电动力学

第一章：电磁现象的基本规律，Maxwell 方程组

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

March 12, 2019

电磁感应定律:

闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比，其方向选取：阻碍磁通量变化.

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

- Faraday, 1831 年发现.
- 实验定律.
- 揭示了时变电场的有旋性.

电磁感应定律（续一）:

线圈中感应电动势可以表为“感应电场”场强矢量 $\vec{E}$ 的沿线圈的线积分,

$$\mathscr{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

式中 $\vec{E}$ 是线元 $d\vec{l}$ 处的电场强度. 所以, Faraday 电磁感应定律可以重新表为:

$$\oint\limits_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

最后一步假设回路 C 不随时间变化[1]. 利用高等数学中的 Stokes 定理知,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

[1] 此条件实际上规定了微分形式的 Faraday 定律 $\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ 成立的参考系.

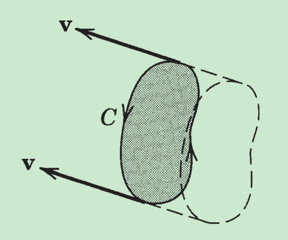
所以，

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

1. 感应电场 $\vec{E}$ 是有旋场，对其不能引入“电势”.

若载流线圈 C 相对于实验室参考系以速度 $\vec{v}$ 运动. 以 $\vec{E}'$ 表示实验室参考系中的观测者测得的线元 $d\vec{l}$ 处的场强，Faraday 电磁感应定律可写为：

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



注意到曲面 S 上各点的磁感应强度以两种方式依赖于时间参数：t 和 $\vec{x}(t)$，我们有：

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_t + v_i \partial_i$$

因此在直角坐标系中，

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \partial_t \vec{B} + \vec{e}_j v_i (\partial_i B_j)$$

此式第二项的物理意义可以通过如下恒等式揭示出来：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= \vec{e}_j \epsilon_{jil}\, \epsilon_{lmn} v_m \partial_i B_n \\ &= \vec{e}_j (\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{jn}\delta_{im}) v_m \partial_i B_n \\ &= \vec{e}_j v_j (\partial_i B_i) - \vec{e}_j v_i (\partial_i B_j) \\ &= -\vec{e}_j v_i (\partial_i B_j)\end{aligned}$$

最后一步利用了磁感应强度的无散性，$\nabla \cdot \vec{B} = 0$. 所以，

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \partial_t \vec{B} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

利用此式可以把 Faraday 定律改写为：

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\int_S \left[\partial_t \vec{B} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{s}$$

亦即：

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\int_S \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{s} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

显然，此式第二项正是同学们在电磁学中所熟悉的动生电动势．可以把此式等价地写为：

$$\oint_C \left[\vec{E}' - (\vec{v} \times \vec{B})\right] \cdot d\vec{l} = -\int_S \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

将此式与前述线圈不动情形下的 Faraday 定律，

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

比较，我们看到：

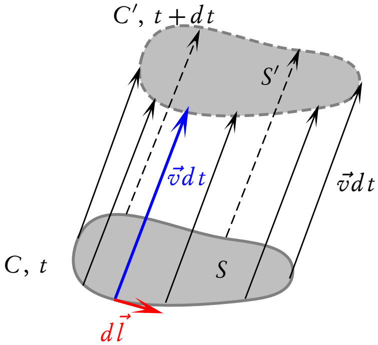
$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

即电场强度与参考系的选择有关．这个问题的深入讨论将涉及电磁现象基本规律的参考系问题．

附录:

闭合导线在磁场中运动时穿过其所围曲面的磁通量变化率也可以按下列较直观的方法计算.

如图. 设闭合导线以速度 $\vec{v}$ 在磁场 $\vec{B}$ 中运动, 它在 t 时刻和 $t+dt$ 时刻的构型分别由线圈 C 与 C' 表示.



在 t 到 $t+dt$ 时间内, 穿过闭合导线所围曲面的磁通量增量是:

$$d\Phi_B = \int_{S'} d\vec{s}\cdot\vec{B}(t+dt) - \int_{S} d\vec{s}\cdot\vec{B}(t)$$

考察由 C, C' 所围的两个曲面 S 和 S' 以及高为 vdt 的柱面构成的闭合曲面[2]. 按照磁场的 Gauss 定理，磁感应强度对于此闭合曲面的通量为零. 因此在 $t+dt$ 时刻,

$$\int_{S'} d\vec{s} \cdot \vec{B}(t+dt) = \int_{S} d\vec{s} \cdot \vec{B}(t+dt) - \int_{\text{侧面}} d\vec{s} \cdot \vec{B}(t+dt)$$

把此式代回到磁通量增量的表达式中，得:

$$\begin{aligned} d\Phi_B &= \int_S d\vec{s} \cdot \left[\, \vec{B}(t+dt) - \vec{B}(t) \,\right] - \int_{\text{侧面}} d\vec{s} \cdot \vec{B}(t+dt) \\ &= dt \int_S d\vec{s} \cdot \partial_t \vec{B}(t) - \int_{\text{侧面}} d\vec{s} \cdot \vec{B}(t+dt) \end{aligned}$$

高斯面侧面的面元矢量可表为:

$$d\vec{s} = d\vec{l} \times \vec{v} dt$$

[2] 即高斯面.

于是，

$$\begin{aligned}
\int_{\text{侧面}} d\vec{s}\cdot\vec{B}(t+dt) &= \oint_C \left[d\vec{l}\times\vec{v}dt\right]\cdot\vec{B}(t+dt)\\
&= dt\oint_C d\vec{l}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}(t+dt)\right]\\
&= dt\oint_C d\vec{l}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}(t)\right]
\end{aligned}$$

进而：

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \int_S d\vec{s}\cdot\partial_t\vec{B}(t) - \oint_C d\vec{l}\cdot\left[\vec{v}\times\vec{B}(t)\right]$$

此恰为前面求出的结果.

安培环路定理的内在缺陷：

现在我们研究“时变电场是否激发磁场”的问题. 首先我们指出：静磁安培环路定理，即

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

与电荷守恒定律是相冲突的.

事实上，取上式的散度，注意到旋度场无散，则：

$$0 = \nabla \cdot \left[\nabla \times \vec{B}\right] = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

最后一步使用了普遍形式的”电荷守恒定律”. 此式的右端仅在稳恒状态下才等于零.

矛盾！

Maxwell 位移电流假设:

历史上是 Maxwell 第一次揭示出了上述矛盾，并提出了解决矛盾的方案. Maxwell 的方案是把静磁安培环路定律修改为:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \vec{J}_D\right]$$

$\vec{J}_D$ 称为“位移电流”密度矢量. 为了了解 $\vec{J}_D$ 的性质，求上式的散度，则:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_0 \nabla \cdot \left[\vec{J} + \vec{J}_D\right] = \mu_0 \left[\nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{J}_D\right] = -\mu_0 \partial_t \rho + \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_D \\ &= -\mu_0 \partial_t \left[\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right] + \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_D \\ &= \mu_0 \nabla \cdot \left[\vec{J}_D - \epsilon_0 \partial_t \vec{E}\right] \end{aligned}$$

倒数第三步、第二步分别应用了电荷守恒定律和电场的高斯定理. 所以，位移电流本质上就是电场强度的时间变化率:

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell 方程组:

真空中的 Maxwell 方程组:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}
\end{aligned}$$

点评:

- 一般情况下，不再有单独的电场，也不再有单独的磁场，总称为电磁场;
- ρ、$\vec{J}$ 为源项，可以激发电磁场;
- 即使源项 ρ、$\vec{J}$ 为零，电磁场通过互相激发仍能存在;
    1. 首先在理论上预言了电磁波;
    2. 电磁场可以独立于电荷之外.

在静电场 $\vec{E}$ 中，电荷元 $dq = \rho dV$ 受到的力是静电库仑力：

$$d\vec{F} = \rho dV\vec{E}$$

在稳恒磁场 $\vec{B}$ 中，电流元 $\vec{J}dV$ 受到的力是静磁安培力：

$$d\vec{F} = \vec{J}dV \times \vec{B}$$

在一般的电磁场中，电荷、电流分布受到的电磁作用力是：

$$d\vec{F} = \rho dV\vec{E} + \vec{J}dV \times \vec{B}$$

点评：

- 常常引入“力密度矢量”替代上式：

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

- 对于在电磁场中运动的带电粒子，

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

此式称为“Lorentz 力公式”。实验证实 Lorentz 力公式对以任意运动速度的带电粒子都是适用的。

介质:

介质概况:

- 介质由分子组成. 因为分子内部有带正电的原子核和带负电的核外电子，介质实际上是一个带电粒子系统，其内部存在着不规则的迅速变化着的微观电磁场.
- 分子是电中性的. 因此，当没有外电磁场时介质内部并无宏观的电荷、电流分布.
- 当把介质置于外电磁场中时，介质中的带电粒子受场的作用，无极分子正负电荷中心发生相对位移、有极分子以及分子电流沿外场规则取向. 这就是介质的极化、磁化现象.

1. 由于极化和磁化，介质内部及表面上会出现宏观的束缚电荷、电流分布;
2. 这些束缚电荷电流分布会在介质内部激发附加的电磁场，叠加在外场上得到介质内的总电磁场.

极化强度矢量 $\vec{P}$:

在外电场作用下，分子正负电荷中心发生错位，介质内部出现宏观的电偶极矩分布以及宏观的束缚电荷分布．宏观电偶极矩分布用“极化强度”描述，定义为：

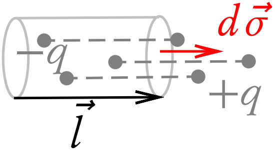
$$\vec{P} = \frac{\sum_i q_i \vec{x}_i}{\Delta V}$$

宏观的束缚电荷分布用束缚电荷体密度 ρ_P 和面密度 σ_P 描写．二者的关系是，在介质体内：

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

而在介质分界面上：

$$\sigma_P = -\vec{n}_{12} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$



证明：设想因为极化使得介质分子正负电荷相距 $\vec{l}$. 若分子数体密度为 n，则穿出面元 $d\vec{s}$ 的正电荷量为：

$$nq\vec{l} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

因此，极化从闭合曲面 S 中穿出的正电荷总量为：

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

束缚电荷密度:

设闭合曲面 S 在介质内部所包围区域的体积为 V. 因为介质整体上是电中性的，所以通过界面 S 穿出的正电荷在量值上等于 V 内净余的负电荷:

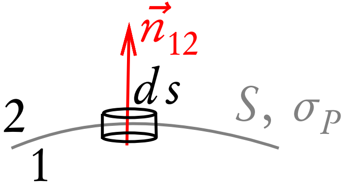
$$q_P = \int_V \rho_P d^3x = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

利用奥高定理知，

$$\int_V \rho_P d^3x = -\int_V d^3x \nabla \cdot \vec{P}$$

注意到闭合曲面 S(因此区域 V) 是任意选取的，所以，

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$



以 σ_P 表示介质分界面上的束缚电荷面密度，则，

$$q_P = \sigma_P ds = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

即: $\sigma_P = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{12}$

对均匀极化而言，束缚电荷只出现在自由电荷附近以及介质的界面处.

极化电流密度矢量:

介质在外场中发生极化时，介质体内也可能出现极化电流.

Question : 极化电流密度矢量 $\vec{J}_P$ 的表达式是什么?

介质极化后介质内部出现的束缚电荷也需要服从电荷守恒定律的制约:

$$\partial_t \rho_P + \nabla \cdot \vec{J}_P = 0$$

注意到

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

我们有:

$$\nabla \cdot \vec{J}_P = -\partial_t \rho_P = \partial_t \left(\nabla \cdot \vec{P} \right) = \nabla \cdot \left(\partial_t \vec{P} \right)$$

所以，$\vec{J}_P = \partial_t \vec{P} + \nabla \times \vec{C}$，这里的 $\vec{C}$ 从数学上讲是完全任意的矢量场. 但从物理图像上看，极化电流的出现是介质极化的产物，$\vec{P} = 0$ 时应该没有极化电流. 因此，

$$\vec{J}_P = \partial_t \vec{P}$$

电位移矢量:

考虑介质内总电场强度的散度. 因为总场强是由自由电荷与束缚电荷共同激发的,

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

所以,

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

令:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

称之为介质中的电位移矢量.则介质中的电场 Gauss 定理可以写为:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

提醒:

- $\vec{D}$ 只是一个辅助物理量,它并不代表介质中的场强.
- $\vec{D}$ 与场强之间的关系须由实验确定.对于各向同性的线性介质,

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

χ_e 称为介质的极化率. 从而,

$$\vec{D} = (1 + \chi_e)\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

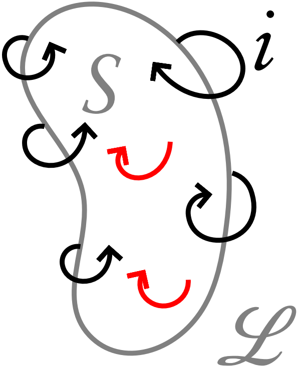
式中 $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0$.

磁化强度矢量:

- 介质分子内的电子运动形成微观分子电流，可以用磁偶极矩描写.
- 设分子电流是载有电流强度为 i 的线圈，其面积矢量为 $\vec{a}$，则分子磁偶极矩为 $\vec{m} = i\vec{a}$.
- 介质置于外磁场中将出现宏观的磁偶极矩分布，这个现象称为“磁化”. 磁化强度定义为:

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

- 通过曲面 S 的总磁化电流强度 I_M 等于其边界线 $\mathscr{L}$ 所链环着的分子数目乘以每个分子的电流强度 i.



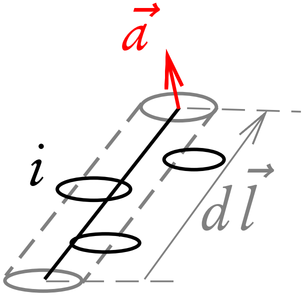
磁化电流密度矢量:

右图所示的是边界线上的一个线元. 显然, 若分子中心位于体积为 $\vec{a}\cdot d\vec{l}$ 的柱体内, 则该分子电流就被 $d\vec{l}$ 所穿过. 设介质的分子数体密度为 n, 则被边界线 $\mathscr{L}$ 链环着的分子电流总数为:

$$\oint_{\mathscr{L}} n\vec{a}\cdot d\vec{l}$$

穿过介质内某个曲面 S 的总磁化电流强度是:

$$\begin{aligned} I_M &= i\oint_{\mathscr{L}} n\vec{a}\cdot d\vec{l} = \oint_{\mathscr{L}} n\vec{m}\cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\mathscr{L}} \vec{M}\cdot d\vec{l} = \int_S d\vec{s}\cdot\nabla\times\vec{M} \end{aligned}$$



介质内的磁化电流密度矢量为:

$$\vec{J}_M = \nabla\times\vec{M}$$

磁场强度:

介质中的 Maxwell 方程应为:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B}
&= \mu_0 \left[\vec{J}_f + \vec{J}_P + \vec{J}_M\right] + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \\
&= \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \partial_t \left[\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right] \\
&\quad + \mu_0 \nabla \times \vec{M} \\
&= \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \partial_t \vec{D} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}
\end{aligned}
$$

令

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

并称之为介质中的 “磁场强度”，则 Maxwell 方程改写为:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \partial_t \vec{D}$$

提醒:

- $\vec{H}$ 只是辅助物理量.
- $\vec{H}$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 之间的关系须由实验确定. 对于各向同性的线性介质,

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

χ_M 称为介质的磁化率. 从而,

$$\vec{B} = (1+\chi_M)\mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$$

式中 $\mu = (1+\chi_M)\mu_0$, 称为介质的磁导率.

问题： 是否存在与磁化电流分布相联系的磁化电荷分布 ρ_M？

这个问题的答案应该从电荷守恒定律出发去探索. 与介质磁化相联系的电荷守恒定律是：

$$\partial_t \rho_M + \nabla \cdot \vec{J}_M = 0$$

注意到

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

我们有：

$$\partial_t \rho_M = -\nabla \cdot \vec{J}_M = -\nabla \cdot \nabla \times \vec{M} = 0$$

所以，$\rho_M = C$，此处的 C 从数学上讲是一个与时间参数 t 无关的任意标量. 但从物理上讲，C 与时间无关意味着 C 与介质是否磁化无关. 介质未磁化时，无磁化电荷分布，$\rho_M = C = 0$. 因此，即使介质磁化后，也应该有：

$$\rho_M = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = (\rho_f + \rho_P)/\epsilon_0, \qquad \rightsquigarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

介质中的 Maxwell 方程组:

利用电位移矢量 $\vec{D}$ 和磁场强度矢量 $\vec{H}$, 可以把介质中的 Maxwell 方程组写为:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_f$$

式中的 ρ_f 和 $\vec{J}_f$ 只代表自由的电荷、电流分布.

说明:

解决实际问题时，还需要补充一些描写介质电磁性质的实验关系，例如:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

最后一式是导体中的欧姆定律.

作业：

1. 请证明：在均匀介质内部，极化电荷体密度 ρ_P 总是等于自由电荷体密度 ρ_f 的 $-(1-\epsilon_0/\epsilon)$ 倍.

2. 一个点电荷 Q 位于两种均匀无限的介质的分界面上. 设介质的介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2，求空间静电场场强矢量的分布.

3. 设某种介质的电磁性质方程为

$$\vec{D}=\epsilon\vec{E}+\alpha\vec{H}, \quad \vec{B}=\beta\vec{E}+\mu\vec{H}$$

   其中 α, β, ϵ, μ 均为常参数. 证明：在无源情形下电场强度随时空坐标的演化服从方程式

$$\nabla^2\vec{E}+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+(\alpha\beta-\mu\epsilon)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$