第一章 总结 20200511

信号

1. 信号与系统的基本概念
   - 掌握信号与系统的概念
   - 了解信号在系统中的传输
2. 信号的描述和分类
   - 信号的描述
   - 周期与非周期信号
   - 功率与能量信号
3. 经典信号及其基本特性
   - 阶跃信号
   - 冲激信号
   - 冲激偶信号
   - 斜坡信号
4. 信号的基本运算
   - 信号相加，信号相乘
   - 信号微分，信号积分
   - 信号的展缩
   - 信号的翻转
   - 信号的时移

系统

1. 系统的描述, 数学模型和框图
2. 系统的分类和判断方法

周期与非周期信号的判断， 能量信号与功率信号的判断以及计算

奇异信号的计算

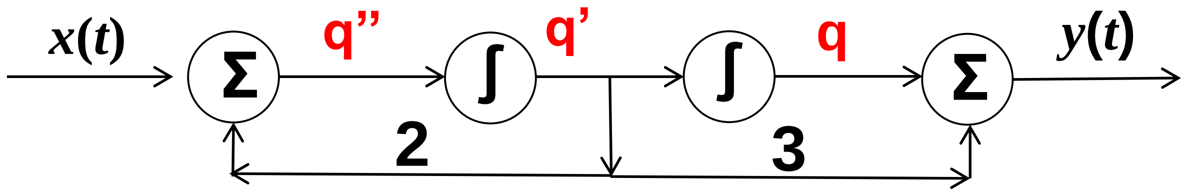
简单的图形组合与分析

看方程化系统流程图，反之亦然

会判断各种系统

第一章 复习

1)



$$x(t) = q''(t) - 2q'(t)$$
$$y(t) = 3q'(t) + q(t)$$

$$y''(t) - 2y'(t) = 3x'(t) + x(t)$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

2) $$f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-3\tau}\delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

方法一： $$= \int_{-\infty}^{t}\left[\delta'(\tau) + 3\delta(\tau)\right]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t}3\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(t) + 3u(t)$$

方法二： $$= e^{-3\tau}\delta(\tau)\Big|_{-\infty}^{t} - (-3)\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)e^{-3\tau}d\tau = \delta(t) + \int_{-\infty}^{t}3\delta(\tau)\,d\tau = \delta(t) + 3u(t)$$

虽然该积分是变上限积分，但是含有冲激函数或者冲激偶函数的积分一般来说不能看做是普通积分，这是由于冲激函数和冲激偶函数除在等于0以外处处为0，作为普通积分是无意义的，这里仅仅是一种表达形式，比如

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \text{和} \delta(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

所以计算类似积分的时候，是利用已有的冲激函数及其各阶导数积分定义来计算结果，比如上面的两种计算方法， 如果采用变上限积分，分不同情况计算往往会得到错误的结果。

第一章 复习

3) $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-4)dt$

方法1:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-4)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left[(t-2)(t+2)\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\delta\left[(t-2)(t+2)\right]dt+\int_{0}^{\infty}\delta\left[(t-2)(t+2)\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\delta\left[-4(t+2)\right]dt+\int_{0}^{\infty}\delta\left[4(t-2)\right]dt=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

方法2:

$$u(t^2-a^2)=\begin{cases}1, & t<-a\\ 0, & -a<t<-a\\ 1, & t>a\end{cases}=1-\left[u(t+a)-u(t-a)\right]$$

$$2t\delta(t^2-a^2)=-\delta(t+a)+\delta(t-a)$$

$$\delta(t^2-a^2)=-\frac{1}{-2a}\delta(t+a)+\frac{1}{2a}\delta(t-a)=\frac{1}{2|a|}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)\right]$$

$$\delta\left[f(t)\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_k)|}\delta(t-t_k)$$

第一章 复习

3) 判断下列系统的是否为线性、时不变、因果的系统。

(1) $y(t)=f(-t)$ (2) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau,$ (3) $y(t)=\int_{-\infty}^{3t} f(\tau)d\tau,$

线性： $T\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha T\left[f_1(t)\right]+\beta T\left[f_2(t)\right]$

时不变性： 若$T\left[\{0\},f(t)\right]=y_{zs}(t)$，$T\left[\{0\},f(t-t_0)\right]=y_{zs}(t-t_0)$

因果性： 当$x(t)=0$，$t<t_0$时，有 $y_{zs}(t)=T\left[\{0\},f(t)\right]=0,t<t_0$

(1) 解： $T\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha f_1(-t)+\beta f_2(-t)=\alpha T\left[f_1(t)\right]+\beta T\left[f_2(t)\right]$

线性系统

令$g(t)=f(t-t_0)$ $T\left[\{0\},g(t)\right]=g(-t)=f(-t-t_0)$

$\neq y(t-t_0)=f\left[-(t-t_0)\right]$

时变系统

当$f(t)=0$，$t<t_0$时，则有$-t<t_0$，即$t>-t_0$，$y(t)=f(-t)=0$

非因果系统

第一章 复习

3) 判断下列系统的是否为线性、时不变、因果的系统。

(1) $y(t)=f(-t)$ (2) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau,$ (3) $y(t)=\int_{-\infty}^{3t} f(\tau)d\tau,$

(2) 解:

$$y(t)=T\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=2\int_0^t\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]d\tau$$

$$=2\alpha\int_0^t f_1(t)d\tau+2\beta\int_0^t f_2(t)d\tau=\alpha T\left[f_1(t)\right]+\beta T\left[f_2(t)\right]$$

线性系统

令$g(t)=f(t-t_0)$

时不变系统

$$T\left[g(t)\right]=\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} f(\tau-t_0)d\tau \overset{\tau-t_0=\sigma}{=} \int_{-\infty}^{t-t_0} f(\sigma)d\sigma=y(t-t_0)$$

t时刻的输出只与t时刻以及t时刻之前的输入有关

因果系统

(3) 解:

$$T\left[f(t-t_0)\right]=\int_{-\infty}^{3t} f(\tau-t_0)d\tau \overset{\tau-t_0=\sigma}{=} \int_{-\infty}^{3t-t_0} f(\sigma)d\sigma \neq y_{zs}(t-t_0)=\int_{-\infty}^{3(t-t_0)} f(\sigma)d\sigma$$

$y(t)=\int_0^{3t} f(\tau)d\tau$，令$t=1$，有$y(1)=\int_0^{3} f(\tau)d\tau$

线性，时变，非因果系统

信 号 与 系 统

LTI系统的分析方法

系统分析研究的主要问题就是对于给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。具体来说就是：建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法
- 输入输出法 （外部法） -单输入单输出
- 状态变量法 （内部法） -多输入多输出

外部法
- 时域分析
  - 连续系统--- 微分方程，卷积积分
  - 离散系统--- 差分方程，卷积和
- 变换域分析
  - 连续系统--- 频域法和复频域法
  - 离散系统--- z域法

系统特性： 系统函数-系统的稳定性

外部法： 状态变量法

信 号 与 系 统
Signals and Systems

第二章　线性时不变系统的时域分析

中山大学 物理学院

第二章 线性时不变系统的时域分析

- **线性时不变系统---Linear Time Invariant Systems**
  - 存在性：在实际应用中大量存在，比如电路系统；
  - 可行性：已有一套完整的分析方法；
  - 实用性：易于综合实现设计系统。

- **信号与系统分析的主要任务之一**

  特定条件下求解系统对输入信号的响应。

- **时域分析**

  对信号与系统的描述、变换、分析全部在时间域上进行，即自变量都是时间t(或n)的函数。

- **时域分析方法**

  经典法，卷积法

第二章 线性时不变系统的时域分析

本章主要内容

★ 2.1 连续时间系统的时域分析

- 微分方程的建立
- 微分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应
- 冲激响应与阶跃响应
- 连续时间LTI系统：卷积积分

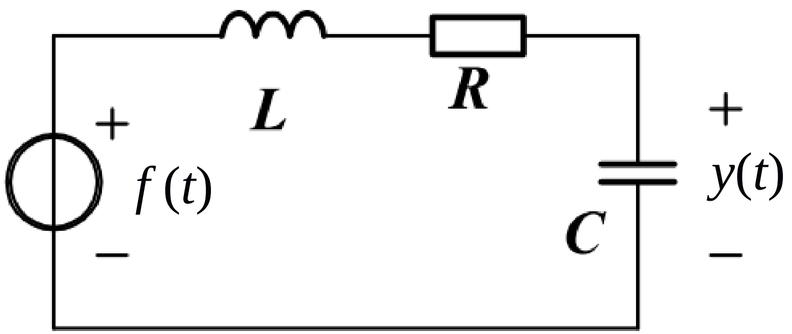
2.2 离散时间系统的时域分析

- 差分方程的建立
- 差分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应
- 单位样值响应与阶跃响应
- 离散时间LTI系统：卷积和

2.1 连续时间系统的时域分析

一. 连续时间系统微分方程的建立

如图所示电路图中，求系统电阻R_2两端电压$y(t)$与输入电压$f(t)$的关系。



解：根据KVL建立方程：

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_2 i(t)+y(t)=f(t)$$

$$i(t)=C\frac{dy(t)}{dt},$$

RLC二阶电路的阶常系数微分方程描述：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{LC}y(t)=\frac{1}{LC}f(t)$$

线性时不变系统用N阶常系数微分方程描述：

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}x(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}x(t)+b_0x(t)$$

二. 微分方程的经典解

线性时不变系统用N阶常系数微分方程描述：

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}x(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}x(t)+b_0x(t)$$

初始条件： $[y(0),y'(0),\ldots,y^{(n)}(0)]$

$y(t)$（完全解） $=$ $y_n(t)$（齐次解） $+$ $y_f(t)$（特解）

固有响应：仅与系统本身的特性有关

强迫响应：仅与激励$x(t)$的形式有关

2.1 连续时间系统的时域分析

二. 微分方程的经典解

1. 齐次解：与系统相对应齐次方程的通解，满足

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)=0$$

特征方程：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

特征方程的解，λ_1，λ_2，… λ_n称之特征根。

A）当特征根是各不相等的实根$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\dots.\neq\lambda_n$

$$y_n(t)=k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+k_ne^{\lambda_n t}$$

B）有r个重根λ_0（$r\leq n$），n-r个单根$_1\neq\lambda_2\neq\dots.\neq\lambda_{n-r}$

$$y_n(t)=\sum_{i=1}^{n-r}k_ie^{\lambda_i t}+\sum_{i=n-r+1}^{n}k_it^{n-i}e^{\lambda_0 t}$$

二. 微分方程的经典解

1. 齐次解：与系统相对应齐次方程的通解，满足

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)=0$$

特征方程： $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0=0$

表2-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根λ	齐次解$y_n(t)$
单实根	$Ce^{\lambda t}$
r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或$Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=C+jD$
r重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t+\theta_{r-2})+\cdots+A_0\cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

2.1 连续时间系统的时域分析

二. 微分方程的经典解

2. 特解：函数形式与外加信号$x(t)$有关

外加信号	特解
常数A	常数B
t^r	$\sum_{i=1}^{r+1} k_i t^{r+1-i}$　所有特征根均不等于0；
	$t^m\sum_{i=1}^{r+1} k_i t^{r+1-i}$　有m重等于0的特征根；
$\sin\omega t$或$\cos\omega t$	$k_1\cos\omega t + k_2\sin\omega t$
$e^{\lambda t}$	$ke^{\lambda t}$，λ不是方程的特征根
	$kte^{\lambda t}$，λ是方程的特征根
	$\sum_{i=1}^{r+1} k_i t^{r+1-i} e^{\lambda t}$，$\lambda$是方程的r阶特征重根

2.1 连续时间系统的时域分析

例：已知线性时不变系统方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f(t), \mathrm{t}>0$，求完全响应

输入信号$f(t)=e^{-t}u(t)$,初始条件$y(0)=1$，$y'(0)=1/3$

解：1）求方程的齐次解 – 固有响应

特征方程为： $\lambda^2+6\lambda+8=0$ 特征根： $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$

故原方程的齐次解为： $y_n(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}$

2) 求方程的特解– 强迫响应

根据输入信号的形式，其特解为: $y_f(t)=Ce^{-t}$

带入原方程: $Ce^{-t}-6Ce^{-t}+8Ce^{-t}=e^{-t} \quad \Rightarrow C=1/3$

系统的完全响应是固有响应与强迫响应之和，因此，

$$y(t)=y_n(t)+y_f(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}$$

2.1 连续时间系统的时域分析

例题，已知线性时不变系统方程 $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f(t), t>0$，求完全响应

输入信号$f(t)=e^{-t}u(t)$,初始条件$y(0)=1$，$y'(0)=1/3$

解：3）根据初始条件求A和B: $y(t)=y_n(t)+y_f(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}$

$$y(0)=A+B+\frac{1}{3}=1$$

$$y'(0)=-2A-4B-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{5}{3}, \quad B=-1$$

系统的完全响应 $y(t)=y_n(t)+y_f(t)=\frac{5}{3}e^{-2t}-e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}, \quad t\geq 0$

如果 输入信号$f(t)=e^{-2t}u(t)$,初始条件$y(0)=1, y'(0)=1/3$ 求完全响应

$y(t)=y_n(t)+y_f(t)=\frac{23}{12}e^{-2t}-\frac{11}{12}e^{-4t}+\frac{1}{2}te^{-2t}, t\geq 0$

P40, 例2.1.3

2.1 连续时间系统的时域分析

二. 微分方程的经典解

3. 初始条件的确定 – 外加信号的作用

初始状态： 系统在$t = 0^-$时的状态，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(k)}(0^-)$反映了系统的历史情况而与激励无关

起始状态： 系统在$t = 0^+$时的状态，激励在$t=0$时刻接入系统，该时刻的值$y^{(k)}(0^+)$包含了输入信号的作用

需要注意，当系统不存在跳变时$y^{(k)}(0^+)= y^{(k)}(0^-)$

需要注意，当系统存在跳变时$y^{(k)}(0^+) \neq y^{(k)}(0^-)$

通常，对于具体的系统，初始状态一般容易求得。这样为求解微分方程，就需要从已知的初始状态$y^{(k)}(0^-)$设法求得$y^{(k)}(0^+)$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：描述某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$

已知$f(t)=u(t)$,初始条件$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=0$,求$y(0^+)$和$y'(0^+)$

解：

1）将输入信号带入方程确定系数 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6u(t)$

利用系数匹配法分析：上式对于$t=0^-$也成立，在$0^-<t<0^+$输区间等号两端$\delta(t)$项的系数应该相等。

等号右端含有$\delta(t)$项，因此 $y''(t)$应包含冲激函数，使得在$t=0$处将发生跃变，即： $y'(0^+)\neq y'(0^-)$

并且,$y(t)$在 $t=0$处是连续的，即 $y(0^+)=y(0^-)=2$

2) 从0^-到 0^+积分 $\int_{0^-}^{0^+}y''(t)dt+3\int_{0^-}^{0^+}y'(t)dt+2\int_{0^-}^{0^+}y(t)dt=2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt+6\int_{0^-}^{0^+}u(t)dt$

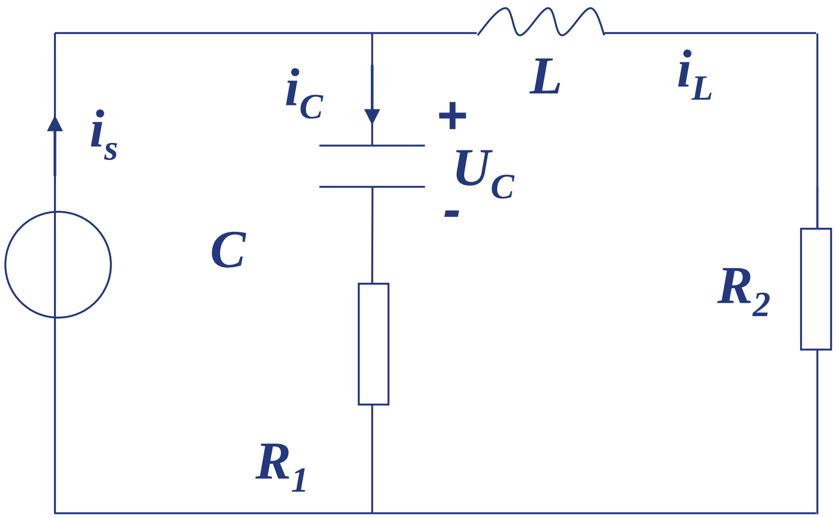
$$\left[y'(0^+)-y'(0^-)\right]+3\left[y(0^+)-y(0^-)\right]=2 \Longrightarrow y'(0^+)=y'(0^-)+2=2$$

结论：当微分方程等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。但如果右端不含冲激函数时，则不会跃变。

2.1 连续时间系统的时域分析

练习：如右图所示电路，求$t>0$时电流$i_L(t)$

已知：$R_1=1\ \Omega$，$R_2=5\ \Omega$，$L=2$ H，$C=0.25$ F，$U_C(0_-)=3$ V, $i_L(0\text{-})=1$ A, $i_s(t)=u(t)$



解： 1) 列出微分方程

$$i_C+i_L=i_s \qquad (1) \qquad\qquad i_C=C\frac{dU_C}{dt} \qquad (2)$$

$$U_C+R_1i_C=L\frac{di_L}{dt}+R_2i_L \qquad (3)$$

$$\Rightarrow U_c'+R_1i_C'=Li_L''+R_2i_L' \qquad (4) \qquad\qquad \Rightarrow \frac{1}{C}i_C+R_1i_C'=Li_L''+R_2i_L' \qquad (5)$$

将(1)带入(5)并整理得：

$$i_L''+\frac{R_1+R_2}{L}i_L'+\frac{1}{LC}i_L=\frac{R_1}{L}i_s'+\frac{1}{LC}i_s \qquad (6)$$

由已知数据得到微分方程：

$$i_L''(t)+3i_L'(t)+2i_L(t)=0.5i_s'(t)+2i_s(t) \qquad (7)$$

2) 求解齐次解 $$i_L''(t)+3i_L'(t)+2i_L(t)=0 \qquad (8)$$

特征方程为：$\lambda^2+3\lambda+2=0$ 特征根：$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$

故原方程的齐次解为：$\left(i_L(t)\right)_n=Ae^{-t}+Be^{-2t}$

3) 求特解 $$i_L''(t)+3i_L'(t)+2i_L(t)=0.5i_s'(t)+2i_s(t) \qquad (7)$$

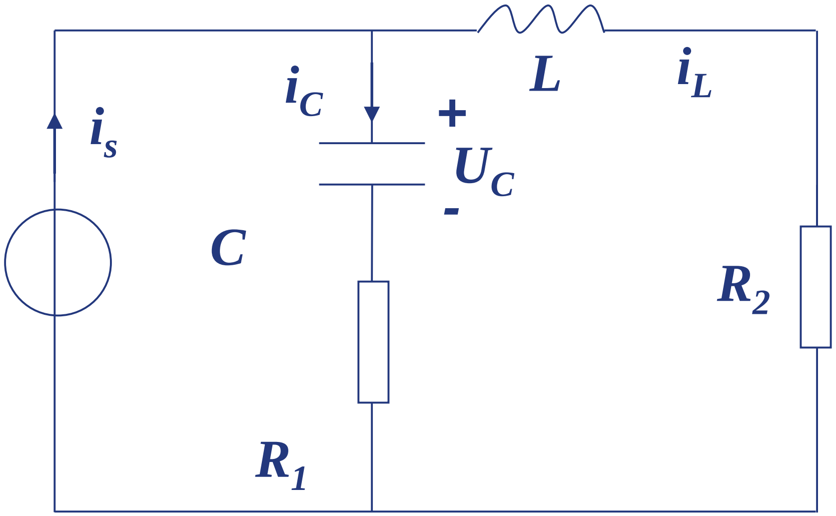
$t>0$，i_s为常数, 因此特解形式如下：$(i_L)_f=C$

将特解带入(7)得到：$2C=2$，所以 $C=1$

完全解：$i_L(t)=\left(i_L(t)\right)_n+\left(i_L(t)\right)_f=Ae^{-t}+Be^{-2t}+1$

4) 确定初始条件

根据电感电流和电容电压不跳变原则：



$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=1,\quad U_C(0_+)=U_C(0_-)=3$$

$$i_C+i_L=i_s \qquad (1)$$

$$U_C+R_1 i_C=L\frac{di_L}{dt}+R_2 i_L \qquad (3)$$

$$i_L'(0_+)=\frac{1}{L}U_C(0_+)-\frac{R_1+R_2}{L}i_L(0_+)+\frac{R_1}{L}i_s(0_+)=-1$$

5) 确定完全响应的系数

$$\begin{cases} i_L(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+1 \\ i_L(0_+)=1,\quad i_L'(0_+)=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_L(0_+)=A+B+1=1 \\ i'_L(0_+)=-A-2B=-1 \end{cases}$$

$$A=-1, B=1$$

完全响应： $i_L(t)=-e^{-t}+e^{-2t}+1,\qquad t\geq 0$

2.1 连续时间系统的时域分析

三. 零输入响应和零状态响应

零输入响应 零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

没有外加信号的作用，仅有系统的初始储能所引起的响应

零初始条件，外加信号作用下的响应

齐次微分方程的解

非齐次微分方程的全解

$$y_{zi}^{(j)}(0^+) = y_{zi}^{(j)}(0^-) = y^{(j)}(0^-)$$

$$y_{zs}^{(j)}(0^-) = 0,\quad y_{zs}^{(j)}(0^+),\quad j = 0,1,2,\cdots,\quad n-1$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-r} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^{n} c_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} + \sum_{i=1}^{n-r} d_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^{n} d_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} + y_f(t)$$

固有响应

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-r} k_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^{n} k_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} = \sum_{i=1}^{n-r} (c_i + d_i) e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^{n} (c_i + d_i) t^{n-i} e^{\lambda_0 t}$$

强迫响应

$$y^{(j)}(0^+) = y_{zi}^{(j)}(0^+) + y_{zs}^{(j)}(0^+)$$

零输入响应只是固有响应中由系统初始储能产生的那部分响应。

2.1 连续时间系统的时域分析

例：描述某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$

已知$f(t)=u(t)$,初始条件$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=0$,

求该系统的完全响应，固有响应，强迫响应，零输入响应和零状态响应。

解：

1）固有响应　$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$　　$y_n(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$

2) 强迫相应　$y_f(t)=C$ → $y_f(t)=3$

3) 完全响应　$y(t)=y_f(t)+y_n(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+3$

起始条件：　$y(0^+)=y(0^-)=2$，$y'(0^+)=y'(0^-)+2=2$

$$A=0,\quad B=-1$$

$$y(t)=y_f(t)+y_n(t)=-e^{-2t}+3,t\geq 0$$

例：描述某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$

已知$f(t)=u(t)$,初始条件$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=0$,

求该系统的完全响应，固有响应，强迫响应，零输入响应和零状态响应。

解：

4）零输入响应 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$ $\qquad y_{zi}(t)=Ee^{-t}+Fe^{-2t}$

$$y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-)=2, \qquad y'_{zi}(0^+)=y'_{zi}(0^-)=y'(0^-)=0$$

$$y_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}, \quad t\geq 0$$

5) 零状态响应 $y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=2\delta(t)+6u(t)$

$$y_{zs}(0^+)=y_{zs}(0^-)=0, \qquad y'_{zs}(0^+)=2+y'_{zs}(0^-)=2$$

$$y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=6, \quad t>0$$

$$y_{zs}(t)=Ge^{-t}+He^{-2t}+3 \qquad G=-4, \quad H=1$$

完全响应 $\qquad y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=-e^{-2t}+3, \quad t\geq 0$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：描述某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$

已知$f(t)=u(t)$,初始条件$y\left(0^-\right)=2$，$y'\left(0^-\right)=0$,

求该系统的完全响应，固有响应，强迫响应，零输入响应和零状态响应。

$$y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-)=2 \qquad y_{zs}(0^+)=y_{zs}(0^-)=0,$$

$$y'_{zi}(0^+)=y'_{zi}(0^-)=y'(0^-)=0 \qquad y'_{zs}(0^+)=2-y'_{zs}(0^-)=2$$

完全响应

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\overbrace{\left(4e^{-t}-2e^{-2t}\right)}^{\text{零输入响应}}+\overbrace{\left(-4e^{-t}+e^{-2t}+3\right)}^{\text{零状态响应}},\quad t\ge 0$$

$$y(t)=y_f(t)+y_n(t)=\overbrace{-e^{-2t}}^{\text{固有响应}}+\overbrace{3}^{\text{强迫响应}},t\ge 0$$

$$y\left(0^+\right)=y\left(0^-\right)=2,\ y'\left(0^+\right)=y'\left(0^-\right)+2=2$$

第二章 线性时不变系统的时域分析

❖ 本章主要内容

★ 2.1 连续时间系统的时域分析

- ➢ 微分方程的建立
- ➢ 微分方程的经典解
- ➢ 零输入响应和零状态响应
- ★➢ 冲激响应与阶跃响应
- ➢ 连续时间LTI系统：卷积积分

2.2 离散时间系统的时域分析

- ➢ 差分方程的建立
- ➢ 差分方程的经典解
- ➢ 零输入响应和零状态响应
- ➢ 单位样值响应与阶跃响应
- ➢ 离散时间LTI系统：卷积和

2.1 连续时间系统的时域分析

四. 冲激响应和阶跃响应

1. 冲激响应

线性时不变系统用N阶常系数微分方程描述：

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}x(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}x(t)+b_0x(t)$$

单位冲激响应$h(t)$是$x(t)=\delta(t)$时的响应，因此满足

$$\frac{d^n}{dt^n}h(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}h(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}h(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}\delta(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}\delta(t)+b_0\delta(t)$$

冲激平衡法（系数匹配法）

A. 如果$n>m$， $h(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}K_ie^{\lambda_i t}\right)u(t)$

K_i为待定系数，λ_i为特征方程的根。

B. 如果$n\le m$， $h(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}K_ie^{\lambda_i t}\right)u(t)+\sum_{i=0}^{i=m-n}J_i\delta^{(i)}(t)$

例：求下列线性系统的冲击响应**h(t)**

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=f(t),\quad t>0$$

解： 当$f(t)=\delta(t)$时，$y(t)=h(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+3h(t)=\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}h'(t)dt+3\int_{0^-}^{0^+}h(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

$$h\left(0^+\right)=h\left(0^-\right)+1=1$$

特征根$\lambda=-3$，且$n>m$，故$h(t)$的形式为

$$h(t)=A\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\mathrm{e}^{-3t}\ u(t)]+3A\mathrm{e}^{-3t}\ u(t)=\delta(t)$$

解得**A=1** $\qquad h(t)=e^{-3t}u(t)$

四. 冲激响应和阶跃响应

2.阶跃响应

由于冲激函数和阶跃函数的微积分关系;

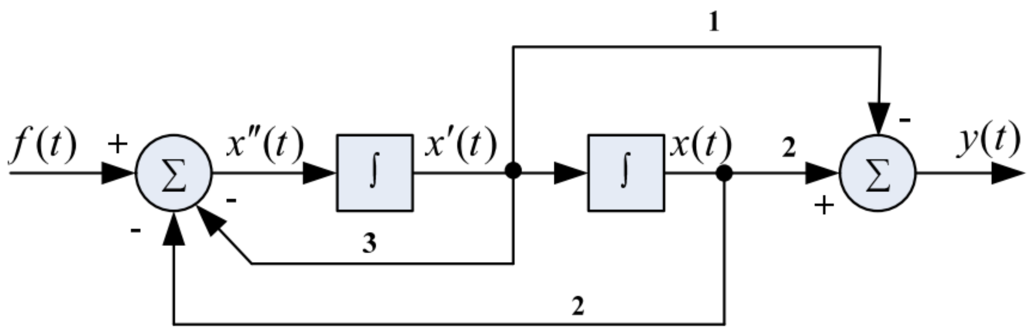
$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \qquad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

阶跃响应$g(t)$与冲激响应具有以下的关系:

$$\mathrm{h}(t)=\frac{\mathrm{dg}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：如图所示的LTI系统，求其阶跃响应以及冲击响应



解：1）定义中间变量，写出微分方程

左端加法器： $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=f(t)$ ➡ 阶跃响应：$g_1(t)$

右端加法器： $y(t)=-x'(t)+2x(t)$

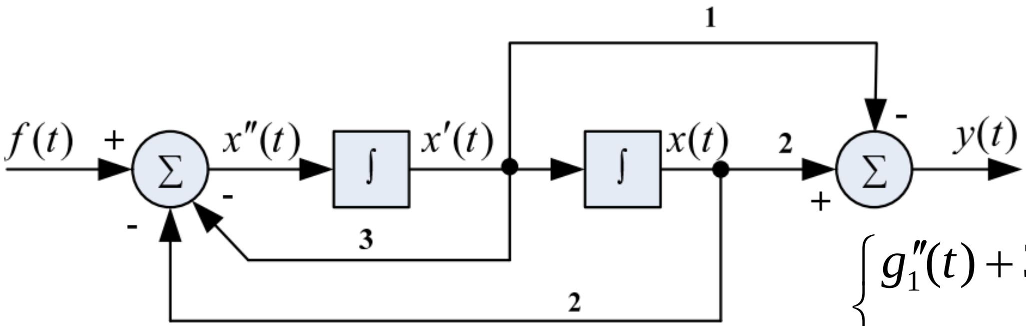
系统微分方程为： $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-f'(t)+2f(t)$ ➡ 阶跃响应：$g(t)$

$$g(t)=-g_1'(t)+2g_1(t)$$

2）求解阶跃响应 $g_1(t)$

$$\begin{cases} g_1''(t)+3g_1'(t)+2g(t)=u(t) \\ g_1(0^-)=g_1'(0^-)=0 \end{cases}$$

例：如图所示的LTI系统，求其阶跃响应以及冲击响应



$$\begin{cases} g_1''(t)+3g_1'(t)+2g(t)=u(t) \\ g_1(0^-)=g_1'(0^-)=0 \end{cases}$$

特征根是-1和-2，特解为0.5

$$g_1(t)=\left(Ae^{-t}+Be^{-2t}+0.5\right)u(t)$$

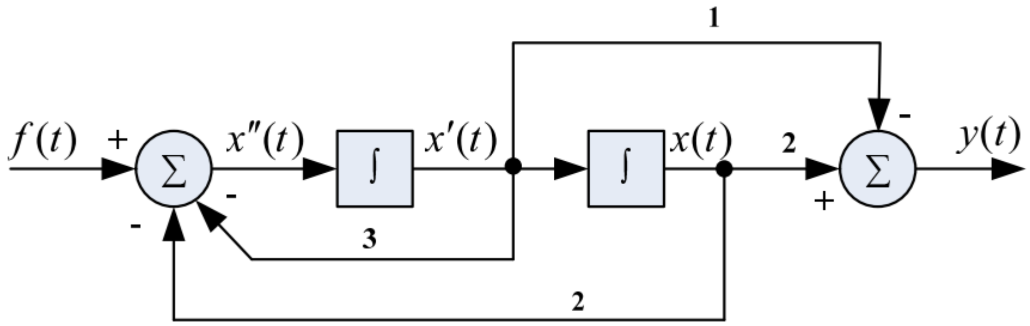
等号右端只有阶跃函数，故 $g_1(0^+)=g_1'(0^+)=0$　　因此，A= -1,B=0.5

$$g_1(t)=\left(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5\right)u(t)$$

$$g(t)=-g_1'(t)+2g_1(t)=\left(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1\right)u(t)$$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：如图所示的LTI系统，求其阶跃响应以及冲击响应



3) 求冲激响应

$$\begin{cases} h_1''(t)+3h_1'(t)+2h_1(t)=\delta(t) \\ h_1(0^-)=h_1'(0^-)=0 \end{cases}$$

$$h(t)=-h_1'(t)+2h_1(t)$$

$$h_1(t)=\left(Ce^{-t}+De^{-2t}\right)u(t)$$

等号右端有冲激函数，故 $h_1'(t)$ 在t=0处发生跃变，h_1**(**t**)**在t=0处连续

$$h_1\left(0^+\right)=h_1\left(0^-\right)=0 \quad h_1'\left(0^+\right)=h_1'\left(0^-\right)+1=1$$

因此，$C=1, D=-1$

$$h(t)=-h_1'(t)+2h_1(t)=\left(3e^{-t}-4e^{-2t}\right)u(t)$$

$$g(t)=-g_1'(t)+2g_1(t)=\left(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1\right)u(t)$$

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

第二章 线性时不变系统的时域分析

本章主要内容

★ 2.1 连续时间系统的时域分析

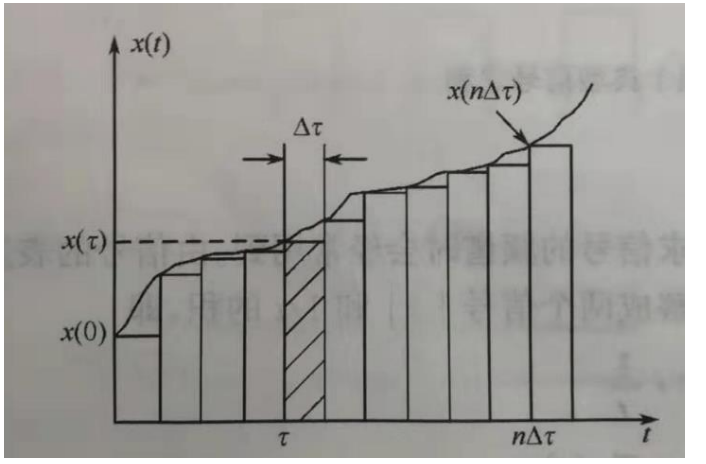
- 微分方程的建立
- 微分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应
- 冲激响应与阶跃响应
- ★ 连续时间LTI系统：卷积积分

2.2 离散时间系统的时域分析

- 差分方程的建立
- 差分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应
- 单位样值响应与阶跃响应
- 离散时间LTI系统：卷积和

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

1. 信号的时域分解



- 任意连续信号可以分解为一系列的矩形窄脉冲
- 每个矩形脉冲可以应用阶跃信号来表示。

$$x(t) \approx \cdots + x(0)\left[u(t)-u(t-\Delta\tau)\right] + x(\Delta\tau)\left[u(t-\Delta\tau)-u(t-2\Delta\tau)\right] + \cdots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\left\{u(t-n\Delta\tau)-u\left[t-(n+1)\Delta\tau\right]\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\frac{u(t-n\Delta\tau)-u\left[t-(n+1)\Delta\tau\right]}{\Delta\tau}\Delta\tau$$

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & else \end{cases}$$

$\Delta\tau \to 0$，$\Delta\tau$变成$d\tau$，$n\Delta\tau$变成τ

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\delta_\Delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$

任意连续信号都可以分解为一系列加权的移位冲激函数之和

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

2. 任意信号的零状态响应

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow y(t)$$

冲激响应定义	$\delta(t)$	$\Rightarrow$	$h(t)$
时不变特性	$\delta(t-\tau)$	$\Rightarrow$	$h(t-\tau)$
齐次性	$x(\tau)\delta(t-\tau)$	$\Rightarrow$	$x(\tau)h(t-\tau)$
叠加性	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$	$\Rightarrow$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
	$\Downarrow$		$\Downarrow$
	$x(t)$		$y_{zs}(t)$

卷积积分 $$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

2.1 连续时间系统的时域分析

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

3. 卷积积分的定义

已知定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的两个函数$x_1(t)$和$x_2(t)$，则定义积分

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

为$x_1(t)$和$x_2(t)$ 的卷积积分，简称为卷积，可记为： $x(t)=x_1(t)*x_2(t)$

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

系统对于输入信号$x(t)$的零状态响应是信号$x(t)$与系统冲击响应$h(t)$的卷积积分。

物理意义：将信号$x(t)$分解成移位冲激信号$\delta(t-\tau)$的线性组合，利用系统的单位冲激响应$h(t)$和LTI系统的叠加性，就可得到LTI系统对输入信号$x(t)$的响应解。

例：已知$f_1(t)=e^{-3t}u(t)$, $f_2(t)=e^{-5t}u(t)$,求$f_1(\mathrm{t})$与$f_2(t)$的卷积

解：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)e^{-5(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-3\tau}e^{-5(t-\tau)}u(t)d\tau=\int_0^t e^{-5t+2\tau}u(t)d\tau$$

$$=e^{-5t}u(t)\left[\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-3t}-e^{-5t})u(t)$$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：已知某LTI系统冲激响应 $h(t) = e^{-3t}u(t)$，输入激励$f(t) = u(t)$，试求系统的零状态响应$y_{zs}(t)$。

解：

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \mathrm{e}^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-3(t-\tau)} u(t) d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-3t}\right) u(t)$$

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

4. 卷积积分的图解法

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

几何解释： $x(\tau)$与$h(t-\tau)$相乘之后曲线下的面积，该面积是t的函数，即是系统在t时刻的输出信号的值

图解法步骤：

① **置换：** $t\rightarrow\tau$

② **翻转：** $\tau\rightarrow-\tau$

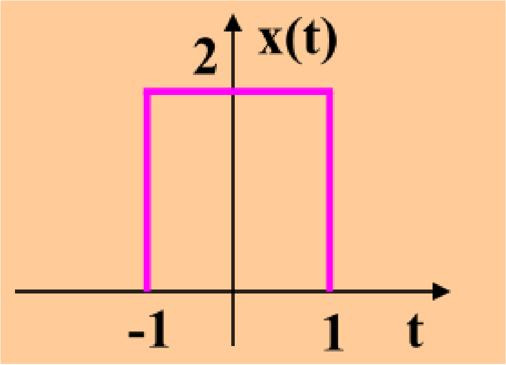
③ **平移：** $-\tau\rightarrow t-\tau$

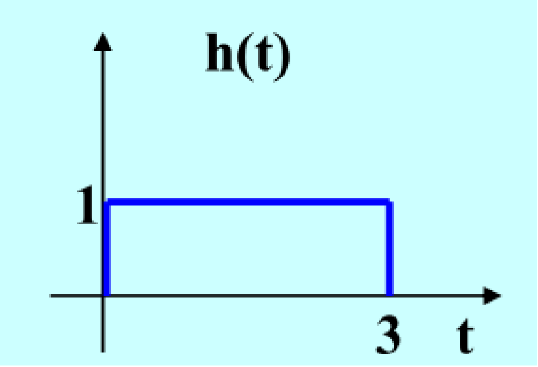
④ **相乘：** $x(\tau)\,h(t-\tau)$

⑤ **积分：** $\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：已知下面两个信号，求卷积积分

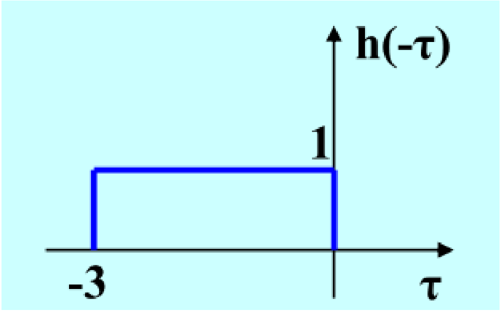


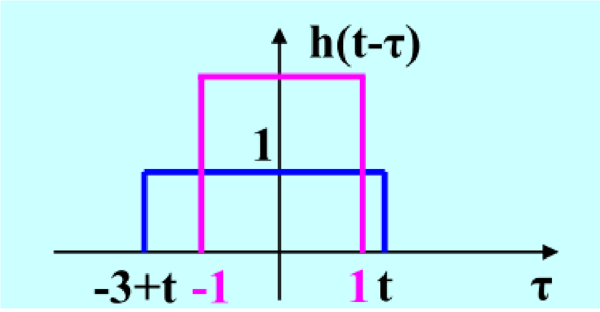


解：1）变量替换τ→t，x(t)→x(τ)，h(t)→h(τ)，并且 h(τ)反转h(-τ)；

2）平移：h(-τ)沿τ轴随t不同向左/向右平移得h(t-τ)；

3）相乘得x(τ)h(t-τ)；

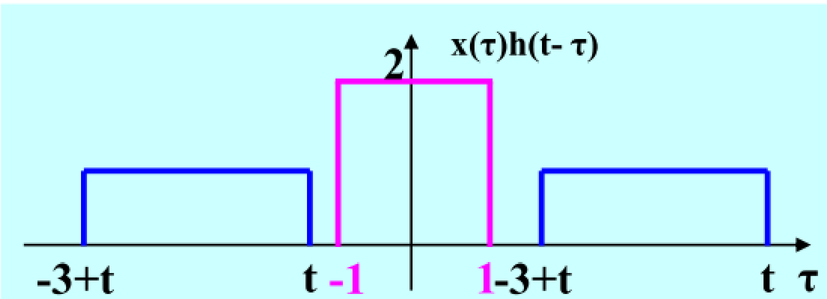




2.1 连续时间系统的时域分析

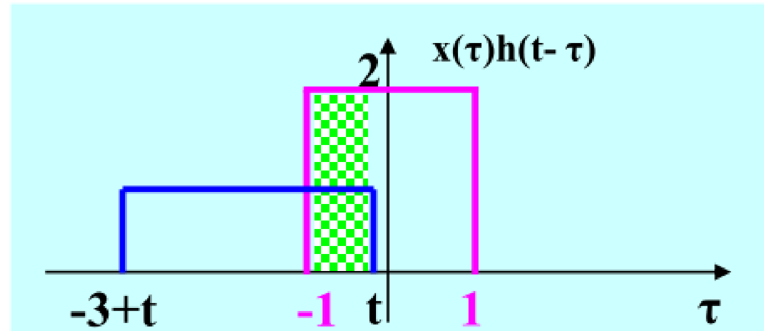
例：已知下面两个信号，求卷积积分

①当t<-1或t≥4时，x(τ)与h(t-τ)无重叠



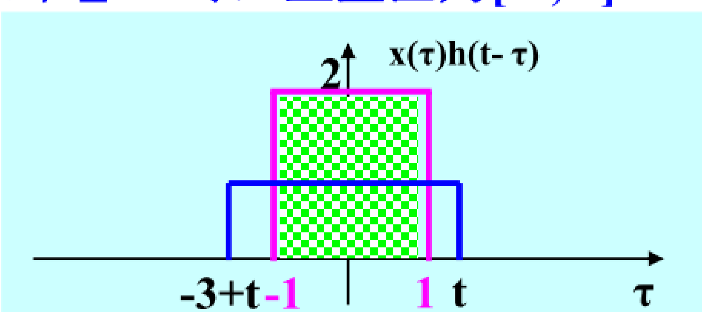
$$y(t)=0$$

② 当-1≤t<1时，重叠区为[-1, t]



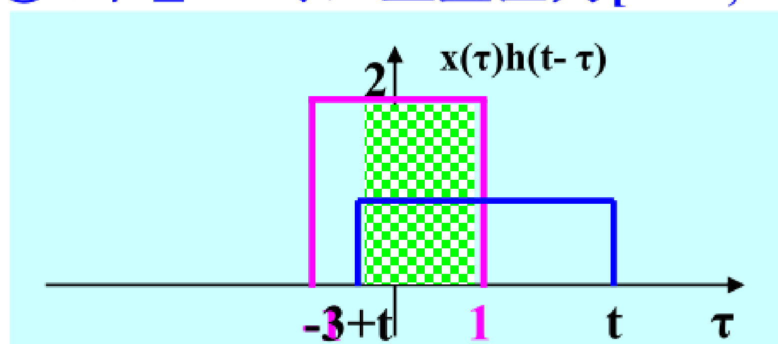
$$y(t)=\int_{-1}^{t}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{t}2d\tau=2(t+1)$$

③ 当1≤t<2时，重叠区为[-1, 1]



$$y(t)=\int_{-1}^{1}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{1}2d\tau=4$$

④ 当2≤t<4时，重叠区为[-3+t, 1]

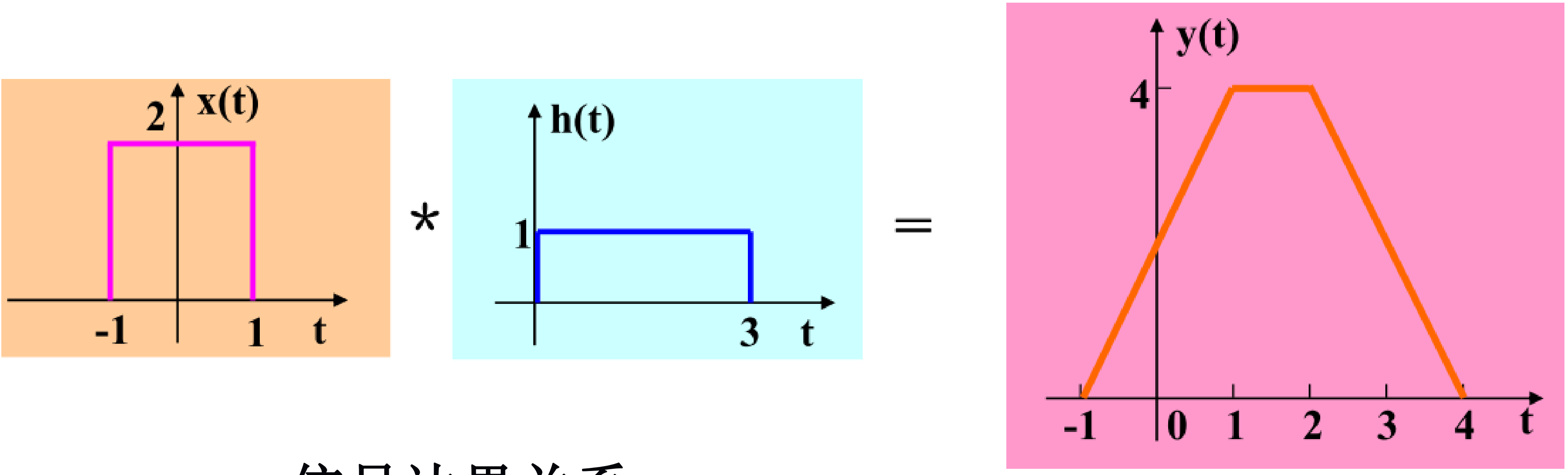


$$y(t)=\int_{-3+t}^{1}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-3+t}^{1}2d\tau=2(4-t)$$

2.1 连续时间系统的时域分析

例：已知下面两个信号，求卷积积分

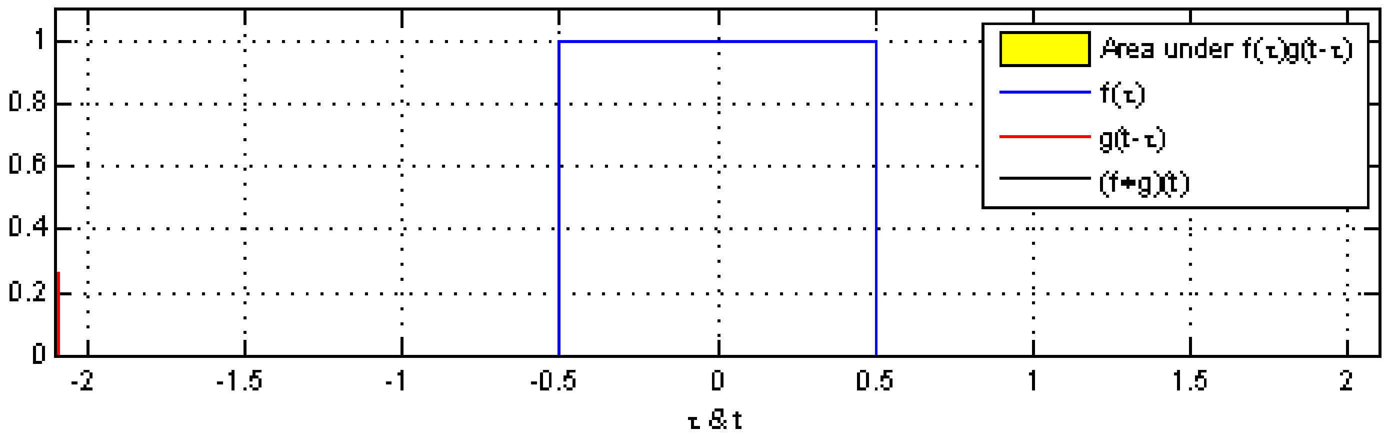
$$y(t)=x(t)*h(t)=\begin{cases}0 & t<-1, or\, t>4\\ 2(t+1) & -1\le t<1\\ 4 & 1\le t<2\\ 2(4-t) & 2\le t\le 4\end{cases}$$

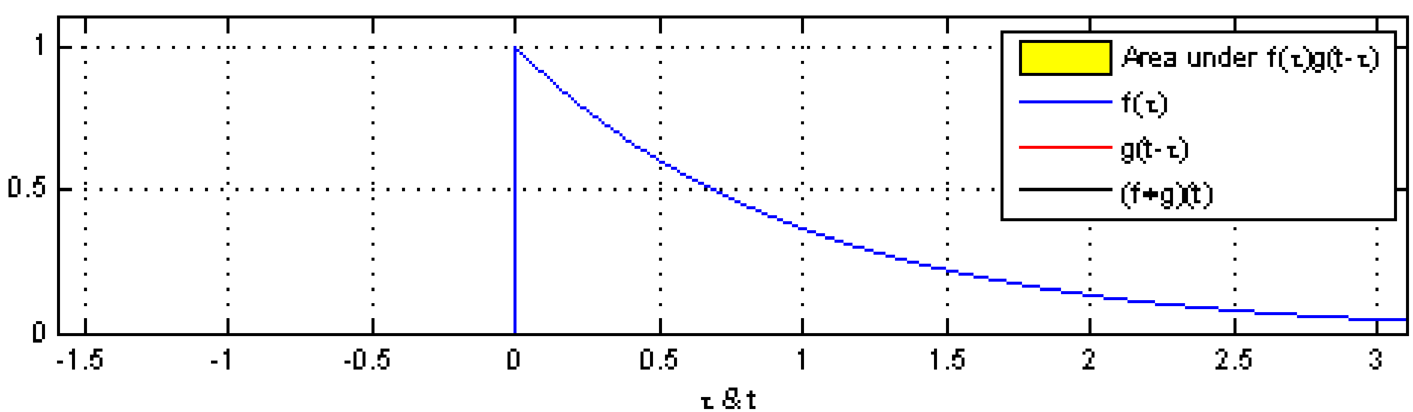


信号边界关系

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

4. 卷积积分的图解法





http://lpsa.swarthmore.edu/Convolution/ConvolvePrint.html

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

5. 卷积积分的性质

1) 交换律: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

2) 分配律: $[f_1(t) + f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t)$

3) 结合律: $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

4) 展缩特性 $f_1(at) * f_2(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$

$$f_1(at) * f_2(at) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a\tau) f_2[a(t-\tau)] \mathrm{d}\tau$$

$$\overset{a\tau = x}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(at - x) \mathrm{d}x = \frac{1}{|a|} y(at)$$

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

5. 卷积积分的性质

5) 单位元 $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$ ⇒ $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

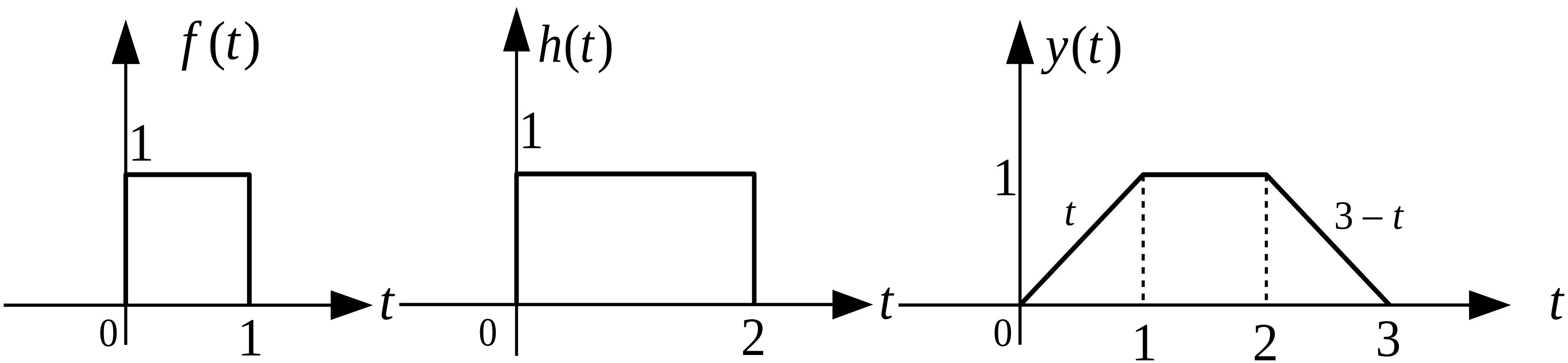
6) 平移特性 若：$y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

7) 微分器 $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$， $f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$

8) 积分器 $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(-1)}(t)$

例：利用位移特性及$u(t) * u(t)= r(t)$，计算$y(t) = f(t) * h(t)$。

解:



$$y(t) = f(t) * h(t) = [u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-2)]$$

$$= u(t)*u(t) - u(t-1)*u(t) - u(t)*u(t-2) + u(t-1)*u(t-2)$$

$$= r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$$

五. 连续时间LTI系统：卷积积分

5. 卷积积分的性质

若：$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ **有始信号**

9) 微积分特性

$$f^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(1)}(t) \qquad f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

$$f(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(n)}(t)*f_2^{(-n)}(t)$$

$$f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

i,j 取正整数的时候表示导数的阶数， 取负整数时为积分的次数

杜阿密尔积分

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=f^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t)=f^{(1)}(t)*g(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

物理含义：LTI系统的零状态响应等于激励的导数与系统的阶跃响应的卷积积分。

物理含义：激励$f(t)$可以分解成一系列接入时间不同、幅值不同的阶跃函数。

卷积积分的性质

1) 交换律： $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

2) 分配律： $[\, f_1(t) + f_2(t)\,] * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t)$

3) 结合律： $[\, f_1(t) * f_2(t)\,] * f_3(t) = f_1(t) * [\, f_2(t) * f_3(t)\,]$

4) 展缩特性 $f_1(at) * f_2(at) = y(at)/|a|$

5) 单位元 $f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t) \Rightarrow f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

6) 平移特性 若：$y(t) = f_1(t) * f_2(t)$，则 $f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$

7) 微分器 $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$， $f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$

8) 积分器 $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f^{(-1)}(t)$

9) 微积分特性 $f^{(i)}(t) = f_1^{(j)}(t) * f_2^{(i-j)}(t)$

i,j 取正整数的时候表示导数的阶数， 取负整数时为积分的次数

常见的卷积公式

$$K * x(t) = K \cdot [x(t)\text{波形的净面积值}]$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t) * \delta(t) = x'(t)$$

$$x(t) * u(t) = x(t) * \delta^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * \delta(t) = x^{(-1)}(t)$$

$$u(t) * u(t) = tu(t)$$

$$e^{-at}u(t) * e^{-at}u(t) = te^{-at}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t) = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})u(t) \qquad a \neq b$$

$$e^{-at}u(t) * u(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

$$x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT)$$

第二章 线性时不变系统的时域分析

求解系统响应

- **建立系统的数学模型：** 输入输出描述法(微分方程)
- **经典法：** 微分方程加一定初始条件
  - 满足换路定则 $\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$
  - 起始点有跳变：求跳变量
- **双零法：**
  - 零输入响应：用经典法求解
  - 零状态响应：卷积积分法求解
- **卷积积分法：求零状态响应** ★

连续时间系统的时域分析步骤

① 选择基本信号 – 冲激函数

② 任意信号分解为基本信号的加权和

③ 基本信号的系统响应 – 冲激响应

④ 叠加基本信号响应 – 卷积积分

第二章 小结

连续时间系统的时域分析

1. 微分方程的建立
2. 微分方程的经典解:
   - 齐次解与特解
   - 初始初始条件
3. 零输入及零状态响应
4. 冲激响应和阶跃响应
   - 冲激响应
   - 阶跃响应
5. LTI系统：卷积积分
   - 信号的时域分解
   - 任意信号的零状态响应
   - 卷积积分的定义
   - 卷积积分图解法
   - 卷积积分的性质

离散时间系统的时域分析

1. 差分方程的建立
2. 差分方程的经典解

第二章 线性时不变系统的时域分析

❖本章主要内容

2.1 连续时间系统的时域分析

- 微分方程的建立
- 微分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应
- 冲激响应与阶跃响应
- 连续时间LTI系统：卷积积分

★ 2.2 离散时间系统的时域分析

- 差分方程的建立
- 差分方程的经典解
- 零输入响应和零状态响应
- 单位样值响应与阶跃响应
- 离散时间LTI系统：卷积和

2.2 离散时间系统的时域分析

一. 离散时间系统差分方程的建立

1. 差分

设有序列$x(n)$, 则称：$\cdots$， $x(n+2), x(n+1), \cdots, x(n-1), x(n-2), \cdots$

为$x(n)$的移位序列。

差分算子

一阶向前差分：

$$\Delta x(n) \overset{def}{=} x(n+1) - x(n)$$

一阶向后差分：

$$\nabla x(n) \overset{def}{=} x(n) - x(n-1)$$

线性性质：

$$\nabla\left[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\right] = \alpha\nabla x_1(n) + \beta\nabla x_2(n)$$

二阶差分：

$$\nabla^2 x(n) \overset{def}{=} \nabla\left[\Delta x(n)\right] = \nabla\left[x(n) - x(n-1)\right] = \nabla x(n) - \nabla x(n-1)$$
$$= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$$

一. 离散时间系统差分方程的建立

2. 差分方程

离散LTI系统用k阶常系数差分方程描述：

$$y(n+k)+a_{k-1}y(n+k-1)+\cdots+a_1y(n+1)+a_0y(n)$$
$$=b_mx(n+m)+b_{m-1}x(n+m-1)+\cdots+b_1x(n+1)+b_0x(n)$$

a_i、b_j为常数。

例：若描述某离散系统的差分方程为：$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$

已知初始条件$y(0)=0, y(1)=2$, 激励$x(n)=2^n u(n)$, 求$y(n)$。

$$y(n)=-3y(n-1)-2y(n-2)+x(n)$$

$n=2,$ $\quad y(2)=-3y(1)-2y(0)+x(2)=-2$

依次迭代：

$$y(3)=-3y(2)-2y(1)+x(3)=10$$
$$y(4)=-3y(3)-2y(2)+x(4)=-10$$

……

迭代法或者递推法：

- 计算机计算较为方便，概念也比较清楚，
- 只有数值解，难以得到完整解析解。

二. 差分方程的经典解

1. 齐次解

齐次方程： $y(n+k)+a_{k-1}y(n+k-1)+\cdots+a_1y(n+1)+a_0y(n)=0$

差分方程的特征方程如下：$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0=0$

特征方程的解，λ_1，λ_2，…， λ_n称之特征根。

有r阶重根λ_0（$r\le n$），k-r个单根$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\ldots\neq\lambda_{k-r}$，$b_i$（$i$=1,2，···，$k$）

$$y_n(t)=\sum_{i=1}^{k-r}b_i(\lambda_i)^n+\sum_{i=k-r+1}^{k}b_in^{k-i}(\lambda_0)^n$$

二. 差分方程的经典解

1. 齐次解

特征根	齐次解$y_n(n)$
单实根	$C\lambda^n$
r重实根	$\left(C_{r-1}n^{r-1}+C_{r-2}n^{r-2}+\cdots+C_1 n+C_0\right)\lambda^n$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=a+bj=\rho e^{\pm j\beta}$	$\rho^n\left[C\cos(\beta n)+D\sin(\beta n)\right]$或$A\rho^n\cos(\beta n-\theta)$ 其中$Ae^{j\theta}=C+jD$
r重共轭复根	$\rho^n[C_{r-1}n^{r-1}\cos(\beta n-\theta_{r-1})+C_{r-2}n^{r-2}\cos(\beta n-\theta_{r-2})+\cdots+C_0\cos(\beta n-\theta_0)]$

2.2 离散时间系统的时域分析

二. 差分方程的经典解

2. 特解

外加信号	特解$y_f(n)$
n^m	$k_m n^m + k_{m-1} n^{m-1} + \cdots + k_1 n + k_0$　所有特征根不等于1。
	$k^r (k_m n^m + k_{m-1} n^{m-1} + \cdots + k_1 n + k_0)$　有r重等于1的特征根
λ^n	$k\lambda^n$，λ不是方程的特征根
	$(k_1 n+k_2)\lambda^n$，λ是方程的单特征根
	$\sum_{i=1}^{r+1} k_i t^{r+1-i} \lambda^n$　λ是方程的r阶特征重根
$\cos(\beta n)$或者$\sin(\beta n)$	$P\cos(\beta n)+Q\sin(\beta n)$ 所有的特征根不等于 $e^{\pm j\beta}$

固有响应-齐次解

强迫响应 - 特解

$$y(n) = y_n(n) + y_f(n) = \sum_{i=1}^{k-r} k_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^{k} k_i n^{k-i} (\lambda_0)^n + y_f(n)$$

例：求下列离散系统的完全响应$y(n)$。

$$6y(n)-5y(n-1)+y(n-2)=x(n),\quad y(0)=0, y(1)=-1, f(n)=u(n)。$$

解：差分方程的特征方程为：$6\lambda^2-5\lambda+1=0$, 两个实根为1/2和1/3。

齐次解为：
$$y_n(n)=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

激励为 $f(n)=u(n)$，则特解形式为：$y_f(n)=C, n\geq 0$ ⇨ $C=1/2$

因此，
$$y(n)=y_n(n)+y_f(n)=A(1/2)^n+B(1/3)^n+1/2$$

带入初始条件：
$$\begin{cases} A+B+1/2=0 \\ A/2+B/3+1/2=-1 \end{cases}$$

解得A=-8，B=15/2

$$y(n)=-8\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{15}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}, k\geq 0$$

P47, 例2.2.3

2.2 离散时间系统的时域分析

三. 零输入响应和零状态响应

零输入响应　　　　零状态响应

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

没有外加信号的作用，仅有系统的初始储能所引起的响应

零初始条件，外加信号作用下的响应

齐次差分方程的解

非齐次差分方程的全解

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k-r} c_i(\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^{k} c_i n^{k-i}(\lambda_0)^n + \sum_{i=1}^{k-r} d_i(\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^{k} d_i n^{k-i}(\lambda_0)^n + y_f(n)$$

固有响应

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k-r} b_i(\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^{k} b_i n^{k-i}(\lambda_0)^n = \sum_{i=1}^{k-r}(c_i+d_i)(\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^{k}(c_i+d_i)n^{k-i}(\lambda_0)^n$$

强迫响应

离散系统与连续系统各响应分量的求解规律是完全相似的。

2.2 离散时间系统的时域分析

例：求下列离散系统的完全响应，固有响应以及强迫响应。

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n),\quad y(0)=0, y(1)=2, f(n)=2^n u(n)。$$

解：差分方程的特征方程为：$\lambda^2+3\lambda+2=0$, 两个实根为-1和-2。

齐次解为： $y_n(n)=A(-1)^n+B(-2)^n$

激励为$f(n)=2^n u(n)$，则特解形式为：$y_f(n)=C2^n, n\ge 0$ $\Rightarrow$ $C=1/3$

因此， $y(n)=y_n(n)+y_f(n)=A(-1)^n+B(-2)^n+2^n/3$

带入初始条件： $\begin{cases} A+B+1/3=0 \\ -A-2B+2/3=2 \end{cases}$ 解得$A=2/3$，$B=-1$

完全响应 $$y(n)=\underbrace{\frac{2}{3}(-1)^n-(-2)^n}_{\text{固有响应}}+\underbrace{\frac{1}{3}(2)^n}_{\text{强迫响应}}, n\ge 0$$

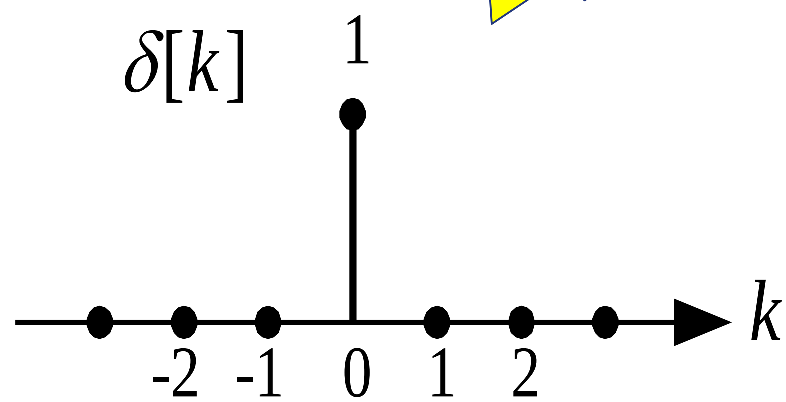
2.2 离散时间系统的时域分析

四. 单位样值响应和阶跃响应

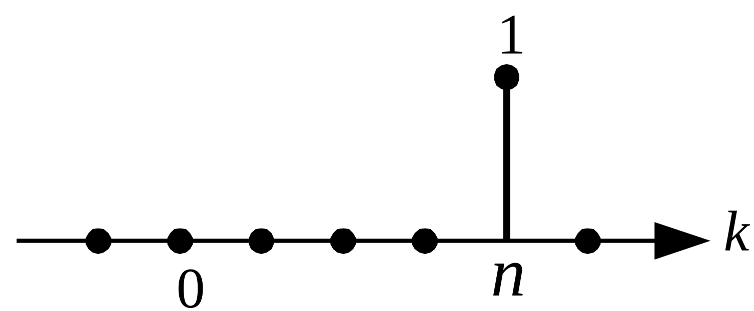
复习

单位脉冲序列

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$



$$\delta(k-n)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$



四. 单位样值响应和阶跃响应

复习

单位脉冲序列性质

$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$$

$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k) = 1 \qquad \delta(k) = \delta(-k)$$

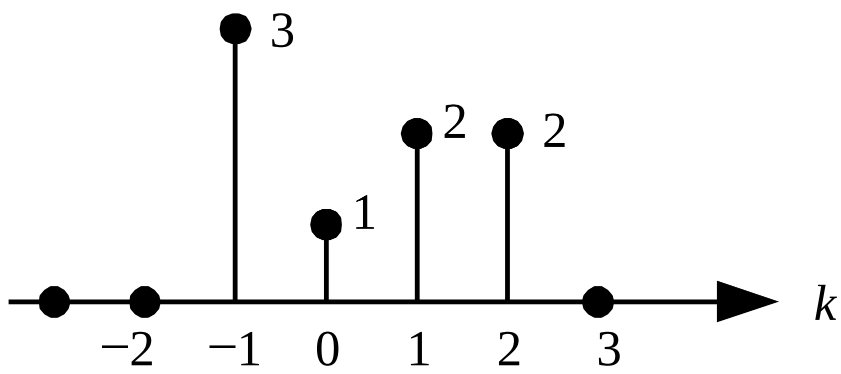
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)$$

四. 单位样值响应和阶跃响应

复习

单位脉冲序列可以表示任意离散时间信号



$$f(k) = 3\delta(k+1) + \delta(k) + 2\delta(k-1) + 2\delta(k-2)$$

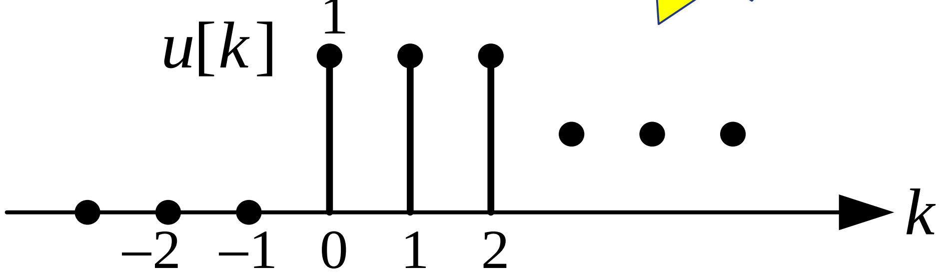
$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

四. 单位样值响应和阶跃响应

单位阶跃序列

复习

$$u(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$



✓ δ(k)与u(k)的关系：

$$\delta(k)=u(k)-u(k-1)$$

$$u(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta(n)$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

四. 单位样值响应和阶跃响应

1. 单位样值响应

当LTI系统的激励为**单位序列$\delta(n)$**时，系统的零状态响应称为**单位样值响应**（或单位序列响应、单位取样响应），用$h(n)$表示，它的作用与连续系统中的冲激响应$h(t)$相类似，不同之处体现在以下两点：

- 离散信号本身就是一个不连续序列，外加信号分解简单；
- 系统的单位样值响应是一个离散时间序列，无需积分，表现为卷积和过程

求解: 系统的单位序列响应可用求解差分方程法或z变换法(第七章)

单位序列响应通过求解齐次方程得到，而n=0处的值$h(0)$可按零状态的条件由差分方程确定。

四. 单位样值响应和阶跃响应

2. 阶跃响应

当LTI系统的激励为单位阶跃序列$u(n)$时，系统的零状态响应称为**阶跃响应**，用$g(n)$表示。

$$u(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}\delta(i)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(n-j)\xrightarrow{\text{线性以及移位不变性}}g(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(n-j)$$

$$\delta(n)=\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)\xrightarrow{\text{线性以及移位不变性}}h(n)=\nabla g(n)=g(n)-g(n-1)$$

2.2 离散时间系统的时域分析

例：求下列离散系统的单位样值响应和阶跃响应。

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

解： 1）单位样值响应

单位样值响应满足方程

$$\begin{cases} h(n)-3h(n-1)+2h(n-2)=\delta(n) \\ \text{初始条件：} h(-2)=h(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &h(0)=3h(-1)-2h(-2)+\delta(0)=1 \\ &h(1)=3h(0)-2h(-1)+\delta(1)=3 \end{aligned}$$

当$n>0$时，$h(n)$满足其次方程： $h(n)-3h(n-1)+2h(n-2)=0$

特征方程为：$\lambda^2-3\lambda+2=0$, 两个实根为1和2。

$$h(n)=A(1)^n+B(2)^n, n>0 \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=3 \end{cases} \Rightarrow$$ 解得A=-1，B=2

因此， $h(n)=-(1)^n+2(2)^n, n\geq 0$

2.2 离散时间系统的时域分析

例：求下列离散系统的单位样值响应和阶跃响应。

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

解：2）阶跃响应

阶跃响应满足方程

$$\begin{cases} g(n)-3g(n-1)+2g(n-2)=u(n) \\ \text{初始条件：} g(-2)=g(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} g(0)&=3g(-1)-2g(-2)+u(0)=1 \\ g(1)&=3g(0)-2g(-1)+u(1)=4 \end{aligned}$$

特解形式为： $g_f(n)=Cn \Rightarrow C=-1$

$$\text{g}(n)=A(1)^n+B(2)^n-n,n\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=5 \end{cases} \Rightarrow \text{解得}A=-3,\ B=4$$

$$\text{g}(n)=-3(1)^n+4(2)^n-n,n\ge 0$$

2.2 离散时间系统的时域分析

例：求下列离散系统的单位样值响应和阶跃响应。

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

解：1）单位样值响应 $u(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}\delta(i)$ 2）阶跃响应

$$h(n)=-(1)^n+2(2)^n,n\geq 0$$

$$g(n)=-3(1)^n+4(2)^n-n,n\geq 0$$

$$g(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}h(i)=-\sum_{i=0}^{n}(1)^n+2\sum_{i=0}^{n}(2)^n$$

$$=-(n+1)+2\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=4(2)^n-n-3$$

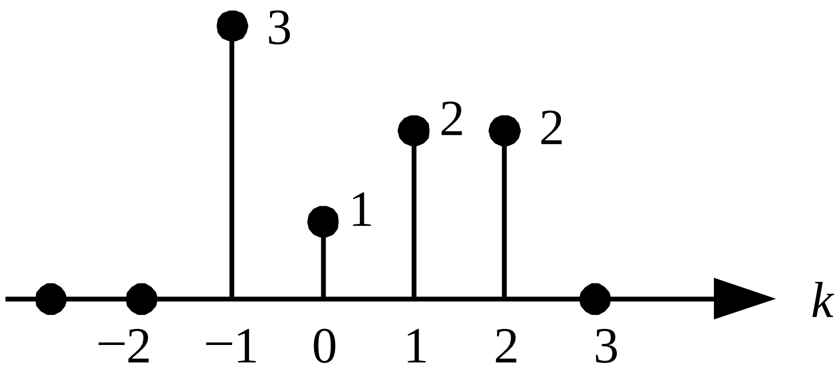
练习：习题 P. 69 2.3-2 写出系统的差分方程并求单位样值响应

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-1)$$

$$h_1(n)=h(n)-h(n-1)=-(1)^n+2(2)^n+(1)^{n-1}-2(2)^{n-1}=2^n,n\geq 0$$

五：离散时间LTI系统：卷积和

1. 序列的时域分解



$$f(k)=3\delta(k+1)+\delta(k)+2\delta(k-1)+2\delta(k-2)$$

任意离散序列

$$f(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(k-n)$$

五. 离散时间LTI系统：卷积和

2. 任意序列的零状态响应

$x(n) \longrightarrow$ **LTI系统** $\longrightarrow y(n)$

单位样值响应定义	$\delta(n)$	$\Rightarrow$	$h(n)$
时不变特性	$\delta(n-i)$	$\Rightarrow$	$h(n-i)$
齐次性	$x(i)\delta(n-i)$	$\Rightarrow$	$x(i)h(n-i)$
叠加性	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)$	$\Rightarrow$	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i)$
	$\Downarrow$		$\Downarrow$
	$x(n)$		$y_{zs}(n)$

卷积和：

$$y_{zs}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)$$

2.1 离散时间系统的时域分析

五. 离散时间LTI系统：卷积和

3. 卷积和的定义

已知定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的两个函数$x_1(n)$和$x_2(n)$，则定义和

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x_1(i)x_2(n-i)$$

为$x_1(n)$和$x_2(n)$ 的卷积和，简称为卷积，可记为： $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$

$$y_{zs}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)h(n-i)=x(n)*h(n)$$

系统对于输入信号$x(n)$的零状态响应是信号$x(n)$与单位样值响应$h(n)$的卷积和。

2.2 离散时间系统的时域分析

例 1 $x(n)=a^n u(n)$， $h(n)=b^n u(n)$，求$y_{zs}(n)$

$$y_{zs}(n)=x(n)*h(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)h(n-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a^i u(i)b^{n-i}u(n-i)$$

当$i<0, u(i)=0$; 当$i>n$ 时，$u(n-i)=0$

$$y_{zs}(n)=u(n)\sum_{i=0}^{n}a^i b^{n-i}=b^n u(n)\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^i=\begin{cases} b^n\dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{a}{b}}u(n), & a\neq b \\ b^n(n+1)u(n), & a=b \end{cases}$$

例 2 求卷积和$u(n)*u(n)$

$$u(n)*u(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u(i)u(n-i)=u(n)\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)u(n)$$

例 3 求卷积和$a^n u(n) * u(n-4)$

$$a^n u(n) * u(n-4) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i u(i) u(n-4-i) = u(n-4)\sum_{i=0}^{n\text{-}4} a^i$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-a^{n-3}}{1-a} u(n-4), & a \neq 1 \\ \left(n-3\right) u(n), & a = 1 \end{cases}$$

例 4 求卷积和$u(n-3) * u(n-4)$

$$u(n-3) * u(n-4) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i-3) u(n-4-i) = u(n-7)\sum_{i=3}^{n-4} 1 = \left(n-6\right) u(n-7)$$

例 5 求卷积和$a^n u(n) * 1$

$$a^n u(n) * 1 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a^i u(i) \times 1 = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & a < 1 \\ \text{无穷，不存在} & a \geq 1 \end{cases}$$

五. 离散时间LTI系统：卷积和

4. 卷积和的图解法

$$x(n)*h(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)h(n-i)$$

图解法步骤：

① 置换： $n\rightarrow i$

② 翻转： $i\rightarrow -i$

③ 平移： $-i\rightarrow n-i$

④ 相乘： $x(i)\,h(n-i)$

⑤ 求和： $\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)h(n-i)$

一般如果两序列的长度分别为n_1和n_2，

① 它们的卷积的长度为n_1+n_2-1,这与卷积积分的时长等于两函数的时长之和是不同的；

② 卷积和的起点为两序列起点之和，与卷积积分是一致的。

具体实例参见P61 例2.5.2

五. 离散时间LTI系统：卷积和

5. 卷积和的性质

1) 交换律: $f_1(n) * f_2(n) = f_2(n) * f_1(n)$

2) **分配律:** $[f_1(n) + f_2(n)] * f_3(n) = f_1(n) * f_3(n) + f_2(n) * f_3(n)$

3) **结合律:** $[f_1(n) * f_2(n)] * f_3(n) = f_1(n) * [f_2(n) * f_3(n)]$

证明:

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(n-i) = \sum_{i=\infty}^{-\infty} f_1(n-j) f_2(j)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_2(j) f_1(n-j) = f_2(n) * f_1(n)$$

2.2 离散时间系统的时域分析

五. 离散时间LTI系统：卷积和

5. 卷积和的性质

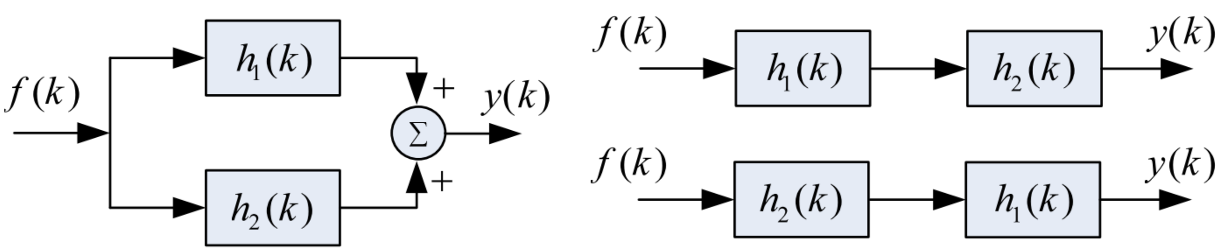
4) 单位元 $f(n)*\delta(n)=\delta(n)*f(n)=f(n)$

5) 延时特性 $f(n)*\delta(n-n_0)=f(n-n_0)$

6) 平移特性 $f_1(n-n_1)*f_2(n-n_2)=f_1(n-n_1-n_2)*f_2(n)$

7) 数字积分器 $f(n)*u(n)=\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)$

8) 复合系统的单位样值响应



$h(k)=h_1(k)+h_2(k)$

(a) 并联

$h(k)=h_1(k)*h_2(k)=h_2(k)*h_1(k)$

(b) 级联

五. 离散时间LTI系统：卷积和

6. 反卷积

零状态响应： $y_{zs}(n)=h(n)*f(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}h(i)f(n-i)$

如果给定激励 $f(n)$和零状态响应$y_{zs}(n)$，求冲激响应$h(n)$。

$$y_{zs}(0)=h(0)f(0)$$
$$y_{zs}(1)=h(0)f(1)+h(1)f(0)$$
$$y_{zs}(2)=h(0)f(2)+h(1)f(1)+h(2)f(0)$$
……

$$h(0)=y_{zs}(0)/f(0)$$
$$h(1)=\left[y_{zs}(1)-h(0)f(1)\right]/f(0)$$
$$h(2)=\left[y_{zs}(2)-h(0)f(2)-h(1)f(1)\right]/f(0)$$
……

$$h(n)=\left[y_{zs}(n)-\sum_{i=0}^{n-1}h(i)f(n-i)\right]/f(0)$$

如果给定冲激响应$h(n)$和零状态响应$y_{zs}(n)$，求激励 $f(n)$。

$$f(n)=\left[y_{zs}(n)-\sum_{i=0}^{n-1}f(i)h(n-i)\right]/h(0)$$

例. 习题 P72 2.5-7

发射信号$x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$和接收信号$y_{zs}(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$。

$$h(n)=\left[y_{zs}(n)-\sum_{i=0}^{n-1}h(i)x(n-i)\right]/x(0)$$

$$h(0)=y_{zs}(0)/x(0)=1$$

$$h(1)=\left[y_{zs}(1)-h(0)x(1)\right]/f(0)=0.5-0.5=0$$

$$h(2)=\left[y_{zs}(2)-h(0)x(2)+h(1)x(1)\right]/f(0)=0.5^2-0-0=0.5^2$$

$$h(3)=0,\quad h(4)=0.5^4\cdots\cdots$$

因此归纳得：$h(n)=\begin{cases}0.5^n & n\text{是偶数}\\ 0 & n\text{是奇数}\end{cases}$

常用卷积和公式

$$(1) f(k) * \delta(k) = f(k);$$

$$(2) f(k) * \delta(k-k_0) = f(k-k_0);$$

$$(3) \delta(k) * \delta(k) = \delta(k);$$

$$(4) \delta(k-k_1) * \delta(k-k_2) = \delta(k-k_1-k_2);$$

$$(5) f_1(k-k_1) * f_2(k) = f_1(k) * f_2(k-k_1);$$

$$(6) f_1(k-k_1) * f_2(k-k_2) = f_1(k-k_2) * f_2(k-k_1)$$

$$= f_1(k) * f_2(k-k_1-k_2) = f_1(k-k_1-k_2) * f_2(k)$$

第二章 小结

连续时间系统的时域分析

1. 微分方程的建立
2. 微分方程的经典解:
   - 齐次解与特解
   - 初始条件
3. 零输入及零状态响应
4. 冲激响应和阶跃响应
   - 冲激响应
   - 阶跃响应
5. 连续时间LTI系统：卷积积分★
   - 信号的时域分解
   - 任意信号的零状态响应
   - 卷积积分的定义
   - 卷积积分的图解法
   - 卷积积分的性质

离散时间系统的时域分析

1. 差分方程的建立
2. 差分方程的经典解
   - 齐次解与特解
   - 初始条件
3. 零输入及零状态响应
4. 单位样值响应和阶跃响应
   - 单位样值响应
   - 阶跃响应
5. 离散时间LTI系统：卷积和
   - 序列的时域分解
   - 任意序列的零状态响应
   - 卷积和的定义
   - 卷积和的图解法
   - 卷积和的性质

第二章作业

习题 2.1-3 (1,3)

习题 2.2.1， 2.2-4，2.3-3（1,2）

习题 2.4-1（1,3,5），2.4-7， 2.5.5

Thank You !