§4 独 立 性

返回主目录

例 1

袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，取后放回．令：

A={ 第一次取出白球 }，

B={ 第二次取出白球 }，

则

$$P(A)=\frac{b}{a+b}$$

$$P(AB)=\frac{b^2}{(a+b)^2} \qquad P(\overline{A}B)=\frac{ab}{(a+b)^2}$$

返回主目录

例 1（续）

所以，由 $B = AB \cup \overline{A}B$

得：$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$

$$= \frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{b}{a+b}$$

而，$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{b^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{b}{a+b}} = \dfrac{b}{a+b}$

说　　明

由例 1，可知 $P(B)=P(B|A)$

这表明，事件 A 是否发生对事件 B 是否发生在概率上是没有影响的，即事件 A 与 B 呈现出某种独立性．事实上，由于是有放回摸球，因此在第二次取球时，袋中球的总数未变，并且袋中的黑球与白球的比例也未变，这样，在第二次摸出白球的概率自然也未改变．

由此，我们引出事件独立性的概念

事件独立性的定义

设 A、B 是两个随机事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 是相互独立的随机事件.

事件独立性的性质：

1）如果事件A 与 B 相互独立，而且 $P(A)>0$

则　$P(B|A)=P(B)$

证明： 由于事件 A 与 B 相互独立，故

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

因此，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$

2）必然事件S与任意随机事件A相互独立；

不可能事件Φ与任意随机事件A相互独立.

证明：由 $P(SA)=P(A)=1\cdot P(A)=P(S)P(A)$

可知必然事件S 与任意事件 A 相互独立；

由 $P(\Phi A)=P(\Phi)=0\cdot P(A)=P(\Phi)P(A)$

可知不可能事件Φ与任意随机事件A相互独立.

3)若随机事件 A 与 B 相互独立，则

$$\overline{A} \text{ 与 } B、A \text{ 与 } \overline{B}、\overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也相互独立.

解：为方便起见，只证 $\overline{A}$ 与 B 相互独立即可

由于 $P(\overline{A}B) = P(B - AB)$.

注意到 $AB \subset B$，由概率的可减性，得

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

$$= P(B) - P(A)P(B) \quad (\text{事件 } A \text{ 与 } B \text{ 的独立性})$$

$$= [1 - P(A)]P(B) = P(\overline{A})P(B)$$

所以，事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立.

注意：在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来加以判断的。具体的说，题目一般把独立性作为条件告诉我们，要求直接应用定义中的公式进行计算。

例 2

设事件 A 与 B 满足：$P(A)P(B) \neq 0$

若事件 A 与 B 相互独立，则 AB≠Φ；

若 AB =Φ，则事件 A 与 B 不相互独立.

证明：

由于事件 A 与 B 相互独立，故

$$P(AB) = P(A)P(B) \neq 0$$

所以，$AB \neq \Phi$

由于AB =Φ，所以

$$P(AB)=P(\Phi)=0$$

但是，由题设　$P(A)P(B)\neq 0$

所以，　$P(AB)\neq P(A)P(B)$

这表明，事件 A 与 B 不相互独立.

此例说明：互不相容与相互独立不能同时成立。

例 3（不独立事件的例子）

袋中有 a 只黑球，b 只白球．每次从中取出一球，取后不放回．令：

A={ 第一次取出白球 }，

B={ 第二次取出白球 }，

则 $$P(A)=\frac{b}{a+b}$$

$$P(AB)=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} \qquad P(\bar{A}B)=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

所以，

得：$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

返回主目录

$$=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{b}{a+b}$$

而，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}}{\frac{b}{a+b}}$

$$=\frac{b-1}{a+b-1}$$

因此

$$P(B|A) \neq P(B)$$

这表明，事件 A 与事件 B 不相互独立．事实上，由于是不放回摸球，因此在第二次取球时，袋中球的总数变化了，并且袋中的黑球与白球的比例也发生变化了，这样，在第二次摸出白球的概率自然也应发生变化．或者说，第一次的摸球结果对第二次摸球肯定是有影响的．

三个事件的独立性

设A、B、C是三个随机事件，如果

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称A、B、C是相互独立的随机事件.

注　　意

在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．即：前三个等式的成立不能推出第四个等式的成立；反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

例 4

袋中装有 4 个外形相同的球，其中三个球分别涂有红、白、黑色，另一个球涂有红、白、黑三种颜色．现从袋中任意取出一球，令：

A={ 取出的球涂有红色 }

B={ 取出的球涂有白色 }

C={ 取出的球涂有黑色 }

则：

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

返回主目录

$$P(ABC)=\frac{1}{4}$$

由此可见

$$P(AB)=P(A)P(B) \quad P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

但是 $$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

这表明，A、B、C这三个事件是两两独立的，但不是相互独立的.

n个事件的相互独立性

设 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 为n个随机事件，如果下列等式成立：

$$\begin{cases} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) & (1 \le i < j \le n) \\ P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1 \le i < j < k \le n) \\ \quad \cdots\cdots & \\ P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}) & (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n) \\ \quad \cdots\cdots & \\ P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) & \end{cases}$$

则称 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 这n个随机事件相互独立.

返回主目录

说　明

在上面的公式中，

第一行有C_n^2个等式，第二行有C_n^3个等式,⋯⋯, 最后一行共有C_n^n个等式

因此共有

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^0-C_n^1$$

$$=2^n-1-n$$

个等式

独立随机事件的性质

§4 独立性

如果 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$ 这 n 个随机事件相互独立.

则 $A_{i_1}, \quad \cdots, \quad A_{i_m}, \quad \overline{A}_{i_{m+1}}, \quad \cdots, \quad \overline{A}_{i_n}$ 这 n 个随机事件也相互独立.

其中 $i_1, \quad i_2, \quad \cdots, \quad i_n$ 是 $1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n$ 的一个排列.

相互独立事件至少发生其一的概率的计算

若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是相互独立的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n})$$
$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n})$$

特别地，如果

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = p$$

则有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n$$

返回主目录

注　意

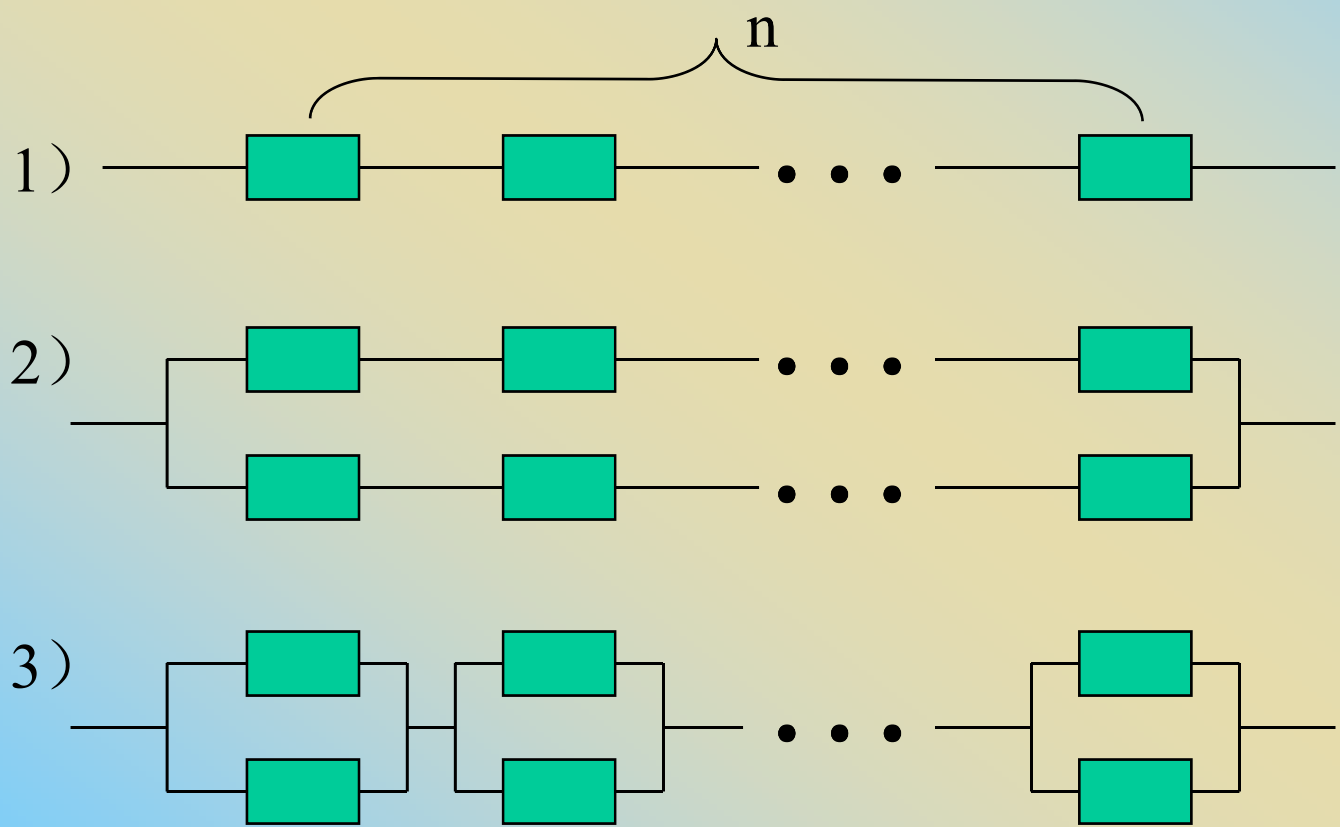
当 $n \to \infty$ 时，$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n \to 1$

假设独立重复地做n次某一试验E, A是某一随机事件, A_i表示第i次试验中A出现, 则前n次试验中A至少出现一次的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n \to 1$$

此结论说明:小概率事件迟早要发生.

例5 如果构成系统的每个元件的可靠性均为r，0<r<1.且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列系统的可靠性：



返回主目录

解：1）该条通路要能正常工作，当且仅当该通路上的各元件都正常工作，故可靠性为 $R_c = r^n$

2）通路发生故障的概率为 $1-r^n$，两条通路同时发生故障的概率为 $(1-r^n)^2$. 故系统的可靠性为

$$R_s = 1-(1-r^n)^2 = r^n(2-r^n) = R_c(2-R_c)$$

$$\because R_c < 1, \therefore R_s > R_c.$$

即附加通路可使系统可靠性增加。

3）每对并联元件的可靠性为 $R' = 1-(1-r)^2 = r(2-r)$

系统由每对并联的元件串联组成，故可靠性为

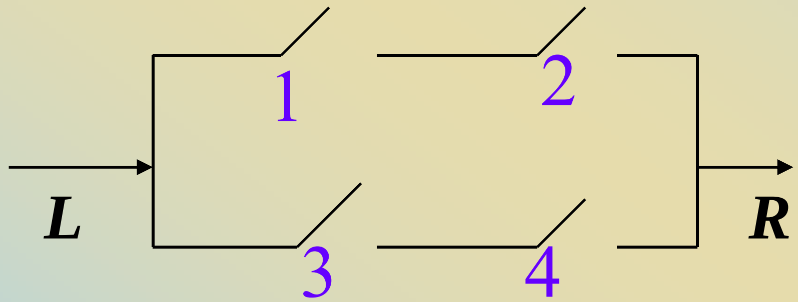
$$R_s' = (R')^n = r^n(2-r)^n = R_c(2-r)^n.$$ 显然 $R_s' > R_c.$

由数学归纳法可证明当 $n \geq 2$ 时，$(2-r)^n > 2-r^n$, 即 $R_s' > R_s$.

例 6 设有电路如图，其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点。设各继电器接点闭合与否相互独立，且每一个继电器接点闭合的概率均为 p。求 ***L*** 至 ***R*** 为通路的概率。

解： 设事件 A_i(i=1,2,3,4) 为“第 i 个继电器接点闭合”，***L*** 至 ***R*** 为通路这一事件可表示为：

$$A = A_1A_2 \bigcup A_3A_4 .$$

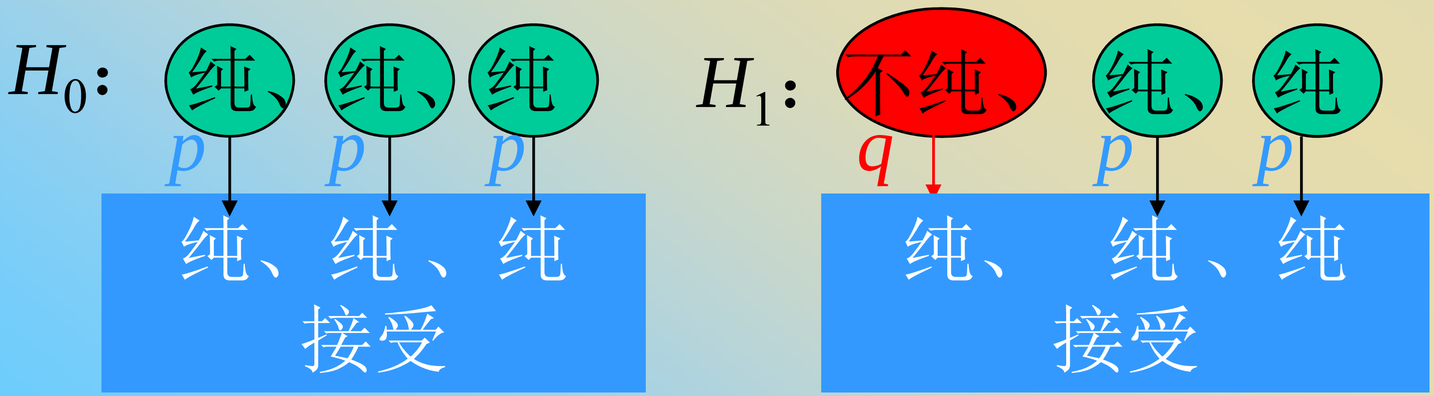


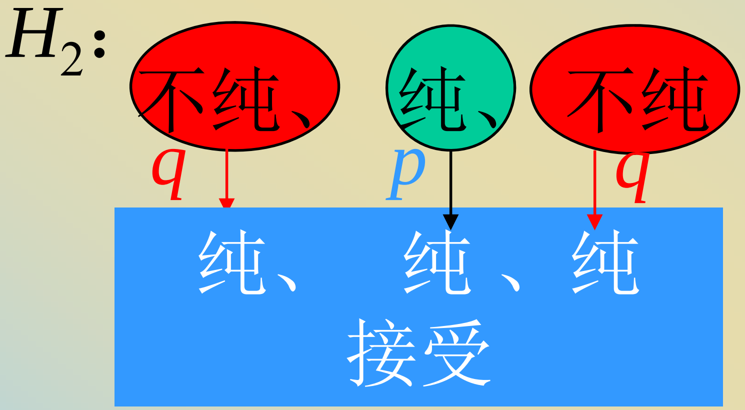
§4 独立性

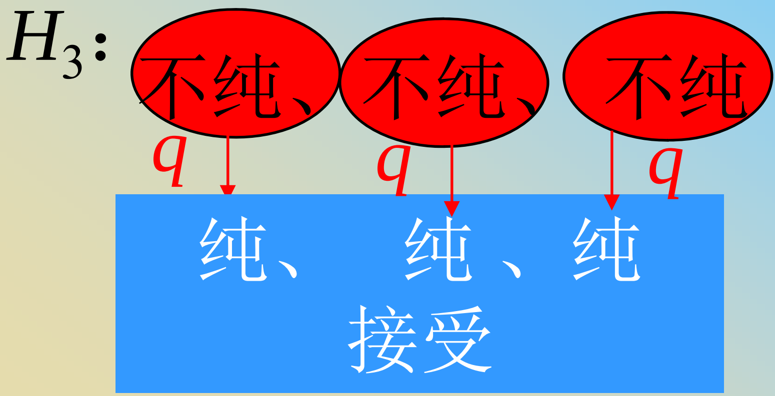
由和事件的概率公式及 A_1, A_2, A_3, A_4 的相互独立性，得到

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) \\
&\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\
&= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4.
\end{aligned}
$$

例 7 要验收一批 (100 件) 乐器。验收方案如下：自该批乐器中随机地抽取 3 件测试 (设 3 件乐器的测试是相互独立的），如果至少有一件被测试为音色不纯，则拒绝接受这批乐器。设一件音色不纯的乐器被测试出来的概率为 0.95，而一件音色纯的乐器被误测为不纯的概率为 0.01。如果这件乐器中恰有 4 件是音色不纯的，问这批乐器被接受的概率是多少？







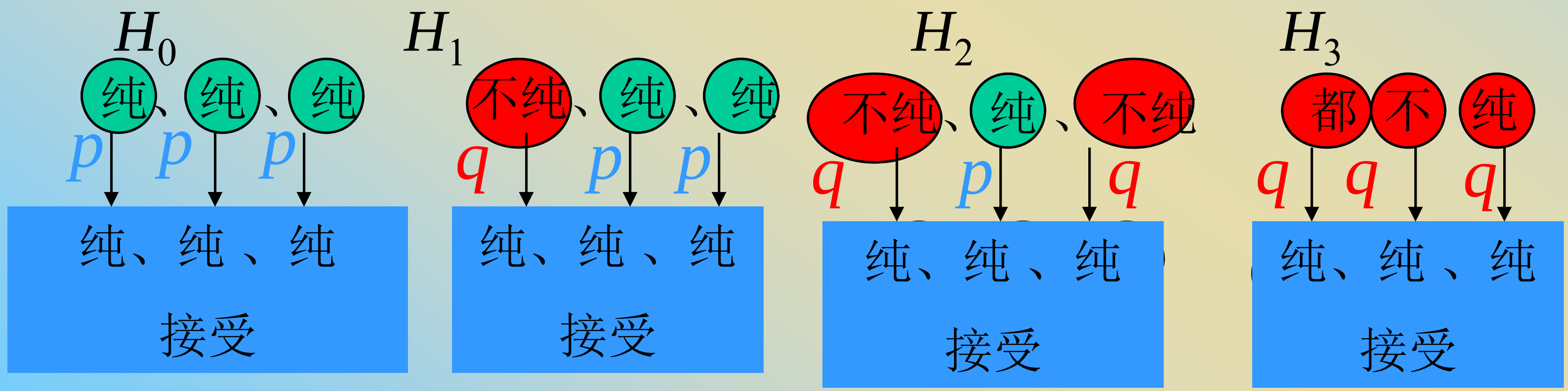
$p=1-0.01=0.99$,　　$q=1-0.95=0.05$

解： 以 H_i (i=0,1,2,3)表示事件“随机取出的 3 件乐器中恰有 i 件音色不纯”，以 A 表示事件“这批乐器被接受”，即 3 件都被测试为音色纯的乐器。由测试的相互独立性得：

$p=1-0.01=0.99$, $q=1-0.95=0.05$

$$P(A|H_0)=(0.99)^3,\ P(A|H_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A|H_2)=0.09\times(0.05)^2,\ P(A|H_3)=(0.05)^3.$$



另外，按照超几何分布的概率计算公式得：

$$P(H_0)=C_{96}^3/C_{100}^3,\ P(H_1)=C_4^1C_{96}^2/C_{100}^3,$$

$$P(H_3)=C_4^2C_{96}^1/C_{100}^3,\ P(H_4)=C_4^3/C_{100}^3.$$

故$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|H_i)P(H_i)=0.8629.$