09 级一期 A 卷参考解答

一.(每小题 6 分,共 12 分)求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2/x}\cdot\left(-2/x^2\right)}{-1/x^2}=2\lim\limits_{x\to\infty}e^{2/x}=2e^0=2$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 则

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{6},$$ 于是 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^y=e^{-1/6}$.

二.(每小题 6 分,共 24 分)完成如下各题

1. $\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$;

解 原式 $=\displaystyle\int\left(\frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$;

解 令 $x+2=t^3, dx=3t^2dt$, 则

原式 $=\displaystyle\int\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int(t-1)dt+3\int\frac{1}{1+t}dt$

$$=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|t+1|+C \quad =\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3(x+2)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right|+C.$$

3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$;

解 令 $t=\sqrt{x}$, 则

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx =2\int_0^2 te^t dt=2\left[te^t\Big|_0^2-\int_0^2 e^t dt\right]=2\left(2e^2-e^t\Big|_0^2\right)=2(e^2+1).$$

4.求证: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx$, 并求此积分.

证明 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$\text{左边}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx =\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2010}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^{2010}t}{\sin^{2010}t+\cos^{2010}t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\text{右边}.$$

而,左边+右边= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$, 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2010}x}{\sin^{2010}x+\cos^{2010}x}dx=\frac{\pi}{4}$.

三.(每小题 7 分,共 21 分)完成如下各题:

1.设 $u(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$,求 $du\big|_{(1,2)}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{1+x^2+y^2}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{1+1+4}=\frac{1}{6},\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$du\big|_{(1,2)}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,2)}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,2)}dy=\frac{dx+2dy}{6}.$$

2.已知 $f(x,y,z)=2xy-z^2$ 及点 $A(2,-1,1)$, $B(3,1,-1)$, 求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿

由 A 到 B 方向的方向导数,并求此函数在点 A 处方向导数的最大值.

解 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y,\frac{\partial f}{\partial y}=2x,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z.\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=-2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=4,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=-2.$$

因此,$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\ =(-2)\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{2}{3}+(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$.

而在点 A 处方向导数的最大值为 $|\boldsymbol{g}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

3.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=1$ 给出,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x,y)=z^3-3xyz-1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2},$$

$$=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z^2-xy)^2}=\frac{y^2z-y(xy+z^2)\cdot\frac{yz}{z^2-xy}}{(z^2-xy)^2}$$

$$=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}.$$

四.(第一小题 4 分,第二小题 6 分,共 10 分)

1.已知点 $A(2,2,2),B(4,4,2),C(4,2,4)$,求向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的夹角.

解 $\overrightarrow{AB}=(2,2,0),\overrightarrow{AC}=(2,0,2)$,设所求夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2\times2+2\times0+0\times2}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{1}{2},\qquad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

2.求经过直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\ x-y-z-2=0,\end{cases}$ 且平行于直线 $L_2:x=y=z$ 的平面方程.

解 L_1 的参数方程为 $x=t,y=-t,z=2(t-1)$，化为标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2},$$

其方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=(1,-1,2)$, 而直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{l}_2=(1,1,1)$, 故所求平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-3,1,2).$$

所求平面过点(0,0,－2),故所求平面方程为 $-3x+y+2(z+2)=0$,即 $3x-y-2z=4$.

五.(7 分)求函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2dt$ 的极值.

解 $f'(x)=(x-1)(x-2)^2$, 从而驻点为 $x_1=1,x_2=2$. 列表如下

x	$(-\infty,1)$	1	（1，2）	2	（2，+∞）
$f'(x)$	—	0	+	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	非极值	↗

所求函数最小值为

$$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-2)^2dt=\int_0^1(t^3d-5t^2+8t-4)dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+4-4=-\frac{17}{12}.$$

六.(12 分)设函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$, 求⑴函数的单调区间与极值点;⑵函数的凹凸区间与拐点;⑶函数的渐近线.

解 函数的定义域为(－∞, －1)∪(－1,＋ ∞), 且

$$f'(x)=\frac{3x^2(1+x)^2-x^3\cdot 2(1+x)}{2(1+x)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(3x^2+6x)(1+x)^3-(x^3+3x^2)\cdot 3(1+x)^2}{2(1+x)^6}=\frac{3x}{(1+x)^4}.$$

从而函数的驻点为 0, －3.又二阶导数为零的点为 0,列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	－3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	（0,+∞）
$f'(x)$	+	0	—	+	0	+
$f''(x)$	—	—	—	—	0	+
$f(x)$	凸↗	极大	凸↘	凸↗	拐点	凹↗

函数的单调增加区间为$(-\infty,-3)$和（0,+∞）,单调减少区间为(－3, －1).极小值点为－3.凹区间为$(0,+\infty)$,凸区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,0)$,拐点为(0,0).下面再求渐近线.显然,直线 x=－1 是垂直渐近线.而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty$$

因而曲线无水平渐近线,但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(1+x)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(1+x)^2}-\frac{x}{2}\right]=-1,$$

因而曲线有斜渐近线 $y=\frac{1}{2}x-1.$

七.(每小题 7 分,共 14 分)

1.求证:$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2}, x\in R.$

证 令 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$,则当 x>0 时,

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,$$

故此函数单调增加.而容易验证 $f(0)=0$, 故当 $x>0$ 时, $f(x)\geq 0$, 此即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x>0.$$

又, $f(-x)=1-x\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}=1-x\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)-\sqrt{1+x^2}=f(x),$

从而 $$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geq\sqrt{1+x^2},x\in R.$$

2.设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续,在开区间(0,1)内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1,$ 求证:

⑴存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $f(\alpha)=1-\alpha$;

⑵存在两个不同的点 $\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证 ⑴令 $g(x)-f(x)+x-1,$ 则 $g(0)=f(0)-1<0, g(1)=f(1)+1-1=1>0.$

于是由介值定理,存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得 $g(\alpha)=0$, 即 $f(\alpha)=1-\alpha$;

⑵由 Largranger 定理,在区间(0, α)内存在 ξ, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

在区间(α, 1) 内, 存在 η, 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

于是存在两个不同的点 $\xi\in(0,1),\eta\in(0,1)$, 满足 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.