

第四章 电磁波的传播

讨论没有电流和电荷分布的区域中
电磁场的变化和传播规律

第1节 平面波

服从线性波动方程的波可以归结为平面波的叠加.

1.1 电磁场的波动方程

没有自由电流分和自由电荷的区域，麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

先考虑真空情形： $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

$$\begin{array}{ccc} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} & \Rightarrow & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \\ & \downarrow & \searrow \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} & & \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ & \swarrow & \nearrow \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & & \nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{array}$$

由 $\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

令 $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

波动方程: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$

类似可得 $\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$

\mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的每一个分量都满足波速为 c 的波动方程.

波动方程的解

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

平面波解为 $f = \varphi(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct)$

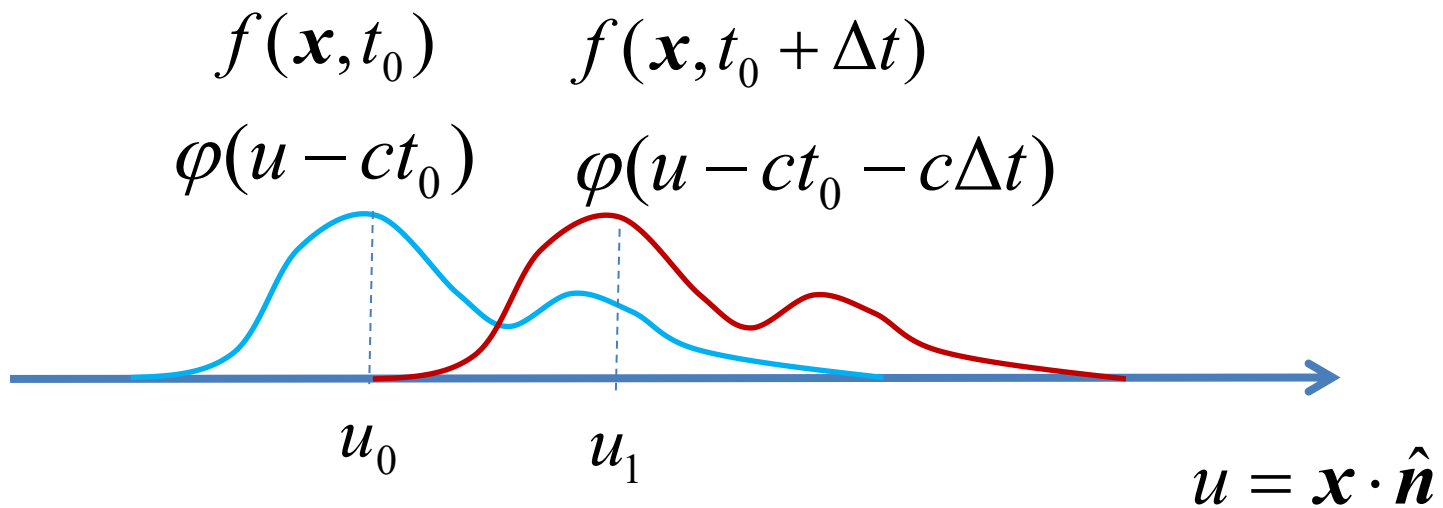
其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为波传播的单位方向矢量.

证明： 单位矢量 $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(xn_x + yn_y + zn_z - ct) \\ &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial s^2} \bigg|_{s=\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct} = \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial s^2} \bigg|_{s=\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial s^2} \bigg|_{s=\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct}$$

$$\text{从而： } \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial s^2} \bigg|_{s=\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct} - \frac{1}{c^2} c^2 \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial s^2} \bigg|_{s=\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} - ct} = 0 \quad (\text{证毕})$$



$$u_1 - ct_0 - c\Delta t = u_0 - ct_0$$

$$\Delta u = u_1 - u_0 = c\Delta t$$

波速

$$c = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

重要结论:

一切电磁波的波速都等于 c ，与参考系无关，与产生波的方式（波源的运动）无关. 也就是说， c 是一个基本物理常数.

电磁波包括无线电、光波、X光和 γ 射线等所有变化的电磁场.

这是狭义相对论的两个基础之一.

根据2019年的新国际单位制， c 定义为一个常数.

耗散线性介质情形

无耗散时，有瞬时关系： $\mathbf{D}(t) = \varepsilon \mathbf{E}(t)$, $\mathbf{B}(t) = \mu \mathbf{H}(t)$

仅当电磁场变化缓慢时近似成立. 对射频及频率更高的电磁波，耗散不可避免，极化和磁化有延时效应，即每时刻的极化和磁化原则上依赖于过去所以时刻的电磁场.

弱场，可用线性近似

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi_e(t') \mathbf{E}(t-t') dt'$$

在频域讨论比较方便. 傅里叶变换:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t}$$

对磁场有类似关系.

由 $\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^\infty \chi_e(t') \mathbf{E}(t-t') dt'$ 傅里叶变换

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)] \mathbf{E}(\omega)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

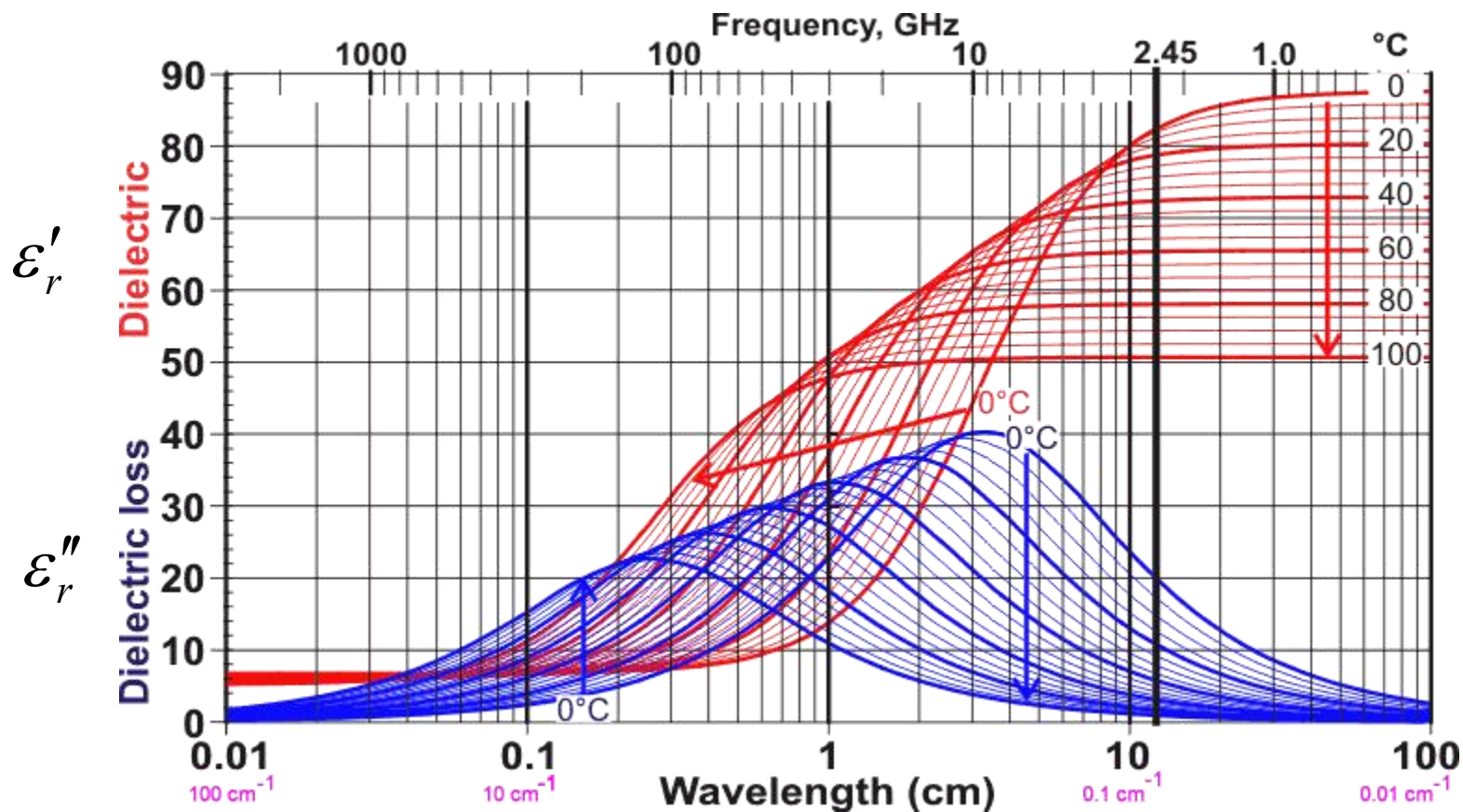
$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)] = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad \text{虚部对应耗散.}$$

对非铁磁材料类似有: $\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega)$

因此在线性近似中, 一种频率的电磁波产生同样频率的极化和磁化,

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad \mathbf{M}(\omega) = \chi_M(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

水的色散关系



1.2 时谐波

固定频率 ω 的电磁波称为时谐波.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

物理场是他们的实部. 在线性运算中可以直接对复场运算, 而非线性运算中要先取实部再运算.

$$\text{介质性质: } \mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad \mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

电容率和磁导率与频率的关系称为色散关系.

在没有自由电流和电荷分布区域的麦氏方程组成为

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{array} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \right)$$

由左列的散度可以得到右列, 所以只有左列两条方程独立.

亥姆霍兹方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$$



$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

(波数平方)

亥姆霍兹方程的解不自动满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

物理解需要加上这个约束条件. 得到物理电场解后, 磁场

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad \text{自动满足} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

类似有: $\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$

可由上式结合 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ 先解磁场, 电场由下式给出

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad \text{自动满足} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

基本方程小结:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}$$

结合边界条件，从左列或右列方程组（两种做法等价）解出线性独立的一组时谐波称为该频率的一组波模. 物理解是各种波模的线性叠加，叠加系数由初始条件确定.

$$\text{波数: } k = |\omega| \sqrt{\mu\varepsilon}$$

1.3 平面波

考虑无穷大空间的简单波模：电磁场与y和z坐标无关.

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} + k_x^2 \mathbf{E} = 0 \qquad k_x = \pm k \qquad k = |\omega| \sqrt{\mu\epsilon}$$

解： $\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{ik_x x},$
 $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{ik_x x - i\omega t}$

由约束 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 得知振幅常矢量有约束 $\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathbf{E}_0 = 0$

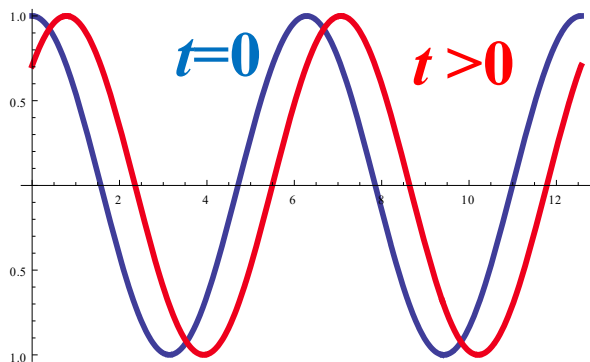
因此这是一个横波.

振幅	\mathbf{E}_0
相因子	$e^{ik_x x - i\omega t}$
位相	$k_x x - \omega t$

物理电场是实矢量，等于复电场的实部，可写成一个正频模和一个负频模的叠加 ($\omega > 0$)

$$\begin{aligned} E^{phys}(x, t) &= \text{Re}(E_0 e^{ik_x x - i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} (E_0 e^{ik_x x - i\omega t} + E_0^* e^{-ik_x x + i\omega t}) \\ &= E_0^{phys} \cos(k_x x - \omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

其中 $E_0 = E_0^{phys} e^{i\phi_0}$, ϕ_0 为初始位相.



相速度 $v = \frac{\omega}{k_x} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

左图 $k_x > 0$ 为右行波

一般平面波

复电场 $E(\mathbf{x}, t) = E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ (横波)

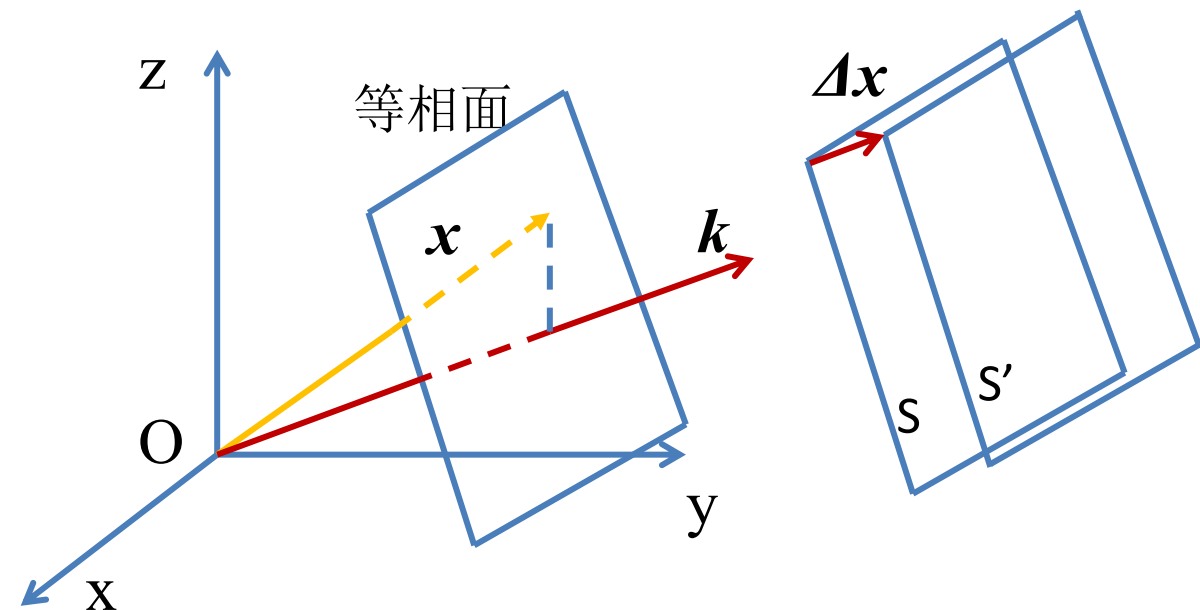
代入亥姆霍兹方程可知波矢 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = k \hat{\mathbf{e}}_k$ 满足

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad k = |\omega| \sqrt{\mu \epsilon}$$

等相面方程 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{const.}$

等相面垂直于 \mathbf{k} . 经 Δt
等相面从S移至S'. 等
相面沿 \mathbf{k} 方向移动

$$\Delta \mathbf{x} = |\Delta \mathbf{x}| \hat{\mathbf{e}}_k$$



位相 $\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$

对等相面, $\Delta\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{x} - \omega\Delta t = 0$

把 $\Delta\mathbf{x} = |\Delta\mathbf{x}| \hat{\mathbf{e}}_k$ 代入, $k |\Delta\mathbf{x}| - \omega\Delta t = 0$

故等相面移动速度为

$$\mathbf{v} = \frac{|\Delta\mathbf{x}|}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_k = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{e}}_k$$

易见 $\phi(\mathbf{x} + \frac{2\pi}{k} \hat{\mathbf{e}}_k, t) = \phi(\mathbf{x}, t) + 2\pi$ 因此 **波长**为 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

因为 $\phi(\mathbf{x}, t + \frac{2\pi}{\omega}) = \phi(\mathbf{x}, t) - 2\pi$ 因此 **周期**为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

偏振

对给定波矢 \mathbf{k} , 电场 \mathbf{E} 可以在垂直 \mathbf{k} 的任意方向上振荡. \mathbf{E} 的取向称为偏振方向.

电场可以写成平面上两个正交矢量 $\hat{\mathbf{e}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2$ 的线性叠加.

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{e}}_1 E_1 e^{i\phi_1} + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 e^{i\phi_2}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t}$$

其中 E_1 和 E_2 是两个非负实常数. 物理场

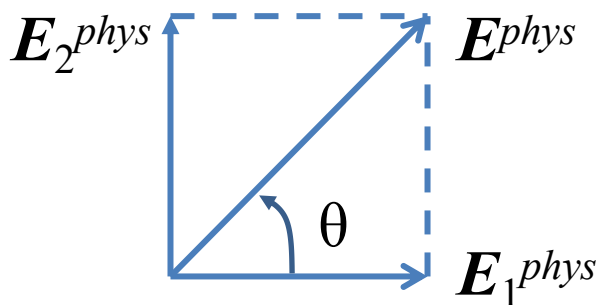
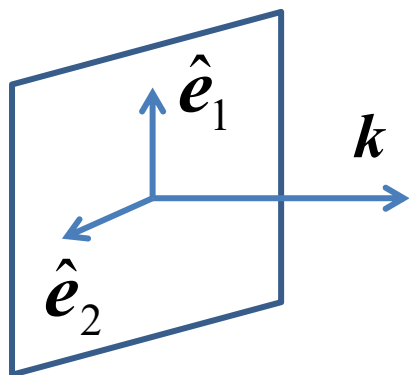
$$\mathbf{E}^{phys} = \mathbf{E}_1^{phys} + \mathbf{E}_2^{phys}$$

在正交方向偏振的电场为

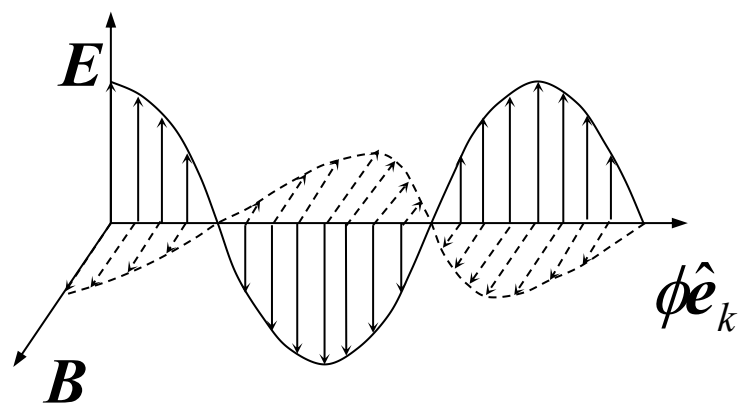
$$\mathbf{E}_1^{phys} = \hat{\mathbf{e}}_1 E_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi_1)$$

$$\mathbf{E}_2^{phys} = \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi_2)$$

$$\tan \theta = \frac{E_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi_2)}{E_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi_1)}$$



复磁场
$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{E}$$



线偏振平面波

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{E} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

- \mathbf{E} , \mathbf{B} 和 \mathbf{k} 构成右手正交系.
- \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 同相.

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v$$

真空:
$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right|_{vac} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$$

介质折射率:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

1.4 电磁波的能量和能流

能流密度由坡印亭矢量给出, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

由平面波解 $\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$

$$\mathbf{S} = \frac{k}{\omega\mu} E^2 \hat{\mathbf{e}}_k$$

上式 E 是实的物理电场, 下同.

在无耗散线性介质中, 能量密度为 $w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$

把平面波解代入,

$$w = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 \quad (\mathbf{E} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 为实物理场})$$

可把能流密度写成

$$\mathbf{S} = v w \hat{\mathbf{e}}_k$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{为相速}$$

瞬时能量密度:

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

对快速变化的电磁波（微波、光），通常只能测量到

平均能量密度:

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2$$

对同周期振荡场的二次式求时间平均，还可以用普遍公式

$$\overline{fg} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g)$$

其中 f 和 g 是两个同周期振动场的复表达式（p116）.

平均能流密度:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \hat{\mathbf{e}}_k$$

第2节 电磁波在界面上的反射和折射

边值关系的应用.

2.1 发射和折射定律

边值关系 $\hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

对绝缘介质界面：

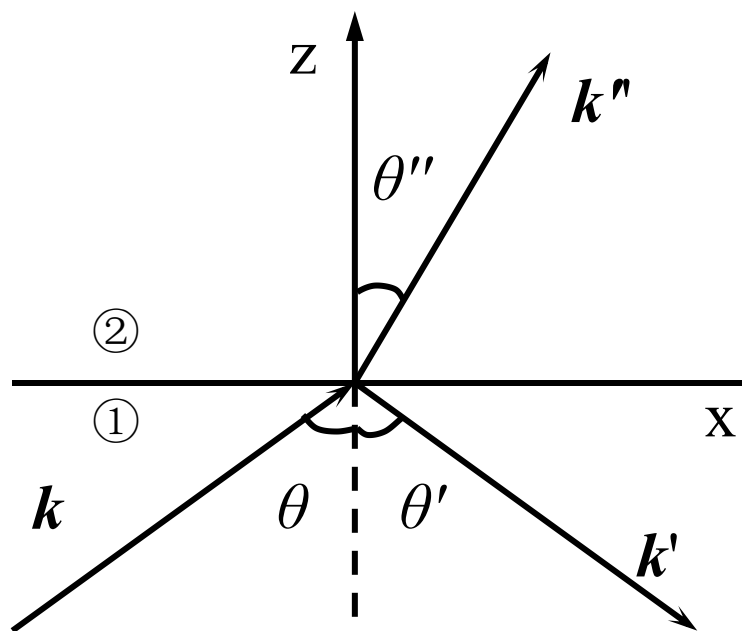
$$\alpha = 0 \quad \sigma = 0$$

对时谐波，由前两式是可以推导出后两式，从而独立的边值关系为

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \alpha$$

考虑时谐平面波入射到无穷大绝缘平面界面. 设入射发射频率不变.



入射波 $E = E_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$

反射波 $E' = E'_0 \exp[i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$

折射波 $E'' = E''_0 \exp[i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$

由 $\hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \hat{\mathbf{e}}_n \times \mathbf{E}''$$

对界面所有点成立, 故

$$k_x = k'_x = k''_x \quad k_y = k'_y = k''_y$$

设入射波 $k_y = 0$, 则

$$k_y = k'_y = k''_y = 0$$

几何关系

$$k_x = k \sin \theta \quad k'_x = k' \sin \theta' \quad k''_x = k'' \sin \theta''$$

在介质1,

在介质2,

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega}{c} n_1 \quad k'' = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{c} n_2$$

结合上面各式,

$$\theta = \theta'$$
$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n_{21}$$

这些关系体现了光在平行界面方向动量守恒. 而频率不变体现了能量守恒.

2.2 振幅关系 菲涅耳公式

1. 入射电场垂直入射平面

因为考虑的介质是各向同性的非磁性介质，反射电场和折射电场也垂直入射平面。

$$\text{由 } \hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad \text{得} \quad E + E' = E''$$

其中 E ， E' 和 E'' 分别是入射、反射和折射电场（以 y 方向为正向）

$$\text{由 } \hat{\mathbf{e}}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad \text{平行界面的分量满足}$$

$$H \cos \theta - H' \cos \theta' = H'' \cos \theta'' \quad (\text{留意正向的设定})$$

$$\text{代以} \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E \quad H' = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E' \quad H'' = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'' \quad \text{得}$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E - E') \cos \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'' \cos \theta''$$

入射电场垂直入射平面：

$$E + E' = E''$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}(E - E') \cos \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'' \cos \theta''$$



$$\frac{E'}{E} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')}$$

2. 入射电场平行入射平面

入射电场平行射平面：

$$E \cos \theta - E' \cos \theta' = E'' \cos \theta''$$



菲涅耳公式之二

$$\frac{E'}{E} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}$$

布儒斯特定律

当 $\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}$ 时反射电场没有平行入射面的分量，反射波具有垂直入射面的完全偏振性.

半波损失

在电场垂直入射平面的情形，当 $\epsilon_2 > \epsilon_1$ 时（从光疏介质入射到光密介质），有 $\theta > \theta''$ ，因而 $E'/E < 0$ ，即反射电场与入射电场反相.

2.3 全反射

考虑从光密介质入射到光疏介质，即 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ，有 $n_{21} < 1$ 和 $\theta < \theta''$. 用 $\sin \theta_c = n_{21}$ 定义 θ_c .

当入射角 $\theta = \theta_c$ 时， 折射角 $\theta'' = \frac{\pi}{2}$

若入射角继续增大， 折射将不能发生， 出现全反射现象.

此时， x方向仍然有动量守恒，

$$k_x'' = k_x = k \sin \theta = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta, \quad k_y = k_y' = k_y'' = 0$$

色散关系（ k 和 ω ）由亥姆霍兹方程确定，不随入射角变化，因而仍有

$$k''^2 = k_x''^2 + k_z''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 \quad k_z'' = k \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta} = i\kappa$$

$$\kappa = k\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}$$

在全发射条件下，入射角 $\theta > \theta_c$ ， κ 为正实数. 从而

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0'' e^{i(k_x'' x + k_z'' z - \omega t)} = \mathbf{E}_0'' e^{-\kappa z} e^{i(k_x'' x - \omega t)}$$

可见进入介质2的电磁波沿z方向指数衰减，**穿透深度**为

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}$$

这个例子说明，在边界附近可以存在复波矢，称为**边缘态**.

全反射情形的能流密度

$$\bar{S}_x'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} |E_0''|^2 e^{-2\kappa z} \frac{\sin \theta}{n_{21}}$$

$$\bar{S}_z'' = 0 \quad \text{平均来说, 没有能量流进介质2.}$$

还可以推导出入射和发射波的相位关系（参见课本）。

作业:

1. 考虑两列振幅相同、偏振方向相同、频率分别为 $\omega+d\omega$ 和 $\omega-d\omega$ 的线性偏振平面波，它们都沿 z 轴传播。（1）求合成波，并把合成波写成振幅依赖于空间点和时间的以 ω 为频率的平面波；（2）求合成波的相位传播速度和振幅传播速度。
2. 一平面波以 $\pi/4$ 的角度从真空入射到 $\epsilon_r=2$ 的介质，电场强度垂直与入射面。求发生系数和折射系数。