电动力学

第三章：静磁场

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

April 17, 2019

矢势:

Maxwell 方程组在静磁现象中退化为:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

静磁场特点:

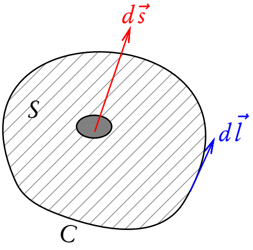
静磁场是有旋无源的矢量场，其磁力线形成闭合曲线。

矢量分析的数学定理告诉我们：旋度场是无源场。 所以，静磁场的无源性，即 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$，意味着磁感应强度 $\vec{B}$ 可以表为另一矢量场 $\vec{A}$ 的旋度:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ 称为磁场的矢势。

矢势的物理意义：



考虑 $\vec{B}$ 对于任意一个以回路 C 为边界的曲面的磁通量，

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

因为，

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

磁通量 Φ_B 只与曲面 S 的边界 C 有关，而与曲面 S 的具体形状无关。设 S_1 和 S_2 是两个具有共同边界 C 的曲面，则磁场 $\vec{B}$ 穿过 S_1 与 S_2 的磁通量是相等的。

利用 Stokes 公式知：

$$\Phi_B = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

即：矢势 $\vec{A}$ 沿闭合曲线 C 的“环量”等于穿过以 C 为边界的任一曲面的磁通量。这就是矢势的物理意义。

矢势选择的不唯一性：

若矢势 $\vec{A}$ 的分布为已知，可以通过求其旋度唯一地确定磁场 $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

但若已知磁场 $\vec{B}$ 的分布，并不能唯一地确定矢势 $\vec{A}$。

这是因为 $\vec{B}$ 只规定了 $\vec{A}$ 的旋度，并未同时规定其散度。

例： 设有沿 Z 轴方向的均匀磁场 $\vec{B} = B\vec{e}_z$，求其矢势。

解： 选择柱坐标系。梯度算符在柱坐标系中表达为：

$$\nabla = \vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\phi}{r}\partial_\phi + \vec{e}_z\partial_z$$

所以 $\nabla r = \vec{e}_r$， 且：

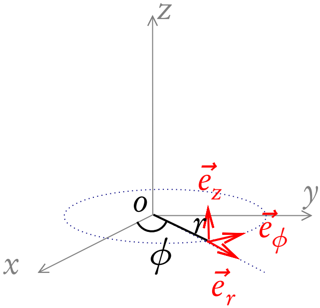
$$\nabla\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{r}, \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} = 0$$

矢势选择的不唯一性（二）:

若按下式取矢势 $\vec{A}$ 的试探解，

$$\vec{A} = A(r)\vec{e}_\phi$$

则：



$$\begin{aligned}
B\vec{e}_z &= \nabla \times \left[A(r)\vec{e}_\phi\right] \\
&= \nabla \times \left[rA(r)\frac{\vec{e}_\phi}{r}\right] \\
&= \nabla[rA(r)] \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} + rA(r)\nabla \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} \\
&= \partial_r[rA(r)]\vec{e}_r \times \frac{\vec{e}_\phi}{r} \\
&= \frac{1}{r}\partial_r[rA(r)]\vec{e}_z
\end{aligned}$$

所以，

$$\frac{1}{r}\partial_r[rA(r)] = B, \quad \rightsquigarrow \quad A(r) = \frac{1}{2}Br + \frac{c}{r}.$$

矢势选择的不唯一性(三):

进一步取积分常数 c 为零，则得:

$$\vec{A}=\frac{1}{2}Br\vec{e}_\phi$$

这是本问题中均匀磁场的一个合格的矢势，其散度为:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{A}&=\frac{B}{2}\nabla\cdot(r\vec{e}_\phi)\\&=\frac{B}{2}\nabla r\cdot\vec{e}_\phi+\frac{Br}{2}\nabla\cdot\vec{e}_\phi\\&=\frac{B}{2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\phi\\&=0\end{aligned}$$

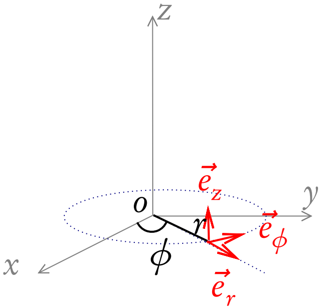
在柱坐标系中，

$$\nabla\cdot\vec{e}_\phi=0$$

矢势选择的不唯一性(四):

若按下式取矢势的试探解,

$$\vec{A}' = A'(r,\phi)\vec{e}_r$$



则:

$$\begin{aligned}
B\vec{e}_z &= \nabla\times\vec{A}' \\
&= \nabla\times\left[A'(r,\phi)\vec{e}_r\right] \\
&= \nabla[A'(r,\phi)]\times\vec{e}_r + A'(r,\phi)\nabla\times\vec{e}_r \\
&= \frac{1}{r}\partial_\phi A'(r,\phi)\vec{e}_\phi\times\vec{e}_r \\
&= -\frac{1}{r}\partial_\phi A'(r,\phi)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

所以,

$$\frac{1}{r}\partial_\phi A'(r,\phi) = -B, \quad \rightsquigarrow \quad A'(r,\phi) = -Br\phi + c.$$

矢势选择的不唯一性(五):

进一步取积分常数为零，则得:

$$\vec{A}' = -Br\phi\vec{e}_r$$

这也是本问题中均匀磁场的一个合格的矢势，其散度为:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A}' &= -B\nabla\cdot(r\phi\vec{e}_r) \\
&= -B\nabla\cdot\left[r^2\phi\,\frac{\vec{e}_r}{r}\right] \\
&= -B\nabla(r^2\phi)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r} - Br^2\phi\nabla\cdot\frac{\vec{e}_r}{r} \\
&= -B\partial_r(r^2\phi)\vec{e}_r\cdot\frac{\vec{e}_r}{r} \\
&= -2B\phi \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

在柱坐标系中,

$$\nabla\cdot\frac{\vec{e}_r}{r} = 0$$

矢势选择的不唯一性（六）：

上述两个合格矢势之差是：

$$\begin{aligned}\vec{A}' - \vec{A} &= -Br\phi\vec{e}_r - \frac{1}{2}Br\vec{e}_\phi \\ &= -\frac{B}{2}\left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\phi}{r}\partial_\phi + \vec{e}_z\partial_z\right)(r^2\phi) \\ &= -\frac{B}{2}\nabla(r^2\phi) \\ &= \nabla\Psi\end{aligned}$$

这里，

$$\Psi = -\frac{B}{2}r^2\phi$$

即两个合格矢势之差是一个标量函数的梯度。这个结论具有普遍意义：因为梯度场无旋，$\nabla\times\nabla\Psi = 0$，矢势加上任一标量场的梯度后仍是合格的矢势，

$$\nabla\times\vec{A} = \nabla\times(\vec{A}+\nabla\Psi) = \vec{B}.$$

点评:

注意到极角 ϕ 进入到矢势 $\vec{A}'$ 的方式,

$$\vec{A}' = -Br\phi\vec{e}_r$$

矢势的单值性意味着上式的定义域是 $0 \le \phi < 2\pi$.

下面举一例说明上述定义域的重要性。

设想在 XY 平面上存在一个半径为 R 的圆周 C。沿 Z 轴方向的均匀磁场 $\vec{B}$ 穿过 C 所围圆盘面的磁通量显然是:

$$\Phi_B = \pi R^2 B$$

Question :

可否把 Φ_B 表达为矢势 $\vec{A}'$ 相对于圆周 C 的环量

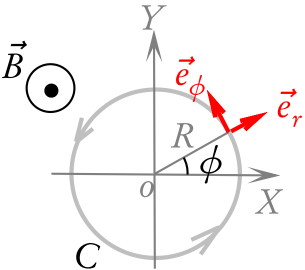
$$\Phi_B \stackrel{?}{=} \oint_C \vec{A}' \cdot d\vec{l}$$

Warning:

倘若误以为矢势

$$\vec{A}' = -Br\phi\vec{e}_r$$

的定义域是 $0 \leq \phi \leq 2\pi$， 则会导致如下荒诞不经的等式：

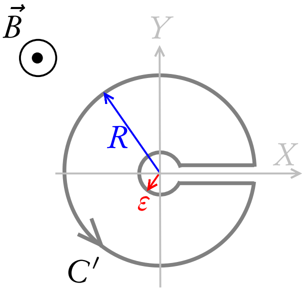


$$\begin{aligned}
\pi R^2 B &= \Phi_B \\
&= \oint_C \vec{A}' \cdot d\vec{l} \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-BR\phi\vec{e}_r \right] \cdot \left[Rd\phi\vec{e}_\phi \right] \\
&= -BR^2 \int_0^{2\pi} \phi d\phi \, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi \\
&= 0
\end{aligned}$$

认识到矢势

$$\vec{A}' = -Br\phi\vec{e}_r$$

正确的定义域是 $0 \leq \phi < 2\pi$，则在计算其环量时，应把回路 C 修改为如本页附图所示的 C':

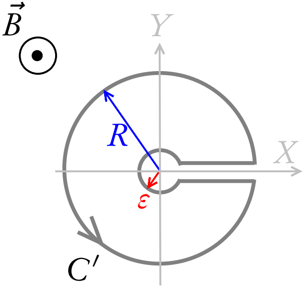


$$\begin{aligned}
\Phi_B &= \oint_{C'} \vec{A}' \cdot d\vec{l} \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} \left[-Br\varepsilon\vec{e}_r\right] \cdot \left[dr\vec{e}_r\right] + \int_{R}^{\varepsilon} \left[-Br(2\pi-\varepsilon)\vec{e}_r\right] \cdot \left[dr\vec{e}_r\right]\Big|_{\varepsilon\to 0} \\
&= B(2\pi - 2\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{R} rdr\, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r\Big|_{\varepsilon\to 0} \\
&= B(\pi-\varepsilon)(R^2-\varepsilon^2)\Big|_{\varepsilon\to 0} \\
&= B\pi R^2
\end{aligned}$$

另一种方法是使用环量 $\oint_{C'} \vec{A}' \cdot d\vec{l}$ 所具有的规范不变性：

$$\oint_{C'} \vec{A}' \cdot d\vec{l} = \oint_{C'} (\vec{A}' - \nabla\Psi) \cdot d\vec{l}$$

式中 Ψ 为回路 C' 上的任一单值标量函数。



理由是：

$$\oint_{C'} \nabla\Psi \cdot d\vec{l} = \oint_{C'} d\Psi = 0$$

现取

$$\Psi = -\frac{1}{2}Br^2\phi$$

则有：

$$\vec{A}' - \nabla\Psi = -Br\phi\vec{e}_r + \frac{1}{2}B\nabla(r^2\phi) = \frac{1}{2}Br\,\vec{e}_\phi$$

这正是前面求得的均匀磁场合格矢势中的第一个，

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B r \, \vec{e}_\phi$$

其定义域已经从 $\vec{A}'$ 的 $0 \le \phi < 2\pi$ 延拓为 $0 \le \phi \le 2\pi$.

所以，

$$\begin{aligned}
\Phi_B &= \oint_{C'} \vec{A}' \cdot d\vec{l} \\
&= \oint_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\
&= \oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} B R \vec{e}_\phi \right] \cdot \left[R d\phi \vec{e}_\phi \right] \\
&= \frac{1}{2} B R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \, \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi \\
&= B \pi R^2
\end{aligned}$$

库仑规范：

矢势不唯一性的原因：

只有矢势的旋度 $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ 或者环量 $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_B$ 才有物理意义。

而矢势的散度 $\nabla \cdot \vec{A}$ 并没有直接的物理意义，可以随意选择。

对矢势散度的选择称为“规范 (Gauge) 选择”。在静磁学中，通常选择所谓“库仑规范”：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

库仑规范中矢势的微分方程：

在线性均匀介质中，$\vec{B} = \mu\vec{H}$，这里 μ 为常数。因此，

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\vec{J}_f$$

将 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 代入，并采用库仑规范条件，则：

$$\begin{aligned}\mu\vec{J}_f &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \\ &= -\nabla^2\vec{A}\end{aligned}$$

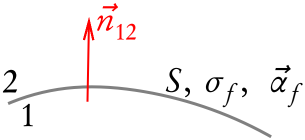
即：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}_f$$

此式表明，在库仑规范中静磁场的矢势的各个直角分量均满足 Poisson 方程：

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_f^{(i)}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

矢势的边值关系：



在两种介质界面上，磁感应强度与磁场强度满足的边值关系是：

$$\vec{n}_{12}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\big|_S=0$$
$$\vec{n}_{12}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\big|_S=\vec{\alpha}_f$$

现在把它们转化为矢势需要满足的边界条件。采取库仑规范，如此矢势的散度、旋度分别满足方程 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ 和 $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$. 写作积分形式，即为：

$$\oiint_{\mathscr{D}}\vec{A}\cdot d\vec{\sigma}=0,\qquad \oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}=\iint_{\mathscr{F}}\vec{B}\cdot d\vec{\sigma}.$$

把以上二式应用于两种介质的分界面上，前者给出 $\vec{A}$ 的法向分量连续，后者给出 $\vec{A}$ 的切向分量连续。综合起来，即有：

$$\vec{A}_1\big|_S=\vec{A}_2\big|_S$$

矢势在两种介质分界面上的连续性等价于边界条件,

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\big|_S = 0$$

为了看清这一点,可在界面某地点两侧各取一个形状、大小相同,与界面平行的闭合回路 C_1 和 C_2,所围面积同为 ΔS. 如此,根据穿过曲面 $\mathscr{F}$ 的磁通量两种表达式的等价性,

$$\Phi_B = \iint_{\mathscr{F}} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

我们有:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{12} \cdot \vec{B}_1\big|_S &= \lim_{\Delta S \to 0} \left[\frac{1}{\Delta S} \oint_{C_1} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} \right] \\ &= \lim_{\Delta S \to 0} \left[\frac{1}{\Delta S} \oint_{C_2} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l} \right] = \vec{n}_{12} \cdot \vec{B}_2\big|_S \end{aligned}$$

这正是介质分界面处磁感应强度法向分量的连续性。

磁场强度满足的边值关系

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\big|_S = \vec{\alpha}_f$$

只能以直接的方式转嫁为矢势需要满足的边界条件。注意到:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{A}$$

所以,

$$\vec{n}_{12} \times \left[\frac{1}{\mu_2}\nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1}\nabla \times \vec{A}_1\right]_S = \vec{\alpha}_f$$

小结:

库仑规范下求解静磁场分布的基本方法是求矢势微分方程

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}_f$$

满足边界条件

$$\vec{A}_1\big|_S = \vec{A}_2\big|_S, \qquad \vec{n}_{12} \times \left[\frac{1}{\mu_2}\nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1}\nabla \times \vec{A}_1\right]_S = \vec{\alpha}_f$$

的解.

磁场轴对称分布情形下矢势的定解问题:

若电流密度矢量沿 z 轴分布，矢势满足的微分方程在库仑规范中退化为:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu J_f \hat{k}$$

1. 这个方程的解的一种可能的形式是:

$$\vec{A} = A(x, y, z)\ \hat{k}$$

2. 库仑规范条件 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 进一步要求:

$$0 = \partial_z A(x, y, z) \qquad \rightsquigarrow \quad A = A(x, y)$$

由此求出的磁感应强度将与 z 坐标无关，即磁场分布具有轴对称性:

$$\vec{A} = A(x, y)\hat{k}$$

设所涉及的物理问题宜采取柱坐标系，二介质的分界面是半径为 $\rho = R$ 的圆柱面. 这样,

$$\vec{A} = A(\rho, \phi)\,\hat{k}$$

$A(\rho, \phi)$ 满足的微分方程是:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = -\mu J_f$$

若 $J_f = 0$，则此方程可以通过分离变量法求解. 通解的具体形式是:

$$\begin{aligned} A(\rho, \phi) = &(a_0 + b_0 \ln \rho)(c_0 + d_0 \phi) \\ &+ \sum_{m>0}\left(a_m \rho^m + \frac{b_m}{\rho^m}\right)\left[c_m \sin(m\phi) + d_m \cos(m\phi)\,\right] \end{aligned}$$

通解中的积分常数应由矢势满足的边界条件确定.

矢势边界条件:

1. 自然边界条件是 $\rho \to 0$ 和 $\rho \to \infty$ 两种情形下矢势的有限性[1].

2. $\rho = R$ 边界上矢势的连续性可表为:

$$A_{in}(\rho,\phi)\Big|_{\rho=R} = A_{out}(\rho,\phi)\Big|_{\rho=R}$$

3. 最后分析 $\rho = R$ 边界上的边界条件

$$\vec{e}_\rho \times \left[\frac{1}{\mu_{out}}\nabla\times\vec{A}_{out} - \frac{1}{\mu_{in}}\nabla\times\vec{A}_{in}\right]_{\rho=R} = \alpha_f\,\hat{k}$$

[1] 此处默认电流是分布于空间有限区域. 倘若电流分布可以延伸到无穷远, 则 $A_{out}(\rho,\phi)\Big|_{\rho\to\infty} \sim \ln\rho$.

注意到：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \nabla\times\left[A(\rho,\phi)\,\hat{k}\,\right]\\ &= \nabla A(\rho,\phi)\times\hat{k}\\ &= \left[\vec{e}_\rho\partial_\rho A+\frac{\vec{e}_\phi}{\rho}\partial_\phi A\right]\times\hat{k}\\ &= -\vec{e}_\phi\,\partial_\rho A\;+\;\frac{\vec{e}_\rho}{\rho}\partial_\phi A\end{aligned}$$

我们有：

$$\vec{e}_\rho\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}\right)=-\hat{k}\,\frac{1}{\mu}\partial_\rho A$$

所以，前述边界条件具体化为：

$$\frac{1}{\mu_{out}}\frac{\partial A_{out}(\rho,\phi)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R}-\frac{1}{\mu_{in}}\frac{\partial A_{in}(\rho,\phi)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R}=-\alpha_f$$

无界空间中静磁场的矢势:

在无界空间中，倘若全空间的电流分布为已知，则静磁矢势微分方程可以第二格林公式求解。

在第二格林公式，

$$\int_V (\psi \nabla'^2 \varphi - \varphi \nabla'^2 \psi) d^3x' = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right) ds'$$

中，

- 取 ψ 为静磁矢势的某一直角分量，$\psi(\vec{x}') = A_i(\vec{x}')$，以及:

$$\varphi(\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- 进一步取 V 为全空间 (所以无边界，或者边界面在无穷远处以致于边界面上的矢势为零)，则公式右端为零.
- 注意到，

$$\nabla'^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

我们有：

$$\begin{aligned} A_i(\vec{x}) &= \int_V d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')A_i(\vec{x}') \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x' [-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')]A_i(\vec{x}') \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x' A_i(\vec{x}') \left[\nabla'^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\nabla'^2 A_i(\vec{x}') \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V d^3x' \frac{J_f^{(i)}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \end{aligned}$$

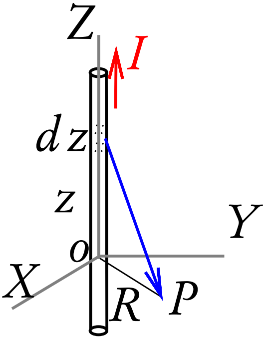
上式倒数第二步使用了第二格林公式。所以，

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V d^3x' \frac{\vec{J}_f(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

例题：

例： 无穷长直导线载电流 I，求磁场的矢势和磁感应强度分布.

解： 取导线沿 z 轴建立柱坐标系。设场点 P 到导线的距离为 R，电流元 $Id\vec{l} = Idz\hat{k}$ 到 P 的距离为 $r = \sqrt{R^2 + z^2}$，如图示. 按照前述矢势计算公式，则有，



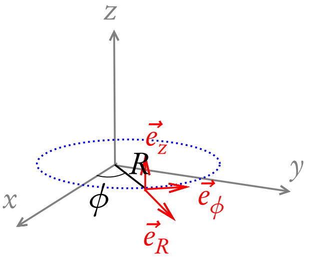
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{r}$$

$$= \hat{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad \rightsquigarrow \quad \infty$$

此积分的发散性说明：在本例中，由于电流分布于无穷长导线上，不能将无穷远处的矢势看成零，因此，

$$\vec{A}(\vec{x}) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}_f(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

本例中磁场的矢势可以按其定义式求得.
为此，先使用安培环路定理



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

计算场点 P 处的磁感应强度 $\vec{B}$，结论是：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{e}_\phi$$

现在重新计算矢势分布. 注意到柱坐标系中梯度算符的表达式是：

$$\nabla = \vec{e}_R\partial_R + \frac{\vec{e}_\phi}{R}\partial_\phi + \hat{k}\partial_z$$

所以，

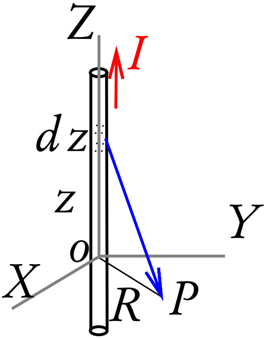
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\vec{e}_R \times \hat{k}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\vec{e}_R\partial_R(\ln R)\right] \times \hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\nabla(\ln R) \times \hat{k}$$

利用矢量分析恒等式，

$$\nabla \times (\psi \vec{C}) = \nabla\psi \times \vec{C} + \psi\nabla \times \vec{C}$$

以及在柱坐标系中 $\nabla \times \hat{k} = 0$ 的事实，我们有：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\nabla(\ln R) \times \hat{k} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\nabla \times \left[(\ln R)\hat{k}\right] \\ &= \nabla \times \left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\ln R)\hat{k} + \vec{c}\right]\end{aligned}$$



将此式与矢势的定义式 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 比较，即知本例中载流直导线在 P 点激发的磁场的矢势为：

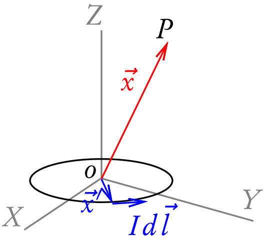
$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\ln R)\hat{k} + \vec{c}$$

参考书推荐:

T. Matsushita,

Electricity and Magnetism, Springer, 2014, Chapters 6 & 7.

例： 半径为 a 的导线圆环载有电流强度 I，求矢势和磁感应强度.



解： 因电流分布于空间有限区域，故其磁场的矢势可由下式计算：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C\frac{Id\vec{l}}{r}$$

式中 $r=|\vec{x}-\vec{x}'|$.

设场点 P 的球坐标为 (R,θ,ϕ)，则：

$$\vec{x}=R\vec{e}_R=R\cos\theta\,\hat{k}+R\sin\theta\cos\phi\,\hat{i}+R\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}$$

载流圆环位于赤道面上，任一源点的球坐标可写为 $(a,\pi/2,\phi')$，其相对于坐标原点的位置矢量可表为：

$$\vec{x}'=a\vec{e}_{R'}=a\cos\phi'\,\hat{i}+a\sin\phi'\,\hat{j}$$

从而可以把环形导线上的电流元表达为:

$$Id\vec{l} = Id\vec{x}' = Ia(-\sin\phi'\,\hat{i} + \cos\phi'\,\hat{j})d\phi'$$

ϕ' 的取值范围是: $0 \leq \phi' \leq 2\pi$. 进一步注意到:

$$\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{x}' &= Ra\sin\theta(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi') \\ &= Ra\sin\theta\cos\left(\phi - \phi'\right) \end{aligned}$$

场点、源点之间的距离可以表达为:

$$\begin{aligned} r &= |\vec{x} - \vec{x}'| \\ &= \sqrt{R^2 + a^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos(\phi - \phi')} \end{aligned}$$

将 $Id\vec{l}$ 与 r 的表式代入到矢势的计算公式中，并计及直角坐标系基矢是常矢量这一事实，我们得到:

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\Bigg[-\hat{i}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\theta\cos(\phi-\phi')}} \\
&\qquad +\hat{j}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\theta\cos(\phi-\phi')}}\Bigg]
\end{aligned}
$$

做变量代换 $\alpha=\phi'-\phi$并计及数学恒等式：

$$
\int_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha d\alpha}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\theta\cos\alpha}}=0
$$

可以把矢势的表达式简化为：

$$
\vec{A}=\frac{\mu_0 I a}{4\pi}(-\sin\phi\,\hat{i}+\cos\phi\,\hat{j})\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\theta\cos\alpha}}
$$

数学小贴士：

场点 P 处的球坐标沿方位角 ϕ 方向的单位基矢可以通过整体直角坐标基矢表为，

$$\vec{e}_\phi = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi \vec{e}_R = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

所以，

$$\vec{A} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\alpha}}$$

即 P 点磁场的矢势只有 ϕ 分量，且此分量只依赖于两个球坐标 R 与 θ，和方位角 ϕ 的大小无关. 此表达式中涉及的积分是椭圆积分，无解析表达式.

现在设场点 P 的位置满足条件：

$$2Ra\sin\theta \ll R^2 + a^2$$

这个条件描写

- $R \gg a$，远场
- $R\sin\theta \ll a$，近轴

两种近似情形．在此条件下，

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi'}} \approx \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}\left[1 + \left(\frac{Ra\sin\theta\cos\phi'}{R^2 + a^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{Ra\sin\theta\cos\phi'}{R^2 + a^2}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{Ra\sin\theta\cos\phi'}{R^2 + a^2}\right)^3 + \cdots\right]$$

利用此展开式，并注意到当 n 为非负整数时，

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi' d\phi' = \frac{\pi^2 2^{2n+1}}{(2n)!\left[\Gamma(1/2-n)\right]^2}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\phi' d\phi' = 0$$

可以求出矢势的近似表达式如下：

$$\vec{A} = A_\phi(R,\theta)\vec{e}_\phi$$

式中，

$$A_\phi(R,\theta) \approx \frac{\mu_0 I a}{4\sqrt{R^2+a^2}} \frac{R a \sin\theta}{R^2+a^2}\left[1 + \frac{15}{8}\frac{R^2 a^2 \sin^2\theta}{(R^2+a^2)^2}\right]$$

下面求磁感应强度的分布.

梯度算符在场点 P 处的球坐标系中表为，

$$\nabla = \vec{e}_R \partial_R + \frac{\vec{e}_\theta}{R}\partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{R\sin\theta}\partial_\phi$$

所以，

$$\nabla\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{R\sin\theta}, \quad \rightsquigarrow \quad \nabla\times\frac{\vec{e}_\phi}{R\sin\theta} = 0$$

场点 P 处的磁感应强度计算如下：

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} = \nabla\times(A_\phi\vec{e}_\phi) = \nabla\times\left[(R\sin\theta A_\phi)\,\frac{\vec{e}_\phi}{R\sin\theta}\right] \\
&= \nabla(R\sin\theta A_\phi)\times\frac{\vec{e}_\phi}{R\sin\theta} \\
&= \left[\vec{e}_R\partial_R(R\sin\theta A_\phi) + \frac{\vec{e}_\theta}{R}\partial_\theta(R\sin\theta A_\phi)\right]\times\frac{\vec{e}_\phi}{R\sin\theta} \\
&= \frac{\vec{e}_R}{R^2\sin\theta}\partial_\theta(R\sin\theta A_\phi) - \frac{\vec{e}_\theta}{R\sin\theta}\partial_R(R\sin\theta A_\phi)
\end{aligned}$$

设场点 P 位于远场区，$R \gg a$，则：

$$A_\phi \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2}\sin\theta\left(1+\frac{15}{8}\frac{a^2\sin\theta}{R^2}\right) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2}\sin\theta$$

通过简单的计算可知：

$$\partial_\theta(R\sin\theta A_\phi) \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2R}\sin\theta\cos\theta$$

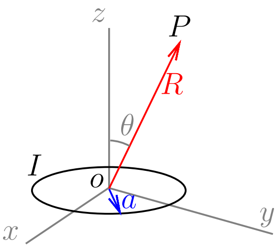
$$\partial_R(R\sin\theta A_\phi) \approx -\frac{\mu_0 I a^2}{4R^2}\sin^2\theta$$

代入到前页给出的 $\vec{B}$ 的表达式中，就得到：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3}\left(2\cos\theta\vec{e}_R + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

将来我们会看到，上式实际上是磁偶极子激发的磁感应强度. 所以，闭合载流导线对于远处的场点而言相当于是一个磁偶极子.

半无限载流螺线管的矢势:



按照前述例题的分析，半径 $a \rightsquigarrow 0$ 但 $m = I\pi a^2$ 保持有限的环形载流导线在空间激发的静磁矢势为:

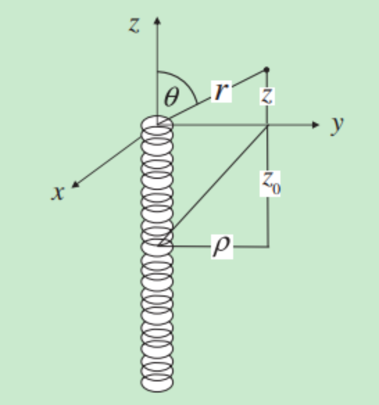
$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0 I a^2}{4R^2}\sin\theta\vec{e}_\phi \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$

式中 $\vec{m} = m\hat{k}$ 是载流线圈的磁偶极矩, $\vec{R} = R\vec{e}_R$ 是场点 P 相对于载流线圈中心的位置矢量. 采取柱坐标系, $\vec{R} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$, 则有:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_\phi$$

$$\begin{aligned}&\hat{k}\times\vec{e}_R \\ &= \hat{k}\times\sin\theta(\cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}) \\ &= \sin\theta(\cos\phi\,\hat{j} - \sin\phi\,\hat{i}) \\ &= \sin\theta\vec{e}_\phi\end{aligned}$$

现在考虑半无限长的载流螺线管在空间激发的静磁场的矢势. 如图示，设螺线管占据 $-z$ 轴，单位长度的磁偶极矩为 $g\hat{k}$,



螺线管上纵向坐标为 z_0 的载流圆环在场点 P 处激发的静磁矢势为:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 g dz_0}{4\pi} \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \vec{e}_\phi$$

半无限长载流螺线管在场点 P 处激发的静磁矢势为：

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \int d\vec{A} \\
&= \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 g \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{dz_0}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\
&= \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 g \rho}{4\pi} \frac{1}{\rho^2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right]
\end{aligned}$$

引入 P 点的球坐标 $(r,\ \theta,\ \phi)$. 由前页示意图知：

$$\rho = r\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

故半无限长载流螺线管在长点 P 处激发的矢势可重新表为：

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g(1 - \cos\theta)}{r\sin\theta} \vec{e}_\phi}$$

显然，此矢势的定义域为 $r > 0,\ 0 \le \theta < \pi$，即矢势在排除了原点及 $-z$ 轴的空间中有效.

半无限长载流螺线管在长点 P 处激发的磁感应强度分布为：

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} \vec{e}_\phi \right] \\
&= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \nabla(1-\cos\theta) \times \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta} \\
&= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \vec{e}_\theta \times \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta} \\
&= \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\vec{e}_r}{r^2}
\end{aligned}$$

其定义域自然也是 $r > 0,\ 0 \le \theta < \pi$.

$\mathcal{Q}$: 这个表达式可否能让你联想起了什么？

静磁场的能量:

线性介质中磁场的总能量表达为:

$$W=\int_\Omega u d^3x, \qquad u=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

上式中 u 是磁能密度，总能量积分遍及磁场分布的全部区域 Ω.
在静磁现象中，$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$, $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f$, 注意到:

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{H} &= (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}=\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k)H_i=\partial_j(\epsilon_{ijk}A_kH_i)-\epsilon_{ijk}A_k(\partial_j H_i)\\ &= \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot\vec{J}_f\end{aligned}$$

静磁场的总能量可以重新表达为:

$$W=\frac{1}{2}\int_\Omega \vec{B}\cdot\vec{H}d^3x=\frac{1}{2}\oint_S(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{s}+\frac{1}{2}\int_\Omega \vec{A}\cdot\vec{J}_f d^3x$$

假设无穷远处磁场的矢势为零，则上式右端第一项的面积分为零. 所以，

$$W=\frac{1}{2}\int_V d^3x\vec{A}\cdot\vec{J}_f$$

式中的积分区域 V 仅仅代表电流的分布区域.

电流与外磁场之间的相互作用磁能:

现在计算某电流分布 $\vec{J}$ 在给定外磁场中的相互作用能量.

以 $\vec{A}_e$ 表示外磁场的矢势, $\vec{J}_e$ 表示产生此外磁场的电流分布, 以 $\vec{A}$ 表示电流分布 $\vec{J}$ 本身激发的磁场的矢势. 如此, 总的电流分布 $(\vec{J}+\vec{J}_e)$ 所激发的总的静磁场的能量可写为:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_V (\vec{J}+\vec{J}_e)\cdot(\vec{A}+\vec{A}_e)\,d^3x \\ &= \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\,d^3x + \frac{1}{2}\int_V \vec{J}_e\cdot\vec{A}_e\,d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_V (\vec{J}\cdot\vec{A}_e + \vec{J}_e\cdot\vec{A})\,d^3x \end{aligned}$$

所以, 电流 $\vec{J}$ 与外磁场 $\vec{B}_e$ 的相互作用能量是:

$$W_i = \frac{1}{2}\int_V (\vec{J}\cdot\vec{A}_e + \vec{J}_e\cdot\vec{A})\,d^3x$$

因为，

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}')\, d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad \vec{A}_e = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}_e(\vec{x}')\, d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

前页所得的相互作用能 W_i 表达式中的两项相等. 所以，

$$W_i = \int_V \vec{J}\cdot\vec{A}_e\, d^3x$$

作业：

1. 取库仑规范，试分别在直角坐标系、球坐标系和柱坐标系中写出均匀磁场 $\vec{B} = B\hat{i}$ 的矢势[2].

2. 两根无限长直导线相互平行，其中载有大小相等、方向相反的稳恒电流．设每根导线中的电流强度为 I，求此体系所激发的静磁场的矢势．

3. 半径为 R 的薄圆柱壳上载有沿轴向的稳恒电流，其线电流密度矢量在柱坐标系中可表为：

$$\vec{\alpha}_f = \alpha_0(1 + k\cos\phi)\hat{k}$$

式中 α_0 和 k 均为常参数，ϕ 为方位角．求薄圆柱壳内、外空间的磁场分布．

[2]默认假设：笛卡尔直角坐标系 x, y, z 轴方向的单位基矢分别记为 $\hat{i}$, $\hat{j}$ 和 $\hat{k}$.