

电动力学

第四章：电磁波的传播

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 12, 2019

本章内容提要:

在时变情形下, 电磁场以波动形式存在. 特别地, 在没有电荷电流分布的自由空间或绝缘介质内部, 电磁场的运动规律是齐次的 Maxwell 方程组:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \nabla \cdot \vec{D} &= 0, \\ \nabla \times \vec{H} &= \partial_t \vec{D}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

时变着的电场和磁场相互激发, 形成了在空间中传播的电磁波.

本章学习电磁波传播的基本理论, 内容如下:

- ① 无界空间中平面电磁波的传播;
- ② 电磁波在绝缘介质分界面上的反射、折射问题;
- ③ 有导体存在时电磁波的传播, 特别是谐振腔和波导管中电磁波边值问题的求解.

电磁波波动方程:

现在推导没有电荷、电流分布的自由空间中电磁波的波动方程。

首先考虑真空情形，此时 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ 且 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ，齐次 Maxwell 方程组因此改写为：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

取第一个方程的旋度、并利用第二个方程化简，得：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times (-\partial_t \vec{B}) = -\partial_t (\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

电磁场波动方程(二):

上式左端进一步化简如下:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} \partial_m E_n) \\ &= \vec{e}_i [\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}] \partial_j \partial_m E_n \\ &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ &= -\nabla^2 \vec{E}\end{aligned}$$

中间计算使用了直角坐标系. 最后一步使用了自由空间中电场的 Gauss 定理: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. 结合以上两式即得:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

同理可得:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

引入一个具有“速度”量纲的参数:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

电磁场波动方程(三):

可以把 \vec{E} 和 \vec{B} 的方程进一步写为:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

这两个方程就是电磁波在真空中传播时的波动方程, 参数 c 解释为电磁波在真空中的传播速度.

电磁学实验测定的 μ_0 和 ϵ_0 分别是: $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ 和 $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. 简单的计算表明:

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

所以, Maxwell 预言: 光波也是在一定波长范围内的电磁波.

电磁波在介质中的传播:

现在讨论“针对介质中传播的电磁波”建立其波动方程的可能性.

- ① 研究介质中的电磁波传播时, 须首先通过实验建立 \vec{E} 与 \vec{D} 、 \vec{B} 与 \vec{H} 之间的本构关系.
- ② 电磁波的电场强度一般可以看做许多不同频率的模式电磁波场强的叠加:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \sim \int d\omega \vec{E}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t), \quad \vec{B}(\vec{x}, t) \sim \int d\omega \vec{B}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t).$$

当角频率为 ω 的余弦模式振荡的电磁波进入到介质内部后, 介质内的束缚电荷受到电磁场 Lorentz 力的作用,

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = q_i [\vec{E}(\vec{x}, \omega) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{x}, \omega)] \cos(\omega t)$$

亦将以相同的角频率 ω 做余弦振动. 从而介质的极化率、磁化率都将与模式电磁波的角频率 ω 有关. 进而:

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega), \quad \vec{B}(\vec{x}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{x}, \omega).$$

电磁波在介质中的传播(二):

介质的色散:

对于不同频率的电磁波,即使是同一种介质,它的电容率和磁导率也是不同的.换言之,介质的 ϵ 和 μ 将随入射电磁波的频率改变而变化,

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega).$$

这个现象称为“介质的色散”.

由于色散,对于一般的电磁波而言:

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{x}, t) &\sim \int d\omega \vec{D}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t) \\ &= \int d\omega \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t) \\ &\neq \epsilon \int d\omega \vec{E}(\vec{x}, \omega) \cos(\omega t) \sim \epsilon \vec{E}(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

同理,

$$\vec{B}(\vec{x}, t) \neq \mu \vec{H}(\vec{x}, t)$$

鉴于此, 对于介质中传播的一般电磁波, 不能够写出简单形式的 \vec{E} 、 \vec{B} 的波动方程.

以下我们只讨论具有确定频率 ω 的“时谐电磁波”在介质中的传播. 时谐电磁波的场强对时间的依赖关系是 $\cos(\omega t)$:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) \cos(\omega t), \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) \cos(\omega t).$$

为方便计, 我们常常将上式改写为复数形式:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t}.$$

对于线性均匀介质, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, 这里的电容率和磁导率都是频率 ω 依赖的.

时谐电磁波(二):

现在推导“传播于没有自由的电荷电流分布的绝缘介质中的时谐电磁波”所需要满足的波动方程. 对于时谐电磁波而言, 法拉第电磁感应定律写为:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t} &= \nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) \\ &= -\partial_t \vec{B}(\vec{x}, t) \\ &= -\partial_t [\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}] = i\omega \mu \vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

两端抽出时间因子 $e^{-i\omega t}$ 后, 我们得:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = i\omega \mu \vec{H}(\vec{x})$$

同理, 无自由电流分布时的 Maxwell 方程

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

在时谐电磁波情形下可写为:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}) = -i\omega \epsilon \vec{E}(\vec{x})$$

时谐电磁波 (三):

计入 Gauss 定理, 时谐电磁波所满足的完整的 Maxwell 方程组是:

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

- ❶ 在 $\omega \neq 0$ 情形下, 只有前两个方程是独立的. 注意到旋度场无散, 后两个方程可以通过求前两个方程的散度得到.

现在开始推导时谐电磁波的波动方程. 取上述 Maxwell 方程组中第一个方程的旋度、并使用第二个方程, 可得:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= i\omega\mu\nabla \times \vec{H} \\ &= i\omega\mu(-i\omega\epsilon\vec{E}) \\ &= \omega^2\mu\epsilon\vec{E}\end{aligned}$$

时谐电磁波 (四):

计及电场的 Gauss 定理, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, 我们把上式左端化简为:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l E_m) \\&= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_j \partial_l E_m \\&= \vec{e}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (\partial_j \partial_l E_m) \\&= \vec{e}_i \partial_i (\partial_j E_j) - \vec{e}_i \partial_j \partial_j E_i \\&= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\&= -\nabla^2 \vec{E}\end{aligned}$$

于是, 时谐波电场强度满足的波动方程是:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0.$$

通过求解上述波动方程解出 \vec{E} 后, 磁场 \vec{B} 可通过法拉第定律求得:

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}$$

时谐电磁波 (五):

小结:

时谐电磁波情形下,
Maxwell 方程组简化为:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0,$$

$$[k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}]$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}.$$

① 方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

在数学上被称为 Helmholtz 方程. 它
只有在 Gauss 约束

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

成立的条件下才等价于 Maxwell 方程. 所以,

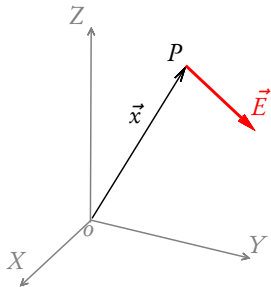
Helmholtz 方程的解必须进一步满足 Gauss 约束条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 才能描写真实的电磁波模式.

平面电磁波:

从现在起我们讨论“角频率为 ω 的时谐电磁波的波动方程”的求解。

采用 Cartesian 直角坐标系, 可以把场强和 Laplace 算符分别写为 $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{e}_i E_i(\vec{x})$ 和 $\nabla^2 = \partial_i \partial_i$, 或者写为显式,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}) &= E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y \\ &\quad + E_z(x, y, z) \vec{e}_z, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$



注意到直角坐标系基矢是常矢量, Helmholtz 方程 $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$ 可以等价地改写为:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_i(x, y, z) + k^2 E_i(x, y, z) = 0, \quad (i = x, y, z).$$

这个方程可以用分离变量法求解。

平面电磁波(二):

严格的分离变量法将延迟到后续章节. 今天我们考虑如下试探解:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

这里约定 \vec{E}_0 和 \vec{k} 是两个与场点位置坐标无关的常矢量.

下面验证此试探解满足 Helmholtz 方程的条件. 试探解在直角坐标系中的分量是:

$$E_i = E_i^{(0)} e^{ik_j x_j}$$

所以,

$$\nabla E_i = E_i^{(0)} \nabla e^{ik_j x_j} = i E_i^{(0)} e^{ik_j x_j} \nabla (k_l x_l) = i \vec{k} E_i$$

进一步,

$$\nabla^2 E_i = \nabla \cdot \nabla E_i = i \nabla \cdot (\vec{k} E_i) = i \nabla E_i \cdot \vec{k} = -E_i (\vec{k} \cdot \vec{k})$$

代入到 Helmholtz 方程中知, 要使 Helmholtz 方程成立, 必须有:

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

这一试探解描写的电磁波称为“平面电磁波”.

平面电磁波 (三):

计及时间因子, 角频率为 ω 的平面电磁波电场强度的完整表达式写为:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

或者更物理地,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

\vec{E}_0 称为平面电磁波的波幅矢量. 根据 Gauss 约束施加的条件,

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E_i = E_i^{(0)} \partial_i e^{ik_j x_j} = ik_i E_i = i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

我们看到:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

平面电磁波的磁感应强度计算如下:

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E} = -\frac{i}{\omega} \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

平面电磁波(四):

所以,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0.$$

此式表明: 平面电磁波的电场强度 \vec{E} 和磁感应强度 \vec{B} 同位相. 注意到 $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ 和三个矢量的混合积恒等式, 我们有:

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

进而平面电磁波电场强度、磁感应强度也是相互正交的:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{E}_0 \cdot (\vec{k} \times \vec{E}_0) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \cdot (\vec{E}_0 \times \vec{E}_0) = 0$$

其波幅的比值求得为:

$$\frac{E_0}{B_0} = \omega/k = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

两个问题:

- ① \vec{k} 的物理意义是什么?
- ② $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 的物理意义又是什么?

平面电磁波(五):

首先分析矢量 \vec{S} 的物理意义. 为此我们计算一下平面电磁波的能流密度矢量:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu\omega} [\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0)] \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

所以,

$$\vec{S} \propto \vec{k}$$

即 \vec{k} 的方向就是平面电磁波能流密度矢量的方向. 我们称 \vec{k} 为平面电磁波的波矢.

平面电磁波的特性概括如下:

- ① 平面电磁波为横波, 其 \vec{E} 和 \vec{B} 都与波的传播方向垂直;
- ② \vec{E} 和 \vec{B} 相互垂直, $(\vec{E} \times \vec{B})$ 沿波矢 \vec{k} 的方向;
- ③ \vec{E} 和 \vec{B} 同位相, 波幅比为 $1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

平面电磁波 (六):

为了看清

$$1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

的物理意义, 我们考察一下平面电磁波场强表达式中的位相因子 $\cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ 或者 $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$. 显见, 在任一给定时刻 t , 在平面波传播的路径上, 所有的位相都等于 ϕ 的场点均处于一个平面上, 平面方程是:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \phi$$

注意到对于由 ϕ 所标志的等位相面而言, ϕ 不随时间的演化而改变. 所以,

$$\vec{k} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} - \omega = 0$$

- ① 此式中, $\frac{d\vec{x}}{dt} := \vec{v}_p$ 描写平面电磁波等位相面的传播速度, 称为“相速度”.
- ② 在线性均匀介质中的传播的平面电磁波而言, 其相速度的大小为:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

平面电磁波(七):

回忆真空中电磁波的传播速度的表达式,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

以及线性均匀介质的本构关系 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ 和 $\mu = \mu_r \mu_0$, 我们有:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

式中的 $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 称为介质的“折射率”. 由于介质的相对介电常数和相对磁导率均是频率 ω 的函数, 在介质中不同频率的平面电磁波传播时有不同的相速度和折射率, 这就是介质的色散现象.

最后研究平面电磁波的能量和能流. 线性均匀介质中电磁场的能量密度为:

$$w = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right)$$

平面电磁波的能量和能流:

对于平面电磁波而言,

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \vec{e}_k \times \vec{E}$$

这里用 \vec{e}_k 表示波矢方向的单位基矢,

$$\vec{k} = k\vec{e}_k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \vec{e}_k$$

所以:

$$\begin{aligned} B^2 &= \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= \sqrt{\mu\epsilon} (\vec{e}_k \times \vec{E}) \cdot \vec{B} \\ &= \sqrt{\mu\epsilon} (\vec{B} \times \vec{e}_k) \cdot \vec{E} \\ &= \mu\epsilon [(\vec{e}_k \times \vec{E}) \times \vec{e}_k] \cdot \vec{E} \\ &= \mu\epsilon [(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k)\vec{E} - (\vec{e}_k \cdot \vec{E})\vec{e}_k] \cdot \vec{E} = \mu\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

即,

$$\frac{B^2}{\mu} = \epsilon E^2$$

平面电磁波的能量与能流(二):

于是, 平面电磁波中电场能量与磁场能量相等:

$$\begin{aligned}w &= \epsilon E^2 \\&= \frac{B^2}{\mu} \\&= \epsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]\end{aligned}$$

由于能量密度 w 是场强的二次式, 计算 w 的瞬时值时不能使用场强的复数形式. 一个周期中能量密度的平均值是:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt w \\&= \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt [1 + \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \\&= \frac{1}{2} \epsilon E_0^2\end{aligned}$$

二次式求平均值的普遍公式:

设周期函数 $F(t)$ 和 $G(t)$ 有复数表示:

$$F(t) = F_0 e^{-i\omega t}, \quad G(t) = G_0 e^{-i\omega t + i\phi}.$$

ϕ 是二者的位相差. 乘积函数 FG 在一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 中的平均值计算如下:

$$\begin{aligned}\overline{FG} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt F_0 \cos(\omega t) \cdot G_0 \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} F_0 G_0 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] \\ &= \frac{1}{2} F_0 G_0 \cos \phi\end{aligned}$$

显然, 最后的结果可以利用复数表示写成:

$$\overline{FG} = \frac{1}{2} \Re [F^*(t) G(t)]$$

平面电磁波的能量和能流(三):

平面电磁波的能流密度计算如下:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\vec{e}_k \times \vec{E}) \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \vec{e}_k\end{aligned}$$

注意到 $w = \epsilon E^2$, 上式又可写为:

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} w \vec{e}_k = v_p w \vec{e}_k$$

一个周期内的平均能流密度矢量为:

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu} \Re[\vec{E}^* \times \vec{B}] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{e}_k$$

第十二次作业:

郭硕鸿著《电动力学》
(第三版),
第150页, 第1, 4, 5题.

电磁波在介质分界面上的反射和折射:

电磁波入射于两种介质的分界面上时将发生反射、折射现象. 对于电磁波反射和折射现象的描写包括两个方面:

- ① 入射角、反射角和折射角之间的关系;
- ② 入射波、反射波和折射波的波幅比及相对位相.

电磁波在两种介质分界面上的反射、折射现象属于电磁波传播的边值问题, 是由电磁场量的边值关系确定的. 前面已经看到, 对于传播于线性均匀绝缘介质中的频率为 ω 的时谐电磁波而言, Maxwell 方程组中独立的方程只有如下两个:

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = 0$$

将它们应用于两者绝缘介质的分界面上, 即得如下边值关系:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

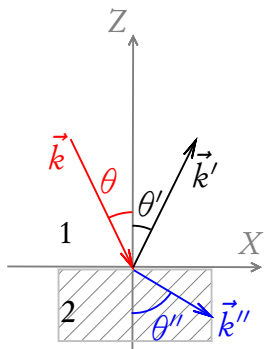
这就是讨论电磁波在介质分界面上反射、折射现象的出发点.

反射、折射定律:

下面研究频率为 ω 的单色平面电磁波入射到两种绝缘介质分界面上时, 入射角、反射角和折射角的关系。

我们做如下假设:

- ① 介质 1 和介质 2 的分界面是无穷大平面 $z = 0$.
- ② 入射波的波矢 \vec{k} 位于 $y = 0$ 平面。
- ③ 反射波和折射波也是频率与入射波频率相同的平面电磁波。



按照这些假设, 入射波、反射波和折射波的电场强度矢量可以分别表示为:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)},$$

$$\vec{E}'(\vec{x}, t) = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)},$$

$$\vec{E}''(\vec{x}, t) = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}.$$

反射、折射定律(二):

介质 1 中同时存在入射波和反射波, 而介质 2 中仅存在折射波.
所以, 在介质分界面 $z=0$ 上, 边界条件

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

具体化为:

$$\vec{e}_z \times [\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}] = \vec{e}_z \times \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

抽出公因子 $e^{-i\omega t}$ 后, 得:

$$\vec{e}_z \times [\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{E}'_0 e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}}] = \vec{e}_z \times \vec{E}''_0 e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x}}$$

此式对分界面上所有的场点 $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ 成立 (这里 x 和 y 完全任意). 注意到坐标 x 和 y 取值的不确定性, 上述边界条件的成立意味着:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}' \cdot \vec{x} = \vec{k}'' \cdot \vec{x}, \quad (z=0)$$

反射和折射定律(三):

将入射波、反射波和折射波的波矢都在直角坐标系中写出, 例如对入射波, $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$, 则上列条件等价地表为:

$$k_x x + k_y y = k'_x x + k'_y y = k''_x x + k''_y y$$

此式应该对任意的 x 和 y 都成立, 所以:

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y.$$

我们事先约定入射面为 $y=0$ 的 xz 平面, 即 $k_y=0$. 此外由示意图知: $k_x = k \sin \theta$, $k'_x = k' \sin \theta'$ 以及 $k''_x = k'' \sin \theta''$. 综合这些因素, 我们有:

$$k'_y = k''_y = 0, \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta''$$

注意到入射波与反射波均位于介质 1、但折射波位于介质 2, 所以:

$$k = k' = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \quad k'' = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}.$$

反射和折射定律(四):

把这个结果代入到上一式, 则得:

$$\theta = \theta', \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = n_{21}$$

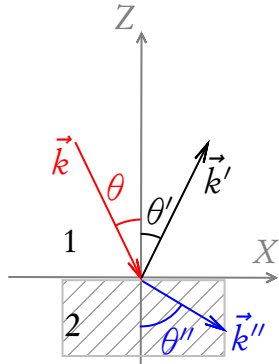
这个结果称为电磁波在两种介质分界面上的反射、折射定律,
 $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ 为介质 2 相对于介质 1 的折射率.

菲涅耳公式:

接着研究介质分界面上入射波、反射波和折射波波幅之间的关系。

计入反射和折射定律的贡献, 电磁场量在“绝缘介质”分界面上的边值关系可通过其波幅矢量重新表达为:

$$\begin{aligned}\vec{e}_z \times (\vec{E}_0 + \vec{E}'_0) &= \vec{e}_z \times \vec{E}''_0, \\ \vec{e}_z \times (\vec{H}_0 + \vec{H}'_0) &= \vec{e}_z \times \vec{H}''_0.\end{aligned}$$



由示意图知:

$$\vec{k} = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} [\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z]$$

$$\vec{k}' = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} [\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z]$$

$$\vec{k}'' = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} [\sin \theta'' \vec{e}_x - \cos \theta'' \vec{e}_z]$$

菲涅耳公式(一):

所以,“平面电磁波中 \vec{k} , \vec{E} 和 \vec{B} 两两正交”的事实允许我们将电场强度和磁场强度的波幅在直角坐标系中展开. 分两种情况讨论:

● \vec{E} 在入射面内.

对于这样的极化入射波, 入射波、反射波和折射波中的电场强度波幅矢量可表为:

$$\vec{E}_0 = E_0(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_z)$$

$$\vec{E}'_0 = E'_0(\cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_z)$$

$$\vec{E}''_0 = E''_0(\cos\theta''\vec{e}_x + \sin\theta''\vec{e}_z)$$

相应的磁场强度波幅表达式是:

$$\vec{H}_0 = -H_0\vec{e}_y, \quad \vec{H}'_0 = H'_0\vec{e}_y, \quad \vec{H}''_0 = -H''_0\vec{e}_y.$$

这里的正负号选择需要保证 $\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \propto \vec{k}$, $\vec{E}'_0 \times \vec{H}'_0 \propto \vec{k}'$ 等正交性关系. 此式相当于事先约定 \vec{H}'' 与 \vec{H} 同位相, 但 \vec{H}' 与 \vec{H} 的位相反.

菲涅耳公式(二):

利用场强矢量的上述表达式, 介质分界面 $z=0$ 上的边值关系简化为:

$$E_0 \cos \theta + E'_0 \cos \theta = E''_0 \cos \theta''$$

$$H_0 - H'_0 = H''_0$$

我们已事先假设入射波、反射波和折射波均为平面电磁波, 所以:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \vec{e}_k \times \vec{E}, \quad \vec{H}' = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \vec{e}_{k'} \times \vec{E}', \quad \vec{H}'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \vec{e}_{k''} \times \vec{E}''.$$

波幅之间的关系式是:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0, \quad H'_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E'_0, \quad H''_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E''_0.$$

于是, 边值关系中的第二个方程可以改写为:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_0 - E'_0) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E''_0$$

菲涅耳公式(三):

进一步假设所涉及的介质均为非铁磁性的线性介质, 满足条件 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$, 则上式又可写为:

$$\begin{aligned} E_0 - E'_0 &\approx \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} E''_0 \\ &\approx \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} E''_0 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} E''_0 \end{aligned}$$

这里的最后一步使用了折射定律. 于是, 边值关系最终写为:

$$(E_0 + E'_0) \cos \theta = E''_0 \cos \theta'', \quad (E_0 - E'_0) \sin \theta'' = E''_0 \sin \theta.$$

解之, 得:

$$\begin{aligned} E'_0/E_0 &= - \left[\frac{\cos \theta \sin \theta - \cos \theta'' \sin \theta''}{\cos \theta \sin \theta + \cos \theta'' \sin \theta''} \right] \\ &= - \frac{\sin 2\theta - \sin 2\theta''}{\sin 2\theta + \sin 2\theta''} \\ &= - \frac{\sin(\theta - \theta'') \cos(\theta + \theta'')}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} = - \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \end{aligned}$$

菲涅耳公式(四):

进而,

$$E_0''/E_0 = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}$$

● 若 \vec{E} 垂直于入射面.

此情形下, 入射波、反射波和折射波的电场强度波幅矢量可写为:

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y, \quad \vec{E}'_0 = E'_0 \vec{e}_y, \quad \vec{E}''_0 = E''_0 \vec{e}_y.$$

这里我们暂且假设 \vec{E} , \vec{E}' 和 \vec{E}'' 三者位相相同. 根据

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{E} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{E} \times \vec{H} \propto \vec{k}$$

以及反射波、折射波中的相应关系, 可以写出磁场强度波幅矢量的如下表达式:

$$\vec{H} = H_0 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z)$$

$$\vec{H}' = H'_0 (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z)$$

$$\vec{H}'' = H''_0 (\cos \theta'' \vec{e}_x + \sin \theta'' \vec{e}_z)$$

菲涅耳公式(五):

于是, 介质分界面 $z=0$ 上电场强度、磁场强度切向分量的连续性表达为:

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

$$H_0 \cos \theta - H'_0 \cos \theta = H''_0 \cos \theta''$$

回忆:

- ① 对于平面电磁波,

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_0, \quad H'_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E'_0, \quad H''_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E''_0.$$

- ② 对于非铁磁性的线性介质, $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$.

- ③ 折射定律:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

可以把上述边值关系用电场强度的波幅重新表达为:

$$E_0 + E'_0 = E''_0, \quad (E_0 - E'_0) \cos \theta \sin \theta'' = E''_0 \sin \theta \cos \theta''.$$

菲涅耳公式 (六):

解之, 得:

$$E'_0/E_0 = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}, \quad E''_0/E_0 = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')}.$$

上述结果称为 Fresnel 公式. 从这些公式可见:

- 垂直于入射面偏振的波与平行于入射面偏振的波入射到两种绝缘介质分界面上, 其反射、折射的行为不同. 倘若入射波为自然光, 则反射波和折射波都是部分偏振光.
- 若 $\theta + \theta'' = \pi/2$, 则 \vec{E} 平行于入射面的入射波分量没有反射波:

$$E'_0/E_0 = -\frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \Big|_{\theta + \theta'' = \pi/2} \rightarrow 0.$$

自然光入射时, 反射光变为垂直于入射面偏振的完全偏振光. 此情形中的入射角 θ 称为 Brewster 角.

菲涅耳公式(七):

- 在 \vec{E} 垂直于入射面情形下,

$$E'_0/E_0 = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')},$$

若 $\epsilon_2 > \epsilon_1$, 即自然光从光疏介质入射到光密介质, 由折射定律可知:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \approx \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} > 1, \quad \rightsquigarrow \quad \theta > \theta''$$

因此, E'_0/E_0 为负值, 表明反射波电场强度与入射波电场强度位相相反. 这个现象称为反射过程中的“半波损失”.

全反射:

若平面电磁波从光密介质射向光疏介质,
 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 则由折射定律知:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \approx \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} < 1$$

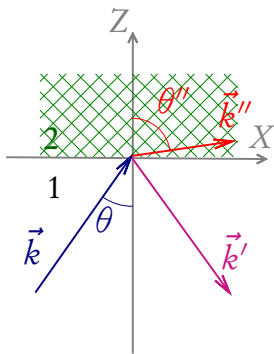
从而折射角 θ'' 大于入射角 θ .

- 若增大入射角使得 $\sin \theta \approx \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$,
则 $\theta'' = \pi/2$, 折射波将沿界面掠过.
这一现象称为全反射.

- 若进一步增大入射角使得 $\sin \theta > \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$, 则:

$$\sin \theta'' > 1,$$

此时不能定义实数意义下的“折射角”(所以仍属于全反射),
将出现不同于一般反射、折射的物理现象.



全反射 (二):

全反射现象发生于电磁波从光密介质向光疏介质入射、且入射角 θ 满足条件,

$$\sin \theta \geq n_{21}, \quad n_{21} \approx \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} < 1$$

之时. 此情形中介质 1 中的入射波和反射波显然仍可以表示为同频率的平面电磁波:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

此处,

$$k = k' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$$

介质 2 中虽然没有可观测的折射波, 但“物理上”仍可假设其存在. 倘若假设介质 2 中的折射波也是与入射波频率相同的平面电磁波:

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad k'' = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2} = k n_{21}$$

则两种介质分界面 ($z=0$) 上电场强度切向分量的连续性

$$\vec{e}_z \times (\vec{E} + \vec{E}') = \vec{e}_z \times \vec{E}''$$

全反射 (三):

要求:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} = \vec{k}' \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} = \vec{k}'' \cdot \vec{x} \Big|_{z=0}$$

成立. 取入射面为 $y=0$ 的 xz 平面, 则上式的成立意味着入射波矢 \vec{k} 、反射波矢 \vec{k}' 和折射波矢 \vec{k}'' 均在此 xz 平面内,

$$\begin{aligned}\vec{k} &= k(\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z), \quad \vec{k}' = k(\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z), \\ \vec{k}'' &= k_x'' \vec{e}_x + k_z'' \vec{e}_z,\end{aligned}$$

且:

$$k_x'' = k \sin \theta.$$

介质 2 中折射波矢 \vec{k}'' 的 z 分量计算如下:

$$k_z'' = \sqrt{k'^2 - k_x'^2} = k \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}$$

注意到在全反射情形 $\sin \theta \geq n_{21}$, 我们有:

全反射(四):

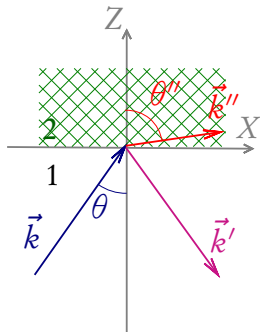
$$k_z'' = i\kappa, \quad \kappa = k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2} \geq 0.$$

于是, 折射波电场强度表达为:

$$\vec{E}''(\vec{x}, t) = \vec{E}_0'' e^{-\kappa z} e^{i(k \sin\theta x - \omega t)}, \quad (z \geq 0)$$

- 全反射情形下, 折射波是沿 x 方向传播的电磁波, 其场强沿 z 轴方向按 $e^{-\kappa z}$ 的方式衰减. 因此, 折射波仅存在于界面附近薄层内, 其厚度可以用 κ^{-1} 估计:

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}$$



全反射 (五):

- 折射波磁场强度计算公式是:

$$\vec{H}'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{E}'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{kn_{21}} \left(k \sin \theta \vec{e}_x + i\kappa \vec{e}_z \right) \times \vec{E}''$$

倘若假设折射波电场强度在垂直于入射面的方向上偏振, $\vec{E}'' = E'' \vec{e}_y$, 我们有:

$$H_x'' = -i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1} E''$$
$$H_z'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{\sin \theta}{n_{21}} E''$$

上式表明: H_z'' 与 E'' 同位相, 但 H_x'' 与 E'' 有 $\pi/2$ 的位相差.

全反射 (六):

- 在电场强度偏振方向垂直于入射面情形下，若发生了全反射现象，则折射波平均能流密度矢量的直角分量求得为：

$$\bar{S}_x'' = \frac{1}{2} \Re(E_y'' H_z'') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |E_0''|^2 e^{-2\kappa z} \frac{\sin \theta}{n_{21}}$$

$$\bar{S}_z'' = -\frac{1}{2} \Re(E_y'' H_x'') = 0$$

因此，折射波平均能流密度只有 x 分量，但是，沿 z 轴方向进入到第二种介质的平均能流密度为零。需要注意的是： S_z'' 的瞬时值并不恒为零。

- ① **全反射现象中第二介质的作用：** 在第一个半周期内，电磁能量透入第二介质，在界面附近薄层内储存起来，在第二个半周期内，该能量释放出来转变为反射波的能量。

作业:

- 根据边界条件不难证明, 反射波与入射波具有相同振幅、但有一定的位相差:

$$E'/E = e^{-2i\alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\cos \theta}$$

反射波平均能流密度数值上与入射波平均能流密度相等, 因此电磁能量被全部反射回第一介质. 这就是全反射.

第十三次作业:

郭硕鸿著《电动力学》(第三版),
第 150 页, 第 2, 3 题.

有导体存在时电磁波的传播:

电磁波在真空或者理想绝缘介质内部传播时, 没有能量损耗, 电磁波的波幅可以无衰减地传播.

然而, 当电磁波在有导体存在的空间中传播时,

- ① 导体的特点是其体内存在有“自由电子”. 在电磁波电场作用下, 自由电子定向运动在导体体内形成传导电流.
- ② 电流产生的焦耳热将使得电磁波能量不断损耗.

因此, 在导体内部传播的电磁波是一种衰减波. 电磁波在传播过程中, 部分电磁能量会转化为热量.

导体内部的自由电荷分布:

众所周知: 在静电平衡状态下, 导体内部不带电、自由电荷只能分布于导体表面上。

试问:

在时变电磁场情形下, 导体上的电荷分布是否仍然具有上述特性呢?

设导体内部某区域内有自由电荷分布, 其密度为 ρ , 则由 Gauss 定理知: 导体体内电场强度矢量 \vec{E} 的散度为:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

电场的存在将在导体中产生传导电流 \vec{j} . 设导体的电导率为 σ , 则由欧姆定律知:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

导体内部的自由电荷分布(二):

结合以上二式知:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$$

所以,

- ① 当导体内部有净余的自由电荷积聚时, 同种电荷之间的相互排斥会导致向外发散的电流.
- ② 电流向外发散将使得导体内部每一体元 d^3x 中的电荷密度随时间减小. 按照电荷守恒定律知:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\sigma \rho}{\epsilon_0}$$

解此方程, 得:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}$$

式中 ρ_0 是 $t=0$ 时刻的电荷体密度. 所以, 导体内部的电荷密度随时间指数衰减, 衰减的特征时间是:

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

良导体条件:

当频率为 ω 的电磁波在导体中传播时, 只要电磁波的周期 $2\pi/\omega$ 远大于电荷密度的特征衰减时间 τ , 即:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg 1$$

或者等价地,

$$\omega \tau \ll 1$$

就可以认为导体内部无净余自由电荷分布, $\rho(t) \approx 0$. 这个不等式常称为“良导体条件”.

- 一般的金属导体的 $\tau \approx 10^{-17}$ 秒. 所以, 只要入射电磁波的频率不太高, 良导体条件都可以满足.
- 良导体内部没有净余的自由电荷分布, 电荷只能分布于导体表面上.

导体内的电磁波:

导体内部 $\rho \approx 0, \vec{j} = \sigma \vec{E}$. Maxwell 方程组简化为:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

对于一定频率 ω 的时谐电磁波, 电磁场量 $\propto e^{-i\omega t}$. 这时常常令 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, Maxwell 方程组进一步简化为:

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} + \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

导体的“复电容率”:

定义:

$$\epsilon' = \epsilon + i\sigma/\omega$$

则:

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \epsilon' \vec{E}$$

此式与介质中的 Maxwell 方程在“形式上”完全一致.

导体内的时谐电磁波动方程:

在一定频率 ω 情形下, 导体内电磁场的电场强度矢量满足方程:

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \epsilon' \vec{E} &= i\omega \mu (-i\omega \epsilon' \vec{E}) \\ &= i\omega \mu (\nabla \times \vec{H}) \\ &= \nabla \times (i\omega \mu \vec{H}) \\ &= \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \\ &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ &= -\nabla^2 \vec{E}\end{aligned}$$

最后一步使用了导体中的 Gauss 定理: $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. 令:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$$

则:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

解出 \vec{E} 后, 导体内部的磁场强度矢量由法拉第定律给出:

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega \mu} \nabla \times \vec{E}$$

导体内的平面电磁波:

导体内部传播的电磁波也有平面波解:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

注意到 $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon'}$ 是复数, 波矢 \vec{k} 应该是一个复矢量

$$\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$$

以保证:

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \left[\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right] &= \omega^2 \mu \epsilon' = k^2 \\ &= \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= (\vec{\beta} + i\vec{\alpha}) \cdot (\vec{\beta} + i\vec{\alpha}) \\ &= \beta^2 - \alpha^2 + i2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\end{aligned}$$

所以, 实矢量 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 应满足如下约束条件:

$$\begin{aligned}\beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \mu \epsilon \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \frac{1}{2} \omega \mu \sigma\end{aligned}$$

导体内的平面电磁波 (二):

于是, 导体内部传播的平面电磁波可以重新表达为:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{x}} \exp \left[i(\vec{\beta} \cdot \vec{x} - \omega t) \right]$$

- 波矢 \vec{k} 的实部 $\vec{\beta}$ 描写平面波传播的位相关系, 其大小称为“位相常数”.
- 波矢 \vec{k} 的虚部 $\vec{\alpha}$ 描写平面波传播过程中波幅的衰减, 其大小称为“衰减常数”.
- 由于衰减因子的存在, 电磁波只能透入到导体表面薄层内, 通过传导电流把这部分能量耗散为焦耳热.

因此, 有导体存在时, 电磁波主要是在导体以外的空间或介质中传播.

平面电磁波在导体表面的反射和透射:

考虑一束平面电磁波从真空(介质 1)入射到导体(介质 2)的表面($z=0$)上.真空中存在有入射波和反射波, 导体中存在有透射波, 波矢分别为 \vec{k} , \vec{k}' 和

$$\vec{k}'' = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}.$$

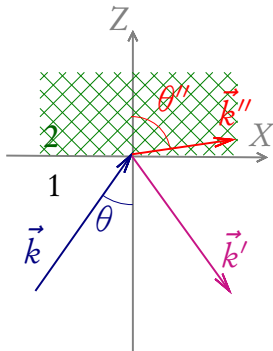
真空与导体分界面上电磁场量需要满足的边界条件, 例如电场强度切分量的连续性, 要求对于任意的 (x, y) 坐标, 均有:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} = \vec{k}' \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} = (\vec{\beta} + i\vec{\alpha}) \cdot \vec{x} \Big|_{z=0}$$

设入射面为 $y=0$ 的 xz 平面,

$$\vec{k} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z \right]$$

则 $\vec{\beta} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sin \theta \vec{e}_x + \beta_z \vec{e}_z$, 且 $\vec{\alpha} = \alpha_z \vec{e}_z$.



平面电磁波在导体表面的反射和透射 (二):

为简单计, 以下我们只研究垂直入射情形,
 $\theta = 0$. 于是: $\vec{\beta} = \beta_z \vec{e}_z$, $\vec{\alpha} = \alpha_z \vec{e}_z$. 确定 α_z 、
 β_z 的方程组退化为:

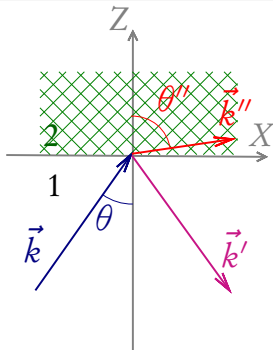
$$\beta_z^2 - \alpha_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma$$

其解为:

$$\alpha_z = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right]}$$

$$\beta_z = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]}$$



趋肤效应与穿透深度:

对于良导体, $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$, 上式可进一步简化为:

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

- ① 场强波幅降至导体表面原值 $1/e$ 倍的传播距离称为电磁波的“穿透深度” δ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha_z} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

- ② 穿透深度与导体电导率及电磁波频率乘积的平方根成反比. 所以, 对高频电磁波而言, 电磁场以及和它相互作用的高频电流仅集中于导体表面穿透深度很小的薄层内. 这种现象称为“趋肤效应”.

导体中电磁波的磁场强度:

现在讨论, 当平面电磁波从真空中垂直入射到导体表面上时, 导体内部电磁波的磁场强度:

$$\begin{aligned}\vec{H}'' &= -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}'' \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \vec{k}'' \times \vec{E}'' = \frac{1}{\omega\mu} (\beta_z + i\alpha_z) \vec{e}_z \times \vec{E}''\end{aligned}$$

在良导体情形下,

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

于是:

$$\vec{H}'' \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \vec{e}_z \times \vec{E}''$$

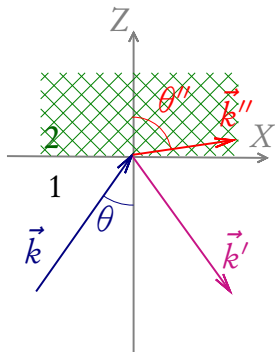
- 磁场强度的位相比电场强度滞后 $\pi/4$.
- 在良导体中, 电磁波的能量主要是磁场能量:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{H''}{E''} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \gg 1$$

电磁波在导体表面上的反射:

现在应用电磁场量的边值关系分析导体表面上电磁波的反射、透射的波幅关系. 设频率为 ω 的单色平面电磁波从真空入射到某良导体表面. 为简单计, 仅考虑垂直入射的情形, 这时,

$$\vec{k} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{e}_z, \quad \vec{k}' = -\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{e}_z, \\ \vec{k}'' = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1 + i) \vec{e}_z.$$



若进一步假设电场强度的偏振方向垂直于入射面,

$$\vec{E} = E \vec{e}_y, \quad \vec{E}' = E' \vec{e}_y, \quad \vec{E}'' = E'' \vec{e}_y$$

则相应的磁场强度表达为:

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \vec{e}_x, \quad \vec{H}' = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E' \vec{e}_x, \quad \vec{H}'' \approx -\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \mu_0}} (1 + i) E'' \vec{e}_x$$

电磁波在导体表面上的反射(二):

在真空与导体的分界面 $z=0$ 上, 电场强度、磁场强度的切分量均连续. 所以,

$$E + E' = E'', \quad E - E' \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}(1 + i)E''$$

联立此二式消去 E'' , 可得:

$$\frac{E'}{E} \approx -\frac{1 + i - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + i + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}$$

导体对电磁波的“反射系数” R 定义为反射能流与入射能流之比. 利用上式求得:

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}$$

所以, 导体的电导率愈高, 其反射系数愈接近于其饱和值 (1).

作业:

第十四次作业: 郭硕鸿著《电动力学》(第三版), 第 150-151 页,
第 6, 7, 8 题.

有界空间的电磁波:

电磁波在真空中、或者绝缘介质中传播时, 其最基本的存在形式是平面电磁波:

- 这种波的电场强度和磁场强度都做横向振荡. 常称之为横电磁波 (TEM).

当空间中存在导体时, 电磁波主要是在导体以外的空间或者绝缘介质中传播的, 只有很小一部分电磁波透入到导体表层内:

- ① 对于理想导体模型, $\sigma \rightarrow \infty$, 电磁波将全部被导体反射, 进入导体的穿透深度趋于零.
- ② 导体表面自然构成了电磁波存在的边界.

所以, 有导体存在时电磁波的传播属于边值问题, 在这类问题中导体表面上电磁波所满足的边界条件起重要作用.

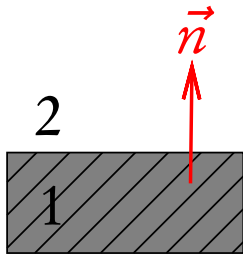
理想导体边界条件:

如前述, 若时谐电磁波入射到两种介质的分界面 S 上, 则电磁场量须满足如下边值关系:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_S = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_S = \alpha$$

现在考虑理想导体边界条件. 设第一种介质代表理想导体, 第二种介质代表真空或者普通绝缘体.



理想导体的特点是体内无电磁场. 因此 $\vec{E}_1 = \vec{H}_1 = 0$. 略去角标 2, 以 \vec{E} 和 \vec{H} 表示介质一侧处的场强, 则理想导体边界条件为:

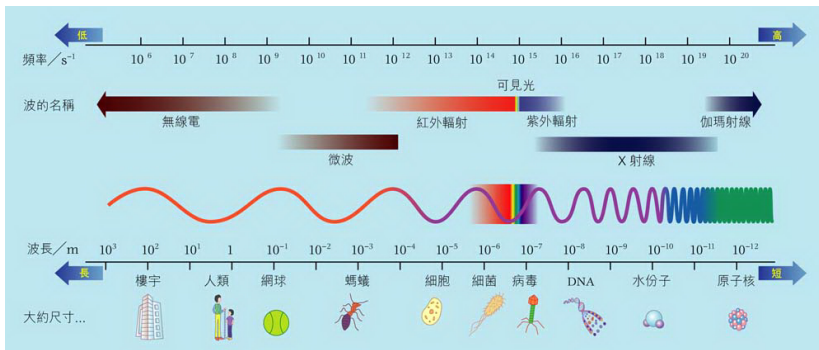
$$\vec{n} \times \vec{E}|_S = 0$$

$$\vec{n} \times \vec{H}|_S = \alpha$$

此外, Gauss 约束 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 在边界面上化为:

$$\partial_n E_n|_S = 0.$$

电磁波谱:



微波 (Microwaves):

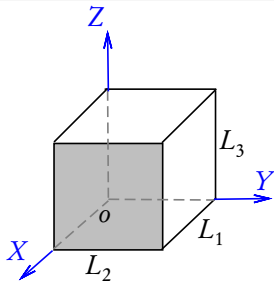
波长范围约为 1 毫米 – 1 米，对应频率 300MHz – 300GHz.

- 雷达，航空、航天及手机通讯
- 微波宇宙背景辐射
- 微波炉

谐振腔:

实践上, 电磁波使用具有特定谐振频率的元器件产生的:

- 低频无线电波通常采用 LC 回路产生电磁振荡, $\nu = 1/\sqrt{LC}$.
- 在微波范围, 通常采用具有金属壁面的“谐振腔”产生高频电磁振荡.



下面讨论矩形谐振腔内可能产生的电磁振荡模式. 取金属内壁分别为 $x=0, L_1, y=0, L_2$ 和 $z=0, L_3$ 的平面. 腔内电磁波的电场强度和磁场强度都满足 Helmholtz 方程. 设 $u(x, y, z)e^{-i\omega t}$ 为 \vec{E} 或 \vec{H} 的任一直角分量, 则:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

式中,

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

而 ω 表示腔内电磁波的角频率.

谐振腔 (二):

现使用分离变量法求解此 Helmholtz 方程, 即取 $u(x, y, z)$ 的试探解具有如下因子化形式:

$$u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

把此试探解代入到 Helmholtz 方程, 并注意到在直角坐标系中,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

我们得:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0$$

两端同除以 XYZ 后, 再适当移项, 方程变为:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2$$

此方程左端是 x 的函数, 右端是 (y, z) 的函数. 由于 (x, y, z) 是相互独立的坐标, 所以两端只能等于同一个常数, 标记其为 k_x^2 :

谐振腔 (三):

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2$$
$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = k_x^2$$

第一个方程是常微分方程, 可等价地写为:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

通过适当移项, 第二个方程可以重新表为:

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 - k_x^2$$

其左端只依赖于坐标 y , 而右端只依赖于坐标 z . 注意到 y, z 坐标的相互独立性, 上式两端必须等于同一个常数 k_y^2 :

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 - k_x^2 = k_y^2$$

谐振腔 (四):

所以,

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$$

式中,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

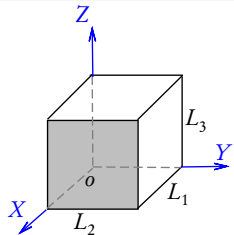
显见, $X(x)$, $Y(y)$ 和 $Z(z)$ 的方程都是简谐振子满足的常微分方程. 因此, $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ 有如下驻波试探解:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \left[C_1 \cos(k_x x) + D_1 \sin(k_x x) \right] \\ & \cdot \left[C_2 \cos(k_y y) + D_2 \sin(k_y y) \right] \\ & \cdot \left[C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z) \right] \end{aligned}$$

当把 $u(x, y, z)$ 具体取为电场强度的各个直角分量时, 理想导体边界条件将会对积分常数 C_i, D_i 做出限制.

谐振腔 (五):

例如取 $E_x = u(x, y, z)$. 对于谐振腔内部空间而言, 其边界面分别是 $x = 0, L_1$; $y = 0, L_2$ 和 $z = 0, L_3$ 这六个内壁.



- ① E_x 对于边界面 $x = 0$ 和 $x = L_1$ 来说是电场强度的法向分量. 所以,

$$\partial_x E_x|_{x=0} = \partial_x E_x|_{x=L_1} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad D_1 = 0, \quad k_x = \frac{m\pi}{L_1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- ② E_x 对于其余四个边界面来说均是电场强度的切向分量. 所以,

$$E_x|_{y=0} = E_x|_{z=0} = E_x|_{y=L_2} = E_x|_{z=L_3} = 0$$

这些约束方程的解是:

$$C_2 = C_3 = 0, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L_3}, \quad n, p = 0, 1, 2, \dots$$

谐振腔 (六):

由此可得:

$$E_x = A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

模式参数 m, n, p 的可能取值是:

同理有:

$$m, n, p = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_y = A_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)$$

和

$$E_z = A_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

m, n 和 p 分别代表沿内壁三条边所含的半波数目. 三个积分常数 A_i ($i = 1, 2, 3$) 中只有两个是独立的. 由 Gauss 约束条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 可知:

式中,

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0$$

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1},$$

$$k_y = \frac{n\pi}{L_2},$$

$$k_z = \frac{p\pi}{L_3}$$

显见: m, n, p 三参数中不能有两个同时取零. 否则场强 $\vec{E} = 0$, 腔内无电磁波.

谐振腔 (七):

Helmholtz 方程的上述试探解称为谐振腔内电磁场的“本征振荡”:

$$E_x = A_1 \cos \left[\frac{m\pi x}{L_1} \right] \sin \left[\frac{n\pi y}{L_2} \right] \sin \left[\frac{p\pi z}{L_3} \right]$$

$$E_y = A_2 \sin \left[\frac{m\pi x}{L_1} \right] \cos \left[\frac{n\pi y}{L_2} \right] \sin \left[\frac{p\pi z}{L_3} \right]$$

$$E_z = A_3 \sin \left[\frac{m\pi x}{L_1} \right] \sin \left[\frac{n\pi y}{L_2} \right] \cos \left[\frac{p\pi z}{L_3} \right]$$

式中 $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$.

- ① 鉴于 Gauss 约束条件: $k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0$, 对于每一组 (m, n, p) 值, 有两个独立的偏振模式.
- ② 本征振荡的角频率称为谐振腔的本征角频率:

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$$

谐振腔 (八):

若 $L_1 \geq L_2 \geq L_3$, 则谐振腔内具有最低频率的本征振荡模式是 $(m, n, p) = (1, 1, 0)$. 最低本征频率为:

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}$$

相应的电磁波波长为:

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}}$$

此波长与谐振腔的线度属同一数量级. 于是, 在微波技术中通常使用谐振腔的最低模式产生特定频率的电磁振荡.

第十五次作业: 郭硕鸿著《电动力学》(第三版), 第 152 页, 第 15 题.

波导:

近代无线电技术, 例如雷达、电视和定向通信等, 都广泛地利用到了高频电磁波的传输。

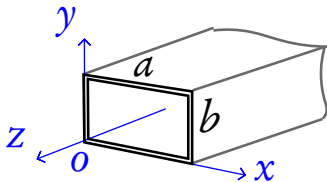
- 低频电力系统常使用双导线传输电磁波。在低频情况下, 电磁场在电路中的作用常常可以通过电压、电流、电阻、电容和电感等参数有效地表示。因此不必直接研究场的分布和传播, 可以通过解电路方程解决实际问题。
- 电磁波频率变高时, 为了避免电磁波向外辐射的损耗和避免周围环境的干扰, 常改用“同轴传输线”传递电磁波能量。
- 电磁波频率进一步升高后(微波范围), 需要用“波导管”传递其能量。

波导管:

波导管是一根空心金属管, 横截面通常为矩形或圆形。波导管适合于传输微波波段(波长为厘米量级)的电磁波。

矩形波导中的电磁波:

现在求矩形波导内的电磁波解. 取波导内壁面为 $x=0$ 和 $x=a$, $y=0$ 和 $y=b$. 电磁波沿 z 轴传播.



频率为 ω 的平面电磁波在此波导管内传播时, 其电场强度矢量须满足 Helmholtz 方程和 Gauss 定理:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

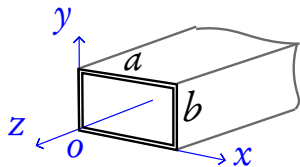
式中,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

此外在波导内壁面上还需满足理想导体边界条件, 即电场强度在管壁上的切分量必须为零.

矩形波导中的电磁波 (二):

由于电磁波沿 z 轴传播, 电场强度的试探解应含传播因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$:



$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

所以,

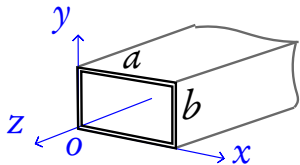
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \vec{E}(x, y) + [k^2 - k_z^2] \vec{E}(x, y) = 0$$

场强矢量 $\vec{E}(x, y)$ 的任一直角坐标系分量均服从上述 Helmholtz 方程. 现用 $u(x, y)$ 表示之. 按分离变量法令:

$$u(x, y) = X(x) Y(y)$$

则 $u(x, y)$ 的 Helmholtz 方程可以分解为如下两个常微分方程:

矩形波导中的电磁波 (三):



$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

式中:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

所以, $u(x, y)$ 的试探解表为:

$$u(x, y) = [C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x] \cdot [C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y]$$

理想导体边界条件如下. 在 $x=0$ 和 $x=a$ 的内壁面上:

$$E_y = E_z = 0, \quad \partial_x E_x = 0$$

而在 $y=0$ 和 $y=b$ 的内壁面上:

$$E_x = E_z = 0, \quad \partial_y E_y = 0$$

矩形波导中的电磁波 (四):

计入 $x=0$ 与 $y=0$ 内壁面上的理想导体边界条件, 则由上述 Helmholtz 方程的试探解可得:

$$E_x(x, y) = A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$E_y(x, y) = A_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y)$$

$$E_z(x, y) = A_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

再考虑 $x=a$ 与 $y=b$ 内壁面上的边界条件, 知:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

参数 m 和 n 分别表示沿波导管横截面两条边的半波数目。

- m 和 n 不能同时取零. 否则 $\vec{E} = 0$, 波导管内无电磁波传播.
- 根据 Gauss 约束 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 知:

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$$

因此, 在 A_1, A_2 和 A_3 这三个波幅中只有两个是独立的. 换言之, 对于每一组 (m, n) 值, 波导管中只能传播两种独立模式的电磁波.

矩形波导中的电磁波 (五):

- 对于一定的 (m, n) 值, 波导管内电磁波两种独立模式不能都是横电波. 理由如下. 若一种模式是横电波, $E_z = 0$,
 $\leadsto A_3 = 0$, 则对该模式而言, Gauss 约束变为:

$$bmA_1 + anA_2 = 0$$

这是关于波幅 A_1 或者 A_2 的一元一次代数方程, 其解是唯一的: $A_1 = -(an/bm)A_2$. 所以, 另一独立模式必然有 $A_3 \neq 0$,
 $\leadsto E_z \neq 0$, 它不做横向偏振.

- 波导管中电磁波的磁场强度由下式计算:

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = -\frac{i}{\omega\mu} \vec{e}_a \epsilon_{abc} \partial_b E_c$$

若将其写为:

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

矩形波导中的电磁波 (六):

则其各个直角分量可表为:

$$H_x(x, y) = -\frac{i}{\omega\mu}(k_y A_3 - ik_z A_2) \sin(k_x x) \cos(k_y y)$$

$$H_y(x, y) = -\frac{i}{\omega\mu}(ik_z A_1 - k_x A_3) \cos(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$H_z(x, y) = -\frac{i}{\omega\mu}(k_x A_2 - k_y A_1) \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

显然, 在 (m, n) 给定的前提下¹, 对于 $E_z = 0$ 的横电波 (TE),
 $A_1 = -(an/bm) A_2$, 我们有:

$$H_z(x, y) = -A_2 \frac{ia\pi}{\omega\mu m} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \neq 0$$

因此, 在波导管中传播的电磁波有如下特点: 电场 \vec{E} 和磁场 \vec{H} 不能同时为横波。

¹ 且设 $m \neq 0$.

矩形波导中的电磁波 (七):

矩形波导中电磁波的独立模式:

通常把矩形波导管中电磁波的两种独立模式分别取为,

① 横电波 TE_{mn} ;

② 横磁波 TM_{mn} .

一般情形下, 波导管中可以传播横电波与横磁波的叠加波.

波导管中电磁波的波矢为 $k_z \vec{e}_z$, 在 (m, n) 给定的情形下:

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

显见, 若电磁波的振荡频率 ω 降低至

$$\omega < \frac{\pi}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

则 k_z 变为纯虚数, 传播因子 $e^{ik_z z}$ 变为衰减因子.

截止频率:

这种情形下电磁波的波幅将随着传播距离 z 的增加很快衰减至零, 从而无法有效的传输电磁波能量.

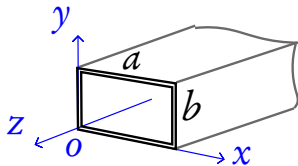
能够在波导管中无衰减地传播的电磁波的最低频率 ω_c 称为该模式的截止频率. 若 $a > b$, 则 TE_{10} 波有最低截止频率:

$$\omega_{c,10} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

或者,

$$f_{c,10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

若管内为真空, 此最低截止频率为 $f_{c,10} = c/2a$, 相应的截止波长为: $\lambda_{c,10} = 2a$. 这是波导管内能够传输的电磁波的最大波长. 波导管的几何尺寸不能做的过大, 用波导传输无线电波不合适. 在厘米波段, 波导管应用较普遍.



作业:

第十六次作业: 郭硕鸿著《电动力学》(第三版), 第 151-152 页,
第 9, 10, 12, 13 题.