



《通信原理》

(03 确知信号-四大函数)

蔡志岗

光学与光学工程系

中山大学物理学院

lasers@netease.com

13316105077

光信息实验室：84110909

84110909

第二章：确知信号

2.1 确知信号的类型

2.2 确知信号的频域性质

2.3 确知信号的时域性质

（补：确知函数通过线性系统）

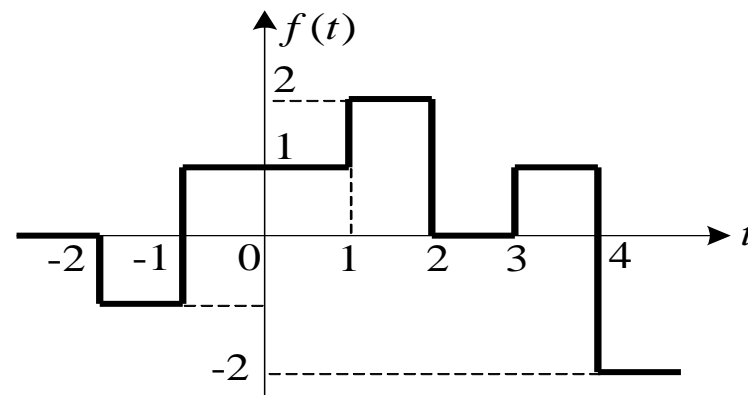
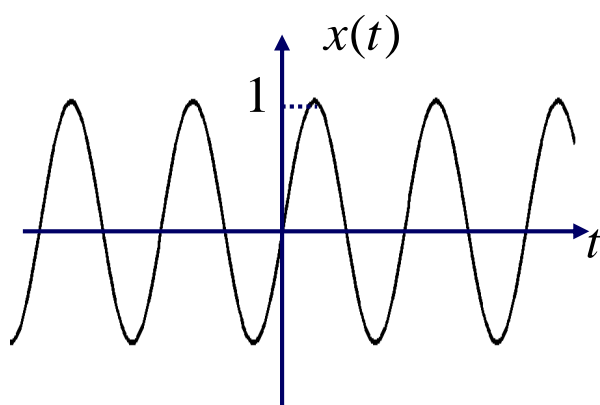
2.1 信号的分类

信号的分类方法有很多，可以从不同的角度对信号进行分类。例如，信号可以分为**确知信号**与**随机信号**、周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号等。下面简要介绍这些信号的概念。

2.1.1 确知信号与随机信号

确知信号是指能够以确定的时间函数表示的信号，它在定义域内任意时刻都有确定的函数值。

例如：电路中的正弦信号和各种形状的周期信号等。



随机信号

在事件发生之前无法预知信号的取值，即写不出明确的数学表达式，通常只知道它取某一数值的**概率**，这种具有随机性的信号称为**随机信号**。

例如，半导体载流子随机运动所产生的噪声和从目标反射回来的雷达信号（其出现的时间与强度是随机的）等都是随机信号。

→所有的实际信号在一定程度上都是随机信号。

2. 1. 2周期信号与非周期信号

周期信号是每隔一个固定的时间间隔重复变化的信号。周期信号满足下列条件

$$f(t) = f(t + nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

式中，**T**为的周期，是满足式（2.1）条件的最小时段。

非周期信号，则不具有重复性的信号。

2.1.3 功率信号与能量信号

如果一个信号在整个时间域 $(-\infty, +\infty)$ 内都存在，因此它具有无限大的能量，但其平均功率是有限的，我们称这种信号为功率信号。

平均功率

设信号 $f(t)$ 为时间的实函数，通常把 $f(t)$ 信号看作是随时间变化的电压或电流，则当信号 $f(t)$ 通过 $1\ \Omega$ 电阻时，其瞬时功率为 $|f(t)|^2$ ，而**平均功率**定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (2.2)$$

我们把能量有限的信号我们称为
能量信号。

设能量信号为时间的实函数，通常把能量信号的归一化能量（简称能量）定义为由电压加于单位电阻上所消耗的能量，即为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (2.3)$$

2.2 确知信号的分析

确知信号的性质可以从频域和时域两方面进行分析。

频域分析常采用傅里叶分析法，

时域分析主要包括卷积和相关函数。

本节我们将概括性地讨论傅里叶分析法，重点介绍相关函数，功率谱密度和能量谱密度等概念。

2.2.1 周期信号的傅里叶级数

1、三角形式的傅里叶级数

任何一个周期为T的周期信号，只要满足狄里赫利条件，则可展开为傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t] \quad (2.4)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi / T$ 为基波角频率;

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.5)$$

— $f(t)$ 的均值 (直流分量)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (2.6)$$

— $f(t)$ 的第 n 次余弦波的振幅

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (2.7)$$

— $f(t)$ 的第 n 次正弦波的振幅

式 (2.4) 中, 由

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

可得 $f(t)$ 的另一种表达式

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad (2.8)$$

其中

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}; \quad c_0 = a_0$$

2、指数形式的傅里叶级数

利用欧拉公式 $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ 可得指数表达式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.9)$$

式中

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

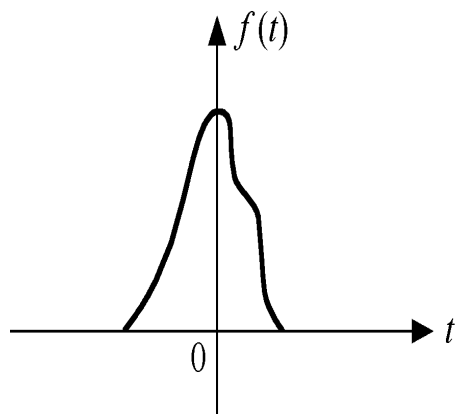
$$F_0 = c_0 = a_0 \quad F_n = \frac{c_n}{2} e^{-j\varphi_n} \quad (\text{称为复振幅});$$

$$F_{-n} = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n} = F_n^* \quad (\text{是 } F_n \text{ 的共轭})。$$

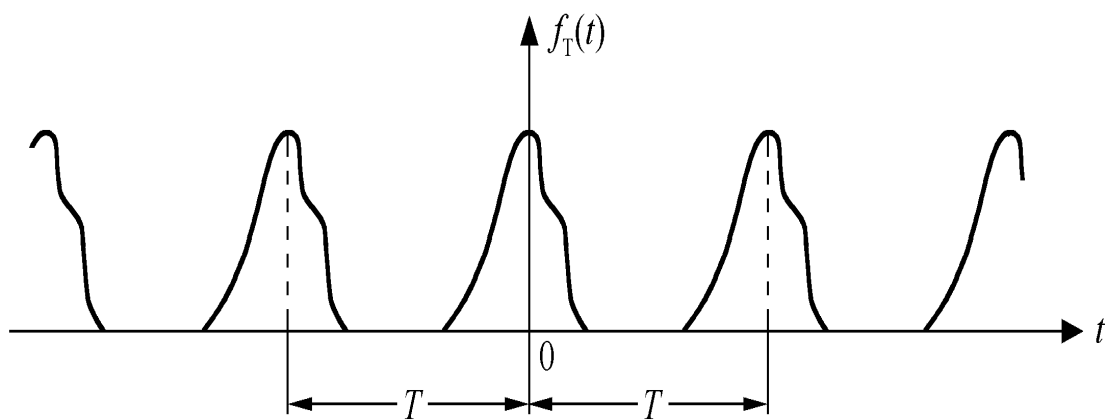
2. 2. 2非周期信号的傅里叶变换

前面介绍了用傅里叶级数表示一个周期信号的方法，对非周期信号，不能用傅里叶级数直接表示，但**非周期信号可看作是 $T \rightarrow \infty$ 的周期信号**。这样周期信号的频谱分析可以推广到非周期信号。

$$f(t) \xleftarrow{\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)} f_T(t)$$



(a) 非周期信号



(b) 构造的周期信号

(a) 非周期信号 (b) 构造的周期信号

图2-1 非周期信号

令 $f_T(t)$ 满足狄里赫利条件，则可展开为傅里叶级数

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (2.10)$$

其中，

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega \quad (2.11)$$

(相邻角频率分量间隔)

将(2.11)代入(2.10) 得

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \Delta\omega
 \end{aligned}$$

当 $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, $n\omega_0 \rightarrow \omega$,
 $\Sigma \rightarrow \int$ 时, 则有

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

令 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.12)$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.13)$$

式 (2.12) 和式 (2.13) 分别称为傅里叶正变换和傅里叶反变换，两式称为**f(t) 傅里叶变换对**，表示为

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

式 (2.12) 和式 (2.13) 可简记为

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \end{cases} \quad (2.14)$$

- 函数 $f(t)$ 在什么样的条件下，才能利用 (2.12) 式进行傅里叶变换，再由 (2.13) 式的傅里叶反变换得到原函数 $f(t)$ ？

一般来说，如果 $f(t)$ 在每个有限区间都满足狄里赫利条件，并且满足下式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (2.15)$$

则它的傅里叶变换 $F(\omega)$ 存在。

傅里叶变换对:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换特性

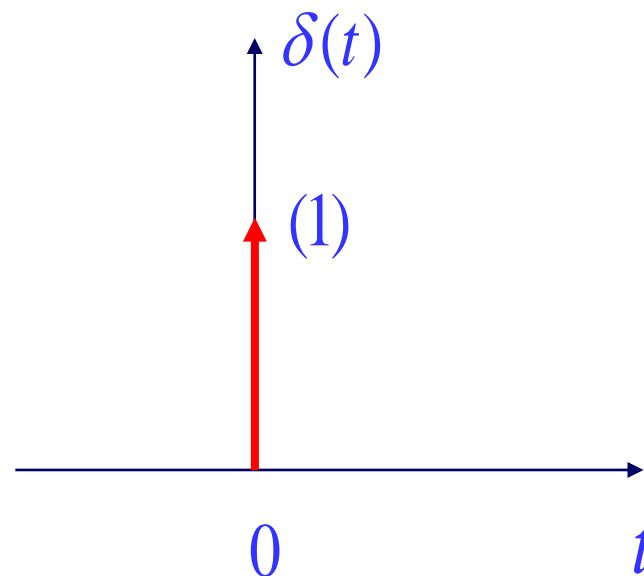
信号的傅里叶变换具有一些重要的特性，灵活运用这些特性可较快地求出许多复杂信号的频谱密度函数，或从谱密度函数中求出原信号，因此掌握这些特性是非常有益的。其中较为重要且经常用到的一些性质和傅里叶变换对见附录二。

单位冲激函数的傅利叶变换

1. 单位冲激函数的定义

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{且} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1, \text{对任意} \epsilon > 0$$



δ函数可以用抽样函数的极限表示

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt)$$

因为，可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt) dt = 1$$

式中k越大、振幅越大、波形零点的间隔越小、波形振荡的衰减越快，但积分等于1。
(见左图)

和下式比较：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

可见

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \sin c(kt)$$

即抽样函数的极限就是δ函数。

$\delta(t)$ 函数的特性

1) 乘积特性（抽样）

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

2) 积分特性（筛选）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

3) 卷积特性

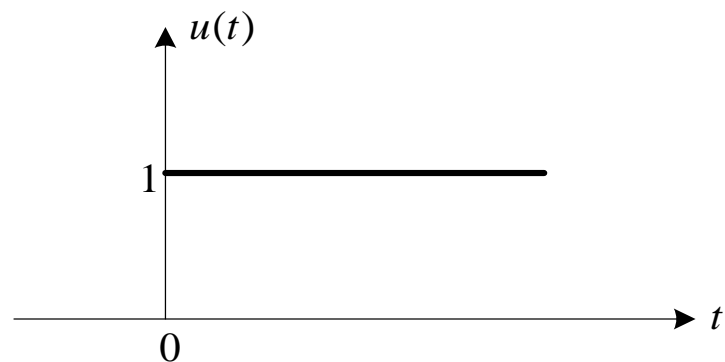
$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

其它性质

性质 4

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

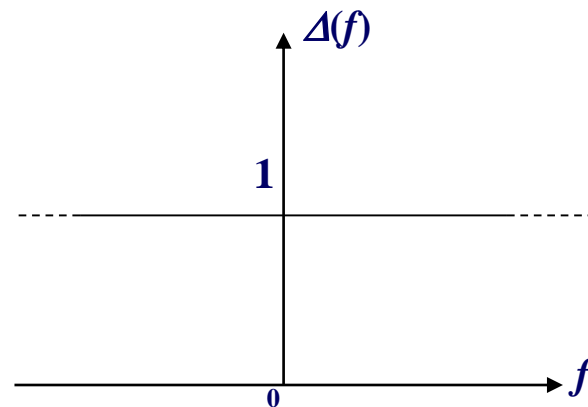
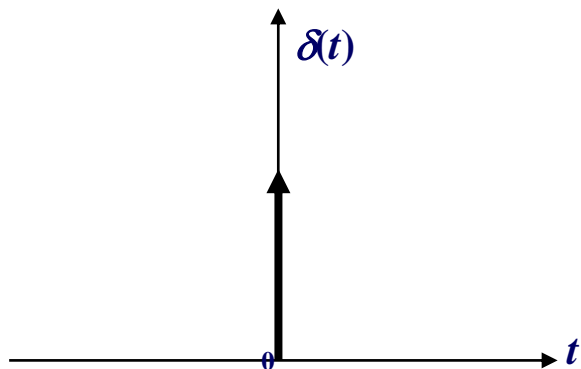


单位阶跃函数

性质5 傅利叶变换

重要

$$\delta(t) \Leftrightarrow \Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

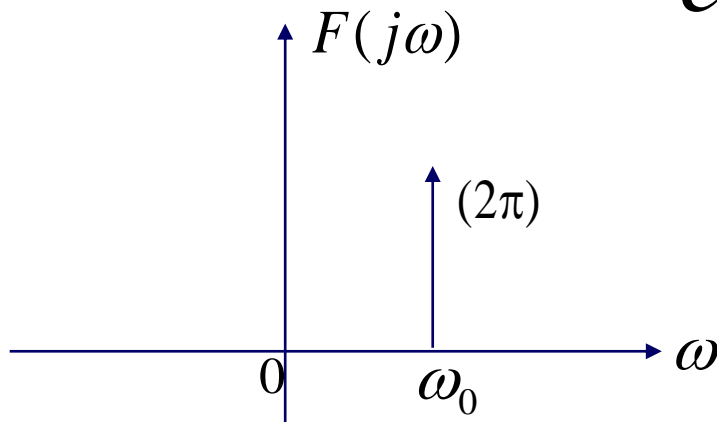
$$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

虚指数信号

性质6

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow \delta(f - f_0)$$



$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$e^{-j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow \delta(f + f_0)$$

性质7

若 $\phi(t)$ 在 $t=t_0$ 存在 n 阶导数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta'(t - t_0) dt = -\phi'(t_0)$$

2.2.3 周期信号的傅里叶变换

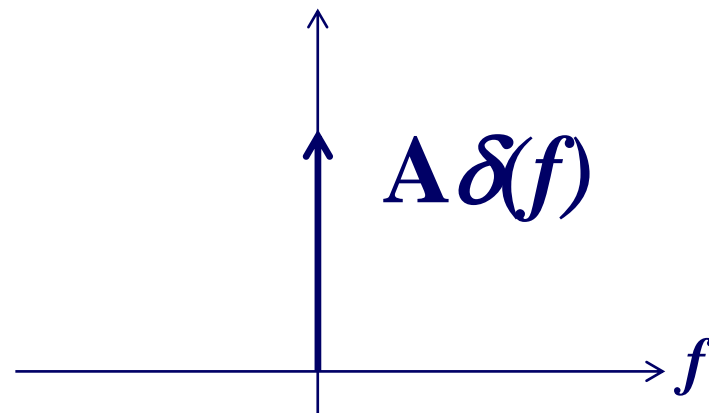
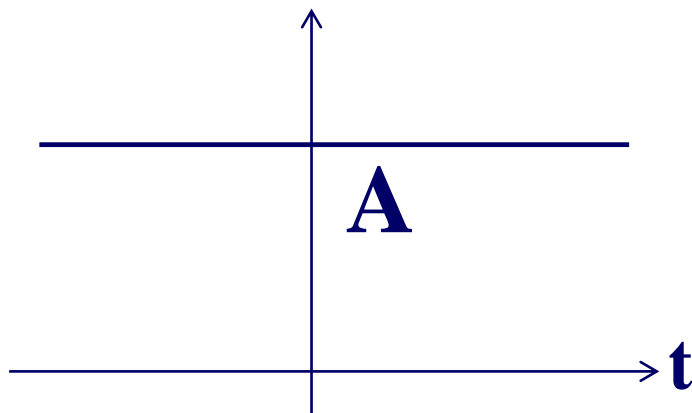
按照经典数学函数的定义，周期信号的傅里叶变换是不存在的，但如果扩大函数定义范围，引入广义函数 $\delta(t)$

则可求得周期信号的傅里叶变换。

1. 常数A的傅利叶变换

$$A \Leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$

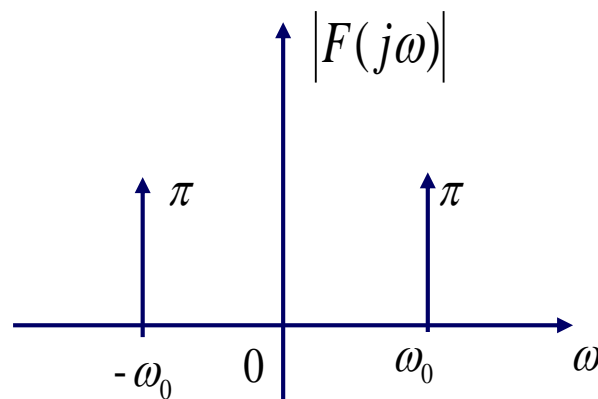
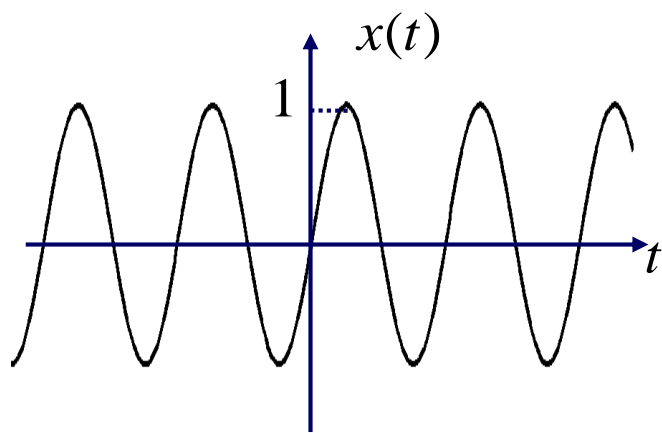
$$A \Leftrightarrow A\delta(f)$$



2. 正弦、余弦信号的傅利叶变换

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

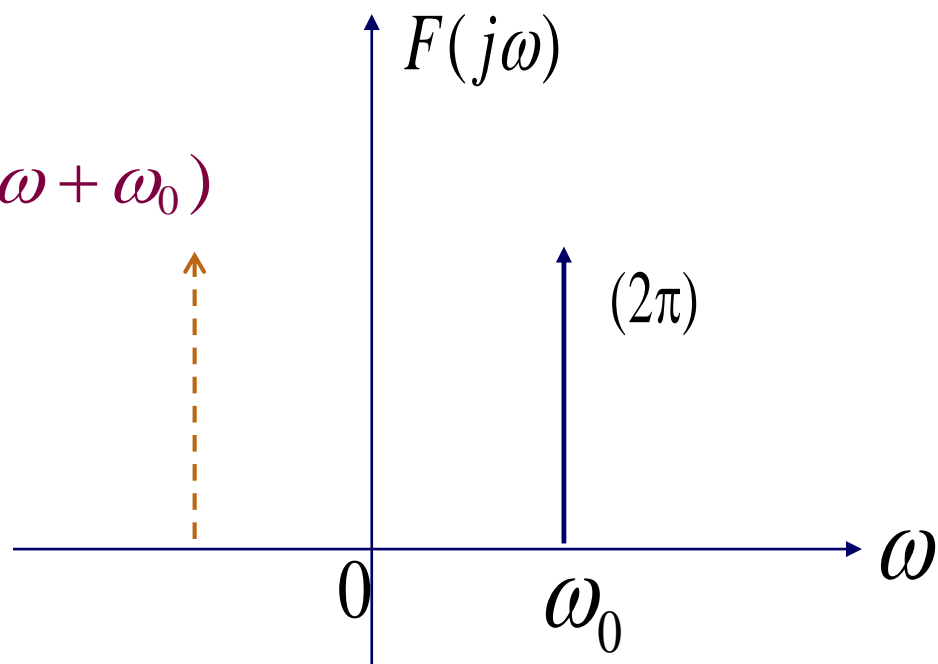


虚指数信号

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



3. 周期信号的傅利叶变换

$f(t)$ 为周期信号，周期为 T ，

则 $f(t)$ 的傅里叶级数：
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$e^{jn\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

$f(t)$ 的傅里叶变换为：

$$F[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

周期函数的傅里叶变换是一冲激序列，
间隔为 $\omega_0 = 2\pi/T$ ，强度决定于 F_n

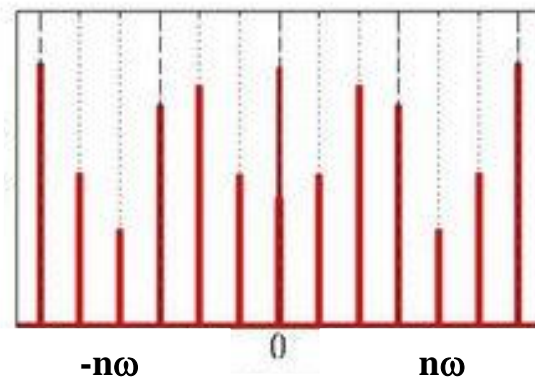
所以

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = F[f(t)] = 2\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] \quad (2.18)$$

即，周期信号的傅里叶变换由一系列位于各谐波频率 $n\omega_0$ 上的冲激函数组成，各冲激函数的强度为 $2\pi F_n$ 。

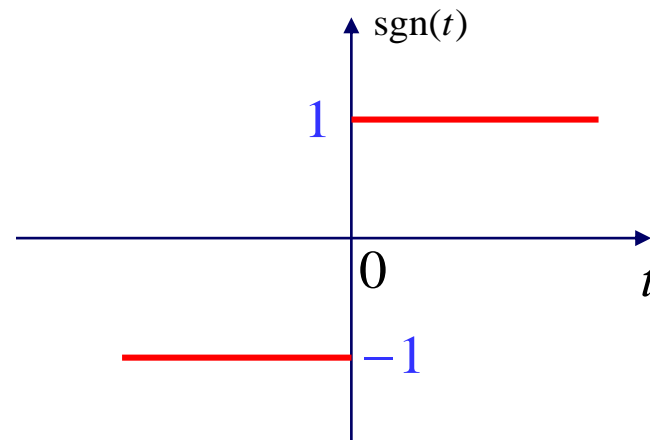
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$



4. 符号函数的傅利叶变换

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \text{ 或 } \text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

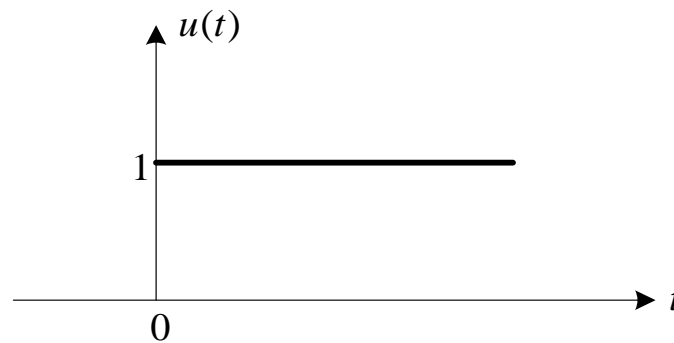
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t = 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$$



5.单位阶跃函数的傅利叶变换

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{ 或 } u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



注意

引入冲激函数之后，对周期信号也能进行傅里叶变换，从而对周期信号和非周期信号可以统一处理，这给信号的频域分析带来了很大的方便。

常用函数的傅里叶变换

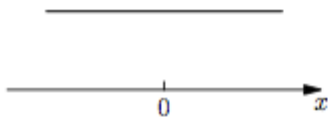
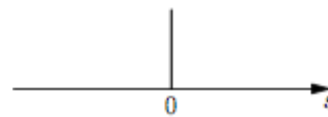

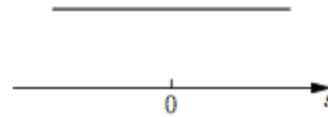
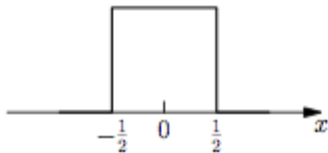
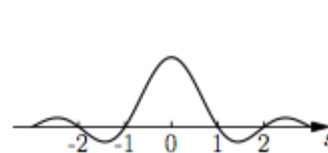
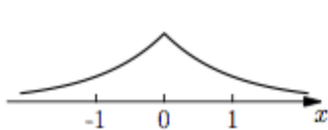
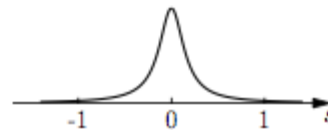
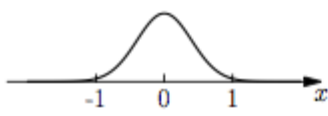
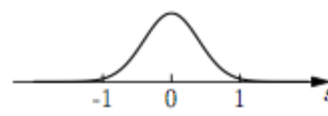
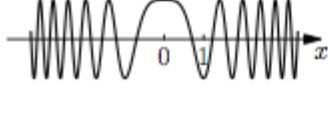
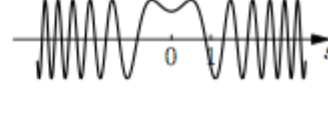
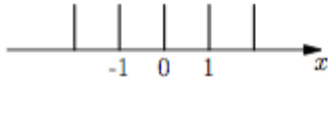
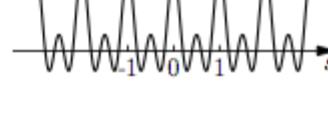
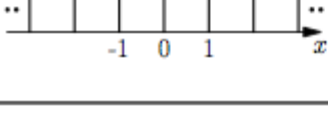
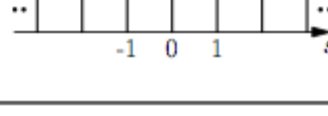
$f(x)$		$F(s)$
	1	$\delta(s)$ 
	$\delta(x)$	1 
	$\text{rect}(x)$	$\text{sinc}(s)$ 
	$\exp(- x)$	$\frac{2}{1 + (2\pi s)^2}$ 
	$\exp(-\pi x^2)$	$\exp(-\pi s^2)$ 
	$\exp(i\pi x^2)$	$e^{i\pi/4} \exp(-i\pi s^2)$ 
	$\sum_{n=-S}^S \delta(x-n)$	$\frac{\sin(M\pi s)}{\sin(\pi s)}$ 
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s-n)$ 

表 3.2.1 傅里叶变换的四种形式

时域	频域
连续、周期	离散、非周期
$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$	$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$
连续、非周期	连续、非周期
$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$
离散、周期	离散、周期
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$	$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
离散、非周期	连续、周期
$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

CTFS 连续、周期 \rightarrow 非周期、离散

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{2\pi} X(k\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

CTFT 连续、非周期 \rightarrow 非周期、连续

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

DTFT

离散、非周期 \rightarrow 周期、连续

$$X(\Omega) = \sum x(n) \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

DTFS (DFS) 离散、周期 \rightarrow 周期、离散

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk\Omega_0 n}$$

讨论

- 傅里叶变换的形式及应用
 - CTFS, CTFT;
 - DTF, DTFS (DFS) \rightarrow **DFT** \rightarrow FFT

电子版：学号+姓名+标题

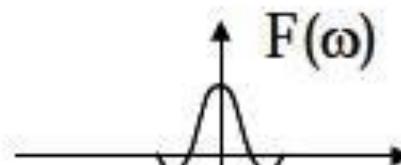
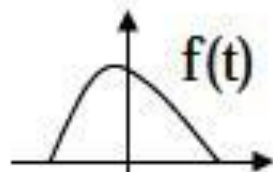
傅里叶变换对:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

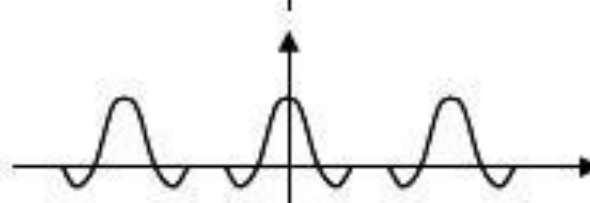
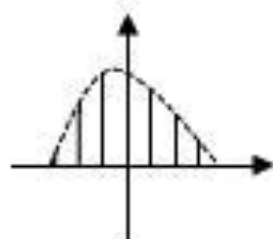
$$\left\{ \begin{array}{l} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{偶函数} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{array} \right.$$

连续-非周期；离散-周期

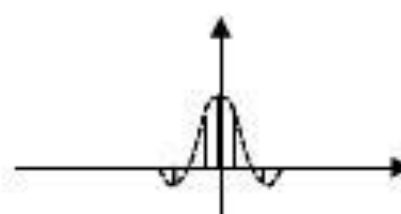
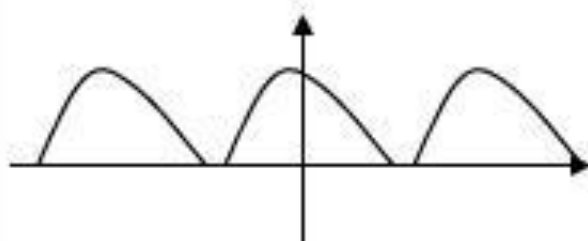
CTFT



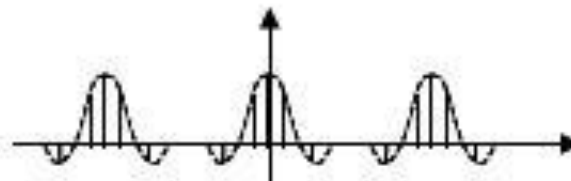
DTFT



CTFS



DTFS



DTFS

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$\begin{cases} -\infty < n < \infty \\ -\infty < k < \infty \end{cases}$$

DFT

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

主值区间

2.2.4 卷积与相关函数

一、卷积

1、卷积的定义

设有函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ 为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的**卷积**, 常用 $f_1(t) * f_2(t)$ 表示, 即

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (2.19)$$

卷积的物理含义：表示一个函数与另一个函数折叠之积的曲线下的面积，因而卷积又称为折积积分。卷积也表明一个函数与另一个的折叠函数的相关程度。

2、卷积的性质

(1) 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2.20)$$

(2) 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2.21)$$

(3) 结合律

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

(4) 卷积的微分 (2.22)

$$\frac{d[f_1(t) * f_2(t)]}{dt} = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) \quad (2.23)$$

3、卷积定理

(1) 时域卷积定理

令 $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(\omega)$ 则有

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (2.24)$$

(2) 频域卷积定理

令 $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(\omega)$, 则有

$$\frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \Leftrightarrow f_1(t)f_2(t) \quad (2.25)$$

函数与单位冲激函数的卷积

时域

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

$$f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

频域

$$F(\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = F(\omega - \omega_0)$$

$$F(\omega - \omega_1) * \delta(\omega - \omega_2) = F(\omega - \omega_1 - \omega_2)$$

$$\delta(\omega - \omega_1) * \delta(\omega - \omega_2) = \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$$

二、相关函数

信号之间的相关程度，通常采用相关函数来表征，它是衡量信号之间关联或相似程度的一个函数。

相关函数表示了两个信号之间或同一个信号间隔时间 τ 的相互关系。

(1) 自相关函数

能量信号 $f(t)$ 的自相关函数定义为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) dt \quad -\infty < \tau < \infty \quad (2.26)$$

功率信号 $f(t)$ 的自相关函数定义为

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t + \tau) dt \quad -\infty < \tau < \infty \quad (2.27)$$

由以上两式可见，自相关函数反映了一个信号与其延迟 τ 秒后的信号之间相关的程度。

当 $\tau = 0$ 时，能量信号的自相关函数 $R(0)$ 等于信号的能量；而功率信号的自相关函数 $R(0)$ 等于信号的平均功率。

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt \quad -\infty < \tau < \infty$$

(2) 互相关函数

两个能量信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数

定义为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \quad -\infty < \tau < \infty \quad (2.28)$$

两个功率信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数

定义为

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \quad -\infty < \tau < \infty \quad (2.29)$$

由以上两式可见，互相关函数反映了一个信号与另一个延迟 τ 秒后的信号间相关的程度。

需要注意的是，互相关函数和两个信号的前后次序有关，即有

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$$

2. 2. 5能量谱密度与功率谱密度

一、能量谱密度

前面已经介绍，能量信号 $f(t)$ 的能量从时域的角度定义为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

也可以从频域的角度来研究信号的能量由于

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以信号的能量可写成

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad (2.30) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

为了描述信号的能量在各个频率分量上的分布情况，定义单位频带内信号的能量为**能量谱密度**（简称**能量谱**），单位：焦/赫，用 $E_f(\omega)$ 来表示。

能量谱密度

$$E_f(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (2.31)$$

由式 (2.30) 可见, 能量信号在整个频率范围内的全部能量与能量谱之间的关系可表示为

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\omega) d\omega \quad (2.32)$$

可以证明: 能量信号 $f(t)$ 的自相关函数和能量谱密度是一对傅里叶变换,

$$R_f(\tau) \Leftrightarrow E_f(\omega)$$

证: $\mathbf{R}(\tau) \Leftrightarrow \mathbf{E}(\omega) = |F(\omega)|^2$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) f(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{j\omega t} dt \right] F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ \therefore \quad R(\tau) &\Leftrightarrow E(\omega) = |F(\omega)|^2 \end{aligned}$$

信号的能量有两个计算公式:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega \end{aligned}$$

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 \Leftrightarrow R(\tau)$$

二、功率谱密度

式(2.2)从时域的角度定义了功率信号 $f(t)$ 的功率

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

也可以从频域的角度来研究信号的功率。
由于

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

(2.33)

式中, $F_T(\omega)$ 是 $f(t)$ 的截短函数 $f_T(t)$ 的频谱函数。

类似能量谱密度的定义, 单位频带内信号的平均功率定义为**功率谱密度** (简称功率谱), 单位: 瓦/赫, 用 $P_f(\omega)$ 来表示。

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (2.34)$$

则整个频率范围内信号的总功率与功率谱之间的关系可表示为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_f(\omega) d\omega \quad (2.35)$$

可以证明：功率信号 $f(t)$ 的自相关函数和功率谱密度是一对傅里叶变换，即

$$R_f(\tau) \Leftrightarrow P_f(\omega)$$



证明

信号的平均功率有两个计算公式:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_f(\omega) d\omega$$

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} \Leftrightarrow R(\tau)$$

[例2.1] 求周期信号 $f(t)$ 的功率谱密度。

解：周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，其瞬时功率等于 $|f(t)|^2$ ，在周期 T 内的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

由式 (2.9) 知

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

于是

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} dt$$

交换积分号和求和号的次序

因此

$$P = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (2.36)$$

由于 $|F_n|^2$ 是 $n\omega_0$ 分量的平均功率。

则由函数 δ 的抽样性质可得

$$|F_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) d\omega$$

故

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) d\omega$$

交换求和号和求积分号的次序得

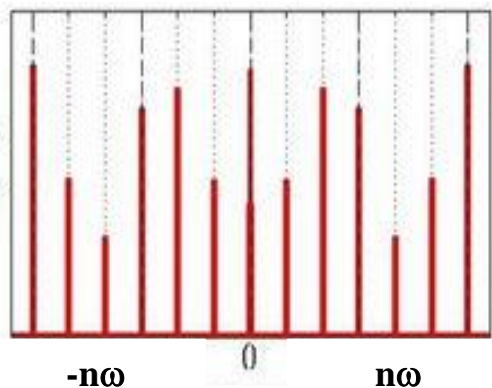
$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) d\omega \quad (2.37)$$

将式 (2.37) 和式 (2.35) 比较可得：

$$P_f(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \quad (2.38)$$

结论：周期信号 $f(t)$ 的功率谱由一系列位于 $n\omega_0$ 处的冲激函数组成，其冲激强度为 $2\pi |F_n|^2$ 。

$$P_f(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

附：希尔伯特Hilbert变换

设 $f(t)$ 为实函数，称 $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau$
为 $f(t)$ 的希尔伯特变换，记为

$$\hat{f}(t) = H[f(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3. 25)$$

其反变换为

$$f(t) = H^{-1}[\hat{f}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3. 26)$$

由卷积的定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3.27)$$

不难得出希尔伯特变换的卷积形式

$$\hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (3.28)$$

由式 (3.28) 可见, 希氏变换相当于 $f(t)$ 通过一个冲激响应为 $h_h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 的线性网络, 其等效系统模型如图3-10所示。

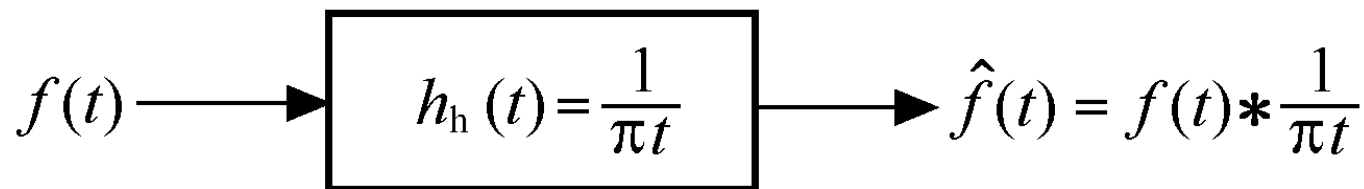


图3-10 希尔伯特变换等效系统

又因为
$$\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (3.29)$$

所以可得
$$H_h(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

希尔伯特变换等效于一个 $\pi/2$ 理想相移器。

利用希尔伯特变换可构建解析信号函数，
在SSB、带通信号分析中很有用。

相移法产生SSB信号

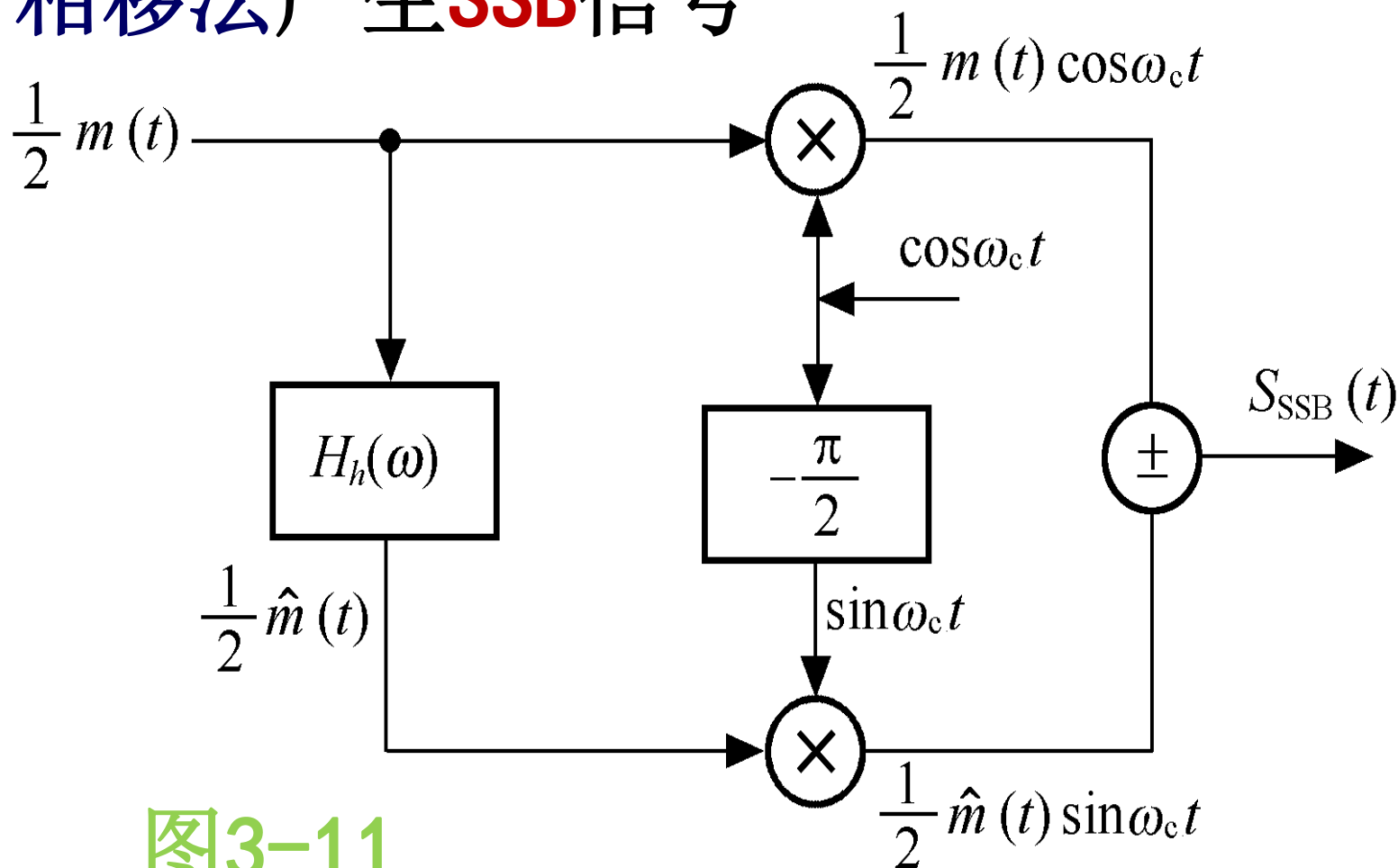


图3-11

$$S_{SSB}(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos \omega_c t \mp \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin \omega_c t$$

解析信号

定义: 令有实信号 $f(t)$, 则称复信号

$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$ 为 $f(t)$ 的解析信号。

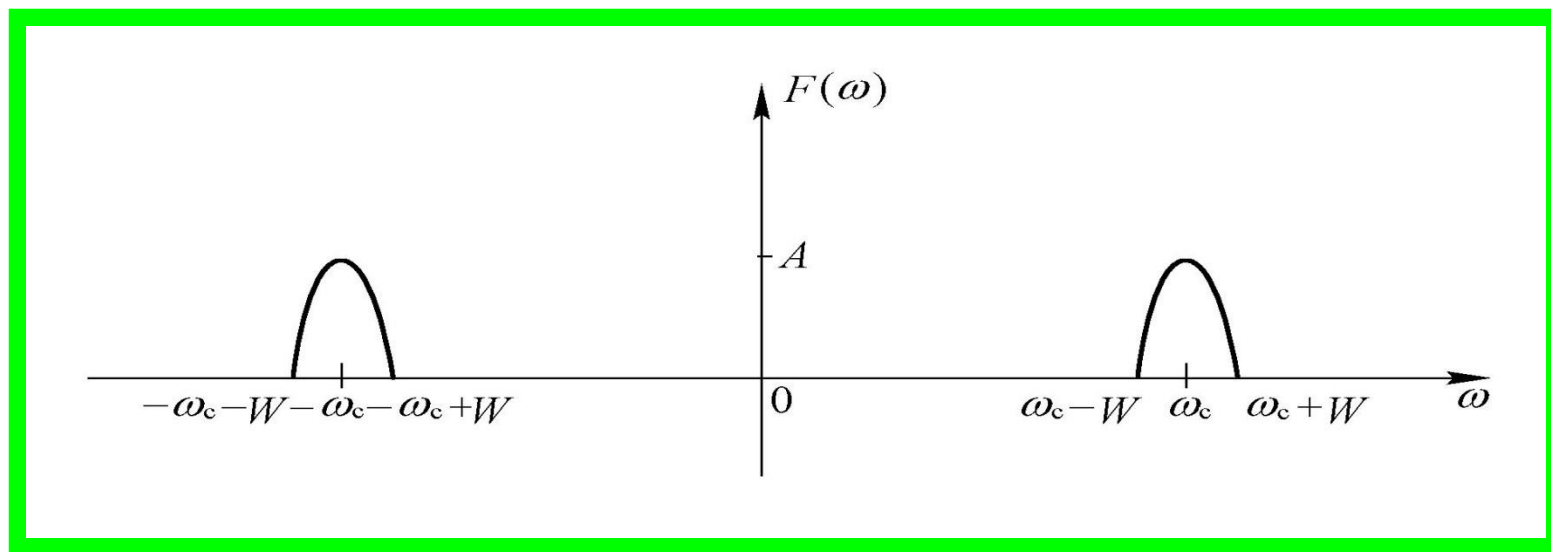
$$f(t) = \text{Re}[z(t)]$$

$$z(t) = \underline{f_L(t)} \underline{e^{j\omega_c t}}$$

称为 $f(t)$ 的复包络

称为 $f(t)$ 的复载波

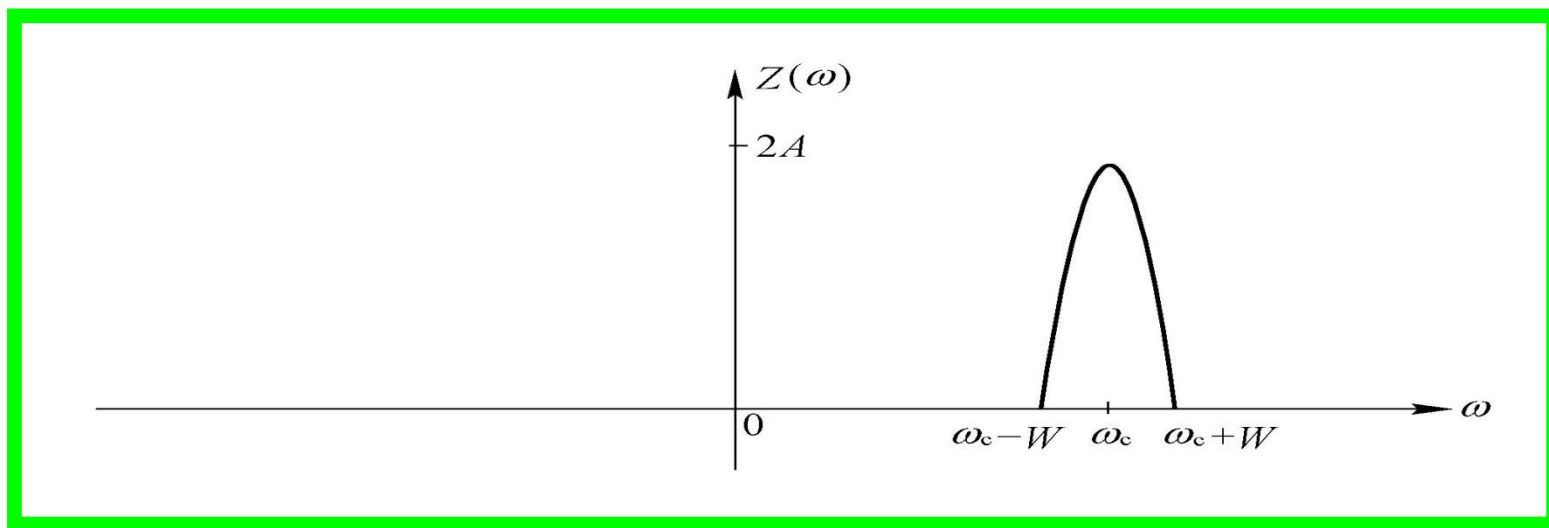
若 $\omega_c \gg 2W$, 则称此频带信号为窄带信号。



频带信号的频谱密度

频带信号的解析信号

$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t) \Leftrightarrow Z(\omega) = 2F(\omega)u(\omega)$$



频带信号的频谱密度

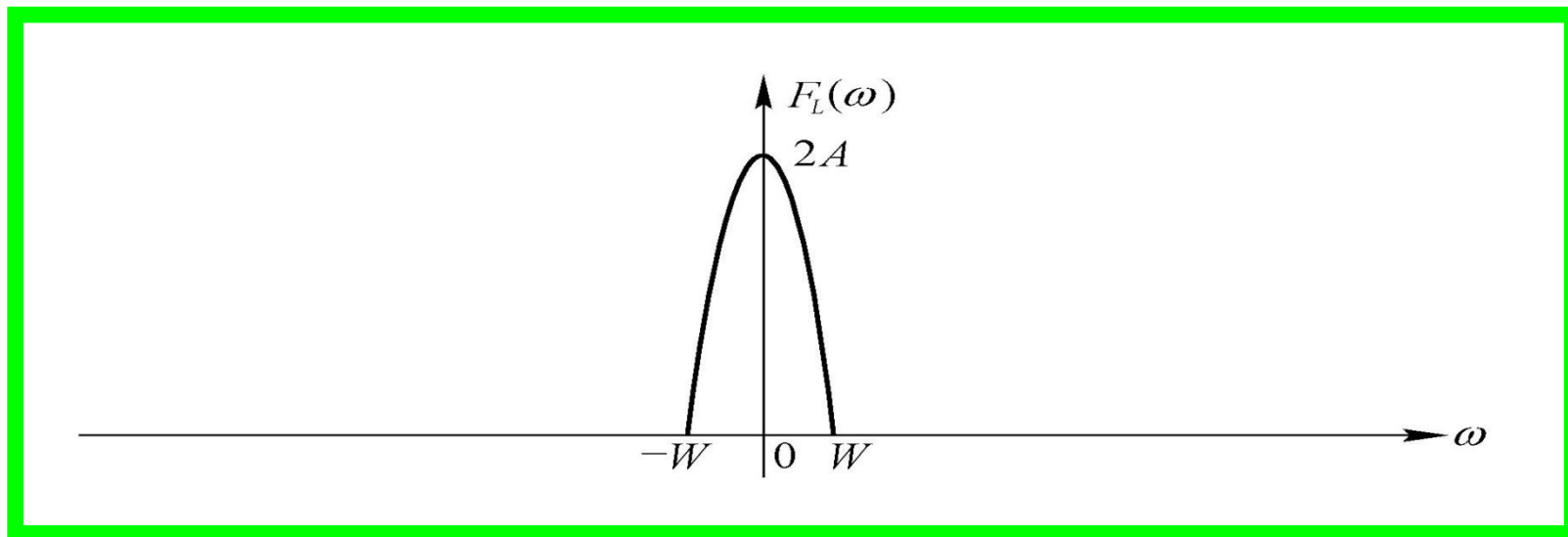
令

$$f_L(t) = z(t)e^{-j\omega_c t}$$

则有

$$f_L(t) \Leftrightarrow F_L(\omega) = Z(\omega + \omega_c) = 2F(\omega + \omega_c)u(\omega + \omega_c)$$

$$f_L(t) = z(t)e^{-j\omega_c t}$$



复包络频谱密度

小复习

傅里叶变换（对）

卷积与相关函数

能量谱（密度）与功率谱（密度）

希尔伯特变换

课程论文/小组报告选题

傅里叶变换的四种形式

(做成doc文档, ……选一PPT讲解)