2020电动力学第9课 静电磁学2
电磁介质模型
第二节习题

1. 描述束缚电荷面密度的物理意义。根据(15)式推导(16)式。

2. 从(17)式证明(18)式。

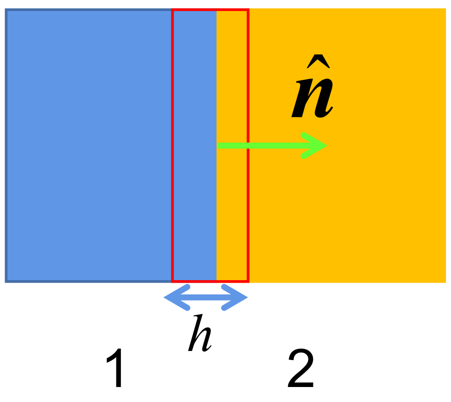
1. 题目：描述束缚电荷面密度的物理意义。根据

$$\nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_M$$

推导

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (M_2 - M_1) = \boldsymbol{\alpha}_M$$

解：束缚电荷是电中性介质中不能作宏观距离移动的电荷。束缚电荷面密度描写束缚电荷在两种介质界面的分布，其物理意义如下。考虑介质1和2的界面如图，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是从1指向2的界面法向；红色矩形表示高度为h的跨越界面柱体的侧面，分别处于介质1和2的柱体左和右底面均平行于界面。



设柱体底面面积为ΔS，内中有束缚电荷ΔQ. 则当ΔS为宏观小、微观大面积元，而h为宏观小、微观大线元时，ΔQ和ΔS的比称为束缚电荷面密度。可见，束缚电荷面密度一般依赖于所选柱体的高度h.

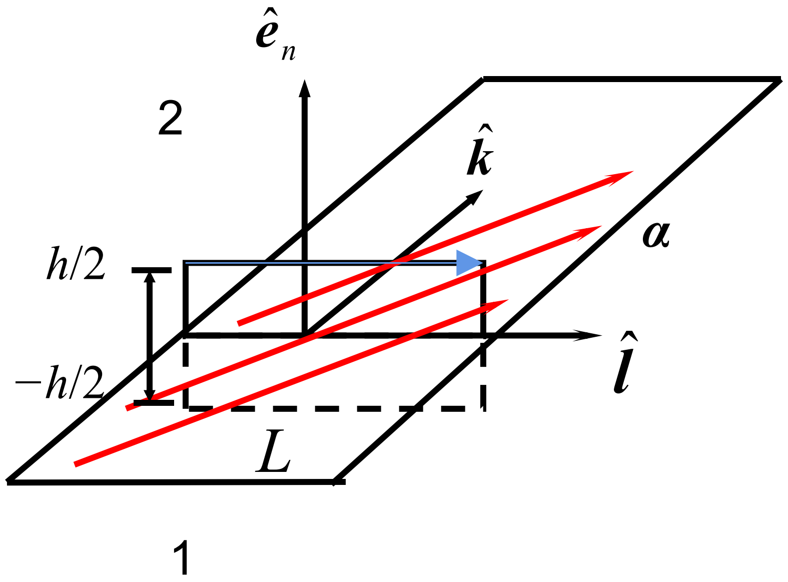
宏观小、微观大条件保证处于每一介质的柱体底面上束缚电荷分布可用宏观平均的近似均匀分布描写。

边值关系把界面两侧的电磁场联系起来，代价是不能描写宏观小、微观大厚度为h的界面层内的电磁场和电荷电流细节。

下面讨论磁化强度的边值关系。已知磁化强度$\boldsymbol{M}$满足

$$\nabla\times\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}_M \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{J}_M$是束缚电流密度.



跨越介质1和2的界面取垂直界面的矩形回路，并建立坐标系如图。其中$\hat{\boldsymbol{k}}$和$\hat{\boldsymbol{\imath}}$是界面平面上的两个互相垂直的单位方向矢量，他们分别与矩形垂直和平行；$\hat{\boldsymbol{e}}_n$是1指向2的界面法向。三个单位矢量，$\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{k}},\hat{\boldsymbol{e}}_n$，构成三维直角坐标架。取矩形回路的高度为$h$、宽度为$L$，他们都是宏观小、微观大量，而且h是比L高阶的无穷小量。

对（1）式在矩形回路所包围面元 S 求 $\boldsymbol{M}$ 的环量，

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_S \boldsymbol{J}_M\cdot d\boldsymbol{s} \tag{2}$$

应用斯托克斯定理把左边写成回路积分，而右边是通过S的束缚电流 I_M

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l}=I_M \tag{3}$$

因为h是高阶小量且$|\boldsymbol{M}|$有限，回路积分中沿法向方向的线积分可以忽略。而在每一介质的线元范围$\boldsymbol{M}$可以看着常矢量，所以(3)式化为

$$(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)\cdot L\hat{\boldsymbol{l}}=I_M \tag{4}$$

另一方面，利用几何关系，$\hat{\boldsymbol{e}}_n\times\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{k}}$，通过面元的束缚电流

$$I_M=\iint_S \boldsymbol{J}_M\cdot\hat{\boldsymbol{k}}ds=L\int_{-h/2}^{h/2}(\boldsymbol{J}_M\cdot\hat{\boldsymbol{k}})dh=L\int_{-h/2}^{h/2}\boldsymbol{J}_M\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_n\times\hat{\boldsymbol{l}})dh \tag{5}$$

记$\boldsymbol{J}_M$在界面的投影为$\boldsymbol{J}_M^{//}$。利用矢量混合运算公式 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 可进一步将(5)写成

$$I_M=\iint_S \boldsymbol{J}_M\cdot\hat{\boldsymbol{k}}ds=L\int_{-h/2}^{h/2}(\boldsymbol{J}_M\times\hat{\boldsymbol{e}}_n)\cdot\hat{\boldsymbol{l}}dh=L\left[\left(\int_{-h/2}^{h/2}\boldsymbol{J}_M^{//}dh\right)\times\hat{\boldsymbol{e}}_n\right]\cdot\hat{\boldsymbol{l}} \tag{6}$$

定义界面束缚电流线密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_M = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{J}_M^{//} dh \tag{7}$$

它与界面平行，

$$\boldsymbol{\alpha}_M \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_n = 0 \tag{8}$$

把（7）代入（6）式，把通过界面面元S的束缚电流写成

$$I_M = L(\boldsymbol{\alpha}_M \times \hat{\boldsymbol{e}}_n) \cdot \hat{\boldsymbol{l}} \tag{9}$$

代入（4）式得

$$(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{l}} = (\boldsymbol{\alpha}_M \times \hat{\boldsymbol{e}}_n) \cdot \hat{\boldsymbol{l}} \tag{10}$$

因为 $\hat{\boldsymbol{l}}$ 任意，所以(10)等价于

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) = \hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{\alpha}_M \times \hat{\boldsymbol{e}}_n) \tag{11}$$

应用公式 $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 于上式右边，并利用（8）式，最后得

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) = \boldsymbol{\alpha}_M \tag{12}$$

问题得证。

2. 题目：总磁偶极矩密度定义为 $\boldsymbol{m}_V = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}')dV'$. 利用 $\nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_M$ 证明

$$\boldsymbol{m}_V = \iiint\limits_V \boldsymbol{M}dV' - \frac{1}{2}\oiint\limits_{\partial V} \boldsymbol{x}' \times (\boldsymbol{M} \times d\boldsymbol{s})$$

证明：根据 $\nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_M$ ，把 $\boldsymbol{m}_V$的被积函数写成

$$\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}' \times \left[\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}')\right] \tag{1}$$

利用三维全反对称张量

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \quad [i,j,k] = [1,2,3],[2,3,1],[3,1,2] \\ -1 & , \quad [i,j,k] = [2,1,3],[1,3,2],[3,2,1] \\ 0 & , \quad \text{其他情形} \end{cases} \tag{2}$$

在直角坐标系两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$叉乘的一个分量可以写成

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{3}$$

其中重复指标j和k隐含从 1 到 3 求和。

从而（1）式的第 i 直角分量为

$$\left(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}')\right)_i=\varepsilon_{ijk}x'_j\varepsilon_{klm}\frac{\partial M_m(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_l}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\left[\frac{\partial(x'_jM_m)}{\partial x'_l}-\frac{\partial x'_j}{\partial x'_l}M_m\right]$$

$$=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\left[\frac{\partial(x'_jM_m)}{\partial x'_l}-\delta_{jl}M_m\right]=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\left[\frac{\partial(x'_jM_m)}{\partial x'_l}-\delta_{jl}M_m\right] \tag{4}$$

利用恒等式 $\varepsilon_{klm}=\varepsilon_{lmk}$ 和 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$，上式化为

$$\left(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}')\right)_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\frac{\partial(x'_jM_m)}{\partial x'_l}-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmk}M_m$$

$$=\frac{\partial(\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}x'_jM_m)}{\partial x'_l}-(\delta_{im}-3\delta_{im})M_m=\frac{\partial(\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}x'_jM_m)}{\partial x'_l}+2M_i \tag{5}$$

引入矢量场$\boldsymbol{N}^{(i)}(\boldsymbol{x}')$，它的第 l 直角分量为（注意重复指标求和后不出现在左边）

$$N_l^{(i)}(\boldsymbol{x}')=\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}x'_jM_m \tag{6}$$

利用（6）式可把（5）式写成

$$\left(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}')\right)_i=\frac{\partial N_l^{(i)}}{\partial x_l'}+2M_i \tag{7}$$

利用(7)式可将总磁偶极矩的第 i 直角分量写成

$$(\boldsymbol{m}_V)_i=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\nabla'\cdot\boldsymbol{N}^{(i)}+2M_i\right)dV'=\frac{1}{2}\iiint_V\nabla'\cdot\boldsymbol{N}^{(i)}+\iiint_V M_i dV \tag{8}$$

应用高斯公式到右边第一项

$$(\boldsymbol{m}_V)_i=\iiint_V M_i dV+\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}\boldsymbol{N}^{(i)}\cdot d\boldsymbol{s}' \tag{9}$$

利用$\boldsymbol{N}^{(i)}$的定义（6）式，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}\boldsymbol{N}^{(i)}\cdot d\boldsymbol{s}'&=\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}N_l^{(i)}ds_l'=\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}x_j'M_m ds_l'\\&=-\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}\varepsilon_{kml}\varepsilon_{ijk}x_j'M_m ds_l'=-\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}[\boldsymbol{x}'\times(\boldsymbol{M}\times d\boldsymbol{s}')]_i\end{aligned} \tag{10}$$

把（10）式代入（9）式得：

$$(\boldsymbol{m}_V)_i=\iiint_V \boldsymbol{M}_i dV'-\frac{1}{2}\oiint_{\partial V}[\boldsymbol{x}'\times(\boldsymbol{M}\times d\boldsymbol{s})]_i \tag{11}$$

此即求证式的分量形式。证毕。