中山大學 本科生考试草稿纸

2005 $\frac{6}{20}$ —1

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

东校区 2010 学年度第一学期《高等数学一》期中考试题 (1

专业__________ 学号__________ 姓名 李佳明 评分 2010 $\frac{20}{11}$

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一．完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1，用 $\varepsilon-\delta$ 法证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$，其中 $a>0$.

证. $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\dfrac{1}{\sqrt{a}}|x-a| \quad (x\ge 0)$

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$, 只要 $|x-a|<\sqrt{a}\varepsilon$. 且 $(x\ge 0)$

而 $x\ge 0$ 可用 $|x-a|\le a$ 保证。从而，应取 $\delta=\min\{a,\sqrt{a}\varepsilon\}$

则 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$, 只要 $0<|x-a|<\delta$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$。

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{2\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$=\frac{\ln e}{2\times 1}=\frac{1}{2}$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$。

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{-(x+2)+2}\right]^{-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{-(x+2)}\cdot\left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{2}\right]^{-1}=e^{-1}$$

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$，其中 $a_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$

解：设 $l=\max\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$

$$\text{则}\quad l^n<a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n<m\cdot l^n$$

$$l<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}<l\cdot\sqrt[n]{m}$$

$$\text{而}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=m^0=1$$

$\lim\limits_{n\to\infty}l=\lim\limits_{n\to\infty}l\cdot\sqrt[n]{m}=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=l$.

5. 已知 $y=x^{\cos x}$，求 y'。

$\ln y=\ln x^{\cos x}=\cos x\cdot\ln x$

$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x$

$y'=x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x)$.

6. 已知 $y=\sqrt[3]{1-\sin(2x^2)}$，求 y'。

?

$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{[1-\sin(2x^2)]^2}}\cdot[-\sin(2x^2)]'$

$=\frac{-\cos(2x^2)\cdot 4x}{3\cdot\sqrt[3]{[1-\sin(2x^2)]^2}}$

$=\frac{-4x\cos(2x^2)}{3\sqrt[3]{[1-\sin(2x^2)]^2}}$

7. 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的函数 y 关于 x 的导数。

解：$(x\cdot y)'-(e^x)'+(e^y)'=0$

$y+x\cdot y'-e^x+e^y\cdot y'=0$

$(x+e^y)\cdot y'=e^x-y$, $\quad y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}$.

8. 求由参数方程 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t);\\ y=a(\sin t-t\cos t);\end{cases}$ 所确定的函数 y 关于 x 的导数。

解：$x'(t)=a(-\sin t+\sin t+t\cdot\cos t)=a\cdot t\cdot\cos t$

$y'(t)=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\cdot\sin t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{at\sin t}{at\cdot\cos t}=\tan t$.

9. 求 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$。

$=\int\frac{dx}{(a-x)(a+x)}$

$=\frac{1}{2a}\int(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x})dx$

$=\frac{1}{2a}[\int\frac{1}{a+x}d(a+x)-\int\frac{1}{a-x}d(a-x)]$

$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

10. 求 $\int_{-1}^{1}(|x|+x^5\tan^2x)dx$,

$=2\int_0^1|x|dx+0$

$=2\int_0^1 x\,dx=(x^2)\Big|_0^1=1$.

中山大學 本科生考试草稿纸

2015/11/16 −3

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

二. 完成下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 求 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

$= 2\int \sin\sqrt{x}\, d\sqrt{x}$

$= -2\cos\sqrt{x} + C$

2. 求 $\int x\arctan x dx$.

$= \frac{1}{2}\int \arctan x\, dx^2$

$= \frac{1}{2}[x^2\arctan x - \int x^2 d\arctan x]$

$= \frac{1}{2}[x^2\cdot\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx]$

$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx)$

$= \frac{1}{2}(x^2\cdot\arctan x - x + \arctan x) + C$

3. 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= [\tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 0 = 1+1 = 2$

$(\arctan x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}$

4. 证明 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\frac{1}{x} & x \neq 0; \\ 0 & x = 0; \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导。

① $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cdot\arctan\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

② $f'(0+0) = \lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0}\frac{x\arctan\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0+0}\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$f'(0-0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0}\frac{x\cdot\arctan\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0-}\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

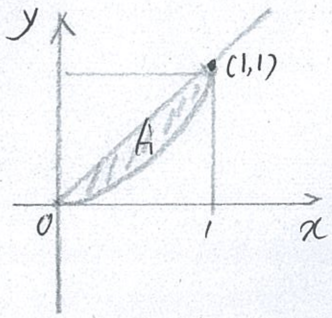
$f'(0+0) \neq f'(0-0)$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导。

中山大學 本科生考试草稿纸

2015 5/23—24

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

5. 求由曲线 $y=x^2$ 及 $y=x$ 围成的平面图形的面积.



$$A=\int_0^1 (x-x^2)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

6. 证明另一种形式的积分中值定理：

若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，

则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

证: 设 $g(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，记 $m\le f(x)\le M$ $x\in[a,b]$

则 $\int_a^b g(x)dx>0$

$$\int_a^b m\,g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le\int_a^b M\,g(x)dx$$

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$$

由连续函数的介值定理，必存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

即 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$，

中山大學 本科生考试草稿纸

2015/11/5 16

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

东校区 2010 学年度 第一学期《高等数学一》期中考试试题(2)

专业______ 姓名 李国明 学号 2010 18/4

一、 解答下列各题 （每小题 6 分，共 54 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt{n}}\ 1}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

$$=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6}{\frac{\sin x}{x}}}$$

$$=e^{6}$$

3. 已知 $y=e^{\sin x^2}+x^{\sin x}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

设 $u=x^{\sin x}$，$v=e^{\sin x^2}$，$v'=e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

则 $\ln u=\sin x\ln x$

$\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x$,

$u'=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$

$$y'=2x\cos x^2 e^{\sin x^2}+x^{\sin x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$$

④设$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$确定，求dy及$\frac{dy}{dx}$.

解：$(e^y)'+(xy)'=(e)'=0$ $\quad de^y+d(xy)=0$

$e^y\cdot y'+xy'+y=0$ $\quad e^y dy+xdy+ydx=0$

$(x+e^y)\cdot y'=-y$ $\quad (e^y+x)dy=-ydx$

$y'=\frac{-y}{x+e^y}$ $\quad dy=-\frac{y}{x+e^y}dx$

$y=\Phi(x)$ $\quad dy=y'dx$

⑤已知 $\Phi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$，求$\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\cos[\pi\cdot(\cos^2 x)](\cos x)'-\cos(\pi\sin^2 x)\cdot(\sin x)'$$

$$=\cos(\pi\cos^2 x)\cdot(-\sin x)-\cos(\pi\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=-[\cos(\pi\cos^2 x)\sin x+\cos(\pi\sin^2 x)\cos x]$$

⑥求不定积分$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d\ln x$$

$$=\arcsin(\ln x)+C$$

⑦已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，求$\int xf'(x)dx$.

解：$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$，$\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}+C$

$$\int xf'(x)dx=\int x\,df(x)$$

$$=x\cdot f(x)-\int f(x)dx$$

$$=x\cdot f(x)-\frac{\sin x}{x}+C$$

$$=x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$$

中山大學 本科生考试草稿纸 2015/6/17

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

8. 求定积分$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

令$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$.
$x=0, t=0$；$x=1, t=1$.

$=\int_0^1 e^t \cdot 2tdt$

$=2\int_0^1 t\,de^t=2[te^t|_0^1-\int_0^1 e^t dt]=2(e-e^t|_0^1)$

$=2(e-e+1)=2$

9. 求定积分$\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$. $=2\int_0^2 \frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

令$x=2\sin t$，$dx=2\cos tdt$
$x=0, t=0$；$x=2, t=\frac{\pi}{2}$.

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2 t}{2+2\cdot\cos t}\cdot 2\cos tdt$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t}\cdot\cos tdt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)\cdot\cos tdt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt$

$=8\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$

$=8-4\frac{\pi}{2}-2\sin 2t|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\cancel{4-\pi}\ \cancel{=4}\ 8-2\pi$

二.(10分)设

$$x_1=2, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n}), n=1,2,3,\cdots.$$

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在；(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(1). 由于 $(\sqrt{x_n}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_n}})^2\geq 0$，即 $x_n+\frac{2}{x_n}\geq 2\sqrt{2}$.

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})\geq\sqrt{2}$

$x_n\geq\sqrt{2}$，$2x_n^2\geq x_n^2+2$. $\quad 2x_n\geq x_n+\frac{2}{x_n}$

$\Rightarrow x_n\geq\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})=x_{n+1}>0$

所以$\{x_n\}$单减有界，必有极限。

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{2}[\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}]$

$l=\frac{1}{2}(l+\frac{2}{l})$

$l^2=\frac{1}{2}(l^2+2)$

$\frac{1}{2}l^2=1$

$l=\sqrt{2}$

三、(8分)试求曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\y=t^3\end{cases}$在$t=2$相应的点处的切线方程。

解: $t=2$ 对应 $\begin{cases}x_0=5\\y_0=8\end{cases}$ $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3t}{2}$,

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=2}=\frac{3\times 2}{2}=3$, $\quad$ 切线: $y-y_0=3\cdot(x-x_0)$

$y-8=3(x-5)$. $\quad 3x-y-7=0$.

四、(10分) 设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1; \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$ 为了使函数$f(x)$在$x=1$处连续且可导，a,b应取什么值？

解 ① $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b$.

为使$f(x)$在$x=1$连续，必$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$，即 $a+b=1$

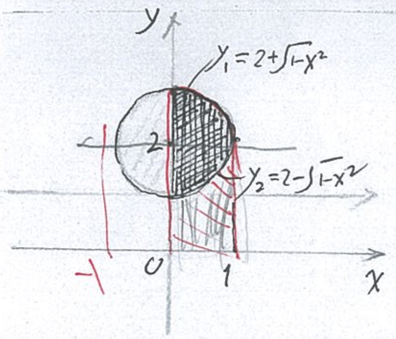
② $f'(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(1-b)x+(b-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(1-b)(x-1)}{(x-1)}=1-b$.

$f'(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+1)=2$

为使$f(x)$在$x=1$可导，必$f'(1+0)=f'(1-0)=f'(1)$ 即$1-b=2$, $b=-1$. 从而得$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

五、(9分) 求由曲线 $x^2+(y-2)^2=1$所围成的图形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的 体积

解：曲线 $x^2+(y-2)^2=1$ 记为 $y_1=2+\sqrt{1-x^2}$
$y_2=2-\sqrt{1-x^2}$



$$V_x=2\int_0^1 \pi(y_1^2-y_2^2)dx$$
$$=16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$
$$=16\pi\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1^2$$
$$=4\pi^2$$

$y_1^2-y_2^2=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$
$=2\sqrt{1-x^2}\cdot 4$
$=8\sqrt{1-x^2}$

六、(9分) 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<x_3<b$,证明：存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

证：由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，从而$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值与最小值.

即 $m\le f(x_i)\le M$ $(i=1,2,3)$，从而 $3m\le f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\le 3M$

$$m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\le M$$

由介值定理.至少存在一点$\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$.