第五章　留数定理及其应用*

目　录

§1 留数定理

一 留数的定义

如果函数 $f(z)$ 在点 a 的邻域 K：$|z-a|<R$ 内解析，围线 C 全含于 K（包围 a 或不包围 a），则根据 Cauchy 积分定理必有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

但如果 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，即 $f(z)$ 只在点 a 的去心邻域 $K\backslash\{a\}$：$0<|z-a|<R$ 内解析，围线 C 是 $K\backslash\{a\}$ 中包围 a 的围线，则上式不一定成立. 故定义留数如下：

定义（留数） 如果函数 $f(z)$ 以 a 为孤立奇点，即 $f(z)$ 在 $K\backslash\{a\}$：$0<|z-a|<R$ 中解析，则积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z,\quad \Gamma_\rho:|z-a|=\rho\quad(0<\rho<R) \tag{1}$$

称为 $f(z)$ 在点 a 处的留数（residue），记作 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$，简记为 $\operatorname{Res} f(a)$，或 $\operatorname{Res}(f,a)$.

显然，只要 $0<\rho<R$，上述积分的数值与 ρ 的大小无关.

设 $f(z)$ 在 a 处的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

则

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

令 $n=-1$，得

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

与式 (1) 比较，即得

$$\operatorname{Res} f(a)=c_{-1}. \tag{2}$$

由此可知，可去奇点处的留数为 0.

注 有些书上直接用式 (2) 作为留数的定义，这与式 (1) 的定义显然是等价的.

二 *Cauchy* 留数定理

利用 Cauchy 积分定理，可以推出下面关于围线积分的

Cauchy 留数定理 设函数 $f(z)$ 在围线或复围线 C 所围成的区域 D 中有孤立奇点 a_1、a_2、$\cdots$、a_n，此外 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析，则有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(a_k). \tag{3}$$

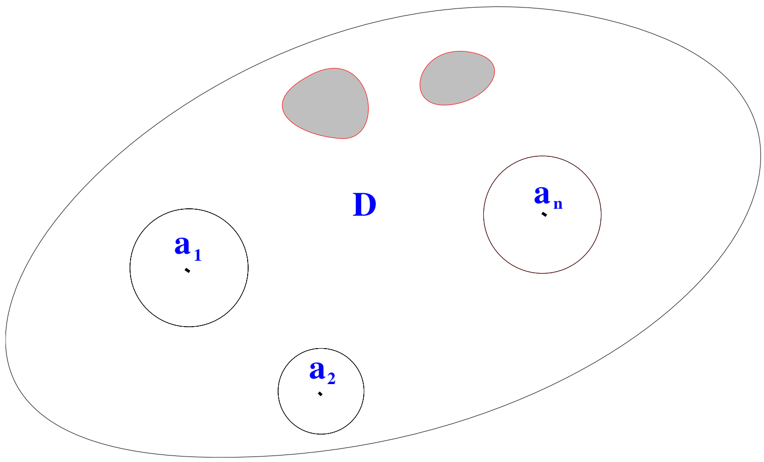

图 1 区域 D 的边界为复围线 C，其中有 n 个孤立奇点

证明 作 n 个小圆周 Γ_k：$|z-a_k|=\rho_k$（$k=1,2,\cdots,n$），使各 Γ_k 及其内部全含于 D，但各 Γ_k 互不相交也互不包含，如图 1. 根据 Cauchy 积分定理和留数的定义，有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,f(a_k)=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\,f(a_k).$$

证毕.

利用 Cauchy 留数定理，只要算出各孤立奇点处的留数，即可得出围线积分，所以关键在于计算留数.

§2 留数的算法

计算留数的最一般方法是作 Laurent 展开，求出系数 c_{-1}，即得展开中心的留数. 但作 Laurent 展开往往太麻烦，所以我们希望有一些现成的公式可以用来计算留数. 下面的方法适用于计算极点的留数.

定理（极点的留数） 设 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，则

$$\mathrm{Res}\,f(a)=\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}\bigg|_{z=a}. \tag{4}$$

证明 由于 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，故在 a 的某去心邻域内有

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

其中 $\varphi(z)$ 在 a 点解析，且 $\varphi(a)\neq 0$. 于是

$$\mathrm{Res}\,f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a),$$

最后一个等号用了高阶导数公式. 由于 $\varphi(z)=(z-a)^n f(z)$，代入上式即得式 (4). 证毕.

由这一定理，马上可以得到下面两个推论，它们是常用的计算公式.

推论一（单极点的留数，第一公式） 若 a 是 $f(z)$ 的单极点，则

$$\operatorname{Res} f(a) = [(z-a)f(z)]|_{z=a}. \tag{5}$$

推论二（二阶极点的留数） 若 a 是 $f(z)$ 的二阶极点，则

$$\operatorname{Res} f(a) = [(z-a)^2 f(z)]'\,|_{z=a}. \tag{6}$$

单极点的留数还有另一个计算公式，通常它比式 (5) 更方便，我们也把它写成定理的形式.

定理（单极点的留数，第二公式） 设 a 是 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$ 的单极点，即 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 均在 a 点解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，$\psi(a)=0$，$\psi'(a)\neq 0$，则

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{7}$$

证明 按式 (5)，并利用 $\psi(a)=0$ 等条件，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(a) &= \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(a)}\right] \\ &= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{[\psi(z)-\psi(a)]/(z-a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.\end{aligned}$$

证毕.

以上公式 (5–7) 就是计算极点留数的常用公式. 当极点的阶数较高时，用公式 (4) 计算留数并不方便，这时不如作 Laurent 展开，求出系数 c_{-1}. 对于本性奇点，这也是唯一的计算方法. 至于可去奇点，前已指出，其留数为 0.

注 作为计算留数的手段，作 Laurent 展开时只需求出系数 c_{-1}，其它系数可以不必理会，所以只要把包含 z^{-1} 的项找出来就可以了. §4 有具体的例子.

§3 用留数定理计算围线积分

下面给出几个用留数定理计算围线积分的例子.

例 1 $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解 本题的被积函数 $f(z)=1/z(z-1)^2$ 在圆周 $|z|=2$ 的内部有一阶极点 $z=0$ 和二阶极点 $z=1$. 按上节的留数计算公式，易得

$$\operatorname{Res} f(0) = \left.\frac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=0} = 1, \quad \operatorname{Res} f(1) = \left.\left(\frac{1}{z}\right)'\right|_{z=1} = -1,$$

故 $I = 2\pi\mathrm{i}[\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)] = 0$.

注 如果没有留数定理，我们可以作两个小圆周分别包围一阶极点 $z=0$ 和二阶极点 $z=1$，根据 Cauchy 积分定理，原积分等于沿两个小圆周的积分之和，后两个积分可以分别用 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式来计算. 其实这些做法正是证明留数定理时所采用的思路.

例 2 $I=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z.$

解 本题的被积函数 $f(z)=\sin z/z$ 在圆周 $|z|=1$ 的内部有一个可去奇点 $z=0$，它在 $z=0$ 处的 Laurent 展开式没有负幂项，故 $\operatorname{Res}f(0)=c_{-1}=0$，而 $I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f(0)=0$.

注 本题当然也可以用 Cauchy 积分公式来计算，被积函数已经具有公式所要求的形式，故 $I=2\pi\mathrm{i}\,\sin 0=0$.

例 3 $I=\displaystyle\int_{|z|=1}\mathrm{e}^{1/z}\,\mathrm{d}z.$

解 本题的被积函数 $f(z)=\mathrm{e}^{1/z}$ 在圆周 $|z|=1$ 的内部有一个本性奇点 $z=0$，它在 $z=0$ 处的 Laurent 展开式为 $f(z)=\mathrm{e}^{1/z}=1+1/z+\cdots+1/n!z^n+\cdots$，故 $\operatorname{Res}f(0)=c_{-1}=1$，而 $I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f(0)=2\pi\mathrm{i}$.

注 本题不能直接用 Cauchy 积分公式来计算，但可以对被积函数作 Laurent 展开后逐项积分，只有 $1/z$ 项有贡献，结果当然一样. 作 Laurent 展开后逐项积分，这也是与留数定理的精神一致的.

以前，我们曾经用 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式来计算某些围线积分，现在可以直接应用留数定理来计算. 作为计算围线积分的技术，留数定理包括了 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式作为特殊情况，所以是更一般的方法. 当然，在逻辑上是先有 Cauchy 积分公式和 Cauchy 高阶导数公式的.

另外，我们看到，留数定理把计算围线积分的问题转化为计算围线内各孤立奇点的留数的问题. 由上节可以看到，计算极点的留数主要涉及微分运算. 对于本性奇点，必须作 Laurent 展开来计算其留数. 作 Laurent 展开，通常归结为 Taylor 展开，而计算 Taylor 展开式的系数也是微分运算问题. 所以可以说，留数定理把积分运算转化成了比较容易的微分运算，因此它为积分的计算提供了一项非常有用的技术.

习题 计算下列围线积分. (1) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中 C 的方程是 $x^2+y^2-2x-2y=0$; (2) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z$; (3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{2z}{1-2\sin^2 z}\,\mathrm{d}z$.

§4 *无穷远点的留数

当 ∞ 点是函数 $f(z)$ 的孤立奇点时，可以定义其留数如下.

定义（∞ 的留数） 如果函数 $f(z)$ 以 ∞ 为孤立奇点，即 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $r<|z|<\infty$ 中解析（r 为正数），则积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^-}f(z)\,\mathrm{d}z,\quad \Gamma:|z|=\rho\quad(r<\rho<\infty)\tag{8}$$

称为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数，记作 $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)$，或简记为 $\operatorname{Res}f(\infty)$，或 $\operatorname{Res}(f,\infty)$.

注 以上积分取 Γ 的负方向，这正是包围 ∞ 点的正方向. 显然，只要 $r<\rho<\infty$，上述积分的数值与 ρ 的大小无关.

设 $f(z)$ 在 $r<|z|<\infty$ 内的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n,$$

则

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

令 $n=-1$，得

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

与式 (8) 比较，即得

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1}. \tag{9}$$

如果函数 $f(z)$ 在 z 平面上只有有限个孤立奇点，那么 ∞ 点当然也是孤立奇点．这时候，它们的留数满足一个简单的关系，这就是下面的

定理（总留数） 设函数 $f(z)$ 在扩充 z 平面上只有有限个孤立奇点 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 和 ∞，则 $f(z)$ 在各点的留数之和为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(a_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0. \tag{10}$$

证明 作大圆周 Γ：$|z|=\rho$ 将 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 全部包围在内，根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(a_k).$$

另一方面，由于 $f(z)$ 在 Γ 及其外部解析，由定义 (8)，有

$$\int_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(\infty).$$

两式相加，注意到 $\int_{\Gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$，立得式 (10)．证毕．

这一定理的用处可以通过下面的例子显示出来．

例 计算积分 $I = \displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^{15}}{(z^4+1)^4}\,\mathrm{d}z$.

解 本题的被积函数 $f(z)=z^{15}/(z^4+1)^4$ 在圆周 $|z|=2$ 的内部有四个极点：$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4+\mathrm{i}k\pi/2}$，$k=0,1,2,3$，它们都是四阶极点，而且都对积分有贡献，所以按照式 (3) 和 (4) 来计算显然是很麻烦的．注意到被积函数在 z 平面上没有其它有限的奇点，则可以应用上述定理而得到

$$I = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\operatorname{Res} f(z_k) = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res} f(\infty).$$

这样一来，我们就只需要计算 ∞ 的留数．在 ∞ 的邻域内，即当 $|z|$ 很大时，有

$$f(z) = \frac{z^{15}}{(z^4+1)^4} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1+1/z^4)^4} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^4}\right)^{-4} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{4}{z^4}+\cdots\right),$$

可见，$c_{-1}=1$，$\operatorname{Res} f(\infty)=-1$，而 $I=2\pi\mathrm{i}$．这样计算的工作量就大大减少了．

§5　实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

留数定理除了可以用来计算复变函数本身的围线积分之外，其更重要的应用在于计算某些实变函数的定积分．当然，为了应用留数定理，我们必须把定积分转化为围线积分．这

通常有两种方法，其一是通过变量置换将定积分的积分区间映射为复平面上的围线．其二是将定积分的区间看作复平面的实轴上的一段，然后引入辅助曲线（比如半圆）与该段构成围线，如果辅助曲线上的积分可以比较容易算出（比如可以证明其为 0），或可以与原积分联系起来，问题就有可能解决了．本节就采用前一方法，下面两节则采用后一方法．

可以用留数定理来计算的实变函数定积分是五花八门的，其中涉及的技巧也多种多样，不是一朝一夕所能掌握的．我们主要介绍几种固定的类型，对于这些固定的类型，可以导出相应的计算公式．了解这些公式的来源固然是必要的，但更重要的是掌握这些公式并能熟练地使用它们．

本节讨论的积分具有标题给出的形式，其中 R 是两个自变量的有理函数．对于这类积分，关键是作变量置换

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{11}$$

这一变换将 θ 的积分区间 $[0, 2\pi]$ 映射为 z 平面上的单位圆周 $|z| = 1$，因此，定积分就变成了围线积分．注意到指数函数和三角函数之间的关系，易得

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}. \tag{12}$$

右边的被积函数是 z 的有理函数，所以用留数定理不难计算．对于这一类型的积分，无需记住具体的公式，只要记得变换式 (11) 就可以了．

例 1 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + a\cos\theta}$，其中 $0 < a < 1$.

解 按式 (11) 作变量置换，得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a(z + z^{-1})/2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{2}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{az^2 + 2z + a}.$$

上式右边已是围线积分，被积函数为有理分式，其奇点就是分母的根，满足 $az^2 + 2z + a = 0$，具体来说是

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

显然 $|z_2| > 1$. 由根与系数的关系，有 $z_1 z_2 = 1$，故 $|z_1||z_2| = 1$，从而 $|z_1| < 1$. 于是只有 z_1 在单位圆内，即只有 z_1 的留数对积分有贡献，根据式 (7)，

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1\right) = \frac{1}{2az_1 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}},$$

故

$$I = \frac{2}{\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

例 2 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta}$，其中 $a > 1$.

解 本题不需重新计算．由于 $a > 1$，故 $1/a < 1$，利用例 1 的结果，有

$$I = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + (1/a)\cos\theta} = \frac{1}{a} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 1/a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

习题 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\phi}{1 - 2p\cos\phi + p^2}\,\mathrm{d}\phi$, 其中 $0 < p < 1$.

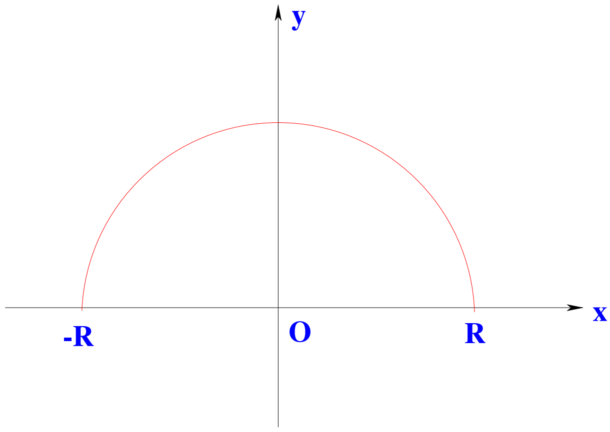

图 2 围线 C_R 由实轴上 $[-R,R]$ 一段与半圆 Γ_R 构成

§6 实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

本节讨论的积分具有标题给出的形式，其中的 $f(x)$ 通常是有理分式. 关于这类积分，可以推导出一个计算公式，我们把它表述为如下的定理.

定理 设函数 $f(z)$ 在上半平面上有有限个孤立奇点，此外它在上半平面和实轴上解析，且当 $z\to\infty$ 时，$zf(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res} f(a_k). \tag{13}$$

注 ① $z\to\infty$ 时 $zf(z)\rightrightarrows 0$（一致趋于 0）的大意是 $zf(z)\to 0$ 的速度与 z 的辐角无关（在指定的辐角范围内，这里是 $[0,\pi]$）. 精确地说，就是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists R_0>0$ 与 θ 无关，当 $|z|>R_0$ 时，就有 $|zf(z)|<\varepsilon$. ② 求和号下面的 $\operatorname{Im} a_k>0$ 表示求和只对上半平面的各孤立奇点进行. ③ 如果 $f(x)$ 是有理分式，则易知分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 2. ④ 这一公式应该在理解和反复使用的基础上熟练掌握.

证明 如图 2，作半圆 Γ_R: $z=Re^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$，与实轴上的线段 $[-R,R]$ 一起构成围线 C_R，取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内，根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res} f(a_k) \tag{14}$$

由于 $zf(z)\rightrightarrows 0$（$z\to\infty$），故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists R_0>0$ 与 θ 无关，当 $|z|>R_0$ 时，就有 $|zf(z)|<\varepsilon/\pi$，于是当 $R>R_0$ 时，

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{\Gamma_R} |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_{\Gamma_R} |f(z)|R\,\mathrm{d}\theta = \int_{\Gamma_R} |zf(z)|\,\mathrm{d}\theta < \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta = \varepsilon,$$

也就是

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

所以，对式 (14) 取 $R\to\infty$ 的极限，即得式 (13). 证毕.

由以上证明可以看出，这样求出的结果是主值 $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$，而不是一般值 $\lim_{R_1\to-\infty,R_2\to+\infty}\int_{R_1}^{R_2} f(x)\,\mathrm{d}x$. 如果一个广义积分的一般值存在，则其主值必定存在且等于一般值. 但主值存在则不足以保证一般值存在. 比如积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,x/(x^2+1)$ 的主值为 0，但一般值不存在. 用留数定理导出的关于广义积分的公式，包括本节、下节的公式和本书没有介绍的情况，它们给出的都是积分的主值.

例 1 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

解 取

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1},$$

它满足定理的条件，在 z 平面上有四个一阶极点：$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4+\mathrm{i}k\pi/2}$，$k=0,1,2,3$，其中 z_0 和 z_1 在上半平面. 本题用式 (7) 计算留数比用式 (5) 要方便得多. 易得

$$\operatorname{Res} f(z_k)=\frac{1}{4z_k^3}=\frac{z_k}{4z_k^4}=-\frac{z_k}{4},$$

$$\operatorname{Res} f(z_0)+\operatorname{Res} f(z_1)=-\frac{1}{4}(z_0+z_1)=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}}{4}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{4}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sin\frac{\pi}{4},$$

而

$$I=\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot[\operatorname{Res} f(z_0)+\operatorname{Res} f(z_1)]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

利用

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right],$$

本题也可以用实变积分的方法来做，但比较麻烦. 如果分母的次数越高，则复变方法的优越性就越明显.

如果 $f(z)$ 在实轴上有若干 一阶极点，此外满足上述定理的条件，则公式 (13) 可推广为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\left[\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res} f(a_k)+\frac{1}{2}\sum_{\operatorname{Im} b_k=0}\operatorname{Res} f(b_k)\right]. \tag{15}$$

方括号中的第二项求和对实轴上的各一阶极点进行. 我们不拟给出这一公式的严格证明，但是可以这样来把握它：形象地看，可以认为实轴上的奇点有一半处于上半平面，因此，它们对积分的贡献是上半平面的奇点所贡献的一半，这样便不难掌握这一公式. 另外，注意上述积分具有双重的广义性（无穷限积分，无界函数积分)，而所得结果是两种意义上的主值.

例 2 计算积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)(x^2+1)}$.

解 取

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z^2+1)},$$

它满足公式 (15) 的条件，在上半平面上有一阶极点 $z=\mathrm{i}$，在实轴上有一阶极点 $z=0$ 和 $z=1$. 易得

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i})=\frac{1+\mathrm{i}}{4},\quad \operatorname{Res} f(0)=-1,\quad \operatorname{Res} f(1)=\frac{1}{2},$$

故

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res} f(\mathrm{i})+\frac{1}{2}\operatorname{Res} f(0)+\frac{1}{2}\operatorname{Res} f(1)\right]=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

习题 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$, 其中 $m,n\in\mathbb{N}^+$, 且 $m<n$.

§7 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x$

为了计算这一积分，先介绍下述的

Jordan 引理 设函数 $f(z)$ 在半圆 Γ_R：$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（$0\le\theta\le\pi$）上连续，且当 $R\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z=0,\quad (m>0). \tag{16}$$

在给出该引理的严格证明之前，先作一点直观的说明．在上一节计算积分类型 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 时，曾经用到 $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z=0$ 的结论，其条件是当 $R\to\infty$ 时，$zf(z)\rightrightarrows 0$（虽然没有当作引理列出来）．这里我们看到，Jordan 引理所要求的条件较弱，主要原因是被积函数中含有因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}=\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\cos\theta}$，其中第一因子随着 R 的增大迅速衰减（$\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两点例外，但对结论没有影响），这弥补了 $f(z)$ 下降较慢的不足，第二因子在半径很大的圆弧上是 θ 的快速振荡函数，也有助于积分的收敛，但第一因子起主要作用．由上面的分析容易看出 $m>0$ 这个条件是必不可少的．

下面是 Jordan 引理的严格证明．

证明 由积分的基本性质有

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z\right|\le\int_{\Gamma_R}|f(z)||\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(R\cos\theta+\mathrm{i}R\sin\theta)}R\,\mathrm{d}\theta=\int_{\Gamma_R}|f(z)|\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}R\,\mathrm{d}\theta,$$

由于 $R\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists R_0>0$ 与 θ 无关，当 $R>R_0$ 时，就有 $|f(z)|<m\varepsilon/\pi$，于是由上式得

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z\right|<\frac{m}{\pi}\varepsilon\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}R\,\mathrm{d}\theta=\frac{2m}{\pi}\varepsilon\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}R\,\mathrm{d}\theta.$$

思考 上式最后一个等号成立的理由是什么？

当 $0\le\theta\le\pi/2$ 时，有不等式

$$\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$$

（该式可由函数的图形看出，或者，由于 $\cos\theta$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 上单调下降，就有

$$\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\cos x\,\mathrm{d}x\ge\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x,$$

算出积分即得不等式），代入上式即得

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z\right|<\frac{2m}{\pi}\varepsilon\int_0^{\pi/2}\exp\left(-\frac{2mR\theta}{\pi}\right)R\,\mathrm{d}\theta=\varepsilon\exp\left(-\frac{2mR\theta}{\pi}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0}=\varepsilon(1-\mathrm{e}^{-mR})<\varepsilon.$$

由此即得式 (16)．证毕．

有了 Jordan 引理，就很容易推导出下面的公式，我们把它表述成定理．

定理 设函数 $f(z)$ 在上半平面上有有限个孤立奇点，此外它在上半平面和实轴上解析，且当 $z\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k],\quad m>0. \tag{17}$$

注 ① 这里求和也是只对上半平面的各孤立奇点进行. ② 注意这里的条件"当 $z\to\infty$ 时，$f(z)\rightrightarrows 0$"比上节的相应条件弱. 如果 $f(x)$ 是有理分式，则易知分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 1. ③ 特别注意公式成立的条件 $m>0$. 如果 $m<0$，我们可作变量置换 $x'=-x$，将积分化为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}|m|x}\,\mathrm{d}x$，然后再用定理（如果 $f(-z)$ 满足定理的条件）. 所以 $m>0$ 这一条件并不构成本质的限制. ④ 这一公式应该在理解和反复使用的基础上熟练掌握.

证明 如图 2，作半圆 Γ_R: $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ （$0\le\theta\le\pi$），与实轴上的线段 $[-R,R]$ 一起构成围线 C_R，取 R 充分大以使 $f(z)$ 在上半平面的孤立奇点全落在 C_R 内，根据 Cauchy 留数定理，有

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\,a_k>0}\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k].$$

取 $R\to\infty$ 的极限，由 Jordan 引理，半圆上的积分为 0，即得式 (17). 证毕.

例 1 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$，其中 $m>0$.

解

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

最后一个等号成立是因为最后一个积分的虚部明显为 0. 取

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1},$$

$f(z)$ 满足定理的条件，在上半平面只有一个一阶极点 $z=\mathrm{i}$，易得

$$\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\mathrm{i}]=\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-m}}{2\mathrm{i}},$$

故

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\mathrm{i}]=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-m}}{2\mathrm{i}}=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-m}.$$

例 2 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $a>0$，$m\in\mathbb{R}$ 且 $m\ne 0$.

解 先考虑 $m>0$，

$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$$

取

$$f(z)=\frac{z}{z^2+a^2},$$

$f(z)$ 满足定理的条件，在上半平面只有一个一阶极点 $z=a\mathrm{i}$，易得

$$\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a\mathrm{i}]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{2z}\right|_{z=a\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-ma}}{2},$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a\mathrm{i}]=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-ma}}{2}=\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-ma},$$

而

$$I = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ma}.$$

当 $m<0$ 时，直接利用以上 $m>0$ 时的结果，可得

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{x\sin|m|x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|m|a} = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{ma}.$$

如果 $f(z)$ 在实轴上有若干 一阶极点，此外满足上述定理的条件，则公式 (17) 可推广为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{\mathrm{Im}\,a_k>0}\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k] + \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{Im}\,b_k=0}\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},b_k]\right\}. \tag{18}$$

这一公式与式 (15) 类似，所以无需更多的说明.

例 3 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}\,\mathrm{d}x$，其中 $m\in\mathbb{R}$ 且 $m\neq 0$.

解 先考虑 $m>0$，

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

取

$$f(z)=\frac{1}{z},$$

它满足公式 (18) 的条件，在上半平面没有奇点，在实轴上有一个一阶极点 $z=0$. 易得

$$\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},0] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}|_{z=0} = 1,$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},0] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \pi\mathrm{i},$$

而

$$I=\frac{\pi}{2}.$$

当 $m<0$ 时，直接利用以上 $m>0$ 时的结果，可得

$$I = \int_0^\infty\frac{\sin mx}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty\frac{\sin|m|x}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}.$$

可见结果只与 m 的符号有关，而与 m 的大小无关.

习题 计算下列积分. (1) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos mx}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$, 其中 $m>0$; (2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$, $m>0$.

§8 *特殊积分

暂略.

§9 *多值函数的积分

暂略.

补充习题

计算下列积分.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\phi}{a+b\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi$, 其中 $a>b>0$.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{a}{a^2+\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$, 其中 $a>0$.

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$, 其中 $a>b>0$.

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$, $b>0$.

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$, $b>0$.

8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x$, 其中 $m>0$, $a>0$.