Lecture 4
第四讲
Antiderivatives and Indefinite Integrals
原函数与不定积分

Zhenglu Jiang
Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China
姜正禄
中山大学数学系，广州 510275

目录

一、原函数

背景　定义　基本定理

背景

已知某个函数的导数或微分, 要求出该函数.

讨论求导运算的逆运算,
求已知函数的“原函数”.

定义

已知定义于(a,b)上的函数$f(x)$和$F(x)$满足：对于$\forall x \in (a,b)$，有$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$为$f(x)$的一个原函数.

基本定理

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{设}F(x)\text{和}G(x)\text{都是}f(x)\text{的原函数,}\\ \text{则}F(x)-G(x)=C,\ \text{其中}C\text{为某一个常数.}\end{array}}$$

证明　主要分为以下三要点:

$$(1)\left\{\begin{array}{c} h(x)\text{在点}x_0\text{处可导} \\ h(x_0)\le h(x) \\ (\text{或}h(x_0)\ge h(x)) \\ (\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \end{array}\right\}\Rightarrow h'(x_0)=0.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{c} h(x)\text{在}[a,b]\text{上连续} \\ h(x)\text{在}(a,b)\text{内可导} \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} \exists\xi\in(a,b),\ni \\ h'(\xi)=\frac{h(a)-h(b)}{a-b} \end{array}\right\}.$$

(3) 如 $h'(x)=0\ \ (\forall x\in[a,b])$, 则 $h(x)=h(a)$.

二、不定积分

定义　基本公式　运算性质　计算方法

不定积分的定义

设$F(x)$是$f(x)$的原函数, 则$f(x)$的任何一个原函数都可用$F(x)+C$来表示. 称$F(x)+C$为$f(x)$的不定积分, 记为$\int f(x)dx$. 称记号$\int$为积分号，称$f(x)$为被积函数，称$f(x)dx$为被积表达式，称x为积分变量。

$f(x)$的不定积分表示$f(x)$的原函数的全体.

求不定积分的基本公式

$$\int 0dx = C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^{2} x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^{2} x dx = -\cot x + C$$

$$\int (\tan x)(\sec x)dx = \sec x + C$$

$$\int (\cot x)(\csc x)dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}}dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot} x + C$$

不定积分的运算性质

加减运算

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

导数(微分)与不定积分互为逆运算

$$\left[\int f(x) dx\right]' = f(x)$$

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

求下列不定积分：

(1) $\int x^2\sqrt{x}dx$；

(2) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{x}}dx$；

(3) $\int (\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{4}{\sqrt{x^3}})dx$；

(4) $\int (x^2+1)^2 dx$；

(5) $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)dx$；

(6) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$；

(7) $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx$；　　(8) $\int e^x (1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}) dx$；

(9) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$；　　(10) $\int (2^x+3^x)^2 dx$；

(11) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$；　　(12) $\int (\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) dx$；

(13) $\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$；　　(14) $\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx.$

求下列不定积分：

(1) $\int (5\sin x - 3\cos x)dx$；

(2) $\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$；

(3) $\int tg^2 x dx$；

(4) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$

(5) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$；

(6) $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$.

不定积分的计算方法

简单换元法(凑微分法或第一换元法)

设$\int f(u)du = F(u) + C$, 如$g(x)$可微, 则

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

一般换元法(第二换元法)

设$\int f(g(x))g'(x)dx = H(x) + C$, 记$x = g^{-1}(u)$, 则

$$\int f(u)du = H(g^{-1}(u)) + C.$$

分部积分法

$$\int vdu = uv - \int udv$$

简单换元法(凑微分法或第一换元法)

设$\int f(u)du = F(u) + C$, 如$g(x)$可微, 则

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

常见类型

$$\int f(x^{n+1})x^n dx \qquad \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}dx \qquad \int \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2}dx$$

$$\int f(\sin x)\cos x dx \qquad \int f(a^x)a^x dx$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 x dx \qquad \int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx$$

用线性代换计算下列积分：

(1) $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$ ； (2) $\int \sin\frac{x}{2}dx$ ；

(3) $\int \cos ax dx$ ； (4) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax}$ ；

(5) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$ ； (6) $\int \frac{dx}{3x-4}$ ；

(7) $\int \frac{xdx}{1-x}$ ； (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ ；

(9) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$； (10) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-3x}\,dx$；

(11) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$； (12) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$；

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$； (14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$；

(15) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$； (16) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

用适当代换求下列积分：

(1) $\int x(1+x^2)^5 dx$；

(2) $\int \frac{x dx}{1+x^2}$；

(3) $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx$；

(4) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $\int x e^{-x^2} dx$；

(6) $\int \frac{x}{4+x^4} dx$；

(7) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$；

(8) $\int \frac{dx}{1+e^x}$；

(9) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

(10) $\int 3^x e^x dx$;

(11) $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x \cdot b^x}dx$;

(12) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$;

(13) $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

(15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$;

(16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(17) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$;

(18) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

求下列三角函数的积分：

(1) $\int \cos 2x \cdot \sin 4x dx$；

(2) $\int \sin x \cdot \sin 3x dx$；

(3) $\int \cos 4x \cdot \cos 7x dx$；

(4) $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} dx$；

(5) $\int \cos^2 wx dx$；

(6) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$；

(7) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$；

(8) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$；

(9) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$；

(10) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$.

一般换元法(第二换元法)

设$\int f(g(x))g'(x)dx = H(x)+C$, 记$u = g(x)$, 或$x = g^{-1}(u)$, 则

$$\int f(u)du = H(g^{-1}(u))+C.$$

$$\underset{\mathrm{I}}{\int f(g(x))g'(x)dx} = \underset{\mathrm{II}}{\int f(u)du}$$

已知II求I，是第一换元法;

已知I求II，是第二换元法.

常用代换

1. 幂函数代换、指数代换、倒置代换

$$x=(at+b)^{\alpha}\text{、}t=a^{x}\text{、}x=1/t$$

2. 正弦函数代换、余弦函数代换

$$x=a\sin t\text{、}x=a\cos t$$

例如$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

3. 正切函数代换、双曲正弦函数代换

$$x=a\tan t\text{、}x=a\sinh t$$

例如$\int 1/\sqrt{a^2+x^2}dx$

4. 正割函数代换、双曲余弦函数代换

$$x=a\sec t\text{、}x=a\cosh t$$

例如$\int 1/\sqrt{x^2-a^2}dx$

5. 根式代换

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

双曲函数

双曲正弦： $\sinh(x) = [e^x - e^{-x}]/2$

双曲余弦： $\cosh(x) = [e^x + e^{-x}]/2$

双曲正切： $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$

或 $\tanh(x) = [e^x - e^{-x}]/[e^x + e^{-x}]$

双曲余切： $\coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x)$

或 $\coth(x) = [e^x + e^{-x}]/[e^{(}x) - e^{-x}]$

双曲正割： $\mathrm{sech}(x) = 1/\cosh(x)$

或 $\mathrm{sech}(x) = 2/[e^x + e^{-x}]$

双曲余割： $\mathrm{csch}(x) = 1/\sinh(x)$

或 $\mathrm{csch}(x) = 2/[e^x - e^{-x}]$

反双曲函数 双曲函数的反函数

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{arctanh}(x) = \ln[\sqrt{1 - x^2}/(1 - x)]$$

或 $\operatorname{arctanh}(x) = \ln[(1 + x)/(1 - x)]/2$

$$\operatorname{arccoth}(x) = \ln[\sqrt{x^2 - 1}/(x - 1)]$$

或 $\operatorname{arccoth}(x) = \ln[(x + 1)/(x - 1)]/2$

$$\operatorname{arcsech}(x) = \pm \ln[1 + \sqrt{1 - x^2}/x]$$

$$\operatorname{arccsch}(x) = \begin{cases} \ln[1 - \sqrt{1 + x^2}/x], & x < 0 \\ \ln[1 + \sqrt{1 + x^2}/x], & x > 0 \end{cases}$$

用适当代换求下列函数积分（$a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$;

(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$;

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$;

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$;

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$.

求下列函数积分（$a>0,b>0$）：

(1) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$； (2) $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$；

(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$； (4) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$；

(5) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$； (6) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$；

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$； (8) $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$；

(9) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

分部积分法

$$\int v du = uv - \int u dv$$

选择u和v先后循序的有效方法

ILAET选择法(排序在后者优先进入积分号)

I(反三角函数); L(对数函数); A(代数函数); E(指数函数); T(三角函数)

在以上排序中后面的函数u'与积分变量的微分之积作为函数u的微分du;

经分部积分公式，函数u优先进入积分号;

在以上排序中，前面的函数v在分部积分之前保留在积分号中.

求下列不定积分：

(1) $\int \ln(1+x^2)dx$；

(2) $\int x^a \ln x dx \quad (a \neq -1)$

(3) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$；

(4) $\int x e^{-3x} dx$；

(5) $\int x^2 e^{-2x} dx$；

(6) $\int x \cos nx dx$；

(7) $\int x^2 \sin 2x dx$；

(8) $\int x \mathrm{arctg} x dx$；

(9) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$；

(10) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$；

(11) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$；

(12) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$.

特殊类型函数的积分

有理函数

用待定系数法把有理函数化成有理真分式之和四类最简分式:

$$\frac{1}{x-a} \qquad \frac{1}{(x-a)^n}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$$

用递推公式

特殊类型函数的积分

三角函数有理式 $\int R(\sin x, \cos x)dx$

$$= \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}$$

简单无理函数

$R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ $\qquad$ $R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})$

作变换去掉根号

注意：某些初等函数的原函数不是初等函数，俗称**积不出来**. 例如，

$$e^{\pm x^2},\ \sin x/x,\ 1/\ln x,\quad 1/\sqrt{1+x^4}.$$

典型例题

例 1

$$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C$$

例 2

$$\int \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx = e^x \tan \frac{x}{2} + C$$

例 3

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 5}}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 5 \right]^{\frac{3}{2}} + C$$

典型例题

例 4

$$\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin\frac{1}{x} + C$$

例 5

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx = -\frac{x}{2}\ln(1+x^2)$$

$$+\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 - 3] + C$$

例 6

$$\int \frac{1}{x(x^n+a)}dx = \frac{1}{na}\ln\frac{x^n}{x^n+a} + C$$

典型例题

例 7

$$\int \max(1,|x|)dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C(x < -1), \\ x + \frac{1}{2} + C(-1 \le x \le 1), \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C(x > 1), \end{cases}$$

例 8

$$\int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2 dx = x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2$$

$$-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C$$

例 9

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx = \ln\tan x + \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

典型例题

例１０

$$\int \frac{1}{\sin(a+x)\sin(b+x)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \frac{\sin(b+x)}{\sin(a+x)} + C$$

例１１

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例１２

$$\int \frac{\ln x - \ln(x+1)}{x(x+1)}dx = \frac{[\ln x - \ln(x+1)]^2}{2} + C$$

典型例题

例 1 3

$$\int x(1+x)^{100}dx=\frac{(1+x)^{102}}{102}-\frac{(1+x)^{101}}{101}+C$$

例 1 4

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

三、应用－求解微分方程

微分方程

含有未知函数的导数的关系式称为微分方程.

形如$F(x, y, y') = 0, y' = f(x)$等等.

求解方法

分离变量法

形如

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

变量替换法

形如

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

常数变易法

形如

$$y' + p(x)y = q(x)$$

求特征根法

形如

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x)$$

小结

一、 原函数

二、 求不定积分的方法

三、 求解微分方程的方法

These slides are designed by Zhenglu Jiang. Please do not hesitate to contact him by email (mcsjzl@mail.sysu.edu.cn) if you have any questions!