布 $\varphi(x)$；

（2）写出沿 y 轴波的位相分布 $\varphi(y)$；

（3）写出沿 r 方向波的位相分布 $\varphi(r)$。



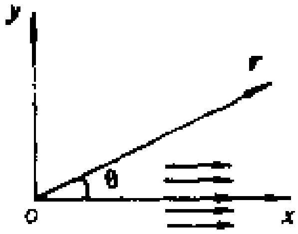
题 3 图

解 （1）$\varphi(x)=kx=\dfrac{2\pi}{\lambda}x$

（2）$\varphi(y)=\varphi_0=0$

（3）$\varphi(r)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k\hat{x}\cdot\boldsymbol{r}=kr\cos\theta$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}r\cos\theta$$



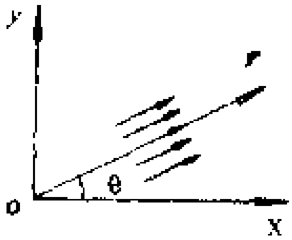
题 4 图

*5． 如附图，一平面简谐波沿 r 方向传播，波长为 λ，设 $r=0$ 点的位相为 φ_0，

（1）写出沿 r 方向波的位相分布 $\varphi(r)$；

（2）写出沿 x 轴波的位相分布 $\varphi(x)$；

（3）写出沿 y 轴波的位相分布 $\varphi(y)$。



题 5 图

解 （1）$\varphi(r)=kr+\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}r+\varphi_0$

（2）$\varphi(x)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\theta+\varphi_0$

（3）$\varphi(y)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}+\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}y\sin\theta+\varphi_0$

6. 写出向$Q(x_0,y_0,z_0)$点会聚的球面波的复振幅.

解 如图，设源点为$Q(x_0,y_0,z_0)$，场点为$P(x,y,z)$，则源点与场点的距离为

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}.$$

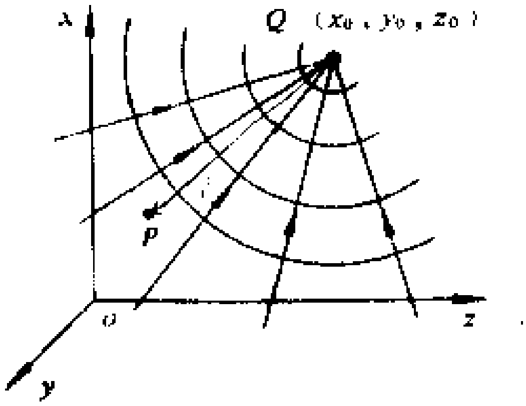
因为Q点是会聚中心，所以沿靠近点源方向考察，扰动位相逐点落后，按符号约定应写成

$$\varphi(P)=\varphi(Q)-kr$$

再考虑到振幅系数，这列球面波的复振幅为

$$\widetilde{U}(P)=\frac{A_1}{r}\exp[-i(kr+\varphi_0)]$$

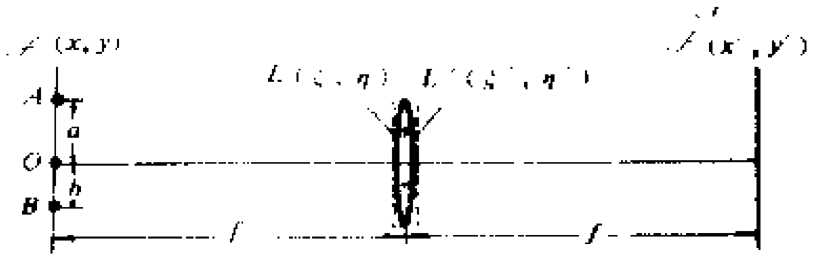
其φ_0为Q点源的实际初位相.



题6图

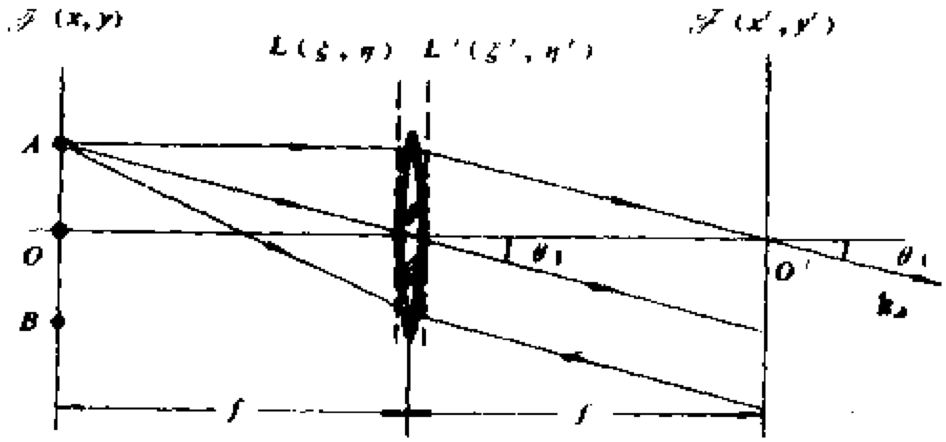
§2 波 前

1. 如附图(a)，在一薄透镜的物方焦面上有三个点光源O、A、B，试分别写出由它们发出的光波经透镜折射后，在象方焦面上产生的复振幅分布函数.



题1图(a)

解 如图（b），处于前焦面上的三个点源 A、O，B 发射的球面波经透镜变换后，成为三列平面波射于后焦面（图中只画出了自 A 发出的一列）。设三列波的波长均为 λ，波矢分别为 $\boldsymbol{k}_A$，$\boldsymbol{k}_O$，$\boldsymbol{k}_B$，其分量分别表示为



题1图（b）

$$\boldsymbol{k}_A:\quad(-k\sin\theta_1,\ 0,\ k\cos\theta_1)$$

$$\boldsymbol{k}_O:\quad(0,\ 0,\ k)$$

$$\boldsymbol{k}_B:\quad(k\sin\theta_2,\ 0,\ k\cos\theta_2)$$

式中

$$k=|\boldsymbol{k}_A|=|\boldsymbol{k}_O|=|\boldsymbol{k}_B|=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\sin\theta_1=\frac{a}{\sqrt{f^2+a^2}}$$

$$\sin\theta_2=\frac{b}{\sqrt{f^2+b^2}}$$

它们在后焦面上的复振幅分布函数分别为

$$\tilde{U}_1(x',y') = A_1\exp[-i(kx'\sin\theta_1+\varphi_1)]$$

$$\tilde{U}_0(x',y') = A_0\exp(-i\varphi_0)$$

$$\tilde{U}_B(x',y') = A_2\exp[i(kx'\sin\theta_2-\varphi_2)]$$

式中φ_1，φ_0，φ_2分别是三列平面波在$x'y'$面上原点O'的实际初位相，A_1，A_0，A_2分别是三列平面波的振幅，这些量将反映三个点源的发光强度和位相关系，其具体数值在本题中并不要紧。

2． 考察上题中紧贴于薄透镜前后表面的两个平面的波前$L(\xi,\eta)$和$L'(\xi',\eta')$，分别写出在傍轴条件下三列波在它们上边的复振幅分布。

解 在$\mathscr{F}(x,y)$平面上三个点源的坐标分别为$A(a,0)$、$O(0,0)$，$B(-b,0)$，在傍轴条件下，它们与波前平面$L(\xi,\eta)$的距离近似为焦距f，设三点源的初位相为零，则其波前复振幅分布分别为

$$\tilde{U}_A(\xi,\eta) = \frac{A_1}{f}\exp\left[ik\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{2f}-\frac{a\xi}{f}+\frac{a^2}{2f}+f\right)\right]$$

$$\tilde{U}_O(\xi,\eta) = \frac{A_0}{f}\exp\left[ik\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{2f}+f\right)\right]$$

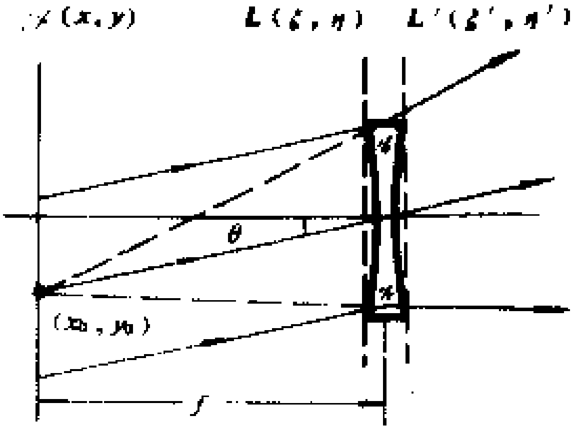
$$\tilde{U}_B(\xi,\eta) = \frac{A_2}{f}\exp\left[ik\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{2f}+\frac{b\xi}{f}+\frac{b^2}{2f}+f\right)\right]$$

式中A_1，A_0，A_2分别是三列傍轴球面波取决于点源强度的振幅系数。

三列球面波经透镜变换后成为三列平面波，在$L'(\xi',\eta')$平面上的波前函数与题1结果相同，只是表达式中的参考位相φ_1，

φ_0、φ_2的含义有了变化，应将它们看作三列平面波在$L'(\xi',\eta')$平面原点的实际初位相。

3． 仿照上题的方法，讨论一束倾斜的平行光经过一个凹透镜时，在它前后两波前上复振幅分布的变化。



题 3 图

解 如图，假定平行光与光轴成倾角θ。则在平面波前$L(\xi,\eta)$上接收到的是斜入射的平面波，在波前平面$L'(\xi',\eta')$上接收到的是发散的球面波，其中心在平面$\mathscr{F}(x,y)$上，坐标为(x_0,y_0)，而且$x_0=f\operatorname{tg}\theta$，$y_0=0$。设$L(\xi,\eta)$平面上原点的初位相为零，写出在该面上的波前函数为

$$\widetilde{U}(\xi,\eta)=A\exp(ik\xi\sin\theta)$$

设发散中心(x_0,y_0)的初位相为零，写出在$L(\xi',\eta')$平面上傍轴条件下的波前函数为

$$\widetilde{U}(\xi',\eta')=A\exp\left[ik\left(\frac{\xi'^2+\eta'^2}{2f}+\xi'\operatorname{tg}\theta+\frac{f\operatorname{tg}^2\theta}{2}+f\right)\right]$$

§ 3 波的叠加和波的干涉

*1． (1) 人眼视神经的时间响应能力约为0.1s(秒)，在这段时间里光扰动经历了多少个周期？

(2) 目前光电接收器的最高时间响应能力可达10^{-9}s(毫微秒量级)，在这段时间里光扰动经历了多少个周期？

(3) 自发辐射一列光波的持续时间不超过10^{-8}s(秒)，其中约

包含多少次振动?

解 可见光波段的频率数量级为

$$\nu \approx 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

在人眼的可分辨的最小时间间隔（时间响应能力）0.1s 之内，光扰动经历了

$$N_1 \approx 10^{13}\text{次}$$

即使对时间响应能力高达10^{-9}s的光电接收器来说，在它可分辨的最小时间间隔内，光扰动也经历了

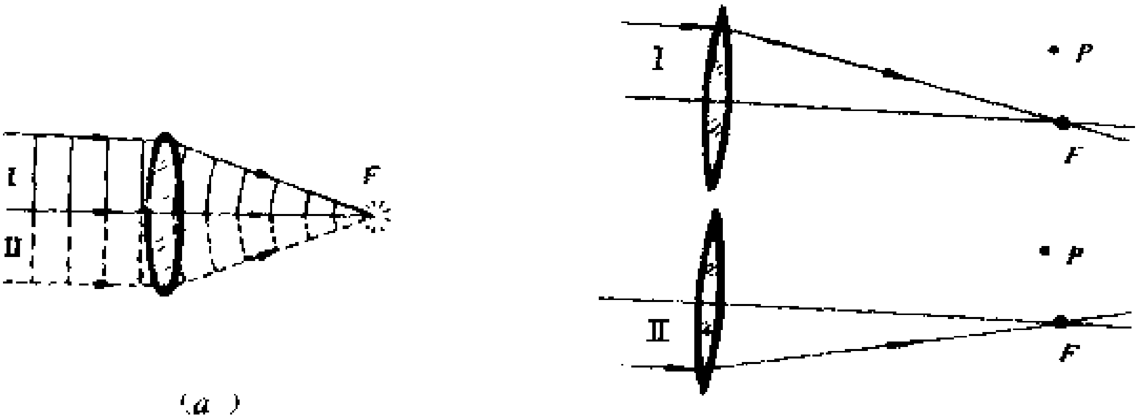
$$N_2 \approx 10^{5}\text{次}$$

在波列持续时间为10^{-8}s这段时间内，包含的扰动次数为

$$N_3 \approx 10^{6}\text{次}$$

这些数量级表明，鉴于光频很高，目前接收器对光频的直接测量都是无能为力的。以上涉及三个时间尺度——光扰动周期T，持续发光时间τ_0，接收仪器的时间响应能力$\Delta\tau$，当然实际测量过程中还有一个连续测量时间间隔Δt。自从激光问世以后，在光的单色性不断提高的形势下，虽然还是$\Delta t \gg T$，但已能够实现$\Delta\tau$ τ_0。这样，对干涉强度的测量就有了新的考虑，它使两个独立的准单色光源产生的叠加场中干涉强度的不稳定性成为可分辨的了。换句话说，如用高分辨的接收器（配以适当的快门速度），就可以拍摄下来一幅幅干涉图，这一系列干涉图的区别只是空间略有位移。此时，对干涉强度第二次取时间平均的做法就不是绝对必要的了。

2． 在扩展强光束（激光）时，人们避免用“实聚焦”的方法［附图（a）］，因为在实焦点处的光功率密度太高，可能引起空气“着火”（电离）。现在设想，如果将入射光束挡住一半，先后让Ⅰ，Ⅱ两部分聚焦于F点，并不引起着火，而同时开放，让全部光束聚焦时，就要发生空气着火现象。试问，在这个过程中，波的叠加原理是否成立？这可算得是一种非线性效应吗？



(a)　　　　(b)

题 2 图

解　两束光同时聚焦时焦点着火，这是一种次级效应。凡有了次级效应，波的叠加原理就将遭到破坏。为此，考虑轴外一点 P [如图（b）]，显然，第一列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_1(P)=0$$

第二列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_2(P)=0$$

而两列波同时存在时，由于焦点着火，则

$$\tilde{U}(P)\neq 0$$

可见 $\tilde{U}(P)\neq\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)$

应该说，这是一种非线性效应。

§4　两个点源的干涉　杨氏实验

1．　在杨氏双孔实验中，孔距为0.1 mm，孔与幕的距离为3 m，对下列三条典型谱线求出干涉条纹的间距：

F 蓝线（4861 Å），D 黄线（5893 Å），A′红线（6563 Å）。

解　根据杨氏双孔干涉条纹间距公式

$$\Delta x=\frac{\lambda D}{d}$$

得到三条谱线产生的条纹间距分别为

$$\Delta x_F = 14.6\,\mathrm{mm},\ \Delta x_D = 17.7\,\mathrm{mm},\ \Delta x_C = 19.7\,\mathrm{mm}$$

由此可见，如果入射光同时包含有这三条谱线或如白光那样的连续谱，则干涉场中将出现彩色条纹，它们分布在零级条纹两侧，短波蓝光靠里，长波红光靠外，而对各种波长来说，干涉零级位置是重合的。这也可以说是一种色散现象，是“干涉色散”效应。

* **2**．在杨氏双孔实验中，孔距为0.45mm，孔与幕的距离1.2m，测得10个亮纹之间的间距为1.5cm，问光源的波长是多少？

解 由条纹间距可以推算本实验中光源的光波长为

$$\lambda = \frac{d}{D}\Delta x' = 6250\,\text{Å}$$

在历史上，杨氏首先提出了“干涉”的概念，引入了“波长”一量，用波的叠加原理解释了薄膜的颜色，并设计了现在人所共知的著名的双缝干涉实验，来验证自己的理论。杨氏实验本身也就成为历史上最早测定光波长的一种实际方法。

3． 试计算两列相干光波的振幅比为下列数值时条纹的反衬度：$A_1/A_2 = 1$，$1/3$，3，$1/6$，$1/10$。

解 由双光束干涉反衬度与振幅比的关系式

$$\gamma = \frac{2\,(A_1/A_2)}{1+(A_1/A_2)^2}$$

得

当$A_1/A_2 = 1$时，$\gamma = 1$

当$A_1/A_2 = 1/3$时，$\gamma = 0.6$

当$A_1/A_2 = 3$时，$\gamma = 0.6$

当$A_1/A_2 = 1/6$时，$\gamma = 0.32$

当$A_1/A_2 = 1/10$时，$\gamma = 0.2$

* **4**．两束相干的平行光束，传播方向平行于xz面，对称

地斜射在记录介质（xy面）上，光波长为6328Å，问：

（1）当两束光的夹角为10°时，干涉条纹的间距为多少？

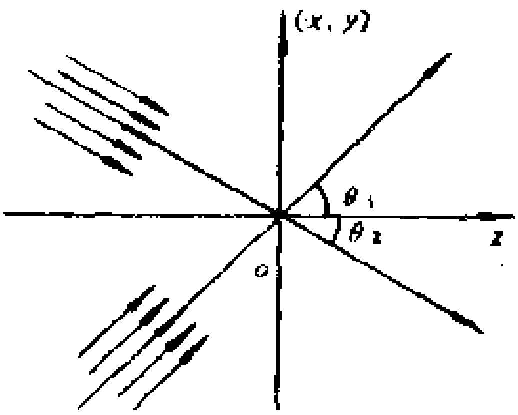
（2）当两束光的夹角为60°时，干涉条纹的间距为多少？

（3）如果记录介质的空间分辨率为2000条/mm，这介质能否记录上述两种条纹？

解 这种情况下，干涉条纹走向与x轴正交，即平行y轴。条纹间距公式为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}$$

$$=\frac{\lambda}{2\sin\theta}\qquad（对称入射）$$



题4图

θ_1，θ_2角如图所示。

（1）当$\theta=5°$时，$\Delta x_1=3.6\,\mu m$

（2）当$\theta=30°$时，$\Delta x_2=0.63\,\mu m$

（3）上述两种情况下干涉条纹的空间频率分别为

$$f_1=\frac{1}{\Delta x_1}=276/mm$$

$$f_2=\frac{1}{\Delta x_2}=1580/mm$$

均小于记录介质的空间分辨率，所以该介质干板能记录上述两种条纹。

*5、在一焦距为f的薄凸透镜的物方焦面上有O，Q两个相干的点光源，O在光轴上，Q到光轴的距离为a（满足傍轴条件）。

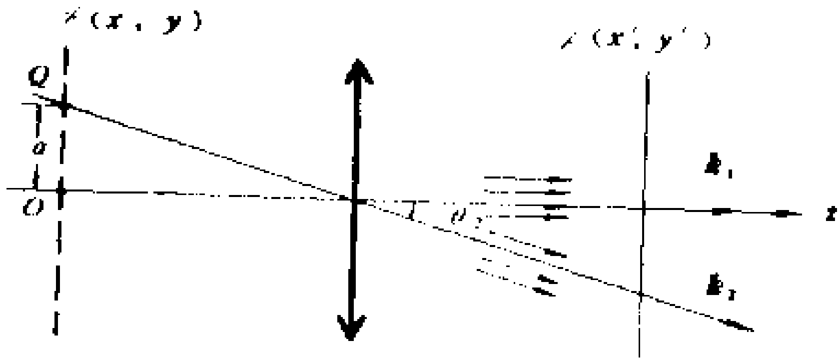
（1）试分析象方焦面上接收到的干涉条纹的特征（形状、间距和取向）。

（2）如果将$\mathscr{F}'$上的屏幕向背离透镜的方向平移，其上干涉

条纹有何变化?

解 （1）如图，后焦面$\mathscr{F}'$上为两束平行光干涉，只要将两束平行光相对于接收平面的倾角确定下来，就能算出条纹间距。按题意$\theta_1=0$，$\theta_2\approx a/f$，条纹间距为

$$\Delta x'=\frac{\lambda}{\sin\theta_1-\sin\theta_2}=\frac{f\lambda}{a}$$



题 5 图

条纹形状为平行于y'轴（与O、Q连线正交）的一组平行条纹。

（2）当接收屏幕移动时，由于平行光束的倾角不变，所以条纹形状、间隔、取向均不变，但条纹总体上发生移动。当点源Q在x轴上方，且屏幕移远时，条纹向下方移动。当然，当屏幕远离透镜过程中，两光束的交叠区也随之减小，将使条纹数目降低。

*6. 如果在上题中把O点视为参考点源，Q置于输入面$\mathscr{F}(x,y)$任何位置，证明在输出面$\mathscr{F}'(x',y')$上的干涉条纹与Q点位置（x，y）有如下关系：

（1）空间频率

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{1}{\Delta x'}=\dfrac{|x|}{\lambda f} \\ f_y=\dfrac{1}{\Delta y'}=\dfrac{|y|}{\lambda f} \end{cases}$$

（2） 条纹取向θ（与x'轴的夹角）由下式决定

$$tg\theta = -\frac{x}{y}$$

（3） 同一个θ值，对应Q的几个方位？用什么方法可将它们区别开来？（此题具体体现了干涉条纹是如何记录了波前上的位相分布，从而记录了点源位置的。它实际上就是一张最简单的全息图。）

解 （1） 在$\mathscr{F}'$面上仍为两束平行光的干涉。来自O点的平行光正入射于$\mathscr{F}'$面，其波前函数为

$$\widetilde{U}_1(x',y') = A_1$$

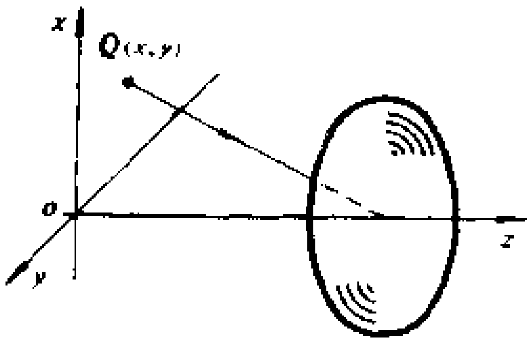
来自Q点的平行光斜入射于$\mathscr{F}'$面，其波前函数为

$$\widetilde{U}_2(x',y') = A_2\exp[ik(x'\cos\alpha + y'\cos\beta)]$$

式中$\cos\alpha$，$\cos\beta$是该波矢的方向余弦，也就是点源Q指向透镜光心矢量（如图（a）所示）的方向余弦，它们应当为

$$\cos\alpha = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+f^2}} \approx -\frac{x}{f}$$

$$\cos\beta = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+f^2}} \approx -\frac{y}{f}.$$



题6图（a）

因本题不涉及条纹的反衬度，不妨设两列波的振幅相等；本题也不关心亮（暗）纹的具体位置，不妨设两列波在$\mathscr{F}'$面原点的位相相同。于是，干涉强度分布函数为

$$\begin{aligned} I(x',y') &= (\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2)(\widetilde{U}_1^*+\widetilde{U}_2^*) \\ &= I_0[1+\cos\delta(x',y')] \end{aligned}$$

式中位相差

$$\delta(x', y') = -k(x'\cos\alpha + y'\cos\beta)$$

$$\approx k\frac{xx' + yy'}{f}$$

故

$$I(x', y') = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{kx}{f}x' + \frac{ky}{f}y'\right)\right]$$

相因子中的线性系数是强度分布的空间圆频率，于是求得条纹的空间频率分别为

$$f_{x'} = \left|\frac{kx}{2\pi f}\right| = \frac{|x|}{\lambda f}$$

$$f_{y'} = \left|\frac{ky}{2\pi f}\right| = \frac{|y|}{\lambda f}$$

或者说，条纹的空间周期为

$$\Delta x' = \frac{1}{f_{x'}} = \frac{\lambda f}{|x|}$$

$$\Delta y' = \frac{1}{f_{y'}} = \frac{\lambda f}{|y|}$$

（2）由

$\delta(x', y') =$ 常数　　（不妨设为 0）

可以得到条纹的轨迹方程为

$$xx' + yy' = 0$$

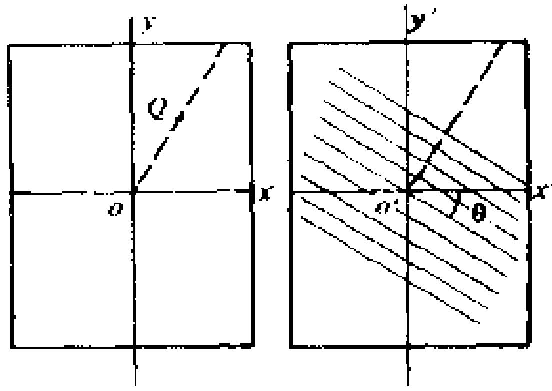
即

$$y' = -\frac{x}{y}x'$$

由方程可知条纹的形状为直线，如图（b）所示，斜率为

$$\tg\theta = \frac{x}{y}$$

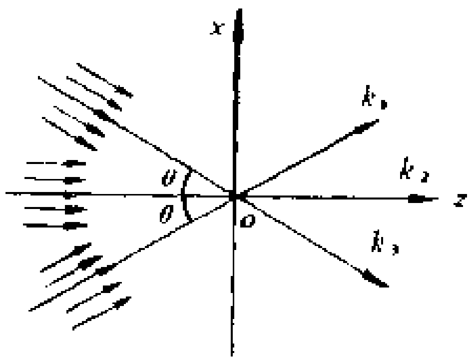
（3）以上结果表明，我们可以通过对条纹间距和条纹斜率的测量，来确定点源Q的位置坐标。当Q点越靠近O点时，条纹间距越大，因而越便于测量，从中可以初步看到这种干涉定位对于结构分析的意义。



题6图（b）

但是，我们还应注意到对同一斜率，点源Q可能有两个位置，这两个位置以原点为中心对称（如一、三象限，或二、四象限）。此时，仅根据静态条纹的特征是无法唯一确定Q点位置的。可是当接收屏幕稍有移动时，区别便显示出来了。当屏幕稍稍远离透镜时，若条纹移动趋势向着$x'y'$平面的第一象限，则点源Q位于xy平面的第三象限。

*7. 如图附(a)，三束平行光在原点O处的初位相$\varphi_{10}=\varphi_{20}=\varphi_{30}=0$，振幅比$A_1:A_2:A_3=1:2:1$，传播方向与$xz$面平行，与$z$轴夹角为$\theta$，0，$-\theta$，试用复数法和矢量图解法求波前$z=0$面上的强度分布函数，并分析干涉条纹的特征。



题7图（a）

解　（1）复数法

本题是三束平行光的干涉问题。因三束光是相干的，其波矢数值相等，即

$$k_1=k_2=k_3=k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

根据入射倾角，可以写出三束平行光在xy平面上的位相分布函数分别为

$$\varphi_1(x,\ y) = kx\sin\theta$$
$$\varphi_2(x,\ y) = 0$$
$$\varphi_3(x,\ y) = -kx\sin\theta$$

相应的复振幅分布函数分别为

$$\widetilde{U}_1(x,y) = A_1\exp(ikx\sin\theta)$$
$$\widetilde{U}_2(x,y) = A_2 = 2A_1$$
$$\widetilde{U}_3(x,y) = A_3\exp(-ikx\sin\theta)$$
$$= A_1\exp(-ikx\sin\theta)$$

总的复振幅分布为

$$\widetilde{U}(x,y) = \widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2 + \widetilde{U}_3$$
$$= A_1\exp(ikx\sin\theta) + 2A_1 + A_1\exp(-ikx\sin\theta)$$
$$= 2A_1[1 + \cos(kx\sin\theta)]$$

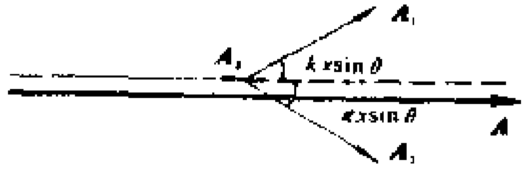
因此干涉场xy面上的强度分布函数为

$$I(x,y) = \widetilde{U}(x,y)\widetilde{U}^*(x,y)$$
$$= 4A_1^2[1 + \cos(kx\sin\theta)]^2$$
$$= 4I_0[1 + 2\cos(kx\sin\theta) + \cos^2(kx\sin\theta)]$$
$$= I(x)$$

式中$I_0 = A_1^2$，为k_1波或k_3波的强度。强度分布与y无关，说明干涉条纹为垂直于x轴的一系列直线。

（2）矢量图解法

可根据矢量与复数的对应关系作矢量图如附图（b）。图中



题7图（b）

$$\vec{A}_1 \leftrightarrow \widetilde{U}_1$$
$$\vec{A}_2 \leftrightarrow \widetilde{U}_2$$
$$\vec{A}_3 \leftrightarrow \widetilde{U}_3$$
$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 \leftrightarrow \widetilde{U}$$

如图可得合矢量的长度为

$$A = A_1\cos(kx\sin\theta) + A_2 + A_3\cos(-kx\sin\theta)$$
$$= 2A_1[1+\cos(kx\sin\theta)]$$

因此强度分布为：

$$I(x,y) = A^2 = 4A_1^2[1+\cos(kx\sin\theta)]^2$$
$$= 4I_0[1+2\cos(kx\sin\theta)+\cos^2(kx\sin\theta)]$$

结果与用复数法求得的完全一样。

（3）进一步分析干涉条纹的特征

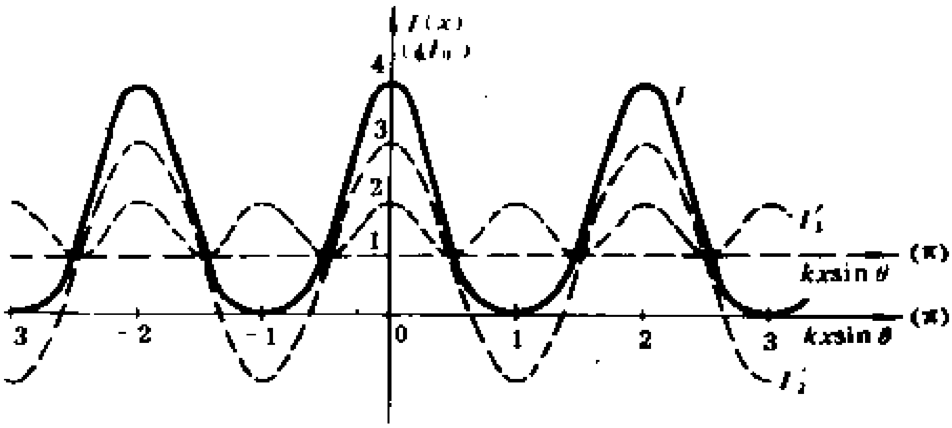
为此，可以作出强度分布曲线。先把强度分布函数改写成三项之和，即

$$I(x) = I_1' + I_2' + I_3'$$

式中

$$I_1' = 4I_0$$
$$I_2' = 8I_0\cos(kx\sin\theta)$$
$$I_3' = 4I_0\cos^2(kx\sin\theta)$$

以$4I_0$为单位取纵坐标$I(x)$，以π为单位取横坐标$kx\sin\theta$，先作出I_2'，I_3'曲线（附图（c）中虚线），I_2'和I_3'合成后再把横坐标下移一个单位，即得总的强度分布曲线，如附图（c）中实线所示。



题 7 图（c）

由此可见，干涉条纹具有以下特征：

1）由强度分布$I(x,y)=I(x)$，与y无关已经知道干涉

条纹为垂直于 x 轴的直线。由强度分布曲线看到，除主极大外并无次极大，因此 xy 平面上只有一组直线条纹。

2）$I(x)$ 的空间周期与 $I_3(x)$ 相同，因此条纹间隔为

$$\Delta x = \frac{2\pi}{k\sin\theta} = \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

3）强度极大 $I_M = 16I_0$，即 k_1 波或 k_3 波单独存在时的16倍。强度极小 $I_m = 0$，因此条纹的反衬度

$$\gamma = 1$$

4）如果没有 k_2 波，只有 k_1 波和 k_3 波造成双光束干涉，则

$$\begin{aligned}\tilde{U}'(x,y) &= \tilde{U}_1 + \tilde{U}_3 \\ &= A_1\exp(ikx\sin\theta) + A_1\exp(-ikx\sin\theta) \\ &= 2A_1\cos(kx\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I'(x,y) &= \tilde{U}'(x,y)\tilde{U}'^{*}(x,y) \\ &= 4A_1^2\cos^2(kx\sin\theta) \\ &= 4I_0\cos^2(kx\sin\theta)\end{aligned}$$

因此

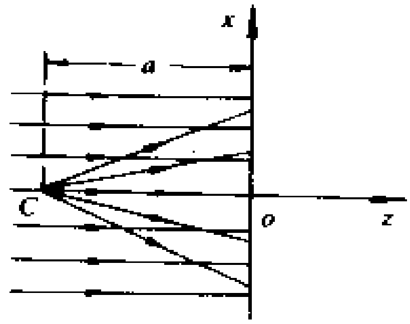
$$I'_M = 4I_0,\ I'_m = 0,\ \gamma' = 1 = \gamma$$

$$\Delta x' = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{k\sin\theta} = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{1}{2}\Delta x$$

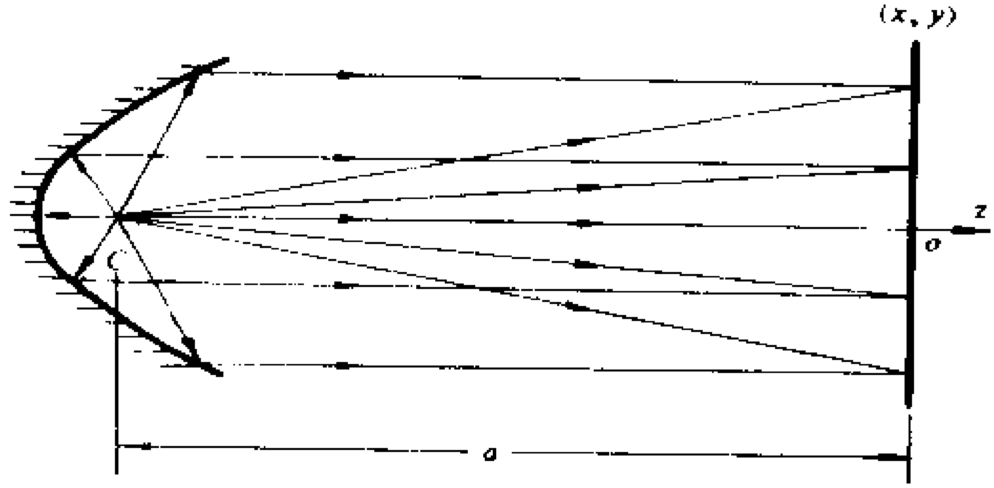
即条纹反衬度与三光束干涉时一样，条纹间隔比三光束干涉时缩小一半。但由于 $I_M = 4I'_M$，与双光束干涉相比，三光束干涉条纹的锐度增加。参与干涉效应的光束数目越多，则干涉条纹越加细锐，这是多光束干涉的普遍特征，在本题三光束干涉的结果中已经初步看到这一趋势。

8． 如附图（a），一列平面波 $\tilde{U}_1$ 正入射于波前 $z = 0$ 面上，与一列球面波 $\tilde{U}_2$ 在傍轴范围内发生干涉，试分析干涉条纹的特征。

解 本题是平面波和球面波的干涉问题。实验上可以采用如图（b）所示的装置，把一点源置于旋转抛物面反射镜的焦点上，则经反射后照射在屏幕上的是一列正入射的平面波，由点源直接照射在屏幕上的是一列发散的球面波，且发散中心在轴上。



题 8 图（a）



题 8 图（b）

据题意可写出 xy 平面上平面波和傍轴球面波的复振幅分布函数分别为

$$\widetilde{U}_1(x, y) = A_1$$

$$\widetilde{U}_2(x, y) = A_2 \exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \phi_{20}\right)\right]$$

式中 φ_{20} = 常数，为两列波在原点O处的位相差。因此总的复振幅分布为

$$\widetilde{U}(x, y) = A_1 + A_2 \exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \varphi_{20}\right)\right]$$

干涉强度分布为

$$I(x,y)=\widetilde{U}(x,y)\widetilde{U}^*(x,y)$$

$$=\left\{A_1+A_2\exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2a}+\varphi_{20}\right)\right]\right\}$$

$$\left\{A_1+A_2\exp\left[-i\left(k\frac{x^2+y^2}{2a}+\varphi_{20}\right)\right]\right\}$$

$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(k\frac{x^2+y^2}{2a}+\varphi_{20}\right)$$

$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta(x,y)$$

式中$\delta(x,y)=k\dfrac{x^2+y^2}{2a}+\varphi_{20}$，它是$xy$面上任一场点两列波的位相差。$\delta(x,y)=$常数的轨迹即为等强度的轨迹，也即干涉条纹的轨迹。因此任一干涉条纹的轨迹方程为

$$x^2+y^2=r^2=\text{常数}$$

这是中心在坐标原点的圆的标准方程。由此可见干涉条纹形状是以原点为中心的一系列同心圆环。原点的强度究竟是亮还是暗，取决于φ_{20}值。

第N级亮环条件为

$$k\frac{x^2+y^2}{2a}+\varphi_{20}=N2\pi$$

如ϕ_{20}为2π的整数倍，即相当于原点为亮点的情形，这时可略去ϕ_{20}不写，得

$$r_N^2=x^2+y^2=\frac{2a}{k}N2\pi$$

$$=N2a\lambda\quad(N=0,1,2,\cdots)$$

则由中心向外第N个亮环的半径为

$$r_N=\sqrt{N2a\lambda}=\sqrt{N}r_1$$

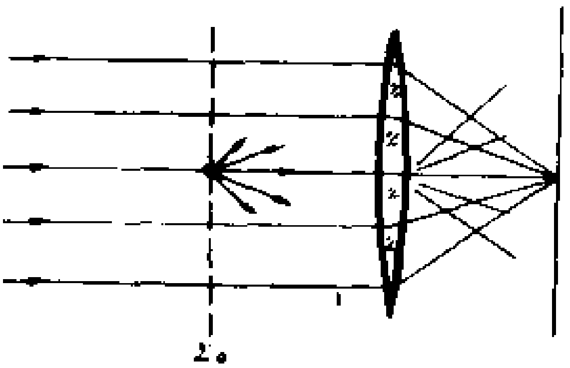
式中r_1为中心向外第一个亮环的半径。上式即为亮环的半径公式，它与菲涅耳波带片半波带的半径公式$\rho_N=\sqrt{N}\rho_1$形式一致。菲涅耳波带片是黑白型的。如在本题装置中，xy面上用感光底片接

收，则经线性冲洗后可以得到一张正弦型的波带片。从全息照相的眼光看，该正弦型波带片是一张全息图，平行光作为参考光波，记录的是点源发出的物光波，这是后话。

§5　光的衍射现象和惠更斯—菲涅耳原理

*1．　当一束截面很大的平行光束遇到一个小小的墨点时，有人认为它无关大局，其影响可以忽略，后场基本上还是一束平行光，这个看法对吗？你能设想一种场合，这小小墨点造成的后果是不可忽视的吗？

解　如图，不妨通过小墨点作一个假想平面Σ_0，惠更斯—菲涅耳原理表明，后场是Σ_0面上所有次波源相干叠加的结果。如果没有墨点，相干叠加结果在后场仍为单纯的平行光。如果有了一个墨点，后场就少了一些相干叠加成分。原波面在这一局部的缺损所带来的影响将牵动整个后场，将明显地影响后场的方向性。使后场衍射波通过聚焦透镜，就能容易地监测到小墨点的影响。若平行光通行无阻，经透镜后在后焦面上出现一个亮点（在轴上），轴外强度为零。若有一个墨点在前场，后焦面上轴外的衍射强度就不为零了。按巴俾涅原理，有墨点时的轴外衍射强度分布就是与墨点互补的圆孔衍射图样。



题1图

总之，在分析衍射问题时，要十分注意相干叠加这一特点。相干叠加可以使“部分大于整体”，使“局部牵动全局”。整个衍射场如同一张绷紧的弹簧床，不论那里断缺了几个小弹簧，必将影响整个床的形态，其影响波及整个衍射场。须知，波场中波面上）各次波源是互相关联的。在光路中有一个小墨点，同光路

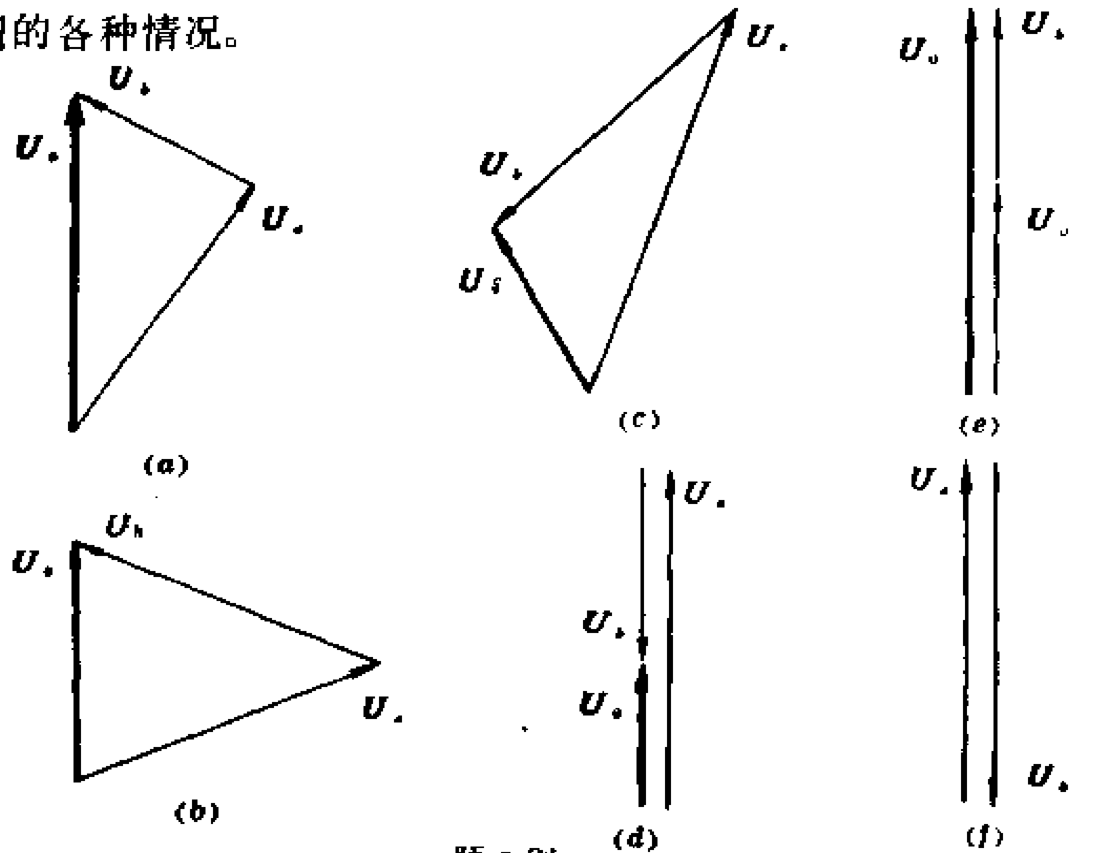
中有一个小孔一样，都将成为“散射源”。这一概念在下一节关于菲涅耳圆孔、圆屏衍射问题的分析中将更为明确。

2． 关于两个互补屏在同一场点的衍射强度之关系，有人说一个强度是亮（暗）的，则另一个强度是暗（亮）的。这样理解衍射巴俾涅定理，对吗？

解 这里又一次涉及对于相干叠加概念的理解问题。巴俾涅定理告诉我们，互补屏产生的两个场$\widetilde{U}_a(P)$，$\widetilde{U}_b(P)$与自由场$\widetilde{U}_0(P)$满足恒等式

$$\widetilde{U}_a(P)+\widetilde{U}_b(P)=\widetilde{U}_0(P)$$

这是复振幅关系式，其中隐含了位相差的作用，不是简单的代数关系，反映在矢量图解上，三者是一个三角关系，这就可能出现如图的各种情况。



题 2 图

(a) $|\widetilde{U}_a|$，$|\widetilde{U}_b|<|\widetilde{U}_0|$； (b) $|\widetilde{U}_a|=|\widetilde{U}_b|>|\widetilde{U}_0|$

(c) $|\widetilde{U}_a|>|\widetilde{U}_b|>|\widetilde{U}_0|$； (d) $|\widetilde{U}_a|-|\widetilde{U}_b|=|\widetilde{U}_0|$

(e) $|\widetilde{U}_a|+|\widetilde{U}_b|=|\widetilde{U}_0|$； (f) $|\widetilde{U}_a|=|\widetilde{U}_b|$，$|\widetilde{U}_0|=0$

§ 6 菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

1. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，圆孔半径2.0mm，光源离圆孔2.0m，波长0.5μm，当接收屏幕由很远的地方向圆孔靠近时，求：

（1）前三次出现中心亮斑（强度极大）的位置；

（2）前三次出现中心暗斑（强度极小）的位置；

解 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda}$$

得

$$k = \frac{\rho_k^2}{\lambda}\frac{1}{b} + \frac{\rho_k^2}{\lambda}\frac{1}{R}$$

上式说明在目前圆孔半径 ρ，光源离圆孔距离 R，光波长 λ 等量确定时，圆孔所露半波带数 k 与观察点离圆孔距离 b 之间呈双曲线关系，b 减小时 k 不断增加。当 $b \to \infty$ 时得

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda R} = \frac{(2.0\times 10^{-3})^2}{0.5\times 10^{-6}\times 2.0} = 4$$

所以屏幕由很远处向圆孔靠近时，$k > 4$。当 $k = 5$，7，9 时出现前三次亮斑，除无穷远外，当 $k = 6$，8，10 时出现前三次暗斑。为了计算亮、暗斑位置 b，将上式改写为

$$b = \frac{R\rho^2}{kR\lambda - \rho^2}$$

以 $R = 2.0\text{m}$，$\rho = 2.0\text{mm}$，$\lambda = 0.5\mu\text{m}$ 代入得

$$b_k = \frac{8.0}{k-4.0}\ \mathrm{m}$$

（1）分别取$k=5$，7，9得前三次出现中心亮斑的位置分别为

$$b_5 = \frac{8.0}{5-4.0} = 8.0\ \mathrm{m}$$

$$b_7 = \frac{8.0}{7-4.0} = 2.7\ \mathrm{m}$$

$$b_9 = \frac{8.0}{9-4.0} = 1.6\ \mathrm{m}$$

（2）分别取$k=6$，8，10 得前三次出现中心暗斑的位置分别为

$$b_6 = \frac{8.0}{6-4.0} = 4.0\ \mathrm{m}$$

$$b_8 = \frac{8.0}{8-4.0} = 2.0\ \mathrm{m}$$

$$b_{10} = \frac{8.0}{10-4.0} = 1.3\ \mathrm{m}$$

2． 在菲涅耳圆孔衍射实验中，光源离圆孔1.5m，波长0.63 μm，接收屏幕与圆孔距离6.0m，圆孔半径从0.5mm 开始逐渐扩大，求：

（1）最先的两次出现中心亮斑时圆孔的半径；

（2）最先的两次出现中心暗斑时圆孔的半径

解 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda} = \sqrt{k}\rho_1,\quad \rho_1 = \sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}}$$

得

$$k = \frac{R+b}{Rb\lambda}\rho_k^2$$

上式说明在目前光源离圆孔距离R，观察点离圆孔距离b，光波长λ等量确定的条件下，圆孔露出半波带数k和圆孔半径ρ_k之间呈二次抛物线关系。当圆孔半径ρ_k逐渐扩大时，所露出半波带数显然增加。

开始$\rho_k = 0.5$ mm时，算得露出半波带数目为

$$k = 0.33$$

所以圆孔扩大过程中，当$k = 1$，3时出现头两次中心亮斑，当$k = 2$，4时出现头两次中心暗斑，代入数据得

$$\rho_k = \sqrt{k}\,\rho_1 = \sqrt{k}\,0.87\ \text{mm}$$

（1）分别取$k = 1$，3得最先两次出现中心亮斑的圆孔半径分别为

$$\rho_1 = \sqrt{1}\,\rho_1 = 0.87\ \text{mm}$$

$$\rho_3 = \sqrt{3}\,\rho_1 = 1.5\ \text{mm}$$

（2）分别取$k = 2$，4得最先两次出现中心暗斑的圆孔半径分别为

$$\rho_2 = \sqrt{2}\,\rho_1 = 1.2\ \text{mm}$$

$$\rho_4 = \sqrt{4}\,\rho_1 = 1.7\ \text{mm}$$

*3. 用直刀口将点光源的波前遮住一半（直边衍射），几何阴影边缘点上的光强是自由传播时的多少倍？

解 这种情况相当于自由传播时的所有半波带都被遮掉一半，各半环（半波带）对场点贡献的振幅因而减半，而位相关系不变。故此时场点的合成振幅为

$$A(P_0) = \frac{1}{2}A_0(P_0)$$

强度

$$I(P_0) = \frac{1}{4}I_0$$

即几何阴影线上各点的光强是自由传播时的四分之一。而几何阴影区内的光强将急剧衰减，具体计算颇费功夫，可参阅一般光学

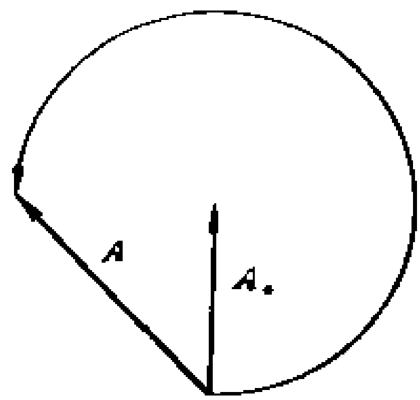
书籍。

4． 求园孔中露出1.5个半波带时衍射场中心强度与自由传播时强度之比。

解 作振动矢量图如图所示，由图可知此时场点振幅

$$A(P_0)=\sqrt{2}A_0(P_0)$$

强度

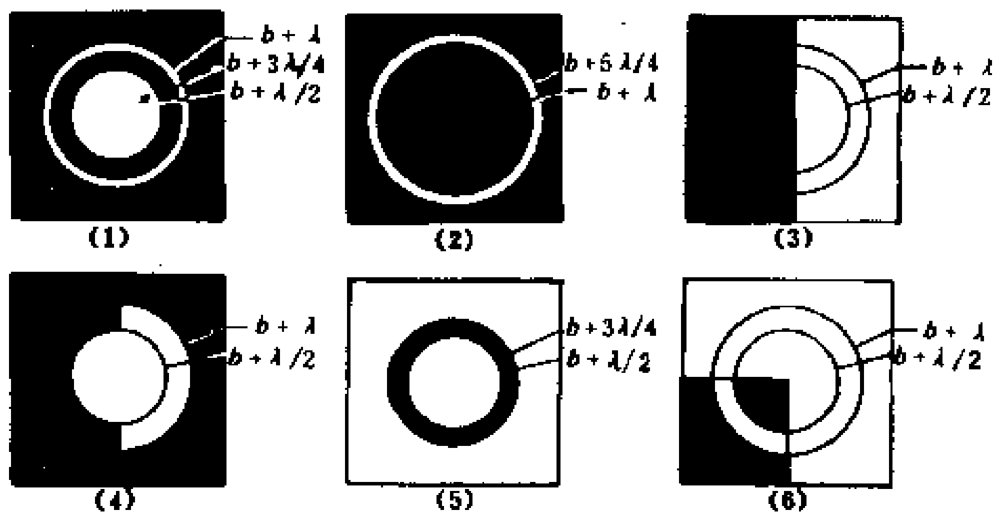


题4图

$$I(P_0)=2I_0(P_0)$$

即1.5个半波带中心强度为自由传播时的2倍。

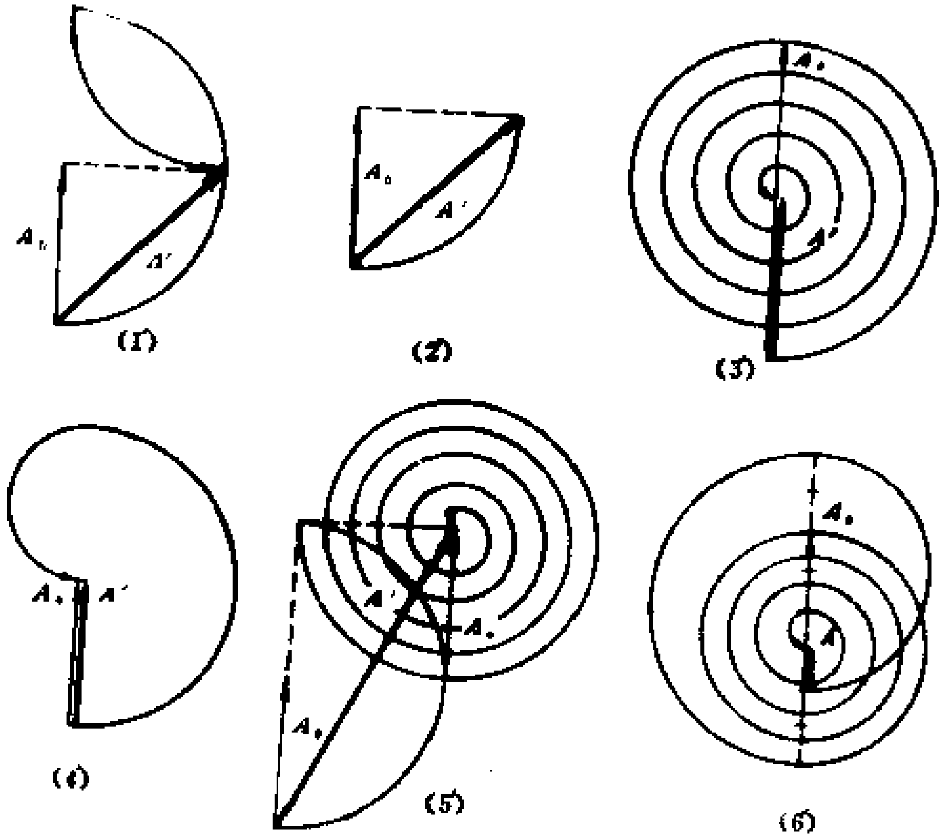
****5．** 用平行光照明衍射屏，屏对波前作如附图（1）—（6）的几种方式的遮挡，分别求轴上场点的光强与自由传播时之比（附图中标出的是该处到场点的光程，其中b是中心到场点的光程）。



题5图

解 设加衍射屏后轴上场点的振幅为A'，光强为I'；自由传播时轴上场点的振幅为A_0，光强为I_0。分别作振动矢量图如附

图（1′）—（6′），由振动矢量图分别求得：



题 5 图

（1） $A' = \sqrt{2}A_0$，　$I' = 2I_0$，即

$$\frac{I'}{I_0} = 2$$

（2） $A' = \sqrt{2}A_0$，　$I' = 2I_0$．即

$$\frac{I'}{I_0} = 2$$

（3） $A' = \frac{1}{2}A_0$，　$I' = \frac{1}{4}I_0$，即

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{1}{4}$$

（4） $A' = A_0$，　$I' = I_0$，即

$$\frac{I'}{I_0} = 1$$

（5） $A' = \sqrt{(2A_0)^2 + A_0^2} = \sqrt{5}A_0$，　$I' = 5I_0$，即

$$\frac{I'}{I_0}=5$$

（6） $A'=\frac{1}{4}A_0$， $I'=\frac{1}{16}I_0$，即

$$\frac{I'}{I_0}=\frac{1}{16}$$

6. 若一个菲涅耳波带片只将前五个偶数半波带挡住，其余地方都开放，求衍射场中心强度与自由传播时之比。

解 如图，此时场点的振幅为

$$A'=A_1+A_3+A_5+A_7+A_9+\frac{1}{2}A_{11}$$
$$\approx 5.5A_1=11A_0$$

强度

$$I'=121I_0$$

即中心强度为自由传播时的121倍

题6图

7. 若一个菲涅耳波带片将前50个奇数半波带遮挡，其余地方都开放，求衍射场中心强度与自由传播时之比。

解 此时场点振幅

$$A=(A_2+A_4+\cdots+A_{98})+\frac{1}{2}A_{100}$$
$$\approx 49.5A_1=99A_0$$

强度 $I=99^2I_0\approx 9800I_0$

***8.** 菲涅耳波带片第一个半波带的半径 $\rho_1=5.0\,\mathrm{mm}$，

（1）用波长 $\lambda=1.06\,\mu\mathrm{m}$ 的单色平行光照明，求主焦距；

（2）若要求主焦距为25cm，需将此波带片缩小多少？

解 （1）根据菲涅耳波带片主焦距公式

$$f=\frac{\rho_1^{2}}{\lambda}$$

算出

$$f=23.6\,\mathrm{m}$$

（2）为使焦距缩小到$f'=25\mathrm{cm}$，则应将上述波带片用照相法收缩。由

$$\frac{f}{f'}=\frac{\rho_1^{2}}{\rho_1'^{2}}$$

求得

$$\frac{\rho_1}{\rho_1'}=\sqrt{\frac{f}{f'}}\approx 10$$

即此波带片的直径需缩小到原来的十分之一。

*9．　如何制作一张满足以下要求的波带片：

（1）它在4000Å紫光照明下的主焦距为80cm；

（2）主焦点的光强是自由传播时的10^3倍左右。

解 （1）由主焦距的要求算出第一个半波带的半径

$$\rho_1=\sqrt{f\lambda}=0.57\mathrm{mm}$$

然后以$\rho_k=\sqrt{k}\rho_1$比例刻划出一系列同心环，再想法交替地遮断（或露出）奇数个半波带，整个波带片的有效尺寸应由光强要求确定。

（2）振幅比为

$$\frac{A}{A_0}=\sqrt{\frac{I}{I_0}}$$

又

$$A=A_2+A_4+\cdots+A_k\approx\frac{k}{2}A_2=kA_0$$

所以波带片包含的最高半波带数目为

$$k = \sqrt{\frac{I}{I_0}} = \sqrt{10^3}$$

$$\approx 32$$

有效面积的半径为

$$\rho = \sqrt{k}\,\rho_1 \approx 3.2\text{mm}$$

10. 一菲涅耳波带片对9000Å的红外光主焦距为30cm，改用6328Å的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

解 波带片主焦距与光波长成反比，所以

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

得

$$f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1$$

$$\approx 43\text{cm}$$

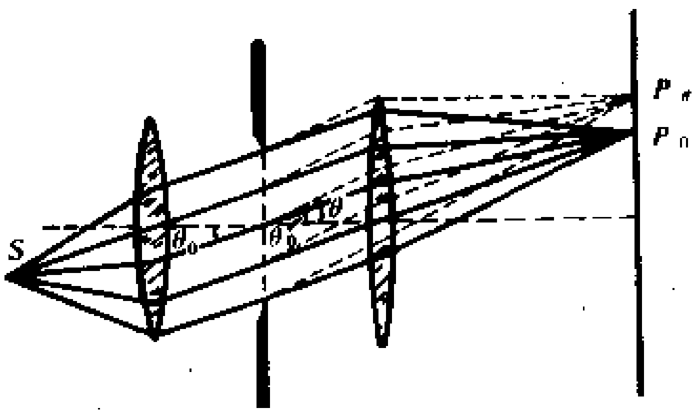
§7. 夫琅和费单缝和矩孔衍射

1. 如附图(*a*)，平行光以θ_0角斜入射在宽度为a的单缝上，试证明：

（1）夫琅和费衍射的强度公式基本不变（忽略倾斜因子），即

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

（I_0为零级中心强度）



题1图(*a*)

只不过α的定义与正入射不同：

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

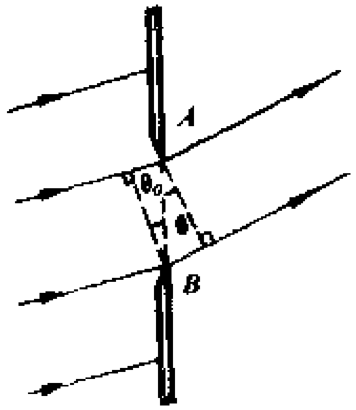
（2）零级中心的位置在几何光学象点处；

（3）零级斑半角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a\cos\theta_0}$$

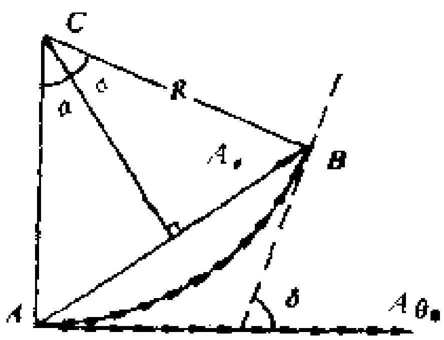
（4）如果考虑到单缝两侧并非同一介质，情况将怎样？

证　（1）与正入射情况相比，斜入射时光孔面上各点次波源的位相是不同的，因此在分析到达场点的各次级扰动之间的位相关系时，不仅要考虑后场光程差的影响，而且还要考虑前场光程差的影响。如图（b），图（c）所示，若用矢量图解法处理，代表边缘两点A，B到达场点的位相差δ角应当成为



（b）

题1图



（c）

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

其它运算与正入射相同，于是强度分布函数成为

$$I(\theta) = I(\theta_0)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

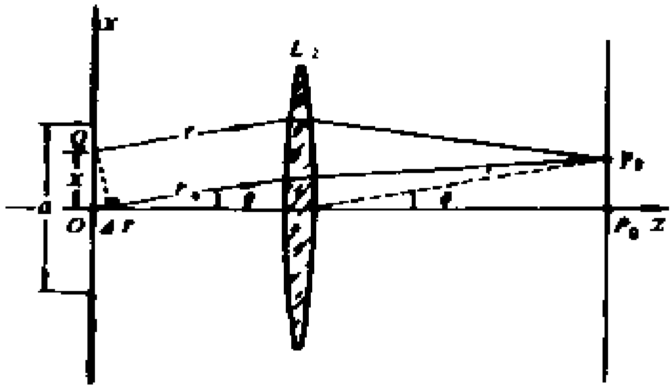
若用复数法处理，应先写出光孔面上的波前函数

$$\tilde{U}_0(x,y)=Ae^{ikx\sin\theta_0}$$

考虑到傍轴条件下的菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式为

$$\tilde{U}(P)\propto\iint\tilde{U}_0e^{ikr}d\Sigma$$

在夫琅和费衍射时改写相因子［见图(d)］



题 1 图(d)

$$ikr=ikr_0+ik(r-r_0)$$

$$=ikr_0-ikx\sin\theta$$

于是单缝夫琅和费衍射场为

$$\tilde{U}(\theta)=C\int e^{ikx\sin\theta_0}e^{-ikx\sin\theta}dx$$

$$=C\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}e^{-ik(\sin\theta-\sin\theta_0)x}dx$$

与正入射时的夫琅和费衍射积分式相比，仅仅是被积函数的相因子中由$(\sin\theta-\sin\theta_0)$替代原来的$\sin\theta$，可见积分结果所得到的强度分布函数与正入射时的形式相同

$$I(\theta)=I(\theta_0)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

只是

$$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

(2) 根据强度分布公式，零级（极强）出现在$\alpha=0$的地方，此时$\theta=\theta_0$，各衍射线（连同入射线）之间无光程差，根据费马原理推得的物象等光程性，这正是几何光学象点的位置。

（3） 令 $\alpha=\pm\pi$，得到零级两侧第一暗点的衍射角 $\theta_{\pm1}$ 满足

$$\sin\theta_{\pm1}-\sin\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

设零级半角宽度为 $\Delta\theta$，则

$$\sin(\theta_0+\Delta\theta)-\sin\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

注意到 $\Delta\theta$ 很小，用微分运算近似，得

$$\cos\theta_0\,\Delta\theta\approx\frac{\lambda}{a}$$

即

$$\Delta\theta\approx\frac{\lambda}{a\cos\theta_0}$$

由此可见，在缝宽 a 不变的条件下，照明单缝的平行光的倾角越大，零级斑的半角宽度也越大，衍射效应更为明显，这时相当于单缝有效宽度 $a\cos\theta_0$ 变小了。

（4） 如果衍射屏前后两侧为不同介质，设前场照明空间折射率为 n_1，后场衍射空间折射率为 n_2，则衍射强度分布函数形式不变，仍为

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

式中 α 应为

$$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda_0}(n_2\sin\theta-n_1\sin\theta_0)$$

λ_0 为真空光波长。零级角方位 θ_0' 由 $\alpha=0$ 给出，它也满足折射定律

$$n_2\sin\theta_0'=n_1\sin\theta_0$$

零级半角宽度 $\Delta\theta$ 由下式确定：

$$n_2\sin(\theta_0' + \Delta\theta) - n_1\sin\theta_0 = \frac{\lambda_0}{a}$$

即

$$n_2\sin(\theta_0' + \Delta\theta) - n_2\sin\theta_0' = \frac{\lambda_0}{a}$$

取微分近似得

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda_0}{n_2 a\cos\theta_0'} = \frac{\lambda_0}{a\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_0}}$$

2． 估算下列情形光束在媒质界面上反射和折射时反射光束和折射光束的衍射发散角。设界面的线度为1 cm，光波波长为0.6 μm，折射率为1.5。

（1）平行光正入射；

（2）入射角为75°；

（3）入射角为89°（掠入射）。

解 考虑到监测元件总有一定的灵敏度，故衍射发散角取半角宽度更为实际，而不必取零级附近的暗点（或暗环）的全部角间隔。根据上题得到的反射光束的半角宽度公式

$$\Delta\theta = \frac{\lambda_0}{a\cos\theta_0} \qquad (\text{空气中}\ \lambda\approx\lambda_0)$$

和折射光束的半角宽度公式

$$\Delta\theta' = \frac{\lambda_0}{a\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_0}}$$

可分别计算反射光束和折射光束的衍射发散角，以 $\lambda_0 = 0.6\ \mu m$，$a = 1$ cm、$n_1 = 1.0$，$n_2 = 1.5$代入，分别算出：

（1）当 $\theta_0 = 0°$ 时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6}{1.0\times10^4} = 0.6\times10^{-4}\ \text{rad} \approx 12.4''$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6}{1.5\times 1.0\times 10^{4}} = 0.4\times 10^{-4}\,\mathrm{rad} \approx 8.2''$$

（2） 当 $\theta_0 = 75^\circ$ 时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6}{1.0\times 10^{4}\times \cos 75^\circ} \approx 2.3\times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

$$\approx 47.4''$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6}{1.0\times 10^{4}\times\sqrt{1.5^2 - \sin^2 75^\circ}} \approx 5.2\times 10^{-5}\,\mathrm{rad}$$

$$\approx 10.7''$$

（3） 当 $\theta_0 = 89^\circ$ 时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6}{1.0\times 10^{4}\times \cos 89^\circ} \approx 3.4\times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

$$\approx 700''$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6}{1.0\times 10^{4}\times\sqrt{1.5^2 - \sin^2 89^\circ}} \approx 5.4\times 10^{-5}\,\mathrm{rad}$$

$$\approx 11.1''$$

以上计算结果表明，虽然掠入射时界面的有效宽度变小，因而衍射发散角变大，但其量级与正入射时相比高不了多少，只有入射角非常逼近90°时，才有明显的增加。

*3. 试用巴俾涅原理证明：互补的衍射屏产生的夫琅和费衍射图样相同。

证 设 a，b 两屏互补，造成的衍射场分别为 $\tilde{U}_a(P)$，$\tilde{U}_b(P)$，自由传播场为 $\tilde{U}_0(P)$，则由巴俾涅原理有

$$\tilde{U}_a(P) + \tilde{U}_b(P) = \tilde{U}_0(P)$$

在夫琅和费衍射中，除几何象点外 $\tilde{U}_0(P)$ 皆等于零．从而，除几

何象点外处处有

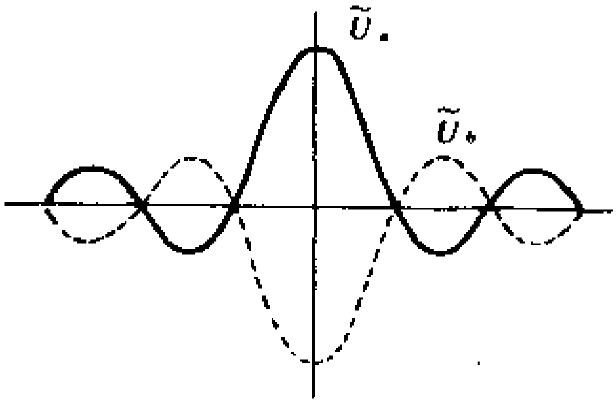
$$\widetilde{U}_a(P) = -\widetilde{U}_b(P)$$

如附图所示。因此

$$I_a(P) = I_b(P)$$

即除零级斑中心以外的区域，互补屏造成的衍射强度分布完全一样。

再看零级斑中心点的情形。从理论上看这是一个奇异点，因为如果不考虑透镜有限口径的衍射，则自由传播时该处成为几何象点——



题 3 图

振幅无限大。若互补屏之一在此处产生的衍射振幅 $U_a(0)$ 为有限值，则另一屏在此处产生的衍射振幅 $\widetilde{U}_b(0)$ 还是无限大。反正它们都是亮的。不过，衍射测量术中利用的是零级斑中心点以外暗点（暗纹或暗环）的角分布或强度分布，并不直接关心零级斑中心点的绝对强度。

*4. 衍射细丝测径仪是将单缝夫琅和费衍射装置中的单缝用细丝代替。今测得零级衍射斑的宽度（两个一级暗纹间的距离）为 1 cm，求细丝的直径。已知光波长 0.63 μm，透镜焦距 50 cm。

解 根据上题分析，细丝夫琅和费衍射强度分布与其互补的单缝强度分布，在象点以外是处处相同的，故零级斑半角宽度取同一公式

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\Delta l}{2f}$$

在本题中应将 a 看作细丝直径，Δl 为零级斑的线宽度。由此算出

$$a=\frac{2f\lambda}{\Delta l}=63\mu\mathrm{m}$$

*5． 在白光照明下夫琅和费衍射的零级斑中心是什么颜色？零级斑外围是什么颜色？

解 白光是由各种波长的成份按一定比例组成的，经夫琅和费衍射后各种波长的零级斑中心仍重合于几何象点。但由衍射反比关系知，零级斑的半角宽度

$$\Delta\theta\propto\lambda$$

即长波比短波更加弥漫，这就必然导致中心点的长波成分减小，短波成分增加，使零级斑的中心不再严格保持白色，短波成分加重的结果应呈蓝白色。同理，零级斑的外围应呈彩色，长波（红色）成分靠外，短波（蓝色）成分靠里。根据菲涅耳-基尔霍夫衍射公式，发生这一现象应是预料中的事情，因为零级中心的振幅

$$\widetilde{U}(P_0)\propto\frac{1}{\lambda}$$

通常所说的"零级无色散"，是指零级中心位置重合，在空间上没有被分离。

*6． 讨论单缝夫琅和费衍射装置有如下变动时，衍射图样的变化［参见附图（a）］：

（1）增大透镜L_2的焦距；

（2）增大透镜L_2的口径；

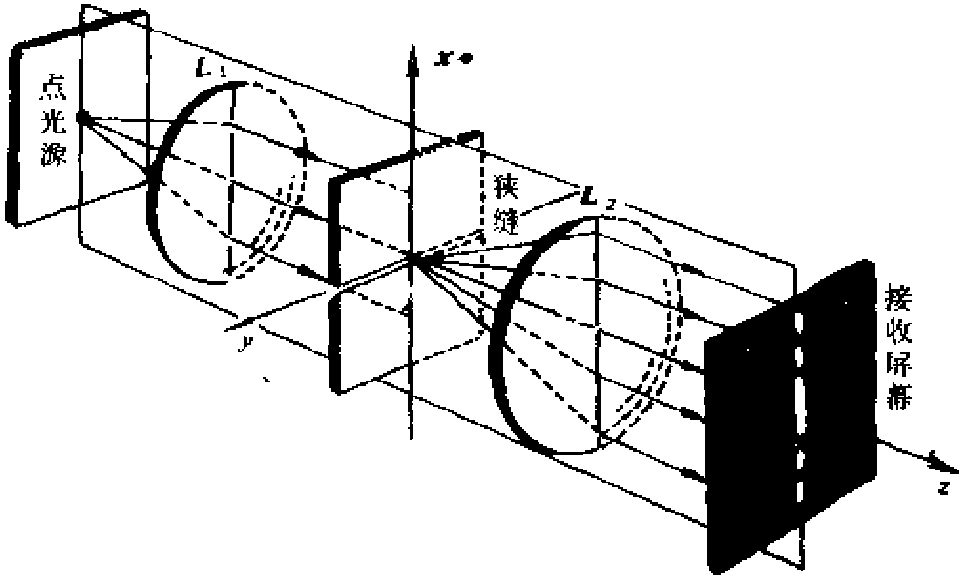
（3）将衍射屏沿光轴z方向前后平移；

（4）衍射屏作垂直于光轴的移动（不超出入射光束照明范围）；

（5）衍射屏绕光轴z旋转；

（6）点光源作垂直于z轴的移动，从轴上移到轴外；

（7）把点光源改成与狭缝平行的线光源。



题 6 图（a）

解 装置未作变动时，衍射图样为沿 x 方向的一系列衍射斑，零级斑在轴上，高级斑对称分布。设缝宽为 a，则零级斑在 x 方向的半角宽度为

$$\Delta\theta_x \approx \frac{\lambda}{a}$$

（1）若增大透镜 L_2 的焦距，衍射图样的形状和零级斑的半角宽度都不变。但亮斑的线度及其间距均同时被放大。

（2）若增大透镜 L_2 的口径，则在接收屏幕上将增加高级衍射斑，原有衍射斑保持不变。

（3）若沿光轴 z 方向前后平移衍射屏，则高级衍射斑将会有增加或减少，衍射屏移近透镜 L_2 时高级斑增加，反之减少，其余衍射斑保持不变。

（4）若将衍射屏作垂直于光轴上下移动时，则零级斑保持不变，但高级斑可能不再对称分布。如衍射屏沿正 x 轴移动，则正 x 方向高级斑减少，而负 x 方向高级斑增多。

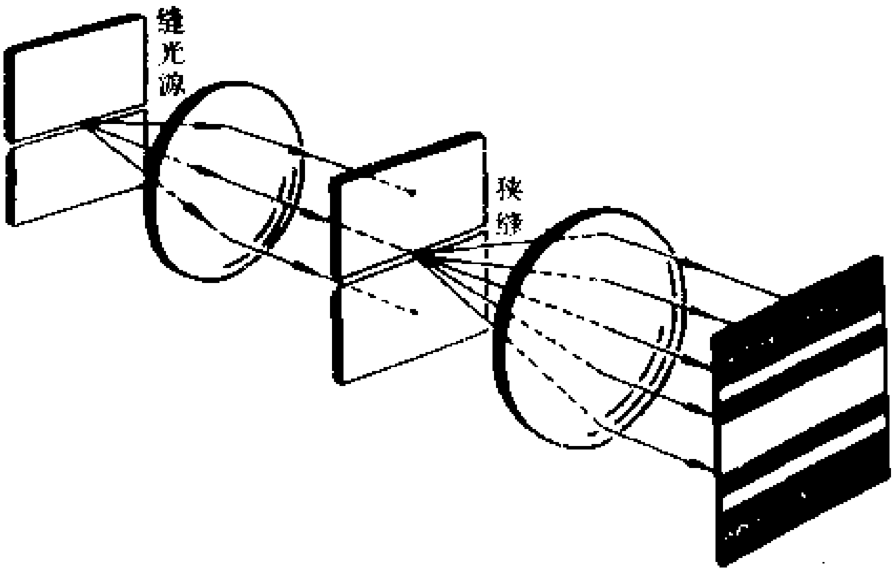
（5）若衍射屏绕 z 轴旋转，则衍射斑整体跟着旋转，衍射

斑连线保持与狭缝正交。

以上五种变动，零级斑中心位置均保持不变。

（6）若点光源由轴上移到轴外，则衍射图样整体向反方向平移，且零级斑中心始终保持在点源的几何光学象点的位置。

（7）线光源可看成一系列非相干点源的集合，每一点源对应一套衍射斑，零级斑的中心分别在各自的几何光学象点的位置。若点光源沿平行狭缝方向扩展为线光源，则各套衍射斑不相干地叠加在一起，就在幕上得到一系列平行直线衍射条纹，其走向与狭缝平行，如附图（b）所示。



题6图（b）

在单缝夫琅和费衍射实验装置中，一定要区别点光源照明和线光源照明（在没有激光的条件下人们经常采用线光源照明）两种情形。如果不加区分地认为直线衍射条纹是由于狭缝造成的，这就犯了概念性的错误。

顺便指出，在线光源照明情形中，如果线光源与狭缝没有保持平行，则条纹会变得模糊不清，仅当二者保持平行时，衍射条纹最为清晰。这一结论不难从以上（6），（7）两种情形的结果中得到，请读者自行分析。这一点在实验中是有实际意义的。

因为在实验中很难事先测定线光源与狭缝是否严格平行，而反过来由条纹的清晰程度（变化）来判断二者的平行程度是极为方便的。

§ 8　光学仪器和象分辨本领

1．　一对双星的角间隔为0.05″，问：

（1）需要多大口径的望远镜才能分辨它们？

（2）此望远镜的角放大率应设计为多少才比较合理？

解　（1）根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

取光波长 $\lambda\approx0.55\,\mu\mathrm{m}$，$\Delta\theta_m = 0.05'' \approx 2.4\times10^{-7}$ rad，算出物镜口径

$$D = 1.22\cdot\frac{\lambda}{\Delta\theta_m}\approx 2.8\ \mathrm{m}$$

（2）仪器可分辨的角间隔（双星）还需要由仪器以适当放大率将它放大为人眼可分辨的最小角度 $\Delta\theta_e\approx1'\approx2.9\times10^{-4}$ rad．因此，与本台望远镜的分辨本领相匹配的视角放大率应当为

$$M = \frac{\Delta\theta_e}{\Delta\theta_m}\approx 1210\text{倍}$$

·2．　一台天文望远镜的口径为2.16 m，由这一数据你能进一步获得关于它在光学性能方面的哪些知识？

解　从物镜口径的数据可以初步推算出一台望远镜的以下几个光学性能：

（1）望远镜的孔径光阑为物镜，从物镜的口径值可以推算出最小分辨角（取光波长为0.55 μm）

$$\Delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}\approx3.1\times10^{-7}\ \mathrm{rad}\approx0.064''$$

（2） 望远镜的有效（正常）放大率应设计为使得最小分辨角放大成人眼最小可分辨角，所以这台望远镜的视角放大率的正常值为

$$M=\frac{\Delta\theta_e}{\Delta\theta_m}=\frac{2.9\times10^{-4}}{3.1\times10^{-7}}\approx935\text{倍}$$

（3） 扩大口径不仅可以提高分辨本领，而且可以提高集光能力——提高观察星体（点源）的主观亮度。根据第一章§12节有关仪器主观亮度的知识可以知道，当实际放大率等于或大于正常放大率时，望远镜出瞳口径将等于或小于眼瞳直径，此时被物镜接收的光通量（来自星体）将全部进入眼瞳，主观亮度是自然主观亮度的 M 倍。

当然实际望远镜一般为反射型。以上由物镜口径的数据对光学性能的推算也适用于反射型。

3． 一台显微镜，已知其 $N.A.=1.32$，物镜焦距 $f_o=1.91$mm，目镜焦距 $f_e=50$mm，求：

（1） 最小分辨距离；

（2） 有效放大率；

（3） 光学筒长。

解 （1） 根据显微镜的最小分辨距离公式

$$\Delta y_m=0.61\frac{\lambda}{N.A.}$$

取光波长 $\lambda=0.55\,\mu$m，算出

$$\Delta y_m\approx0.25\,\mu\text{m}$$

（2） 显微镜的有效（正常）放大率应使仪器可分辨的最小距离放大为人眼可分辨的最小距离

$$\begin{aligned}\Delta y_e&=s_0\Delta\theta_e\qquad(s_0\text{为明视距离})\\&\approx(25\times10^{-2})\times(2.9\times10^{-4})\\&=72.5\times10^{-6}\ \text{m}\\&=72.5\,\mu\text{m}\end{aligned}$$

所以放大率的正常值为

$$M = \frac{\Delta y_e}{\Delta y_m} = 290\text{倍}$$

（3）以上对放大率的要求应由镜头焦距的选取和镜头位置的适当安排来实现，根据显微镜视角放大率公式，本题中的光学筒长应取

$$\Delta = \frac{f_e f_o}{s_0} M \approx 111\,\text{mm}$$

4． 用一架照相机在离地面200km的高空拍摄地面上的物体，如果要求它能分辨地面上相距1m的两点，照相机的镜头至少要多大？设镜头的几何象差已很好地消除，感光波长为4000Å。

解 按题意，要求能分辨的最小角间隔为

$$\Delta\theta_m = \frac{1}{200 \times 10^3} = 0.5 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

该照相机的镜头即为孔径光阑，其最小分辨角公式为

$$\Delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

据此，以 $\lambda = 0.4\,\mu\text{m}$ 代入，算得相机镜头孔径

$$D = 1.22\frac{\lambda}{\Delta\theta_m} = 9.76\,\text{cm}$$

5． 已知地月距离约为 3.8×10^5 km，用口径为1m的天文望远镜能分辨月球表面两点的最小距离是多少？

解 根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

取 $\lambda = 0.55\,\mu\text{m}$，算得

$$\Delta\theta_m = 6.71 \times 10^{-7}\,\text{rad}$$

因此月球表面上能被该望远镜分辨的最小距离为

$$\Delta y_m = l\Delta\theta_m = (3.8 \times 10^5) \times (6.71 \times 10^{-7})$$

$$\approx 255 \times 10^{-3}\mathrm{km} = 255\mathrm{m}$$

6． 已知日地距离约为1.5×10^{8}km，要求分辨太阳表面相距20km的两点，望远镜的口径至少需要多大？

解 按题意，要求能分辨的最小角间隔为

$$\Delta\theta_m = \frac{20}{1.5\times10^{8}} \approx 1.33\times10^{-7}\,\mathrm{rad}$$

取光波长$\lambda=0.55\,\mu\mathrm{m}$，根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

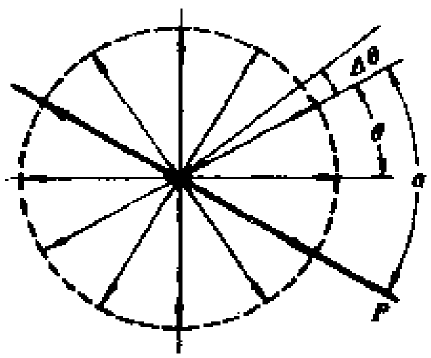
算得该望远镜的口径

$$D = 1.22\frac{\lambda}{\Delta\theta_m} \approx 5.0\mathrm{m}$$

§9 光的横波性与五种偏振态

*1． 试证明自然光通过偏振片后的强度为总强度之一半。

证 自然光是大量的有各种取向的彼此无关的线偏振光的集合，且角分布具有轴对称性（如图）。在此，引入"线偏振数密度"一量来描述大量线偏振集合的角分布。设在角范围θ—$\theta+\Delta\theta$之内，包含线偏振的数目为ΔN，则



题1图

$$\Delta N = \rho(\theta)\Delta\theta$$

式中$\rho(\theta)$为线偏振密度——单位角度内所包含的线偏振数。显然，对于具有轴对称性的自然光来说，$\rho(\theta)$与θ无关，保持为一个常数。由于自然光中的各线偏振光之间无固定位相关联，故其总强度I_0等于各线偏振光强度i的直接相加，即

$$I_0=\sum \Delta I_0=\sum(i\Delta N)=\sum(i\rho\Delta\theta)$$
$$=i\rho\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$=2\pi\rho i$$

透过偏振器 P 的光强应按马吕斯定律先投影再求和，即在 α —$\alpha+\Delta\alpha$ 范围内的线偏振光透过 P 的光强为

$$\Delta I=i\Delta N\cos^2\alpha=i\rho\cos^2\alpha\Delta\alpha$$

透过 P 的光强

$$I=\sum\Delta I=i\rho\sum\cos^2\alpha\Delta\alpha$$
$$=i\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha$$
$$=\pi i\rho$$

由此可见，若用线偏振数密度 ρ 和个别线偏振光强度 i 两个量来表示自然光总强度 I_0 和任意方向的强度 $I(\theta)$ 的话，它们分别为

$$I_0=2\pi i\rho$$
$$I(\theta)=\pi i\rho$$

显然

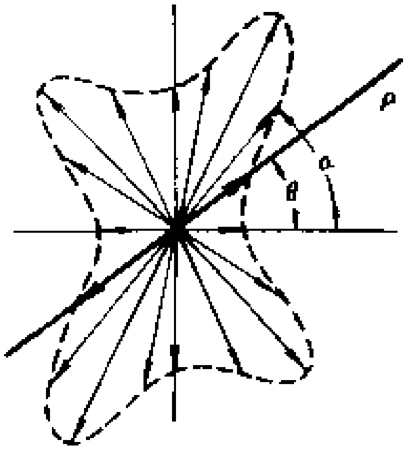
$$I(\theta)=\frac{1}{2}I_0$$

*2． 试论证：对于任意角分布的部分偏振光，经偏振片后一周之内只有两个光强极大方位和两个光强极小方位，而且极大与极小的方位角彼此相隔 $\pi/2$ 角度。

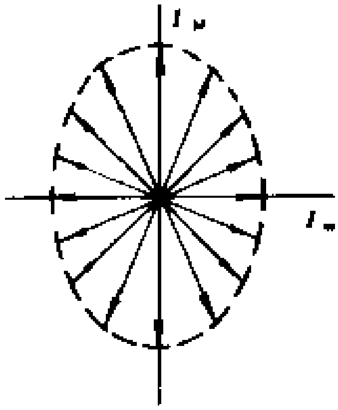
证 如图（a），图（b）所示，部分偏振光是大量的有各种取向的彼此无关的线偏振光的集合，且角分布不具有轴对称性。设其数密度分布函数 $\rho(\alpha)$，个别线偏振光的强度 $i(\alpha)$ 任意［图（a）］，则部分偏振光的总强度为

$$I_0=\sum\Delta I=\sum i(\alpha)\Delta N=\sum i(\alpha)\rho(\alpha)\Delta\alpha$$
$$=\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)d\alpha$$

经偏振片以后的强度



题 2 图(a)



题 2 图(b)

$$I(\theta)=\sum i(\alpha)\Delta N\cos^2(\alpha-\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\cos^2(\alpha-\theta)d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\left[1+\cos(2\alpha-2\theta)\right]d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\cos(2\alpha-2\theta)d\alpha$$

其中第一项

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)d\alpha$$
$$=\frac{1}{2}I_0$$

第二项求积，利用解析函数的中值定理将其转化为

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\cos(2\alpha-2\theta)d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}i(\alpha_0)2\pi\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0-2\theta)$$

上式中 $0<\alpha_0<2\pi$，所以

$$I(\theta)=\frac{1}{2}I_0+\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0-2\theta)$$

函数极值是明显的，当$\theta_1=\alpha_0$，$\theta_3=\alpha_0+\pi$时，得极大光强

$$I_M=\frac{1}{2}I_0+\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)$$

当$\theta_2=\alpha_0+\pi/2$，$\theta_4=\alpha_0+3\pi/2$时，得极小光强

$$I_m=\frac{1}{2}I_0-\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)$$

以上四个方位角依次相隔$\pi/2$。当然，α_0的具体取值决定于角分布函数$\rho(\alpha)$和$i(\alpha)$的具体形式

更有意思的是，若用极大光强I_M和极小光强I_m改写总强度I_0和经偏振片后的光强$I(\theta)$，有

$$I_0=I_M+I_m$$

$$I(\theta)=I_m+(I_M-I_m)\cos^2(\alpha_0-\theta)$$

由$I(\theta)$表达式可以看出，任何一种部分偏振光都可以被看为一种自然光和一个线偏振光的组合，自然光的等效强度为$2I_m$，线偏振光的强度为(I_M-I_m)。

·3． 任意一个线偏振可以分解为两个正交方向振动的合成，这两个正交振动之间是有固定位相差的。对于自然光也可以分解为两个正交方向振动的合成，而这两个正交振动之间是没有固定位相差的，这是为什么？

证 虽然就个别线偏振光而言，其两个正交分量之间是有固定位相关系的，但大量的彼此无固定位相关系的线偏振光，分别在两个正交方向的叠加结果为

$$A_x(t)=\sum_n a_{xn}(t)$$

$$A_y(t)=\sum_n a_{yn}(t)$$

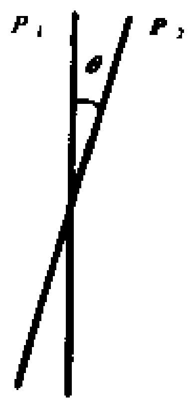
这两个正交振动$A_x(t)$，$A_y(t)$之间是不会有固定位相关系的。

反之，若两者之间有固定位相关系，则由垂直振动的合成知识知道，合成振动必然是椭圆偏振光（或线偏振光，或圆偏振光）。没有利用任何实际的偏振元件，仅单纯地采用数学上的分解合成的手段，是不可能改造自然光的偏振态。于是，我们采用了上述反证法，简单地证明了自然光的两个正交分量之间是无固定位相差的。在以后讨论偏振光干涉问题时，还可以对此命题给出另一方式的证明。

4. 自然光投射到互相重叠的两个偏振片上，如果透射光的强度为（1）透射光束最大强度的1/3，（2）入射光束强度的1/3，则这两个偏振片的透振方向之间夹角是多大？假定偏振片是理想的，即它把自然光的强度严格减小一半。

解 （1）设自然光（即入射光）的总强度为 I_0，通过第一个偏振片 P_1 的强度为 $I_0/2$，当透振方向 $P_2 /\!/ P_1$ 时，最后通过 P_2 的强度为 $I_0/2$，此为最大透光强度

$$I_M = \frac{1}{2} I_0$$



题 4 图

当 P_1、P_2 透振方向夹角为 θ 时（如图），则

$$I_2 = I_1\cos^2\theta = \frac{1}{2} I_0\cos^2\theta$$
$$= I_M\cos^2\theta$$

据题意 $I_2/I_M = 1/3$，算出

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \theta \approx 54^\circ 45'$$

（2）据题意 $I_2/I_0 = 1/3$，算出

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \theta \approx 35^\circ 15'$$

5. 一束自然光入射到一偏振片组上，这组由四块组成，每片的透振方向相对于前面一片沿顺时针方向转过30°角。试问入射光中有多大一部分透过了这组偏振片？

解　设入射自然光总强度为I_0，通过四块偏振片的光强依次为I_1，I_2，I_3，I_4，根据马吕斯定律得

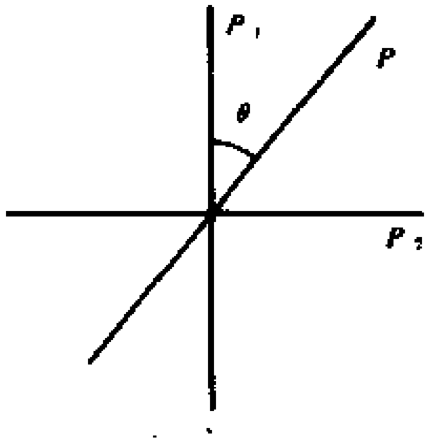
$$I_4 = I_3\cos^2\theta = I_2\cos^4\theta = I_1\cos^6\theta = \frac{1}{2}I_0\cos^6\theta,$$

算出比值为

$$\frac{I_4}{I_0} = \frac{1}{2}\cos^6\theta = \frac{1}{2}\cos^6 30^\circ = \frac{27}{128}$$

$$\approx 21\%$$

6.　将一偏振片沿45°角插入一对正交偏振器之间，自然光经过它们，强度减为原来的百分之几？



题6图

解　设偏振片P_1，P_2正交，则最终通过P_2的光强为

$$I_2 = 0 \quad （消光）$$

若在P_1、P_2之间插入另一块偏振片P，与P_1夹角为θ（如图），则最终通过P_2的光强为

$$I_2' = I\sin^2\theta = I_1\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{8}I_0(\sin 2\theta)^2$$

式中I_0为入射光强，I_1,I分别为通过P_1、P后的光强。当$\theta = 45^\circ$时，比值

$$\frac{I_2'}{I_0} = \frac{1}{8} = 12.5\%$$

§ 10　光在电介质表面的反射和折射　菲涅耳公式

1.　计算从空气到水面的布儒斯特角（水的折射率$n = 4/3$）。

解 光从一介质（折射率为n_1）到另一介质（折射率为n_2）时的布儒斯特角公式为

$$\mathrm{tg}\, i_b = \frac{n_2}{n_1}$$

据此算出从空气到水的布儒斯特角为

$$i_b = \mathrm{tg}^{-1}\frac{4}{3} \approx 53°8'$$

2． 一束光由水射到玻璃上，当入射角为50.82°时反射光全偏振，求玻璃的折射率（已知水的折射率为4/3）。

解 根据布儒斯特角公式得

$$n_2 = n_1\, \mathrm{tg}\, i_b \approx 1.636$$

*3． 计算（1）由空气到玻璃（$n = 1.560$）的全偏振角；

（2）由此玻璃到空气的全偏振角；

（3）在全偏振时由空气到此玻璃的折射光的偏振度；

（4）在全偏振时由此玻璃到空气的折射光的偏振度；

（5）自然光从空气以布儒斯特角入射到平行平面玻璃板以后，最终透射光的偏振度。

解 （1）由空气到此玻璃的全偏振角为

$$i_{1b} = \mathrm{tg}^{-1} n = \mathrm{tg}^{-1} 1.560$$
$$= 57.34° = 57°20'$$

（2）由此玻璃到空气的全偏振角为

$$i_{2b} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{n} = \mathrm{ctg}^{-1} n = 90° - i_{1b}$$
$$= 32°40'$$

由此可见，光束射到空气中的平行平面玻璃板上，当上表面反射发生全偏振时，则折射光在下表面的反射也将发生全偏振，每一界面反射的全部都是s分量。这正是玻片堆起偏器的理论根据之一。

（3）首先导出计算折射光偏振度的一般公式。由空气到玻

璃时，折射光的 p 分量强度为极大，s 分量的强度为极小，所以折射光的偏振度为

$$P=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=\frac{I_{2p}-I_{2s}}{I_{2p}+I_{2s}}=\frac{I_{1p}T_p-I_{1s}T_s}{I_{1p}T_p+I_{1s}T_s}$$

$$=\frac{I_{1p}\frac{n_2}{n_1}|t_p|^2-I_{1s}\frac{n_2}{n_1}|t_s|^2}{I_{1p}\frac{n_2}{n_1}|t_p|^2+I_{1s}\frac{n_2}{n_1}|t_s|^2}$$

$$=\frac{I_{1p}|t_p|^2-I_{1s}|t_s|^2}{I_{1p}|t_p|^2+I_{1s}|t_s|^2}$$

式中 n_1 为空气的折射率，n_2 为玻璃的折射率。自然光的 p 分量和 s 分量的强度相等，即 $I_{1p}=I_{1s}$，故

$$P=\frac{|t_p|^2-|t_s|^2}{|t_p|^2+|t_s|^2}$$

上式即为求折射光偏振度的公式，条件是自然光入射。因此，只要根据菲涅耳公式求出振幅透射率 t_p，t_s，就可得到折射光的偏振度。

以布儒斯特角入射时，由菲涅耳公式得

$$t_p=\frac{2n_1\cos i_{1b}}{n_2\cos i_{1b}+n_1\cos(90^\circ-i_{1b})}$$

$$=\frac{n_1}{n_2}$$

$$t_s=\frac{2n_1\cos i_{1b}}{n_1\cos i_{1b}+n_2\cos(90^\circ-i_{1b})}$$

$$=\frac{2n_1^2}{n_1^2+n_2^2}$$

当然，$t_p=n_1/n_2$的结果也可根据能流守恒关系得到。因为以布儒斯特角入射时 p 分量100%透过，故

$$\mathscr{T}_p=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_p|^2=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_{1b}}|t_p|^2$$

$$=\frac{n_2}{n_1}\mathrm{tg}\, i_{1b}|t_p|^2=\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2|t_p|^2$$

$$=1$$

因此得

$$t_p=\frac{n_1}{n_2}$$

于是，改写以上公式，得到以布儒斯特角入射时折射光偏振度的计算公式为

$$P=\frac{(n_1^2-n_2^2)^2}{(n_1^2+n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2}$$

以$n_1=1$、$n_2=1.560$代入上式得

$$P=9.5\%$$

（4）从上面折射光的偏振度的计算公式中看到，它对n_1与n_2是对称的，满足互易关系。当光线逆向，从玻璃到空气以布儒斯特角入射，折射光的偏振度不变，即

$$P'=P=9.5\%$$

（5）当入射光的 p，s 分量强度相等时，无论是从空气到玻璃，还是从玻璃到空气，均有折射光的 p分量强度极大，s 分量强度极小。因此，以自然光入射到平行平面玻璃板上时，最终透射光的偏振度公式仍为

$$P=\frac{|t_p|^2-|t_s|^2}{|t_p|^2+|t_s|^2}$$

但式中的 t_p，t_s 应由单次透射率的乘积来代替，即

$$t_p = t_{1p} t'_{1p}$$

$$t_s = t_{1s} t'_{1s}$$

式中 t_1，t'_1 分别为平行平板上下表面的振幅透射率。若是 N 块这样的平行平板叠放在一起（玻片堆），则

$$t_p = (t_{1p} t'_{1p})^N$$

$$t_s = (t_{1s} t'_{1s})^N$$

当以布儒斯特角入射时，由本题（3），（4）讨论知道

$$t_{1p} = \frac{n_1}{n_2}, \quad t'_{1p} = \frac{n_2}{n_1}, \quad t_p = 1$$

$$t_{1s} = \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}, \quad t'_{1s} = \frac{2n_2^2}{n_2^2 + n_1^2}, \quad t_s = \left(\frac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^2$$

此时透射光的偏振度简化为

$$P = \frac{1 - \left(\dfrac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^4}{1 + \left(\dfrac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^4}$$

若为玻片堆（N 块），则经历 $2N$ 次折射，最终透射光偏振度为

$$P_N = \frac{1 - \left(\dfrac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^{4N}}{1 + \left(\dfrac{2n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^{4N}}$$

结合本题，取 $n_1 = 1$，$n_2 = 1.560$，$N = 1$，算出

$$P \approx 18.9\%$$

从 P_N 表达式中看出，由于 $2n_1 n_2 / (n_1^2 + n_2^2) < 1$，当 N 越大，则 P_N 值越高。

4． 求自然光透过八块 $n = 1.560$ 的平行玻璃板组成的玻片堆后的偏振度（忽略玻璃对光的吸收）。

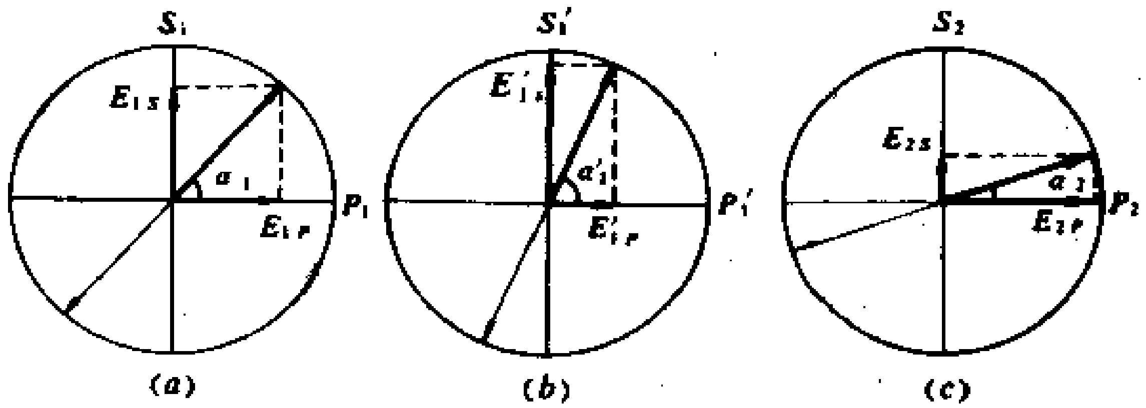
解 由上题的 P_N 公式，令 $N=8$，$n_1=1$，$n_2=1.560$，得此玻片堆获得的透射光的偏振度为

$$P_8=\frac{1-\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{32}}{1+\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{32}}$$

$$\approx 91\%$$

5. 线偏振光的偏振面和入射面间的夹角称为振动的方位角。设入射线偏振光的方位角为 α，入射角为 i，求反射光和折射光的方位角 α_1' 和 α_2（已知两介质的折射率为 n_1 和 n_2）。

解 如图（a），图（b），图（c）所示，由于 p 分量和 s 分量的振幅反射率（或振幅透射率）是不同的，这将导致反射线偏振或折射线偏振的方位角 α_1'，α_2 与入射线偏振的方位角 α_1 一般也不相等。



（a）入射线偏振；（b）反射线偏振；（c）折射线偏振

题 5 图

根据菲涅耳公式导出 α_1 与 α_1'，α_2 的关系为

$$\operatorname{tg}\alpha_1'=\frac{E_{1s}'}{E_{1p}'}=\frac{r_sE_{1s}}{r_pE_{1p}}=\frac{r_s}{r_p}\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$=\frac{\sin(i_2-i_1)}{\sin(i_2+i_1)}\ \frac{\operatorname{tg}(i_2+i_1)}{\operatorname{tg}(i_1-i_2)}\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$= -\frac{\cos(i_2 - i_1)}{\cos(i_2 + i_1)}\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2s}}{E_{2p}} = \frac{t_s E_{1s}}{t_p E_{1p}} = \frac{t_s}{t_p}\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$= \frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}\cdot\frac{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}{2n_1\cos i_1}\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$= \frac{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}\operatorname{tg}\alpha_1$$

本题已知$i_1 = i$，$\alpha_1 = \alpha$。由折射定律$\sin i_2 = n_1\sin i/n_2$，$\cos i_2 = \sqrt{1 - (n_1\sin i/n_2)^2}$。分别代入以上二式得

$$\operatorname{tg}\alpha_1' = \frac{\cos i_1\cos i_2 + \sin i_1\sin i_2}{\sin i_1\sin i_2 - \cos i_1\cos i_2}\operatorname{tg}\alpha_1$$

$$= \frac{\dfrac{n_1}{n_2}\sin^2 i + \cos i\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}{\dfrac{n_1}{n_2}\sin^2 i - \cos i\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{n_2\cos i + n_1\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}{n_1\cos i + n_2\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}\operatorname{tg}\alpha$$

6. 线偏振光以布儒斯特角从空气入射到玻璃($n = 1.560$)的表面上，其振动的方位角为20°，求反射光和折射光的方位角。

解 因布儒斯特角入射，反射光显然为s光，即反射光的方位角为

$$\alpha_1' = 90°$$

在上题结果中，取$i_1 = i_b$，$\operatorname{tg} i_b = \frac{n_2}{n_1}$，进一步简化折射线偏振方位

角公式

$$\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{n_2\cos i_b+n_1\sin i_b}{n_1\cos i_b+n_2\sin i_b}\mathrm{tg}\alpha_1$$

$$=\frac{n_2+n_1\mathrm{tg}i_b}{n_1+n_2\mathrm{tg}i_b}\mathrm{tg}\alpha_1$$

$$=\frac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\mathrm{tg}\alpha_1$$

以$n_1=1$，$n_2=1.560$，$\alpha_1=20°$代入算得

$$\alpha_2\approx 18°18'$$

*7． 设入射光、反射光、折射光的总能流分别为W_1，W'_1，W_2，则总能流反射率$\mathscr{R}$和总能流透射率$\mathscr{T}$定义为

$$\mathscr{R}=\frac{W'_1}{W_1},\quad \mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}$$

（1）当入射光为线偏振光，方位角（见习题5）为α时，证明

$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_p\cos^2\alpha+\mathscr{R}_s\sin^2\alpha$$

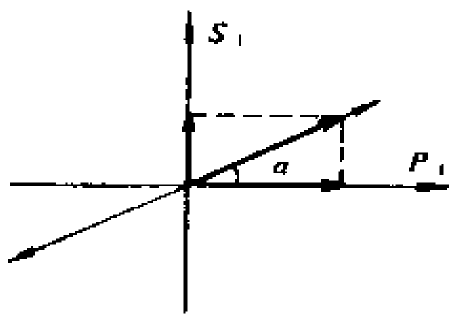
$$\mathscr{T}=\mathscr{T}_p\cos^2\alpha+\mathscr{T}_s\sin^2\alpha$$

（2）证明

$$\mathscr{R}+\mathscr{T}=1$$

（3）设入射光是自然光，求$\mathscr{R}$，$\mathscr{T}$与$\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{T}_p$，$\mathscr{R}_s$的关系；

（4）设入射光是圆偏振光，求$\mathscr{R}$，$\mathscr{T}$与$\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{R}_p$，$\mathscr{T}_s$的关系。



题 7 图

解 （1）总能流反射率为

$$\mathscr{R}=\frac{W'_1}{W_1}=\frac{W'_{1p}+W'_{1s}}{W_1}$$

$$=\frac{\mathscr{R}_pW_{1p}+\mathscr{R}_sW_{1s}}{W_1}$$

如图，根据马吕斯定律

$$I_{1p}=I_1\cos^2\alpha,\quad W_{1p}=W_1\cos^2\alpha$$

$$I_{1s}=I_1\sin^2\alpha,\quad W_{1s}=W_1\sin^2\alpha$$

因此

$$\mathscr{R}=\frac{\mathscr{R}_pW_1\cos^2\alpha+\mathscr{R}_sW_1\sin^2\alpha}{W_1}$$

$$=\mathscr{R}_p\cos^2\alpha+\mathscr{R}_s\sin^2\alpha$$

同理，总能流透射率为

$$\mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}=\frac{W_{2p}+W_{2s}}{W_1}=\frac{\mathscr{T}_pW_{1p}+\mathscr{T}_sW_{1s}}{W_1}$$

$$=\frac{\mathscr{T}_pW_1\cos^2\alpha+\mathscr{T}_sW_1\sin^2\alpha}{W_1}$$

$$=\mathscr{T}_p\cos^2\alpha+\mathscr{T}_s\sin^2\alpha$$

（2）根据能量守恒，入射光的总能流等于反射光和折射光的能流之和，即

$$W_1'+W_2=W_1$$

故

$$\frac{W_1'}{W_1}+\frac{W_2}{W_1}=\frac{W_1}{W_1}=1$$

即 $\mathscr{R}+\mathscr{T}=1$

对任何偏振态的入射光，上式均成立。

（3）自然光入射时，p、s 分量的入射能流相等，且等于入射总能流的一半，即

$$W_{1p}=W_{1s}=\frac{1}{2}W_1$$

所以

$$\mathscr{R}=\frac{W_1'}{W_1}=\frac{W_{1p}'+W_{1s}'}{W_1}=\frac{W_{1p}'}{W_1}+\frac{W_{1s}'}{W_1}$$

$$=\frac{W_{1p}'}{2W_{1p}}+\frac{W_{1s}'}{2W_{1s}}$$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{R}_p+\mathscr{R}_s)$$

$$\mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}=\frac{W_{2p}+W_{2s}}{W_1}=\frac{W_{2p}}{2W_{1p}}+\frac{W_{2s}}{2W_{1s}}$$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{T}_p+\mathscr{T}_s)$$

（4） 圆偏振光入射时也有

$$W_{1p}=W_{1s}=\frac{1}{2}W_1$$

与自然光入射时同理有

$$\mathscr{R}=\frac{1}{2}(R_p+R_s)$$

$$\mathscr{T}=\frac{1}{2}(\mathscr{T}_p+\mathscr{T}_s)$$

本题在于确定各种偏振态入射情况下，R 与$\mathscr{R}_p$、$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{T}$ 与$\mathscr{T}_p$，$\mathscr{T}_s$ 的关系。虽然从菲涅耳公式中可以得到$\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{T}_p$，$\mathscr{T}_s$ 的公式，而实际中有时还关心总的能流反射率和总的能流透射率率，因此本题得到的一些结论是有意义的。

8． 光从空气到玻璃（$n=1.50$）以布儒斯特角入射，试计算：

（1） 能流反射率$\mathscr{R}_p$ 和$\mathscr{R}_s$ 值；

（2） 能流透射率$\mathscr{T}_p$ 和$\mathscr{T}_s$ 值。

解 （1） 以布儒斯特角入射时，反射光无 p 成分，即

$$\mathscr{R}_p=0$$

而 s 成分的能流反射率为

$$\mathscr{R}_s=r_s^2=\left[\frac{\sin(i_2-i_1)}{\sin(i_2+i_1)}\right]^2$$

$$=\sin^2(90^\circ-2i_b)$$

当玻璃折射率$n=1.50$时，算出

$$i_b=\mathrm{tg}^{-1}1.50\approx 56°19'$$

$$\mathscr{R}_s\approx 15\%$$

（2）根据能流守恒直接求出

$$\mathscr{T}_p=1-\mathscr{R}_p=1$$

$$\mathscr{T}_s=1-\mathscr{R}_s\approx 85\%$$

9． 线偏振光从空气到玻璃（$n=1.5$）以45°角入射，方位角为60°，试计算

（1）总能流反射率$\mathscr{R}$和总能流透射率$\mathscr{T}$；

（2）改为自然光入射，$\mathscr{R}$和$\mathscr{T}$为多少？

解 （1）已知入射角$i_1=45°$，$n_1=1$，$n_2=1.5$，则折射角为

$$i_2=\sin^{-1}\left(\frac{n_1\sin i_1}{n_2}\right)\approx 28°7'$$

据此，由菲涅耳公式先求出能流反射率和能流透射率$\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{T}_p$，$\mathscr{T}_s$，即

$$\mathscr{R}_p=r_p^2=\left[\frac{\mathrm{tg}(i_1-i_2)}{\mathrm{tg}(i_1+i_2)}\right]^2\approx 0.9\%$$

$$\mathscr{R}_s=r_s^2=\left[\frac{\sin(i_2-i_1)}{\sin(i_2+i_1)}\right]^2\approx 9\%$$

$$\mathscr{T}_p=1-\mathscr{R}_p\approx 99\%$$

$$\mathscr{T}_s=1-\mathscr{R}_s\approx 91\%$$

再根据题7结果，令$\alpha=60°$，得总能流反射率和透射率为

$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_p\cos^2\alpha+\mathscr{R}_s\sin^2\alpha\approx 7\%$$

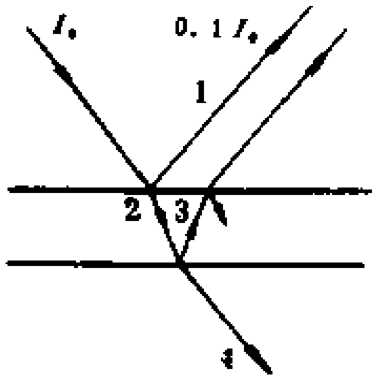
$$\mathscr{T}=\mathscr{T}_p\cos^2\alpha+\mathscr{T}_s\sin^2\alpha\approx 93\%$$

（2）如果自然光入射，则由题7所得公式，算出

$$\mathscr{R}=\frac{1}{2}\ (\mathscr{R}_p+\mathscr{R}_s)\ \approx 5\%$$

$$\mathscr{T}=\frac{1}{2}\ (\mathscr{T}_p+\mathscr{T}_s)\ \approx 95\%$$

10. 已知自然光入射于某平行平面玻璃板上，反射光的强度为入射光的0.10倍（见附图）。取入射能流为一个单位，求图中标出的光线2，3，4的能流（略去玻璃对光的吸收）。



题10图

解 设入射能流为W_0，则光束1，2，3，4能流关系式分别为

$$W_1=\mathscr{R}W_0$$

$$W_2=\mathscr{T}W_0=(1-\mathscr{R})W_0$$

$$W_3=\mathscr{R}'W_2=\mathscr{R}'\mathscr{T}W_0=\mathscr{R}'(1-\mathscr{R})W_0$$

$$W_4=\mathscr{T}'W_2=\mathscr{T}'\mathscr{T}W_0=(1-\mathscr{R}')(1-\mathscr{R})W_0$$

在平行平板情况下，$r'=-r$，$\mathscr{R}'=\mathscr{R}$。按题意$\mathscr{R}=0.1$，算出

$$W_1=10\%W_0$$

$$W_2=90\%W_0$$

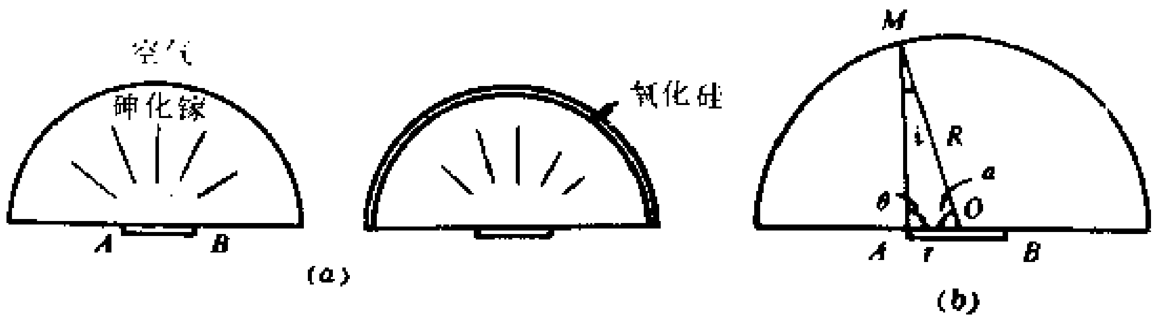
$$W_3=9\%W_0$$

$$W_4=81\%W_0$$

如果要求算出光束2，3，4的光强比值（与入射光强相比），则必须给定玻璃板的折射率，并由$\mathscr{R}=0.1$算出相应的入射角和折射角，方能求得结果，计算是繁杂的。在此情况下，也许图解法更为简单，即比较精确地绘制$\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$曲线，在图上找出$\mathscr{R}=(\mathscr{R}_p+\mathscr{R}_s)/2=0.1$的入射角，按折射定律算出折射角，再往下计算就简单了。

* **11.** 附图（a）所示为一支半导体砷化镓发光管，管芯AB为发光区，其直径$d\approx3$ mm。为了避免全反射，发光管上部

研磨成半球形，以使内部发的光能够以最大的透射率向外输送。如果要使发光区边缘两点A和B发的光不致全反射，半球的半径至少应取多少？已知砷化镓的折射率（对发射的0.9 μm 波长）为3.4。



题11图

解 如图(b)，对发光区边缘点A（或B）有可能在球面上发生全反射。为避免全反射，在动点M变动过程中，使入射角i的最大值不超过临界角。在ΔAMO中以θ为变量，应用三角正弦定理

$$\frac{\sin i}{\sin\theta}=\frac{r}{R}$$

得

$$\sin i=\frac{r}{R}\sin\theta=\frac{d}{2R}\sin\theta$$

当$\theta=\pi/2$时，入射角最大，其正弦值为

$$\sin i_M=\frac{d}{2R}$$

令$\sin i_M<\sin i_c=n_2/n_1=1/3.4$，求出

$$R>1.7d\approx5.1\text{mm}$$

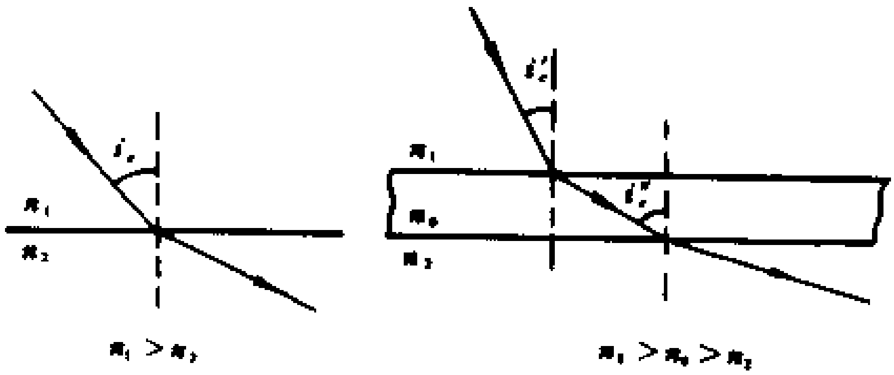
12. 接上题，为了减少光在砷化镓-空气界面的反射，工艺上常在砷化镓表面镀一层氧化硅薄膜，氧化硅的折射率为1.7。现在单纯从几何光学角度提出一个问题，加膜后入射角为多大才不致于在空气表面发生全反射？试与不加膜时相比（设膜很薄，

可按平面板计算）。

解 如图，单界面的临界角i_c满足

$$\sin i_c=\frac{n_2}{n_1}$$

单膜的临界角i_c'，i_c''满足



题12图

$$\sin i_c''=\frac{n_2}{n_0}$$

$$n_1\sin i_c'=n_0\sin i_c''$$

得

$$\sin i_c'=\frac{n_2}{n_1}$$

可见 $i_c'=i_c$

即加单膜不改变发生全反射的（入射）临界角。本题的情况也是如此。

13. 从光密介质到光疏介质，当$\sin i_1>(n_2/n_1)$时发生全反射，作为一种处理方法，我们仍可在形式上维持折射定律$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$，这时$\sin i_2>1$，可认为i_2是个虚折射角，它的余弦也为虚数：

$$\cos i_2=\sqrt{1-\sin^2 i_2}=i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2 i_1-1}$$

试利用菲涅耳公式证明此时 $|r_p|=1$，$|r_s|=1$。

证 只要注意到以下形式的复数

$$\tilde{z}=\frac{a-ib}{a+ib} \quad （i\ 为虚数单位）$$

其模为1，即

$$|\tilde{z}|=\frac{|a-ib|}{|a+ib|}=1$$

便可证明本题。在菲涅耳公式的 r_p，r_s 表达式中，将 $\cos i_2$ 改写为题中已提出的虚数形式，就可以看出 r_p，r_s 都是两个共轭复数的比值，其模为1。

*14． 推导全反射时的相移公式。

解 当 $n_1>n_2$，且 $\sin i_1>(n_2/n_1)$ 时，发生全反射，此时按折射定律在形式上出现

$$\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i_1>1$$

的费解，在菲涅耳公式中直接涉及的 $\cos i_2$ 形式上写成虚数，即

$$\cos i_2=\sqrt{1-\sin^2 i_2}=i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2 i_1-1}$$

式中 i 为虚数单位。令

$$n_2\cos i_1=a_1,\qquad n_1\cos i_2=ib_1$$

$$n_1\cos i_1=a_2,\qquad n_2\cos i_2=ib_2$$

则复振幅反射率为

$$r_p\equiv\frac{\tilde{E}'_{1p}}{\tilde{E}_{1p}}=\frac{A'_{1p}}{A_{1p}}e^{i\delta_p}=\frac{a_1-ib_1}{a_1+ib_1}$$

$$r_s=\frac{\tilde{E}'_{1s}}{\tilde{E}_{1s}}=\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}e^{i\delta_s}=\frac{a_2-ib_2}{a_2+ib_2}$$

由此得到反射光 p，s 振动与入射光 p，s 振动经界面产生的位相差为

$$\delta_p = -2\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_1}{a_1} = -2\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin i_1 - 1}}{\cos i_1}\right]$$

$$\delta_s = -2\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_2}{a_2} = -2\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{n_2}{n_1}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}\right],$$

此时，δ_p，$\delta_s \neq 0$，π。如果线偏振光入射，则反射光中的 p 振动与 s 振动之间的位相差 $\delta_{ps} \neq 0$，π，合成结果为椭圆偏振光。不过，在判断椭圆光是右旋还是左旋时，应注意到我们当初位相正负号的约定——实际位相落后算正号，故实际位相差应当为

$$\varphi_{1p}' - \varphi_{1p} = -\delta_p, \quad \varphi_{1s}' - \varphi_{1s} = -\delta_s$$

即上述 δ_p、δ_s 公式中的负号可以除去。

15.　（1）计算 $n_1 = 1.51$，$n_2 = 1.0$，入射角为 $54°37'$ 时全反射光的相移 δ_p 和 δ_s；

（2）如果入射光是线偏振的，全反射光中 p 振动和 s 振动的位相差为多少？说明两者合成为椭圆偏振光。

解　（1）以 $n_1 = 1.51$，$n_2 = 1.0$，$i_1 = 54°37'$ 代入上题 δ_p、δ_s 公式，算出

$$\delta_p \approx -123°48', \quad \varphi_{1p}' \quad \varphi_{1p} \approx 123°48'$$

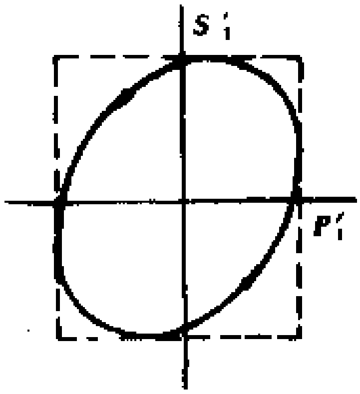
$$\delta_s \approx -78°48', \quad \varphi_{1s}' - \varphi_{1s} \approx 78°48'$$

（2）考察全反射光中，s 振动与 p 振动的实际位相差，设入射光为线偏振光，且 $\varphi_{1s} - \varphi_{1p} = 0$，则

$$\varphi_{1s}' - \varphi_{1p}' = (\varphi_{1s}' - \varphi_{1s}) - (\varphi_{1p}' - \varphi_{1p})$$

$$= -45°$$

两个振动合成结果为左旋的椭圆偏振光，如图所示。



题15图

16. 若在上题中用的光源是氦氖激光，求衰逝波的穿透深度。

解 当光从光密媒质射入光疏媒质，入射角超过临界角时，在光疏媒质中将存在沿纵深方向急剧衰减的衰逝波．其穿透深度为

$$d=\frac{1}{k\sqrt{n_1^2\sin^2 i_1-n_2^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n_1^2\sin^2 i_1-n_2^2}}$$

$$\approx\frac{2}{9}\lambda$$

取氦氖激光波长 $\lambda=6328\,\mathring{A}$，算出

$$d\approx 1406\,\mathring{A}$$

第三章　干涉装置　空间相干性和时间相干性

§1　分波前干涉装置　光场的空间相干性

*1．设菲涅耳双面镜的夹角为20′，缝光源离双面镜交线的距离为10cm，接收屏幕与光源经双面镜所成的两个虚象连线平行，幕与双镜交线的距离为210cm，光波长6000Å，问：

（1）干涉条纹的间距为多少？

（2）在幕上最多能看到几根条纹？

（3）如果光源到双镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有什么变化？

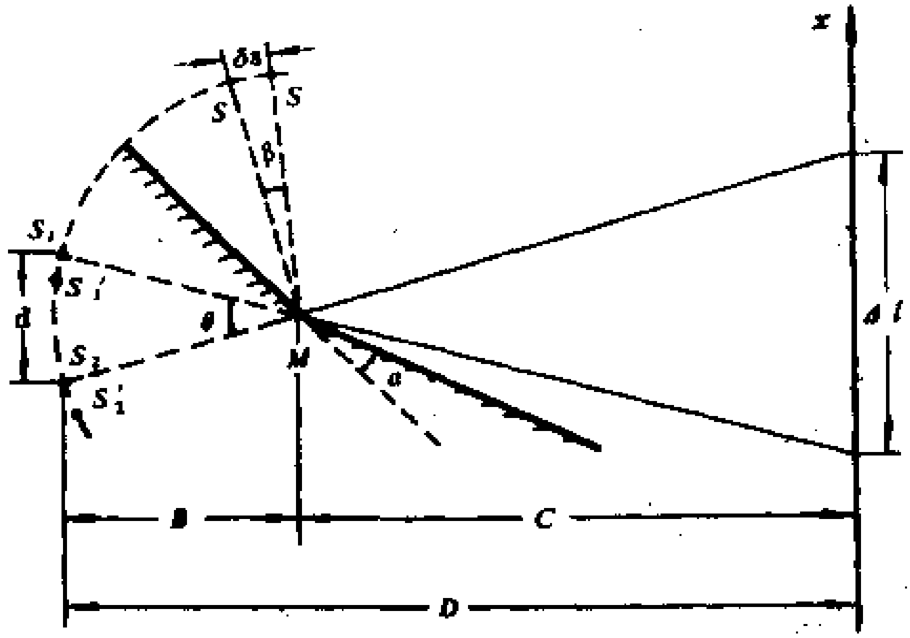
（4）如果光源与双镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有什么变化？

（5）如果要在幕上产生有一定反衬度的干涉条纹，允许缝光源的最大宽度为多少？

解　（1）实际上各种分波前干涉装置都可以杨氏双孔实验为原型，它们是严格的或近似的双象系统，其干涉条纹的间距均可以套用公式

$$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda$$

式中d为双象的距离，D为双象中垂线方向至屏幕的距离。在菲涅耳双面镜装置（如图）中，



题 1 图

$$d = 2\alpha B$$
$$D = B + C$$
$$\Delta x = \frac{B + C}{2\alpha B}\lambda \approx 1.13\text{mm}$$

（2）因幕上两光束的最大交叠区的宽度为

$$\Delta l \approx 2\alpha C$$

所以幕上最多能看到的条纹数为

$$\Delta N \approx \frac{\Delta l}{\Delta x} \approx 22$$

（3）由于实际装置中，$B \ll C$，所以当光源沿纵向MS连线方向移远一倍时，则

$$D = B + C \rightarrow D' = 2B + C \approx D$$
$$d = 2\alpha B \rightarrow d' = 2\alpha \times 2B = 2d$$

于是

$$\Delta x \to \Delta x' \approx \frac{1}{2}\Delta x$$

即条纹间距密集了一倍。而交叠区的宽度 Δl 没有变化，故可见条纹数的最大值增加一倍，即

$$\Delta N' \approx 2\Delta N \approx 44$$

（4） 若点光源横向移动 δs，则虚象点 S_1'，S_2' 随之在半径为 B 的圆弧上移动 $\delta s_1'$，$\delta s_2'$，且

$$\delta s_1' = \delta s_2' = \delta s$$

从而保持 S_1'，S_2' 的间距 d 不变，因此条纹间距 Δx 保持不变。但是，双象中垂线与屏幕的交点位置（零级）随之移动——以 M 为中心转了一个角度

$$\beta \approx \frac{\delta s}{B}$$

反映在屏幕上零级位移为

$$\delta x = C\beta = \frac{C}{B}\delta s$$

换句话说，此时幕上的条纹总体发生一个平移。这一点为下一个问题——扩展光源对干涉场反衬度的影响作了概念上的准备。

（5） 设扩展光源为 b，即其边缘两点间隔 $\delta s = b$，若这两套条纹错开的距离（即零级平移量）δx 正好与 Δx 相等，则幕上反衬度降为 0。据此

$$\delta x = \frac{C}{B}b$$

$$\Delta x = \frac{B+C}{2\alpha B}\lambda$$

令

$$\delta x = \Delta x$$

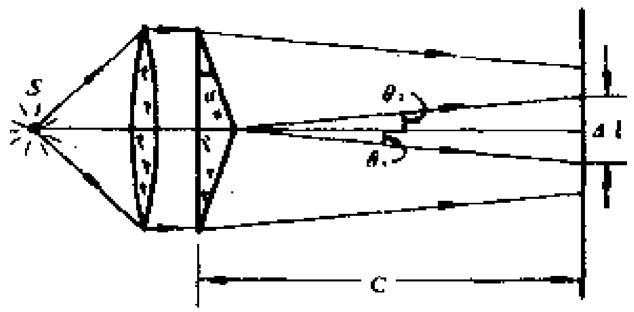
得光源的极限宽度

$$b_1 \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \approx 0.05\text{mm}$$

从以上讨论中可以看到，菲涅耳双面镜的夹角 α 越小，则条纹的间距越大，允许扩展缝光源的宽度越宽，这两点对实际观察是有利的。但是，此时光束的交叠区变小，产生的干涉条纹的数目很少。

*2． 一点源置于薄透镜的焦点，薄透镜后放一个双棱镜（见附图），设双棱镜的顶角为3′30″，折射率为1.5，屏幕与棱镜相距5.0m，光波长为5000Å。求幕上条纹的间距和能出现的条纹数目。

解 （1）点光源置于薄透镜的焦点时，经透镜成为一束平行光正入射于棱镜，经双棱镜偏转，成为两束平行光对称地斜入射于屏幕。设棱镜顶角 α 很小，利用折射定律，并作小角近似，则斜入射的平行光的倾角（见附图）为



题 2 图

$$\theta_1=\theta_2\approx(n-1)\alpha$$

根据第二章关于两束平行光干涉条纹的间距公式

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

得幕上条纹间距为

$$\Delta x\approx\frac{\lambda}{2(n-1)\alpha}\approx 0.49\text{mm}$$

（2）相干范围（交叠区域）的孔径角为

$$\Delta\theta=2\theta_1=2(n-1)\alpha\approx 0.001\ \text{rad}$$

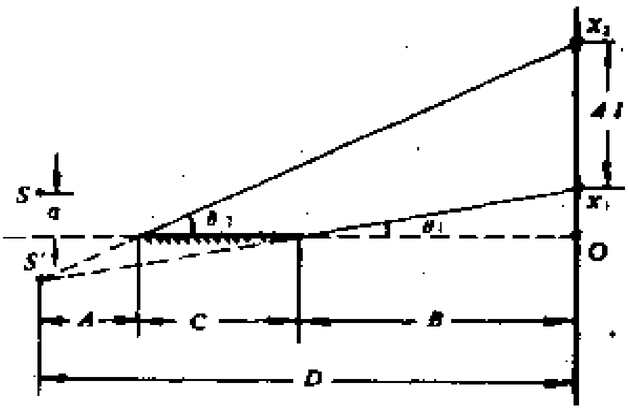
交叠区域的线度为

$$\Delta l=C\Delta\theta\approx 5\ \text{mm}$$

幕上产生的条纹数目为

$$\Delta N=\frac{\Delta l}{\Delta x}=\frac{C}{\lambda}\left[2(n-1)\alpha\right]^{2}\approx 10\text{（条）}$$

*3． 如图，设洛埃镜的镜长$C=5.0$cm，幕与镜边缘的距离$B=3.0$m。缝光源与镜边缘的距离$A=2.0$cm，离镜面高度$a=0.5$mm。光波长为5893Å。求幕上条纹的间距和能出现的干涉条纹数目。



题 3 图

解 洛埃镜为双象干涉装置，双象间隔

$$d=2a$$

按条纹间距公式

$$\Delta x=\frac{D\lambda}{d}=\frac{A+B+C}{2a}\lambda$$

$$\approx\frac{B}{2a}\lambda$$

$$\approx 1.8\ \text{mm}$$

交叠区域的线度

$$\Delta l=\overline{x_1x_2}=\overline{Ox_2}-\overline{Ox_1}$$

$$=(C+B)\,\text{tg}\,\theta_2-B\,\text{tg}\,\theta_1$$

而且

$$\text{tg}\,\theta_2=\frac{a}{A},\quad \text{tg}\,\theta_1=\frac{a}{A+C}$$

考虑到$B\gg A, C$，得

$$\Delta l = \frac{aBC}{A\ (A+C)} \approx 54\text{mm}$$

幕上产生的条纹数目为

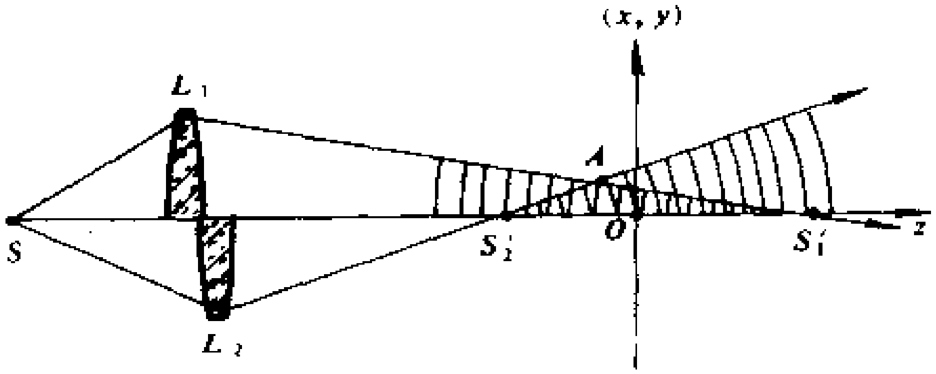
$$\Delta N = \frac{\Delta l}{\Delta x} \approx 30\ (\text{条})$$

* **4.** 附图所示为梅斯林（Maslin）干涉装置，将透镜对剖后再沿光轴方向将两半 L_1，L_2 错开一定距离。光点 S 位于光轴上，S_1'，S_2' 是它的象。

（1）在图上标出相干光束的交叠区；

（2）在交叠区中放一屏幕垂直于光轴，幕上干涉条纹的形状是怎样的？

（3）设透镜焦距为30cm，S 与 L_1 的距离为60cm，L_1 与 L_2 的距离为8.0cm，光波长为5000Å。两个象的中点距离透镜 L_2 有多远？在此放一屏幕，其上接收到的亮纹间距为多少？



题 4 图

解 （1）由点源 S 发出的发散球面波经 L_1 后转化为以 S_1' 为中心的会聚球面波。经 L_2 后转化为以 S_2' 为中心的会聚球面波。在 S_1' 和 S_2' 之右又分别成为两束发散球面波。以 S_2' 为中心的发散球面波和以 S_1' 为中心的会聚球面波发生交叠，如图所示，$\Delta S_1'AS_2'$ 为相干交叠区。

（2）在交叠区内会聚球面波和发散球面波产生干涉。设屏

幕所在平面为 xy 平面， 离 S_1' 的距离为 d_1，离 S_2' 的距离为 d_2。则在 xy 平面上，会聚球面波的复振幅分布为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1\exp i\left[-k\left(d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}\right)-\varphi_{10}\right]$$

发散球面波的复振幅分布为

$$\widetilde{U}_2(x,y)=A_2\exp i\left[k\left(d_2+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)-\varphi_{20}\right]$$

式中 φ_{10} 和 φ_{20} 分别为两列波在中心 S_1' 和 S_2' 处的初位相。

两列波的位相差为

$$\begin{aligned}\delta(x,y)&=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)\\&=k\left(d_2+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)-\varphi_{20}+k\left(d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}\right)+\varphi_{10}\\&=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)+k(d_2+d_1)-(\varphi_{20}-\varphi_{10})\\&=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)+\varphi_0\\&=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)\end{aligned}$$

式中 φ_0 为两列波在坐标原点O处的位相差，因为两列波从点源 S 到原点O的光程都为 $L(SO)$，故 $\varphi_0=0$。

决定条纹形状的是等强度轨迹方程

$$\delta(x,y)=\text{常数}$$

即

$$k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)=常数$$

也即

$$x^2+y^2=\rho^2$$

式中 ρ^2 为常数。上式是以原点为中心的圆的标准方程。由于图中所示交叠区只限于 $x>0$，所以条纹形状是一系列以原点为中心的同心半圆。

（3）由薄透镜物象的高斯公式 $\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$，得 S_1' 离 L_1 的距离为

$$s_1'=\frac{fs_1}{s_1-f}=\frac{30\times60}{60-30}=60\text{cm}$$

S_2' 离 L_2 的距离为

$$s_2'=\frac{fs_2}{s_2-f}=\frac{30\times68}{68-30}=53.7\text{cm}$$

所以两个象的中点离 L_2 的距离为

$$\bar{s}=\frac{53.7+(60-8)}{2}=52.85\ \text{cm}$$

象距计算结果表明，本题 S_1'，S_2' 的实际位置与图中所示不符。应当 S_1' 离 S 较近，S_2' 离 S 较远，相应的交叠区应限于 $x<0$。但这并不影响条纹的形状，以及亮纹半径的计算。

当屏幕放在两个象的中点时，则

$$d_1=d_2=d=0.85\text{cm}$$

$$\delta(x,y)=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)$$

$$=k\frac{x^2+y^2}{d}$$

$$=\frac{k}{d}\rho^2$$

第 n 级亮纹满足 $\delta(x, y) = 2n\pi$，即

$$\frac{k}{d}\rho_n^2 = 2n\pi$$

化简得

$$\rho_n = \sqrt{nd\lambda} = \sqrt{n}\,\rho_1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\rho_1 = \sqrt{d\lambda}$$

这就是亮纹的半径公式，式中 ρ_1 为中心向外第一个亮纹的半径。此公式与菲涅耳波带片的半波带半径公式形成一致。本题

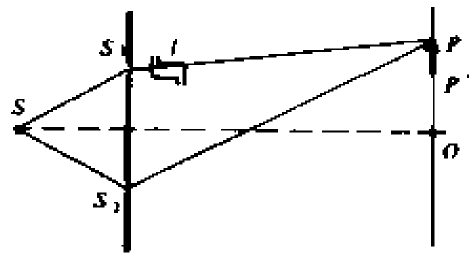
$$\rho_1 \approx 0.065 \text{ mm}$$

亮纹间距

$$\Delta\rho = \rho_{n+1} - \rho_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,\rho_1$$

亮纹半径与 $\sqrt{n}$ 成正比，亮纹间距不等。

*5. 附图所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性结构，在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器，当待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹就会移动。由移过条纹的根数即可推知气体的折射率。



题 5 图

（1）设待测气体的折射率大于空气的折射率，干涉条纹如何移动?

（2）设 $l = 2.0$cm，条纹移过20根，光波长5893Å，空气折射率为1.000276，求待测气体（氯气）的折射率。

解 （1）判断条纹移动趋向的方法是考察特定级别（确定光程差）的条纹，看它在新的条件下出现在什么方位。显然，当待测气体的折射率大于空气折射率时，有充气情况下，光程差 $\Delta L = L(S_2P) - L(S_1lP)$ 变小，则原来光程差为小一些之处 P'

（如图）的条纹现在移向P处，即条纹向上移动。

（2）凡光程差$\Delta L(P)$改变一个波长λ，则P处强度变化一次，也即条纹移过一条。据此，写出光程差改变量$\delta(\Delta L)$与条纹移动数N之关系为

$$\delta(\Delta L)=N\lambda$$

本题光程差的改变是由一路$L(s_1 lP)$光程改变引起的，即

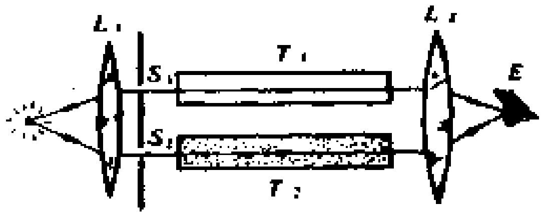
$$\begin{aligned}\delta(\Delta L)&=\delta L(S_1 lP)\\&=(n-n_0)l\\&=\Delta n l\end{aligned}$$

于是

$$\Delta n=\frac{N\lambda}{l}$$

$$\begin{aligned}n&=n_0+\Delta n=n_0+\frac{N\lambda}{l}\\&\approx 1.000276+0.0005893\\&\approx 1.0008653\end{aligned}$$

*6. 瑞利干涉仪的结构和使用原理如下（参见附图），以钠光灯作为光源置于透镜L_1的前焦点，在透镜L_2的后焦面上观测干涉条纹的变动，在两个透镜之间安置一对完全相同的玻璃管T_1和T_2。实验开始时，T_2管充以空气，T_1管抽成真空，此时开始观察干涉条纹。然后逐渐使空气进入T_1管，直到它与T_2管的气压相同为止。记下这一过程中条纹移动的数目。设光波长为5893Å，管长20cm，条纹移动98根，求空气的折射率。



题6图

解 设空气折射率为n，真空折射率为n_0，则实验过程中两管光程差的变化等于T_1管中光程的变化

$$\delta(\Delta L)=\Delta n l=N\lambda$$

所以

$$n=n_0+\Delta n=1+\frac{N\lambda}{l}$$

$$\approx 1.000289$$

* **7**．用钠光灯作杨氏双缝干涉实验，光源宽度被限制为 2 mm，带双缝的屏离缝光源2.5m。为了在幕上获得可见的干涉条纹，双缝间隔不能大于多少？

解 根据光场空间相干性反比关系

$$b\Delta\theta_1\approx\lambda$$

在光源宽度 b 给定的情况下，干涉孔径角（即双缝对光源所张的角间隔）$\Delta\theta$ 必须满足

$$\Delta\theta<\Delta\theta_1\approx\frac{\lambda}{b}$$

即双缝间隔

$$d=R\Delta\theta<R\Delta\theta_1=\frac{R\lambda}{b}$$

$$\approx 0.74\text{mm}$$

才能在幕上产生有一定反衬度的可观测的条纹。

* **8**．一个直径为1cm的发光面元，如果用干涉孔径角量度的话，其空间相干范围是多少弧度？如果用相干面积量度，问 1 m 远的相干面积为多大？10m 远的相干面积为多大？

解 设光波长为0.55μm，若空间相干范围用孔径角 $\Delta\theta$ 量度的话，则

$$\Delta\theta\approx\frac{\lambda}{b}=\frac{0.55}{1\times10^4}$$

$$\approx 0.55\times10^{-4}\ \text{rad}\approx 11''$$

在 $R=1$ m 远的相干面积为

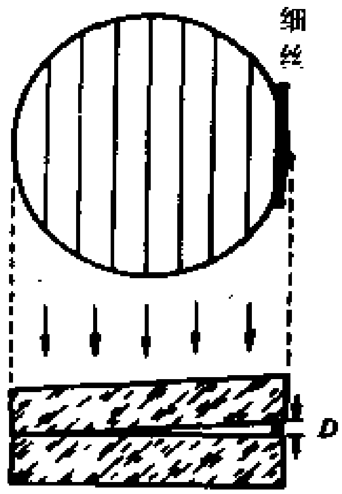
$$\Delta S_1\approx\frac{\pi}{4}(R\Delta\theta)^2\approx 0.0024\text{mm}^2$$

在$R=10$m远的相干面积为

$$\Delta S_2 \approx 0.24\text{mm}^2$$

§2 薄膜干涉（一）——等厚条纹

1. 把直径为D的细丝夹在两块平玻璃砖的一边形成尖劈形空气层（附图下方），在钠黄光（$\lambda=5893\text{Å}$）的垂直照射下形成如附图上方所示的干涉条纹，试问D为多少？



题1图

解 薄膜表面等厚条纹的一条重要性质是，不论条纹形状如何，相邻两条纹所在位置的厚度差为半个波长。因此，相隔N个条纹两处的厚度差为

$$\Delta h = N\frac{\lambda}{2}$$

据此，本题细丝直径

$$D = 8\times\frac{\lambda}{2}\approx 2.36\mu\text{m}$$

***2.** 块规是机加工里用的一种长度标准，它是一钢质长方体，它的两个端面经过磨平抛光，达到相互平行。附图中G_1，G_2是同规号的两个块规，G_1的长度是标准的，G_2是要校准的。校准方法如下：把G_1和G_2放在钢质平台面上，使面和面严密接触，G_1，G_2上面用一块透明平板T压住。如果G_1和G_2的高度（即长度）不等，微有差别，则在T和G_1，G_2之间分别形成尖劈形空气层，它们在单色光照射下各产生等厚干涉条纹。

（1）设入射光的波长是5893Å，G_1和G_2相隔5 cm（即图

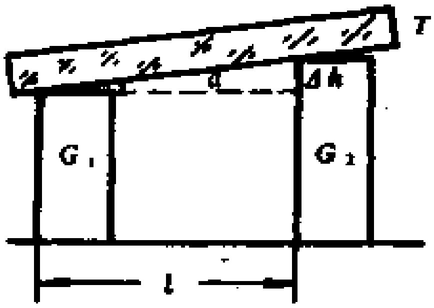
中的l），T 和G_1，G_2 间干涉条纹的间距都是0.5mm，试求G_2 和G_1的高度之差。怎样判断它们谁长谁短？

（2）如果T 和G_1 间干涉条纹的间距是0.5mm，而T 和G_2 间的是0.3mm，则说明什么问题？

解 （1）如图，先由条纹间距算出空气层劈角α，再由两块规距离l算出高度差

$$\Delta h \approx \alpha l = \frac{\lambda}{2\Delta x} l$$

$$\approx 29.47\mu m$$



题 2 图

当然，要判断哪块高，就不是图上画的那么显而易见了，仅靠静态条纹的性质也是无法作出判断的。为此，轻压盖板T的中部，两处条纹疏密变化正好相反。条纹变密的一端块规长，条纹变疏的一端块规短。

（2）这说明G_2 上下两表面有不平行度，致使其上表面并不严格平行G_1 的上表面，造成两边空气层劈角不等，劈角差（用以量度不平行度）为

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \left(\frac{1}{\Delta x_2} - \frac{1}{\Delta x_1}\right)\frac{\lambda}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{0.3\text{mm}} - \frac{1}{0.5\text{mm}}\right)\frac{\lambda}{2}$$

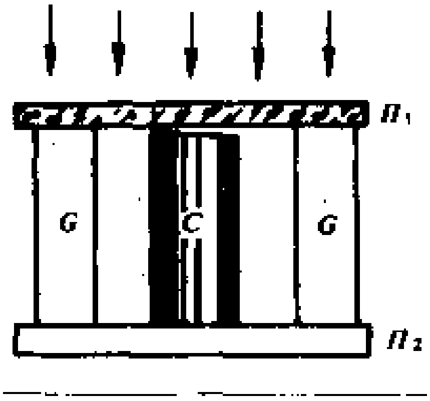
$$\approx 3.93\times 10^{-4}\ \text{rad} \approx 1.35'$$

*3． 附图所示为一种干涉膨胀计。G 为标准的石英环，C 为待测的柱形样品．由于它的膨胀系数与石英环的不同，当温度改变时，柱体C 的上表面与石英平板Π_1 之间楔形空气层的厚度就会改变。现已知样品与石英环的高度约为 1 cm，当温度升高100℃时，视场中的干涉条纹移过20根，求样品的线膨胀系数。设光波长为5893 Å，石英的线膨胀系数为0.35×10^{-6} / ℃。

解 按题意，说明样品上方空气层的厚度改变了

$$\Delta h = \pm N\frac{\lambda}{2}$$

式中N为条纹移过的根数。空气层厚度的改变是由于标准石英环与样品的线膨胀系数不等引起的。设石英和样品的线膨胀系数分别为α_1，α_2，则线膨胀系数之差



题 3 图

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{l_2(T) - l_0}{l_0 T} - \frac{l_1(T) - l_0}{l_0 T}$$

$$= \frac{l_2(T) - l_1(T)}{l_0 T}$$

式中

$$l_2(T) - l_1(T) = \Delta h$$

故得

$$\Delta\alpha = \pm\frac{N\lambda}{2 l_0 T} \approx \pm 5.89\times 10^{-6} /\ ℃$$

以上分析并未确认空气层的厚度是变厚了还是变薄了，因而并未确认线膨胀系数谁大谁小，这只能由条纹移动的趋向来确定。如果条纹移动方向朝交棱，说明空气层变厚，样品线膨胀小于石英环。总之，样品的线膨胀系数有两个可能的取值，即

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha,$$

$$\approx 6.24\times 10^{-6} /\ ℃ \quad 或 -5.54\times 10^{-6} /\ ℃$$

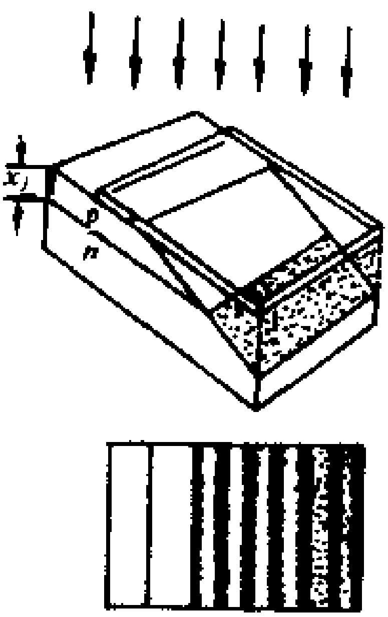
* **4.** 附图（a）所示为一种测pn结结深x_j的方法。在n型半导体的基质硅片表面经杂质扩散而形成p型半导体区。p区

与 n 区的交界面叫 pn 结，pn 结距表面的深度（即 p 区厚度）x_j 叫结深。在半导体工艺上需要测定结深，测量的方法是先通过磨角、染色，使 p 区和 n 区的分界线清楚地显示出来，然后盖上半反射膜，在它与硅片之间形成尖劈形空气薄膜。用单色光垂直照射时，可以观察到空气薄膜的等厚干涉条纹。数出 p 区空气薄膜的条纹数目 Δk 即可求出结深

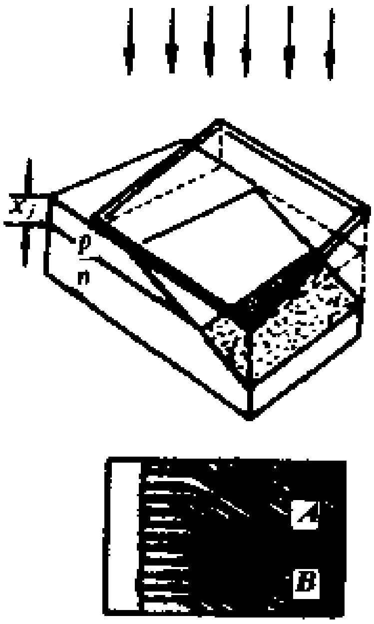
$$x_j = \Delta k \frac{\lambda}{2}$$

由于光在金属或半导体表面反射时位相变化比较复杂，用本方法测量结深 x_j 没有考虑此位相突变，因此测量结果不太精确。更精确的测量方法见附图（b），半反射膜不是象在图（a）中那样紧贴在 p 区上表面，而是一端稍微往上翘一点，观察到的干涉条纹如图（b）下方所示。试说明

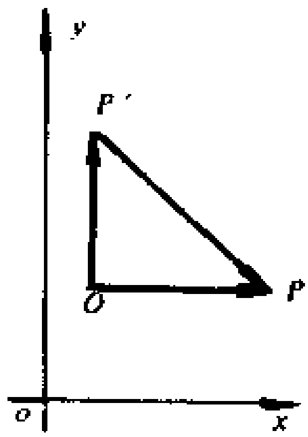
（1）干涉条纹为什么会是这样的？



(a)



(b)



(c)

题 4 图

（2）若用 $\lambda=5500\text{Å}$ 的单色光照明，测得 AB 间的距离为 1.1mm，斜干涉条纹的间隔为0.20mm，结深 x_j 为多少？

（3）此法比图（a）所示的方法精确在哪里？

解 （1）薄膜表面等厚条纹形状与空气膜等厚线轨迹一致。P区上表面的盖片只沿一个方向翘起，交棱沿 x 方向，等厚线平行 x 轴。p 区斜面交棱沿 y 轴，而上方盖片交棱沿 x 轴，合成结果此区域的尖劈交棱就是斜的了。或者作如下更细致的分析，在斜面中间任取一点 O 为参考点［图（c）］，如果仅有斜面下倾，则沿 x 方向，h（p）<h（O），如果仅有盖片在另一正交方向翘起，则沿 y 方向，h（P'）=h（O），而两者同时起作用时，使h（P'）>h（P），即等厚线轨迹理应为斜线。

（2）用读数显微镜进行测量时，先选定左侧一组条纹（平行 x 轴）中的一条为基准，以其几何延长线的交点 A 为起点，沿 y 轴测长至该条纹实际走向的交点 B，所得数据如题。等厚点的位移（从 A 移至 B）正是斜面结深引起的。所以结深为

$$
\begin{aligned}
x_j &= \Delta k\frac{\lambda}{2}\\
&= \frac{AB}{\Delta y}\cdot\frac{\lambda}{2} = \frac{1.1\times10^3}{0.20\times10^3}\times\frac{0.55}{2}\\
&\approx 1.51\,\mu\text{m}
\end{aligned}
$$

（3）这种方法避开了精确判断盖片与 p 区上表面交棱的困难。如果采用第一种方法，让盖片与 p 区上表面密接，则由于位相变化的复杂性，其右侧交棱处的干涉强度不一定是极大（亮纹）或极小（暗纹），换句话说，人们很难在干涉场中精确认定交棱位置，因而条纹数目就难以精确，其误差与干涉测厚精度是可比的，这就大大降低了测量精度。而这种改进型的方法，从根本上避开了上述困难。即使要知道交棱的位置也不难，它正是整套干涉条纹拐点的连线。

5． 测得牛顿圈从中间数第五环和第十五环的半径分别为0.70mm和1.7mm，求透镜的曲率半径。设光波长为0.63μm 。

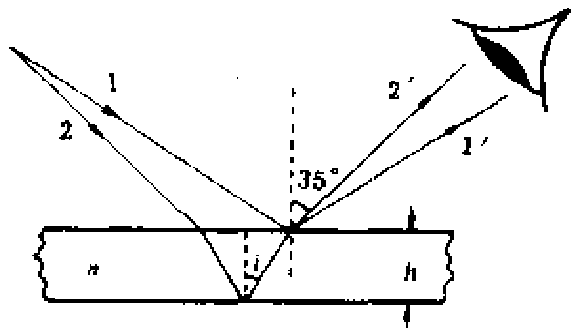
解 考虑到牛顿环的中心点不一定密接，可靠的测量方法应当如本题所述，这时干涉环的半径与透镜曲率半径的关系应当修改为

$$R = \frac{r^2_{k+m} - r_k^2}{m\lambda}$$

重要的是两圈干涉环的相隔几条m数，而不是绝对级别k数。取$r_{k+m} = 1.7\text{mm}$，$r_k = 0.70\text{mm}$，$m = 15 - 5 = 10$，$\lambda = 0.63\mu\text{m}$，算得透镜的曲率半径为

$$R \approx 381\ \text{mm}$$

6． 肥皂膜的反射光呈现绿色，这时膜的法线和视线的夹角约为35°，试估算膜的最小厚度。设肥皂水的折射率为1.33，绿光波长为5000Å。



题 6 图

解 考虑到目前存在半波损，出现亮场的表观光程差应满足（参见附图）

$$2nh\cos i = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

令$k = 0$，得肥皂膜的最小厚度为

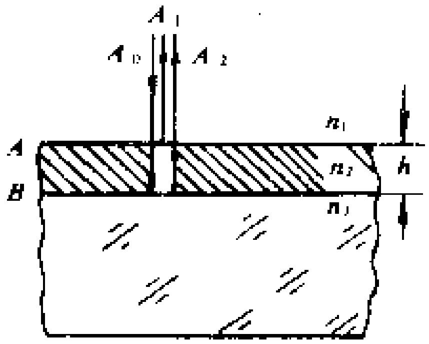
$$h_0 = \frac{\lambda}{4n\cos i} = \frac{\lambda}{4n\sqrt{1-\sin^2 i}} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 35^\circ}}$$

$$= \frac{5000}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 35^\circ}} \approx 1042\text{Å}$$

*7. 在玻璃表面上涂一层折射率为1.30的透明薄膜，设玻璃的折射率为1.5。

(1) 对于波长为5500Å的入射光来说，膜厚应为多少才能使反射光干涉相消？这时光强反射率为多少？与不加膜时相比，光强反射率降了多少？

(2) 对波长为4000Å的紫光和7000Å的红光来说，(1)问所得的厚度在两束反射相干光之间产生多大的位相差？（不考虑色散。）



题7图

解 (1) 如图，因这时膜层为低膜，即 $n_1 < n_2 < n_3$，反射两光束之间无半波损，有效光程差等于表观光程差。为达反射光干涉相消，应使光程差为

$$\Delta L = 2n_2 h = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

若取 $k = 0$，则膜厚

$$h = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{5500}{4 \times 1.30} \approx 1058\,\text{Å}$$

此时反射光振幅（双光束干射近似）为

$$A = A_1 - A_2$$

式中

$$A_1 = r_A A_0 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} A_0$$

$$= \frac{1.3 - 1.0}{1.3 + 1.0} A_0$$

$$\approx 13\% A_0$$

$$A_2 = A_0 t_A r_B t'_A = r_B (1 - r_A^2) A_0$$

$$= \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} (1 - r_A^2) A_0$$

$$= \frac{1.5 - 1.3}{1.5 + 1.3} (1 - 0.13^2) A_0 = 0.07 \times 0.98 A_0$$

$$\approx 6.9\% A_0$$

所以膜层反射光强

$$I = (A_1 - A_2)^2 = [r_A - r_B (1 - r_A^2)]^2 I_0$$

$$\approx 0.37\% I_0$$

反射率

$$R' = \frac{I}{I_0} \approx 0.37\%$$

此时接近完全消反射。若无薄膜，空气玻璃单界面反射率为

$$R = \left(\frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1}\right)^2 = 4\%$$

由于自然光正入射时光强总反射率

$$R = R_p = R_s$$

所以上面求得的即为总的光强反射率。可见有了薄膜以后，反射率下降了

$$\Delta R = R - R' \approx 3.6\%$$

（2）以上厚度只对原来考虑的特定波长5500Å满足反射相消（反射两光束位相差π），对别的波长就不是这样了。例如对$\lambda_1 = 4000$Å的紫光，反射两光束的位相差

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} 2 n_2 h = \frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_1} \pi = \frac{5500}{4000} \pi$$

$$= 1.375\pi \ (\mathrm{rad})$$

对 $\lambda_2 = 7000\,\text{Å}$ 的红光，反射两光束的位相差

$$\delta_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2}\pi = \frac{5500}{7000}\pi$$

$$\approx 0.7857\pi\ (\text{rad})$$

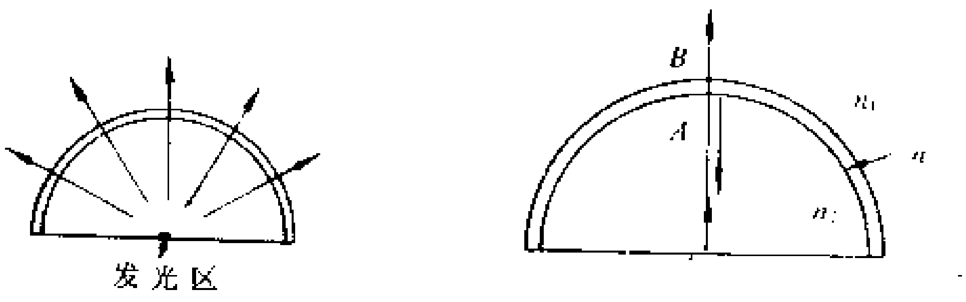
***8．** 砷化镓发光管制成半球形，以增加位于球心的发光区对外输出功率，减少反射损耗。已知砷化镓发射光波长为9300Å，折射率为3.4。为了进一步提高输出光功率，常在球形表面涂敷一层增透膜［见附图（a）］。

（1）不加增透膜时，球面光强反射率有多大？

（2）增透膜的折射率和厚度应取多大？

（3）如果用氟化镁（折射率为1.38）能否增透？光强反射率有多大？

（4）如果用硫化锌（折射率为2.58）能否增透？光强反射率还有多大？



（a）　　（b）

题 8 图

解　（1）如图（b），不加增透膜时，单界面 $n_2 - n_1$ 的光强反射率

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{3.4 - 1.0}{3.4 + 1.0}\right)^2 \approx 29.8\%$$

（2）如欲完全消反射，膜层折射率和光学厚度必须同时满足以下两个条件，即

$$\begin{cases} n = \sqrt{n_1 n_2} \\ nh = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4} \quad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

取 $n_1=1.0$，$n_2=3.4$，$\lambda=9300\text{Å}$，$k=0$，算出

$$n\approx 1.84,\ h\approx 1264\text{Å}\approx 0.13\mu\text{m}$$

（3）如果只要求增透，即使不是完全消反射，也应使膜层光学厚度 $nh=(2k+1)\lambda/4$，而且应是低膜，即 $n_1<n<n_2$。因此，选用折射率 $n=1.38$ 的氟化镁作膜层，是可以增透的。以双光束干涉近似计算反射光强 I，设入射光振幅为 A_0，则经界面 A 一次反射光振幅为 $A_1=A_0r_A$，经界面 B 再反射回来的透射光振幅为 $A_2=A_0t_Ar_Bt'_A$，在正入射情况下

$$r_A=\frac{n_2-n}{n_2+n}=\frac{3.4-1.38}{3.4+1.38}\approx 42.3\%$$

$$r_B=\frac{n-n_1}{n+n_1}=\frac{1.38-1.0}{1.38+1.0}\approx 16.0\%$$

$$t_At'_A=(1-r_A^2)\approx 82.1\%$$

考虑到上述两束光之位相差为 π，故膜层反射光强为

$$\begin{aligned} I &= (A_1-A_2)^2 \\ &= [r_A-r_B(1-r_A^2)]^2 A_0^2 \end{aligned}$$

光强反射率为

$$\begin{aligned} R &= \frac{I}{I_0}=[r_A-r_B(1-r_A^2)]^2 \\ &\approx 8.5\% \end{aligned}$$

（4）如果选用折射率 $n=2.35$ 的硫化锌作膜层，同理可以增透，光强反射率

$$R=[r_A-r_B(1-r_A^2)]^2$$

式中

$$r_A = \frac{3.4 - 2.35}{3.4 + 2.35} \approx 18.3\%$$

$$(1 - r_A^2) \approx 96.7\%$$

$$r_B = \frac{2.35 - 1.0}{2.35 + 1.0} \approx 40.3\%$$

算出

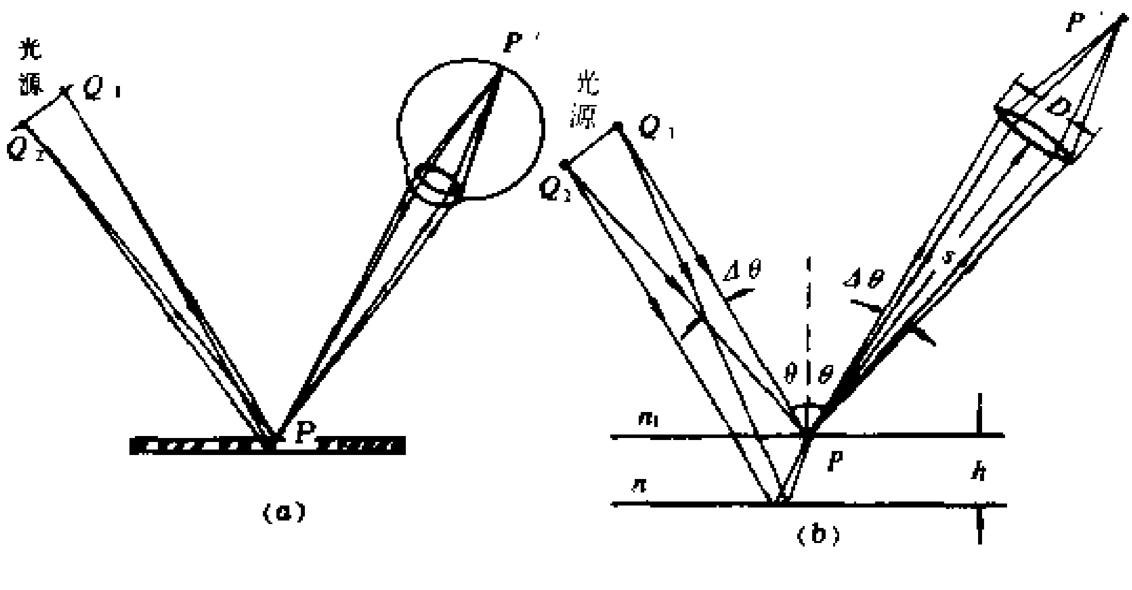
$$R \approx 4.3\%$$

* **9**. 如附图(a)，用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹。设薄膜折射率为1.5，上方为空气，瞳孔直径为3 mm，与观察点P相距30cm，视线与表面法线夹角30°。

(1) 分别计算膜厚2 cm及20μm两种情况下，点源Q_1，Q_2在观察点P产生的光程差改变量$\delta(\Delta L)$。

(2) 如果为了保证条纹有一定的反衬度，要求上述光程差改变量的数量级不能超过多少？以此来估计对膜厚h的限制。

解 本题是为了具体理解薄膜表面条纹的反衬度是如何因扩展光源的影响而下降的，并注意到影响反衬度的光源有效宽度应由观察者（包括仪器）的入射光瞳的孔径来决定。



题9图

（1）如图（b），设点源Q_1的入射角为θ，对应的折射角为γ，点源Q_2的入射角为（$\theta+\Delta\theta$），对应的折射角为（$\gamma+\Delta\gamma$），它们在同一场点P产生的光程差不等，分别为

$$\Delta L_1(P)=2nh\cos\gamma$$

$$\Delta L_2(P)=2nh\cos(\gamma+\Delta\gamma)$$

光程差之改变量为

$$\delta(\Delta L)=2nh\cos\gamma-2nh\cos(\gamma-\Delta\gamma)$$

$$\approx 2nh\sin\gamma\Delta\gamma$$

若要进一步化简，可以考虑到$\Delta\gamma$由$\Delta\theta$确定，而$\Delta\theta$由观察者的距离S与入射光瞳孔径D决定，即

$$\Delta\theta\approx\frac{D}{S}$$

并对折射定律$n_1\sin\theta=n\sin\gamma$，作如下微分运算

$$n_1\cos\theta\Delta\theta\approx n\cos\gamma\Delta\gamma$$

得

$$\Delta\gamma\approx\frac{n_1}{n}\frac{\cos\theta}{\cos\gamma}\Delta\theta$$

化简

$$\delta(\Delta L)\approx 2h\frac{n_1^2\sin\theta\cos\theta}{n\cos\gamma}\Delta\theta$$

$$\approx\frac{n_1^2}{n}\frac{\sin2\theta}{\cos\gamma}\Delta\theta h$$

取$n_1=1.0$，$n=1.5$，$\theta=30°$，$s=30\text{cm}$，$D=3\ \text{mm}$，算出

$$\Delta\theta\approx10^{-2}，\sin2\theta\approx0.8660$$

$$\frac{n_1^2}{n}=0.6667$$

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\sqrt{1-\left(\frac{n_1\sin\theta}{n}\right)^2}$$

$$\approx 0.9428$$

得
$$\delta(\Delta L)\approx 0.0061h$$

当$h=2$ cm时，则$\delta(\Delta L)\approx 0.0122\text{cm}=122\ \mu\text{m}$

当$h=20\mu\text{m}$时，则$\delta(\Delta L)\approx 0.122\ \mu\text{m}$

（2）为使干涉条纹有一定的反衬度，至少要求

$$\delta(\Delta L)<\lambda$$

要使反衬度不至过小，应要求

$$\delta(\Delta L)\leqslant\lambda/2$$

即

$$\frac{n_1^2}{n}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\cos\gamma}\Delta\theta\, h\leqslant\frac{\lambda}{2}$$

在其它条件确定的情况下，应使膜层厚度

$$h\leqslant\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{n\cos\gamma}{n_1^2\sin 2\theta\,\Delta\theta}$$

本题

$$h\leqslant\frac{\lambda}{2\times 0.0061}\approx 82\lambda$$

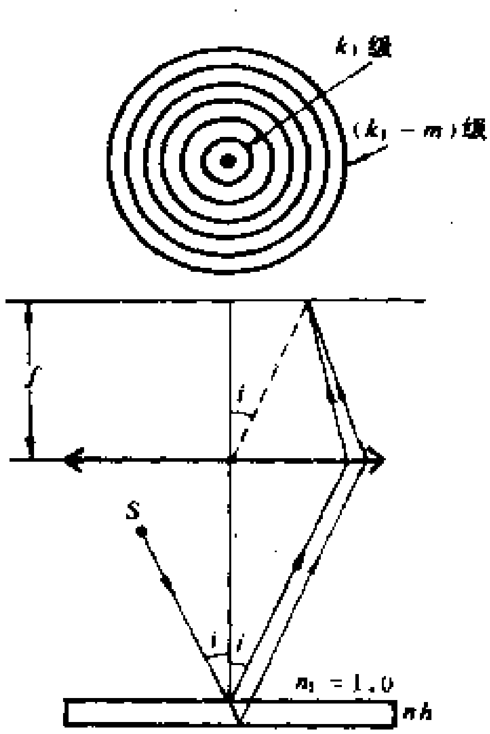
若取$\lambda=0.55\mu\text{m}$，则得

$$h\approx 45\mu\text{m}$$

综上所述，为使薄膜表面出现等厚干涉条纹，膜层应当很薄。其主要原因是光源本身各部分的非相干性，而并不是光源发光的非单色性。换句话说，这里主要是一个光场的空间相干性问题，而不是光场的时间相干性问题

§ 3　薄膜干涉（二）——等倾条纹

* 1．　在傍轴条件下，等倾条纹的半径与干涉级数有怎样的依赖关系？牛顿圈的情况怎样？两者有区别吗？你怎样把二者区分开来？



题1图

解　如图，设透镜焦距为 f，薄膜光学厚度为 nh，入射倾角为 i，对应膜层内的折射角为 γ。对于等倾干涉条纹来说，内圈干涉环的级别高，外圈干涉环的级别低，而且中心并不一定正好为亮斑（或暗斑）。为方便起见，设最靠里边的干涉环级别为 k_1，则往外相隔m圈干涉环的级别为（$k_1-\mathrm{m}$），于是

$$2nh\cos\gamma_1=k_1\lambda$$

$$2nh\cos\gamma_m=(k_1-\mathrm{m})\lambda$$

注意此处 γ_1，k_1 是常量，γ_m，m是变量。在傍轴条件下，i_m，γ_m，γ_1 均远小于1，第m圈在透镜后焦面（接收面）上的半径为

$$\rho_m\approx f\sin i_m=nf\sin\gamma_m$$

$$=nf\sqrt{1-\cos^2\gamma_m}=nf\sqrt{1-\left(\frac{k_1\lambda-m\lambda}{2nh}\right)^2}$$

$$=nf\sqrt{1-\left(\cos\gamma_1-\frac{m\lambda}{2nh}\right)^2}$$

$$= nf\sqrt{1-\left[\cos^2\gamma_1+\left(\frac{m\lambda}{2nh}\right)^2-m\frac{\cos\gamma_1\lambda}{nh}\right]}$$

忽略 $\left(\frac{m\lambda}{2nh}\right)^2\approx 0$，取近似$\cos^2\gamma_1\approx\cos\gamma_1\approx 1$，于是

$$\rho_m = f\sqrt{m\frac{n\lambda}{h}}$$

$$=\sqrt{m}\,\rho_1,\quad \rho_1 = f\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}$$

式中ρ_1为一个参量．总之，等倾条纹的半径与整数的平方根成正比．整数m取值为该干涉环与最靠中心干涉环之间的条纹数．结果表明，等倾圆环间隔是里边疏、外边密，这与牛顿环相似．但是牛顿环（等效空气膜是中间薄外边厚）的级别是里边低外边高，这一点与等倾条纹不同．于是，人们可以利用这一点将两者区别开来．譬如设法加大膜层厚度，看看条纹的变动情况，若是等倾条纹，此时必将外冒；若是中间薄外边厚的牛顿环，此时必将往里吞；若是中间厚外边薄的牛顿环，此时吞吐情况就与等倾条纹相同，仅此操作两者就难以区别了．

§4　迈克耳孙干涉仪　光场的时间相干性

*1．　用钠光5893Å观察迈克耳孙干涉条纹，先看到干涉场中有12个亮环，且中心是亮的．移动平面镜M_1后，看到中心吞（吐）了10环，而此时干涉场中还剩有5个亮环．试求：

（1）M_1移动的距离；

（2）开始时中心亮斑的干涉级；

（3）M_1移动后，从中心向外数第5个亮环的干涉级．

解　本题的意义在于通过条纹的移动，由条纹相对级别的变化来确定条纹的绝对级别．

（1） 首先定性分析一下，等效空气膜的厚度是增加了还是减少了。在相同视场（角范围）之内，条纹数目变小，条纹变稀，说明膜厚变薄，条纹向里吞了10环，因而位移绝对值为

$$\Delta h = N\frac{\lambda}{2}$$

$$= 2.947\mu m$$

（2） 中心级别的绝对数 k 取决于膜层厚度 h，而 k，h 以及视场角范围 θ 开始时都是未知的。为此，考虑镜面移动前有

$$2h = k\lambda \qquad (a)$$

$$2h\cos\theta = (k-12)\lambda \qquad (b)$$

镜面移动后有

$$2(h-\Delta h) = (k-10)\lambda \qquad (c)$$

$$2(h-\Delta h)\cos\theta = (k-15)\lambda \qquad (d)$$

由式（a）和式（b），式（c）和式（d），分别得

$$k\lambda\cos\theta = (k-12)\lambda$$

$$(k-10)\lambda\cos\theta = (k-15)\lambda$$

以上两式相比，消去$\cos\theta$，得方程

$$\frac{k-10}{k} = \frac{k-15}{k-12}$$

解出

$$k \approx 17$$

（3） 显然，移动后中心亮环级别为7，向外数第5个亮环的干涉级别为2。

***2.** 在迈克耳孙干涉仪中，反射镜移动0.33mm，测得条纹变动192次，求光的波长。

解 根据

$$\Delta h = N\frac{\lambda}{2}$$

得

$$\lambda = \frac{2\Delta h}{N} = \frac{2\times 0.33\text{mm}}{192} \approx 3.438\mu\text{m}$$

此光波长在红外波段。

3． 钠光灯发射的黄线包含两条相近的谱线，平均波长为5893Å。在钠光下调节迈克耳孙干涉仪，人们发现干涉场的反衬度随镜面移动而周期性地变化。实测的结果由条纹最清晰到最模糊，视场中吞（吐）490圈条纹，求钠双线的两个波长。

解 双谱线产生的两套条纹不相干叠加结果，将使干涉场的反衬度随光程差的增加而呈现周期性的变化，从最清晰到最模糊（或从最模糊到最清晰）的光程差改变量$\delta(\Delta L)$以及条纹的吞（吐）数ΔN满足

$$\delta(\Delta L) = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} = \Delta N\bar{\lambda}$$

由此求得双线间隔为

$$\Delta\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{2\Delta N} = \frac{5893}{2\times 490} \approx 6.0\text{Å}$$

波长分别为

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2} = 5890.0\text{Å}$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2} = 5896.0\text{Å}$$

4． 在一次迈克耳孙干涉仪实验中，所用的最短标准具长度为0.39mm，如用镉灯（波长为6428.41Å）作光源，实验时所测得的条纹变动数目应是多少？

解 设标准具长度为l，则动镜移动距离$\Delta h = l$，根据

$$\Delta h = N\frac{\lambda}{2}$$

得条纹变动为

$$N=\frac{2l}{\lambda}=1213.36\text{（条）}$$

*5. 用迈克耳孙干涉仪进行精密测长，光源为6328Å的氦氖激光，其谱线宽度为10^{-4}Å，整机接收（光电转换）灵敏度可达1/10个条纹，求这台仪器测长精度为多少？一次测长量程为多少？

解 干涉精密测长精度δl被接收灵敏度（可达一个条纹的分数δN）所决定。按题意$\delta N=1/10$，算出

$$\delta l=\delta N\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{20}\lambda=316.4\text{Å}$$

$$\approx 0.032\,\mu\text{m}$$

此精度比最高级的螺旋测径器（千分尺）还高一个量级。

一次测长量程l_M被相干长度l_0所决定，而相干长度l_0可由谱线宽度$\Delta\lambda$算出：

$$l_M=\frac{1}{2}l_0=\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}\approx 2\text{ m}$$

*6. 迈克耳孙干涉仪中的一臂（反射镜）以速度v匀速推移，用透镜接收干涉条纹，将它会聚到光电元件上，把光强变化转换为电讯号。

（1）若测得电讯号的时间频率为ν，求入射光的波长λ；

（2）若入射光波长在0.6μm左右，要使电讯号频率控制在50Hz，反射镜平移的速度应为多少？

（3）按以上速度移动反射镜，钠黄光产生电讯号的拍频为多少？（钠黄光双线波长为5890Å和5896Å。）

解 （1）根据

$$\Delta h=\Delta N\frac{\lambda}{2}$$

将上式两边除以时间间隔Δt，即

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

得

$$v = \nu \frac{\lambda}{2}$$

故

$$\lambda = \frac{2v}{\nu}$$

（2）根据以上关系，可按

$$v = \frac{1}{2}\nu\lambda$$

估算动镜速度。若 $\lambda = 0.6\mu m$，$\nu = 50Hz$，则

$$v = 15\mu m / s$$

若 $\lambda = 40\mu m$，$\nu = 100Hz$，则

$$v = 2 mm / s$$

快速扫描型傅里叶变换光谱仪的动镜速度属于这一量级。

（3）设钠黄光双线波长为 λ_1，λ_2，则干涉仪中产生电讯号的时间频率分别为

$$\nu_1 = \frac{2v}{\lambda_1}, \quad \nu_2 = \frac{2v}{\lambda_2}$$

合成结果，产生电讯号的拍频为

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 2v\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$\approx 2v\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

若取 $v = 15\mu m/s$，平均波长 $\lambda = 5893\text{Å}$，$\Delta\lambda = 6\text{Å}$，算出拍频数值为

$$\Delta\nu = 5.2\times10^{-2}Hz \ll \nu_1, \nu_2$$

***7. 迈克耳孙干涉仪中的一臂（反射镜）以速度 v 匀速推移，现用透镜将干涉条纹会聚到光电元件上，把光强变化转换为电讯号。设电讯号 i 对光强 I 的响应是线性的，且本底为零。**

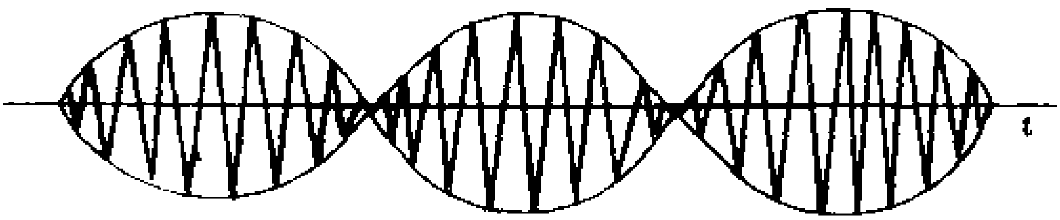
经频谱分析，实测的电讯号可以表示为

$$i(t)=i_0+i_1\cos\omega_1 t+i_2\cos\omega_2 t$$

求：

（1）入射光谱，即包含几种波长成分及其相对强度为多少？这台干涉仪实现双光束干涉的反衬度为多少？

（2）若入射光选为水银光谱的黄双线5770Å，5791Å，动臂速度取4μm/s，电讯号的拍频为多少？在低频包络的一个周期中包含有多少个振荡（参见附图）？



题7图

解　（1）若入射波长为λ，则电讯号的时间频率为

$$\nu=\frac{2v}{\lambda}$$

因目前电讯号中包含两种圆频率ω_1，ω_2，所以入射光包含了两条谱线，其波长值分别为

$$\lambda_1=\frac{2v}{\nu_1}=\frac{4\pi v}{\omega_1}$$

$$\lambda_2=\frac{2v}{\nu_2}=\frac{4\pi v}{\omega_2}$$

设这两条谱线强度分别为I_{10}，I_{20}，若忽略干涉仪各元件在光路转换过程中对光强的损耗，则干涉场合成强度应是

$$\begin{aligned}I(t)&=I_{10}(1+\gamma\cos\omega_1 t)+I_{20}(1+\gamma\cos\omega_2 t)\\&=(I_{10}+I_{20})+\gamma I_{10}\cos\omega_1 t+\gamma I_{20}\cos\omega_2 t\end{aligned}$$

对比电讯号中的三个系数，有

$$i_0 \propto (I_{10}+I_{20}),\quad i_1 \propto \gamma I_{10},\quad i_2 \propto \gamma I_{20}$$

由此得到两条谱线的相对强度为

$$\frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{i_2}{i_1}$$

干涉仪实现双光束干涉的反衬度为

$$\gamma = \frac{i_1+i_2}{i_0}$$

（2） 如设这两条黄双线的强度相近，则电讯号表示为

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{2}i_0\gamma\cos\omega_1 t + \frac{1}{2}i_0\gamma\cos\omega_2 t$$

$$= i_0\left[1+\gamma\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right]$$

由此得高频振荡频率为

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_1+\nu_2}{2} = \left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)v$$

$$\approx 13.81\mathrm{Hz}$$

拍频（低频包络频率）为

$$\Delta\nu = \nu_1-\nu_2 = 2v\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$\approx 0.05\mathrm{Hz}$$

在低频包络的一个周期（波包）中包含的振荡数目有

$$N = \frac{\bar{\nu}}{\Delta\nu} \approx 277$$

§ 5 多光束干涉 法布里－珀罗干涉仪

*1． 有两个波长λ_1和λ_2，在6000Å附近相差0.001Å，要用法布里－珀罗干涉仪把它们分辨开来，间隔h需要多大？设

反射率 $R=0.95$。

解 法－珀仪属于多光束长程干涉仪，有很高的色分辨本领，在光波长为 λ 的 k 级可分辨的最小波长间隔为 $\delta\lambda$，它们满足以下关系（色分辨本领公式）

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda}=\pi k\frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

其中 k 值很高，中心 k 值决定于

$$2nh=k\lambda$$

按题意，合并以上两式得

$$h=\frac{k\lambda}{2n}=\frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{1-R}{\sqrt{R}}\cdot\frac{\lambda^2}{\delta\lambda}$$

取 $n=1$，$R=0.95$，$\lambda=0.6\mu m$，$\delta\lambda=10^{-7}\mu m$，算出

$$h\approx 2.94\text{cm}$$

这是题目给出的分辨要求下，腔长下限值。

2. 如果法布里－珀罗干涉仪两反射面之间的距离为 1.00cm，用绿光（5000Å）作实验，干涉图样的中心正好是一亮斑。求第10个亮环的角直径。

解 在法－珀干涉仪中，极强（亮纹）所满足的角方位条件为

$$2nh\cos\theta_k=k\lambda$$

中心亮斑的级别由下式决定

$$2nh=k_0\lambda$$

所以第10个亮环的角半径 θ_k 满足

$$\cos\theta_k=\frac{(k_0-10)\lambda}{2nh}$$

$$=1-10\frac{\lambda}{2nh}$$

取 $n=1$，$h=1.00\text{cm}$，$\lambda=0.5\mu m$，算得

$$\cos\theta_k \approx 0.9998$$

$$\theta_k \approx 1^\circ 9'$$

角直径为

$$2\theta_k = 2^\circ 18'$$

·3． 设法—珀腔长 5 cm，用扩展光源作实验，光波波长为0.6μm。问：

（1）中心干涉级数为多少？

（2）在倾角为1°附近干涉环的半角宽度为多少？设反射率 $R=0.98$。

（3）如果用这个法—珀腔分辨谱线，其色分辨本领有多高？可分辨的最小波长间隔为多少？

（4）如果用这个法—珀腔对白光进行选频，透射最强的谱线有几条？每条谱线宽度为多少？

（5）由于热胀冷缩，引起腔长的改变量为10^{-5}（相对值），则谱线的漂移量为多少？

解 （1）中心级别

$$k_0 = \frac{2nh}{\lambda}$$

$$= \frac{2\times 5}{6\times 10^{-5}} \approx 1.7\times 10^5$$

（2）k 级亮环的半角宽度公式为

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin\theta_k}\ \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

由此算出$\theta_k \approx 1^\circ$时，半角宽度为

$$\Delta\theta_k \approx 2.2\times 10^{-6}\,\mathrm{rad} \approx 0.45''$$

可见亮环非常细锐。

（3）色分辨本领

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k_0\ \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

$$\approx 2.6 \times 10^7$$

可分辨的最小波长间隔为

$$\delta_\lambda \approx \frac{1}{2.6 \times 10^7}\lambda \approx 2.3 \times 10^{-4}\ \text{Å}$$

（4） 法–珀仪作为一个无源谐振腔具有选频作用，所选纵模（频率）间隔为

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nh} \approx 3 \times 10^9\ \text{Hz}$$

白光的波长范围为4000Å —7600Å，相应的光频范围为$\nu_m = 4.0 \times 10^{14}$Hz—$\nu_M = 7.5 \times 10^{14}$Hz，在此范围内包含的纵模数目(最强的谱线数目）为

$$\Delta N = \frac{\nu_M - \nu_m}{\Delta\nu} \approx \frac{3.5 \times 10^{14}}{3 \times 10^9}$$

$$\approx 1.2 \times 10^5 \quad（条）$$

每条谱线宽度为

$$\delta\nu = \frac{c}{2\pi nh}\ \frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}\Delta\nu$$

$$\approx 6.4 \times 10^{-3}\ \Delta\nu$$

$$\approx 1.9 \times 10^7\ \text{Hz} = 19\text{Mz}$$

换算为$\lambda = 0.55\mu\text{m}$ 附近的波长线宽为

$$\delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{c}\delta\nu \approx 1.9 \times 10^{-4}\ \text{Å}$$

值得提出的是，用频率间隔$\Delta\nu$或$\delta\nu$来计算法–珀腔的选频性能较为省事，避开了入射光频（或波长）的影响，突出了器件参数h，R的作用。

（5） 从以上纵模间隔$\Delta\nu$公式看出，$\Delta\nu \propto 1/h$，故腔长的微小改变量都将引起纵模间隔$\Delta\nu$的改变，即使在中心波长被稳住的情况下，此时也必将引起两侧谱线频移，频移量

$$\delta(\Delta\nu)=\delta\left(\frac{c}{2nh}\right)=\frac{c}{2nh}\cdot\frac{\delta\lambda}{h}$$

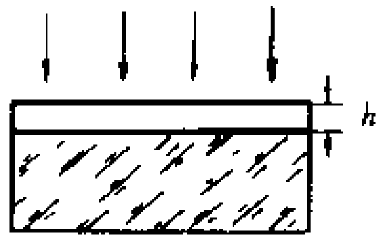
$$\approx(3\times10^{9})\times(10^{-5})\ \mathrm{Hz}$$

$$=3\times10^{4}\ \mathrm{Hz}$$

换算为$\lambda=0.55\mu m$附近的波长漂移量为

$$\delta(\Delta\lambda)\approx\frac{\lambda^2}{c}\delta(\Delta\nu)\approx3\times10^{-7}\ \text{Å}$$

* **4.** 利用多光束干涉可以制成一种干涉滤光片，如附图，在很平的玻璃片上镀一层银，在银面上加一层透明膜，例如水晶石（$3NaF\cdot AlF_3$），其上再镀一层银。于是两个银面之间形成一个膜层，产生多光束干涉。设银面的反射率$R=0.96$，透明膜的折射率为1.55，膜厚$h=4\times10^{-5}$ cm，平行光正入射。问：



题 4 图

（1）在可见光范围内，透射最强的谱线有几条，它们的光波长为多少？

（2）每条谱线的宽度为多少？

解 （1）先算纵模频率间隔

$$\Delta\nu=\frac{c}{2nh}\approx2.4\times10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

再算可见光频段内包含的纵模个数（即透射最强的谱线条数）

$$\Delta N=\frac{3.5\times10^{14}}{2.4\times10^{14}}\approx1.5\ （条）$$

鉴于目前谱线为数很少，不妨算出谱线波长的具体数值。为此，令$\lambda_m=4000$Å，算出

$$k_M=\frac{2nh}{\lambda_m}=3.1$$

令$\lambda_M = 7600\text{Å}$，算出

$$k_m = \frac{2nh}{\lambda_M} = 1.6$$

因此在可见光范围内，只能在1.6—3.1之间取可能的整数值

$$k = 2,\ 3$$

相应的最强谱线波长为

$$\lambda = \frac{2nh}{2} \approx 6200\,\text{Å}$$

$$\lambda' = \frac{2nh}{3} \approx 4133\,\text{Å}$$

（2）上述两条谱线的宽度分别为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k}\ \frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{6200}{2\pi}\ \frac{0.04}{\sqrt{0.96}} \approx 40.3\,\text{Å}$$

$$\delta\lambda' = \frac{4133}{3\pi}\ \frac{0.04}{\sqrt{0.96}} \approx 17.9\,\text{Å}$$

*5. 如果平行膜层两侧的折射率不等［见附图(a)］，设入射光强为I_0。

（1）导出多光束干涉后形成的反射光强I_R和透射光强I_T公式；

（2）证明只有同时满足以下三个条件时，才能使波长为λ的正入射光完全透过（$I_R = 0$）：a）$n_3 > n_2 > n_1$，b）$n_2 h = \lambda/4$，c）$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$。

解 （1）设上下界面单次反射或透射的振幅反射率或振幅透射率如图（b）。则反射多光束的复振幅系列为

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}_1 &= Ar_1 \\
\widetilde{U}_2 &= At_1 t_1' r_2 e^{i\delta} \\
\widetilde{U}_3 &= At_1 t_1' r_2^2 r_1' e^{2i\delta} \\
\widetilde{U}_4 &= At_1 t_1' r_2^3 r_1'^2 e^{3i\delta} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这里，在界面上反射时可能引起的位相突变已包含在振幅反射率中。每相邻反射光线的表观光程差为

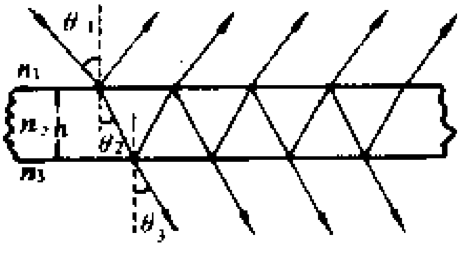
$$\Delta L = 2n_2 h\cos\theta_2$$

位相差为

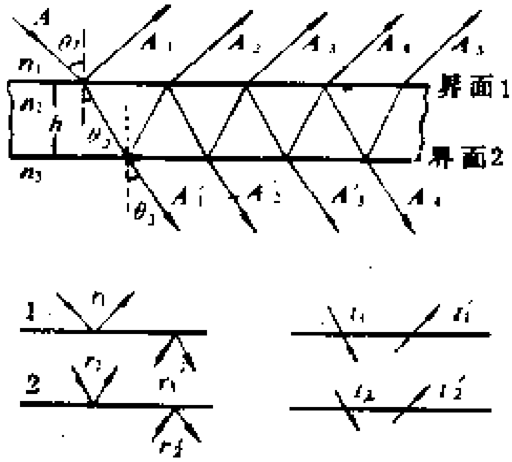
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{4\pi n_2 h\cos\theta_2}{\lambda}$$

反射光的总复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_R &= \sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j \\ &= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta} + At_1t_1'r_2^2r_1'e^{i2\delta} + At_1t_1'r_2^3r_1'^2e^{i3\delta} + \cdots \\ &= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta} \times [1 + r_2r_1'e^{i\delta} + (r_2r_1')^2e^{i2\delta} + \cdots] \\ &= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta}\frac{1}{1 - r_2r_1'e^{i\delta}}\end{aligned}$$



(a)



(b)

题 5 图

由斯托克斯倒逆关系有

$$t_1t_1' = 1 - r_1^2,\quad r_1' = -r_1$$

所以

$$\widetilde{U}_R = Ar_1 + A(1 - r_1^2)r_2e^{i\delta}\frac{1}{1 + r_1r_2e^{i\delta}}$$

$$= \frac{A(r_1 + r_2e^{i\delta})}{1 + r_1r_2e^{i\delta}}$$

因此反射光强为

$$I_R=\widetilde{U}_R\widetilde{U}_R^*=\frac{A(r_1+r_2e^{i\delta})}{1+r_1r_2e^{i\delta}}\cdot\frac{A(r_1+r_2e^{-i\delta})}{1+r_1r_2e^{-i\delta}}$$

$$=\frac{A^2(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta)}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}$$

$$=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}I_0$$

上式即为反射光强公式.

设入射光束的横截面积为S_1，透射光束的横截面积为S_3，则根据能量守恒，透射光强I_T与入射、反射光强的关系为

$$I_TS_3=S_1(I_0-I_R)$$

即

$$I_T=\frac{S_1}{S_3}(I_0-I_R)$$

由折射定律可知

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}$$

故

$$I_T=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}(I_0-I_R)$$

$$=I_0\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}\left(1-\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}\cdot\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}I_0$$

上式即为透射光强公式。以上得到的I_R和I_T公式，对p,s分量均适用。当$\theta_1 \approx 0$时，由于$R = Rp = Rs$，则I_R,I_T分别为总的反射光强和透射光强。

（2）利用三角关系式

$$\cos\delta = \cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$\sin^2\frac{\delta}{2} + \cos^2\frac{\delta}{2} = 1$$

把（1）中得到的反射光强公式改写成对称形式，即

$$I_R = \frac{(r_1 + r_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + (r_1 - r_2)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1 + r_1 r_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + (1 - r_1 r_2)^2\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0$$

在$n_3 > n_2 > n_1$的条件下，各反射光线间没有因半波损而引起的附加相位差，r_1,r_2中不再包含位相因子。在正入射时由菲涅耳反射公式可得

$$r_1 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad r_2 = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}$$

代入反射光强公式得

$$I_R = \frac{(n_1 - n_3)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_1 n_3}{n_2} - n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(n_1 - n_3)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_1 n_3}{n_2} + n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0$$

当$n_2 h = \lambda/4$时，有

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{2\lambda}{4} = \pi,$$

$$\cos\frac{\delta}{2} = 0, \quad \sin\frac{\delta}{2} = 1$$

得

$$I_R=\frac{\left(n_2-\dfrac{n_1 n_3}{n_2}\right)^2}{\left(n_2+\dfrac{n_1 n_3}{n_2}\right)^2}I_0$$

若再有$n_2=\sqrt{n_1 n_3}$，则

$$\frac{n_1 n_3}{n_2}=n_2$$

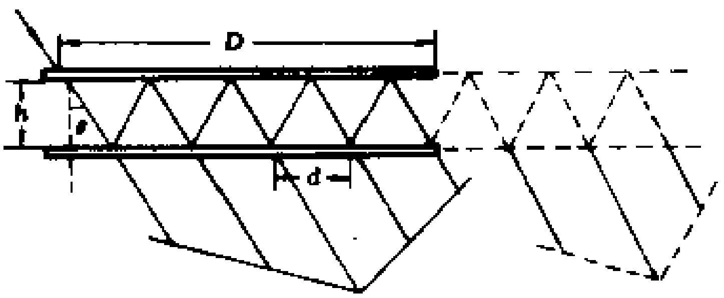
$$I_R=0$$

综上所述，当光学厚度$n_2 h=\lambda/4$，$3\lambda/4$，…且$n_3>n_2>n_1$（即低膜）的薄膜起增透作用。一般情况下增透膜的作用是增加透射、减少反射，但不能完全消反射。仅当低膜折射率满足

$$n_2=\sqrt{n_1 n_3}$$

时，才能使波长为λ的正入射光完全消除反射，这时入射光的能流全部透过薄膜，透射光强最大。

*6．试分析在法－珀干涉仪中，由于将有限项多光束相干叠加当作无限项处理而引入的误差。



题 6 图

解　如图，在法－珀仪中，由于腔的横向尺寸有限，在光束倾角$\theta\neq0$时，透射多光束不可能有无限项。一般教科书中为简化起见都以无限项等比级数求和来计算透射场。不妨分析一下这种近似处理的误差有多大。

设透射多光束数目为N（有限），如对腔的横向宽度作无限延伸，则N项系列就等于两组无限系列之差，即透射场

$$\widetilde{U}_T=\sum_{j=1}^{N}\widetilde{U}_j=\sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j-\sum_{j=N+1}^{\infty}\widetilde{U}_j$$

其中长的无限项系列的首项为

$$\widetilde{U}_1=A_0tt'=(1-R)A_0$$

短的无限项系列的首项为

$$\widetilde{U}_{N+1}=A_0tt'r^{2N}e^{iN\delta}=(1-R)R^Ne^{iN\delta}A_0,$$

两组级数的等比均为

$$r^2e^{i\delta}=Re^{i\delta},\quad \delta=\frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos\theta$$

根据无限项等比级数求和公式得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j=\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\widetilde{U}_1$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\widetilde{U}_j=\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\widetilde{U}_{N+1}$$

所以透射多光束（有限项等比级数）相干场为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_T&=\widetilde{U}_1\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\left(1-\frac{\widetilde{U}_{N+1}}{\widetilde{U}_1}\right)\\&=\widetilde{U}'_T(1-\widetilde{\Delta})\end{aligned}$$

式中

$$\widetilde{U}'_T=\frac{1-R}{1-Re^{i\delta}}A_0$$

便是书中给出的理论结果，其误差为

$$\widetilde{\Delta}=\frac{\widetilde{U}_{N+1}}{\widetilde{U}_1}=R^Ne^{iN\delta}$$

透射相干强度为

$$I_T=\tilde{U}_T\tilde{U}_T^*=\tilde{U}_T'\tilde{U}_T'^*(1-\tilde{\Delta})(1-\tilde{\Delta}^*)$$
$$=\tilde{I}_T'(1-\Delta_I)$$

式中
$$\tilde{I}_T'=\frac{I_0}{1+\dfrac{4R\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}$$

便是书中给出的理论结果，其误差为

$$\Delta_I=\tilde{\Delta}+\tilde{\Delta}^*-\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}^*$$
$$=R^N(2\cos N\delta-R^N)$$

下面给出具体数值，并作几点定量讨论。

（1）内反射两次的横向位移为

$$d=2h\operatorname{tg}\theta$$

有限项数目为

$$N\approx\frac{D}{d}=\frac{D}{2h\operatorname{tg}\theta}$$

选用本节第2题的数据，取

$$h=1\ \text{cm},\ \theta=1°\ 9'$$

此时有10个亮环。若设$D=2$ cm，则

$$N\approx50$$

（2）选$N=40$，$R=0.95$，有

$$|\tilde{\Delta}|=R^N\approx0.13$$

干涉强度极大方位显然发生在$\delta=2k\pi$之处，此时

$$\Delta I=R^N(2-R^N)$$
$$\approx0.24$$

于是透射相干极大强度不再等于入射光强，而变为

$$(I_T)_M=I_0(1-\Delta I)=I_0(1-R^N)^2$$
$$\approx76\%I_0$$

（3）再考虑干涉极大（峰）的半值宽度是否有所变化。为此 令$\delta=2k\pi\pm\varepsilon/2$，满足半值要求

$$I_T=\frac{1}{2}I_0(1-R^N)^2$$

即

$$\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\delta}{2}}\left[(1-R^N)^2+4R^N\sin^2\frac{N\delta}{2}\right]I_0$$

$$=\frac{1}{2}I_0(1-R^N)^2$$

经整理得

$$\frac{8R^N}{(1-R^N)^2}\sin^2\frac{N\varepsilon}{4}-\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varepsilon}{4}+1=0$$

当$N\to\infty$时，就得到书中给出的半值宽度理论结果

$$\varepsilon_0=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$$\approx 0.1026$$

当$N=40$时，采取数值解法得方程

$$1.354\sin^2\frac{N\varepsilon}{4}-1520\sin^2\frac{\varepsilon}{4}+1=0$$

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\Delta_\varepsilon)\approx 0.1574$$

$$\Delta\varepsilon\approx+53\%$$

当$N=30$时，得方程

$$2.784\sin^2\frac{N\varepsilon}{4}-1520\sin^2\frac{\varepsilon}{4}+1=0$$

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\Delta_\varepsilon)\approx 0.1994$$

$$\Delta\varepsilon\approx+94\%$$

（4）综上所述，考虑到法-珀仪中横向尺寸的限制，透射场应当是有限项多光束的相干叠加，其结果与理论值比较，主极大方位角不变，但主极大强度值略有下降，条纹的半值宽度也有所增宽，具体数量级见下表。

$h=1$ cm $D=2$ cm $R=0.95$ $\lambda=0.55\mu$m $\theta\approx1^\circ$			$\lvert\Delta\rvert=R^N$	$\Delta_I=R^N(2-R^N)$	Δe
N	40	10环	0.13	0.24	0.53
	30	5环	0.21	0.38	0.94

*7. 在分析法—珀腔的选频作用时，为什么不必考虑入射光相干长度的限制？

解 当入射光为非单色时，其波列长度确实是有限的，但是对于法—珀腔中发生的多光束相干来说，波列有限长度不起限制光程差的作用，这是因为多光束相干本身有着挑选波长压缩线宽的作用。我们不妨将入射的非单色光分解为一系列准单色之和。由于多光束相干结果，在透射一方只有若干准单色谱线被选取，获得相干极强，其它谱线的强度不参与透射一方的不相干叠加。这与杨氏干涉及薄膜干涉等双象干涉系统那里的情况是根本不同的。在那里没有选频作用，尽管我们仍然可以从数学上对非单色的入射光作频谱分解，但是全体谱线都参与干涉场的不相干叠加，由于条纹间距因波长而异，不相干叠加结果致使光程差超过某一数值的那些区域的条纹反衬度降为零，这与由相干长度的一次分析所得到的光程差限制的结论是完全一致的。对此可作以下粗略的说明。线宽为$\Delta\lambda$ 的谱线集合，形成一段有限长波列，表示为

$$A(x)=\int_{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)d\lambda$$

$A(x)$的有限长度l_0与线宽$\Delta\lambda$的关系为

$$l_0=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

另一方面如用光程差ΔL为变量，描述双光束干涉场的强度叠加，则应表示为

$$I(\Delta L)=I_0+\int_{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} i\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right)d\lambda$$

根据 $I(\Delta L)$ 与 $A(x)$ 函数形式的相似性，可见干涉场中强度起伏的线度是有限的，且 $I(\Delta L)$ 的有效长度 ΔL_M 与线宽 $\Delta\lambda$ 的关系也应当为

$$\Delta L_M=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

显然

$$\Delta L_M=l_0$$

即由频谱分析得到的最大光程差数值与相干长度一致。

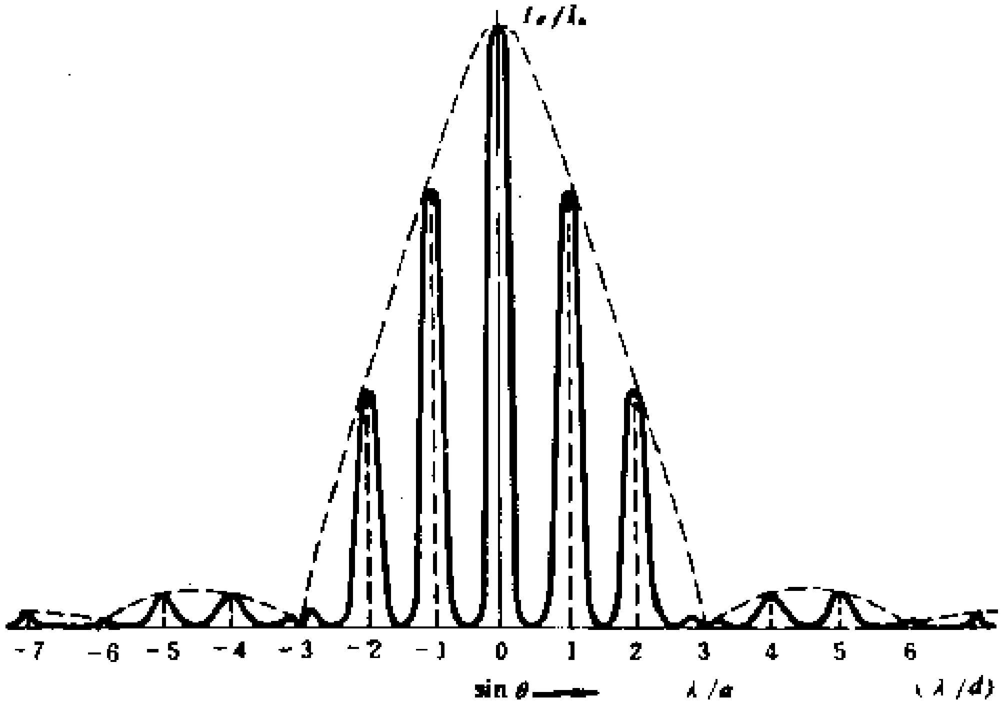
总之，在有选频效应的场合，相干长度对光程差的限制已经失去意义；只有在无选频效应的场合，相干长度对光程差的限制作用才真正地体现出来。

第四章　衍射光栅

§1　多缝夫琅和费衍射

1．　用坐标纸绘制$N=2$，$d=3a$的夫琅和费衍射强度分布曲线，横坐标取$\sin\theta$，至少画到第7级主极强，并计算第一个主极强与单缝主极强之比。

解　作强度分布曲线如图。作图时注意到，目前$N=2$，故相邻主极强之间不出现次极强；$d=3a$，故缺级在 $k=\pm3$，±6，… 等级。



题1图

多缝衍射某级主极强与单缝零级（主极强）强度之比为

$$\frac{I(\theta)}{I_0}=\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$= N^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta_k}{\lambda} = \pi\frac{a}{d}\cdot\frac{d\sin\theta_k}{\lambda}$$

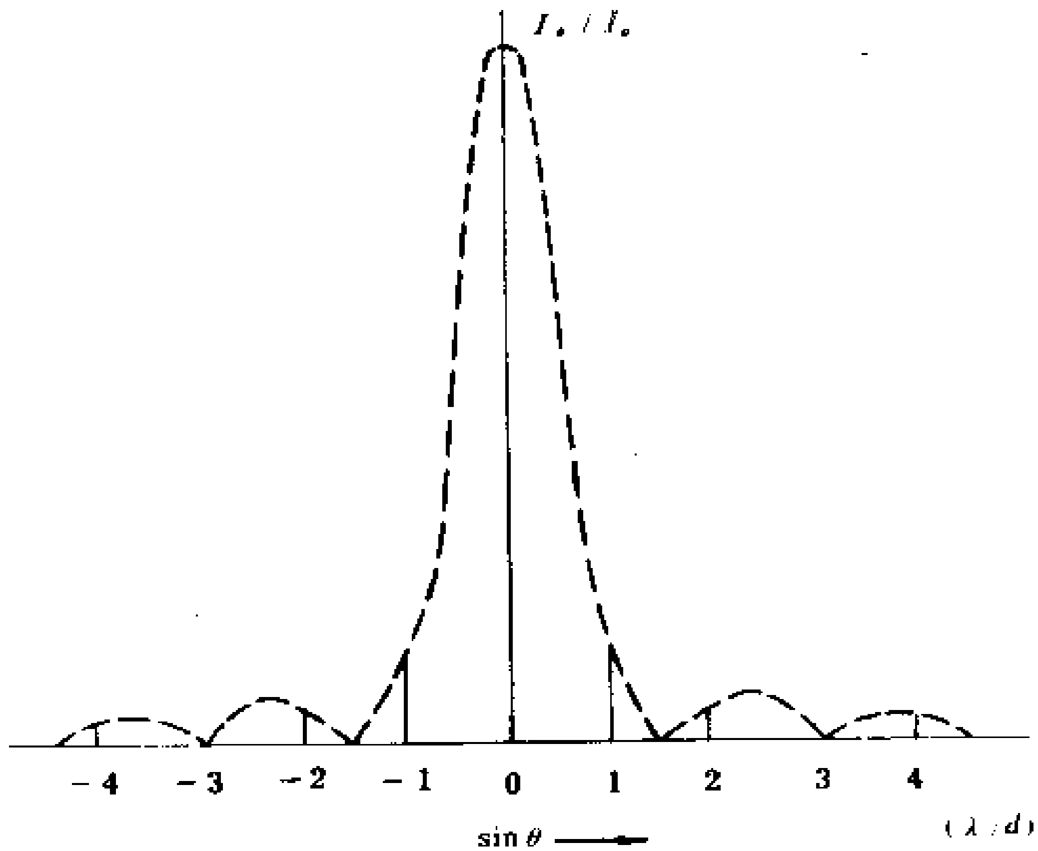
$$= k\pi\frac{a}{d}$$

当 $k = 1$，$a/d = 1/3$，$N = 2$ 时，得

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\quad \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi},\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \approx 0.684$$

于是

$$\frac{I(\theta_1)}{I_0} = 4\times 0.684 \approx 2.74$$



题 2 图

2． 用坐标纸绘制$N=6$，$d=1.5a$的夫琅和费衍射强度分布曲线，横坐标取$\sin\theta$，至少画到第4级主极强，并计算第4级主极强与单缝主极强之比。

解 作强度分布曲线如图。作图时注意到本题$N=6$，故相邻主极强之间出现4个次极强；$d=1.5a$，故缺级现象发生在$k=\pm3$，±6，…。

当$k=4$，$a/d=2/3$，$N=6$时，得

$$\alpha=k\pi\frac{a}{d}=\frac{8}{3}\pi,\quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx0.0107$$

于是第4级主极强与单缝主极强之比为

$$\frac{I(\theta_4)}{I_0}=N^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx0.39$$

3． 导出斜入射时多缝夫琅和费衍射强度分布公式：

$$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

式中

$$\alpha'=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

$$\beta'=\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

θ_0为入射线与光轴的夹角[见附图（a）]

解 如附图（b），考虑衍射角为θ的一束衍射线，始于单缝上边缘A和下边缘B的两衍射线的光程差为

$$\Delta l=a(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

位相差为

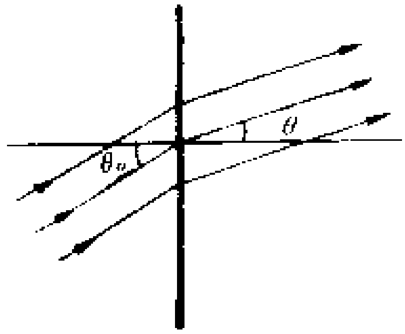
$$\Delta\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

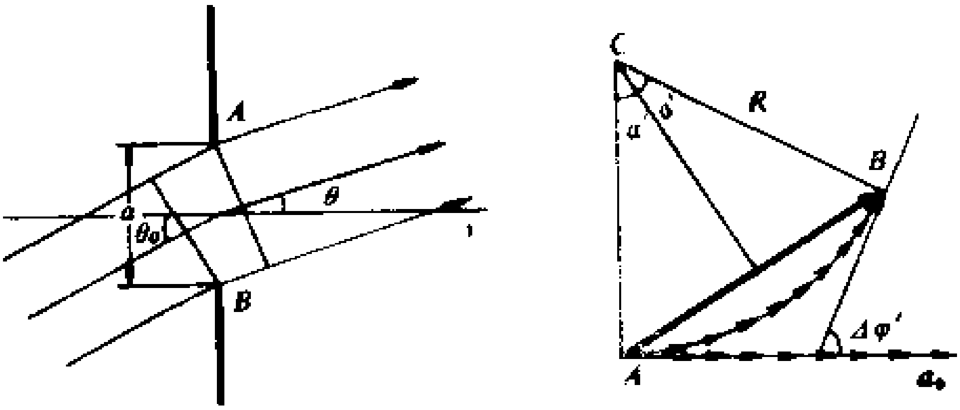
由矢量图可得场点的合振幅为

$$a_\theta = 2R\sin\alpha' = 2\frac{\widehat{AB}}{2\alpha'}\sin\alpha'$$

$$= a_0\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}$$



题3图（a）



题3图（b）

式中

$$\alpha' = \frac{\Delta\varphi'}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

多缝夫琅和费衍射的总振幅为 N 个 a_θ 的相干叠加。如附图（c），相邻缝间对应点衍射线之间的光程差为

$$\Delta L = d(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

位相差为

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

由矢量图可得总振幅为

$$A_\theta = 2R\sin N\beta' = 2\frac{a_\theta/2}{\sin\beta'}\sin N\beta'$$

$$= a_\theta\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}$$

式中

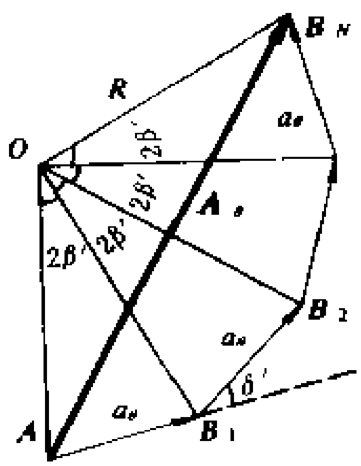
$$\beta' = \frac{\delta'}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

因此强度分布公式为

$$I_\theta = A_\theta^2 = a_\theta^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

$$= a_0^2\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$



题 3 图（c）

以上分析表明，当衍射屏并非入射光波的等相面时，在作相干叠加运算时，既要考虑前场的光程差，又要考虑后场的光程差，这样才能正确决定到达同一场点的各次级扰动之间的位相差. 以上结果还表明，当衍射角 θ 等于入射倾角 θ_0 时，单缝衍射因子 $(\sin\alpha'/\alpha')^2$ 与缝间干涉因子 $(\sin N\beta'/\sin\beta')^2$ 同时到达零级主极大，这正是几何光学象点方位，此时仍然不可能将单元衍

射零级与元间干涉零级分离。为使上述两个零级分离，必须采用反射闪耀光栅或透射闪耀光栅，闪耀光栅实质上是一种位相型光栅。如用黑白光栅这类振幅型光栅，不论怎样改变入射方式，总不可能分开两个零级。

*4．　写出斜入射时夫琅和费多缝衍射主极强位置公式、第k级主极强的半角宽度公式及缺级情况，并注意与正入射情况作比较。

解：斜入射时主极强位置公式应改为

$$d(\sin\theta_k - \sin\theta_0) = k\lambda$$

或

$$d\sin\theta_k = k\lambda + d\sin\theta_0,\ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

而k级主极强半角宽度公式为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$

它形式上与正入射时一样，但对级数k相同的主极强来说，两者θ_k的取值是不同的。当k级主极强角方位与单元衍射k'级零点角方位相同时，则出现缺级情况，据此，令

$$k\frac{\lambda}{d} + \sin\theta_0 = k'\frac{\lambda}{a} + \sin\theta_0$$

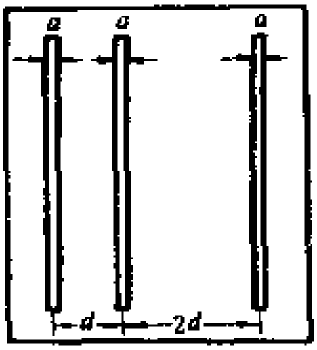
得

$$\frac{k}{k'} = \frac{d}{a}$$

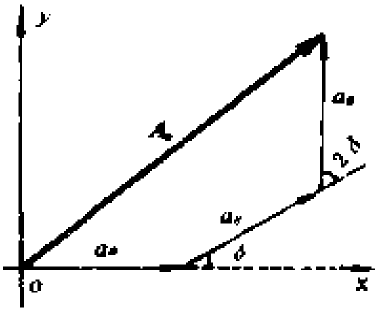
此式说明光栅k级主极强落在单元衍射k'级零点位置，因而缺级。可见，斜入射时与正入射相比缺级情况相同。

*5．　有三条平行狭缝，宽度都是a，缝距分别为d和$2d$[见附图（a）]，证明正入射时其夫琅和费衍射强度分布公式为

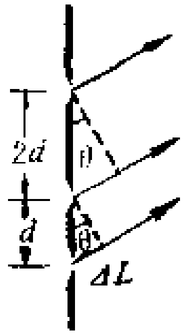
$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)\right]$$



（a）



（b）



（c）

题 5 图

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}、\quad \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

证 考虑三束衍射线之间的光程差［图（b）所示］，据此作矢量图（c），a_θ为单缝衍射的振幅，A_θ为三缝衍射的总振幅。显然

$$A_{\theta x}=a_\theta(1+\cos\delta+\cos 3\delta)$$

$$A_{\theta y}=a_\theta(\sin\delta+\sin 3\delta)$$

所以三缝衍射强度分布为

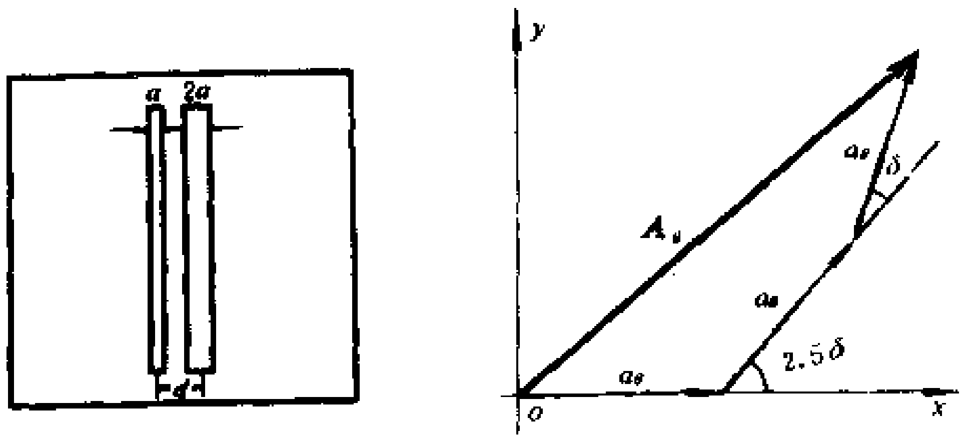
$$\begin{aligned}I_\theta&=A_{\theta x}^2+A_{\theta y}^2\\&=a_\theta^2[(1+\cos\delta+\cos 3\delta)^2+(\sin\delta+\sin 3\delta)^2]\\&=a_\theta^2\ [3+2(\cos\delta+\cos 2\delta+\cos 3\delta)]\\&=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\ [3+2(\cos 2\beta+\cos 4\beta+\cos 6\beta)]\end{aligned}$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},\qquad \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

6． 导出正入射时不等宽双缝的夫琅和费衍射强度分布公式，缝宽分别为a和$2a$，缝距$d=3a$［见附图（a）］。

解 把缝宽为$2a$的单缝看成缝宽为a，且间距也为a的双缝。这样本题的不等宽双缝即化成等宽不等距的三缝，缝宽均为a，缝



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

题 6 图

距分别为2.5a和a，用附图（b）所示的矢量图即可求得合振幅A_θ，图中$\delta = 2\pi a\sin\theta/\lambda$。$A_\theta$的 x，y 分量分别为

$$A_{\theta x} = a_\theta\left(1 + \cos\frac{5}{2}\delta + \cos\frac{7}{2}\delta\right)$$

$$A_{\theta y} = a_\theta\left(\sin\frac{5}{2}\delta + \sin\frac{7}{2}\delta\right)$$

所以衍射强度分布为

$$I_\theta = A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2$$

$$= a_\theta^2\left[\left(1 + \cos\frac{5}{2}\delta + \cos\frac{7}{2}\delta\right)^2 + \left(\sin\frac{5}{2}\delta + \sin\frac{7}{2}\delta\right)^2\right]$$

$$= a_\theta^2\left[3 + 2\left(\cos\delta + \cos\frac{5}{2}\delta + \cos\frac{7}{2}\delta\right)\right]$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[3 + 2\left(\cos 2\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta\right)\right]$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda}\right)^2\left[3 + 2\left(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha\right)\right]$$

式中I_0为单缝的零级主极强，$\alpha = \pi a\sin\theta/\lambda$。

7．　有 $2N$ 条平行狭缝，缝宽相同都是 a，缝间不透明部分的宽度作周期性变化：a，$3a$，a，$3a$，…，（见附图）。求

下列各种情形中正入射时的夫琅和费衍射强度分布：

（1）遮住偶数缝；

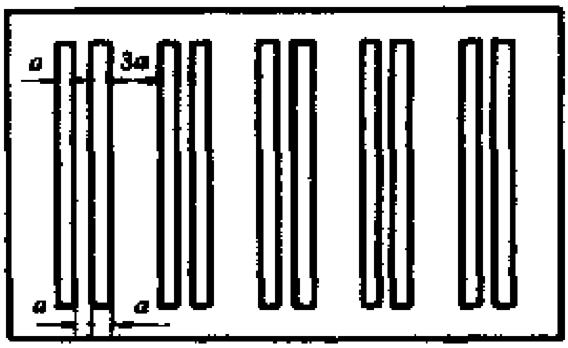
（2）遮住奇数缝；

（3）全开放。

解　（1）遮住偶数缝，这时衍射屏成为一块缝宽为a，缝距$d=6a$的N缝光栅，其夫琅和费衍射强度分布为

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

式中I_0为单缝零级主极强，$\alpha=\pi a\sin\theta/\lambda$，　$\beta=\pi d\sin\theta/\lambda=6\alpha$。



题7图

（2）遮住奇数缝时，与遮住偶数缝时相比，衍射屏内部各次波源到达场点的位相关系完全相同，因此衍射强度分布也完全相同。

（3）衍射屏是大量次波源的集合。全开放时，这种周期性结构的衍射屏上的次波源，有两种编组方式，相应地有两种处理衍射强度分布的运算方法。

方法一：把每两条缝宽为a，间距$d'=2a$的双缝看作一个衍射单元，整个衍射屏由间距$d=6a$的N个这样的衍射单元组成。则单元衍射因子为

$$u(\theta)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\;\frac{\sin 2\beta'}{\sin\beta'}=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta'$$

$$=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta' = \frac{\pi d' \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi\, 2a \sin\theta}{\lambda} = 2\alpha$$

N 元干涉因子为

$$N(\theta) = \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin N\, 6\alpha}{\sin 6\alpha}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = 6\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 6\alpha$$

所以强度分布函数为

$$I(\theta) = I_0 u^2(\theta) N^2(\theta)$$

$$= 4 I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha\right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强。

方法二：分别把 N 条奇数缝与 N 条偶数缝看作二个相同的衍射单元，于是整个衍射屏就只是由间距 $d' = 2a$ 的两个衍射单元组成。则由本题（1）或（2）的结果知单元衍射因子为

$$u(\theta) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

$$\beta' = \frac{\pi d' \sin\theta}{\lambda} = 6\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 6\alpha$$

元间干涉因子为

$$N(\theta) = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha$$

式中

$$\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = 2\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 2\alpha$$

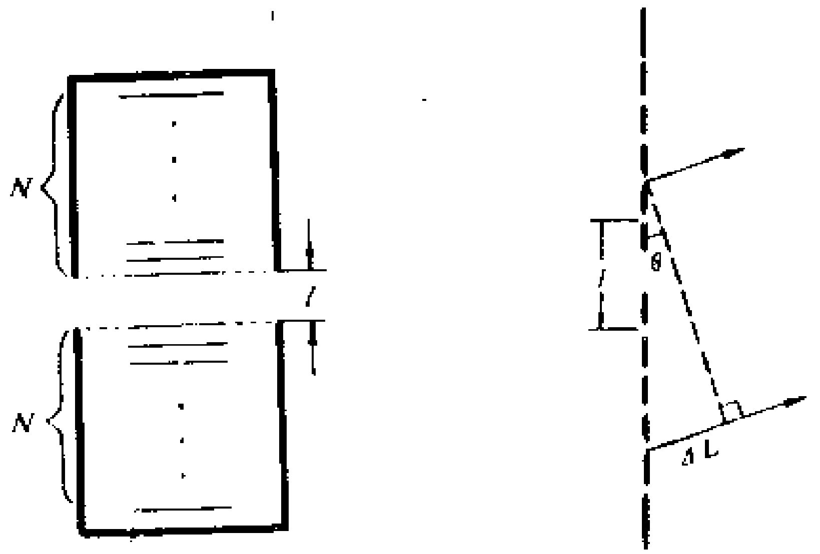
所以强度分布为

$$I(\theta) = I_0 u^2(\theta) N^2(\theta)$$

$$= 4 I_0 (\cos 2\alpha)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强。

*8． 有两块完全相同的光栅，缝数、缝宽和光栅常数分别为 N、a 和 d，现将它们在同一平面上平行放置，对接后两块光栅间相邻两缝的间距为 l [参见图（a）]，当（1）$l = d$，（2）$l = 1.5d$，（3）$l = 2d$ 时，分别讨论原来单一光栅 k 级主极强现在将发生什么变化？设平行光正入射照明光栅



（a）　　　　（b）

题 8 图

解　两块光栅对接后，整个衍射屏由两个相同的衍射单元组成，原先的每块单一光栅构成一个衍射单元。在衍射角为 θ 的方向，元间衍射线的光程差［如图（b）所示］为

$$\Delta L = [(N-1)d + l]\sin\theta$$

对原来单一光栅的 k 级主极强来说，有

$$d\sin\theta = k\lambda,\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

因此合成强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$$

$$= 2I_k\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right).$$

式中I_k为单一光栅k级主极强的强度.

（1）当$l = d$时，二者对接后相当于一块$2N$缝、缝宽为a、光栅常数为d的光栅。显然，原先的k级主极强，目前仍为k级主极强，且

$$I = 4I_k$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2Nd\cos\theta_k} = \frac{1}{2}\Delta\theta_k$$

即强度为原先的4倍，半角宽度为原先的一半。

（2）当$l = 1.5d$时，则

$$\Delta L = \left[(N-1)d + \frac{3}{2}d\right]\sin\theta$$

$$= \left(N + \frac{1}{2}\right)d\sin\theta = \left(N + \frac{1}{2}\right)k\lambda$$

$$= Nk\lambda + \frac{1}{2}k\lambda$$

有效光程差为

$$\Delta L' = \frac{1}{2}k\lambda$$

因此

当$k = \pm 1,\ \pm 3,\ \cdots$时，$I = 0$，

即原先单一光栅的奇数级主极强成为缺级。

当$k = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \cdots$时，$I = 4I_k$，

即原先单一光栅的偶数级主极强，目前仍为主极强，且强度增加

到 4 倍，其半角宽度可以由微分近似运算得到。因主极强位置满足

$$\sin\theta_k = \frac{(N+\frac{1}{2})k}{(N+\frac{1}{2})d}\lambda \qquad (k\text{为偶数})$$

相邻暗线位置满足

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta) = \frac{(N+\frac{1}{2})k+\frac{1}{2}}{(N+\frac{1}{2})d}\lambda$$

取微分近似有

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta) - \sin\theta_k \approx \cos\theta_k\,\Delta\theta$$

而

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta) - \sin\theta_k = \frac{\lambda}{2(N+\frac{1}{2})d}$$

故

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2(N+\frac{1}{2})d\cos\theta_k} < \frac{1}{2}\Delta\theta_k$$

即半角宽度小于原先单一光栅的一半。

（3）当 $l=2d$ 时，则

$$\Delta L = [(N-1)d+2d]\sin\theta = (N+1)d\sin\theta = (N+1)k\lambda$$

故
$$I = 4I_k$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2(N+1)d\cos\theta_k} < \frac{1}{2}\Delta\theta_k$$

即原先单一光栅的 k 级主极强目前仍为主极强，强度增加到 4 倍，其半角宽度小于单一光栅的一半，且比 $l=1.5d$ 时进一步缩小。

本题 $l=2d$ 的情况相当于在制作一块（$2N+1$）缝的光栅时当中漏刻了一条缝，讨论结果表明这在使用中并不造成严重的后果，与一块完整的光栅性能基本相近。但如果 $l=1.5d$，即仅仅在当中的两条缝之间破坏了空间周期性，尽管其余绝大多数（$2N$ 条）缝的制作周期仍然严格保证，但这在使用中带来的后

果将是严重的。可见，刻划一块精密母光栅的要求是很高的，不但要求刻划机的元件非常精密，而且还要求在刻划过程中防止震动和温度变化，以严格保证光栅的空间周期性

§ 2　光栅光谱仪

1． 波长为6500 Å的红光谱线，经观测发现它是双线，如果在 9×10^{5} 条刻线光栅的第 3 级光谱中刚好能分辨此双线，求其波长差。

解　由光栅的色分辨本领公式

$$R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=kN$$

得双线间隔

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{kN}=2.41\times10^{-3}\ \text{Å}$$

2． 若要50条／毫米的光栅在第 2 级光谱中能分辨钠双线 λ_1（5890 Å）和 λ_2（5896 Å），光栅宽度应选多少？

解　由光栅色分辨本领公式可得光栅单元总数应当满足

$$N=\frac{\lambda}{k\delta\lambda}=\frac{5893}{2\times6}=491\ 条$$

光栅尺寸

$$D=Nd=491\times\frac{1}{50}=9.82\ \text{mm}$$

即应选宽度大于 10 mm 的光栅

3． 绿光5000 Å 正入射在光栅常数为2.5×10^{-4} cm，宽度为 3 cm的光栅上，聚光镜的焦距为50 cm 。

（1）求第 1 级光谱的线色散；

（2）求第 1 级光谱中能分辨的最小波长差；

（3）该光栅最多能看到第几级光谱？

解 （1）根据光栅的线色散本领公式

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k} f$$

得光栅一级光谱在5000 Å附近的线色散为

$$D_l = \frac{1}{d\sqrt{1-\sin^2\theta_1}} f = \frac{1}{d\sqrt{1-(\frac{\lambda}{d})^2}} f$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d^2-\lambda^2}} f \approx 2\times 10^{-2}\ \mathrm{mm/Å}$$

（2）此光栅一级光谱在5000 Å邻近可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{N} = \frac{\lambda d}{D} \approx 0.42\ \text{Å}$$

（3）根据光栅公式 $d\sin\theta_k = k\lambda$，並考虑到衍射角取值范围为 $0 \leqslant |\theta_k| \leqslant \pi/2$，可见最大级别 k_M 应当满足

$$k_M < \frac{d}{\lambda} = \frac{2.5\times 10^{-4}}{5\times 10^{-5}} = 5$$

取 $$k_M = 4$$

即此光栅最多能看到±4序光谱。

4. 一束白光正入射在600条／毫米的光栅上，第1级可见光谱末端与第2级光谱始端之间的角间隔有多少？

解 白光波长范围为 $\lambda_m = 4000$ Å — $\lambda_M = 7600$ Å，由光栅公式 $d\sin\theta_k = k\lambda$ 得白光一级光谱末端的衍射角为

$$\theta_{1M} = \sin^{-1}\frac{\lambda_M}{d} = \sin^{-1}(7600\times 10^{-7}\times 600)$$

$$= \sin^{-1}(0.456) = 27°\ 8'$$

白光二级光谱始端的衍射角为

$$\theta_{2m} = \sin^{-1}\frac{2\lambda_m}{d} = \sin^{-1}(2\times 4000\times 10^{-7}\times 600)$$

$$= \sin^{-1}(0.48) = 28°\ 41'$$

两者角间隔为

$$\delta_\theta = \theta_{2m} - \theta_{1M} = 1°33'$$

*5．　国产31 WI型一米平面光栅摄谱仪的技术数据表中列有：

物镜焦距	1050毫米
光栅刻划面积	60毫米×40毫米
闪耀波长	3650埃（1级）
刻线	1200条/毫米
色散	8埃/毫米
理论分辨率	72000（1级）

试根据以上数据来计算一下：

（1）该摄谱仪能分辨的谱线间隔的最小值为多少？

（2）该摄谱仪的角色散本领为多少（以埃/分为单位）？

（3）光栅的闪耀角为多大？闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大角度？

解　（1）从产品说明书中已知该光栅的色分辨率R值，所以该光栅一级光谱在闪耀波长3650 Å 邻近，能分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{3650}{72000}\text{Å} \approx 0.05\text{ Å}$$

（2）根据说明书中给出的物镜焦距f和线色散D_l值，可以算出角色散

$$D_\theta = \frac{D_l}{f}$$

考虑到实际场合常常习惯于采用$1/D_l$（Å/mm），$1/D_\theta$（Å/分）说明性能，故将上式换算为

$$\frac{1}{D_\theta} = \frac{1}{D_l}f = 8\times 1050\text{ Å/rad}$$

$$\approx 2.44\text{ Å/分}$$

（3） 一级闪耀波长λ_b满足

$$2d\sin\theta_b = \lambda_b$$

由此得耀角（即压槽劈角）为

$$\theta_b = \sin^{-1}\frac{\lambda_b}{2d} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\times 1200\times 3650\times 10^{-7}\right)$$

$$\approx 12^\circ 39'$$

此角度值也正是闪耀方向与光栅平面（宏观）法线方向之间的夹角，当照明光束从槽面（微观）法线方向入射时，便是如此。

6. 底边长度为6 cm的棱镜，在光波长为0.6 μm附近能分辨的最小波长间隔为多少？以棱镜材料的色散率$dn/d\lambda$值为$0.4\times 10^{-5}/\text{Å}$来估算。

解 根据棱镜的色分辨本领公式

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b\frac{dn}{d\lambda}$$

得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{\lambda}{b(dn/d\lambda)} = \frac{0.6\times 10^4}{(6\times 10^8)\times(0.4\times 10^{-5})}\ \text{Å}$$

$$\approx 2.5\text{Å}$$

***7.** 根据以下数据比较光栅、棱镜、法-珀腔三者的分光性能：（1）分辨本领；（2）色散本领；（3）自由光谱范围。

光栅宽度 $D=5$ cm，刻线密度 $1/d=600$条/mm；

棱镜底边 $b=5$ cm，顶角 $\alpha=60^\circ$，折射率 $n=1.5$，色散率 $dn/d\lambda=0.6\times 10^{-5}/\text{Å}$；

法-珀腔长 $h=5$ cm，反射率 $R=0.99$。

解 （1）光栅一级光谱的色分辨本领为

$$R_1 = N = 3\times 10^4$$

棱镜的色分辨本领为

$$R_2 = b\frac{dn}{d\lambda} = 3\times 10^3$$

法–珀腔的色分辨本领为

$$R_3 = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R} = \frac{2\pi nh\cos\theta_k}{\lambda} \quad \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

取λ = 5000 Å，$\cos\theta_k \approx 1$，$n = 1.0$，得

$$R_3 \approx 6\times10^5$$

可见$R_3 > R_1 > R_2$。

（2）光栅一级光谱在5000 Å邻近的角色散本领为

$$D_1 = \frac{1}{d\cos\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{d^2-\lambda^2}} \approx 0.22'/\text{Å}$$

棱镜的角色散本领为

$$D_2 = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}} \quad \frac{dn}{d\lambda} \approx 0.031'/\text{Å}$$

法–珀腔的角色散本领为

$$D_3 = \frac{k}{2nh\sin\theta_k} = \frac{2nh\cos\theta_k}{2nh\sin\theta_k} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\,\mathrm{tg}\,\theta_k}$$

取$\lambda = 5000$ Å，$\theta_k = 10°$，算出

$$D_3 \approx 3.9'/\text{Å}$$

可见$D_3 > D_1 > D_2$。

（3）光栅可测波长的最大值λ_M被光栅常数d所限制

$$\lambda_M < d = \frac{1}{600}\,\text{mm} = 17000\,\text{Å}$$

一级光谱上限波长λ_M与二级光谱下限波长λ_M满足

$$\lambda_M = 2\lambda_m$$

所以光栅一级光谱的自由光谱范围(不至于与二级光谱发生重叠)应当为

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_M - \lambda_m = \frac{1}{2}\lambda_M$$

如果取 $\lambda_M=17000\,\mathring{A}$，则自由光谱范围为8500 Å — 17000 Å。如果取 $\lambda_M=8000\,\mathring{A}$，则自由光谱范围为4000 Å — 8000 Å，恰巧覆盖整个可见光波段

对法－珀腔来说，中心附近区域波长为 λ 的 k 级与波长为 $(\lambda+\Delta\lambda)$ 的 $(k-1)$ 级发生重叠的条件为

$$k\lambda=(k-1)(\lambda+\Delta\lambda)$$

所以其自由光谱范围为

$$\Delta\lambda_f=\frac{\lambda}{(k-1)}\approx\frac{\lambda}{k}\approx\frac{\lambda^2}{2nh}$$

如果取 $\lambda=5500\,\mathring{A}$，$n=1.0$ 则

$$\Delta\lambda_f\approx0.03\,\mathring{A}$$

由此可见，法－珀仪是一种长程干涉仪，有很高的色分辨本领，但是其量程很窄，故适用于高分辨光谱技术。

对棱镜来说，由于只有一套光谱，故无光谱级（序）之间的重叠问题，自由光谱范围不受限制。当然，考虑到棱镜材料的吸收，对于从红外到可见再到紫外等不同波段，应分别选用不同材料的棱镜。棱镜光谱不分级别，使入射光能充分集中在一套谱线上，可提高光谱分析的灵敏度，这是棱镜光谱仪的一大优点。

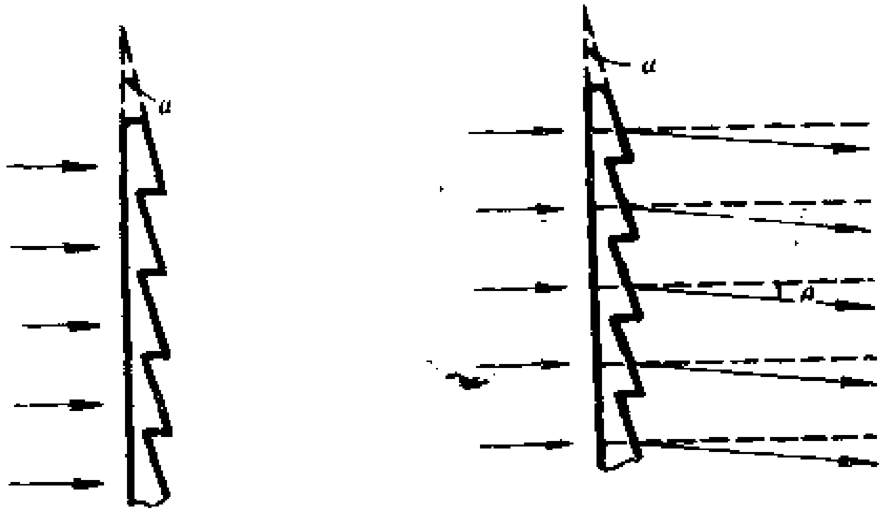
§ 3　三维光栅　—X射线在晶体上的衍射

*1．　如图（a），在透明膜上压上一系列平行等距的劈形纹路，制成一块位相型透射式闪耀光栅，透明膜折射率为1.5，劈角为0.1rad，纹路密度为100条/mm，求：

（1）该光栅单元衍射零级的方位角（以入射方向为准），并在图上标出；

（2）该光栅的一级闪耀波长为多少？

解　（1）单元衍射的零级方向应是几何光学的传播方向



(a)　　　　　　(b)

题1图

在小棱镜劈角α很小的条件下，出射光束的偏转角［如图(b)所示］为

$$\theta \approx (n-1)\alpha = 0.5\times 0.1\ \mathrm{rad}$$
$$= 0.05\ \mathrm{rad}$$

（2）在单元零级方位，两相邻单元之间的光程差为

$$\Delta L = d\sin\theta$$

使其满足一级主极强的波长条件为

$$d\sin\theta = \lambda_1$$

由此便可算出一级闪耀波长为

$$\lambda_{1b} = \frac{1}{100}\times 0.05\ \mathrm{mm} = 5000\ \mathring{A}$$

2.　如图所示的光栅模型，它可视为等间距排列的一维相干点源，试就以下两种情况分析xz平面内夫琅和费衍射主极大条件：

（1）入射波长连续；

（2）入射波长单色，且满足$d=10\lambda$。

解　考察衍射角为θ的一束平行次波线的相干叠加．主极大条件取决于相邻光程差ΔL是否可能等于波长的整数倍，即

$$\Delta L = d\sin\theta$$

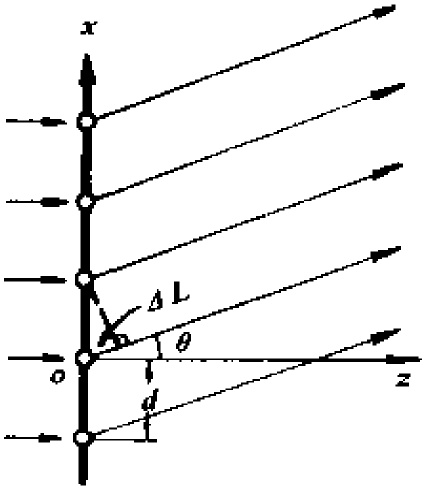
是否满足

$$d\sin\theta = k\lambda,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

由此可见

（1）$\theta = 0$ 方向为所有波长的零级主极大方向。

（2）考虑到衍射角的取值范围为 $0 \sim \pi/2$，能获得一级主极大的波长范围为



题 2 图

$$0 < \lambda_1 < d$$

能获得二级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_2 < \frac{d}{2}$$

能获得三级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_3 < \frac{d}{3}$$

依此类推可得，在入射波长连续的条件下，能产生非零级主极大的波长上限为

$$\lambda_M = d$$

大于 λ_M 的入射光经一维光栅衍射将产生衰逝波。

（3）当入射光波长 $\lambda = 1/10\,d$ 时，代入

$$d\sin\theta = k\lambda$$

得

$$\sin\theta = \frac{1}{10}k$$

考虑到 $\sin\theta \leq 1$，于是有

$$k \leq 10$$

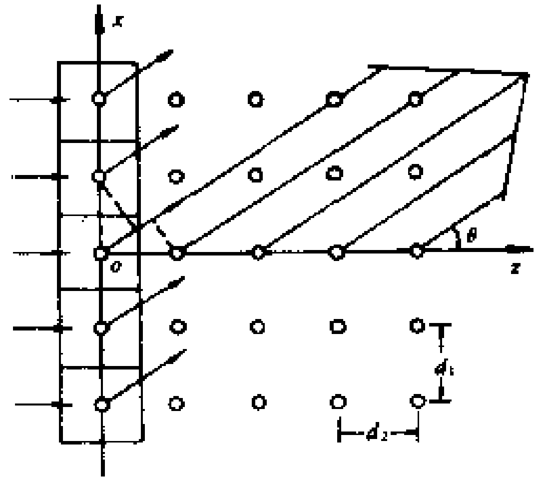
即这种情况下所获得主极大的最高级数为10。

*3． 如图（a）所示光栅模型，它可视为二维列阵的相干点源，试就以下两种情况，分析 xz 平面内的夫琅和费衍射主极大条件：

（1）入射波长连续；

（2）入射波长单色，且 $d_1=d_2=d=10\lambda$。

解 首先说明，这种光栅模型的实际背景是二维晶片，模型中的相干点源相当于处在原胞（图中以小方格表示）中心的实物粒子，如原子、离子、分子等散射源。应该说原胞中的散射源连同周围的次波源，共同激发了单元衍射波，其具体形态当然是相当复杂的。经第一排原胞作用后而产生的衍射波，先波及第二排原胞，再波及第三排原胞……使整个二维晶片等效于二维列阵的相干点源。虽然沿入射方向自左向右，经一排排原胞的作用，波前变换是复杂的，但是整个衍射场主极大的方位是既满足排内点间干涉主极大条件，又满足排间干涉主极大条件的那些方位，这与每排波前的具体形态是无关的。考虑到沿平行 x 轴方向排内各点等位相，沿 z 轴方向相邻两排位相依次落后 $\Delta\varphi=(2\pi/\lambda)d_2$，故上述两项主极大条件应当写成



题3图（a）

$$d_1\sin\theta=k_1\lambda,\quad k_1=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\quad(a)$$

$$d_2-d_2\cos\theta=k_2\lambda,\quad k_2=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\quad(b)$$

由此可见

（1）$\theta=0$ 的方向，能同时满足方程（a）、（b）。此时 $k_1=k_2=0$，即对于所有波长来说，其零级主极大方向正是入射光直接透射的方向。

（2）根据方程（a），能产生非零级主极大的波长范围上限为

$$\lambda_{1M} = d_1$$

根据方程（b），能产生非零级主极大的波长范围上限为

$$\lambda_{2M} = d_2$$

所以，当入射光为连续谱时，能同时满足（a），（b）两方程，获得二维衍射非零级主极大的波长范围也应当是受限制的，其上限 λ_M 值应取以上 λ_{1M}，λ_{2M} 两者之中的短者。

（3）当入射光为单色，且 $d_1 = d_2 = 10\lambda$ 时，满足方程（a）的 k_1 取值是受限制的，即

$$|k_1| \leq 10$$

且衍射角 θ 的取值是分立的，满足

$$\sin\theta = \frac{k_1}{10}，\quad k_1 = 0，\ \pm 1，\ \pm 2，\ \cdots \pm 10$$

将此值代入方程（b）经第二次筛选，只有那些能保证 k_2 取值为整数的解才被保留下来，最终成为二维衍射主极大的方位。为此把（a）式代入（b）式解出

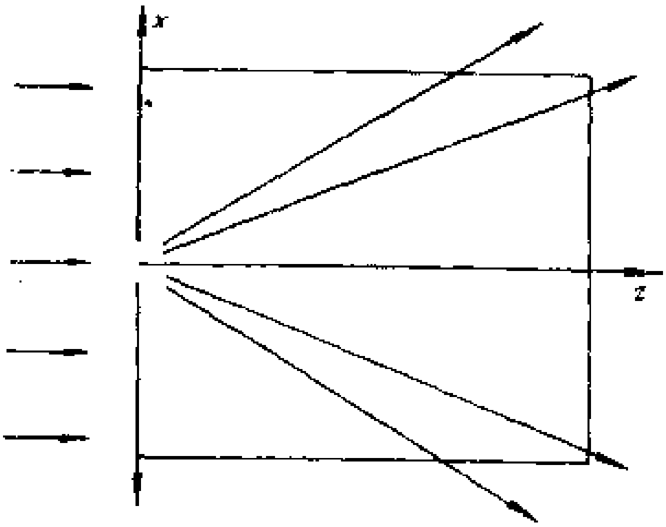
$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{d - d\cos\theta}{\lambda} \\
&= \frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda}\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{d}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 - k_1^2} \\
&= 10 - \sqrt{100 - k_1^2}
\end{aligned}$$

结果列表如下：

k_1	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10
$\sqrt{100-k_1^2}$	10	$\sqrt{99}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{84}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{51}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{19}$	0
k_2	0	非整数	非整数	非整数	非整数	非整数	2	非整数	4	非整数	10

由此可见，在 $d = 10\lambda$ 条件下，这片光栅（二维点阵）在 xz 平

面内只出现七个夫琅和费衍射斑[参见图(*b*)]。如果d/λ是其它比值，甚至是非整数值，则保留下来的夫琅和费衍射斑的数目也将不同，甚至于一个非零级衍射斑也无法出现。我们不妨用一对(k_1, k_2)值来标定这七个衍射斑，连同相应的衍射角值，列于下表：



题3图(*b*)

(k_1, k_2)	(0, 0)	(6, 2)	(6, 2)	(8, 1)	(−8, 4)	(10, 10)	(−10, 10)
θ	0°	36°52′	36°52′	53°8′	−53°8′	90°	−90°

*4. 在上题二维点阵光栅中，点阵常数为d，设入射波长连续，并选取衍射角从90°往下的任意三个值，试分析出现衍射主极大的波长选择性。

解　二维点阵衍射主极大条件为

$$\begin{cases} d\sin\theta = k_1\lambda, & k_1 = 0, \pm1, \pm2, \cdots \\ d - d\cos\theta = k_2\lambda, & k_2 = 0, +1, +2, \cdots \end{cases}$$

由此解出

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

分别选取$\theta = 80°$、70°、60°三个值，算出

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos 80°}{\sin 80°} \approx 0.84 = \frac{21}{25}$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos 70°}{\sin 70°} \approx 0.70 = \frac{7}{10}$$

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{1-\cos 60^{\circ}}{\sin 60^{\circ}}\approx 0.58=\frac{29}{50}$$

根据主极大条件，对于 $\theta=80^{\circ}$，选 $k_1=25$，$k_2=21$，选出波长

$$\lambda_1=\frac{\sin 80^{\circ}}{25}d\approx 0.039d$$

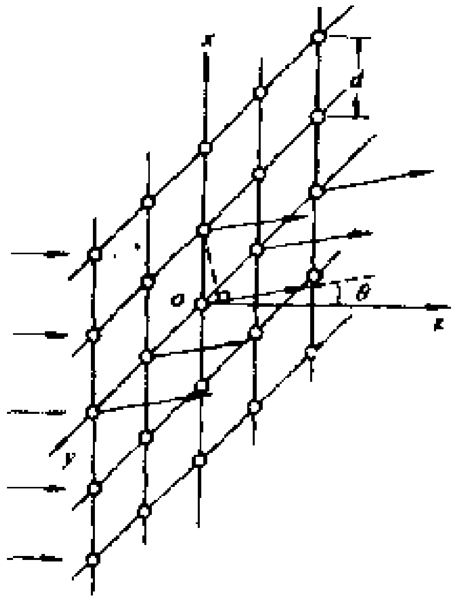
对于 $\theta=70^{\circ}$，选 $k_1=10$，$k_2=7$，选出波长

$$\lambda_2=\frac{\sin 70^{\circ}}{10}d\approx 0.094d$$

对于 $\theta=60^{\circ}$，选 $k_1=50$，$k_2=29$，选出波长

$$\lambda_3=\frac{\sin 60^{\circ}}{50}\approx 0.017d$$

综合题3及题4的分析及计算结果，我们再一次看到，对于周期性结构(光栅)的衍射，当单色光入射时具有角度选择性——只有在某些特定的方位出现衍射主极大；当连续谱入射时具有波长选择性——在任意角方位只有某些特定的波长出现衍射主极大。而随着周期性结构维数的增加，从一维到二维到三维，这两种选择性将更为苛刻。



题5图

5． 如果衍射单元是在 xy 平面内的二维点阵(如图)，试分析平行于 xz 平面方向的夫琅和费衍射的主极大条件。

解 沿平行 x 轴方向的每排内部点间干涉的主极大条件为

$$d\sin\theta=k\lambda，k=0，\pm 1，\pm 2，\cdots$$

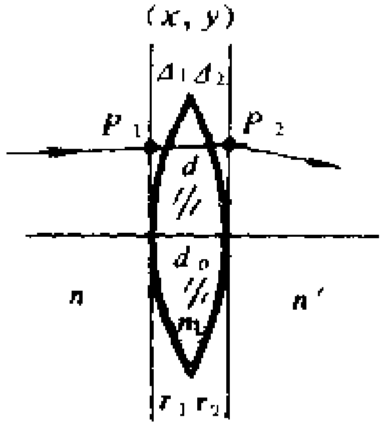
而沿 y 轴方向排间干涉是等光程的。因此，凡是满足上述条件的主极大方向，在排间干涉中都将保留下来，故在平行 xz 平面内衍射时，此情况与题2一维点阵相似。

第五章　傅里叶变换光学

§1　　衍射屏及其屏函数

*1．　设薄透镜由折射率为n_L的材料组成，物方和象方的折射率分别是n和n'，导出其位相变换函数（用透镜的焦距表示出来）．

解　如图，在透镜前后各取一个平面与顶点相切，且与光轴垂直，入射点为P_1（x，y），出射点为P_2（x，y）。在薄透镜傍轴条件下，可近似地认为光线从等高处变向出射。位相差为



题1图

$$\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)\approx k_0(n\Delta_1+n_L d+n'\Delta_2)$$

忽略透镜对光能的损耗，其位相变换函数简化为

$$\tilde{t}_P(x,y)\approx \exp i(\varphi_2-\varphi_1)$$

考虑到

$$d=d_0-(\Delta_1+\Delta_2)$$

$$\Delta_1\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1},\quad \Delta_2\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}$$

改写位相差为

$$\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)$$

$$\approx k_0\left[\frac{n-n_L}{2r_1}(x^2+y^2)-\frac{n'-n_L}{2r_2}(x^2+y^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}k_0\left(\frac{n-n_L}{2r_1}-\frac{n'-n_L}{2r_2}\right)(x^2+y^2)$$

上式中略写了与 x，y 无关的项 $k_0 d_{H}$。真空中的波矢值 k_0 与象方波矢值 k' 之间的关系为

$$k' = n' k_0$$

于是

$$\tilde{t}_P(x, y) \approx \exp\left[-ik' \frac{(x^2+y^2)}{2F'}\right]$$

式中

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{n'}\left(\frac{n_L - n}{r_1} - \frac{n_L - n'}{r_2}\right)$$

不难看出 F' 就是象方焦距。因为当平行光正入射时，入射波前为

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1$$

出射波前为

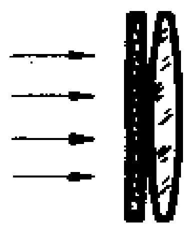
$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{t}_P \tilde{U}_1 = A_1 \exp\left(-ik' \frac{x^2+y^2}{2F'}\right)$$

这正是中心在轴上的球面波波前函数的标准形式。如 $F' > 0$，$\tilde{U}_2$ 是会聚的球面波；如 $F' < 0$，$\tilde{U}_2$ 是发散的球面波。

*2. 如附图，将一正弦光栅与一薄透镜叠放在一起，试写出此组合系统的屏函数。

解 由两个屏密接的组合系统的屏函数应是各单个屏函数的乘积，即

$$\tilde{t} = \tilde{t}_1 \tilde{t}_2$$



题 2 图

目前 $\tilde{t}_1$ 是正弦光栅的屏函数

$$\tilde{t}_1 = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x$$

$\tilde{t}_2$ 是薄透镜的屏函数

$$\tilde{t}_2 = \exp\left(-ik \frac{x^2+y^2}{2F}\right)$$

于是

$$\widetilde{T}=(t_0+t_1\cos 2\pi f x)\exp\left(-ik\frac{x_2+y_2}{2F}\right)$$

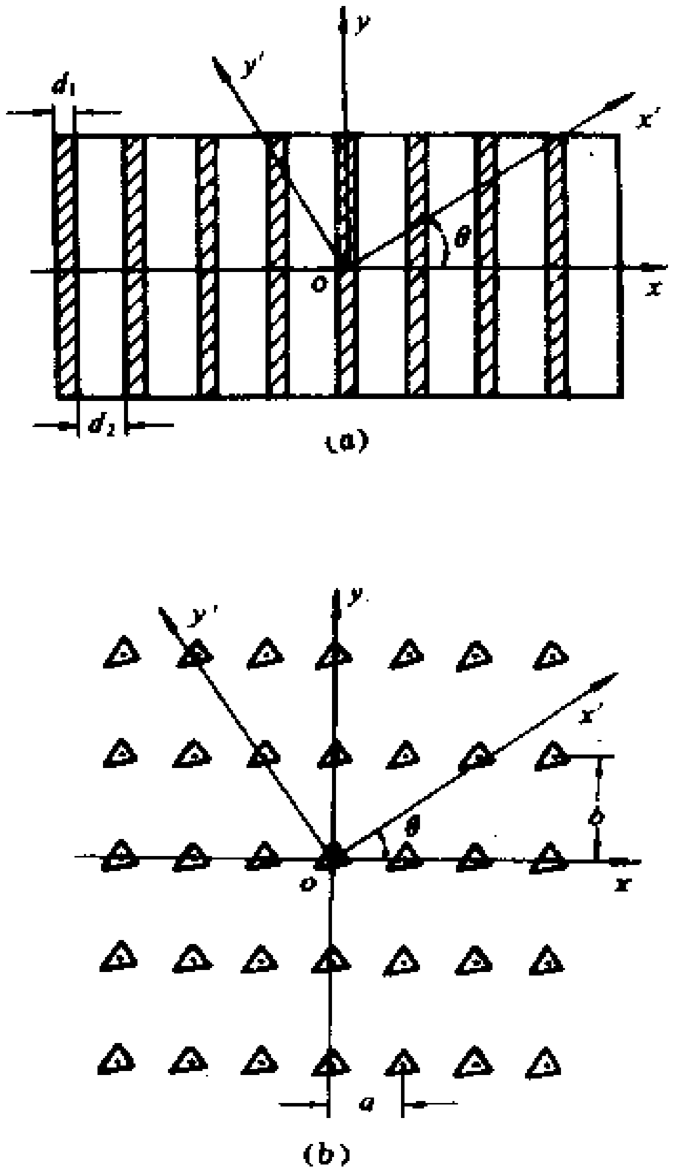
$$=t_0\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right)+\frac{1}{2}t_1\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F}-f\lambda x\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}t_1\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F}+f\lambda x\right)\right]$$

3. （1）长长的一行树，相邻的两棵间距为10 m，这行树的空间频率（基频）为多少？一架高空摄影机对准这行树拍照，在长度为10 cm的胶卷上出现200棵树的象，胶卷上图象的空间频率为多少？

（2）在一张白纸上等间隔地画上许多等宽的平行黑条纹，设黑条纹的宽度3 cm，白底宽5 cm，这张图案的空间频率（基频）为多少？

（3）图样全同的单元在平面上重复排列成二维列阵，它在 x 方向的间隔为 a，在 y 方向的间隔为 b，其空间频率为多少？在转角为 θ 的新坐标系中，沿 x' 方向第一单元的坐标（x，y）为（$2a$，b），沿 y' 方向第一单元的坐标（x、y）



题 3 图

为$(-a, b)$，求空间频率f'_x，f'_y。

解 （1），一维周期性结构的空间频率等于空间周期d的倒数，即

$$f=\frac{1}{d}$$

当$d=10\,\mathrm{m}$时，则得

$$f=0.1\,\mathrm{m}^{-1}$$

当$d=10\,\mathrm{cm}/200$时，则得

$$f=20\,\mathrm{cm}^{-1}=2\times10^{3}\,\mathrm{m}^{-1}$$

（2）如图（a），对于二维周期性的图案，其空间频率应有两个分量(f_x, f_y)。当我们取坐标系(xoy)与平行直条纹正交和平行时，则

$$f_x=f=\frac{1}{d_1+d_2}$$

$$=\frac{1}{3+5}\,\mathrm{cm}^{-1}=0.125\,\mathrm{cm}^{-1}=12.5\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$f_y=0$$

当我们取斜的坐标系$(x'oy')$时，图案的空间频率(f'_x, f'_y)与正交时所得的最高空间频率f的关系为

$$f'_x=f\cos\theta$$

$$f'_y=f\sin\theta$$

如取$\theta=30^\circ$，则

$$f'_x\approx0.108\,\mathrm{cm}^{-1}=10.8\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$f'_y=0.0625\,\mathrm{cm}^{-1}=6.25\,\mathrm{m}^{-1}$$

（3）如图（b），二维列阵在两个方向的空间频率为

$$f_x=\frac{1}{a}$$

$$f_y=\frac{1}{b}$$

在转角为θ的坐标系（$x'oy'$）中的空间周期为

$$d'_x = \sqrt{(2a)^2 + b^2}$$

$$d'_y = \sqrt{a^2 + b^2}$$

相应的空间频率为

$$f'_x = \frac{1}{d'_x} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{d'_y} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4． 一列平面波，波长为6328 Å，方向角$\alpha = 30°$，$\beta = 75°$

（1）求其复振幅的空间频率f_x，f_y，f_z；

（2）这列平面波中沿什么方向的空间频率最高？最高空间频率为多少？相应的最短空间周期为多少？

（3）在光谱学中常使用“波数”$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$的概念，它与平面波场中的空间频率有什么联系和区别？

解（1）平面波波函数的标准形式为

$$\tilde{U}(x, y, z) = A\exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

其空间频率为

$$f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{k\cos\alpha}{2\pi} = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$$

$$f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{k\cos\beta}{2\pi} = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$

$$f_z = \frac{k_z}{2\pi} = \frac{k\cos\gamma}{2\pi} = \frac{\cos\gamma}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

取 $\lambda=6328\,\text{Å}$，$\alpha=30°$，$\beta=75°$，得

$$f_x\approx1.37\,\mu\text{m}^{-1}$$

$$f_y\approx0.41\,\mu\text{m}^{-1}$$

$$f_z\approx0.68\,\mu\text{m}^{-1}$$

（2）平面波沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向的波面排列最密，因而空间频率最高，数值为

$$f=\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}=\frac{1}{\lambda}$$

$$\approx1.58\,\mu\text{m}^{-1}$$

光波长 λ 就是沿波矢方向波函数的空间周期。

（3）由以上讨论可见，波数 $\tilde{\nu}=1/\lambda$ 正是沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向的平面波的空间频率，它比其它任何方向的空间频率都高。

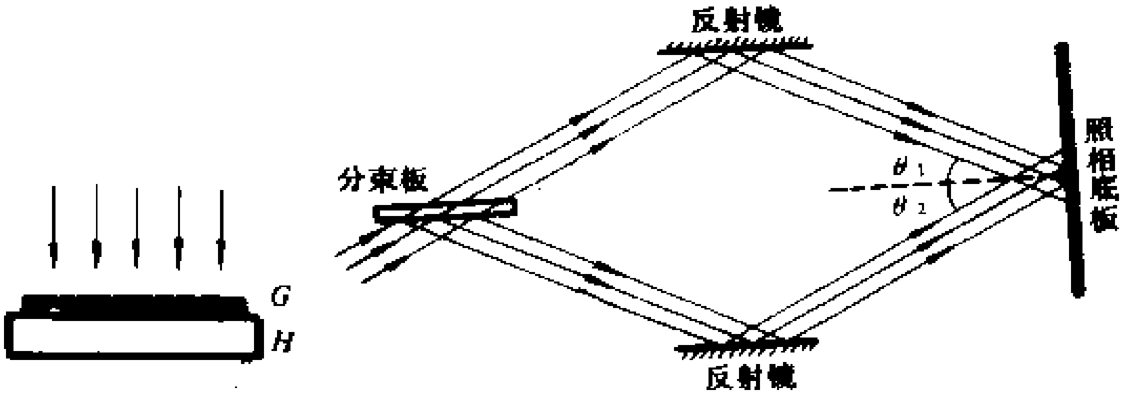
5. 设正弦光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)$$

（1）一束平行光正入射于这正弦光栅上，求透射场的复振幅分布函数 $\tilde{U}_2(x,y)$ 的空间频率；

（2）求透射场强度分布函数 $I_2(x,y)=\tilde{U}_2\tilde{U}_2^*$ 的空间频率；

（3）利用图(a)所示的装置制备正弦光栅，所用照明光波长为 $6328\,\text{Å}$，$\theta_1=\theta_2=30°$，算出这样制出的正弦光栅在（1）（2）



（a）　　（b）

题 5 图

两问中空间频率的具体数值；

（4）用此正弦光栅按图（b）所示的方法再制备一张新的光栅：将记录介质（感光底片）H紧贴在正弦光栅G的下面，用一束平行光照明，然后对曝了光的记录介质进行线性冲洗，这张新光栅的复振幅透过率函数包含有几种空间频率成分？

解 （1）透射场

$$\widetilde{U}_2(x, y) = \widetilde{U}_1(x, y)\widetilde{t}$$
$$= A_1\left[t_0 + t_1\cos(2\pi f x + \varphi_0)\right]$$

可见其空间频率有两个，一是与直流项对应的空间频率

$$f_0 = 0$$

二是与交流项对应的空间频率

$$f_1 = f$$

（2）透射场强度

$$I_2(x, y) = \widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*$$
$$= I_1\left[t_0^2 + 2t_0t_1\cos(2\pi f x + \varphi_0) + t_1^2\cos^2(2\pi f x + \varphi_0)\right]$$
$$= I_1\left[\left(t_0^2 + \frac{1}{2}t_1^2\right) + 2t_0t_1\cos(2\pi f x + \varphi_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}t_1^2\cos(4\pi f x + 2\varphi_0)\right]$$

可见其空间频率有三个，分别是

$$f_0 = 0,\ f_1 = f,\ f_2 = 2f$$

（3）如用两束相干平行光对称入射，相干叠加而制备一张正弦光栅，则其空间频率为

$$f = \frac{1}{d} = \frac{2\sin\theta}{\lambda}$$

本题$\theta = 30^\circ$，$\lambda = 6328\,\text{Å}$，得（1）（2）两问中

$$f_1 = f = \frac{1}{\lambda} \approx 1.58\,\mu\text{m}^{-1} = 1580\,\text{mm}^{-1}$$

$$f_2 = 2f \approx 3160\ \mathrm{mm}^{-1}$$

（4）对底片曝光起作用的是光强，所以新光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}_H \propto I_2 = I_1\left[\left(t_0 + \frac{1}{2}t_1^2\right) + 2t_0 t_1 \cos 2\pi f x + \frac{1}{2}t_1^2 \cos 4\pi f x\right]$$

如用（3）所得的正弦光栅，则 t_H 包含的三种空间频率数值为

$$f_0 = 0,\quad f_1 = 1580\ \mathrm{mm}^{-1},\quad f_2 = 3160\ \mathrm{mm}^{-1}$$

这个结果说明，以正弦光栅为底片，用曝光线性冲洗的办法不能复制正弦光栅，这一点与黑白光栅是不同的，黑白光栅是可以用母光栅光刻复制的。

*6．　一正弦光栅的屏函数为

$$\tilde{t}(x,y) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x$$

现将它沿 x 方向平移 $\Delta x = d/6$，$d/4$，$d/2$，d，$3d/2$，写出移动后的屏函数表达式。

解　位移 Δx 引起相移 $\Delta\varphi$，两者的定量关系为

$$\Delta\varphi = -2\pi f \Delta x = -\frac{2\pi}{d}\Delta x$$

屏函数的表达式写成

$$t(x,y) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f x + \Delta\varphi)$$

当

$$\Delta x = \frac{d}{6}\text{时，}\quad \Delta\varphi = -\frac{\pi}{3}\text{；}$$

$$\Delta x = \frac{d}{4}\text{时，}\quad \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}\text{；}$$

$$\Delta x = \frac{d}{2}\text{时，}\quad \Delta\varphi = -\pi\text{；}$$

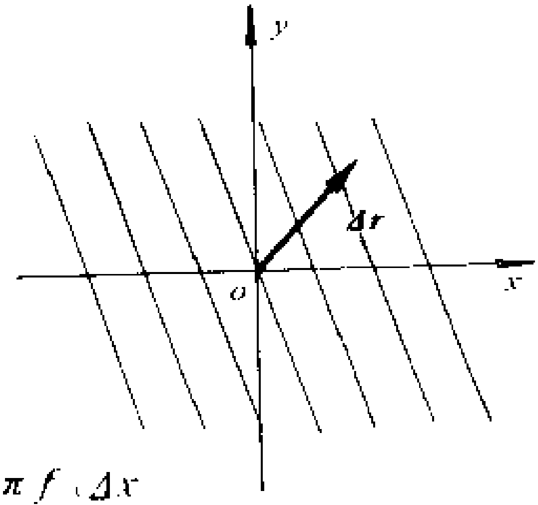
$$\Delta x = d\text{时，}\quad \Delta\varphi = -2\pi\text{；}$$

$$\Delta x = \frac{3}{2}d\text{时，}\quad \Delta\varphi = -3\pi\text{。}$$

*7．正弦光栅的屏函数为

$$\widetilde{T}(x, y)=t_0+t_1\cos(2\pi f_x x+2\pi f_y y)$$

现将它沿斜方向平移$\Delta \boldsymbol{r}=(\Delta x, \Delta y)$，写出移动后的屏函数表达式.



题7图

解 对于空间频率为(f_x, f_y)的正弦光栅，当位移矢量为$\Delta \boldsymbol{r}(\Delta x, \Delta y)$时（参见附图），相应的相移$(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y)$为

$$\Delta\varphi_x=-2\pi f_x\Delta x$$
$$\Delta\varphi_y=-2\pi f_y\Delta y$$

此时屏函数表达式为

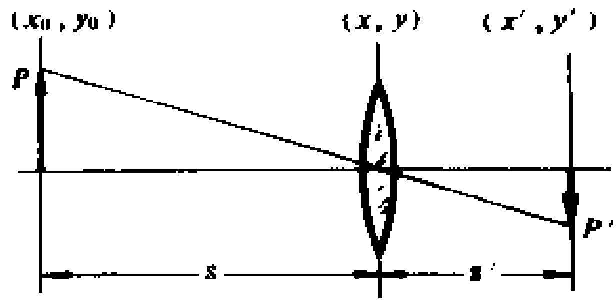
$$t(x, y)=t_0+t_1\cos[2\pi f_x(x-\Delta x)+2\pi f_y(y-\Delta y)]$$

§2 相因子判断法 正弦光栅的衍射

1．用薄透镜的位相变换函数，导出傍轴条件下的横向放大率公式.

解 如图，傍轴物点P与透镜相距为s，坐标为$(x_0, 0)$，它发射的发散球面波到达透镜的波前函数（相因子中略去与x，y无关的部分）为

$$\widetilde{U}_1(x, y)=A_1\exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{x_0 x}{s}\right)\right]$$



题1图

经透镜位相变换函数的作用，出射波前函数为

$$\widetilde{U}_2(x, y) = \widetilde{t}_P\widetilde{U}_1$$

$$= A_1\exp(-ik\frac{x^2+y^2}{2F})\exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{x_0 x}{s})]$$

考虑到轴外点源所联系的球面波前函数的标准形式，将$\widetilde{U}_2$改写成

$$\widetilde{U}_2(x, y) = A_1\exp\{-ik[\frac{x^2+y^2}{2s'}-\frac{1}{s'}(-\frac{s'x_0}{s})x]\}$$

式中

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{F}-\frac{1}{s}$$

运用相因子判断法可知，$\widetilde{U}_2(x, y)$代表会聚于轴外的球面波，纵向距离（即象距）为s'，横向坐标为

$$x'=-\frac{s'}{s}x_0$$

即横向放大率为

$$V\equiv\frac{x'}{x_0}=-\frac{s'}{s}$$

*2． 用楔形棱镜的位相变换函数导出傍轴光束斜入射时产生的偏向角δ。

解 如图，入射光束傍轴倾角为θ，其波前函数为

$$\widetilde{U}_1(x, y) = A_1\exp(ikx\sin\theta)$$

经薄棱镜位相变换函数作用以后，出射波前函数为

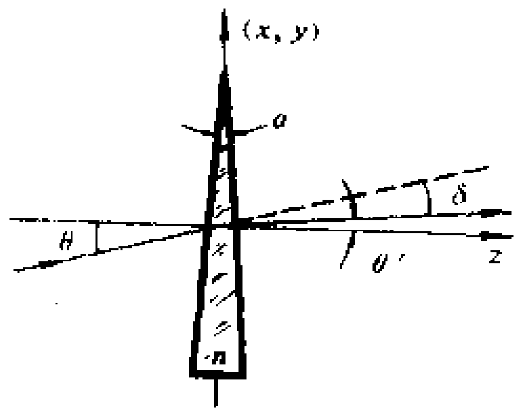
$$\begin{aligned}\widetilde{U}_2(x, y) &= \widetilde{t}_P\widetilde{U}_1\\ &= A_1\exp[-ik(n-1)\alpha x]\exp(ikx\sin\theta)]\\ &= A_1\exp\{ik[\sin\theta-(n-1)\alpha]x\}\\ &= A_1\exp(ikx\sin\theta')\end{aligned}$$

式中 $\sin\theta'=\sin\theta-(n-1)\alpha$

运用相因子判断法可知，出射光为倾角等于θ'的平行光，所以偏向角为

$$\delta = \theta' - \theta \approx \sin\theta' - \sin\theta$$

$$= -(n-1)\alpha$$



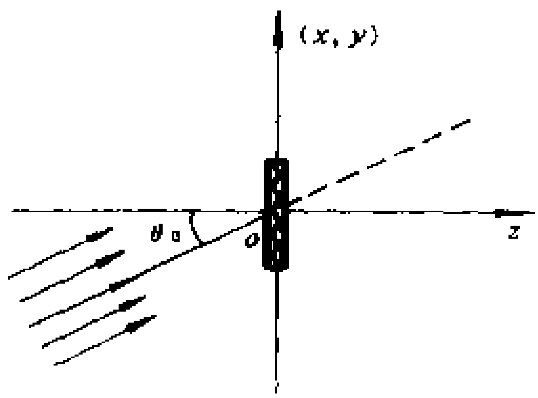
题2图

前面的负号说明，当顶角α在上方，则偏向角朝下（顺时针偏）；当顶角α在下方，则偏向角朝上（逆时针偏）。

*3. 讨论斜入射时正弦光栅夫琅和费衍射，证明衍射（方位角）公式与正入射时的差别仅在于把$\sin\theta$换为$(\sin\theta - \sin\theta_0)$，这里$\theta_0$为入射光的倾角

解 如图，斜入射时平行光的波前函数为

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp(ikx\sin\theta_0)$$



题3图

正弦光栅的屏函数为

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1\cos 2\pi f x$$

故出射波前为

$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{t}\tilde{U}_1 = A_1(t_0 + t_1\cos 2\pi f x)\exp(ikx\sin\theta_0)$$

$$= A_1 t_0 \exp(ikx\sin\theta_0) + \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp[ik(\sin\theta_0 + f\lambda)x]$$

$$+ \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp[ik(\sin\theta_0 - f\lambda)x]$$

运用相因子判断法可知$\tilde{U}_2$波包含三列平面衍射波，其中

$$\tilde{U}_0(x, y) = A_1 t_0 \exp(ikx\sin\theta_0)$$

$$\tilde{U}_{+1}(x, y) = \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp(ikx\sin\theta_{+1})$$

式中 $$\sin\theta_{+1}=\sin\theta_0+f\lambda$$

$$\widetilde{U}_{-1}(x,y)=\frac{1}{2}A_1 t_1\exp(ikx\sin\theta_{-1})$$

式中 $$\sin\theta_{-1}=\sin\theta_0-f\lambda$$

它们在远场分离为三个夫琅和费衍射斑，衍射角分别为 θ_0，θ_{+1}，θ_{-1}，所满足的公式为

$$\sin\theta-\sin\theta_0=\begin{cases} f\lambda, & (+1\text{级衍射斑})；\\ 0, & (0\text{级斑})；\\ -f\lambda, & (-1\text{级衍射斑})；\end{cases}$$

与正入射时的区别仅在于把 $\sin\theta$ 换作 $(\sin\theta-\sin\theta_0)$。

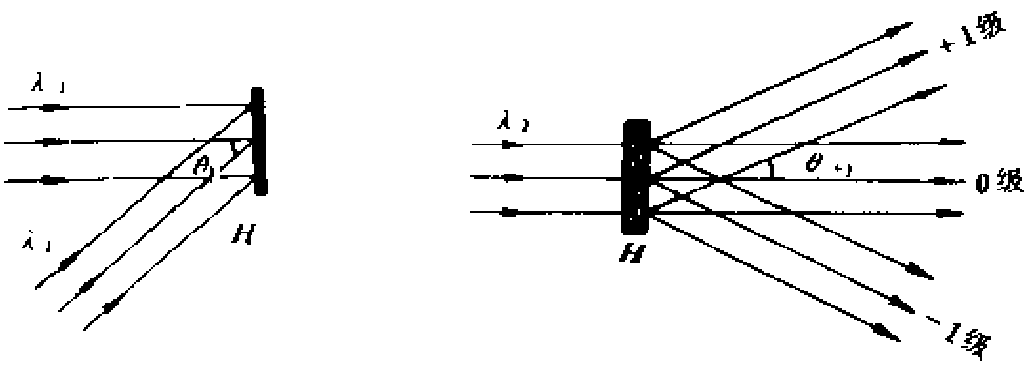
4． 如附图(a)，制备正弦光栅时所用的两束平行光的波长为 λ_1，其中一束正入射，另一束倾角为 θ_1。用此法制成的光栅作夫琅和费衍射实验时，照明光正入射，波长为 λ_2 [图(b)]。

（1）证明

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

式中 θ_{+1} 是 +1 级衍射斑的衍射角；

（2）如果两光束干涉时用红外光 $\lambda_1=10.6\ \mu m$（CO_2 激光），



（a） （b）

题 4 图

衍射时用可见光 $\lambda_2 = 6328\,\text{Å}$（He－Ne激光），$\theta_1 = 20^\circ$，求 θ_{+1} 值。

解 （1）利用两束平行光相干场的条纹间距公式，可得本题制备的正弦光栅的频率为

$$f = \frac{1}{d} = \frac{\sin\theta_1}{\lambda_1}$$

如用波长为 λ_2 的正入射平行光照明此光栅，则其 +1级平面衍射波的衍射角正弦为

$$\sin\theta_{+1} = f\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_1$$

衍射角与入射角正弦值之比等于波长之比，即

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

这表明人们可以通过改换波长来实现再现象的缩放。

（2）按题意，取 $\lambda_1 = 10.6\,\mu\text{m}$，$\lambda_2 = 0.6328\,\mu\text{m}$，$\theta_1 = 20^\circ$，得

$$\sin\theta_{+1} = \frac{0.6328}{10.6}\sin 20^\circ \approx 0.02042$$

$$\theta_{+1} \approx 1^\circ 10'$$

*5．设光栅的复振幅透过率函数为

$$t(x) = t_0 + t_1\cos 2\pi f x + t_1\cos\left(2\pi f x + \frac{\pi}{2}\right)$$

这块光栅的夫琅和费衍射场中将出现几个衍射斑？各斑的中心强度与0级斑的比值是多少？

解 这块光栅的复振幅透过率函数除直流成分 t_0 项外，后面两项是同一空间频率 f，可以肯定这块光栅仍将只有三个夫琅和费衍射斑。但在分析衍射斑中心强度的比值时，必须注意到后两

项给出的同级两个衍射斑之间是有 $\pi/2$ 位相差的，因此

$$A_0 \propto t_0$$

$$A'_{+1} = A''_{+1} \propto \frac{1}{2} t_1 ,\quad A_{+1} = \sqrt{A'^2_{+1} + A''^2_{+1}} \propto \frac{\sqrt{2}}{2} t_1$$

$$A'_{-1} = A''_{-1} \propto \frac{1}{2} t_1 ,\quad A_{-1} = \sqrt{A'^2_{-1} + A''^2_{-1}} \propto \frac{\sqrt{2}}{2} t_1$$

所以 ± 1 级衍射斑中心强度与 0 级斑之比值为

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \frac{A^2_{\pm 1}}{A^2_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

另一种算法是将 $\tilde{t}(x)$ 表达式后两项之和化为一项，即

$$\tilde{t}(x) = t_0 + 2t_1\cos\left(2\pi f x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= t_0 + \sqrt{2}\, t_1 \cos\left(2\pi f x + \frac{\pi}{4}\right)$$

由正弦光栅衍射特征表查出

$$A_{\pm 1} \propto \frac{1}{2}\sqrt{2}\, t_1 ,\quad A_0 \propto t_0$$

故

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

*6． 试分析一正弦光栅与一薄透镜密接组合系统的夫琅和费衍射（参见§1．习题2）。

解 平行光正入射时，经正弦光栅后成为三列平面衍射波，其方位角（衍射角）正弦值为

$$\sin\theta_0 = 0 ,\quad \sin\theta_{\pm 1} = \pm f\lambda$$

这三列平面衍射波经透镜变换为后焦面上的三个衍射斑 S_0，S_{+1}，

$S_{\pm 1}$（如图），其位置坐标 x' 分别为

$$x_0' = 0,\quad x_{\pm 1}' \approx \pm f\lambda F$$

当然，也可以从组合系统的屏函数

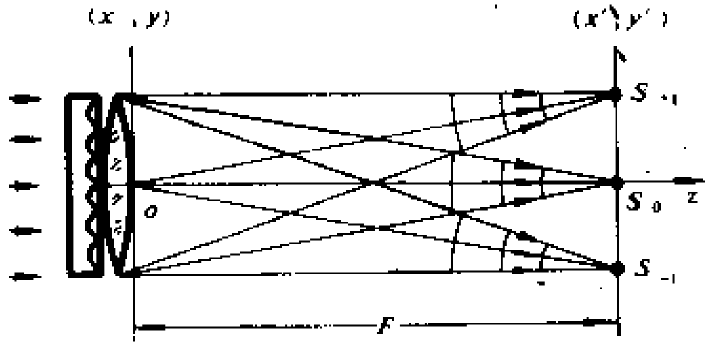
$$\tilde{t} = t_0 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - f\lambda x\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F} + f\lambda x\right)\right]$$

$$= t_0 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{f\lambda F x}{F}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 \exp\left\{-ik\left[\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{(-f\lambda F)x}{F}\right]\right\}$$

出发，运用相因子判断法，求得上述三列会聚球面衍射波。



题 6 图

*7． 试分析由正弦光栅再复制而得到的那块光栅的夫琅和费衍射［参见 §1．习题 5．(4)］。

解 我们注意到如此获得的复制光栅，其透过率函数除保留有原正弦光栅的频率成分外，还增加一种二倍频成分。为简单起见，将复制光栅的复振幅透过率函数直接写成

$$\tilde{t}_H = \left(t_0^2 + \frac{1}{2}t_1^2\right) + 2t_0 t_1 \cos 2\pi f x + \frac{1}{2}t_1^2 \cos 4\pi f x$$

式中 t_0、t_1 是上面复盖的那块正弦光栅透过率的直流系数和交流系数。由此可见，复制光栅的衍射场主要包含五列平面衍射波，在透镜后焦面上有五个夫琅和费衍射斑，其角方位分别为

$$\sin\theta = \begin{cases} 0 & (0\text{级}) \\ \pm f\lambda & (\text{基频}) \\ \pm 2f\lambda & (\text{二倍频}) \end{cases}$$

其2级斑与1级斑中心强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{\frac{1}{4}t_1^2}{t_0 t_1}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

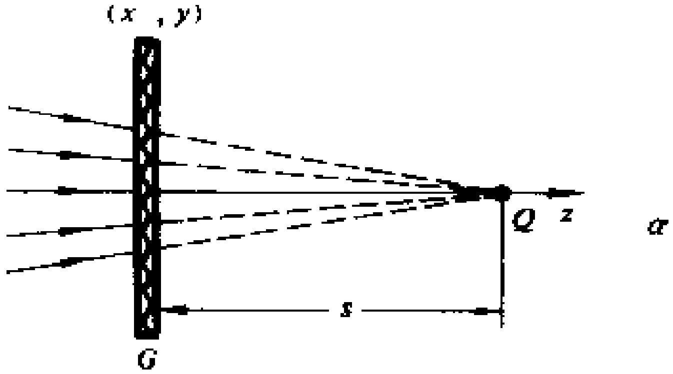
*8. 如图（a），$G(x, y)$为一块正弦光栅，其复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x, y) = t_0 + t_1\cos 2\pi f x$$

现用一束会聚球面光波照明。试用相因子判断法导出傍轴条件下衍射场的主要特征。

解 傍轴条件下，中心在轴上的会聚球面波波前函数的标准形式为

$$\tilde{U}_1(x, y) \approx A_1\exp\left(-ik\frac{x^2 + x^2}{2s}\right)$$



题8图（a）

经正弦光栅作用后，透射波前为

$$\tilde{U}_2(x, y) = (t_0 + t_1\cos 2\pi f x)\tilde{U}_1$$

$$= \left[t_0 + \frac{1}{2}t_1\exp(i2\pi f x) + \frac{1}{2}t_1\exp(-i2\pi f x)\right]\tilde{U}_1$$

$$= t_0 A_1\exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2S}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 A_1\exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2s} - \frac{f\lambda s x}{s}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}t_1 A_1\exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2s} + \frac{f\lambda s x}{s}\right)\right]$$

运用相因子判断法可知衍射场主要包含三种成分的衍射波（如图(b)所示），波前函数的第一项为

$$\tilde{U}_0(x, y)=t_0 A_1 \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2s}\right)$$

它代表会聚于s处的球面波，即入射光的直接透射波，当然，能流减少了；第二项为

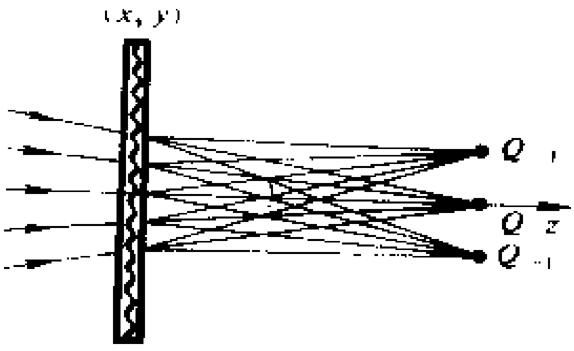
$$\tilde{U}_{-1}(x, y)=\frac{1}{2}t_1 A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{f\lambda sx}{s}\right)\right]$$

它代表会聚于轴外上方Q_{+1}的球面波，Q_{+1}的位置坐标为$(f\lambda s, 0, s)$；第三项为

$$\tilde{U}_{+1}(x, y)=\frac{1}{2}t_1 A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2s}+\frac{f\lambda sx}{s}\right)\right]$$

它代表会聚于轴外下方Q_{-1}的球面波，其位置坐标为$Q_{-1}(-f\lambda s, 0, s)$。

以上结果表明正弦光栅对波前的变换作用同时相当于两个楔形棱镜，一个劈角在下方的棱镜产生象点Q_{+1}，一个劈角在上方的棱镜产生象点Q_{-1}。



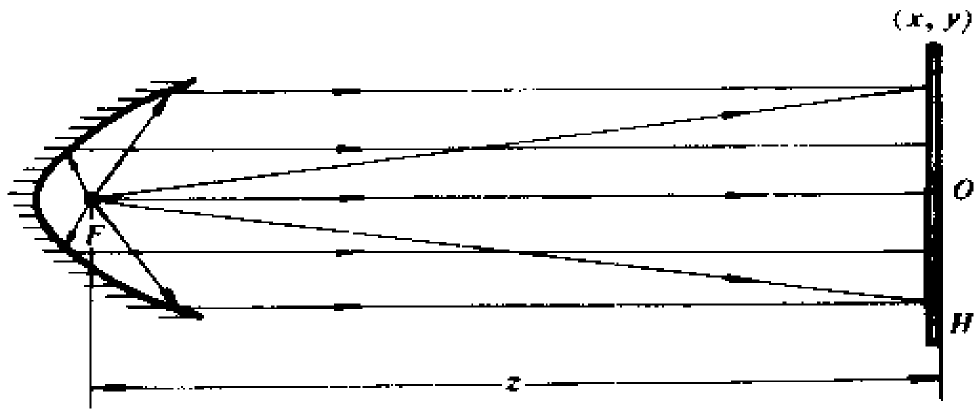
题8图(b)

*9．装置如图(a)将一点源置于反射镜的焦点，用以实现平面波与球面波的干涉。设记录介质H面上平面波振幅为A_1，球面波（傍轴条件）的振幅为A_2。

（1）试分析干涉条纹的形状；

（2）导出干涉场的强度分布；

（3）若将感光底片H作线性冲洗而成为一张波带片，再用



题9图(a)

一束相同波长的平行光束正入射于该波带片，试用相因子判断法分析衍射场的主要特征。

解　(1) 干涉花样的形状是以O点为中心的同心环。

(2) 干涉场强度分布

$$I_H(x, y) = \left[A_1 + A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]$$

$$\times\left[A_1 + A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]^*$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(k\frac{r^2}{2z}\right)$$

(3) 入射光波前

$$\tilde{U}_1(x, y) = A$$

经波带片H以后透射场为

$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{t}_H\tilde{U}_1$$

$$= AI_H$$

$$= A(A_1^2 + A_2^2) + AA_1A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$+ AA_1A_2\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

须知透射场便是衍射场的波前，进一步运用相因子判断法可知，此时衍射场主要包含以下三种衍射波，第一项为

$$\tilde{U}_0(x,y)=A(A_1^2+A_2^2)$$

是一束正出射的平面衍射波；第二项为

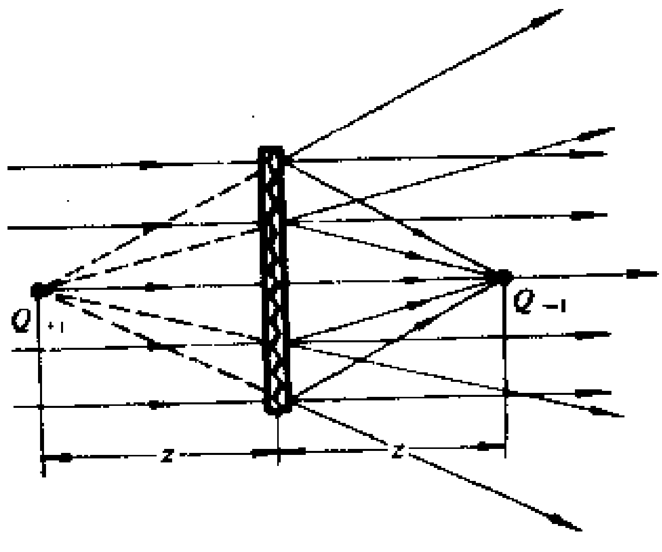
$$\tilde{U}_{+1}(x,y)=AA_1A_2\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

是一束发散球面衍射波，中心Q_{+1}位于底片左侧距离为z；第三项为

$$\tilde{U}_{-1}(x,y)=AA_1A_2\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

是一束会聚球面衍射波，中心Q_{-1}位于底片右侧距离为z。

这张底片是一张正弦型的菲涅耳波带片。由以上讨论可知，它对波前的变换作用，同时相当于两个透镜：一个为发散透镜，产生平行光的虚象点Q_{+1}，另一个为会聚透镜，产生平行光的实象点Q_{-1}，如图(b)所示。



题9图(b)

*10. 算出下列黑白光栅的前10个傅里叶系数：t_0，$\tilde{t}_1$，…，$\tilde{t}_{10}$.

(1) $a/d=1/3$；

(2) $a/d=1/2$。

解 黑白光栅的透过率函数为

$$t(x)=\begin{cases}1, & |x|<\dfrac{a}{2}\\[2mm] 0, & \dfrac{a}{2}<|x|<\dfrac{d}{2}\end{cases}$$

傅里叶系数为

$$t_0=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\,dx=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2} dx$$

$$=\frac{a}{d}$$

$$\widetilde{t}_n=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\,e^{-i2\pi f_n x}\,dx$$

$$=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi f_n x}\,dx$$

$$=\frac{1}{d}\,\frac{\sin\pi f_n a}{\pi f_n}=\frac{a}{d}\,\frac{\sin n\pi fa}{n\pi fa}$$

由于 $t(x+d)=t(x)$，所以基频

$$f=\frac{1}{d}$$

傅里叶系数可写成

$$\widetilde{t}_n=\frac{a}{d}\,\frac{\sin(n\pi a/d)}{n\pi a/d}$$

（1）当 $\frac{a}{d}=\frac{1}{3}$ 时，得

$$t_0=\frac{1}{3} \qquad \widetilde{t}_1=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\widetilde{t}_2=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}, \qquad \widetilde{t}_3=\frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{3}=0$$

$$\tilde{t}_4 = \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \qquad \tilde{t}_5 = \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{10\pi}$$

$$\tilde{t}_6 = \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{3} = 0 \qquad \tilde{t}_7 = \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{14\pi}$$

$$\tilde{t}_8 = \frac{1}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \qquad \tilde{t}_9 = \frac{1}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{3} = 0$$

（2）当$\frac{a}{d} = \frac{1}{2}$时，得

$$t_0 = \frac{1}{2} \qquad \tilde{t}_1 = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_3 = \frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi}$$

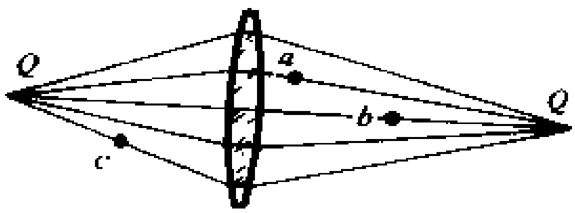
$$\tilde{t}_4 = \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_5 = \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5\pi}$$

$$\tilde{t}_6 = \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_7 = \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{2} = -\frac{1}{7\pi}$$

$$\tilde{t}_8 = \frac{1}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{2} = 0 \qquad \tilde{t}_9 = \frac{1}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{2} = \frac{1}{9\pi}$$

§3 阿贝成象原理

*1． 如附图，设透镜理想成象，证明在成象光束中任意几个次波源（如图中的a、b、c）在象点Q'产生的扰动是同位相的。如果在光路中设有衍射屏，以上结论是否成立？



题1图

证 点源在某一场点产生的扰动的位相，既决定点源本身的位相，又决定点源至场点

的光程．而次波源具有双重性，它既是实际物点Q所激发的波场中的一点，又是对象点Q'扰动有所贡献的点源。因此，次波源a，b，c在Q'点所产生的扰动位相应表示为

$$\begin{aligned}\varphi_a(Q') &= \varphi_Q(a) + \frac{2\pi}{\lambda}L(aQ')\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(Qa) + \frac{2\pi}{\lambda}L(aQ')\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(QaQ')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_b(Q') &= \varphi_Q(b) + \frac{2\pi}{\lambda}L(bQ')\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(Qb) + \frac{2\pi}{\lambda}L(bQ')\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(QbQ')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_c(Q') &= \varphi_Q(c) + \frac{2\pi}{\lambda}L(cQ')\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(Qc) + \frac{2\pi}{\lambda}L(cQ')\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}L(QcQ')\end{aligned}$$

再考虑到理想成象的物象等光程性，即

$$L(QaQ') = L(QbQ') = L(QcQ')$$

所以

$$\varphi_a(Q') = \varphi_b(Q') = \varphi_c(Q')$$

这个结论在分析计算象面衍射场问题中是有用的。不论光路中是否有衍射屏，只要是这些次波源对象点的扰动有所贡献，这个结论依然成立．

* 2．　证明在傍轴条件下傅氏面上$\pm n$级衍射斑相对0级

的位相为

$$\varphi_{\pm n} = -k\frac{(na)^2}{2z}$$

式中z是傅氏面到象面的距离，a为相邻衍射斑中心间的距离

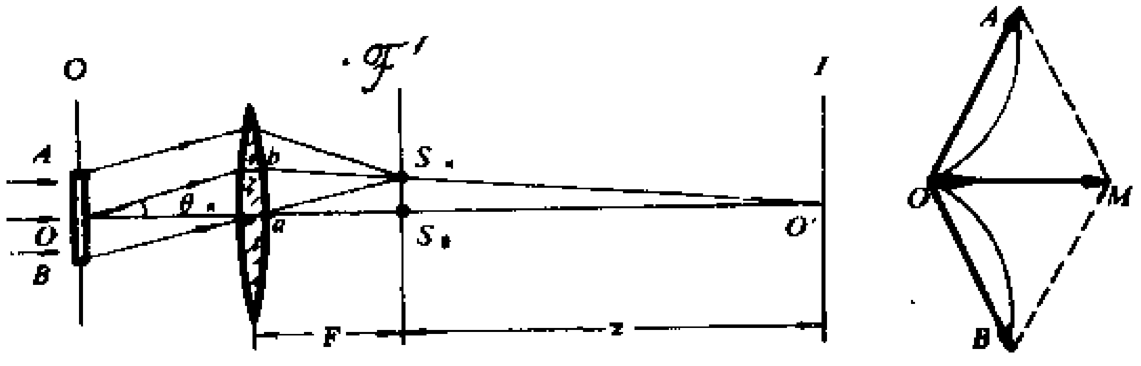
证 如图（a），n级衍射斑的衍射角满足

$$\sin\theta_n = f_n\lambda = nf\lambda$$

如何决定衍射斑中心的位相是个关键。衍射斑中心的扰动是物面上大量次波源沿θ_n方向传播的次级扰动的相干叠加。中心次波源O沿光程$L(ObS_n)$到达S_n点的位相为

$$\varphi_n(S_n) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}L(ObS_n)$$

考虑到单频信息是偶函数，上方OA段与下方OB段在S_n处扰动的位相关系具有对称性，从矢量图［图(b)］中清楚看出，S_n点总扰动$\boldsymbol{OM}$的位相与中心点O发射的次级扰动（小矢量）位相是一致的。



（a）装置图　　　　（b）矢量图解

题2图

因此，n级衍射斑与0级斑的位相分别表示为

$$\varphi(S_n) = \varphi_n(S_n) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}L(ObS_n)$$

$$\varphi(S_0) = \varphi_0(S_0) - \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}L(OaS_0)$$

位相差为

$$\varphi(S_n) - \varphi(S_0) = \frac{2\pi}{\lambda}[L(ObS_n) - L(OaS_0)] \quad (a)$$

注意到前场的光程差可以转换为后场的光程差，即

$$L(ObS_n) = L(ObS_nO') - L(S_nO')$$

$$L(OaS_0) = L(OaS_0O') - L(S_0O')$$

并考虑到物象等光程性

$$L(ObS_nO') = L(OaS_0O')$$

于是有

$$L(ObS_n) - L(OaS_0) = -[L(S_nO') - L(S_0O')] \quad (b)$$

在傍轴条件下

$$\overline{S_nO'} - \overline{S_0O'} \approx \frac{1}{2z}(\overline{S_nS_0})^2 \quad (c)$$

$$\overline{S_nS_0} \approx F\sin\theta_n = nf\lambda F = na \quad (d)$$

式中 $a = f\lambda F$ 是相邻衍射斑中心间的线距离. 综合式(a),(b),(c),(d)，最后得位相差为

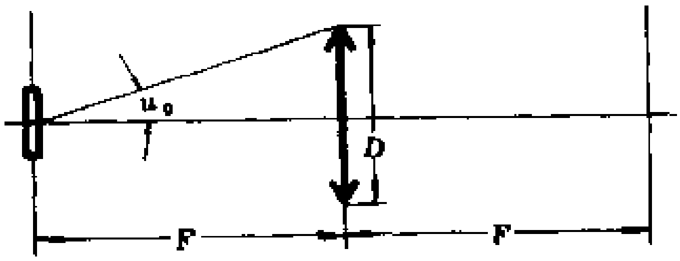
$$\varphi(S_n) - \varphi(S_0) = -k\frac{(na)^2}{2z}$$

值得注意的是，对于 $-n$ 级衍射斑的位相差表示式也是如此，不必变号. 当然，按我们原先对位相正负号的习惯约定（位相超前算负），上式中的负号说明 n 级衍射斑的实际位相是超前 0 级斑的.

·3. 在一相干成象系统中，镜头（作为入射光瞳）的相对孔径为 1/5，求此系统的截止频率（mm^{-1}）. 设物平面在前焦面附近，照明波长为0.5μm.

解 如图，系统的截止频率 f_M 由镜头口径限制的最大出射角 u_0 决定，其关系为

$$\sin u_0 = f_M \lambda$$



题 3 图

从几何上看大体上

$$\sin u_0 \approx \frac{D}{2F}$$

所以

$$f_M = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{D}{F}\right)$$

取镜头的相对孔径 $(D/F) = 1/5$，$\lambda = 0.5\,\mu\text{m}$，算得

$$f_M = 200\,\text{mm}^{-1}$$

* **4.** 利用阿贝成象原理导出在相干照明条件下显微镜的最小分辨距离公式。

解 上题讨论过的截止频率的倒数，便是镜头口径限制下的相干显微成象系统可分辨的最小空间周期

$$d_m = \frac{1}{f_M}$$

$$= \frac{\lambda}{\sin u_0} = 2\lambda\left(\frac{D}{F}\right)^{-1}$$

而非相干显微成象系统的最小分辨距离公式为

$$\delta y_m = 0.61\frac{\lambda}{\sin u_0}$$

由此可见，两者（d_m 与 δy_m）的数值很相近。

§ 4 夫琅和费衍射场的标准形式

1. 采用如图所示远场装置接收夫琅和费衍射场，设单缝

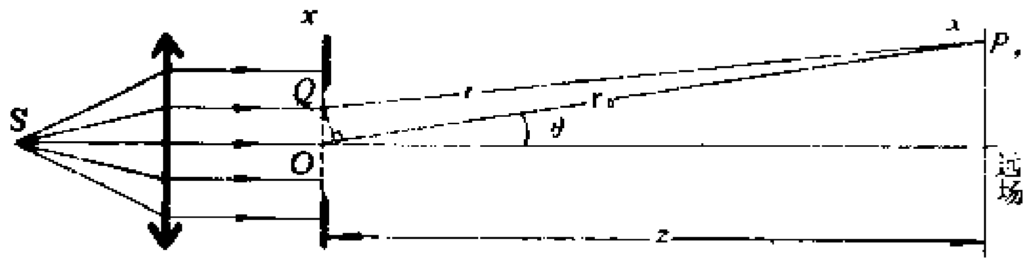
宽度约为100μm，入射光波长6328 Å，问:

（1）接收屏幕至少应放多远?

（2）在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅和费衍射场?

（3）0级半角宽度为多少?

（4）在接收屏幕上0级的线宽度有多少?



题1图

解　（1）相对于衍射屏线度a来说，远场条件要求纵向距离

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

取$a \approx 100\ \mu m$，$\lambda = 0.63\ \mu m$，选30倍作估算，得

$$z = 30\ \frac{a^2}{\lambda} \approx 48\ cm$$

（2）夫琅和费衍射远场装置只要求接收范围ρ满足傍轴条件

$$\rho \ll z$$

取$z \approx 50\ cm$，选10倍作估算，得

$$\rho = \frac{1}{10}z \approx 5\ cm$$

（3）零级半角宽度公式仍然是

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a}$$

$$= 6.3 \times 10^{-3}\ rad \approx 21.7' = 21'42''$$

（4）在接收屏幕零级两侧暗点之间的线宽度

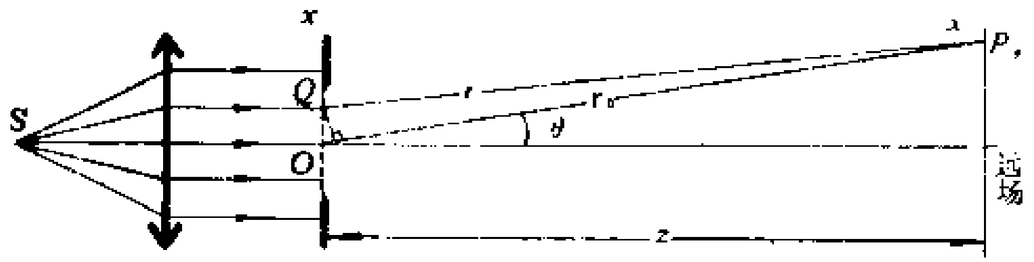
宽度约为100 μm，入射光波长6328 Å，问：

（1） 接收屏幕至少应放多远？

（2） 在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅和费衍射场？

（3） 0级半角宽度为多少？

（4） 在接收屏幕上0级的线宽度有多少？



题1图

解 （1）相对于衍射屏线度a来说，远场条件要求纵向距离

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

取$a \approx 100\ \mu\text{m}$，$\lambda = 0.63\ \mu\text{m}$，选30倍作估算，得

$$z = 30\ \frac{a^2}{\lambda} \approx 48\ \text{cm}$$

（2） 夫琅和费衍射远场装置只要求接收范围ρ满足傍轴条件

$$\rho \ll z$$

取$z \approx 50$ cm，选10倍作估算，得

$$\rho = \frac{1}{10}z \approx 5\ \text{cm}$$

（3）零级半角宽度公式仍然是

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a}$$

$$= 6.3 \times 10^{-3}\ \text{rad} \approx 21.7' = 21'42''$$

（4） 在接收屏幕零级两侧暗点之间的线宽度

$$\Delta l_0 \approx 2\Delta\theta_0 z$$

$$\approx 2\times(6.3\times10^{-3})\times50\ \mathrm{cm}=6.3\ \mathrm{mm}$$

* 2． 采用象面接收装置［图(a)或(b)］接收单缝的夫琅和费衍射场，设单缝宽度约为1 mm，入射光波长4880 Å，物距40 cm，象距80 cm。

(1) 如果单缝置于透镜后方，要求象面在1 cm范围内接收到夫琅和费衍射场，单缝距象面至少多远？

(2) 如果单缝紧贴透镜后侧，求0级半角宽度和接收屏幕上0级的线宽度；

(3) 如果单缝离透镜40 cm远，求0级半角宽度及它在幕上的线宽度；

(4) 如果单缝置于透镜前方，紧贴在其左侧，情形如何？

解 (1) 如图(a)。象面接收装置对衍射屏和接收屏都只要求傍轴条件，即要求衍射屏线度a和接收屏横向线度ρ满足

$$z'\gg a,\quad z'\gg\rho$$

如果选$\rho\approx(1/2)\times1.0\ \mathrm{cm}=0.5\ \mathrm{cm}$，$a\approx0.1\ \mathrm{cm}$，取

$$z'=10\rho=5\ \mathrm{cm}$$

即单缝与象面距离大于5 cm，便足以在象面1 cm范围内接收到夫琅和费衍射场。

(2) 如果取$z'\approx s'=80\ \mathrm{cm}$，则象面上零级半角宽度公式仍然为

$$\Delta\theta_0\approx\frac{\lambda}{a}=\frac{0.488}{1000}\approx4.9\times10^{-4}\ \mathrm{rad}$$

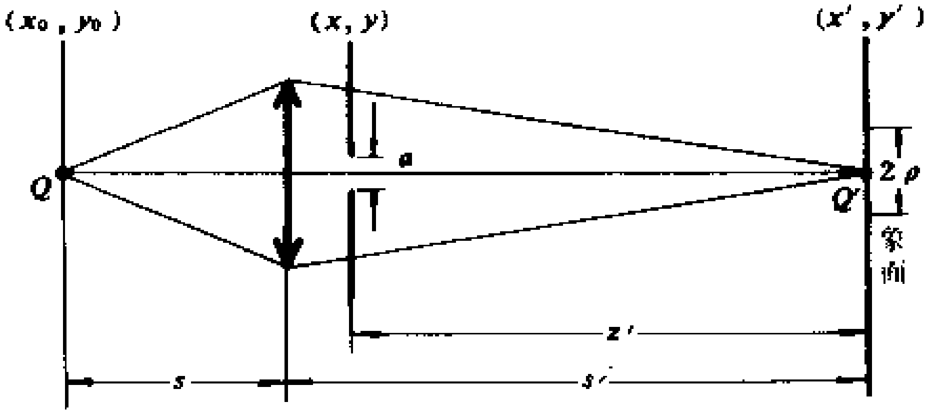
$$\approx1.7'=1'42''$$

而零级线宽

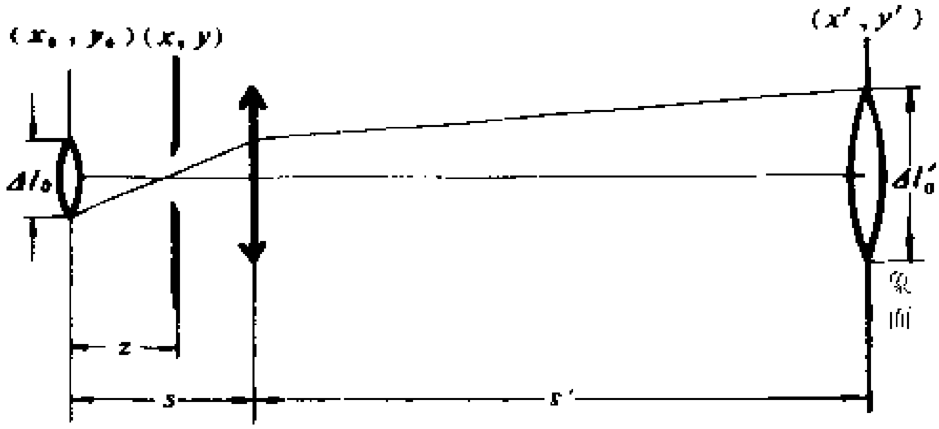
$$\Delta l_0\approx2\Delta\theta_0 z'=2\times(4.9\times10^{-4})\times80\ \mathrm{cm}$$

$$\approx0.78\ \mathrm{mm}。$$

(3) 如果单缝离透镜距离$(s'-z')=40\ \mathrm{cm}$远，零



(a)



(b)

题 2 图

级半角宽度不变，仍为

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a} \approx 4.9\times10^{-4}\ \mathrm{rad}$$

而零级线宽缩为

$$\Delta l_0 \approx 0.39\ \mathrm{mm}$$

（4）如果单缝紧贴透镜左侧，情况与（2）相近，零级半角宽度不变，仍为

$$\Delta\theta_0 \approx 4.9\times10^{-4}\ \mathrm{rad}$$

零级线宽

$$\Delta l_0 \approx 0.78\ \mathrm{mm}$$

如果衍射屏置于透镜前方某处［如图(b)］，用可逆共轭原理去处理最简单。先将光路逆转自右向左，视物面x_0y_0为象面。此时零级线宽为

$$\Delta l_0 = 2\Delta\theta_0 z = 2\frac{\lambda}{a}z$$

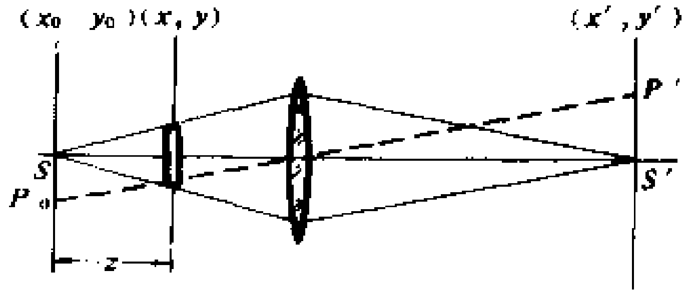
再将光路还原，此时象面$x'y'$上的零级斑就是当初物面x_0y_0上零级斑的共轭象，故零级线宽

$$\Delta l_0' = V\Delta l_0 = \frac{s'}{s}\left(2\frac{\lambda}{a}z\right)$$

$$= 2\frac{\lambda}{a}\frac{s'}{s}z$$

3． 试论证衍射屏置于透镜前方时，象面接收的是夫琅和费衍射场，并给出此时衍射场的函数形式。

证 如图，利用书中已经给出的衍射屏置于透镜后方时的象面衍射场的结果，并根据光路可逆共轭原理，便可论证衍射屏置于透镜前方的情况。具体说明如下：设平面x_0y_0是照明物点S所在的平面，其共轭象面为$x'y'$，衍射平面为xy。根据光的可逆性原理，如果将光路逆转自右向左，S'便成为物点，S便成为象点，此时衍射屏就成为透镜后方了，所得衍射场为



题3图

$$\tilde{U}(x_0,y_0) = \frac{-i}{\lambda z}e^{ikL_0}A_1\times$$

$$\iint\tilde{t}(x,y)\exp\left[-ik\frac{1}{z}(x_0x+y_0y)\right]dxdy$$

现在再将照明点源还原至S点，则衍射场$\widetilde{U}(x_0, y_0)$就回到$x'y'$面上，即

$$P_0(x_0, y_0) \to P'(x', y') = (Vx_0, Vy_0)$$

$$\widetilde{U}(x_0, y_0) \to \widetilde{U}(x', y')$$

$$\widetilde{U}(x', y') = \frac{-i}{\lambda Vz} e^{ikL_0} A_1 \times$$

$$\times \iint \widetilde{t}(x, y) \exp\left[-ik\frac{1}{zV}(x'x + y'y)\right] dx dy$$

上式符合夫琅和费衍射积分的标准形式，它就是衍射屏置于透镜前方时象面上接收的夫琅和费衍射场的具体形式。

§5 傅里叶变换 δ函数

*1 若

$$\widetilde{g}(x) \rightleftharpoons \widetilde{G}(f) = G(f) e^{i\varphi(f)}$$

证明（1）当$\widetilde{g}(x)$是实函数时，有

$$\widetilde{G}(f) = \widetilde{G}^*(-f), \quad \widetilde{G}^*(f) = \widetilde{G}(-f)$$

$$g(x) = 2\int_0^{\infty} G(f) \cos[2\pi f x + \varphi(f)]\, df$$

（2）当$\widetilde{g}(x)$是偶函数时，有

$$\widetilde{G}(f) = 2\int_0^{\infty} \widetilde{g}(x) \cos 2\pi f x\, dx$$

$$\widetilde{g}(x) = 2\int_0^{\infty} \widetilde{G}(f) \cos 2\pi f x\, df$$

（3）当$\widetilde{g}(x)$是实数偶函数时，有

$$G(f) = 2\int_0^{\infty} g(x) \cos 2\pi f x\, dx, \quad \varphi(f) = 0,$$

$$g(x)=2\int_0^{\infty}G(f)\cos 2\pi f x\ df.$$

证 （1）如果 $g(x)$ 仅是实函数，其频谱则可能是复函数，

$$\widetilde{G}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}g(x)e^{-i2\pi fx}dx+\int_0^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}dx$$

$$=\int_0^{\infty}g(-x)e^{i2\pi fx}dx+\int_0^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}dx$$

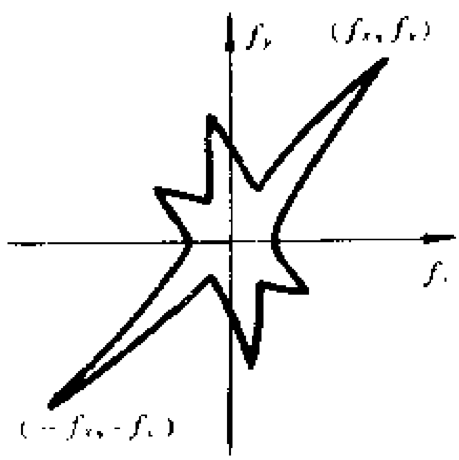
$$=\int_0^{\infty}\left[g(-x)e^{i2\pi fx}+g(x)e^{-i2\pi fx}\right]dx$$

$$\widetilde{G}(-f)=\int_0^{\infty}\left[g(-x)e^{-i2\pi fx}+g(x)e^{i2\pi fx}\right]dx$$

由于 $g(x)$ 是实函数，$g(-x)e^{i2\pi fx}$ 与 $g(-x)e^{-i2\pi fx}$ 共轭，$g(x)e^{-i2\pi fx}$ 与 $g(x)e^{i2\pi fx}$ 共轭．故证得

$$\widetilde{G}(f)=\widetilde{G}^*(-f),\quad \widetilde{G}^*(f)=\widetilde{G}(-f)\qquad (a)$$

这一关系的光学意义是当屏函数为纯振幅型时，其傅里叶频谱强度（夫琅和费衍射图样）是中心对称的，绕光轴（z 轴）转 π 图样不变，如图．



题 1 图

实函数的频谱展开式为

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}(f)e^{i2\pi fx}df$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\widetilde{G}(f)e^{i2\pi fx}df$$

$$+\int_0^{\infty}\widetilde{G}(f)e^{i2\pi fx}df$$

$$= \int_0^{\infty} \widetilde{G}(-f) e^{-i2\pi f x} df + \int_0^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{i2\pi f x} df$$

$$= \int_0^{\infty} [\widetilde{G}^*(f) e^{-i2\pi f x} + \widetilde{G}(f) e^{i2\pi f x}] df$$

$$= 2\int_0^{\infty} G(f) \cos[2\pi f x + \varphi(f)] df \qquad (b)$$

以上证明仅用了 $g(x)$ 为实函数这一性质。

（2）当 $\widetilde{g}(x)$ 为偶函数时，$\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(-x)$，于是频谱函数演变为

$$\widetilde{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x} dx + \int_0^{\infty} \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} [\widetilde{g}(-x) e^{i2\pi f x} + \widetilde{g}(x) e^{-i2\pi f x}] dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} \widetilde{g}(x) \cos 2\pi f x \, dx \qquad (c)$$

且有 $\widetilde{G}(f) = \widetilde{G}(-f)$

原函数

$$\widetilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{i2\pi f x} df$$

$$\widetilde{g}(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f) e^{-i2\pi f x} df$$

由此得

$$\widetilde{g}(x) = \frac{1}{2}[\widetilde{g}(x) + \widetilde{g}(-x)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f)(e^{i2\pi f x} + e^{-i2\pi f x}) df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f) \cos 2\pi f x \, df$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} \tilde{G}(f) \cos 2\pi f x \, df \qquad (d)$$

由式(c),(d)可看出，当原函数为偶函数时，频谱函数也为偶函数，且傅里叶变换具有余弦变换形式。

(3) 当$g(x)$为实数偶函数时，式(c),(d)进一步演变为

$$G(f) = 2 \int_{0}^{\infty} g(x) \cos 2\pi f x dx \qquad (e)$$

$$g(x) = 2 \int_{0}^{\infty} G(f) \cos 2\pi f x df \qquad (f)$$

此时频谱函数才是实数形式，位相频谱恒为零，只有振幅频谱。

*2. 证明傅里叶变换中的微积分运算公式：

(1) $\dfrac{dg(x)}{dx} \rightleftharpoons i2\pi f G(f)$

(2) $\displaystyle\int g(x)\,dx \rightleftharpoons \frac{1}{i2\pi f} G(f)$

(3) $-i2\pi x g(x) \rightleftharpoons \dfrac{dG(f)}{df}$

(4) $\dfrac{g(x)}{-i2\pi x} \rightleftharpoons \displaystyle\int G(f)\,df$

证 (1) 因为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f x} df$$

所以

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f x} df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[G(f)\, e^{i2\pi fx}\right] df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[i2\pi f G(f)\right] e^{i2\pi fx}\, df$$

即

$$\frac{dg(f)}{dx} \rightleftharpoons i2\pi f G(f)\text{，或 } \frac{d}{dx} \rightleftharpoons i2\pi f$$

（2）以 $g(x)$ 的傅里叶变换式代入

$$\int g(x)\,dx = \int \left[\int G(f)\, e^{i2\pi fx}\,df\right] dx$$

$$= \int \left[\int G(f)\, e^{i2\pi fx}\,dx\right] df$$

$$= \int \left[\frac{1}{i2\pi f} G(f)\right] e^{i2\pi fx}\,df$$

即

$$\int g(x)\,dx \rightleftharpoons \frac{1}{i2\pi f} G(f)\text{，或} \int dx \rightleftharpoons \frac{1}{i2\pi f}$$

（3）同理，以 $G(f)$ 的傅里叶变换式代入

$$\frac{dG(f)}{df} = \frac{d}{df}\int g(x)\, e^{-i2\pi fx}\,dx$$

$$= \int \frac{d}{df}\left[g(x)\, e^{-i2\pi fx}\right] dx$$

$$= \int \left[-i2\pi x g(x)\right] e^{-i2\pi fx}\,dx$$

即

$$-i2\pi x g(x) \rightleftharpoons \frac{dG(f)}{df}\text{. 或 } -i2\pi x \rightleftharpoons \frac{d}{df}$$

(4) 以$G(f)$的傅里叶变换式代入

$$\int G(f)\,df = \int\left[\int g(x)e^{-i2\pi f x}dx\right]df$$

$$= \int\left[\int g(x)e^{-i2\pi f x}df\right]dx$$

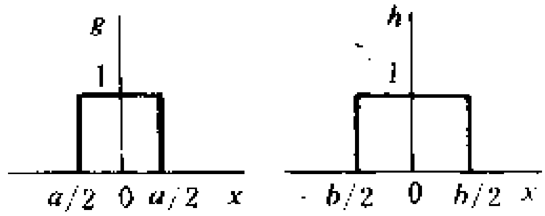
$$= \int\left[\frac{1}{-i2\pi x}g(x)\right]e^{-i2\pi f x}dx$$

即

$$\frac{1}{-i2\pi x}g(x) \rightleftharpoons \int G(f)\,df，或 \frac{1}{i2\pi x} \rightleftharpoons \int df$$

*3. 如图(*a*)，$g(x)$和$h(x)$是宽度分别为a和b的单位方垒函数，求它们的卷积。

解 卷积函数的几何意义是h函数平移再翻转，与g函数相乘再积分。对于位垒函数来说，这种平移、翻转、乘积、积分就是重叠面积[如图(*b*)]。据此算出

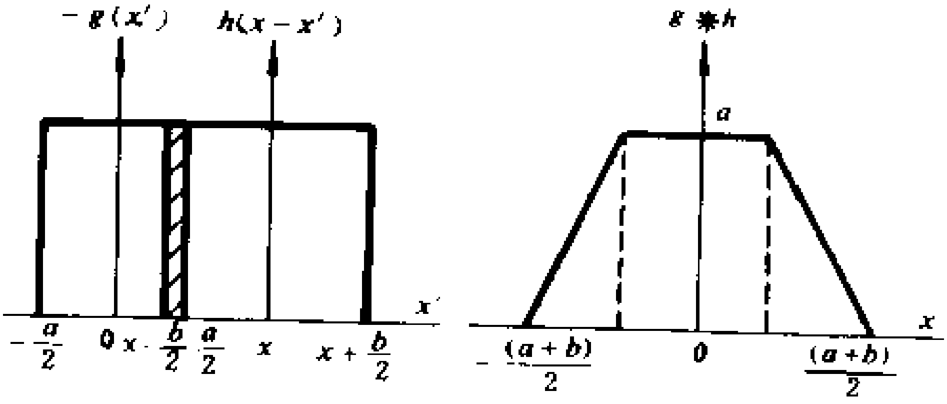


题3图(*a*)

$$g(x)*h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x')h(x-x')\,dx'$$

$$= \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{2}(a+b) \\ \frac{1}{2}(a+b) - |x|, & \frac{1}{2}|b-a| < |x| < \frac{1}{2}(a+b) \\ a, & |x| < \frac{1}{2}|b-a| \end{cases}$$

*4. 证明卷积的频谱等于频谱的乘积，即若



题3图（b）

$$g \rightleftharpoons G,\quad h \rightleftharpoons H$$

则

$$g*h \rightleftharpoons GH$$

证 由卷积定义式

$$g*h=\int_{-\infty}^{\infty} g(x')h((x-x')dx'$$

得其频谱$\mathscr{F}$表达式为

$$\mathscr{F}\{g*h\}=\int_{-\infty}^{\infty}(g*h)e^{-i2\pi fx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x')h(x-x')e^{-i2\pi fx}dx'dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x')e^{-i2\pi fx'}h(x-x')e^{-i2\pi f(x-x')}dx'd(x-x')$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x')e^{-i2\pi fx'}h(y)e^{-i2\pi fy}dx'dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x')\cdot e^{-i2\pi fx'}dx'\int_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-i2\pi fy}dy$$

$$=\mathscr{F}\{g\}\ \mathscr{F}\{h\}$$

*5．　证明相关函数的频谱关系为

$$g \circledast h \rightleftharpoons G^* H$$

证　由相关函数定义式

$$g \circledast h = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x')\, h(x+x')\, d x'$$

得其频谱表达式为

$$\mathscr{F}\{g \circledast h\} = \int_{-\infty}^{\infty} (g \circledast h)\, e^{-i2\pi f x}\, d x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x')\, h(x+x')\, e^{-i2\pi f x}\, d x'\, d x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x') e^{i2\pi f x'} h(x+x') e^{-i2\pi f(x+x')} dx' d(x+x')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [g(x') e^{-i2\pi f x'}]^*\, h(y) e^{-i2\pi f y}\, d x'\, d y$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-i2\pi f x'} d x'\right]^* \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-i2\pi f y}\, d y$$

$$= \mathscr{F}^*\{g\}\mathscr{F}\{h\}$$

*6．　证明 $g \circledast g = g * g^*$。

证　用频谱语言证明。因为自相关的频谱等于频谱绝对值的平方，即

$$g \circledast g \rightleftharpoons |G(f)|^2 = G(f)\, G^*(f)$$

又因为卷积的频谱等于频谱的乘积，即

$$g \circledast g^* \rightleftharpoons G(f)\, G^*(f)$$

可见两式右端频谱相同，则原函数亦相同，故有

$$g \circledast g = g * g^*$$

7．　证明两个高斯函数

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-a x^2},\quad h(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, e^{-b x^2}$$

的卷积仍为高斯函数：

$$g(x)*h(x)=\sqrt{\frac{c}{\pi}}e^{-cx^2}$$

式中 $c=ab/(a+b)$

证 利用卷积的频谱关系

$$g(x)*h(x)\rightleftharpoons G(f)H(f)$$

证明本题更为方便。高斯函数的频谱仍为高斯型，即

$$G(f)=\exp(-\frac{\pi^2f^2}{a})$$

$$H(f)=\exp(-\frac{\pi^2f^2}{b})$$

故有

$$G(f)H(f)=\exp\left[-\pi^2f^2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\right]$$

$$=\exp(-\frac{\pi^2f^2}{c})$$

式中 $c=ab/(a+b)$

所以卷积

$$g(x)*h(x)=\mathscr{F}^{-1}\{\exp(-\frac{\pi^2f^2}{c})\}$$

$$=\sqrt{\frac{c}{\pi}}e^{-cx^2}$$

式中 $c=ab/(a+b)$

* 8. 证明两个洛仑兹函数

$$g(x)=\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2},\quad h(x)=\frac{b}{\pi}\frac{1}{b^2+x^2}$$

的卷积仍为洛仑兹函数：

$$g(x)*h(x)=\frac{c}{\pi}\frac{1}{c^2+x^2}$$

式中 $c = a + b$

证 利用卷积的频谱关系证明本题更为方便。

$$g(x) \rightleftharpoons G(f) = \exp(-2\pi a|f|)$$

$$h(x) \rightleftharpoons H(f) = \exp(-2\pi b|f|)$$

$$\begin{aligned} g(x) * h(x) \rightleftharpoons G(f)H(f) &= \exp[-2\pi(a-b)|f|] \\ &= \exp(-2\pi c|f|) \end{aligned}$$

式中 $c = a + b$。所以卷积

$$\begin{aligned} g(x) * h(x) &= \mathscr{F}^{-1}\{e^{-2\pi c|f|}\} \\ &= \frac{c}{\pi}\,\frac{1}{c^2 + x^2} \end{aligned}$$

9. 一质量为m的质点位于空间(x_0, y_0, z_0)处，试用δ函数写出空间里的密度分布函数$\rho(x, y, z)$。

解 此时质量密度分布函数为

$$\rho(x, y, z) = m\delta[(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)]$$

10. 点电荷q位于坐标原点，写出静电场所满足的泊松方程。

解 静电场电位分布函数$U(x, y, z)$所满足的泊松方程的一般形式为

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

如果电荷是点状分布，且点电荷q位于坐标原点，则体电荷密度分布函数为

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x, y, z)$$

故泊松方程为

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{\varepsilon_0}q\delta(x, y, z)$$

***11.** 试证明δ函数的以下性质：

（1） δ函数是偶函数；

（2） δ函数的选择性，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$$

（3）δ 函数的卷积性质，即

$$f(x)*\delta(x)=f(x);$$

（4）δ 函数的缩放性，即

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

证　（1）从$\delta(x)$函数的定义出发便可说明

$$\delta(-x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-x)dx=-\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x')dx'=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x')dx'=1$$

这三条性质都与$\delta(x)$相同，故

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

即δ函数是偶函数。

（2）以原点为中心取任意小的变量区间$\pm\epsilon$，因区间以外$\delta(x)=0$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)f(x)dx$$

因$\epsilon\to 0$，区间以内连续函数$f(x)$为常量$f(0)$，故可提出积分号则得

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)f(x)dx=f(0)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)dx=f(0)$$

于是证得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0)$$

同理，对于轴外δ函数，我们可以x_0点为中心考虑一个任意小的变量区间，证得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon}\delta(x-x_0)f(x)dx$$

$$= f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\,dx$$

$$= f(x_0)$$

（3）按卷积定义式

$$f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x-x')\,dx'$$

根据δ函数的偶对称性

$$\delta(x-x')=\delta(x'-x)$$

再由δ函数的选择性便可证得

$$f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x'-x)\,dx'=f(x)$$

在物理上，尤其是在光学里，常将某一连续分布函数如物平面上的光强分布或复振幅分布看为点源的集合，对这一处理手段的数学描述就是这里所证的δ函数的卷积性质——相当于用一个δ脉冲在整个区间扫描，从而探测出函数分布$f(x)$。

（4）由δ函数的归一化要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,d(ax)=|a|\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$$

得

$$|a|\,\delta(ax)=\delta(x)$$

即

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

*12. 求$\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)\}$及其模的平方$\mathscr{F}\mathscr{F}^*$。

解 因为

$$\delta(x-x_0)\Longleftrightarrow e^{-i2\pi fx_0}$$

$$\delta(x-2x_0) \rightleftharpoons e^{-i4\pi fx_0}$$

所以由傅里叶变换的线性定理得

$$\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0) \rightleftharpoons e^{-i2\pi fx_0}+e^{-i4\pi fx_0}$$

其模的平方

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^*=(e^{-i2\pi fx_0}+e^{-i4\pi fx_0})(e^{i2\pi fx_0}+e^{i4\pi fx_0})$$

$$=2+2\cos 2\pi x_0 f$$

这里运算的光学实例便是透镜前焦面上有两个间距为 x_0 的相干点源，它们在后焦面上相干叠加的强度分布就是 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$。当然，应该明确空间频率 f 与装置中的场点坐标 x' 的关系为

$$x'=Ff\lambda \quad (F\text{为透镜焦距})$$

于是

$$I(x')=\mathscr{F}\mathscr{F}^*=2+2\cos\left(2\pi\frac{x_0}{\lambda F}x'\right)$$

*13. 求 $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)+\delta(x-3x_0)\}$ 及其 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$。

解 利用傅里叶变换的线性定理得

$$\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)+\delta(x-3x_0)\}$$

$$=e^{-i2\pi fx_0}+e^{-i4\pi fx_0}+e^{-i6\pi fx_0}$$

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^*=3+2\cos 2\pi fx_0+2\cos 2\pi fx_0+2\cos 4\pi fx_0$$

$$=1+4\cos 2\pi fx_0+4\cos^2 2\pi fx_0$$

这里运算的光学实例便是透镜前焦面上有三个等间距的相干点源，它们在后焦面上相干叠加的强度分布就是 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$。用场点的坐标 x' 表示，有

$$x'=Ff\lambda$$

$$I(x')=\mathscr{F}\mathscr{F}^*=1+4\cos\left(2\pi\frac{x_0}{\lambda F}x'\right)+4\cos^2\left(2\pi\frac{x_0}{\lambda F}x'\right)$$

*14. 大量点源无规地分布在 x 轴上，其振幅分布可写为

$$\widetilde{U}(x)=\sum_{n=1}^{N}\delta(x-x_n)$$

（1）求 $\mathscr{F}\{\widetilde{U}(x)\}$

（2）试证 $\mathscr{F}\mathscr{F}^{*}=N$。

解 （1）由傅里叶变换的线性定理得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{\widetilde{U}(x)\} &= \mathscr{F}\{\sum\delta(x-x_n)\}\\ &= \sum\mathscr{F}\{\delta(x-x_n)\}\\ &= \sum_{n=1}^{N} e^{-i2\pi f x_n}\end{aligned}$$

（2）此时

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\mathscr{F}^{*} &= (\sum e^{-i2\pi f x_n})(\sum e^{-i2\pi f x_n})^{*}\\ &= (\sum e^{-i2\pi f x_n})(\sum e^{i2\pi f x_n})\\ &= N+\sum_{\substack{n\neq m\\ n,m=1}}^{N} e^{i2\pi f(x_n-x_m)}\end{aligned}$$

式中交叉项

$$\sum_{\substack{n\neq m\\ n,m=1}}^{N} e^{i2\pi f(x_n-x_m)}=\sum_{\substack{n\neq m\\ n,m=1}}^{N}\cos[2\pi f(x_n-x_m)]$$

由于点源位置 x_n，x_m 无规分布、点源数目 N 足够大，致使交叉项统计结果，内部互相抵消，总和为零，故

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{*}=N$$

这个例子的意义是，虽然这些大量点源是相干的，由于其空间排列是无序的，致使它们产生的夫琅和费衍射强度分布回到了非相干叠加的结果，处处是单一点源产生的强度的 N 倍。

§6 空间滤波和信息处理

*1．在透镜的前焦面上有一系列同位相的相干光源等距排列在 x 轴上，形成一维点阵。用傅里叶变换法求后焦面上的夫琅和费衍射场。

解 点源的复振幅应由 δ 函数来描述，沿 x 轴等距排列的一维点阵［如图（a）］表示为

$$\tilde{U}(x,y)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(x-nd,y)$$

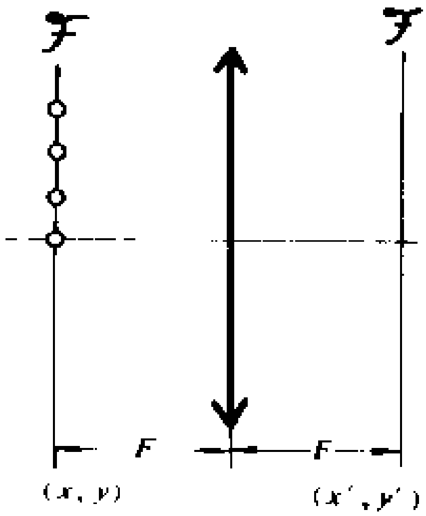
后焦面上的夫琅和费衍射场为

$$\tilde{U}(x',y')=\mathcal{F}\{\tilde{U}(x,y)\}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\mathcal{F}\{\delta(x-nd,y)\}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-i2\pi f_x dn}$$

$$=\frac{1-e^{-iN\beta'}}{1-e^{-i\beta'}}$$



题1图（a）

式中 $\beta'=2\pi f_x d$，$f_x=\dfrac{x'}{F\lambda}$

衍射场强度分布为

$$I(x',y')=\tilde{U}(x',y')\tilde{U}^*(x',y')$$

$$=\left(\frac{1-e^{-iN\beta'}}{1-e^{-i\beta'}}\right)\left(\frac{1-e^{iN\beta'}}{1-e^{i\beta'}}\right)$$

$$=\frac{2-2\cos N\beta'}{2-2\cos\beta'}=\frac{\sin^2\dfrac{N\beta'}{2}}{\sin^2\dfrac{\beta'}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}$$

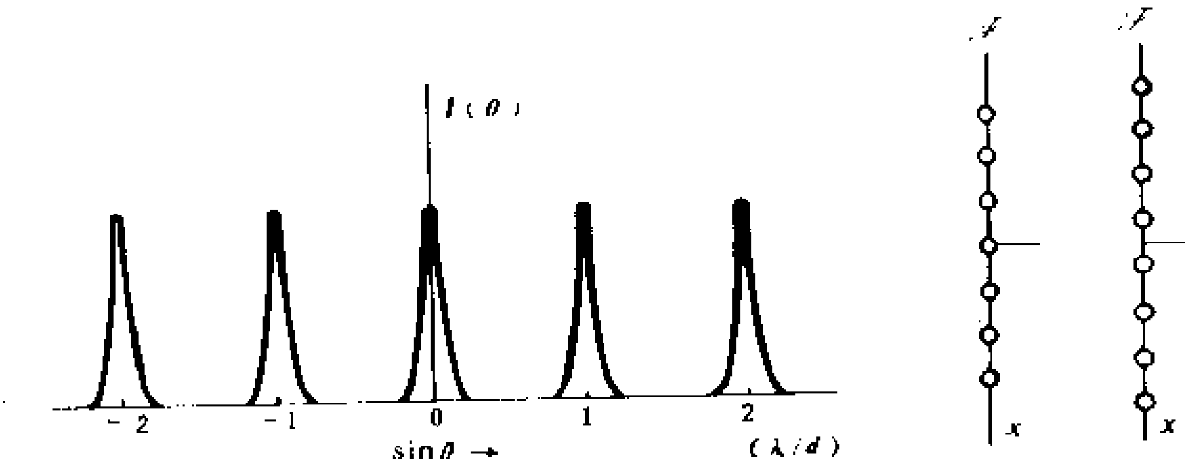
式中

$$\beta=\frac{\beta'}{2}=\pi d f_x=\frac{\pi d}{\lambda}\cdot\frac{x'}{F}$$

其强度分布曲线如图（b）所示，是一组等间隔等高度的空间脉冲，若横坐标以衍射角正弦值 $\sin\theta$ 标定，则脉冲角间隔 $\Delta\theta$ 和脉冲角宽度 $\delta\theta$ 分别表示为

$$\Delta\theta(d\cos\theta)\approx\lambda$$

$$\delta\theta(Nd\cos\theta)\approx\lambda$$



(b)　　　　　　　　(c)

题1图

最后顺便交代一下，实际上总是将一维点阵对称地安排成图(c)那样，这相当于把图(a)那种安排沿x轴向下位移适当距离x_0，其实这只要在上述复振幅表达式中添加一个常数相因子$\exp(i2\pi f x_0)$，而并不影响衍射强度表达式。

*2. 设透镜直径$D=5$ cm，焦距$F=60$ cm，图象（衍射屏）线度$l=2$cm，入射光波长$\lambda=0.6\,\mu$m。

（1）分别算出后焦面上$(x',y')=(0,0),(0,1),(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),(0.5,2),(3,-5),(-10,-15)$（单位皆为mm）等处所对应的空间频率$(f_x,f_y)$的具体数值（单位皆为$\text{mm}^{-1}$）；

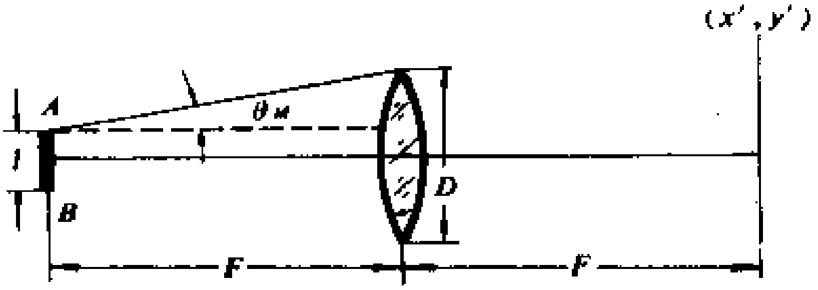
（2）计算系统的截止频率。

解　（1）夫琅和费衍射场点位置(x',y')与屏函数空间频率(f_x,f_y)的关系为

$$(x',y')=F\lambda(f_x,f_y)\text{，或}(f_x,f_y)=\frac{1}{F\lambda}(x',y')$$

按题意算出(f_x，f_y)值列表如下：

(x', y') (mm)	(0,0) (0,1)	($\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$)	(0.5,2)	(3, −5)
(f_x, f_y) ' (mm)	(0,0)(0,2.8)	(2.0,2.0)	(1.4,5.6)	(8.3, −13.9)



题 2 图

（2） 如图，透镜所能接收的最大衍射角θ_M满足

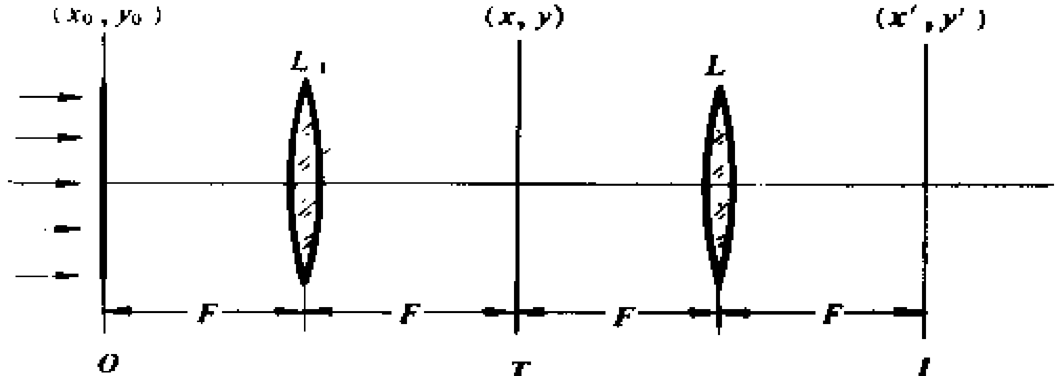
$$\sin\theta_M \approx \frac{(D/2)-l/2}{F} = \frac{D-l}{2F}$$

因此，透镜作为漏高频的低通滤波器，其截止频率为

$$f_M = \frac{\sin\theta_M}{\lambda}$$

$$= \frac{D-l}{2F\lambda} \approx 42\ \mathrm{mm}^{-1}$$

*3． 光信息处理的 4 F 系统如图。在系统的输入平面 O 上放置一张较大的图片，其振幅透过率函数为



题 3 图

$$\widetilde{T}_0 = t_0 + t_1\cos 2\pi f x_0$$

式中 $t_0=0.6$，$t_1=0.3$，$f=400\,\mathrm{mm}^{-1}$，$F=20\,\mathrm{cm}$，现以单色平行光照明图片，光波长为 $\lambda=0.63\,\mu\mathrm{m}$。

（1）求变换平面 T 上所获得的衍射图样的主要特征（衍射斑的方位及相对强度）；

（2）求输出平面 I 上所获得的图象光强分布；

（3）如果用一张黑纸（作为空间滤波器）挡掉零级斑，求输出图象的光强分布，并算出空间频率的具体数值；

（4）如果用一张黑纸挡掉上半部非零级衍射斑，求输出图象的光强分布，并算出空间频率的具体数值。

解 （1）变换平面 T 是系统第一次夫琅和费的衍射场，正弦光栅在变换平面上的衍射图样是三个衍射斑，目前这三个衍射斑沿 x 轴分布，其角方位分别为

$$\sin\theta = \begin{cases} 0 & (0\text{ 级斑}) \\ \pm f\lambda & (\pm 1\text{ 级斑}) \end{cases}$$

按 $f=400\,\mathrm{mm}^{-1}$，$\lambda=0.63\,\mu\mathrm{m}$ 算出

$$\theta_{\pm 1} \approx \pm 14°36'$$

± 1 级衍射斑的中心强度与 0 级斑的比值为

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \left(\frac{t_1}{2t_0}\right)^2 \approx 6.3\%$$

（2）在变换平面不加滤波器的情况下，输出图象等于输入图象再绕轴倒置，即输出场的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_I(x',y') &= \widetilde{T}_0(-x',-y')\\ &= t_0 + t_1\cos 2\pi f x'\end{aligned}$$

输出光强分布为

$$\begin{aligned}I_I(x',y') &\propto \widetilde{T}_I\widetilde{T}_I^*\\ &= t_0^2 + 2t_0t_1\cos 2\pi f x' + t_1^2\cos^2 2\pi f x'\end{aligned}$$

（3）变换平面上的零级斑反映物平面上的与 t_0 相联系的直

流信息。挡掉零级斑相当于完全通过系统的物信息成为

$$\widetilde{t_0}(x_0,\ y_0) = t_1\cos 2\pi f x_0$$

这时输出信息为

$$\widetilde{t_i}(x',\ y') = \widetilde{t_0}(-x',\ -y') = t_1\cos 2\pi f x'$$

输出图象的光强分布为

$$I_i(x',\ y') = \widetilde{t_i}\,\widetilde{t_i}^{*} = t_1^2\cos^2 2\pi f x' = \frac{1}{2}t_1^2 + \frac{1}{2}t_1^2\cos 4\pi f x'$$

除直流成分外，其交变成分的空间频率为

$$f' = 2f = 800\ \mathrm{mm}^{-1}$$

（4）此时挡掉的是+1级斑。展开输入平面上的物信息得

$$t_0(x_0,\ y_0) = t_0 + \frac{1}{2}t_1 e^{i2\pi f x_0} + \frac{1}{2}t_1 e^{-i2\pi f x_0}$$

变换平面上的+1级斑与物信息$(t_1 e^{i2\pi f x_0})/2$相对应，挡掉+1级斑，相当于完全通过系统的物信息成为

$$\widetilde{t_0''}(x_0,\ y_0) = t_0 + \frac{1}{2}t_1 e^{-i2\pi f x_0}$$

此时输出信息为

$$\widetilde{t_i}(x',\ y') = \widetilde{t_0''}(-x',\ -y') = t_0 + \frac{1}{2}t_1 e^{i2\pi f x'}$$

输出图象的光强分布为

$$I_i(x',\ y') = \widetilde{t_i}\,\widetilde{t_i}^{*} = t_0^2 + \frac{1}{4}t_1^2 + t_0 t_1\cos 2\pi f x'$$

除直流成分外，其交变成分的空间频率为

$$f'' = f = 400\ \mathrm{mm}^{-1}$$

当然，（3）、（4）两问还可以从以下两种方法解答，一种是将留下来的两个衍射斑作为两个相干点源，经第二个透镜成为两束相干的平行光，则输出图象是两束平行光在后焦面上的干涉场，

如此处理对于我们也是熟悉的。或者将留在变换平面上的两个衍射斑当作两个 δ 函数，用傅里叶变换式求得第二次夫琅和费的衍射场，即为输出场。

4． （1）以一张黑白图案作光学滤波器，在黑的地方开个孔，这张滤波器的透过率函数是图案与孔的透过率函数的相乘还是相加？

（2）若在上述图案中白的地方点上一黑点，图案与黑点的透过率函数是相乘还是相加？

解 （1）此时，滤波器的透过率函数应是黑白图案与孔函数的相加，而不是相乘

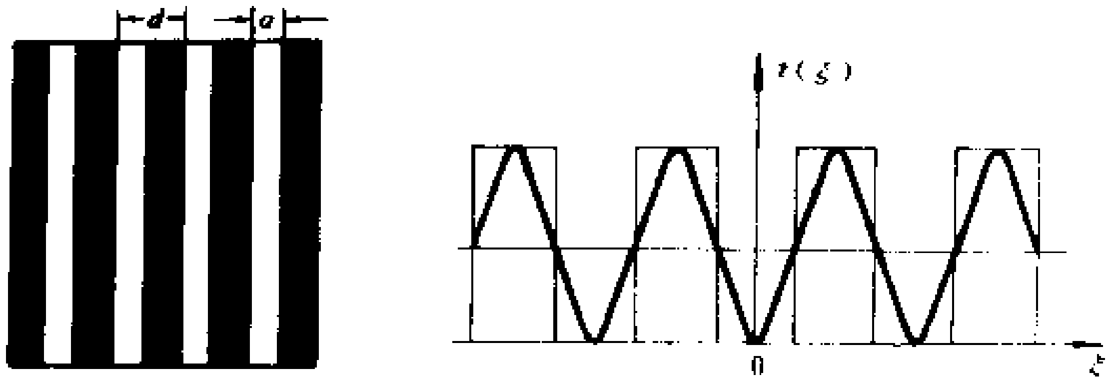
（2）此时，滤波器的透过率函数应是黑白图案与黑点函数的相乘而不是相加。

5． 用一块正弦光栅（或 $d:a=2:1$ 的黑白光栅）作为 $4F$ 系统的滤波器，设物波前为 $\widetilde{U}_o$。

（1）经过变换平面中心的是不透光的黑条纹［如图（a）所示］，求象面上的复振幅分布；

（2）在光栅的正中央黑条纹上开一个小洞，求此时象面上的复振幅分布；

（3）这一装置能否实现反衬度完全反转？



（a）　　（b）

题5图

解 （1）如图（b），此时滤波函数应当写成

$$t_F(\xi,\eta)=t_0+t_1\cos(2\pi f_0\xi-\pi)$$

完全通过系统的物信息变为

$$\widetilde{U}_3'(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)*\mathscr{F}^{-1}\{t_F(\xi,\eta)\},\ (f_x,f_y)=\frac{1}{\lambda F}(\xi,\eta)$$

而滤波函数的傅里叶逆变换为

$$\mathscr{F}^{-1}\{t_F\}=\mathscr{F}^{-1}\{t_0+t_1\cos(2\pi f_0\xi-\pi)\}$$

$$=t_0\delta(x,y)+\frac{1}{2}t_1e^{i\pi}\delta(x+\lambda Ff_0)+\frac{1}{2}t_1e^{-i\pi}\delta(x-\lambda Ff_0)$$

于是

$$\widetilde{U}_3'(x,y)=t_0\widetilde{U}_1(x,y)+\frac{1}{2}t_1e^{i\pi}\widetilde{U}_1(x+\lambda Ff_0,y)$$

$$+\frac{1}{2}t_1e^{-i\pi}\widetilde{U}_1(x-\lambda Ff_0,y)$$

最后输出场为

$$\widetilde{U}_I(x',y')=\widetilde{U}_3'(-x',-y')=t_0\widetilde{U}_1(-x',-y')$$

$$+\frac{1}{2}t_1e^{i\pi}[\widetilde{U}_1(-x'+\lambda Ff_0,-y')$$

$$+\widetilde{U}_1(-x'-\lambda Ff_0,-y')]$$

在象面上出现位置错开的三个物图象，相当于0级象和±1级象。

（2）如果不开小孔，中央全是黑条纹，挡住了直流成分，这意味着最后输出的三项的直流成分之和为零，即

$$t_0\mathscr{F}\{\widetilde{U}_0\}_0-\frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{+1}\}_0-\frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{-1}\}_0=0$$

于是

$$t_0\mathscr{F}\{\widetilde{U}_0\}_0=\frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{+1}\}_0+\frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{-1}\}_0$$

现在在滤波器正中开个小孔，这意味着物图象的零级完全通过，输出图象应当是（1）问结果再加 $t_0\mathscr{F}\{\widetilde{U}_0\}_0$，即

$$\widetilde{U}_i'(x',y') = \widetilde{U}_i(x',y') + t_0\mathscr{F}\{\widetilde{U}_0\}_0$$

$$= t_0\widetilde{U}_0(-x',-y') - \frac{1}{2}t_1\widetilde{U}_{-1} - \frac{1}{2}t_1\widetilde{U}_{1} + t_0\mathscr{F}\{\widetilde{U}_0\}_0$$

利用式（a）得

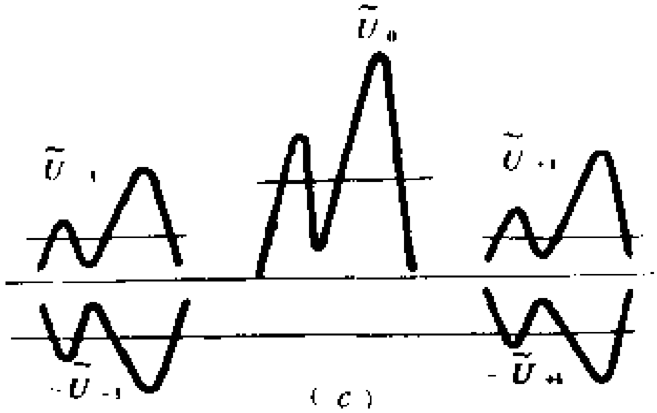
$$\widetilde{U}_i'(x',y') = t_0\widetilde{U}_0 - \frac{1}{2}t_1\widetilde{U}_{-1} - \frac{1}{2}t_1\widetilde{U}_{1}$$

$$+ \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{-1}\}_0 + \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{1}\}_0$$

$$= t_0\widetilde{U}_0 + \frac{1}{2}t_1(\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{-1}\}_0 - \widetilde{U}_{-1})$$

$$+ \frac{1}{2}t_1(\mathscr{F}\{\widetilde{U}_{1}\}_0 - \widetilde{U}_{1})$$

（3）一个信息与其直流成分的相减结果，有可能使强度反衬度完全反转，以上结果中的括号两项正是这种情况［如图（c）］．



题5图

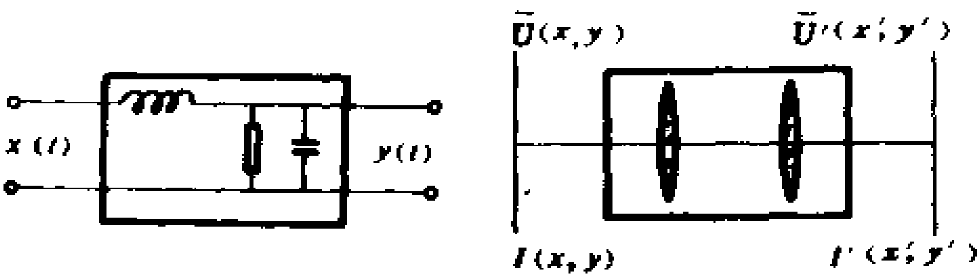
§7 点扩展函数与光学传递函数

1． 证明简谐信息是线性不变系统的本征信息。

证 所谓系统的本征信息是指这样一类简单信息，它经系统变换以后，输出信息的函数线型不变，仍为同类的简单信息。系统的变换作用仅在于改变本征信息的特征参量．对于线性不变系统来说，不论其具体装置是变换时间讯号的电学系统［如图（a）所示］，或是变换空间图象的光学系统［如图（b）所示］，其本征信息是简谐型信息．对此，有以下三种证明方法．

（1）由卷积关系直接证明

为书写简单起见，以图（a）为例。设输入信息为



(a) (b)

题 1 图

$$x(t)=A\cos\omega_0 t$$

系统的脉冲响应函数为 $h(t)$。当系统是线性不变系统时，输出信息等于输入信息与脉冲响应函数的卷积。因此，目前的输出信息应当为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')h(t-t')\,dt'=\int_{-\infty}^{\infty}h(t')x(t-t')\,dt'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t')A\cos[\omega_0(t-t')]\,dt'$$

再展开 $\cos[\omega_0(t-t')]$，在积分运算中将 t 看作常量，最后仍然可将输出信息写成简谐型，即

$$y(t)=B\cos(\omega_0 t-\varphi)$$

式中 $B(\omega_0)$，$\varphi(\omega_0)$ 均为频率 ω_0 的函数。。以上证明的中间运算过程，可参阅《光学》书中正文

（2）利用卷积的频谱关系证明

因为

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

于是频谱

$$\mathscr{F}\{y\}=\mathscr{F}\{x\}\mathscr{F}\{h\}$$

设

$$\mathscr{F}\{h\}=\widetilde{H}(\omega)$$

$$x(t)=A\cos\omega_0 t$$

得 $\mathscr{F}\{y\}=\widetilde{H}(\omega)\mathscr{F}\{A\cos\omega_0 t\}$

$$=\widetilde{H}(\omega)\frac{A}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

再由傅里叶逆变换求得输出函数

$$y(t)=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\widetilde{H}(\omega)e^{i\omega t}d\nu$$

$$\left(\nu=\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

利用 δ 函数的选择性，得

$$y(t)=\frac{A}{2}[\widetilde{H}(\omega_0)e^{i\omega_0 t}+\widetilde{H}(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t}]$$

由于描述时间讯号点脉冲或空间光强点脉冲的 δ 函数为实函数，其正负两支频谱互为共轭，即

$$\widetilde{H}(-\omega_0)=\widetilde{H}^*(\omega_0),$$
$$\widetilde{H}(\omega_0)=H(\omega_0)e^{-i\varphi_H(\omega_0)}$$

于是简化得

$$y(t)=AH\cos(\omega_0 t-\varphi_H)$$

可见输出函数仍为同频的简谐信息，与输入信息相比，输出信息的振幅变化和位相变化集中于 $\widetilde{H}(\omega_0)$。

（3）利用线性运算操作证明。

设运算操作 T 为抽象的线性变换，即

$$y(t)=T\{x(t)\}$$

为简单起见，设简谐信息为

$$x(t)=Ae^{i\omega_0 t}$$

则 $$y(t)=T\{Ae^{i\omega_0 t}\}$$

因系统具有不变性（电网络的时间稳定性或光学系统的空间不变性），故有

$$
\begin{aligned}
y(t+\tau) &= T\{Ae^{i\omega_0(t+\tau)}\}\\
&= T\{Ae^{i\omega_0 t}e^{i\omega_0\tau}\} = e^{i\omega_0\tau}T\{Ae^{i\omega_0 t}\}\\
&= e^{i\omega_0\tau}\,y(t)
\end{aligned}
$$

以上关系对任意τ都成立。令$t=0$，得

$$y(\tau) = y(0)\,e^{i\omega_0\tau}$$

即输出函数仍为同频的简谐信息。与输入信息相比，输出信息的振幅变化和位相变化集中于$y(0)/A$，$y(0)$可能是复数

2． 在理论分析中，OTF（光学传递函数）在$f_x=f_y=0$处都等于1，这是为什么？OTF值可能大于1吗？如果光学系统真的实现了点物成点象，其OTF曲线应该怎样？

解 （1）系统的OTF是点扩展函数的频谱，即

$$h(x,y) \leftrightarrow \widetilde{H}(f_x,f_y)$$

须知，频谱的零点值等于原函数在全区域的积分值（面积），即

$$\widetilde{H}(0,0) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\,dy$$

在理论分析中不考虑系统对光能流的损耗，认定物面上单位光功率的点源总能流都将全部弥漫在象面上，这便导致点扩展函数的归一化，即

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\widetilde{H}(0,0) = 1$$

（2）OTF值是不可能大于1的。系统对点源的扩展，扩展函数对物面简谐光强的卷积，必定使象面强度的反衬度下降，虽然象面强度仍是简谐型的。

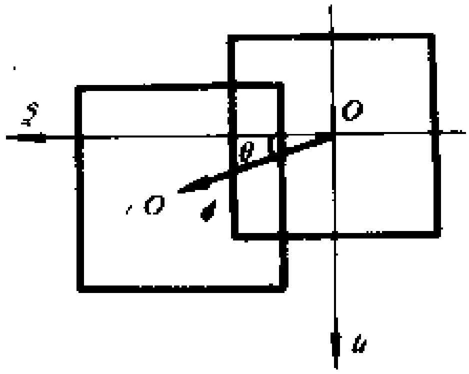
（3）只有当理想成象，象面与物面才有点点对应的关系。此时点扩展函数本身便是δ函数，δ函数的频谱为常数1，这说明此时对各种空间频率来说，其OTF＝1，这当然是理想情形。

*3． 画出正方形光瞳的一组OTF曲线，以ρ/a为横坐标

（$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，a为光瞳边长），$\theta=0°, 30°, 45°$。

解　如图（a）。正方形瞳函数为

$$
t(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & 当|\xi|\leq\dfrac{a}{2}, |\eta|\leq\dfrac{a}{2}\\ 0, & 当|\xi|>\dfrac{a}{2}, |\eta|>\dfrac{a}{2}\end{cases}
$$



题3图（a）

OTF为瞳函数的自相关，即

$$
\widetilde{H}(f_x,f_y)=\widetilde{t}(\xi,\eta)(*)\widetilde{t}(\xi,\eta)
$$

式中$(\xi,\eta)=\lambda s'(f_x,f_y)$。自相关的几何意义是位移$\boldsymbol{\rho}$以后两个方孔的重叠面积$\overline{A}$与全面积$A$之比。全面积为

$$
A=a^2
$$

重叠面积为　积　分　中　值　定　理

$$
\overline{A}=\begin{cases}(a-|\xi|)(a-|\eta|), & |\xi|\leq a, |\eta|\leq a\\ 0, & |\xi|>a, |\eta|>a\end{cases}
$$

所以

$$
\widetilde{H}(f_x,f_y)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\xi|}{a}\right)\left(a-\dfrac{|\eta|}{a}\right), & |\xi|\leq a, |\eta|\leq a\\ 0, & |\xi|, |\eta|>a\end{cases}
$$

设位移矢量为$\boldsymbol{\rho}(\rho,\theta)$，与$(\xi,\eta)$的关系为

$$
\xi=\rho\cos\theta, \quad \eta=\rho\sin\theta
$$

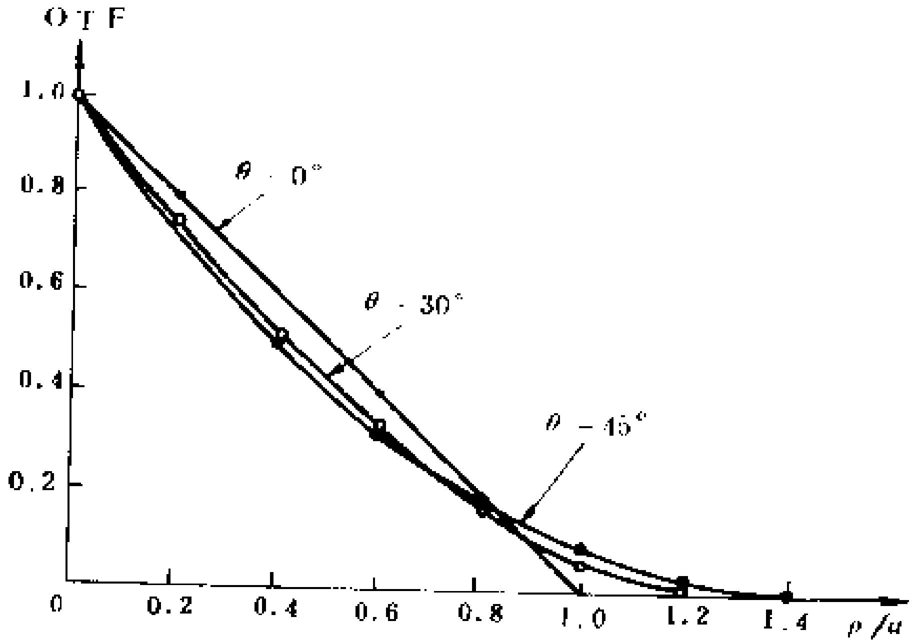
由于方孔的对称性，只需具体分析第一象限$0°\leq\theta\leq90°$的$\widetilde{H}$的仔细情况。用(ρ,θ)表示的$\widetilde{H}$为

$$
\widetilde{H}(f_x,f_y)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\rho}{a}\cos\theta\right)\left(1-\dfrac{\rho}{a}\sin\theta\right), & \xi,\eta\leq a\\ 0, & \xi,\eta>a\end{cases}
$$

以ρ/a为变量，计算出不同θ时的OTF值，列表如下，再以ρ/a

为横坐标，画出OTF曲线如图（b）。

ρ/a		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
OTF	0	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0
	30	1.0	0.74	0.52	0.34	0.18	0.067	0	0	0
	45	1.0	0.74	0.51	0.33	0.19	0.086	0.023	0	0



题3图（b）

从表中看出，在$\rho/a=1.0\sim1.4$范围内，不同θ方位的OTF曲线开始取0值，由此可以算出正方光瞳的截止频率为

$$f_M=\sqrt{f_\xi^2+f_\eta^2}=\frac{1}{\lambda s'}\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

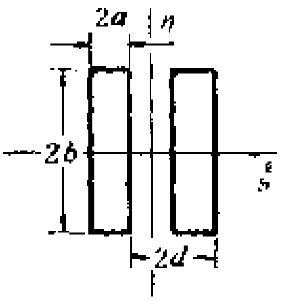
$$=\frac{1}{\lambda s'}\rho=\frac{a}{\lambda s'}\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

取$\rho/a=1$，则截止频率f_M及其对应的最小空间周期d_m分别为

$$f_M=\frac{1}{s'}\cdot\frac{a}{\lambda},\quad d_m=\frac{1}{f_M}=s'\frac{\lambda}{a}$$

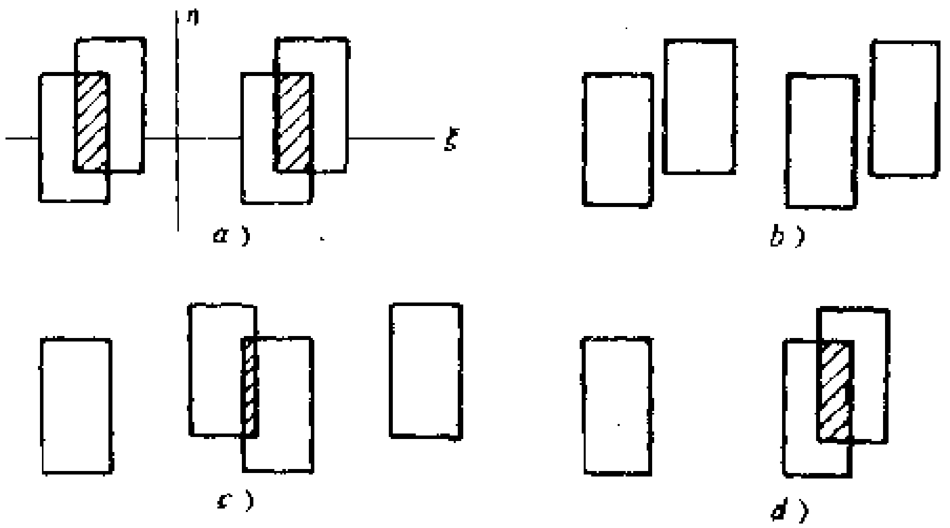
式中 s' 是象距。

4． 导出双缝光瞳［如图(a)］的 OTF 表达式，并画出沿 ξ 方向的 OTF 曲线。



题 4 图（a）

解 随位移矢量 ρ 值的增加，一对双缝之间的重叠面积出现如图那样的几种情况，先是重叠面积逐渐减少的区间 a)，继而存在一段重叠面积为 0 的区间 b)，又开始一段重叠面积逐渐增加的区间 c)，继而又出现重叠面积逐渐减少以至为 0 的区间 d)，再往后就一直无重叠面积了。定量讨论如下：双缝瞳函数为



题 4 图（b）

$$t(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & (d+a)>|\xi|>(d-a),\ |\eta|<b\\ 0, & |\xi|<(d-a)\text{或}|\xi|>(d+a)\text{或}|\eta|>b\end{cases}$$

设位移为 $\rho(\xi,\eta)$，则重叠面积为

$$A=\begin{cases}2(2a-\xi)(2b-\eta), & \xi<2a,\ \eta<2b\\ 0, & (2d-2a)>\xi>2a\text{或}\eta>2b\\ [\xi-(2d-2a)](2b-\eta), & 2d>\xi>(2d-2a),\ \eta<2b\\ [2a-(\xi-2d)](2b-\eta), & (2d+2a)>\xi>2d,\ \eta<2b\\ 0, & \xi>(2d+2a)\end{cases}$$

全面积为

$$A = 2(2a)(2b) = 8ab$$

所以双缝光瞳的传递函数为

$$\widetilde{H}(f_x, f_y) = \frac{\widetilde{A}}{A}$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\xi}{2a}\right)\left(1 - \dfrac{\eta}{2b}\right), & \xi < 2a,\ \eta < 2b \\ 0, & (2d - 2a) > \xi > 2a,\ \text{或}\ \eta > 2b \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{d}{a} + \dfrac{\xi}{2a}\right)\left(1 - \dfrac{\eta}{2b}\right), & 2d > \xi > (2d - 2a),\ \eta < 2b \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{d}{a} - \dfrac{\xi}{2a}\right)\left(1 - \dfrac{\eta}{2b}\right), & (2d + 2a) > \xi > 2d,\ \eta < 2b \\ 0, & \xi > (2d + 2a) \end{cases}$$

如果平移仅限于沿ξ轴方向，此时$\eta = 0$，$f_y = 0$，传递函数为

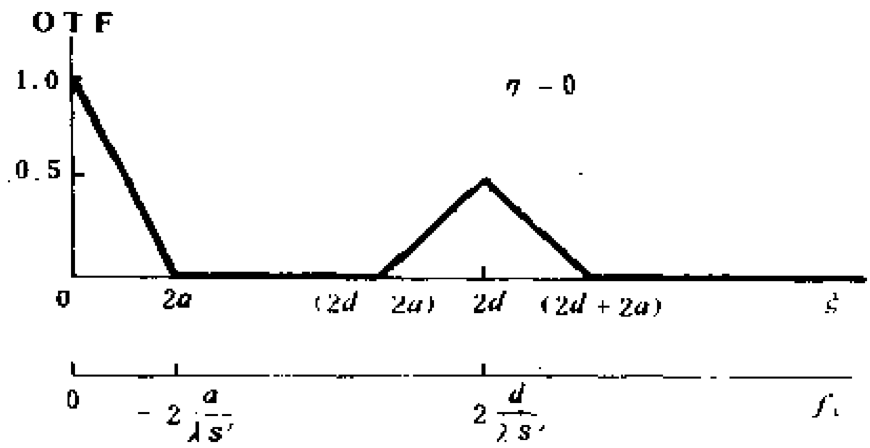
$$\widetilde{H}(f_x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\xi}{2a}\right), & \xi < 2a \\ 0, & (2d - 2a) > \xi > 2a \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{d}{a} + \dfrac{\xi}{2a}\right), & 2d > \xi > (2d - 2a) \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{d}{a} - \dfrac{\xi}{2a}\right), & (2d + 2a) > \xi > 2d \\ 0, & \xi > (2d + 2a) \end{cases}$$

其变化曲线如图(c)。由于空间频率(f_x，f_y)与位移坐标(ξ，η)的对应关系为

$$(f_x, f_y) = \frac{1}{\lambda s'}(\xi, \eta)$$

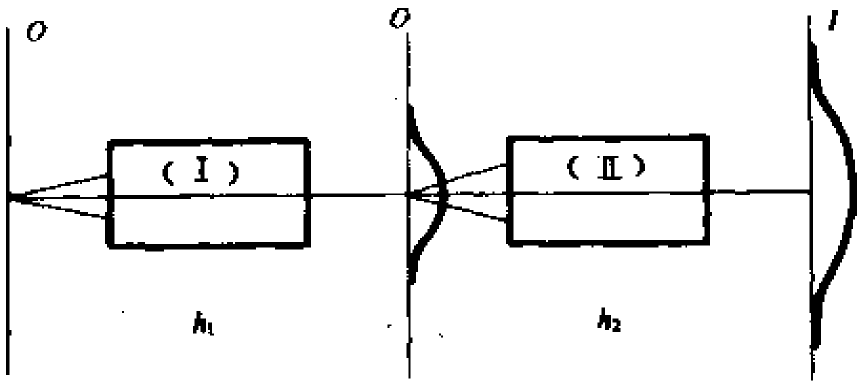
因此横坐标也可以用f_x标定。

从曲线图中看出，与圆形或矩形等单孔光瞳相比，双缝或多缝等多孔光瞳的特点是具有选频性能，相当于电学中的谐振回路。



题 4 图（c）

*5．实际上象点的扩展不仅发生在光波通过光学系统的传输过程中，而且也发生在最后的接收器件上，如乳胶底片，荧光屏，光学纤维面板等。设透镜系统的 OTF 为 $\widetilde{H}_a$，象面接收器的点扩展函数为 h_r，求这台光学仪器总的 OTF。



题 5 图

解　如图，设系统从物面 O 到象面 I 先后经历两个分系统（Ⅰ）和（Ⅱ），各自的点扩展函数分别为 h_1 和 h_2，当物面上有一点源输入，则最后象面强度 I_i 是两次扩展的结果。设此时中间象面 O′ 上强度分布为 I'，则

$$I' = h_1$$

$$I_i = I' * h_2 = h_1 * h_2$$

因此全系统的传递函数为

$$\widetilde{H}(f_x, f_y) = \mathscr{F}\{\widetilde{T}_r\} = \mathscr{F}\{h_1 * h_2\}$$

$$= \mathscr{F}\{h_1\}\mathscr{F}\{h_2\}$$

$$= \widetilde{H}_1 \widetilde{H}_2$$

结合本题情况，透镜系统可视为上述的分系统（I），象面接收元件可视为分系统（II），故这台光学仪器的OTF为

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_0 \mathscr{F}\{h_r\}$$

第六章　全息术原理

1．如附图(a)，参考光束R和物光束O均为平行光，对称地斜入射于记录介质Σ上，即$\theta_R = -\theta_o$，二者间的夹角为$\theta = 2\theta_o$。

（1）试说明全息图上干涉条纹的形状；

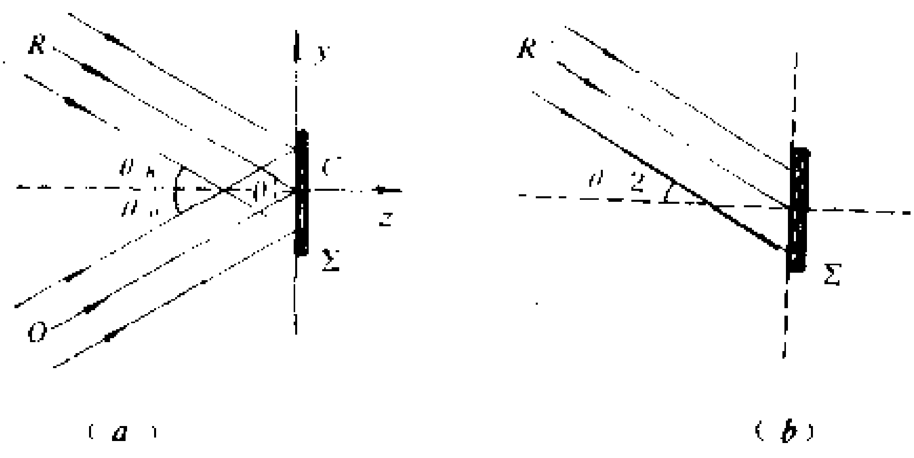
（2）试分别写出物光波和参考光波在Σ平面上的位相分布函数$\varphi_o(y)$和$\varphi_R(y)$；

（3）试证明全息图上干涉条纹的间距公式为

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}$$

（4）试计算，当夹角$\theta = 1°$，$60°$时，间距Δy分别为多少？（采用He－Ne激光记录，$\lambda = 6328\ \text{Å}$）；

（5）某感光胶片厂生产一种可用于全息照相的记录干板，其性能为：感光层厚度8 μm，分辨率为3000条/mm以上。利用（4）问所得数据，试说明：当$\theta = 60°$时，用该记录干板是否构成



题1图

一张体全息图？该记录干板的分辨率是否匹配？

（6）如附图（b），采用与参考光束 R 同样波长同样倾角的重现光波 R' 照射该张全息图，试分析 0 级，+1 级，−1 级三列衍射波都出现在什么方向上，并作图表示。

解　（1）条纹形状为一组与 y 轴正交的等距的直线。

（2）物光波和参考光波在 Σ 平面上的位相分布函数分别为

$$\varphi_o(y) = ky\sin\theta_o + \varphi_0$$
$$\varphi_R(y) = ky\sin\theta_R = -ky\sin\theta_o$$

式中 φ_0 为物光波和参考光波在 Σ 面上坐标原点处的位相差。

（3）应从位相差的改变来确定条纹的间距。当场点坐标改变一个条纹间距 Δy 时，则位相差改变 2π，干涉强度还原。由（2）知道物光波与参考光波在 Σ 面上的位相差分布为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x, y) &= \varphi_o(y) - \varphi_R(y)\\ &= (2k\sin\theta_o)y + \varphi_0\end{aligned}$$

改变量为

$$\delta(\Delta\varphi) = 2k\sin\theta_o\,\delta y$$

令 $\delta(\Delta\varphi) = 2\pi$，得条纹间距为

$$\Delta y = \frac{2\pi}{2k\sin\theta_o} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}$$

（4）当 $\theta = 1°$ 时，得

$$\Delta y = 36.26\,\mu m$$

当 $\theta = 60°$ 时，得

$$\Delta y = 0.6328\,\mu m$$

（5）当 $\theta = 60°$ 时，条纹间距 Δy 和感光层厚度 l 之间满足

$$l \gg \Delta y$$

故该记录干板可以构成一张体全息图。干板的最小分辨距离为

$$d=\frac{1}{3000}\,\mathrm{mm}=0.33\,\mu\mathrm{m}$$

可见，$d\approx\Delta y$，且同数量级，二者是匹配的。

（6）记录时干涉场的强度分布为

$$I_H(x,y)=(\widetilde{U}_o+\widetilde{U}_R)(\widetilde{U}_o+\widetilde{U}_R)^*$$

经线性冲洗后，这张全息底片的透过率函数为

$$\widetilde{t}_H(x,y)=t_0+\beta I_H(x,y)$$

$$=(t_0+\beta A_o^2+\beta A_R^2)+\beta\widetilde{U}_R^*\widetilde{U}_o+\beta\widetilde{U}_R\widetilde{U}_o^*$$

经照明光波 $\widetilde{U}'_R$ 作用，透射场为

$$\widetilde{U}_t(x,y)=\widetilde{t}_H\widetilde{U}'_R$$

$$=(t_0+\beta A_o^2+\beta A_R^2)\widetilde{U}'_R+\beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R^*\widetilde{U}_o+\beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R\widetilde{U}_o^*$$

式中 $\widetilde{U}'_R$，$\widetilde{U}_o$，$\widetilde{U}_R$ 分别为照明光波、物光波、参考光波三列平面波的波前函数，可将它们写成

$$\widetilde{U}'_R=\widetilde{U}_R=A_R\exp(-iky\sin\frac{\theta}{2})$$

$$\widetilde{U}_o=A_o\exp(iky\sin\frac{\theta}{2}+i\varphi_o)$$

于是透射场具体形式为

$$\widetilde{U}_t=A'_0\exp(-iky\sin\frac{\theta}{2})+A_1\exp(iky\sin\frac{\theta}{2}+i\varphi_o)$$

$$+A_1\exp(-ik2y\sin\frac{\theta}{2})\exp(-iky\sin\frac{\theta}{2}-i\varphi_o)$$

运用相因子判断法可以看到，透射场包含的主要成分是三列平面衍射波，可写成

$$\widetilde{U}_t=\widetilde{U}'_0+\widetilde{U}_{+1}+\widetilde{U}_{-1}$$

其中 0 级波为

$$\widetilde{U}'_0=A'_0\exp(-iky\sin\frac{\theta}{2})$$

它是照明光束照直前进的透射平面波，当然振幅 A'_0 有所下降：

+1级波为

$$\tilde{U}_{+1} = A_1\exp\left[i\left(ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]$$

它是物光波$\tilde{U}_o$波的再现波，但振幅A_1有所变化；−1级波为

$$\tilde{U}_{-1} = A_1\exp\left[-i\left(k3y\sin\frac{\theta}{2}-\varphi_0\right)\right]$$

它是方向被进一步偏转的物光共轭波，偏转角θ_{-1}的正弦值为

$$\sin\theta_{-1} = 3\sin\frac{\theta}{2}$$

如选$\theta=30^\circ$，则

$$\theta_{-1}=50^\circ56'$$

如选$\theta=60^\circ$，则出现

$$\sin\theta_{-1}=\frac{3}{2}$$

的费解，实际上此时的−1级衍射波已经失掉正常平面波的特性而成为倏逝波（或称衰逝波）。

三列平面衍射波的方向如图（c）所示。

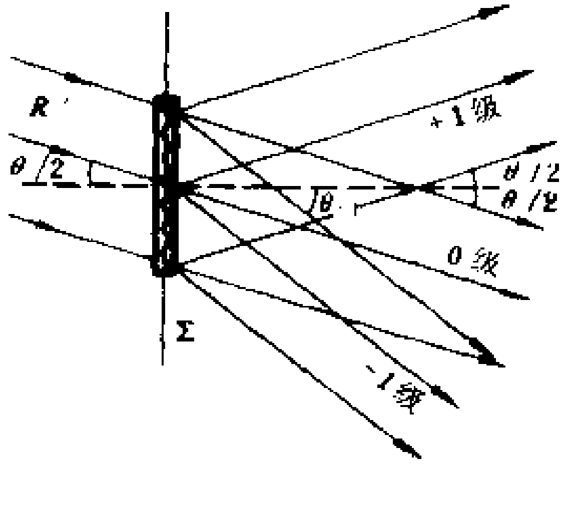
2．若在上题中改为用正入射的平面波再现，±1级衍射波各发生什么变化？

解 参考上题分析，结合目前情况应将照明光波前函数写成

$$\tilde{U}'_R = A'_R$$

透射波前仍然包含三列平面衍射波，即

$$\tilde{U}_t = \tilde{U}'_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1}$$



题1图（c）

式中

$$\tilde{U}'_0 = (t_0+\beta A_1^2+\beta A_R^2)\tilde{U}'_R = A'_0$$

它是照明光波照直前进（正出射）的平面透射波成分：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}_{+1} &= \beta \widetilde{U}'_R \widetilde{U}_R^* \widetilde{U}_O \\
&= A_1 \exp\left(iky\sin\frac{\theta}{2}\right)\exp\left[i\left(ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right] \\
&= A_1 \exp\left[i\left(k\,2y\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]
\end{aligned}
$$

它是方向被偏转了的物光波，偏转角 θ_{+1} 的正弦值为

$$\sin\theta_{+1} = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

第三种成分为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}_{-1} &= \beta \widetilde{U}'_R \widetilde{U}_R \widetilde{U}_O^* \\
&= A_1 \exp\left(-iky\sin\frac{\theta}{2}\right)\exp\left[-i\left(ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right] \\
&= A_1 \exp\left[-i\left(k\,2y\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]
\end{aligned}
$$

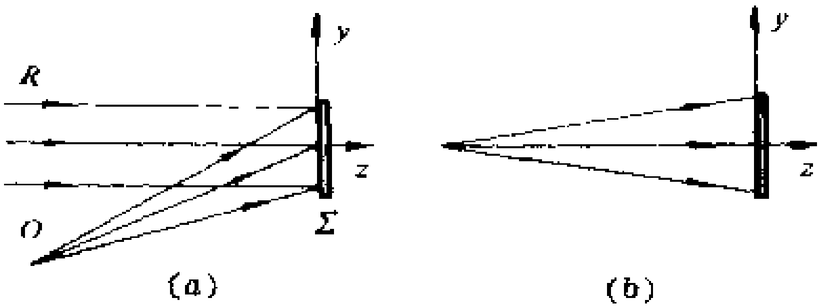
它是方向被偏转了的物光共轭波，偏转角 θ_{-1} 的正弦值为

$$\sin\theta_{-1} = -2\sin\frac{\theta}{2}$$

可见，在照明光波正入射条件下，如果当初物光波和参考光波是对称入射的，则 $\widetilde{U}_{+1}$ 波与 $\widetilde{U}_{-1}$ 波仍然保持对称出射，但它们的倾角不再等于入射角，这张全息底片的作用等效于两个偏转棱镜。对物光波的作用相当于顶角在下方的棱镜；对物光共轭波的作用相当于顶角在上方的棱镜。

***3．** 如附图（a），用正入射的平面参考光波记录轴外物点 O 发出的球面波。如附图（b），用轴上点源 R' 发出的球面波再现波前，求 ±1 级两象点的位置。

解 首先分别写出物光波 $\widetilde{U}_O$，参考光波 $\widetilde{U}_R$、照明光波 $\widetilde{U}'_R$ 的波前函数。设物点 O的坐标为（0，y_0，z），物点的初位相不为零以使其波前在 Σ 面原点的位相为零，于是在傍轴条件下，有



题3图

$$\widetilde{U}_o(x,y) \approx A_o \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{y_o y}{z}\right)\right]$$

正入射时的平面参考光波波前函数为

$$\widetilde{U}_R(x,y) = A_R \exp(i\varphi_R)$$

设轴上照明点源 R' 的坐标为（0，0，z'），在傍轴条件下，其波前函数为

$$\widetilde{U}'_R(x,y) = A'_R \exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'} + \varphi'_R\right)\right]$$

将它们代入线性冲洗条件下透射场的标准形式

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_T(x,y) &= (t_0 + \beta A_o^2 + \beta A_R^2)\widetilde{U}'_R + \beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R^*\widetilde{U}_o + \beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R\widetilde{U}_o^* \\ &= \widetilde{U}'_0 + \widetilde{U}_{+1} + \widetilde{U}_{-1}\end{aligned}$$

即可分别求得0级，±1级衍射波。其中0级衍射波的波前函数为

$$\widetilde{U}'_0 = (t_0 + \beta A_o^2 + \beta A_R^2)\widetilde{U}'_R$$

$$= A'_0 \exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'} + \varphi\right)\right]$$

显然，它表示中心在（0，0，z'）的发散球面波，也就是照明波的直接透射波，但振幅 A'_0 不同于 A'_R。+1级衍射波的波前函数为

$$\widetilde{U}_{+1} = \beta \widetilde{U}'_R \widetilde{U}^*_R \widetilde{U}_0$$

$$= A_1 \exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'}+\varphi'_R\right)\right]\times$$

$$\times\exp(-i\varphi_R)\exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{y_0 y}{z}\right)\right]$$

$$= A_1 \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{+1}}-\frac{y}{z_{+1}}\frac{z_{+1}}{z}y_0\right)\right]\exp(i\varphi)$$

式中

$$\frac{1}{z_{+1}} = \frac{1}{z'}+\frac{1}{z}$$

$$\varphi = \varphi'_R - \varphi_R = \text{常数（无关紧要）}$$

运用相因子判断法可知，$\widetilde{U}_{+1}$ 波是一列中心在轴外的发散球面波，其中心坐标（即象点位置）为（0，$z_{+1}y_0/z$，z_{+1}），换句话说，$\widetilde{U}_{+1}$ 波是变换了的物光波。与物光波的中心坐标（o，y_0，z）相比，纵向位置由

$$z \to z_{+1} = \frac{z'z}{z'+z}$$

横向位置由

$$y_0 \to \frac{z_{+1}}{z}y_0 = \frac{z'}{z'+z}y_0$$

即横向放大率为

$$V_{+1} \equiv \frac{y_{+1}}{y_0} = \frac{z_{+1}}{z} = \frac{z'}{z'+z}\text{。}\qquad \left(y_{+1} = \frac{z_{+1}}{z}y_0\right)$$

透射场的第三项称为 −1 级衍射波，其波前函数为

$$\tilde{U}_{-1} = \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R \tilde{U}_O^*$$

$$= A_1 \exp\left[i\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'} + \varphi_R'\right)\right]$$

$$\times \exp(i\varphi_R)\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z}\right)\right]$$

$$= A_1 \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{-1}} - \frac{y}{z_{-1}}\cdot\frac{z_{-1}y_0}{z}\right)\right]\exp(i\varphi)$$

式中

$$\frac{1}{z_{-1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z'}$$

$$\varphi = \varphi_R' + \varphi_R = \text{常数（无关紧要）}$$

运用相因子判断法可知，$\tilde{U}_{-1}$ 波是一列中心在轴外的傍轴球面波。究竟它是会聚球面波还是发散球面波，这就要看 z_{-1} 的正负号了。不难看出，当 $z'>z$时，$z_{-1}>0$，$\tilde{U}_{-1}$ 波为会聚球面波；当 $z'<z$时，$z_{-1}<0$，$\tilde{U}_{-1}$ 波为发散球面波。总之，−1 级球面衍射波的中心坐标（即象点位置）为$(0, z_{-1}y_0/z, z_{-1})$。
横向放大率为

$$V_{-1} = \frac{y_{-1}}{y_0} = \frac{z_{-1}}{z} = \frac{z'}{z'-z}。 \qquad \left(y_{-1} = \frac{z_{-1}}{z}y_0\right)$$

当 $z'>z$，则 $V_{-1}>0$；当 $z'<z$，则 $V_{-1}<0$。

通过以上具体分析，有两点值得强调指出：

第一，照明球面波 $\tilde{U}_R'$ 的作用是在 $\tilde{U}_O$ 波和 $\tilde{U}_O^*$ 波前面提供了一个二次相因子的变换函数，实际上相当于透镜的作用。当照明球面波为发散型时，其作用相当于负透镜，当照明球面波为会聚型时，其作用相当于正透镜。等效透镜的焦距便是照明点源的纵向距离。所谓"全息成象是无透镜的透镜成象"，其道理就在于此。

第二，通常说，全息底片再现时将产生两个象，一个是物光波的再现象（虚象），另一个是物光波的共轭象（实象），这个具体结论是有条件的，在参考光波和照明光波均为平面波时，通常如此。如果照明光波或参考光波为球面波时，情况就不一定是这样了。既然此时照明光波或参考光波相当于一个透镜的作用，那么 $\widetilde{U}_0$ 波和 $\widetilde{U}_0^*$ 波将重新成象而被移位，缩放，甚至可能使它俩全是发散波（全是虚象），或全是会聚波（全是实象）。

4. 与题3情况类似，只是照明光波改为不同波长的正入射的平面波，试求 +1 级两象点的位置。

解 此时，照明光波波前函数为

$$\widetilde{U}'_R = A'_R e^{i\varphi'_R}$$

透射场仍然包含三项

$$\widetilde{U}_t(x, y) = \widetilde{U}'_0 + \widetilde{U}_{+1} + \widetilde{U}_{-1}$$

在运用相因子判断法分析衍射场的主要特征时，必须将波函数改写为以照明波的波数 $k' = 2\pi/\lambda'$ 为特征的标准形式。透射场中

$$\widetilde{U}'_0 = (t_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2)\widetilde{U}'_R = A'_0 e^{i\varphi'_R}$$

这一项很简单，它代表正出射的平面衍射波。第二项

$$\widetilde{U}_{+1} = \beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R^*\widetilde{U}_0$$

$$= A_1 e^{i\varphi'_R} e^{-i\varphi_R} \exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z}\right)\right]$$

$$= A_1 \exp\left[ik'\left(\frac{x^2 + y^2}{2z\left(\frac{k'}{k}\right)} - \frac{y_0 y}{z\left(\frac{k'}{k}\right)}\right)\right]\exp(i\varphi)$$

$$= A_1 \exp\left[ik'\left(\frac{x^2 + y^2}{2z_{+1}} - \frac{y_0 y}{z_{+1}}\right)\right]\exp(i\varphi)$$

式中

$$z_{+1} = \frac{k'}{k} z$$

$$\varphi = \varphi_R' - \varphi_R = \text{常数（无关紧要）}$$

由此可见，波前 $\widetilde{U}_{+1}$ 代表轴外发散的球面衍射波，其发散中心坐标（即 +1 级象点位置）为（o，y_0，z_{+1}）。

纵向位置的放大率为

$$V_{+z} \equiv \frac{z_{+1}}{z} = \frac{k'}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

而横向坐标不变。第三项为

$$\widetilde{U}_{-1} = \beta U_R' \widetilde{U}_R \widetilde{U}_o^*$$

$$= A_1 e^{i\varphi_R} e^{i\varphi_R} \exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z}\right)\right]$$

$$= A_1 \exp\left[-ik'\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{-1}} - \frac{y_0 y}{z_{-1}}\right)\right] \exp(i\varphi')$$

式中

$$z_{-1} = \frac{k'}{k} z$$

$$\varphi' = \varphi_R' + \varphi_R = \text{常数（无关紧要）}$$

由此可见，波前 $\widetilde{U}_{-1}$ 代表轴外会聚的球面衍射波，其会聚中心坐标（即 −1 级象点位置）为（0，y_0，z_{-1}）。

纵向位置的放大率为

$$V_{-z} \equiv \frac{z_{-1}}{z} = \frac{k'}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

而横向坐标不变。

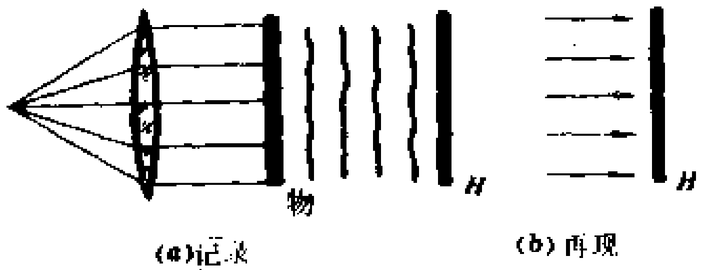
不过，应当注意到如果照明光波是斜入射的平面波时，横向放大率将不等于 1，与波长比值 λ'/λ 有关。

* **5**． 附图所示是全息术的创始者加伯（Gabor）最初设计的一类共轴全息装置。设物是高度透明的，其振幅透过率函数

为

$\tilde{t}(x,y)=t_0+\widetilde{\Delta t}(x,y)$

式中 $|\Delta t|\ll t_0$。



题5 图

（1）求记录时全息底片 H 上的振幅与光强分布；

（2）线性冲洗后全息图的振幅透过率函数；

（3）分析再现的波场；

（4）讨论这种共轴系统的缺点与局限性。

解 （1）由于是正入射的平行光照明物平面，故入射场为

$$\tilde{U}_1=A_1$$

物平面的透射场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2&=\tilde{t}\tilde{U}_1=[t_0+\widetilde{\Delta t}(x,y)]A_1\\&=A_1t_0+A_1\widetilde{\Delta t}(x,y)\end{aligned}$$

它包含两项。第一项为

$$\tilde{U}_R(x,y)=A_1t_0$$

代表正出射的平面衍射波，直达记录平面 H，这一项与物平面的本底透射率 t_0 相联系；第二项为

$$\tilde{U}_0'(x,y)=A_1\widetilde{\Delta t}(x,y)$$

它代表弥漫的衍射波，携带了物信息 $\widetilde{\Delta t}(x,y)$ 而波及记录平面 H，设这一项到达 H 平面的衍射场为 $\tilde{U}_0(x,y)$，当然 $\tilde{U}_0$ 与 $\tilde{U}_0'$ 的关系应由惠更斯—菲涅耳原理确定。由此可见，此时到达记录平面 H 的仍然可看作有两列波 $\tilde{U}_R$ 和 $\tilde{U}_0$，$\tilde{U}_R$ 为参考波，$\tilde{U}_0=A_0\exp(i\varphi_0)$ 为物光波。H 面上的振幅分布为

$$\tilde{U}_H(x,y)=\tilde{U}_R(x,y)+\tilde{U}_0(x,y)$$

干涉强度分布为

$$I_H(x,y)=\tilde{U}_H\tilde{U}_H^*=(\tilde{U}_R+\tilde{U}_0)(\tilde{U}_R+\tilde{U}_0)^*$$

（2）对记录底片作线性处理后，其振幅透过率函数为

$$\widetilde{t}_H(x,y)=\overline{t}+\beta I_H$$
$$=(\overline{t}+\beta t_0^2A_1^2+\beta A_0^2)+\beta\widetilde{U}_R^*\widetilde{U}_o+\beta\widetilde{U}_R\widetilde{U}_o^*$$

（3）如果用一束平行光 $\widetilde{U}_R'$ 正入射照明底片，设

$$\widetilde{U}_R'=A_2$$

则透射场为

$$\widetilde{U}_t(x,y)=\widetilde{t}_H\widetilde{U}_R'$$
$$=(\overline{t}+\beta t_0^2A_1^2+\beta A_0^2)A_2$$
$$+\beta A_1A_2t_0\widetilde{U}_o+\beta A_1A_2t_0\widetilde{U}_o^*$$

它包含三种主要成分，可写成

$$\widetilde{U}_t=\widetilde{U}_0'+\widetilde{U}_{+1}+\widetilde{U}_{-1}$$

第一项为

$$\widetilde{U}_0'=(\overline{t}+\beta t_0^2A_1^2+\beta A_0^2)A_2$$

式中除 $A_0(x,y)$ 外的其它量都是常量，考虑到 $A_0(x,y)$ 是当初物平面上与 $\Delta\widetilde{t}(x,y)$ 相联系的衍射到 H 面上的振幅分布，而 $|\Delta\widetilde{t}|\ll t_0$，故可以认为 βA_0^2 不起主要作用，即 $\widetilde{U}_0'$ 波基本上是正出射的平面衍射波。第二项为

$$\widetilde{U}_{+1}=\beta A_1A_2t_0\widetilde{U}_o$$

是物光波的再现波，当然振幅系数有所改变。第三项为

$$\widetilde{U}_{-1}=\beta A_1A_2t_0\widetilde{U}_o^*$$

是物光波共轭波。值得注意的是这两列衍射波 $\widetilde{U}_{+1}$ 和 $\widetilde{U}_{-1}$ 都同 $\widetilde{U}_0'$ 波共轴。

（4）再现波场所包含的三种成分共轴展现，是这种全息装置的最大缺点，它给人们观测带来很大麻烦，不便于分离两个孪生象 $\widetilde{U}_{+1}$ 波和 $\widetilde{U}_{-1}$ 波，而且受 $\widetilde{U}_0'$ 波的干扰也很大。

光 9

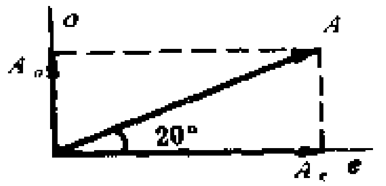
第七章　光在晶体中的传播

§1　双折射

1．一束线偏振的钠黄光垂直射入一块方解石晶体，振动方向与晶体的主平面成20°角，试计算o、e两光束折射光的相对振幅和强度。

解　线偏振光射入方解石晶体后电矢量被分解为垂直于主平面的o振动和平行于主平面的e振动。如图，主平面是通过e轴垂直纸面的。设入射线偏振的振幅为A，则o光、e光振幅分别为

$$A_o = A\sin 20° = 0.34A$$
$$A_e = A\cos 20° = 0.94A$$



题1图

二者之比为

$$A_o : A_e = \mathrm{tg}\,20° = 0.36$$

在考虑两束光的强度问题时，应注意光强与折射率成正比，而且e光（非常光）的折射率还与传播方向有关，因此，o光和e光的强度应分别为

$$I_o = n_o A_o^2 = n_o A^2 \sin^2 20° = 0.12 n_o A^2$$
$$I_e = n(\theta) A_e^2 = n(\theta) A^2 \cos^2 20° = 0.88 n(\theta) A^2$$

强度之比为

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n(\theta)}\,\mathrm{tg}^2 20° = 0.14\frac{n_o}{n(\theta)}$$

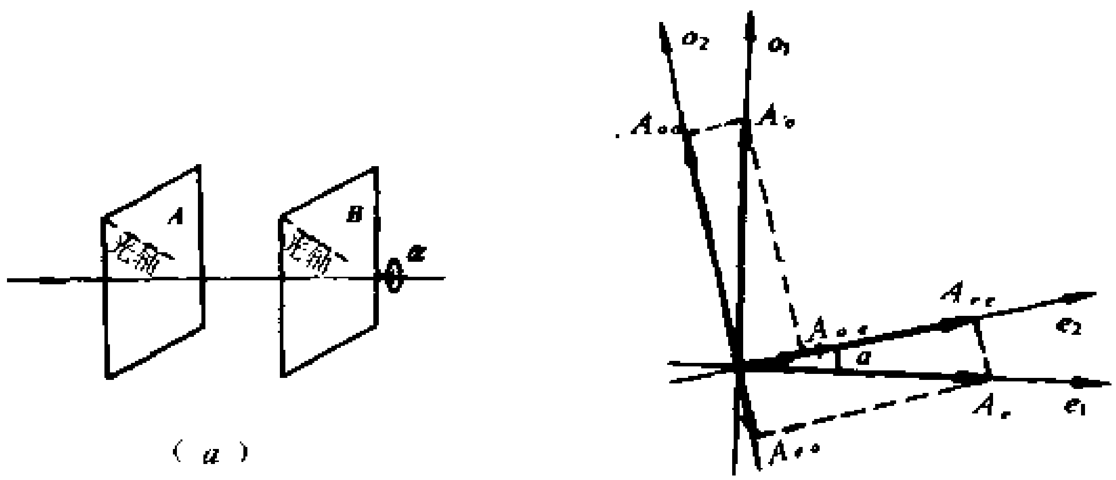
式中θ为e光法线速度和光轴的夹角，题中并未给定。

如光轴与晶体表面平行，则有

$$n(\theta)=n_e$$

$$\frac{I_o}{I_e}=\frac{n_o}{n_e}\mathrm{tg}^2 20^\circ=\frac{1.66}{1.49}\times 0.14=0.16$$

2. 如图（a），两大小相同的冰洲石晶体 A，B 前后排列，强度为 I 的自然光垂直于晶体 A 的表面入射后相继通过 A，B。A，B 的主截面（入射界面的法线和光轴组成的平面）之间夹角为 α（图中 α 为 0）。求 $\alpha=0^\circ$，45°，90°，180° 时由 B 射出光束的数目和每束光的强度（忽略反射、吸收等损失）。



（a）

（b）

题 2 图

解 自然光垂直射入 A 以后，被分解为平行于晶体 A 主截面的 e_1 振动和垂直主截面的 o_1 振动，由于光轴与表面既不平行又不垂直，o_1 光和 e_1 光的传播方向不同，从 A 出射后被分解为垂直 A 表面的两束光，其强度分别为

$$I_o=\frac{1}{2}I$$

$$I_e=\frac{1}{2}I$$

这两束光射入 B 后，又分别被分解为 B 内的 o_2 振动和 e_2 振动，一般来说其传播方向也要继续分离，从 B 出射的将有四束光（除

特殊夹角外），它们的强度与A，B两晶体主截面的夹角α有关［参见图（b）］。一般地说，这四束光的强度分别为

$$I_{oo}=A_{oo}^2=I_o\cos^2\alpha=\frac{1}{2}I\cos^2\alpha$$

$$I_{oe}=A_{oe}^2=I_o\sin^2\alpha=\frac{1}{2}I\sin^2\alpha$$

$$I_{eo}=A_{eo}^2=I_e\sin^2\alpha=\frac{1}{2}I\sin^2\alpha$$

$$I_{ee}=A_{ee}^2=I_e\cos^2\alpha=\frac{1}{2}I\cos^2\alpha$$

当$\alpha=0°$时，得

$$I_{oo}=I_{ee}=\frac{1}{2}I$$

$$I_{oe}=I_{eo}=0$$

即从B出射的为两束光，强度均为$I/2$。$I_{oe}=I_{eo}=0$，是因为这时两个主截面之夹角为0，如图（c）（a），A中的o_1振动进入B后仍为o振动，无e分量；A中的e_1振动进入B后仍为e振动，无o分量。

当$\alpha=45°$时，得

$$I_{oo}=I_{ee}=I_{oe}=I_{eo}=\frac{1}{4}I$$

即从B出射的为四束光，强度均为$I/4$。

当$\alpha=90°$时，得

$$I_{oo}=I_{ee}=0$$

$$I_{oe}=I_{eo}=\frac{1}{2}I$$

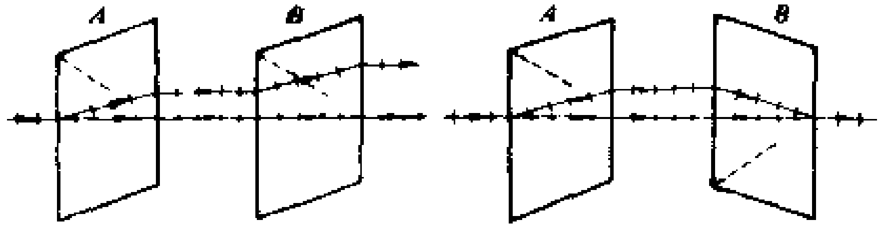
即从B出射的为两束光，强度均为$I/2$。这时A中的o_1振动到B内全部为e振动；A中的e_1振动到B内全部为o振动。

当$\alpha=180°$时，得

$$I_{oo}=I_{ee}=\frac{1}{2}I$$

$$I_{oe}=I_{eo}=0$$

这时A中的o振动进入B后仍全部为o振动；A中的e振动进入B后仍全部为e振动。两个分量的强度均为$I/2$。但由于这时A，B中的光轴方向对称于表面的法线，如图（c）b，e光在A中的偏折方向与在B中的偏折方向相反，因此从B出射后e、o振动的传播方向重合，复合为一束光，非相干叠加的结果强度仍为I。



a) $\alpha=0^\circ$　　b) $\alpha=180^\circ$

题 2 图（c）

3．一水晶平板厚0.850mm，光轴与表面平行。用水银灯的绿光（5461Å）垂直照射，求：

（1）o，e两光束在晶体中的光程；

（2）二者的位相差（用度表示）。

解　（1）水银绿光（5461Å）在水晶中的主折射率分别为$n_o=1.54617$，$n_e=1.55535$。据题意应按主折射率计算绿光通过$l=0.850$ mm的光程

$$L_o=n_o l\approx1.314\ \text{mm}$$

$$L_e=n_e l\approx1.322\ \text{mm}$$

（2）位相差

$$\Delta\varphi=\varphi_o-\varphi_e=-\frac{2\pi}{\lambda}(L_o-L_e)$$

$$\approx+92.04\,\text{rad}=5273.5^\circ。$$

4．一束钠黄光以50°的入射角射到冰洲石平板上，设光轴与板表面平行，并垂直于入射面，求晶体中o光和e光的夹角。

解 在此特殊情况下，o光线与e光线在晶体内的传播方向均服从普通的折射定律，即

$$n_o \sin i_o = \sin i$$

$$n_e \sin i_e = \sin i$$

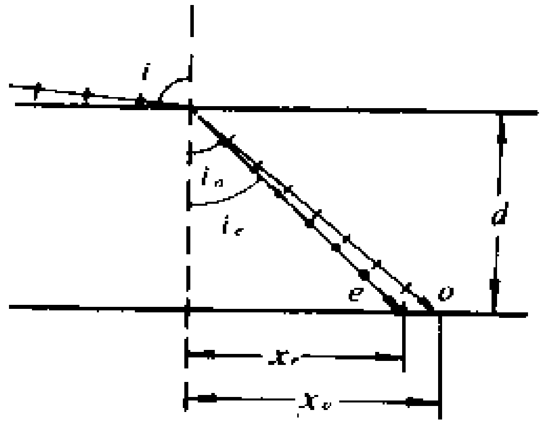
以$n_o = 1.65836$，$n_e = 1.48641$，$i = 50°$代入以上两式，算出

$$i_o = 27.51°, \quad i_e = 31.02°$$

两束光在晶体中的夹角为

$$\Delta i = i_e - i_o \approx 3.51°$$

5．一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上，光轴与入射面垂直，平板厚度为4.20mm，求o光和e光射到平板对面上两点的间隔。已知对于钠黄光冰的$n_o = 1.3090$，$n_e = 1.3104$。



题5图

解 这时入射角

$$i = 90°, \quad \sin i = 1$$

与上题同理，根据

$$n_o \sin i_o = \sin i \qquad n_e \sin i_e = \sin i$$

求得折射角i_o和i_e。再分别求出两光线射向对面的位置坐标（参见附图）

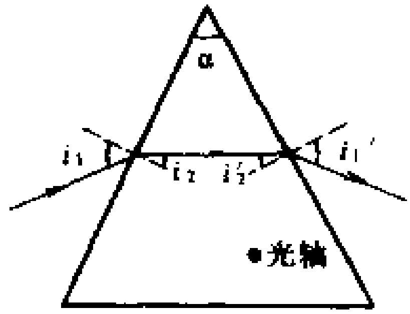
$$x_o = d\,\mathrm{tg}\, i_o, \quad x_e = d\,\mathrm{tg}\, i_e$$

最后算出两点间隔为

$$\Delta x = x_o - x_e = d(\mathrm{tg}\, i_o - \mathrm{tg}\, i_e)$$

$$\approx 12.7\mu\mathrm{m}$$

*6. 用ADP（磷酸二氢铵$NH_4H_2PO_4$）晶体制成50°顶角的棱镜，光轴与棱镜主截面垂直，$n_o=1.5246$，$n_e=1.4792$。试求o光和e光的最小偏向角及其二者之差。



题6图

解 按题意，此时o光和e光皆按通常的折射定律在棱镜内部传播。须知最小偏向角的条件是光线对称入射和出射，即如图

$$i_1=i_1', \quad i_2=i_2'=\frac{\alpha}{2}$$

由于o光和e光有不同的折射率，它们的外角i_1,i_1'是不同的，分别为

$$i_{1o}=\sin^{-1}\left(n_o\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sin^{-1}(1.5246\times\sin25^\circ)$$

$$\approx 40.11^\circ$$

$$i_{1e}=\sin^{-1}\left(n_e\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sin^{-1}(1.4792\times\sin25^\circ)$$

$$\approx 38.70^\circ$$

各自的最小偏向角分别为

$$\delta_o=2i_{1o}-\alpha\approx30.22^\circ$$

$$\delta_e=2i_{1e}-\alpha\approx27.40^\circ$$

偏向角之差为

$$\Delta\delta=\delta_o-\delta_e=2.82^\circ。$$

*7. 设一水晶棱镜的顶角为60°，光轴与棱镜主截面垂直。钠黄光以最小偏向角的方向在棱镜中折射，用焦距为1 m的透镜聚焦，o光和e光两谱线的间隔为多少？

解 与上题同理得

$$i_{1o}=i_{1o}'=\sin^{-1}\left(n_o\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\sin^{-1}(1.54425\times\sin 30^\circ)$$

$$\approx 50.55^\circ$$

$$i_{1e}=i'_{1e}=\sin^{-1}\left(n_e\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\sin^{-1}(1.55336\times\sin 30^\circ)$$

$$\approx 50.96^\circ$$

值得注意的是一束光的入射角严格地说不能同时使 o 光和 e 光满足最小偏向角的条件，实际上可近似地以 i_{1o} 和 i_{1e} 的平均值入射，这时两束出射光线的角间隔为

$$\Delta i=i_{1e}-i_{1o}\approx 0.41^\circ\approx 7.16\times 10^{-3}\mathrm{rad}$$

经透镜聚焦后，两束光线的间隔为

$$\Delta x=f\Delta i=7.16\mathrm{mm}$$

8. 求冰洲石晶体中光线和波法线间的最大夹角。

解 根据射线速度倾角（与光轴的夹角）ξ 和法线速度倾角 θ 的关系

$$\mathrm{ctg}\,\theta=\frac{n_o^2}{n_e^2}\mathrm{ctg}\,\xi \qquad (a)$$

直接写出两者夹角 α 的公式为

$$\alpha=\xi-\theta=\xi-\mathrm{ctg}^{-1}\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\mathrm{ctg}\,\xi\right) \qquad (b)$$

为求 α 的极值，令 $\frac{d\alpha}{d\xi}=0$，即有

$$\frac{d\alpha}{d\xi}=1-\left[-\frac{\frac{n_o^2}{n_e^2}\left(-\frac{1}{\sin^2\xi}\right)}{1+\left(\frac{n_o^2\,\mathrm{ctg}\,\xi}{n_e^2}\right)^2}\right]=0$$

整理得

$$\frac{n_e^2}{n_o^2}\sin^2\xi+\frac{n_o^2}{n_e^2}\cos^2\xi=1$$

解出使偏离角α出现极大的条件为

$$\mathrm{ctg}\,\xi=\frac{n_e}{n_o}\text{，或}\mathrm{ctg}\,\theta=\frac{n_o}{n_e}\qquad (c)$$

此时偏离角的极大值α_M由下式给出

$$\mathrm{tg}\,\alpha_M=\frac{n_o^2-n_e^2}{2n_on_e}\qquad (d)$$

以钠黄光为例，冰洲石的$n_o=1.65836$，$n_e=1.48641$，代入(d)式算得

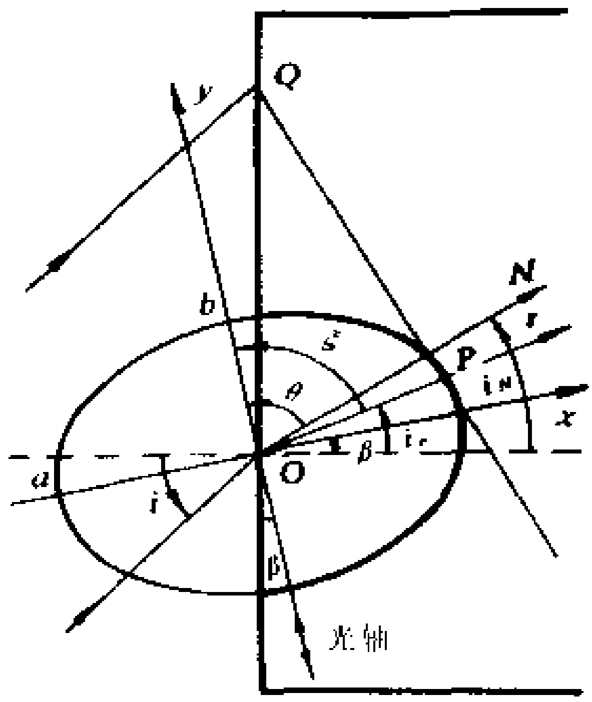
$$\alpha_M\approx 6.95$$

9． 钠黄光以45°的入射角入射到方解石晶体的表面，设光轴与晶体表面成30°角，入射面与主截面重合。

（1）求晶体中o光和e光的方向；

（2）求e光的折射率。

解 在斜入射斜光轴情形下，即使主截面与入射面重合，如何定量地确定e光的传播方向，也是一个比较麻烦的问题。



题 9 图

如图，入射角为i，光轴与晶体表面夹角为β，以O点（次波源）为原点，取坐标系 xoy ，并令y轴沿光轴方向。设e光传播方向r与y轴夹角为ξ，相应的e光波法线方向N与y轴的夹角为θ，两者相对晶体表面法线方向的夹角分别为i_e和i_N。根

据晶体中的惠更斯作图法和有关椭圆的解析几何理论可以导出

$$\operatorname{tg}\theta = n_e^2 \frac{\sin\beta\cos\beta + \sqrt{\left(\dfrac{\sin i\cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin i\sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\dfrac{\sin i}{n_o n_e}\right)^4}}{\sin^2 i - n_e^2\sin^2\beta} \qquad (a)$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{n_o^2}{n_e^2}\operatorname{tg}\theta \qquad (b)$$

$$i_e = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \xi \qquad (c)$$

$$i_k = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \theta \qquad (d)$$

将 $i = 45°$，$\beta = 30°$，$n_o = 1.6584$，$n_e = 1.4864$

代入式（a）、（b）、（c）及（d）中，计算得

$$\xi = -88.652°, \quad \theta = -88.323°$$

$$i_e = 28.652°, \quad i_k = 28.323°$$

另外，根据折射定律算出 o 光传播方向角为

$$i_o = 25.238°$$

在作数值运算时应注意，若按式（c）或式（d）算出 i_e 或 i_k 角 的绝对值大于90°时（返回左侧），应取反方向，即应再减去180°，才是 e 光射线和波法线的实际方向。

最后，按 e 光折射率公式 $n_e(\theta)$ 算出此时的 e 光折射率为

$$n_e(\theta) = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^2\cos^2\theta + n_o^2\sin^2\theta}}$$

$$= n_e(88.323°) = \sqrt{2.2098} = 1.4865$$

* **10.** 试导出斜入射斜光轴（入射面与主截面重合）情形下 e 光的传播方向公式。

解 这个问题比较复杂，下面我们结合作图（参见上题图）程序，逐步导出 e 光折射角 i_e 公式。

（1）设入射角为i，入射光束两边缘光线的入射点分别为O点与Q点，并设

$$\overline{OQ}=l \qquad (a)$$

（2）以入射点O为原点，取正交坐标系xy，y轴沿光轴方向，光轴与晶体表面夹角为β。

（3）以次波源O为中心，作一次波椭圆，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (b)$$

其长短轴分别为

$$\begin{cases} a=v_e t=\dfrac{c}{n_e}t \\ b=v_o t=\dfrac{c}{n_o}t \end{cases} \qquad (c)$$

时间t应等于入射光束到达O，O两点的时差，即

$$t=\frac{l\sin i}{c} \qquad (d)$$

（4）从Q点向椭圆作切线，切点为P，则O，P连线方向便是e光传播方向r，它与光轴（y轴）的夹角为ξ，与晶体表面法线夹角为i_e。从O点作Q，P连线的法线N，便是波法线方向，它与光轴（y轴）的夹角为θ。

随后有两种计算i_e的方法。一种方法是设法确定P点坐标（x_0，y_0），由此求得r与x轴的夹角，再加β角便是折射角i_e。另一种方法是设法确定PQ直线方程，由此求得法线N与光轴（y轴）的夹角θ，再根据

$$\operatorname{tg}\xi=\frac{n_o^2}{n_e^2}\operatorname{tg}\theta \qquad (e)$$

和

$$i_e=\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\xi \qquad (f)$$

求得折射角i_e。两种方法的计算量相近，都要利用解析几何中有

关直线方程和椭圆切线方程的知识。我们采取第二种方法。过椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1 \tag{g}$$

将它写成直线方程的标准形式

$$y=kx+h$$

其中斜率

$$k=-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

截距

$$h=\frac{b^2}{y_0} \quad 或 h^2=a^2k^2+b^2 \tag{h}$$

须知上述切线方程应当与Q，P 连线的直线方程一致。设Q点坐标为 (x', y')，则

$$x'=l\sin\beta$$
$$y'=l\cos\beta$$

过点Q (x', y') 而斜率为 k 的直线方程为

$$\frac{y-y'}{x-x'}=k$$

即

$$y=kx+(y'-kx')$$

截距为

$$h=y'-kx' \tag{i}$$

将式(i)代入式(h) 就得到斜率 k 所满足的一元二次方程，并解出

$$k=\frac{-x'y' \pm \sqrt{a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2}}{a^2-x'^2}$$

$$\frac{-\sin\beta\cos\beta \pm \sqrt{\left(\frac{\sin i\cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i\sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin i}{n_o n_e}\right)^4}}{\left(\frac{\sin i}{n_e}\right)^2 - \sin^2\beta}$$

因此有

$$\operatorname{tg}\theta = -k$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{n_o^2}{n_e^2}\operatorname{tg}\theta$$

$$= n_o^2 \frac{\sin\beta\cos\beta \pm \sqrt{\left(\frac{\sin i\cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i\sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin i}{n_o n_e}\right)^4}}{\sin^2 i - (n_e\sin\beta)^2}$$

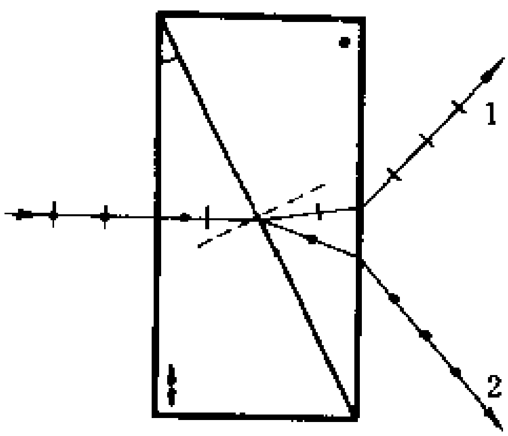
（根号前应取正号）

最后得 $$i_o = \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \xi$$

§2　晶体光学器件

1． 如附图所示，渥拉斯顿棱镜的顶角 $\alpha = 15°$ 时，两出射光线间的夹角为多少？

解　如图，在中间界面上发生的折射情形是，光线1由折射率 $n_e \to n_o$，光线2由折射率 $n_o \to n_e$，入射角均为 α。折射角分别设为 i_1 和 i_2。此时，两光线在第二块棱镜中的传播



题1图

方向仍由通常的折射定律确定，取 $n_o = 1.65836$，$n_e = 1.48641$ 算出

$$i_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n_e}{n_o}\sin\alpha\right) \approx 13.41$$

$$i_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_o}{n_e}\sin\alpha\right) \approx 16.78$$

再考虑 1，2 两条光线在最后界面的折射情形。根据几何关系，此时它们的入射角分别为

$$i_1' = \alpha - i_1 \approx 1.59^\circ$$

$$i_2' = \alpha - i_2 \approx -1.78$$

相应的折射角为

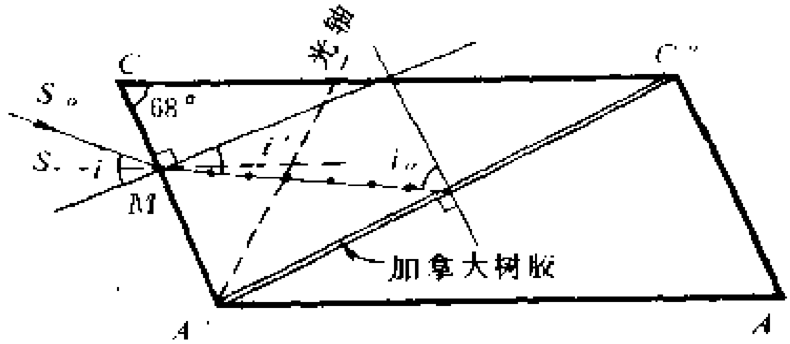
$$i_1'' = \sin^{-1}(n_o \sin i_1') \approx 2.637$$

$$i_2'' = \sin^{-1}(n_e \sin i_2') \approx -2.646$$

两光线夹角为

$$\Delta i = i_1'' - i_2'' \approx 5.28$$

2． 附图所示的尼科耳棱镜中，$\angle CA''C''$ 为直角，SM 平行于 $A''A'$。试计算此时能使 o 光在棱镜粘合面上发生全反射的最大入射角度以及相应的 $\angle S_oMS$。设以钠黄光入射。



题 2 图　尼科耳棱镜

解　尼科耳棱镜的两部分是用加拿大树胶（$n = 1.55$）粘合的，o 光（$n_o = 1.65836$）在界面上全反射临界角（参见附图）为

$$i_o = \sin^{-1}\left(\frac{1.55}{1.65836}\right) \approx 69.17$$

此时第一界面的折射角为

$$i' = 90^\circ - i_0 \approx 20.83^\circ$$

相应的最大入射角为

$$i = \sin^{-1}(n_0 \sin i') \approx 36.14^\circ$$

所以

$$\angle S_0 MS = i - (90^\circ - 68^\circ) \approx 14.14^\circ$$

3 用方解石和石英薄板作成钠黄光的$\lambda/4$波片，它们的最小厚度各为多少？

解. $\lambda/4$波片的最小厚度 d 应满足

$$(n_o - n_e)\, d = \pm \frac{\lambda}{4}$$

就$\lambda = 5892.90\,\text{Å}$的钠黄光来说，对于方解石，

$$(n_o - n_e) = 1.65836 - 1.48641 = 0.17195$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} \approx 8568\,\text{Å}$$

对于石英，有

$$(n_e - n_o) = 1.55336 - 1.54425 = 0.00911$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} \approx 161715\,\text{Å} = 16.17\,\mu\text{m}$$

4. 两尼科耳棱镜主截面的夹角由30°变到45°，透射光的强度如何变化？设入射自然光的强度为I_0。

解 由马吕斯定律知道，通过第二个尼科耳棱镜后的光强为

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

式中α为两尼科耳棱镜主截面的夹角。

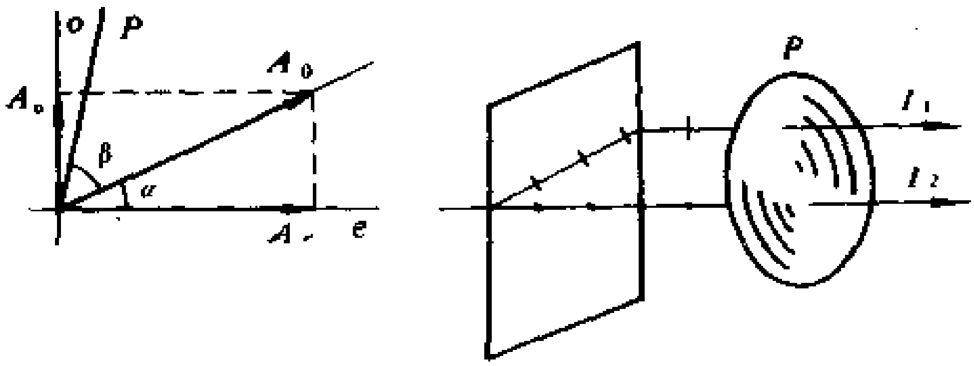
当$\alpha = 30^\circ$时，得

$$I_2 = \frac{3}{8} I_0$$

当$\alpha = 45^\circ$时，得

$$I_2 = \frac{1}{4} I_0$$

5． 单色线偏振光垂直射入方解石晶体，其振动方向与主截面成30°角，两折射光再经过置于方解石后的尼科耳棱镜，其主截面与原入射光的振动方向成50°角，求两条光线的相对强度。



题 5 图

解 如图，设线偏振光的振幅为A_0，其振动方向与晶体主截面的夹角为α，与尼科耳棱镜主截面的夹角为β。线偏振光经方解石后分解为e振动和o振动，其振幅分别为

$$A_e = A_0 \cos\alpha\ ,\qquad A_o = A_0 \sin\alpha$$

各自通过尼科耳棱镜后的振幅分别为

$$A_1 = A_e \cos(\alpha+\beta) = A_0 \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$$

$$A_2 = A_o \sin(\alpha+\beta) = A_0 \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}^2\alpha$$

$$= \mathrm{tg}^2(30^\circ+50^\circ)\,\mathrm{tg}^2 30^\circ \approx 10.72$$

6． 经尼科耳棱镜观察部分偏振光，当尼科耳棱镜由对应于极大强度的位置转过60°时，光强减为一半，求光束的偏振度。

解 如图，部分偏振光的光强极大I_M方位与光强极小I_m方位总是正交的，任意斜方位的光强$I(\alpha)$是I_M和I_m的非相干叠加，即

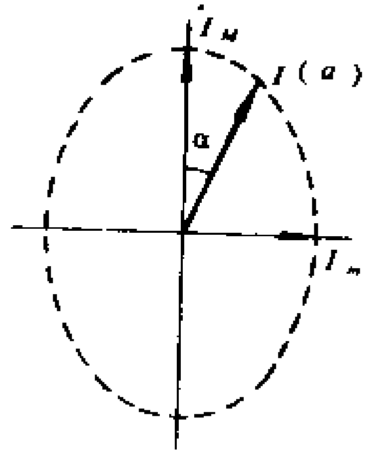
$$I(\alpha)=I_M\cos^2\alpha+I_m\sin^2\alpha$$

已知$\alpha=60°$时，$I(\alpha)=I_M/2$，代入上式求出

$$I_m=\frac{1}{3}I_M$$

因此，该部分偏振光的偏振度为

$$P=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=50\%$$



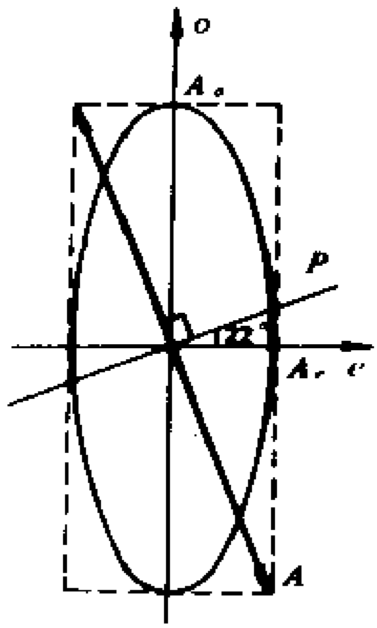
题6图

§3 圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验

1． 用一块$\lambda/4$片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光。达到消光位置后，$\lambda/4$片的光轴与偏振片透振方向相差22°，求椭圆长短轴之比。

解 一椭圆偏振光经$\lambda/4$片以后能有消光位置，这说明$\lambda/4$片的光轴已经对准入射椭圆光的长轴或短轴方向，如图。消光时，偏振片P的透振方向与合成线偏振A方向正交，而A的方位取决于入射椭圆光的长短轴之比，由图可见，长短轴之比为

$$\frac{A_o}{A_e}=\operatorname{tg}22°\approx2.5$$



题1图

*2． 一强度为I_0的右旋圆偏振光垂直通过$\lambda/4$片（此$\lambda/4$片由方解石做成，o光和e光在晶片中的光程差正好是$\lambda/4$），然后再经过一块主截面相对于$\lambda/4$片向右旋15°的尼科耳棱镜，求最后出射的光强（忽略反射、吸收等损失）。

解 先考察射向尼科耳棱镜的是一种什么状态的偏振光，为此分析两垂直分量间的位相差

$$\delta_1 = +\frac{\pi}{2}$$

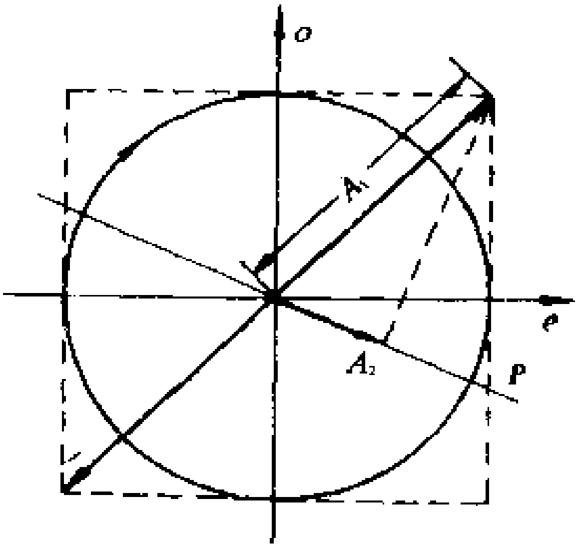
$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

其中δ_1是$\lambda/4$片入射点的位相差，δ_2是$\lambda/4$片体内传播附加位相差。所以总位相差为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

这说明它是一个在一、三象限的线偏振光（如图），强度为I_0。按马吕斯定律就很容易算出它再通过尼科耳棱镜P的强度为

$$I_P = I_0\cos^2(45° + 15°) = \frac{1}{4}I_0$$



题 2 图

§4 偏振光的干涉及其应用

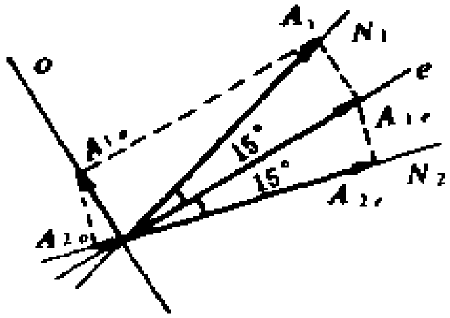
1． 平行于光轴切割的一块方解石晶片，被放置在一对尼科耳棱镜之间，光轴方向与两个棱镜主截面均成15°角，求：

（1）从方解石晶片射出的o光和e光的振幅和光强；

（2）投影于第二个尼科耳棱镜的o光和e光的振幅和光强；

设入射自然光的光强为$I_0=A^2$，反射和吸收等损失可以忽略。

解 （1）如图，设经第一个尼科耳棱镜N_1后的线偏振光的振幅为A_1，光强为I_1，则



题1图

$$I_1=\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}A^2$$

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{2}}A$$

从方解石晶片出射的e光和o光的振幅分别为

$$A_{1e}=A_1\cos 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}A\cos 15^\circ\approx 0.68A$$

$$A_{1o}=A_1\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}A\sin 15^\circ\approx 0.18A$$

光强分别为

$$I_e=A_{1e}^2=\frac{1}{2}A^2\cos^2 15^\circ=\frac{1}{2}I_0\cos^2 15^\circ\approx 0.47I_0$$

$$I_o=A_{1o}^2=\frac{1}{2}A^2\sin^2 15^\circ=\frac{1}{2}I_0\sin^2 15^\circ\approx 0.03I_0$$

（2）投影于第二个尼科耳棱镜N_2的e光和o光的振幅分别为

$$A_{2e}=A_{1e}\cos 15^\circ=A_1\cos^2 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}A\cos^2 15^\circ\approx 0.66A$$

$$A_{2o}=A_{1o}\sin 15^\circ=A_1\sin^2 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}A\sin^2 15^\circ\approx 0.05A$$

光强分别为

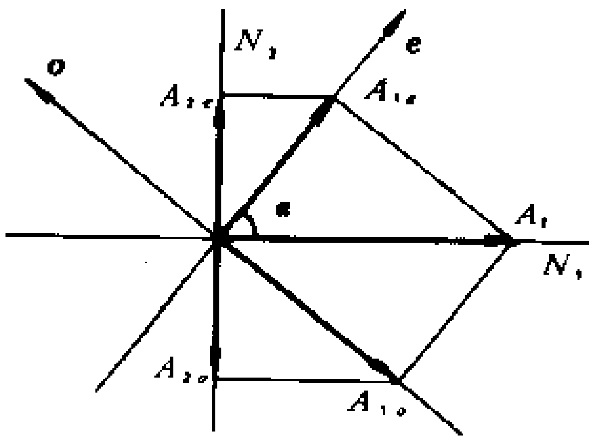
$$I_e'=A_{2e}^2=\frac{1}{2}I_0\cos^4 15^\circ\approx 0.44I_0$$

$$I_o'=A_{2o}^2=\frac{1}{2}I_0\sin^4 15^\circ\approx 0.0022I_0$$

*2． 强度为I_0的单色平行光通过正交尼科耳棱镜。现在两尼科耳棱镜之间插入一$\lambda/4$片，其主截面与第一尼科耳棱镜的主截面成60°角。求出射光的强度（忽略反射、吸收等损失）。

解 用偏振光干涉的方法求解。如图，将通过第一个尼科耳棱镜N_1的线偏振光的振幅A_1两次投影，得第二个尼科耳棱镜N_2透振方向的两个振动的振幅A_{2e}，A_{2o}，其值分别为

$$A_{2e}=A_1\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}A_1\sin2\alpha$$



题2图

$$A_{2o}=A_1\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}A_1\sin2\alpha$$

再仔细分析这两个振动之间的总的位相差

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3$$

式中δ_1为$\lambda/4$片的入射点的o，e振动的位相差，目前$\delta_1=\pi$；δ_2为晶片体内传播附加的位相差，目前$\delta_2=\pm\pi/2$，现取$\delta_2=+\pi/2$；δ_3为o轴，e轴正向朝N_2投影的位相差，目前$\delta_3=0$。所以

$$\delta=\frac{3}{2}\pi$$

最后通过N_2的光强I_2是A_{2e}、A_{2o}相干叠加的结果，即

$$I_2=A_{2e}^2+A_{2o}^2+2A_{2e}A_{2o}\cos\delta$$

$$=\frac{1}{4}A_1^2\sin^2120°+\frac{1}{4}A_1^2\sin^2120°$$

$$=\frac{6}{16}A_1^2=\frac{3}{16}I_0$$

如果取$\delta_2=-\pi/2$，上述交叉项仍然为零，I_2值不变。

3． 一块$d=0.025$ mm厚的方解石晶片，表面平行于光轴，放在正交尼科耳棱镜之间，晶片的主截面与它们成45°角，试问：

（1）在可见光范围内哪些波长的光不能通过？

（2）如果将第二个尼科耳棱镜的主截面转到与第一个平行，哪些波长的光不能通过？

解 如图所示。这是一个由偏振光干涉而引起的显色问题。须知，对于给定的某一厚度的晶片来说，虽然o光e光的光程差是确定的，即

$$\Delta L=(n_o-n_e)d$$

但位相差$\Delta\varphi$却因波长而异

$$\Delta\varphi=\varphi_e-\varphi_o=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$$

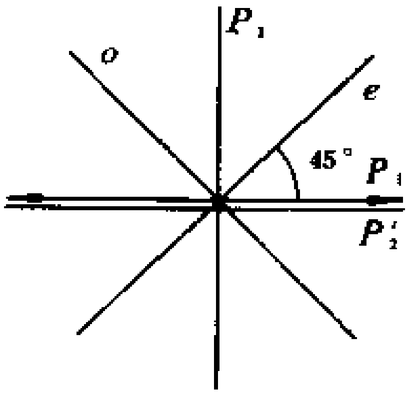
凡是使位相差满足

$$\Delta\varphi=2k\pi\quad,\ k=1,2,3,\cdots$$

的那些波长的光，从晶片出来以后仍为与P_1透振方向一致的线偏振光，如图，因P_2与P_1正交，这些光将不能通过P_2。据此，算出这一系列波长λ_k应满足

$$\lambda_k=\frac{(n_o-n_e)d}{k}$$

将钠黄光的n_o、n_e及d值代入上式分子，得



题3图

$$\begin{aligned}(n_o-n_e)d&=(1.65836-1.48641)\times0.025\text{ mm}\\&=42987.5\text{ Å}\end{aligned}$$

故
$$\lambda_{11}\approx3908\text{ Å},\quad\lambda_{10}\approx4299\text{ Å}$$
$$\lambda_9\approx4776\text{ Å},\quad\lambda_8\approx5373\text{ Å}$$
$$\lambda_7\approx6141\text{ Å},\quad\lambda_6\approx7165\text{ Å}$$

$$\lambda_5 \approx 8598\,\text{Å}$$

以上λ_5，λ_6，$\cdots\lambda_{11}$大体落在可见光波段。

（2）如果P_2转到P_1方向，情况正好相反，上述几种波长的光将完全通过P_2，而使位相差满足

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

的那些波长的光，经晶片作用后，虽然仍为线偏振光，但其振动方向绕光轴转了$\Delta\theta = 2\times 45^\circ = 90^\circ$，正好与$P_2'$正交而消光。据此，算出这一系列波长$\lambda'_k$应满足

$$\lambda'_k = \frac{(n_o - n_e)d}{k+\frac{1}{2}} = \frac{42987.5\,\text{Å}}{k+\frac{1}{2}}$$

故

$$\lambda'_{10} \approx 4094\,\text{Å}，\quad \lambda'_9 \approx 4525\,\text{Å}$$
$$\lambda'_8 \approx 5057\,\text{Å}，\quad \lambda'_7 \approx 5732\,\text{Å}$$
$$\lambda'_6 \approx 6613\,\text{Å}，\quad \lambda'_5 \approx 7816\,\text{Å}$$

这些波长大体落在可见光波段之内。

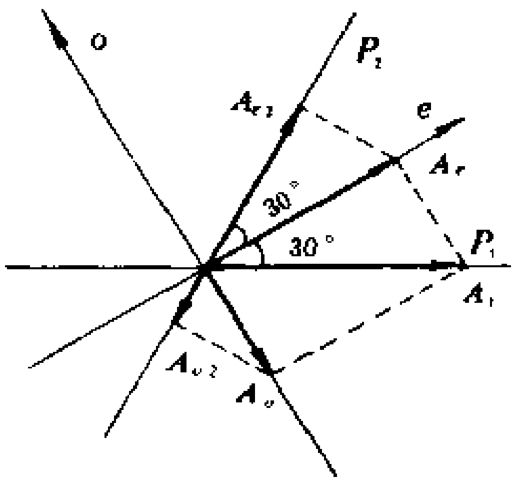
4． 两尼科耳棱镜主截面夹角为60°，中间插入一块水晶的$\lambda/4$片，其主截面平分上述夹角，光强为I_0的自然光入射，试问：

（1）通过$\lambda/4$片后光的偏振态；

（2）通过第二尼科耳棱镜的光强。

解 （1）自然光通过第一尼科耳棱镜后成为线偏振光，再通过$\lambda/4$片后成为（正）椭圆偏振光。

（2）用偏振光干涉的方法求此椭圆光通过第二个尼科耳棱镜P_2的光强，为此分别求出振幅（参见附图）



题4图

$$A_{e2}=A_e\cos 30^\circ=A_1\cos^2 30^\circ$$
$$A_{o2}=A_o\sin 30^\circ=A_1\sin^2 30^\circ$$

投影于P_2方向的两个扰动的位相差为

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3$$

式中δ_1为$\lambda/4$片的入射点的位相差，δ_2为晶片体内传播的附加位相差，δ_3为oe坐标系正向朝P_2投影引起的位相差，目前

$$\delta_1=\pi\ ,\ \delta_2=\pm\frac{\pi}{2},\ \delta_3=0$$

故

$$\delta=\pi\ \pm\frac{\pi}{2}$$

于是出射光强

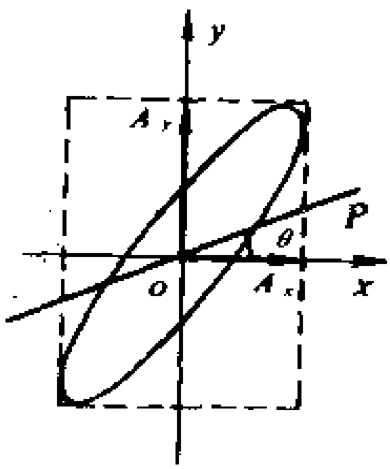
$$I_2=A_2^2=A_{e2}^2+A_{o2}^2+2A_{e2}A_{o2}\cos\delta$$
$$=A_{e2}^2+A_{o2}^2=\frac{10}{16}A_1^2=\frac{5}{16}I_0$$

*5． 试求斜椭圆偏振光（1）任意方位的光强，（2）长短轴方位以及强度极大值和极小值。

解 在讨论偏振光干涉或椭圆偏振光的产生和检验一类问题时，我们可能经常遇到这样的情形，对于给定的坐标系来说，椭圆不是正的，而是斜的，这是由两个正交振动$E_y(t)$与$E_x(t)$之间的位相差$\delta\neq\pm\pi/2, 0, \pi$而引起的。设

$$\begin{cases}E_x(t)=A_x\cos\omega t\\ E_y(t)=A_y\cos(\omega t+\delta)\end{cases}$$

（1）先求此斜椭圆光通过偏振片P以后的光强$I(\theta)$，θ为偏振片透振方向与坐标轴之一的夹角，如图(a)。分别将振动$E_x(t)$与$E_y(t)$向P方向投影，得



题5图（a）

$$\begin{cases} E_{xp}(t) = A_x\cos\theta\cos\omega t \\ E_{yp}(t) = A_y\sin\theta\cos(\omega t+\delta) \end{cases}$$

两者叠加便是通过偏振片的振动，即

$$\begin{aligned} E_p(t) &= E_{xp}(t) + E_{yp}(t) \\ &= A_p\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

由一维同频简谐量合成公式得

$$\begin{cases} \begin{aligned} I(\theta) &= A_p^2 \\ &= (A_x\cos\theta)^2+(A_y\sin\theta)^2+2(A_x\cos\theta)(A_y\sin\theta)\cos\delta \\ &= I_x\cos^2\theta+I_y\sin^2\theta+\sqrt{I_xI_y}\sin2\theta\cos\delta \qquad (a) \end{aligned} \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{A_y\sin\theta\sin\delta}{A_x\cos\theta+A_y\sin\theta\cos\delta}\right) \qquad (b) \end{cases}$$

式(a)是已知I_x、I_y、δ，求$I(\theta)$的一般公式。式(b)给出的φ值，对于光强的观测没有直接意义。

（2）如要确定此时斜椭圆的长短轴方位及相应的强度极大值I_M和强度极小值I_m，有两种方法可供选择。一种是纯解析几何方法，作转动坐标变换，将斜椭圆轨迹方程

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}-2\frac{E_xE_y}{A_xA_y}\cos\delta=\sin^2\delta$$

中的交叉项消除掉，成为椭圆的标准方程，便可求解。我们常用另一种方法，即偏振光干涉的光学方法求解，将$I(\theta)$表达式中的θ看作变量而求其极值。为此改写$I(\theta)$为

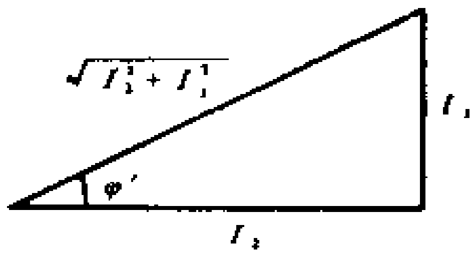
$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2}I_x(1+\cos2\theta)+\frac{1}{2}I_y(1-\cos2\theta) \\ &\quad+\sqrt{I_xI_y}\sin2\theta\cos\delta \\ &= \frac{1}{2}(I_x+I_y)+\frac{1}{2}(I_x-I_y)\cos2\theta \\ &\quad+\sqrt{I_xI_y}\cos\delta\sin2\theta \end{aligned}$$

令$I_1=\frac{1}{2}(I_x+I_y)$，$I_2=\frac{1}{2}(I_x-I_y)$，$I_3=\sqrt{I_xI_y}\cos\delta$，

将$I(\theta)$简化为

$$\begin{cases} I(\theta)=I_1+I_2\cos 2\theta+I_3\sin 2\theta \\ \quad\quad\;=I_1+\sqrt{I_2^2+I_3^2}\cos(2\theta-\varphi') \\ \varphi'=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{I_2}{I_3}，\text{或}\varphi'=\cos^{-1}\dfrac{I_2}{\sqrt{I_2^2+I_3^2}} \end{cases}$$

式中φ'与I_2，I_3的关系如图(b)所示。显然，$I(\theta)$的极值条件为：



题5图(b)

当$\theta=\frac{\varphi'}{2}$时，有极大值

$$I_M=I_1+\sqrt{I_2^2+I_3^2}$$

$$=\frac{1}{2}(I_x+I_y)+\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos 2\delta} \qquad (c)$$

当$\theta=\frac{\varphi'}{2}\pm\frac{\pi}{2}$时，有极小值

$$I_m=I_1-\sqrt{I_2^2+I_3^2}$$

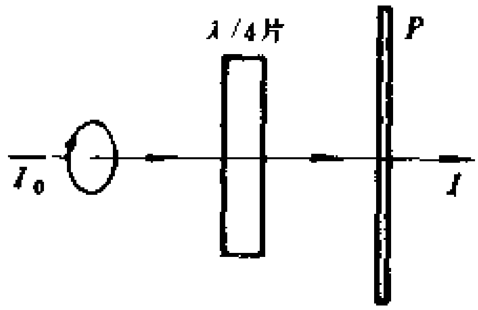
$$=\frac{1}{2}(I_x+I_y)-\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos 2\delta} \qquad (d)$$

*6. 如图(a)，波长为λ的右旋椭圆偏振光通过由负晶体制成的一块波晶片。椭圆光的总强度为I_0，其强度极大值与极小值之比为4比1；波晶片的光轴已对准椭圆光的短轴方向，其造成的（有效）光程差$(n_o-n_e)d=\lambda/6$；偏振片透振方向与光轴夹角为$\alpha=\pi/6$。

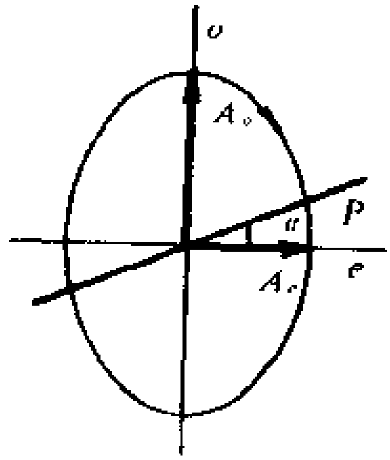
（1）求出射光强I（以I_0表示）；

（2）如果入射光改为左旋，其它条件不变，出射光强为多少？

（3）在偏振片转动过程中，出射光强的极大值和极小值（以 I_0 表示）分别为多少？



（a）



（b）

题6图

解 按题意作图（b），图中 $\alpha=\pi/6$。

（1）由

$$I_M+I_m=I_0$$
$$I_M=4I_m$$

得

$$I_o=I_M=\frac{4}{5}I_0,\quad I_e=I_m=\frac{1}{5}I_0$$

现用偏振光干涉的方法求 $I(\alpha)$，则可直接利用题5中的公式（a）

$$I(\alpha)=I_m\cos^2\alpha+I_M\sin^2\alpha+\sqrt{I_mI_M}\sin2\alpha\cos\delta$$

式中 δ 是从波晶片出射后的 o 振动与 e 振动之间的位相差，它应当等于入射点的位相差 δ_1 和体内传播附加位相差 δ_2 之和

$$\delta_1=\varphi_o-\varphi_e=+\frac{\pi}{2}$$

$$\delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d=-\frac{\pi}{3}$$

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{\pi}{6}$$

最后得

$$I(\alpha)=\frac{1}{5}I_0\cos^2\frac{\pi}{6}+\frac{4}{5}I_0\sin^2\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}I_0\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{3}{20}I_0+\frac{4}{20}I_0+\frac{6}{20}I_0=\frac{13}{20}I_0$$

（2）如果入射光改为左旋，则

$$\delta_1'=\varphi_o-\varphi_e=-\frac{\pi}{2}$$

$$\delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d=-\frac{\pi}{3}$$

$$\delta=\delta_1'+\delta_2=-\frac{5}{6}\pi$$

$$\cos\delta=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

出射光强为

$$I'(\alpha)=\frac{3}{20}I_0+\frac{4}{20}I_0-\frac{6}{20}I_0=\frac{1}{20}I_0$$

显然它不等于题（1）右旋光入射时的结果。

（3）由于从波晶片出射的两个正交振动之间的位相差为$\delta=\pi/6$，故它们合成为斜椭圆光。求斜椭圆长短轴方位及光强极值问题可直接利用题5给出的公式（c）和（d），得本题结果为

$$I_M=\frac{1}{2}I_0+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}}\ I_0$$

$$=\frac{5+\sqrt{21}}{10}I_0\approx0.96I_0$$

$$I_m=\frac{5-\sqrt{21}}{10}I_0\approx 0.04I_0$$

还可以算出偏振片P相对于e轴的方位角（即椭圆长短轴的方位）分别为

$$\alpha_M=\frac{1}{2}\varphi'=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{I_2}{\sqrt{I_2^2+I_3^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}(I_x-I_y)}{\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos 2\delta}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5}-\frac{4}{5}}{\sqrt{(\frac{1}{5})^2+(\frac{4}{5})^2+2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\cos 60^\circ}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{21}}\right)\approx\frac{1}{2}(180^\circ-49.11^\circ)\approx 65.45^\circ$$

$$\alpha_m=\alpha_M+90^\circ\approx 155.45^\circ$$

7．楔形水晶棱镜顶角$\alpha=0.5^\circ$，棱边与光轴平行，置于正交尼科耳棱镜之间，使其主截面与两尼科耳棱镜的主截面都成45°角，以水银的4047Å紫色平行光正入射，问：

（1）通过第二尼科耳棱镜看到的干涉图样如何？

（2）相邻暗纹的间隔d等于多少？

（3）若将第二尼科耳棱镜的主截面转90°，干涉图样有何变化？

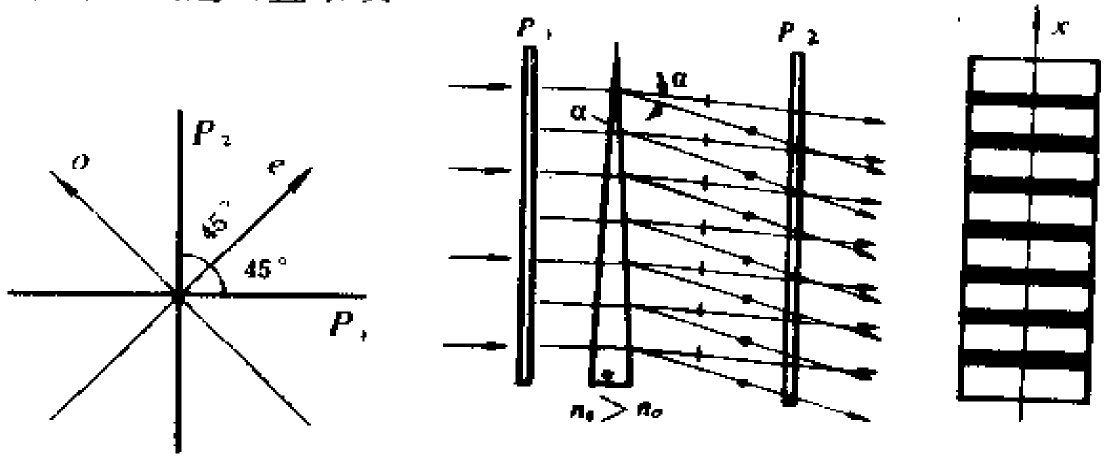
（4）维持两尼科耳棱镜正交，但把水晶棱镜的主截面转45°，使之与第二尼科耳棱镜的主截面垂直，干涉图样有何变化？

解　(1) 如图(a)，当第一个尼科耳棱镜的透振方向P_1与水晶棱镜的e轴成45°夹角时，从P_1透射出来的线偏振光进入水晶后被分解为o光和e光。如图(b)所示，目前o振动平行纸面，e振动垂直纸面。水晶为正晶体，o光比e光传播快，即$n_o < n_e$。由于水晶棱镜厚度连续变化，使出射面（斜面）上下各点的两个正交振动之间的位相差也随之连续变化，合成结果为各种状态的椭圆光。就传播方向看，它们经斜面折射成为两束平行光，其偏向角（相对于入射方向）在顶角α很小的条件下分别近似为

$$\delta_e \approx (n_e - 1)\alpha$$

$$\delta_o \approx (n_o - 1)\alpha$$

于是后场是这两束平行光的叠加场。如果安置第二个偏振片（尼科耳棱镜）P_2，后场就成为这两束平行光的干涉场，干涉图样是一组平行于棱边的直条纹。



(a)　　　　　　　　(b)

题7图

(2) 可以按照我们熟悉的两束平行光干涉的条纹间距公式，直接求得目前水晶棱镜造成的相邻暗纹的间距为

$$d = \Delta x = \frac{\lambda}{\sin\delta_e - \sin\delta_o} \approx \frac{\lambda}{\delta_e - \delta_o}$$

$$= \frac{\lambda}{(n_e - n_o)\alpha}$$

按 $\lambda = 4047\text{Å}$，$n_e = 1.56671$，$n_o = 1.55716$，$\alpha = 0.5°$ 算出

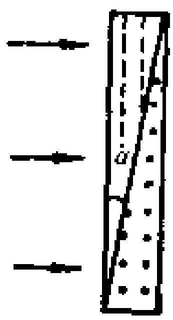
$$\Delta x \approx 4.86\text{mm}$$

这些暗纹的具体位置正是使位相差为 $\Delta\varphi = 2k\pi$ 的那些地点。

（3）当我们将第二个尼科耳棱镜的透振方向（主截面）转 90°，与第一个尼科耳棱镜一致时，由于 o 轴、e 轴正向在 P_2 方向投影的位相差与未转动时相比增加了 π，所以原来的暗线就成为亮纹，而原来的亮纹位置出现了暗线。其它方面，诸如条纹的形状、间距等均无变化。

（4）如果将水晶棱镜主截面转45° 而与 P_1 主截面一致，则射入水晶棱镜的是单纯 e 光，此时 o 振动与 e 振动的位相差不起作用，从棱镜出射的是同一振动方向的线偏振光，被 P_2 全部消光，P_2 后方一片暗场。

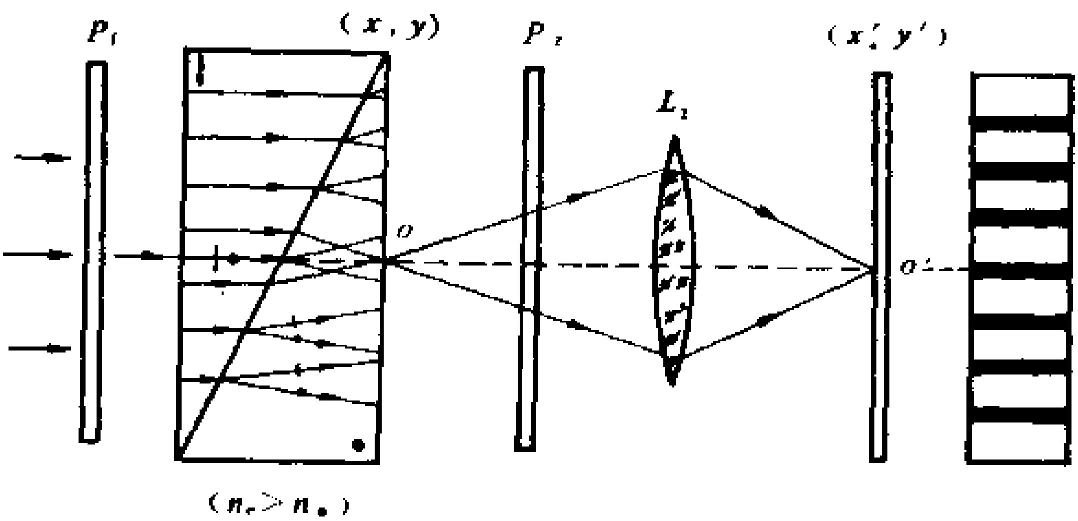
* **8．** 巴俾涅补偿器的结构如图（a）所示，它由两个楔形的石英棱镜组成，光轴方向如图。问：



题 8 图（a）

（1）将巴俾涅补偿器放在正交偏振片之间，你将看到什么现象？

（2）若楔角 $\alpha = 2.75°$，用平行的钠黄光照明，求干涉条纹的间隔。



题 8 图（b） 巴俾涅补偿器

解 （1）首先分析巴俾涅补偿器的工作原理和特性。经偏振片 P_1 后的线偏振光正入射于补偿器时，被分解为两个正交振动 $A_{/\!/}$ 和 $A_\perp$，如图（b），$A_{/\!/}$ 平行纸面，$A_\perp$ 垂直纸面。$A_{/\!/}$ 先后以折射率 n_e，n_o 通过两块棱镜，$A_\perp$ 先后以折射率 n_o，n_e 通过两块棱镜。于是，在第一个棱镜内传播的包含两个正交振动的一束平行光，经界面（斜面）后，就开始分离为两束不同方向的平行光 其偏向角（相对于以虚线表示的入射方向）在楔角 α 很小的条件下分别近似为

$$\alpha_{/\!/} \approx \left(\frac{n_e}{n_o} - 1\right)\alpha > 0 \quad \text{（朝上）}$$

$$\alpha_\perp \approx \left(\frac{n_o}{n_e} - 1\right)\alpha < 0 \quad \text{（朝下）}$$

夹角为

$$\Delta\alpha = \alpha_{/\!/} - \alpha_\perp \approx 2\left(\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e}\right)\alpha$$

由此可见，界面以后的空间是两束不同传播方向而振动方向又互相垂直的平行光的叠加场。这两束平行光在出射面 xy 内的位相分布分别为

$$\varphi_{/\!/}(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_{/\!/}\, x + \varphi_{/\!/}(0)$$

$$\approx -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{n_e}{n_o} - 1\right)\alpha x + \varphi_{/\!/}(0)$$

$$\varphi_\perp(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_\perp x + \varphi_\perp(0)$$

$$\approx -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{n_o}{n_e} - 1\right)\alpha x + \varphi_\perp(0)$$

式中 $\varphi_{/\!/}(0)$ 和 $\varphi_\perp(0)$ 分别为两个振动在中心点 0（两楔形棱镜等厚路线所指的地点）的位相，由于两个棱镜对光程的互补作用，致使 $\varphi_{/\!/}(0)=\varphi_\perp(0)$，于是两束平行光的位相差分布为

$$\Delta\varphi(x,y)=\varphi_{\perp}-\varphi_{/\!/}=\frac{2\pi}{\lambda}2\left(\frac{n_e}{n_o}-\frac{n_o}{n_e}\right)\alpha x$$

从位相差随 x 连续线性变化这一点上看，几何厚度处处相等的补偿器，相当于一个厚度连续变化的楔形晶片。但是与单块楔形晶片不同，补偿器在 $x=0$ 的中心地带（即 y 轴）的位相差为零，以此为准确的参考线，朝上下两方展开，位相差依次为 $\Delta\varphi(x)=0$，$\pm\pi/4$，$\pm\pi/2$，$\pm\pi$，$\pm5\pi/4$，$\pm3\pi/2$，$\pm2\pi$，…因此，两束平行光在 xy 面上的合成振动为各种状态的椭圆光，当然若干处仍然是线偏振光，而中心地带必定是与 P_1 透振方向一致的线偏振光。补偿器的特点就在于此。利用这一特点于偏振光干涉，可以对体内传播引起的附加位相差进行绝对测量。

为使两束平行光产生相干叠加，必须置放第二个偏振片 P_2。考虑到这两束平行光从 xy 面出射到空气时将要进一步分离，如果直接接收的屏幕离得较远，将不可能获得交叠区域。实验上最好的方法是加一个透镜 L_2 将物面 xy 成象于 $x'y'$ 而实现相干叠加。此时象面上将出现一系列平行等距的直条纹。如果所成象的横向放大率等于 1，则由两束平行光相干叠加的条纹间距公式得条纹间隔为

$$\begin{aligned}\Delta x'=\Delta x&=\frac{\lambda}{\sin\alpha_{/\!/}-\sin\alpha_{\perp}}\approx\frac{\lambda}{\Delta\alpha}\\&=\frac{\lambda}{2\left(\dfrac{n_e}{n_o}-\dfrac{n_o}{n_e}\right)\alpha}=\frac{n_o n_e\lambda}{2(n_e+n_o)(n_e-n_o)\alpha}\\&\approx\frac{\lambda}{4(n_e-n_o)\alpha}\end{aligned}$$

当 P_1，P_2 正交时，中心地带（y' 轴）必定是暗线（零级暗线）。

如果不用透镜在象面上接收，而用肉眼在 P_2 后方观察，所看到的现象将因人而异，取决于你的眼睛聚焦于何处。当眼睛（习惯于）聚焦在眼前的实物 P_2，而 P_2 又是贴近 xy 平面时观察到的

现象，这与透镜接收时相同。

（2）取 $\alpha=2.75''$，$n_o=1.54425$，$n_e=1.55336$，$\lambda=5893\text{Å}$，算出条纹间隔为

$$\Delta x\approx 0.52\text{mm}$$

*9．以线偏振光照在巴俾涅补偿器（参见上题）上，通过偏振片观察时在中央两楔形棱镜厚度 $d_1=d_2$ 处有一暗线，与中央暗线距离 a 处又有一暗线。今以同样波长的椭圆偏振光照在此巴俾涅补偿器上，发现（中央）暗线移至离中央 b 处。

（1）求椭圆偏振光在补偿器晶体中分解成的两个振动分量的初始位相差与 a，b 的关系；

（2）如果椭圆的长短轴正好分别与两楔形棱镜的光轴平行，试证此时 $b=a/4$；

（3）设已知偏振片的透振方向与补偿器一楔的光轴夹角为 θ，找出 θ 与（2）间中椭圆长短轴比值的关系。

解 （1）因相邻暗线间距为 a，对应的位相差改变为 2π，所以同级暗线位移 b 时，位相差改变量为

$$\delta_1=\frac{2\pi}{a}b$$

这也正是入射椭圆光两个正交振动 $A_\perp$ 与 $A_{/\!/}$ 的初始位相差值，它被补偿器带来的附加位相差所抵消，在非中心的某处出现了零级暗线。

（2）此时椭圆光为正椭圆，位相差 δ_1 只有取 $\pm\pi/2$ 两种可能，即

$$\delta_1=\pm\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{a}b$$

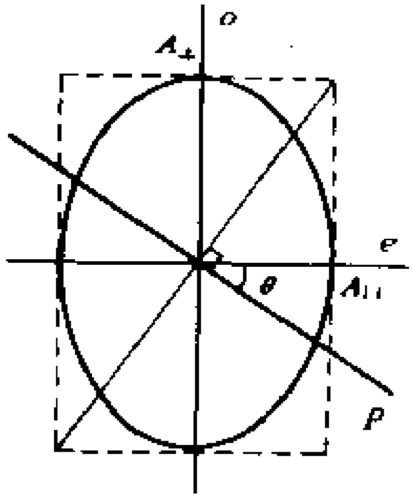
解得

$$b=\pm\frac{a}{4}$$

式中 + 号说明暗线向上位移，此时入射椭圆光为右旋；－号说明暗线向下位移，相应的入射椭圆光为左旋。

（3）在巴俾涅补偿器后面加偏振片观测，对于暗线位置来说，如图，必须保证偏振片的透振方向P与从补偿器出射的两个正交振动$A_{\perp}$，$A_{//}$合成的线偏振方向彼此正交，从图中可见，此时偏振片透振方向与补偿器一楔光轴的夹角θ应满足

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{A_{\perp}}{A_{//}}\right)$$



题9图

式中$A_{\perp}/A_{//}$为入射正椭圆偏振光长短轴之比。

*10. 附图（a）所示为杨氏干涉装置，其中S为单色自然光源，S_1和S_2为双孔。

（1）如果在S后放置一偏振片P，干涉条纹是否发生变化？有何变化？

（2）如果在S_1，S_2之前再各放置一偏振片P_1，P_2，它们的透振方向相互垂直，并都与P的透振方向成45°角，幕$\sum$上强度分布如何？

（3）在$\sum$前再放置一偏振片P'，其透振方向与P平行，试比较在这种情形下观察到的干涉条纹与P_1，P_2，P'都不存在时的干涉条纹有何不同？

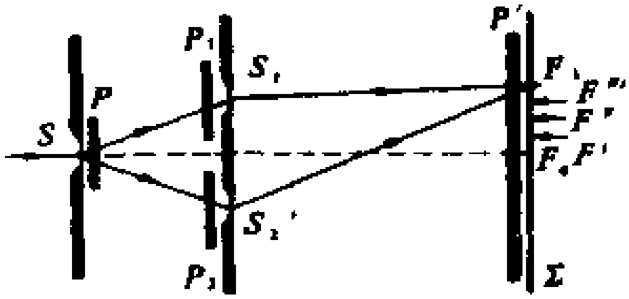
（4）同（3），如果将P旋转90°，幕上干涉条纹有何变化？

（5）同（3），如果将P撤去，幕上是否有干涉条纹？

（6）类似（2）的布置，屏幕$\sum$上的F_0，F_1分别是未加P_1，P_2时0级和1级亮纹所在处，F'，F''、F'''分别是F_0F_1的四等分点。试说明F_0，F_1及F'，F''，F'''各点的偏振状态。

解 （1）插入P后，干涉条纹的形状、间距、反衬度均不发生变化。但由于自然光通过偏振片P时强度减半，导致屏幕上的平均强度减半，干涉条纹的亮度下降。

（2）由于P_1，P_2的透振方向相互正交，干涉场是两束振动方向互相垂直的线偏振光的叠加。这时不满足"振动方向相同"这一相干条件，屏幕上得不到干涉条纹，而是一片均匀照明，其强度是两束线偏振光的非相干叠加。



题10图（a）

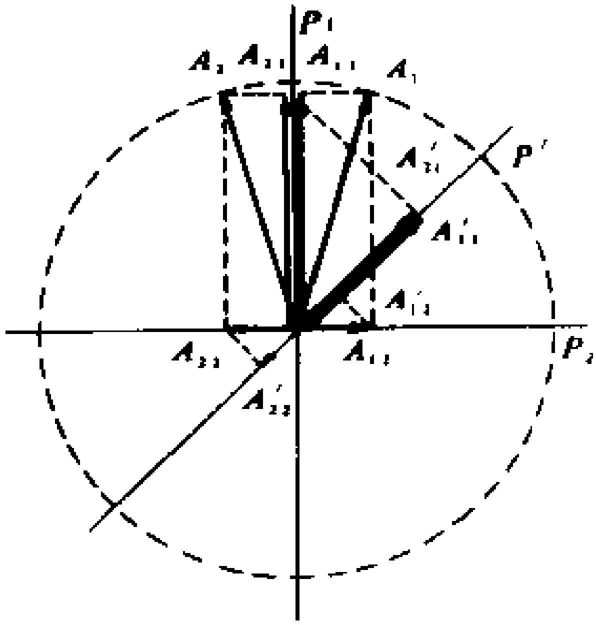
（3）这时经P_1，P_2出射的两相互正交的线偏振光，都再次投影到P'的透振方向上，使"振动方向相同"这一相干条件重新得到满足，屏幕$\sum$上又出现了干涉条纹。条纹的形状、间距、反衬度均与P_1，P_2，P'都不存在时相同，但由于偏振片的二向色性，P_1，P_2，P'分别吸收了入射线偏振光中与其透振方向垂直的分量，因此，与只有P单独存在时相比，干涉条纹的亮度下降。

（4）如果在（3）的布置中，把P的透振方向旋转90°，由于两次投影引起的附加位相差改变了π，使原来的亮纹位置变成了暗纹而原来的暗纹位置现在变成了亮纹条纹。其它性质均不发生变化。

（5）在（3）的情况中如果将P撤去，则投影到透振方向P'上的两个正交振动是来自于自然光的两个垂直分量。两自然光中的两个垂直分量之间是没有稳定的位相关系的。因此，尽管这时"振动方向相同"这一相干条件仍然满足，但由于"位相差稳定"这一相干条件被破坏，屏幕上得到的是双光束的非相干叠加，即此时干涉条纹消失，$\sum$面上的照明趋于均匀。

关于自然光的两个垂直分量之间是没有稳定位相关系的这一结论，我们已在第二章§9节习题3中，用反证法作了证明。现在，我们将通过分析自然光的细微结构，用另一种方法来证明这一结论。自然光是大量的、位相无规的、轴对称分布的线偏振光的

集合（如图）（b），任取两个对称于P_1的线偏振光A_1和A_2，A_1经两次投影于P'方向后，其强度是A'_{11}和A'_{12}的相干叠加；A_2经两次投影于P'方向后其强度是A'_{21}和A'_{22}的相干叠加。由对称性知，$A'_{11}=A'_{21}$，$A'_{12}=A'_{22}$，又由图可见，A_1和A_2分别在两次投影过程中引起的附加位相差相差π。因此，分别相干叠加时得到的两个交叉项（干涉项）大小相等，符号相反，再次叠加时干涉项互相抵消，所以透过P'的强度仍为非相干叠加的结果。而自然光的大量线偏振光中，象A_1，A_2这样对称分布的线偏振光总是成对出现，相应的交叉项也总是成对出现，相互抵消的。综上分析，取自自然光的P_1方向和P_2方向的两个总的垂直分量，投影到P'方向后，其宏观后果仍表现为非相干叠加。这就证明了自然光的两个垂直分量之间是没有稳定的位相关系的。



题10图（b）

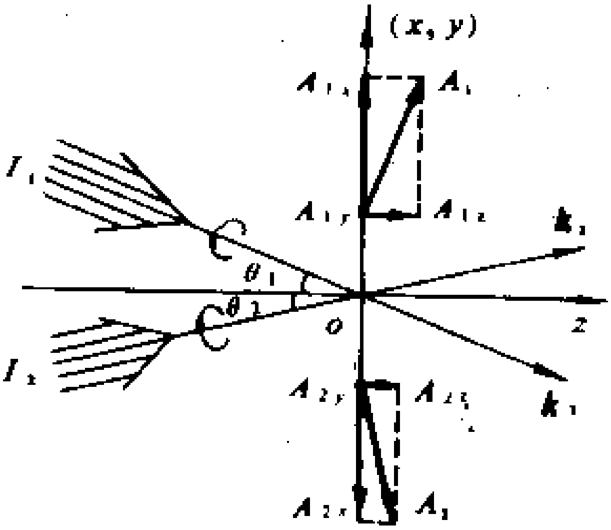
由上证明，也可看出，（3），（4）两问中未撤去P时，幕上能够得到干涉条纹，是因为投影到P_1，P_2方向上的正交分量来自于自然光中P方向的分量，再次投影到P'方向时，由投影引起的位相差之差为π的情况不复存在，从而交叉项不再成对出现，所以其宏观后果仍表现为相干叠加。

（6）此时，F_0，F_1两点分别为位相差为$0,2\pi$的两个垂直振动的合成，合成结果为线偏振；F''点为位相差为π的两垂直振动的合成，结果也为线偏振，但振动方向与F_0，F_1点的振动方向正交；F'，F'''两点分别为位相差为$\pi/2$，$3\pi/2$、大小相等的

两垂直振动的合成，结果都为圆偏振，一个左旋，一个右旋，到底哪个为左旋，哪个为右旋，取决于P_1，P_2的绝对取向。

*11. 试讨论两束同频左右旋圆偏振光的平行光的干涉（如图）。

解　如图，一束强度为I_1的左旋圆偏振光以θ_1倾角射向xy平面，另一束强度为I_2的同频右旋圆偏振光以θ_2倾角射向xy平面。为分析相干叠加问题，应对振动矢量作必要的分解，如图所示，将$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$分别分解为旋转矢量$\boldsymbol{A}_1$（$\boldsymbol{A}_{1x}$，$\boldsymbol{A}_{1y}$，$\boldsymbol{A}_{1z}$）



题11图

和旋转矢量$\boldsymbol{A}_2$（A_{2x}，A_{2y}，A_{2z}）。显然A_{1x}与A_{2x}之间，A_{1y}与A_{2y}之间，A_{1z}与A_{2z}之间是完全满足相干条件的。为使问题逐步深入，在θ_1，θ_2很小的条件下可暂且忽略z分量的影响。在讨论x，y分量的叠加时，我们注意到对左旋平行光，自身有位相差

$$\varphi_{1y}(P)-\varphi_{1x}(P)=-\frac{\pi}{2}$$

对右旋平行光，自身有位相差

$$\varphi_{2y}(P)-\varphi_{2x}(P)=+\frac{\pi}{2}$$

当然两束平行光之间随场点$P(x, y)$还有一个因光程差引起的位相差分布，设此位相差分布对x分量来说为

$$\delta_x(P)=\varphi_{2x}(P)-\varphi_{1x}(P)$$

而对y分量来说，必有

$$\delta_y(P)=\varphi_{2y}(P)-\varphi_{1y}(P)$$

$$= \delta_x(P) + \pi$$

于是两个分量的干涉强度分布分别为

$$I_x(P) = A_{1x}^2 + A_{2x}^2 + 2A_{1x}A_{2x}\cos\delta_x(P)$$

$$I_y(P) = A_{1y}^2 + A_{2y}^2 + 2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_y(P)$$

$$= A_{1y}^2 + A_{2y}^2 - 2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_x(P)$$

总的强度分布为两个正交方向强度的不相干叠加，即

$$I(P) = I_x(P) + I_y(P)$$

$$= (A_{1x}^2 + A_{1y}^2) + (A_{2x}^2 + A_{2y}^2)$$

$$+ 2(A_{1x}A_{2x} - A_{1y}A_{2y})\cos\delta_x(P)$$

在忽略 z 分量的情形下，有

$$(A_{1x}^2 + A_{1y}^2) = I_1, \quad (A_{2x}^2 + A_{2y}^2) = I_2$$

$$A_{1x} = A_{1y}; \quad A_{2x} = A_{2y}$$

$$A_{1x}A_{2x} - A_{1y}A_{2y} = 0$$

则 $$I(P) = I_1 + I_2$$

这表明两束同频左右旋圆偏振光的叠加，由于两个交叉项正好抵消，最终回到了非相干叠加的结果，幕上不出现亮暗条纹。

若考虑 z 分量的影响，则因矢量投影的方向性，有

$$\delta_z(P) = \delta_x(P) + \pi$$

$$I_z(P) = A_{1z}^2 + A_{2z}^2 + 2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_z(P)$$

$$= A_{1z}^2 + A_{2z}^2 - 2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_x(P)$$

以上所有振幅值满足

$$I_1 = 2A_1^2, \quad I_2 = 2A_2^2$$

$$A_{1x} = A_1\cos\theta_1, \quad A_{1y} = A_1, \quad A_{1z} = A_1\sin\theta_1$$

$$A_{2x} = A_2\cos\theta_2, \quad A_{2y} = A_2, \quad A_{2z} = A_2\sin\theta_2$$

于是总强度

$$I(P) = I_x(P) + I_y(P) + I_z(P)$$

$$= I_1 + I_2 + 2(A_1A_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - A_1A_2 - A_1A_2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$\cos\delta_x(P)$$

$$= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) - 1]\cos\delta_x(P)$$

可见，交叉项依然保留，幕上出现一系列平行于 y 轴的直条纹，其反衬度为

$$\gamma = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \left| \cos(\theta_1 + \theta_2) - 1 \right|$$

当 $\theta_1 = -\theta_2$，即同方向入射时，则

$$\gamma = 0$$

$$I(P) = I_1 + I_2$$

当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi / 2$，即两束光正交时，则

$$\gamma = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$I(P) = I_1 + I_2 - \sqrt{I_1 I_2} \quad \cos \delta_x(P)$$

当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$，即两束光对头碰时，则

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$I(P) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \cos \delta_x(P)$$

§5　旋　光

1．　已知水晶对钠黄光的旋光率 $\alpha = 21.75°/\text{mm}$，求左右旋圆偏振光折射率之差 Δn。

解　由旋光率 α 与折射率差 Δn 之关系

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \Delta n$$

得

$$\Delta n = \frac{\lambda \alpha}{\pi} = (5893 \times 10^{-7}) \times \frac{21.75}{180} \approx 7.121 \times 10^{-5}$$

2．　在两尼科耳棱镜之间插一块石英旋光晶片，以消除对眼睛最敏感的黄绿光（$\lambda = 5500\text{Å}$），设对此波长的旋光率为 $24°/\text{mm}$，求下列情形下晶片的厚度：

（1）两尼科耳棱镜主截面正交；

（2）两尼科耳棱镜主截面平行。

解 （1）当两尼科耳棱镜主截面正交时，为要消除黄绿色光，应使该波长的光在通过石英旋光晶片后，偏振面旋转180°，即

$$\psi = \alpha d = 180°$$

得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{180}{24} = 7.5\,\text{mm}$$

即当晶片厚度为7.5mm的整数倍时都可对此波长消光。

（2）此时应满足

$$\psi = \alpha d = 90°$$

得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{90}{24} = 3.75\,\text{mm}$$

即当晶片厚度为3.75mm的奇数倍时都能对此波长消光。

3. 一石英棒长5.639cm，端面垂直于光轴，置于正交偏振器间，沿轴方向输入白光，用光谱仪观察透射光。

（1）用一大张坐标纸，画出可见光范围（4000到7600Å）偏振面的旋转角与波长的曲线，旋光率数据可查表得之；

（2）从这曲线看，那些波长的光在光谱仪中消失？

（3）在这些丢失的波长中，偏振面的最大和最小旋转角各是多少？

解 （1）由公式$\psi = \alpha d$，根据数据表提供的$\alpha(\lambda)$数值得

$\lambda = 3820\text{Å}$，$\psi = 55.625 \times 5.639 \times 10 = 3137°$

$\lambda = 4047\text{Å}$，$\psi = 48.945 \times 5.639 \times 10 = 2760°$

$\lambda = 4307\text{Å}$，$\psi = 42.604 \times 5.639 \times 10 = 2402°$

$\lambda = 4861\text{Å}$，$\psi = 32.773 \times 5.639 \times 10 = 1848°$

$\lambda = 5461\text{Å}$，$\psi = 25.538 \times 5.639 \times 10 = 1440°$

$\lambda = 5890\text{Å}$，$\psi = 21.749 \times 5.639 \times 10 = 1226°$

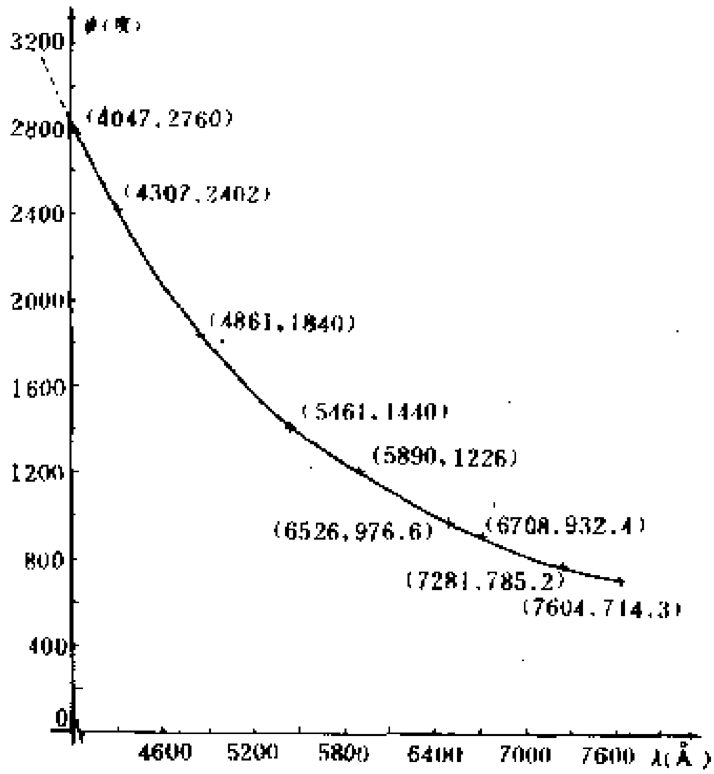
$\lambda=6562\text{Å}$，$\psi=17.318\times5.639\times10=976.6°$

$\lambda=6708\text{Å}$，$\psi=16.535\times5.639\times10=932.4°$

$\lambda=7281\text{Å}$，$\psi=13.921\times5.639\times10=785.2°$

$\lambda=7604\text{Å}$，$\psi=12.668\times5.639\times10=714.3°$

作$\psi-\lambda$曲线如图。曲线表明偏振面的旋转角随波长的增加而减小，此为旋光色散。



题3图

（2）因为石英棒置于正交偏振器之间，所以凡满足

$$\psi=k180° \quad (k\text{为正整数})$$

的波长的光都将被第二个偏振器消光而在光谱仪中消失。在可见光范围内，这一系列波长的取值如下表。

ψ（度）	720	900	1080	1260	1440	1620
λ（Å）	7570	6790	6280	5830	5461	5140
ψ（度）	1800	1980	2160	2340	2520	2700
λ（Å）	4900	4660	4480	4360	4210	4150

（3）在可见光范围内被丢失的波长中，$\lambda_m=4150\text{Å}$ 时，偏振面的旋转角最大，其值为 $\psi_M=2700^\circ$；$\lambda_M=6790\text{Å}$ 时，偏振面的旋转角最小，其值为 $\psi_m=900^\circ$。有意思的是

$$\frac{\psi_M}{\psi_m}\approx\frac{\lambda^2{}_M}{\lambda^2{}_m}$$

换句话说，旋光色散效应几乎与波长平方成反比。这是一定范围内近似成立的经验公式。

4．一块表面垂直于光轴的水晶片恰好抵消10cm长浓度为20%的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转。对此波长水晶的旋光率 $\alpha=21.75^\circ/\text{mm}$，麦芽糖的旋光比率 $[\alpha]=144^\circ/\text{dm}\cdot(\text{g}/\text{cm}^3)$，求此水晶片的厚度。

解 在麦芽糖溶液中偏振面的旋转角为

$$\psi_1=[\alpha]Nl$$

按题意此旋转角等于水晶片中所引起的旋转角

$$\psi_2=\alpha d$$

由以上二式得此水晶片厚度应为

$$d=\frac{[\alpha]Nl}{\alpha}=\frac{144\times0.20\times10\times10^{-1}}{21.75}=1.32\text{mm}$$

5 15cm长的左旋葡萄糖溶液使钠光的偏振面转了25.6°，已知 $[\alpha]=-51.4^\circ/\text{dm}\cdot(\text{g}/\text{cm}^3)$，求溶液浓度。

解 溶液浓度为

$$N=\frac{\psi}{[\alpha]l}=\frac{-25.6}{-51.4\times15\times10^{-1}}=0.332\ \text{g}/\text{cm}^3$$

6．将14.50 g的蔗糖溶于水，得到60cm³的溶液。在15cm的量糖汁中测得钠光偏振面旋转角为向右16.8°，已知 $[\alpha]=66.5^\circ/\text{dm}\cdot(\text{g}/\text{cm}^3)$。这蔗糖样品中有多少比例的非旋光性杂质?

解 蔗糖溶于水后的“粗”浓度为

$$N'=\frac{14.50}{60}=0.242\ \text{g}/\text{cm}^3$$

由量糖计中测得的蔗糖的“净”浓度为

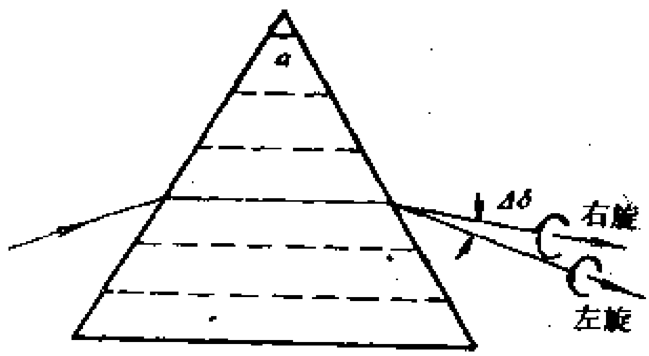
$$N=\frac{\psi}{[\alpha]\,l}=\frac{16.8}{66.5\times15\times10^{-1}}=0.168\ \mathrm{g/cm^3}$$

故此蔗糖含非旋光性杂质的比例为

$$\frac{N'-N}{N'}=\frac{0.242-0.168}{0.242}=31\%$$

7. 钠光以最小偏向角条件射入顶角为$60°$的石英晶体棱镜，棱镜中光轴与底平行。求出射的左、右旋偏振光之间的夹角。

解 如图，所谓以“最小偏向角入射”意即选取合适的入射角，使光线经第一折射面后平行棱镜的底边。本题棱镜底边平行光轴，故光线在水晶棱镜内部沿光轴传播，它将被分解为左旋光和右旋光，折射率分别为n_L和n_R，它们经第二折射面后就有不同的偏向角δ_L和δ_R。考虑到在第二个折射面R光和L光的入射角近似于$(90°-60°)=30°$，应用折射定律有



题 7 图　　右旋石英 $n_R<n_L$

$$n_R\sin30°=\sin i_R$$

$$n_L\sin30°=\sin i_L$$

得

$$\sin i_L-\sin i_R=\frac{1}{2}(n_L-n_R)$$

$$2\sin\left(\frac{i_L-i_R}{2}\right)\cos\left(\frac{i_L+i_R}{2}\right)=\frac{1}{2}\Delta n$$

其中

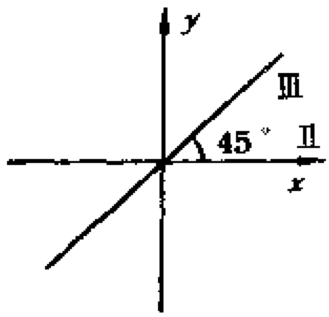
$$\sin\left(\frac{i_L-i_R}{2}\right)\approx\frac{1}{2}(i_L-i_R)=\frac{1}{2}\Delta\delta$$

$$\cos\left(\frac{i_L+i_R}{2}\right)\approx\cos i=\sqrt{1-\sin^2 i}$$
$$=\sqrt{1-(n_o\sin 30^\circ)^2}$$
$$=\sqrt{1-(1.544\times 0.5)^2}\approx 0.6356$$

Δn 取题 1 结果，即$\Delta n\approx 7.121\times 10^{-5}$，最后得到出射的两束左右旋圆偏振光传播方向之间的夹角为

$$\Delta\delta\approx\frac{\Delta n}{2\cos i}\approx 5.6\times 10^{-5}\text{rad}\approx 12''$$

* **8.** 有四个滤光器件：Ⅰ是各向同性的滤光片，使各种偏振态的光强都滤掉一半；Ⅱ和Ⅲ都是线起偏器，透光方向分别为水平方向（x轴）和$+45^\circ$（见附图），Ⅳ是圆起偏器，它让右旋圆偏振光全部通过，把左旋圆偏振光全部吸收掉。把各滤光器件分别放在要研究的光路中，测量透射出来的光强。设入射光强为I_0，透过Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ的光强分别为I_1，I_2，I_3，I_4，斯托克斯引入下列四个参量来描述电磁波的偏振状态



题 8 图

$$S_0=2I_1$$
$$S_1=2(I_2-I_1)$$
$$S_2=2(I_3-I_1)$$
$$S_3=2(I_4-I_1)$$

这便是斯托克斯参量的操作定义（Stokes，1852年）。人们还常常把这些参量归一化，即用I_0除各参量，把得到的四个参数S_0/I_0，S_1/I_0，S_2/I_0，S_3/I_0写成一组，用来描写入射光的偏振状态。例如对于自然光，$I_1=I_2=I_3=I_4=I_0/2$，故描述它的归一化斯

托克斯参量为（1,0,0,0）。写出下列偏振态的斯托克斯参量：
（1）水平（x 方向）线偏振，（2）垂直（y 方向）线偏振，
（3）$+45°$ 线偏振，（4）$-45°$ 线偏振，（5）右旋圆偏振，
（6）左旋圆偏振，（7）部分偏振，极大在 x 方向，偏振度50%，
（8）部分偏振，极大在 y 方向，偏振度50%。

解　（1）对于水平（x 方向）线偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_2 = I_0 \\ I_3 = I_0\cos^2 45° = \frac{1}{2}I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2}I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = 2I_1 = I_0 \\ S_1 = 2(I_2 - I_1) = I_0 \\ S_2 = 2(I_3 - I_1) = 0 \\ S_3 = 2(I_4 - I_1) = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1,1,0,0）。

（2）对于垂直（y 方向）线偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_2 = 0 \\ I_3 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2}I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = -I_0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1,－1,0,0）。

（3）对于$+45°$ 方向线偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_3 = I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2}I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = I_0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1,0,1,0）。

（4）对于 - 45° 方向线偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} \\ I_4 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0' = I_0 \\ S_1' = 0 \\ S_2' = -I_0 \\ S_3' = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1,0,－1,0）。

（5）对于右旋圆偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0' = I_0 \\ S_1' = 0 \\ S_2' = 0 \\ S_3' = I_0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1,0,0,1）。

（6）对于左旋圆偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0' = I_0 \\ S_1' = 0 \\ S_2' = 0 \\ S_3' = -I_0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1,0,0,－1）。

（7）对于 $I_M = I_x$，$P = 50\%$的部分偏振光，由

$$P = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = 0.5$$

$$I_x + I_y = I_0$$

得两垂直分量的强度分别为

$$I_x = \frac{3}{4}I_0, \quad I_y = \frac{1}{4}I_0$$

故有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_2 = \frac{3}{4}I_0 \\ I_3 = I_x\cos^2 45° + I_y\cos^2 45° = \frac{1}{2}I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2}I_x + \frac{1}{2}I_y = \frac{1}{2}I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = \frac{1}{2}I_0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1、$\frac{1}{2}$ 0、0）。

（8）对于 $I_M = I_0$，$P = 50\%$的部分偏振光，与（7）同理可得

$$I_x = \frac{1}{4}I_0 \quad I_y = \frac{3}{4}I_0$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2}I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2}I_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = -\frac{1}{2}I_0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为（1，$-\frac{1}{2}$，0，0，）。

第八章 光的吸收、色散和散射

§1 光的吸收

1． 有一媒质，吸收系数 $\alpha = 0.32\text{cm}^{-1}$，当透射光强分别为入射光强的10%，20%，50%及80%时，媒质的厚度各为多少？注意，这里的入射光强与透射光强都已经考虑到媒质表面的反射，而成为体内两侧的光强。

解 由介质吸收的线性规律（布格尔定律）

$$I = I_0 e^{-\alpha l}$$

得

$$l = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{I}{I_0}$$

式中 l 为媒质的厚度。据此算出

当 $I/I_0 = 10\%$ 时，$l = -\frac{1}{0.32}\ln 0.10 = 7.2\text{cm}$

当 $I/I_0 = 20\%$ 时，$l = 5.0\text{cm}$

当 $I/I_0 = 50\%$ 时，$l = 2.2\text{cm}$

当 $I/I_0 = 80\%$ 时，$l = 0.70\text{cm}$

2． 一玻璃管长3.50m，内贮标准大气压下的某种气体。若这种气体在此条件下的吸收系数为0.1650m^{-1}，求透射光强的百分比。

解 由布格尔定律得透射光强与入射光强的百分比为

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha l} = \exp\left[-(0.1650\times 3.50)\right]$$

$$= 56.1\%$$

§ 2 色 散

·1. 一块光学玻璃对水银灯蓝、绿谱线4358 Å 和5461 Å 的折射率分别为1.65250和1.62450，用此数据定出科希公式中的A、B两常数，并用它计算此光学玻璃对钠黄线5893 Å 的折射率及色散率$dn/d\lambda$。

解 将蓝、绿谱线的波长和折射率的数据分别代入科希公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

得联立方程

$$\begin{cases} 1.65250 = A + \dfrac{B}{(4358)^2} \\ 1.62450 = A + \dfrac{B}{(5461)^2} \end{cases}$$

解方程得

$$B = 1.464 \times 10^6 \quad (\text{Å}^2)$$

$$A = 1.575$$

再将以上A，B值代入科希公式，得该光学玻璃对钠黄线5893 Å 的折射率为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.575 + \frac{1.464}{(5893)^2} \times 10^6$$

$$= 1.617$$

色散率为

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2B\frac{1}{\lambda^3} = (-2) \times 1.464 \times 10^6 \times \frac{1}{(5893)^3}$$

$$= -1.431 \times 10^{-5} / \text{Å}$$

·2. 冕玻璃K9折射率随波长变化的实验数据如附表所示。利用表内F，D，C三条谱线的折射率数据定出科希公式中

的 A、B、C 三个常数，用它计算表中给出的其它波长下折射率数据，并与表中实测数据比较。

附表　冕玻璃 K9 的色散

谱线代号	-	h	g′	F	e
光　色 波长（Å） 折射率 n	（紫外） 3650 1.53582	蓝 4047 1.52982	青 4358 1.52626	青绿 4861 1.52195	绿 5461 1.51829
谱线代号	D	C	A′	——	-
光　色 波长（Å） 折射率 n	黄 5893 1.51630	橙红 6563 1.51389	红 7665 1.51104	（红外） 8630 1.50918	（红外） 9508 1.50778

解　把冕玻璃K 9 对 F、D、C 三条谱线的折射率数据分别代入科希公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

得联立方程

$$\begin{cases} 1.52195 = A + \dfrac{B}{(4861)^2} + \dfrac{C}{(4861)^4} \\[2ex] 1.51630 = A + \dfrac{B}{(5893)^2} + \dfrac{C}{(5893)^4} \\[2ex] 1.51389 = A + \dfrac{B}{(6563)^2} + \dfrac{C}{(6563)^4} \end{cases}$$

用行列式法求解如下：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & (4861)^{-2} & (4861)^{-4} \\ 1 & (5893)^{-2} & (5893)^{-4} \\ 1 & (6563)^{-2} & (6563)^{-4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4.2320 \times 10^{-8} & 1.7910 \times 10^{-15} \\ 1 & 2.8796 \times 10^{-8} & 8.2919 \times 10^{-16} \\ 1 & 2.3216 \times 10^{-8} & 5.3900 \times 10^{-16} \end{vmatrix}$$

$$= 10^{-24}\begin{vmatrix} 1 & 4.2320 & 17.910 \\ 1 & 2.8796 & 8.2919 \\ 1 & 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix}$$

$$= 10^{-24}\left(\begin{vmatrix} 2.8796 & 8.2919 \\ 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4.2320 & 17.910 \\ 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4.2320 & 17.910 \\ 2.8796 & 8.2919 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 10^{-24}\ (-3.7294 + 18.769 - 16.482)$$

$$= -1.4424 \times 10^{-24}$$

$$\triangle_A = 10^{-24}\begin{vmatrix} 1.52195 & 4.2320 & 17.910 \\ 1.51630 & 2.8796 & 8.2919 \\ 1.51389 & 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix}$$

$$= -2.169 \times 10^{-24}$$

$$\triangle_B = 10^{-16}\begin{vmatrix} 1 & 1.52195 & 17.910 \\ 1 & 1.51630 & 8.2919 \\ 1 & 1.51389 & 5.3900 \end{vmatrix}$$

$$= -6.4 \times 10^{-19}$$

$$\triangle_C = 10^{-8}\begin{vmatrix} 1 & 4.2320 & 1.52195 \\ 1 & 2.8796 & 1.51630 \\ 1 & 2.3216 & 1.51389 \end{vmatrix}$$

$$= 2.0 \times 10^{-12}$$

由此算出

$$A = \frac{\triangle_A}{\triangle} = 1.504$$

$$B = \frac{\triangle_B}{\triangle} = 4.437 \times 10^{5} \quad (\text{Å}^2)$$

$$C = \frac{\triangle_C}{\triangle} = -1.387 \times 10^{12} \quad (\text{Å}^4)$$

再由以上 A，B，C 值计算出冕玻璃对其它谱线的折射率为

紫外（3650Å）

$$n=1.501+\frac{4.437\times10^{5}}{(3650)^{2}}-\frac{1.387\times10^{12}}{(3650)^{4}}$$

$$=1.501+3.3305\times10^{-2}-7.8146\times10^{-3}$$

$$=1.529$$

h线（4047Å） $n=1.526$

g线（4358Å） $n=1.523$

e线（5461Å） $n=1.517$

A'线（7665Å） $n=1.511$

红外（8630Å） $n=1.510$

红外（9508Å） $n=1.509$

上列谱线折射率的计算数值和附表中给出的实测数据，都表明折射率 n 随波长 λ 的增加而下降（正常色散）。但在可见光波段，计算值比实验值偏小。

*3. 一棱镜顶角 $\alpha=50°$，设它的玻璃材料色散性质可用二常数科希公式来描写，二常数分别为 $A=1.53974$，$B=4.6528\times10^{5}$ Å^{2}，求此棱镜对波长5500Å光波调到最小偏向角时的色散本领。

解 工作于最小偏向角条件下的棱镜的角色散本领为

$$D_{\theta}=\frac{d\delta_{m}}{d\lambda}=\frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^{2}\sin^{2}(\alpha/2)}}\frac{dn}{d\lambda}$$

由科希公式 $n=A+\frac{B}{\lambda^{2}}$，我们可算出该棱镜材料对波长5500Å光波的折射率和色散率分别为

$$n=1.53974+\frac{4.6528\times10^{5}}{(5500)^{2}}\approx1.55512$$

$$\frac{dn}{d\lambda}=-2\frac{B}{\lambda^{3}}\approx-5.593\times10^{-6}/\text{Å}$$

将上述数值及a值代入角色散本领公式得

$$D_\theta \approx 6.2723\times 10^{-6}\ \mathrm{rad}/\mathring{A}$$

$$\approx 1.29''/\mathring{A}$$

证明吸收峰的高度反比于γ，半值宽度$\Delta\lambda$正比于γ。

证 物质的吸收值可由$2n^2\kappa$一量描述，其中κ称为衰减指数，它与（宏观）吸收系数有正比关系。根据经典色散理论导出$2n^2\kappa$具有以下函数形式

$$2n^2\kappa = a\frac{\gamma\lambda_0^4\lambda^3}{b(\lambda^2-\lambda_0^2)^2+\gamma^2\lambda_0^4\lambda^2}$$

在阻尼常数如γ很小条件下，其极值（即吸收峰位置）发生在$\lambda\approx\lambda_0$处，即发生在外来光波长λ与物质本征谱线λ_0相近的情况。此时，吸收峰高度值为

$$(2n^2\kappa)_M \approx \frac{a\lambda_0}{\gamma}\propto\frac{1}{\gamma}$$

为求吸收峰的半值宽度，令$\lambda=\lambda_0\pm\Delta\lambda/2$，且满足下式

$$a\frac{\gamma\lambda_0^4\left(\lambda_0\pm\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^3}{b\left[\left(\lambda_0\pm\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2-\lambda_0^2\right]^2+\gamma^2\lambda_0^4\left(\lambda_0\pm\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{a\lambda_0}{\gamma}$$

在展开式中忽略高阶小量$(\Delta\lambda)^3$、$(\Delta\lambda)^4$，得方程

$$2\gamma^2\lambda_0^4+\gamma^2\lambda_0^3\Delta\lambda+\frac{3}{2}\gamma^2\lambda_0^2(\Delta\lambda)^2$$

$$=\left(b+\frac{1}{4}\gamma^2\lambda_0^2\right)(\Delta\lambda)^2\cdot\gamma^2\lambda_0^3\Delta\lambda+\gamma^2\lambda_0^4$$

经整理，最后解出吸收峰的半值宽度为

$$\Delta\lambda = \frac{2}{\sqrt{b}}\,\frac{\gamma\lambda_0^2}{\sqrt{\frac{b}{4}-\gamma^2\lambda_0^2}} \approx \frac{\gamma\lambda_0^2}{\sqrt{b}} \propto \gamma$$

*4．一块玻璃对波长为0.70 Å的X射线的折射率比1小1.600×10^{-6}，求X射线能在此玻璃外表面发生全反射的最大掠射角。

解 X射线在玻璃外表面发生全反射时的临界角i_c对应最大的掠射角$\alpha_m = 90°-i_c$，而临界角应满足

$$\sin i_c = n = 1-1.600\times10^{-6}$$

故得

$$i_c = 89.8975°$$

$$\alpha_m = 6.150'$$

*5．估计一下铜的等离子体振荡圆频率ω_p的数量级。

解 根据经典色散理论，等离子体振荡圆频率值为

$$\omega_p = \sqrt{NZe^2/(\varepsilon_0 m)}\,,$$

其意义在于：当入射光频ω如此之高，以至远大于某媒质的所有共振频率时，该媒质的折射率将小于1，由

$$n^2 = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

给出。查算出铜原子的质量为

$$M = \frac{\text{铜的原子量}}{\text{阿伏伽德罗常数}} = \frac{63.54\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}}$$

$$\approx 1.055\times10^{-25}\ \text{kg}$$

原子数密度为

$$N = \frac{\text{铜的密度}}{M} = \frac{8940}{1.055\times10^{-25}}$$

$$\approx 8.474\times10^{28}\ /\text{m}^3$$

真空介电常数为

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{库仑}^2/\text{牛顿}\cdot\text{米}^2$$

电子质量为

$$m = 9.200 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

电子电荷为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{库仑}$$

在经典色散理论中，等离子体振荡频率公式中的 Z 值取多少较为合理？铜的原子序数为29，即原子核外围共有29个电子分几个壳层分布，其中内层电子被原子核紧密束缚，同原子核一起组成原子实（正离子）；外层电子被束缚得较弱，在比紫外光频高得多的外来光作用下，这些电子的状态与最外层的那一个称之谓价电子（或自由电子）的状态相似，它们都成为自由电子。因此，取 $Z \geqslant 1$ 是合理的，究竟取多少在这里不便说得太死，本来经典色散理论就是一种唯象理论，Z 的确切数值也许要由别的理论途径和实验手段来断定。暂且取 $Z = 3$，以示此意，在数量级上是没有问题的。最后算出铜的等离子体振荡的圆频率（量级）为

$$\omega_p \approx 3 \times 10^{16}\ \text{Hz}$$

它比紫外光频 $\omega_0 \approx 10^{15}$ Hz 高一个量级以上。

§3　群　速

*1．　求冕玻璃K9对D双线的群速。

解　小色散时群速 v_g 与相速 v_p 的关系为

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$$

式中波长 λ 皆指介质波长，鉴于式中要用到材料色散率 $dn/d\lambda$，而科希色散公式中的 λ 是指真空波长 λ_0，因此用科希公式求出色散率 $dn/d\lambda_0$ 后还需换算成 $dn/d\lambda$。这就要导出 $dn/d\lambda$ 与 $dn/d\lambda_0$ 的关系，推导如下：

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda_0} \cdot \frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda_0} \cdot \frac{d(n\lambda)}{d\lambda}$$

$$= \frac{dn}{d\lambda_0}\left(n + \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)$$

$$\approx n \frac{dn}{d\lambda_0}$$

这样，v_g 公式就可以改写成

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1 + \lambda \frac{dn}{d\lambda_0}\right) = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0}\right)$$

上式中折射率 n 取双线平均折射率 $\bar{n} = 1.51630$；D线在真空中的光波长 λ_0 取双线平均波长 $\bar{\lambda} = 5893$ Å；剩下的问题就是计算该材料的色散率 $dn/d\lambda_0$。按科希公式 $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} + \frac{C}{\lambda_0^4}$ 求得

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = -2\frac{B}{\lambda_0^3} - 4\frac{C}{\lambda_0^5} \qquad (b)$$

系数 B、C 数值由 § 2 题 2 给出

$$B = 4.437 \times 10^5 \text{ Å}^2$$

$$C = -1.387 \times 10^{12} \text{ Å}^4$$

将 B、C 值代入式(b)算出

$$\frac{dn}{d\lambda_0} \approx -4.336 \times 10^{-6} \text{ Å}^{-1} + 7.806 \times 10^{-7} \text{ Å}^{-1}$$

$$\approx -3.555 \times 10^{-6} / \text{Å}$$

再代入改写后的 v_g 公式算出群速

$$v_g = \frac{3 \times 10^8}{1.5163}\left(1 - \frac{5893}{1.5163} \times 3.555 \times 10^{-6}\right) \text{m/s}$$

$$\approx 1.979 \times 10^8 \ (1 - 0.0138) \text{ m/s}$$

$$\approx 1.952 \times 10^8 \text{ m/s}$$

并可算得

$$\frac{v_p - v_g}{v_p} \approx \frac{1.979 - 1.952}{1.979} = 1.4\%$$

2. 试计算下列各情况下的群速:

(1) $v_p=v_0$（常数）（无色散媒质，如空气中的声波）；

(2) $v_p=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}$，（水面波，$g$ 为重力加速度，T 为表面张力，ρ 为液体的密度）；

(3) $n=A+\frac{B}{\lambda^2}$（正常色散媒质中光波的科希公式）；

(4) $\omega^2=\omega_c^2+c^2k^2$（波导中的电磁波，$\omega_c$ 为截止圆频率）。

解　(1) 对无色散媒质来说

$$\frac{dv_p}{d\lambda}=0$$

则群速与相速相等

$$v_g=v_p=v_0$$

(2) 对于水面波

$$\frac{dv_p}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}}\left(\frac{g}{2\pi}-\frac{2\pi T}{\lambda^2\rho}\right)$$

所以群速为

$$v_g=v_p-\lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}}\left(\frac{\lambda g}{2\pi}-\frac{2\pi T}{\lambda\rho}\right)$$

$$=\frac{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+3\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2\rho}\right)}}$$

（3）由科希公式得

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = -\frac{2B}{\lambda_0^3}$$

式中λ_0为真空中光波长。由本节题1式（a），有

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx n\frac{dn}{d\lambda_0}$$

所以正常色散媒质中群速为

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) \approx \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\frac{dn}{d\lambda_0}\right)$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 - \frac{2B}{n\lambda_0^2}\right) = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{2B}{n^3\lambda^2}\right)$$

式中$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$，$c$为真空中光速，$\lambda$为媒质中波长。可见正常色散媒质中群速小于相速。

（4）波导中的电磁波群速为

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\omega_c^2 + c^2k^2)$$

$$\cdot 2ck$$

本题在求上列四种情况下的群速时，对于不同的色散关系$v_p = v_p(\lambda)$，$n = n(\lambda)$，$\omega = \omega(k)$分别采用了三个不同形式的群速公式。这三个群速公式都是瑞利的群速公式的不同表示。

§ 4　光的散射

1． 摄影者知道用橙黄色滤色镜拍摄天空时，可增加蓝天和白云的对比。设照相机镜头和底片的灵敏度将光谱范围限制在3900到6200 Å之间，并设太阳光谱在此范围内可以看成是常数。若滤色镜把波长在5000 Å以下的光全部吸收，天空的散射光被它去掉了百分之几？

解　橙黄色波长约为6000 Å．橙黄色滤光镜对于长波(6000)Å

以上）的透过率较大，而对于短波（6000 Å 以下）的吸收率较大。白光经此滤色镜后，长波成分就显著增加，而短波成分将大大削减，于是蓝天（背景）在底片上的照度很低，白云在照相底片上的照度相对较高，综合结果势必增加底片上蓝天与白云的反差。为估算数量级，设滤色镜的滤光性能如题意，3900到6200 Å 之间的散射光强为 I_0，3900到5500 Å 的散射光强为 I'，则滤色镜吸收光强的百分比为

$$\frac{I'}{I_0}=\frac{5500-3900}{6200-3900}=70\%$$

*2. 苯（C_6H_6）的喇曼散射中较强的谱线与入射光的波数差为607，992，1178，1586，3047，3062 cm^{-1}。今以氩离子激光（$\lambda=4880$ Å）入射，计算各斯托克斯和反斯托克斯谱线的波长.

解 已知入射波光长为 $\lambda_0=4880$ Å，则其波数为

$$\frac{1}{\lambda_0}=\frac{1}{4880\times10^{-8}}=20491.8\mathrm{cm}^{-1}$$

又已知喇曼散射与入射光的波数差 $\frac{1}{\lambda_j}$ 为

$$\frac{1}{\lambda_1}=607\mathrm{cm}^{-1}\qquad\frac{1}{\lambda_2}=992\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_3}=1178\mathrm{cm}^{-1}\qquad\frac{1}{\lambda_4}=1586\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_5}=3047\mathrm{cm}^{-1}\qquad\frac{1}{\lambda_6}=3062\mathrm{cm}^{-1}$$

斯托克斯谱线（长波线）的波数 $1/\lambda_i'=(1/\lambda_0)-(1/\lambda_j)$，代入数据得

$$\frac{1}{\lambda_1'}=19884.8\mathrm{cm}^{-1}\qquad\frac{1}{\lambda_2'}=19499.8\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_3'} = 19313.8\text{cm}^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda_4'} = 18905.8\text{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_5'} = 17444.8\text{cm}^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda_6'} = 17429.8\text{cm}^{-1}$$

反斯托克斯谱线（短波线）的波数 $1/\lambda_i'' = (1/\lambda_0) + (1/\lambda_i)$

代入数据得

$$\frac{1}{\lambda_1''} = 21098.8\text{cm}^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda_2''} = 21483.8\text{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_3''} = 21669.8\text{cm}^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda_4''} = 22077.8\text{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_5''} = 23538.8\text{cm}^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda_6''} = 23553.8\text{cm}^{-1}$$

因此各斯托克斯谱线的波长 λ_i' 分别为

$$\lambda_1' = 5029.0\ \text{Å} \qquad \lambda_2' = 5128.3\ \text{Å}$$

$$\lambda_3' = 5177.6\ \text{Å} \qquad \lambda_4' = 5289.4\ \text{Å}$$

$$\lambda_5' = 5732.4\ \text{Å} \qquad \lambda_6' = 5737.3\ \text{Å}$$

各反斯托克斯谱线的波长 λ_i'' 分别为

$$\lambda_1'' = 4739.6\ \text{Å} \qquad \lambda_2'' = 4654.7\ \text{Å}$$

$$\lambda_3'' = 4614.7\ \text{Å} \qquad \lambda_4'' = 4529.4\ \text{Å}$$

$$\lambda_5'' = 4248.3\ \text{Å} \qquad \lambda_6'' = 4245.6\ \text{Å}$$

第九章　光的量子性

§1　热辐射

*1. 一空腔辐射器的内外器壁一样，在某温度T时材料（单次）辐射亮度为$b(\nu,T)$，吸收本领为$a(\nu,T)$。设器壁是理想的漫射体（即朗伯体）。证明：

(1) 由于多次反射，腔内任何面元上的辐射照度$e_0(\nu,T)$和辐照亮度$b_0(\nu,T)$分别为

$$\begin{cases} e_0(\nu,T)=\dfrac{\pi b(\nu,T)}{a(\nu,T)} \\ b_0(\nu,T)=\dfrac{b(\nu,T)}{a(\nu,T)} \end{cases}$$

(2) 小孔处辐射场的亮度也为上式所决定的$b_0(\gamma,T)$，它比外器壁的亮度$b(\nu,T)$大$1/a(\nu,T)$倍。

[提示：首先证明，不管空腔形状如何，内器壁接收第n次反射光的照度$e_n(\nu,T)$与第n、$n+1$次反射光的亮度$b_n(\gamma,T)$、$b_{n+1}(\nu,T)$有如下关系（可参考第一章§11习题3的作法）：

$$e_n(\nu,T)=\pi b_n(\nu,T),$$

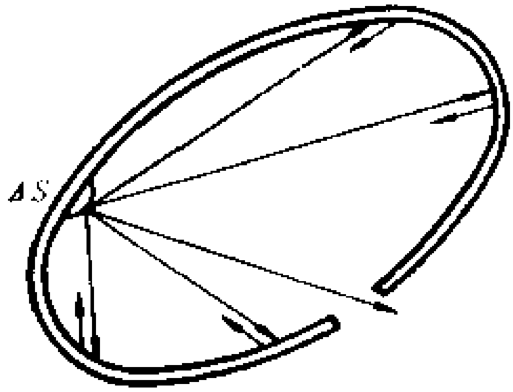
$$b_{n+1}(\nu,T)=\frac{e_n(\nu,T)}{\pi}[1-a(\nu,T)]$$

而

$$e_0(\nu,T)=\sum_n e_n(\nu,T),\quad b_0(\nu,T)=\sum_n b_n(\nu,T)\text{。]}$$

证　处理这类问题首先从概念上要明确两点。其一，辐射亮度$b(\nu,T)$和吸收本领$a(\gamma,T)$是反映物质（材料）辐射的

内在特性，它们与环境没有关系，而辐射照度 $e_n(\nu, T)$ 和辐照亮度（反射光亮度）$b_n(\nu, T)$ 是反映器件辐射的表观特性，它们与环境是有关系的。其二，处在空腔辐射器壁上的任一面元，具有双重性，一方面它是辐射源，向其它面元辐射能量；另一方面，它又接收来自其它面元的辐照（如图），这种相互作用过程是彼此交织无数次往返，以至整个空腔形成一个热平衡辐射器。



题1图

（1）考察任一面元 ΔS，设其中第 n 次（所有面元）的亮度为 b_n，由光度学中的互易关系知道，来自其它面元而落在该面元上的辐射照度为

$$e_n = \pi b_n \qquad (a)$$

经吸收后，其面辐射度（即辐射本领）就成为 $e_n(1-a)$，它决定了下一次该面元的辐射亮度为

$$b_{n+1} = \frac{e_n(1-a)}{\pi}$$

由以上两式得

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (1-a) \qquad (b)$$

可见多次反射的辐照亮度 b_1、b_2、…构成了一个等比级数，其和便是空腔辐射器壁上任一面元的亮度

$$b_0 = \sum_n b_n = b_1 \frac{1}{1-(1-a)} = \frac{b_1}{a}$$

若初始亮度 b_1 取为材料（本底）的辐射亮度 b，则

$$b_0 = \frac{b}{a}$$

多次反射而来的辐照度 e_1，e_2，…也构成一个等比级数，其和便是空腔辐射器壁上任一面元的辐照度

$$e_0 = \sum_n e_n = \pi \sum b_n = \pi b_0$$
$$= \frac{\pi b}{a}$$

（2）小孔面元被腔壁其它所有亮度为b_0的面元辐照，照度为πb_0，因小孔並无吸收，且对外辐射特性仍为朗伯体。故其亮度为

$$b_0' = \frac{\text{辐射本领}}{\pi} = \frac{\text{辐照度}}{\pi} = \frac{\pi b_0}{\pi}$$
$$= b_0$$

它与外器壁（材料）的辐射亮度之比为

$$\frac{b_0'}{b} = \frac{b_0}{b} = \frac{1}{a}$$

可见，器壁吸收系数越小（白体），则比值越大。如果器壁材料本身就是绝对黑体，$a=1$，则$b_0'=b$，这说明在器壁面元之间完全没有反射（辐照）的条件下，小孔对外的辐射亮度並不等于零，而等于材料的辐射亮度。这也补充说明了，以上对b_0，b_0'的计算公式中已经包含了材料的辐射亮度b，还加上了来自周围的辐照引起的亮度（反射亮度），因此统称b_0或b_0'为“亮度”也许更妥当一些，或者称b_0或b_0'为器件的辐射亮度，以区别于材料的辐射亮度。器件的辐射亮度由材料的辐射亮度和环境的辐照亮度两部分组成。

*2. 太阳常数（太阳在单位时间内垂直照射在地球表面单位面积上的能量）为1.94 cal /cm^2 · min，日地距离约为1.50×10^8 km，太阳直径约为1.39×10^6km，用这些数据来估算一下太阳的温度。

解一 本题最简单的处理就是根据太阳光的球对称性，由地

面照度e算出太阳光球的总辐射通量（总辐射功率）Ψ，再除以太阳光球的总面积S得太阳的面辐射度（辐射本领）R，最后由黑体辐射的斯特藩—玻耳兹曼定律估算太阳温度（辐射温度）T。具体计算如下：设日地距离为r_1，太阳光球半径为r_2，则

$$\Psi = 4\pi r_1^2 e$$

$$R = \frac{\Psi}{S} = \frac{4\pi r_1^2 e}{4\pi r_2^2} = e\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{e}{\sigma}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

取　　$e = 1.94\,\mathrm{cal/(cm^2\cdot min)} = 1352\,\mathrm{W/m^2}$，

$\sigma = 5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\cdot K^4)}$

$r_1 = 1.50\times10^{8}\,\mathrm{km}$，　$r_2 = 6.95\times10^{5}\,\mathrm{km}$

代入上式算得

$$T \approx 5773\,\mathrm{K}$$

实际上太阳并非绝对黑体，因此其表面实际温度比5773K要高，才能有与黑体同样大的辐射本领。

解二　设太阳的辐射亮度为b，把太阳看成余弦发射体，则

$$R = \pi b$$

b与地面照度e的关系为

$$e = \Omega b$$

式中Ω为太阳对被照地点所张立体角

$$\Omega = \frac{\pi r_2^2}{r_1^2}$$

故太阳的辐射本领为

$$R = e\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

由斯特藩—玻耳兹曼定律得太阳温度

$$T=\sqrt[4]{\frac{R}{\delta}}=\sqrt[4]{\frac{e}{\delta}}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 5773\,\mathrm{K}$$

3. 设空腔处于某温度时 $\lambda_M=6500\,\text{Å}$，如果腔壁的温度增加，以至总辐射本领加倍时，λ_M 变为多少？

解 设增加后的空腔温度为 T'，相应的总辐射本领为 R'，辐射峰值位置为 λ_M'，则由斯特藩-玻耳兹曼（四次方）定律得

$$\frac{R'}{R}=\left(\frac{T'}{T}\right)^4=2，$$

由维恩位移（反比）定律得

$$\frac{\lambda_M'}{\lambda_M}=\frac{T}{T'}，$$

于是

$$\lambda_M'=\left(\frac{T}{T'}\right)\lambda_M=\sqrt[4]{\frac{R}{R'}}\lambda_M，$$

$$=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\times 6500\,\text{Å}\approx 5466\,\text{Å}.$$

* **4.** 热核爆炸中火球的瞬时温度达 $10^7\,\mathrm{K}$，

（1）估算辐射最强的波长；

（2）这种波长的能量子 $h\nu$ 是多少？

解 （1）作黑体近似，按维恩位移（反比）定律，得火球辐射峰的波长为

$$\lambda_M=\frac{b}{T}=\frac{0.288}{10^7}\,\mathrm{cm}$$

$$=2.88\,\text{Å}$$

这属于X射线波段。

（2）其能量子值为

$$\varepsilon_0=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$$

$$=\frac{(6.626\times10^{-34})\times(3\times10^{8})}{2.88\times10^{-19}}J$$

$$\approx 69\times10^{-17}J=\frac{69\times10^{-17}}{1.6\times10^{-19}}eV$$

$\approx 4313\,eV$

*5\. 利用普朗克公式证明斯特藩—玻耳兹曼常数为

$$\sigma=(2\pi^5k^4)/(15c^2h^3)$$

[提示：$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15}$]

证 黑体的总辐射本领为

$$R=\int_0^{\infty}r_0(\nu,T)d\nu$$

$$=\frac{2\pi h}{c^2}\int_0^{\infty}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu$$

令$x=h\nu/kT$，改写上式为

$$R=\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx$$

$$=\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\frac{\pi^4}{15}$$

$$=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4$$

即

$$R=\sigma T^4$$

式中斯特藩—玻耳兹曼常数为

$$\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}\approx5.65\times10^{-12}\frac{W}{cm^2\cdot K^4}$$

*6\. 利用普朗克公式证明维恩常数为

$$b = 0.2014\,hc/k$$

［提示：$e^{-x} + x/5 = 1$ 的解为 $x = 4.965$］

证 为求辐射峰值位置 λ_M，我们将普朗克公式

$$r_0(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1}$$

对波长 λ 求导得

$$\frac{dr_0}{d\lambda} = -2\pi hc^2\frac{\left[5\lambda^4\left(e^{(hc)/(kT\lambda)} - 1\right) + \lambda^5 e^{(hc)/(kT\lambda)}\left(-\frac{hc}{kT}\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]}{\left[\lambda^5\left(e^{(hc)/(kT\lambda)} - 1\right)\right]^2}$$

令 $\frac{dr_0}{d\lambda} = 0$，得方程

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda}\right)\right] - \frac{1}{5}\frac{hc}{kT\lambda} = 0$$

令 $\frac{hc}{kT\lambda} = x$，解方程

$$e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$$

得

$$x_M = 4.965$$

即

$$\lambda_M T = \frac{hc}{kx_M} = 0.2014\frac{hc}{k}$$

写成

$$\lambda_M T = b$$

式中维恩常数

$$b = 0.2014\frac{hc}{k} \approx 0.290\text{cm}\cdot\text{K}$$

§ 2　光的粒子性和波粒二象性

1．从钠中取去一个电子所需的能量为2.3eV，试求从钠表面光电发射的截止波长为多少？钠是否会对$\lambda = 6800\text{Å}$的橙黄色光表现出光电效应？

解　由钠的电子脱出功A值给出钠发生光电效应的截止（红限）频率ν_0或红限波长λ_0为

$$\nu_0 = \frac{A}{h}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ch}{A}$$

$$= \frac{(3\times10^{10})\times(6.626\times10^{-34})}{2.3\times(1.602\times10^{-19})}\text{cm}$$

$$\approx 5.395\times10^{-5}\text{cm} = 5395\text{Å}$$

可见，钠对$\lambda = 6800\text{Å}$的光波不能表现出光电效应。

2．波长为2000Å的光照到铝表面，对铝来说，移去一个电子所需的能量为4.2eV，试问：

（1）出射的最快光电子的能量是多少？

（2）遏止电压为多少？

（3）铝的截止波长为多少？

（4）如果入射光强度为2.0W/m²，单位时间打到单位面积上的平均光子数为多少？

解　波长$\lambda = 2000\text{Å}$的光子能量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{(6.626\times10^{-34})\times(3\times10^{10})}{(2\times10^{-5})\times(1.602\times10^{-19})}\text{eV}$$

$$\approx 6.2\,\text{eV}$$

（1）出射的最快光电子的能量为

$$W_m = h\nu - A = 6.2 - 4.2$$
$$= 2.0\,\text{eV}$$

（2）遏止电压为2.0V

（3）铝的截止波长（红限）为

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{E}{A}\lambda$$

$$= \frac{6.2}{4.2} \times 2000\,\text{Å} \approx 2952\,\text{Å}$$

（4）光强I与光子流平均密度N的关系为

$$I = Nh\nu$$

故

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{2.0}{6.2 \times 1.6 \times 10^{-19}}\,(\text{m}^{2} \cdot \text{S})^{-1}$$

$$\approx 2.0 \times 10^{18}\ \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

*3. 某光电阴极对于$\lambda = 1910\,\text{Å}$的光，发射光电子的遏止电压为0.71V，当改变入射光波长时，其遏止电压变为1.43V，今问此对应的入射光波长为多少?

解　光电效应的遏止电压V_a与光电阴极的脱出功A以及入射光频ν（或波长λ）的关系为

$$eV_a = h\nu - A，或\quad eV_a = \frac{hc}{\lambda} - A \qquad (a)$$

对于另一入射光频ν'或（波长λ'），有

$$eV'_a = h\nu' - A，\quad 或\quad eV'_a = \frac{hc}{\lambda'} - A \qquad (b)$$

式(b)减去式(a)得

$$eV_0' - eV_0 = hc\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

解出

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{e(V_0' - V_0)}{hc} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times (1.43 - 0.71)}{(6.63 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{18})} + \frac{1}{4910}$$

$$\approx 0.2616 \times 10^{-3} (\text{Å})^{-1}$$

故 $\lambda' \approx 3823$ Å

即遏止电压增加到1.43V时，对应的入射光波长减小到3823 Å。

4． 有光照射到照相底板上，如果在板上分解出AgBr分子，则光被记录下来。分解一个AgBr分子所需的最小能量约为10^{-19}J，求截止波长（即大于该波长的光将不被记录）。

解 这里的光化作用（量子效应）的最小能量（能量阈值）A_0与光电效应中的脱出功意义相当，与其相应的入射光的截止波长λ_0由下式决定

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A_0$$

即

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_0} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{18})}{10^{-19}} \text{Å}$$

$$\approx 19878 \text{ Å}$$

5． 一个空腔辐射器处于6000K的温度，器壁上小圆孔的直径是0.10mm，计算每秒从此孔发出的波长在5500—5510 Å之间的光子数。

解 普朗克公式给出面元ΔS的黑体在λ—$\lambda + \Delta\lambda$波长间隔内的辐射通量为

$$\triangle\Psi = r_0(\lambda, T)\Delta S\Delta\lambda$$

$$= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\ \frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}\Delta S\Delta\lambda \quad (\mathrm{J/s})$$

相应的光子流量为

$$\Delta N = \frac{\Delta\psi}{h\nu} = \frac{2\pi c}{\lambda^4}\ \frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}\Delta S\Delta\lambda \quad (\mathrm{s}^{-1})$$

取

$$\lambda \approx 5505\,\mathrm{\mathring{A}}, \qquad \Delta\lambda = 5510 - 5500 = 10\,\mathrm{\mathring{A}}$$

$$\Delta S = \frac{\pi}{4}(0.10\mathrm{mm})^2 \approx 8\times 10^{11}\,\mathrm{\mathring{A}}^2$$

$$c = 3\times 10^{18}\,\mathrm{\mathring{A}/s}$$

$$\frac{hc}{kT\lambda} = \frac{(6.626\times 10^{-34})\times(3\times 10^{18})}{(1.38\times 10^{-23})\times 6000\times 5505} \approx 4.361$$

算出

$$\Delta N \approx 2.123\times 10^{15}/\mathrm{s}$$

6. 太阳光以1340 W/m^{2}的照度投射到垂直于入射线的地球表面上，假如入射光的平均波长为5500Å，求每秒每平方米上的光子数。

解 太阳光每秒投射到地球表面每平方米上的光子数为

$$\Delta N = \frac{\text{辐照度}}{h\nu} = \frac{1340}{(6.626\times 10^{-34})\times\left(\frac{3\times 10^{18}}{5500}\right)}(\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$$\approx 37\times 10^{20}(\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

7. 当正常人的眼睛接收5500Å的可见光时，每秒光子数达100个时就有光的感觉，问与此相当的功率是多少？

解　此时的光功率为

$$\Delta W = \Delta N \frac{hc}{\lambda}$$

$$= 100 \times \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{18})}{5500} W$$

$$\approx 3.6 \times 10^{-17} \text{ W}$$

*8.　单色电磁波的强度是 $Nh\nu$，其中 N 是每单位时间通过单位面积的光子数。问照在全反射镜面上的辐射压强是多少？

解　辐射压强（光压）是由光子流经反射镜后的动量改变而引起的。光子的能量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{a}$$

光子的动量为

$$mv = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \tag{b}$$

光强 I 与光子流密度 N 的关系为

$$I = Nh\nu \tag{c}$$

故动量流密度为

$$P = Nmv = N\frac{h\nu}{c} \tag{d}$$

由于镜面的全反射，动量流密度的改变量为

$$\Delta P = 2P = 2N\frac{h\nu}{c}$$

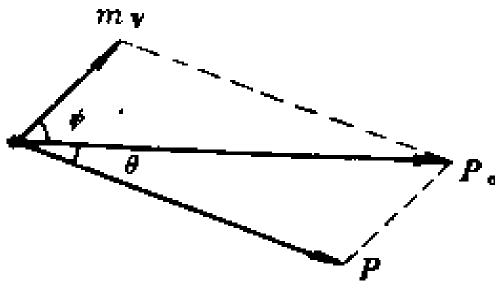
按动量定理，镜面的辐射压强为

$$f = \Delta P = 2N\frac{h\nu}{c}$$

即平均光压为

$$f = \frac{2I}{c}$$

*9． 试导出康普顿散射实验中电子的反冲角ψ与光子散射角θ的关系式。



题 9 图

解 如图，将动量守恒关系写成分量形式

$$mv\sin\psi - \frac{h}{\lambda}\sin\theta = 0$$

$$mv\cos\psi + \frac{h}{\lambda}\cos\theta = \frac{h}{\lambda_0}$$

两式相比得

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{\sin\theta}{(\lambda_0/\lambda) - \cos\theta}$$

式中分母

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - \cos\theta = \frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} - \cos\theta$$

$$= (1 - \cos\theta) + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$= 2\sin^2(\theta/2) + 2\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\sin^2(\theta/2)$$

代入上式，给出ψ与θ的关系为

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)\left[1 + (\lambda_c/\lambda_0)\right]}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda_0}\right)\mathrm{tg}(\theta/2)\right]^{-1}$$

式中λ_c为康普顿波长（常数），$\lambda_c = \dfrac{h}{mc} = 0.0241\ \text{Å}$

*10． 试证明，康普顿散射中反冲电子的动能K和入射光子的能量E之间的关系为

$$\frac{K}{E}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{2\lambda_c\sin^2(\theta/2)}{\lambda_0+2\lambda_c\sin^2(\theta/2)}$$

式中$\lambda_c=h/mc$为康普顿波长，θ角见上题图。

证 碰撞前后光子的动能分别为

$$E=h\nu_0=\frac{hc}{\lambda_0}$$

$$E'=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$$

根据动能守恒定理，反冲电子的动能应当为

$$K=E-E'$$

其与入射光子动能之比为

$$\frac{K}{E}=\frac{E-E'}{E}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0+\Delta\lambda}=\frac{2\lambda_c\sin^2(\theta/2)}{\lambda_0+2\lambda_c\sin^2(\theta/2)} \qquad (a)$$

当散射角$\theta=90°$时， $\Delta\lambda=\lambda_c$ (b)

则
$$\frac{K}{E}=\frac{\lambda_c}{\lambda_0+\lambda_c} \qquad (c)$$

11. 今有（1）波长为1.00Å的X射线束；（2）从铯$C_s{}^{137}$样品得到的波长为1.88×10^{-2}Å的γ射线束与自由电子碰撞，现从与入射方向成90°角的方向去观察散射线，问每种情况下：

（1）康普顿波长偏移是多少？

（2）入射光在碰撞时失去的能量占总能量的百分之几？

（3）给予反冲电子的动能为多少？

解 （1）按康普顿波长偏移公式

$$\Delta\lambda=2\lambda_c\sin^2(\theta/2)$$

可见，波长偏移量与入射光波长的长短是无关的（当然，不要误

认为频移量$\Delta\nu$与λ_0无关）。在散射角$\theta=90^\circ$时，有

$$\Delta\lambda=\lambda_c=0.0241\ \text{Å}$$

对X射线的散射是如此，对γ射线的散射也是如此。

（2）按题10给出的公式（c），入射光在碰撞时失去的动能（即反冲电子获得的成功）与原入射光子动能（即总能量）之比为

$$\frac{K}{E}=\frac{\lambda_c}{\lambda_0+\lambda_c}$$

当$\lambda_0=1.00\ \text{Å}$时，得

$$\frac{K}{E}=\frac{0.0241}{1.00+0.0241}\approx 2.35\%$$

当$\lambda_0=1.88\times10^{-2}\ \text{Å}$时，得

$$\frac{K}{E}=\frac{0.0241}{0.0188+0.0241}\approx 56\%$$

（3）当$\lambda_0=1.00\ \text{Å}$时，反冲电子获得的动能为

$$K=2.35\%\times E=2.35\%\times\frac{hc}{\lambda_0}$$

$$=2.35\%\times\frac{(6.626\times10^{-34})\times(3\times10^{18})}{1.00\times(1.60\times10^{-19})}\text{eV}$$

$$=292\ \text{eV}$$

当$\lambda_0=1.88\times10^{-2}\ \text{Å}$时，反冲电子获得的动能为

$$K=56\%\times\frac{hc}{\lambda_0}$$

$$=56\%\times\frac{(6.626\times10^{-34})\times(3\times10^{18})}{(1.88\times10^{-2})\times(1.6\times10^{-19})}\text{eV}$$

$$\approx 370\ \text{keV}$$

* **12.** 可以用可见光来做康普顿散射实验吗？为什么？

解 这个问题是由康普顿散射波长偏移公式$\Delta\lambda=2\lambda_c\sin^2(\theta/2)$引起的。$\Delta\lambda$量确实与入射光波长没有关系，不论长波入射或

短波入射，对固定散射角θ来说，偏移量$\Delta\lambda$是相同的。$\Delta\lambda$公式并不反映散射光的强度分布。在分析散射光的强度问题时，注意到以下两点是必要的。康普顿效应是光子与自由电子“碰撞”的量子效应，它毕竟不是纯力学中的两体碰撞，它是大量光子与大量自由电子相互作用的集体效应，作为一种近似处理，看成为光子—电子对的一次碰撞，其中每一对的碰撞具有随机性，有各种可能的散射角；不同散射角的强度分布$I(\theta,\lambda)$问题不可能从一对碰撞中求得解决，这涉及入射的光子流密度中有多少几率被散射到θ角方向。大体上说，只有光波长极短时，光才具有明显的粒子性。X射线的波长是Å的量级，这正是原子尺度的量级，这种短波射线具有极强的穿透力，有很大一部分进入靶体内部，而与体内由自电子发生有效的碰撞。而且，X射线光子能量约为10^3eV —10^4eV，而靶物质中电子束缚能约为10eV —10^2eV，前者远大于后者，致使靶物质在X射线照射下，释放出比原有多得多的自由电子，参与康普顿散射，因而大大加强了散射光强。如果长波（可见光）入射，由于金属表面的高反射和体内的强吸收，进入体内与电子碰撞的光子数几率是很小的。因此，寄托靶物质而用可见光来做康普顿散射实验，其效应是不明显的。

§ 3　玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论

*1．（1）不考虑电磁辐射，试证明氢原子中电子以半径r绕核作圆周运动时，经典理论给出的原子能量（动能＋静电位能）为（用MKSA单位制表示）

$$E=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

式中ε_0为真空介电常数，e为基本电荷。

（2）验证一下普朗克常数h具有角动量的量纲。

（3）设（1）中电子绕核的角动量为J，玻尔的"量子化条件"是J取如下分立值

$$J=nh/2\pi \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

证明此时电子轨道半径也取分立值

$$r=n^2a$$

式中$a=\varepsilon_0h^2/(\pi me^2)$，$m$为电子质量，$a$称为玻尔半径。并计算玻尔半径$a$的具体数值。

（4）证明氢原子能级E_n和里德伯常数R_H的表达式分别为

$$E_n=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2n^2h^2}$$

$$R_H=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2n^2c}$$

并计算里德伯常数R_H的具体数值。

（5）量子数$n\to\infty$意味着什么？

解　（1）氢原子中电子的库仑位能为

$$U(r)=\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0r} \qquad (a)$$

动能为

$$K(r)=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (b)$$

因电子绕核运动的向心力由库仑引力来提供，故

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r^2} \qquad (c)$$

或

$$mv^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r} \qquad (d)$$

$$K(r)=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \qquad (e)$$

所以经典电磁理论给出的氢原子的能量为

$$E(r)=K(r)+U(r)=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \qquad (f)$$

（2）普朗克常数h的单位是[焦耳·秒]=[牛顿·米·秒]=[千克·米^2·秒$^{-1}$]，而角动量为$J=r\times mv$，显然J的单位为[千克·米^2·秒$^{-1}$]。h与J量纲相同。

（3）粒子作圆周运动的角动量写成

$$J=mvr=r\sqrt{m^2v^2}$$

由（1）式（d）得

$$m^2v^2=\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

代入上式有

$$J=\sqrt{\frac{me^2 r}{4\pi\varepsilon_0}}$$

再按玻尔的量子化条件，令$J=nh/2\pi$，解出

$$r_n=n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}=n^2 a \qquad (g)$$

式中a称为“玻尔半径”，其值为

$$a=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}$$

$$=\frac{8.85\times10^{-12}\times(6.626\times10^{-34})^2}{3.1416\times(9.109\times10^{-31})\times(1.602\times10^{-19})^2}\ \mathrm{m}$$

$\approx 0.5291\ \text{Å}$

（4）引入角动量的玻尔“量子化条件”以后，引起一系列物理量的量子化，轨道半径量子化，能量取值量子化，……以式（g）给出的轨道半径r的取值代入式（f），得到能量取值（能

级）为

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$$

$$= -hcR_H\frac{1}{n^2}$$

式中R_H称为"里德伯常数"，其值为

$$R_H = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

$$= \frac{(9.109\times10^{-31})\times(1.602\times10^{-19})^4}{8\times(8.85\times10^{-12})^2\times(6.626\times10^{-34})^3\times3\times10^8}$$

$$\approx 1.09715\times10^7\ \mathrm{m}^{-1}$$

（5）当主量子数$n\to\infty$时，$r\to\infty$，$E\to0$，$\Delta E\to0$。其能量取值高于所有束缚态，能级间隔趋于零，能量连续取值，这意味着电子完全失去量子效应，过渡为经典的自由电子模型。

*2． 设一个两能级系统能级差（E_2-E_1）= 0.01 eV，问：

（1）分别求$T=10^2$K，10^3K、10^5K、10^8K时粒子数N_2与N_1之比；

（2）$N_2=N_1$的状态相当于多高的温度？

（3）粒子数发生反转时的状态相当于怎样的温度？

（4）我们姑且引入"负温度"的概念来描述粒子数反转的状态，你觉得$T=-10^8$K和$T=+10^8$K两个温度中哪一个更高？$T=-10^4$K和$T=-10^8$K两个温度中哪一个更高？

解 按粒子数的玻耳兹曼正则分布律，有

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{0.01}{kT}\right)$$

式中kT（eV）的量级以及相应的粒子数比值分别为

$T = 10^2\text{K}$，$kT = (8.616 \times 10^{-5}) \times 10^2\text{eV} = 8.616 \times 10^{-3}\text{eV}$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.31$$

$T = 10^3\text{K}$，$kT = 8.616 \times 10^{-2}\text{eV}$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.89$$

$T = 10^5\text{K}$，$kT = 8.616\text{eV}$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.9988$$

$T = 10^8\text{K}$，$kT = 8.616 \times 10^3\text{eV}$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.9999988$$

可见，正则分布的特点是，随着温度的急剧增加，粒子数比值缓慢上升而逼近1。

（2）当$T \to \infty$，$\exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) \to 1$，则

$$N_2 = N_1$$

（3）如果仍然用正则分布的语言来描述粒子数发生反转时的状态，只能说它是“负温度”状态。

（4）应该说，$T = -10^8\text{K}$比$T = +10^8\text{K}$的温度高，因为前者粒子数比值比后者高。同理，$T = -10^4\text{K}$要比$T = -10^8\text{K}$温度高。如果坚持用正则平衡分布的统计语言来描述粒子数反转这种非平衡态，势必在温度为绝对零度（正负）附近出现突变，即

当$T \to +0\text{K}$，$\qquad \frac{N_2}{N_1} \to 0$

当$T \to -0\text{K}$，$\qquad \frac{N_2}{N_1} \to +\infty$