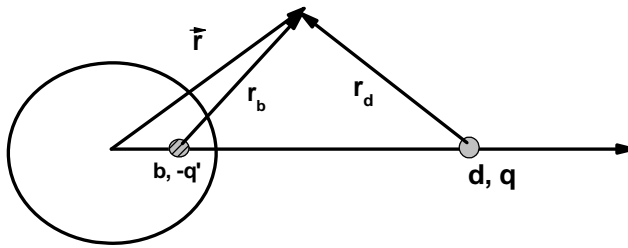


## 第十讲

上节课:

- 导体在电场中受力  $\vec{f} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{n} = \frac{1}{2 \epsilon_0} \sigma^2 \vec{n}$
- 介质/介质边界条件:  $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$
- 唯一性定理 - 边条确定后解唯一确定
- 镜像法 - 利用虚拟电荷代替界面处的面电荷, 使其满足边条, 唯一性定理可确定其是问题的真实解



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right], \quad b = \frac{R^2}{d}, \quad q' = \frac{R}{d} q \quad \text{--- 与格林互易定理得出的结果一致}$$

利用上面得到的结果, 我们可以引申出来许多题目, 并得到解答。

(1) 当  $R/d \rightarrow 1$  时, 设  $d = R + \delta, \delta \rightarrow 0$ , 有:

$$b = R^2 / (R + \delta) \approx R - \delta,$$

$$q' = qR / (R + d) \sim q(1 - d/R) \sim q,$$

此时物理问题等价于无限大平面的像电荷的解。

(2) 导体球接电势  $V_0$ 。此时边界条件为:  $\varphi|_{r=R} = V_0$ ,  $V_0$  是已知常数。为了满足此边界条件, 应在原解 ( $\varphi|_{r=R} = 0$ ) 的基础上再加上镜像电荷 (处于导体内部), 其作用是 **在导体表面上产生一个常数电势**。简单的分析发现此像电荷应处于导体球中心, 电量为  $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 。故此时的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} + \frac{q''}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_d} - \frac{q'}{r_b} \right] + \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.15)$$

(3) 导体球为孤立导体带电  $Q$  这种情况的边界条件为  $\varphi|_{r=R} = \text{常数(未知)}$ , 以及

$$-\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \quad (4.3.16)$$

根据与上题相同的 Argument, 必须加上一个放在球心电量为  $q''$  的像电荷。于是, 球外电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} + \frac{q''}{r} \right] \quad (4.3.17)$$

此时计算球面上的电荷可知

$$Q = -\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -q' + q'' \Rightarrow q'' = Q + q' \quad (4.3.18)$$

问题得解。

(4) 点电荷  $q$  在导体球壳内, 距球心  $d$  处。

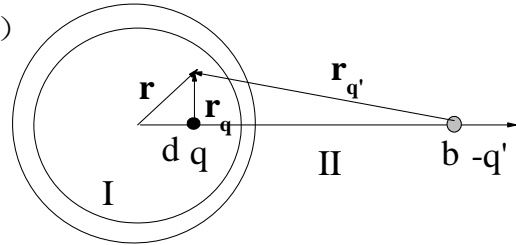
这类问题要复杂许多, 先考虑一个简单的情形: **球壳接地**。

此时球内 (I) 外 (II) 区域内都可以存在电场及电势, 其分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = -q\delta(x-d, y, z)/\varepsilon_0 \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0 \end{cases} \quad (4.3.19)$$

而边界条件为

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = 0, & r = R, \\ \varphi_{II} \rightarrow 0, & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$



先考虑球内的电势。根据镜像法的精神, 球内的电势应当是由真实电荷  $q$  和球外的“像电荷”  $-q'$  的叠加:

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right]$$

与电荷在球(壳)外面的情形类似, 可以解得  $q' = q \frac{R}{d}$ ,  $b = R^2/d$ 。考虑球壳外的电势, 注意到此区域没有真实电荷,  $r = R$  与  $r \rightarrow \infty$  的边界上电势均为 0, 因此, 满足此边界条件的解只有

$$\varphi_{II} = 0$$

接下来考虑一个复杂一点的情形, 假设球壳的电势设为  $V_0$ , 因此边条 (1) 改为

$\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$ ,  $r = R$ 。此时原来得到的解不能满足边界条件 (1), 需再设“像电荷”才行。简单的分析发现任何处于 II 区的像电荷都不能满足条件 (1), 又不能在原点设像电荷 (因处于考察区), 怎么办呢?

解决的办法是注意到  $\varphi = V_0$  本身就是 Poisson 方程的解。在以前电荷放置于球外的问题中我们不用这个解, 因为那时考察区域在球外, 这个解不能满足边界条件  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $r = \infty$ 。但现在考察区在球内, 不需要满足  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $r = \infty$  这个边界条件, 故  $\varphi = V_0$  可以采用。因此, I 区电势的最终解为

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} \right] + V_0 \quad (4.3.20)$$

其满足所有的边界条件同时满足 Poisson 方程, 故唯一性定理保证其正确性。下面考虑 II 区中的电势。这个区域内无源, 电势应当是某些处于其它区域的像电荷产生, 考虑修好后的边条 (1):  $\varphi_I = \varphi_{II} = V_0$ ,  $r = R$ , 显然“像电荷”为处于原点 (I 区) 的电量为  $4\pi\epsilon_0 V_0 R$  的点电荷。因此, II 区电势:

$$\varphi_{II} = \frac{V_0 R}{r} \quad (4.3.21)$$

(4.3.20) - (4.3.21) 就是问题的解, 满足所有的方程以及边条。问题虽然得解, 但物理图像不清楚: 比如此时导体球壳上带电荷为多少? 为什么 I 区的电场与外部条件无关? 要搞清楚这些问题, 必须意识到事实上导体球壳不是无限薄的, 而是一个具有有限厚度 (尽管很薄) 的一个金属壳层, 其具有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上, 球壳内部的电荷密度为 0。内表面上的电荷密度可以容易由

$$\sigma_{in} = -\epsilon_0 E_{in} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \frac{-q}{4\pi R^2} \frac{1 - (d/R)^2}{(1 + (d/R)^2 - 2(d/R)\cos\theta)^{3/2}} = \frac{-q}{4\pi R^2} \tilde{F}(\theta) \quad (4.3.22)$$

求出, 其总电荷可以由上式积分求出, 但更容易地, 可由 Gauss 定理求出:

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{in} + q \Rightarrow q_{in} = -q \quad (4.3.23)$$

而外表面上电荷均匀分布, 总电量为

$$q_{out} = \oint \sigma_{out} \cdot dS = 4\pi\epsilon_0 R V_0 \quad (4.3.24)$$

因此物理图像是：

(1) 球内的电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡，再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会呆在外表面。

(2) 这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势，但对内电场没有丝毫影响。

(3)  $\sigma_{in}$  对应于 II 区处于  $b$  处的“像电荷”，而  $\sigma_{out}$  对应于贡献  $\varphi = V_0$  的像电荷（对应于一个球对称的势的“像电荷”也应当对称分布）

## § 4.4 本征函数展开法

本节介绍的是静电学的一个相当普适的方法，大家学习时应仔细体会。这种方法其实可以推广到求解其他许多类似的问题（如电磁波的散射）。以静电问题为例，在很多问题中，我们求解的空间中无源，但其处在某一种外场中，这种外场通常可以以边界条件的形式反映出来。此时空间中电势满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.4.1)$$

据不同的边界形状（空间的对称性），我们可以选取适当的坐标系，用分离变量法求解拉普拉斯方程的通解。假设我们得到了这组解  $\{\varphi_n, n=1,2,\dots\}$ ，它们通常是正交完备的： $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$ 。根据完备性，我们一定可以将  $\varphi$  展开成这组本征态的线性叠加：

$$\varphi = \sum C_n \varphi_n \quad (4.4.2)$$

(4.4.2) 一定是 (4.4.1) 的解，但不一定满足所要求的边界条件。必须根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数  $C_n$ 。比如通常的边界条件是

$$\varphi|_{\text{boundary}} = \varphi_0(\xi) \quad (4.4.3)$$

其中  $\xi$  是界面上的位置变量。根据本征函数的正交性，我们很容易得到展开系数的表达式：

$$C_n = \langle \varphi_n | \varphi_0 \rangle = \int \varphi_n(\xi) \varphi_0(\xi) d\xi \quad (4.4.4)$$

下面总结一下不同坐标系下的本征函数及它们的正交性。我们应当根据所面临的问题的对称性选择合适的通解形式进行求解。

### (1) 轴对称的球坐标系问题 (与变量 $\phi$ 无关)

对此类问题, Laplace 方程的本征解为  $r^l P_l(\cos \theta)$ ,  $r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$ 。因此通解可以一般写成:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (4.4.5)$$

径向波函数  $r^l$  在  $r=0$  处收敛,  $r^{-(l+1)}$  在  $r \rightarrow \infty$  时收敛。  $P_l(x)$  为 Legendre 多项式, 低阶的几项为

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ \dots \end{cases} \quad (4.4.6)$$

本征函数之间满足如下正交关系

$$\int P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d \cos \theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (4.4.7)$$

### (2) 与 $z$ 无关的柱对称问题

对此类问题, Laplace 方程的本征解为  $\rho^{\pm n} e^{\pm i n \phi}$ ,  $\ln(\rho)$ , 1。因此其通解为

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \quad (4.4.8)$$

本征函数之间的正交性为

$$\begin{aligned} \int \cos(n\phi) \sin(n\phi) d\phi &= 0 \\ \int \cos(n\phi) \cos(n'\phi) d\phi &= \int \sin(n\phi) \sin(n'\phi) d\phi = 0, \quad n \neq n' \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

下面, 我们通过几个实例来介绍这种方法。为增强信心, 先考虑一个简单的情形

**[例 4]** 一半径为  $R$  的接地导体球置于一均匀外场  $\vec{E}_0$  中, 求空间场的分布。

**解:** 如图所示, 取  $\vec{E}_0$  方向为  $z$  轴, 这是一个绕  $z$  轴旋转对称的问题。球外空

间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势，总的来说，电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \varphi = 0, & r = R \quad (1) \\ \varphi \rightarrow -E_0 r \cos \theta, & r \rightarrow \infty \quad (2) \end{cases} \quad (4.4.9)$$

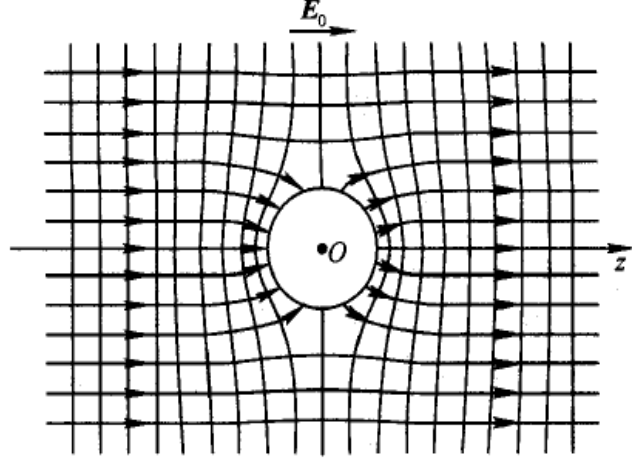


图 4.5

这个问题的通解即为：

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (4.4.10)$$

通解中有无穷多常数，虽然看上去很难确定这些常数，其实仔细分析之后发现这些常数均可由问题的边界条件确定。将试解带入边条（2），发现

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 r \cos \theta \quad (4.4.11)$$

根据  $P_l(\cos \theta)$  函数的相互正交性，我们可以分别比较（4.4.11）式左右两边中不同  $P_l(\cos \theta)$  函数的系数，使得它们相等。因此可得

$$A_1 = -E_0, \quad A_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \dots \quad (4.4.12)$$

再将试解带入边条（1），得到

$$\left( -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \right) \cos \theta + \sum_{l \neq 1}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = 0 \quad (4.4.13)$$

再次利用  $P_l(\cos \theta)$  函数的相互正交性，不同  $P_l(\cos \theta)$  的参数应当分别为 0，故

$$B_1 = E_0 R^3, \quad B_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \dots \quad (4.4.14)$$

将 (4.4.12) 与 (4.4.14) 代入试解, 我们得到最终的结果

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta \quad (4.4.15)$$

至此, 我们已完成了这个问题的求解。注意到  $r^{-2}$  依赖关系是偶极子势的特征, 可将 (4.4.15) 改为

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4.16)$$

其中

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \quad (4.4.17)$$

我们看到此时除了外加的均匀电场的贡献外, 还有一个偶极子的电场。这是由于导体球在电场的作用下正电荷堆积在一侧, 而负电荷堆积在电场的另一侧, 因此对外面的作用等效为一个偶极子, 其偶极矩正比于外加电场以及球的体积!

讨论:

- (1) 我们可以认为偶极子的场就是这个体系对外场的散射场。外场是均匀电场, 其只具有  $l=1$  的项 ( $-E_0 r \cos \theta$ ), 因此体系的响应也就只有  $l=1$  项, 所以只产生偶极子。若外场不是均匀场, 而是具有高  $l$  的项, 则体系的响应也一定有高  $l$  项。这恰恰是唯一性定理的一个体现 --- **边条唯一确定解的形式。这里边条的对称性决定了解的对称性。**
- (2) 我们之前研究导体球外有点电荷的问题时, 曾经考虑过当点电荷离导体球非常远的情形。那时我们的结论是导体球在外场下的电荷分布是形成了一个偶极子。其实当电荷离目标很远时, 其电场就是近似为均匀场! 将其与现在我们考虑的情况建立一个联系将是非常有意思的事情。

**注: 人们会问边界条件  $\varphi \rightarrow -E_0 r \cos \theta$ ,  $r \rightarrow \infty$  (2) 为什么不能加上一个常数电势**

**$\varphi_0$ ? 若加上的话, 这个常数是什么意思? 其实无限大空间均匀电场的问题从来不是一个 “well-defined” 的问题。因为我们通常取无限远处为电势 0 点, 但无限区域中的均匀电场要求无限远处有电荷以及电势不是 0。真正的实验上实现均匀场只能在有限空间, 比如用平板电容器, 此时问题是 Well-defined, 但求解这样一个问题就比现在我们考虑的复杂许**

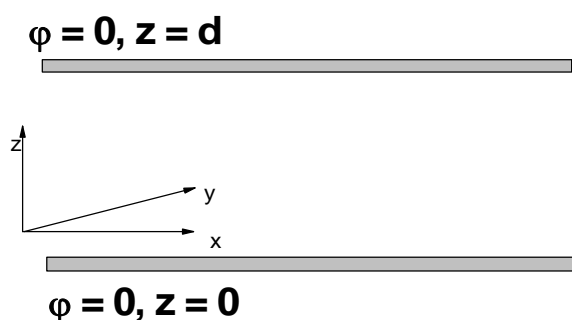
多，因为极板会引入无穷多镜像电荷…。因此我们现在考虑的是真实情况的一种理想化，是实验上不能实现的。在我们今后的学习中，我们还要考虑这种理想情形，因为这类问题可以解析求解且给我们许多 Insight。需要说明的是，此时我们总是假设  $\varphi_0$  为 0，相当于我们选择了坐标原点为电势 0 点。

习题：

- (1) 一个孤立的带电  $Q$  的导体球壳（半径为  $R$ ）内距离球心  $d$  处放置一个带电为  $q$  的点电荷，求空间的电势分布及电荷分布。
- (2) 设一个孤立的带电量为  $Q$  的导体球放置在外电场中，计算空间的电势分布。仿照课件给出所有的推导步骤。
- (3) 翻阅《数学物理方法》，分别在旋转对称的球坐标系及与  $z$  轴无关的柱坐标系中求解 Laplace 方程，求出所有的本征函数（亦即，(4.4.5)，(4.4.8)）。

### Project（有兴趣的同学选作）

- (1) 在两块无限大接地金属平板之间，利用分离变量法计算直角坐标系下的 Laplace 方程的通解，并讨论不同本征函数之间的正交关系。



(2) 考虑镜像法问题中更多的变种（球壳中加 2 个电荷，球外加电荷，…），利用叠加的方法求解，编一个小程序将感应电荷分布显现出来。利用 COMSOL 模拟椭球形状金属的 Case，看看是否也有镜像电荷？通过数值计算进一步理解镜像法的真谛？

(3) 等电量的正负电荷相距较远时，两电荷连线中点附近的场近似为均匀电场。你能否根据这点特征，利用镜像法计算放置于这个电场中的金属球的静电行为，并将结果与本征函数法解得的结果比较？