4-5 章复习题

一．　求下列函数的极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\sin x\ln x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{\ln x}{1/\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1/x}{-\csc x\cot x}} = e^{0} = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{\sin x}\sqrt{1-t^2}dt}{x^2\ln(1+x)}$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{\sin x}\sqrt{1-t^2}dt}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x-\sqrt{1-x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1+1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{3x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{3x^2} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

解：$$原式 = \lim_{x\to 1}\frac{-\sin(x-1)/\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{tan^4 2x}$

解：本题有两种解法，一种是直接利用洛必达法则，另一种是利用泰勒公式。

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{16x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{64x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{32x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{32x^2} = -\frac{1}{32}$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{16x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-(1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4))}{16x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2!}+o(x^4)}{16x^4}$$

$$= -\frac{1}{32}$$

二．将下列函数在 $x=0$ 处展开为带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

1. $f(x)=x^2\ln(3+x)$

解： $\ln(3+x)=\ln 3(1+\frac{x}{3})=\ln 3+\ln(1+\frac{x}{3})$

根据已知 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

那么，

$$
\begin{aligned}
x^2\ln(3+x)&=x^2\ln 3(1+\frac{x}{3})=x^2\ln 3+x^2\ln(1+\frac{x}{3})\\
&=x^2\ln 3+x^2(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n3^n}+o(x^n))\\
&=x^2\ln 3+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2\cdot 3^2}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^n}{(n-2)3^{n-2}}+o(x^n)(x\to 0)
\end{aligned}
$$

2. $f(x)=\frac{7x^3}{x-5}$

解：因为 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

$$f(x)=\frac{7x^3}{x-5}=(-\frac{7}{5})x^3\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=(-\frac{7}{5})x^3(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\cdots+\frac{x^{n-3}}{5^{n-3}}+o(x^{n-3}))$$

$$=(-\frac{7}{5})x^3+(-\frac{7}{5^2})x^4+(-\frac{7}{5^3})x^5+\cdots+(-\frac{7}{5^{n-2}})x^n+o(x^n)(x\to 0)$$

三．1. 求曲线 $y=3e^{-x^2}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

解： $y'=-6xe^{-x^2}, y''=-6(1-2x^2)e^{-x^2}=6(2x^2-1)e^{-x^2}$.

令 $y'=0\Rightarrow x=0$, 令 $y''=0\Rightarrow \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

函数有两条水平渐近线：y=0, y=3.

根据函数的对称性，下表只给出 x>=0 时曲线凹凸性，

x	0	$(0, 1/\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2},+\infty)$
y''	<0	<0		>0
y	不　是拐点	上凸	拐点	下凸

拐点坐标为 $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},3e^{-1/2})$ ，

上凸区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$

下凸区间 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

2. 设 $y=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$，

(1). 求该函数的单调区间和极值。

(2). 求该函数所确定曲线的上、下凸区间。

解：函数的定义域为：$(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$.

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x=-1,3.$$

由函数的导数知

$$x\in(-\infty,-1)\bigcup(3,+\infty)\text{时，}y'>0;\quad x\in(-1,1)\bigcup(1,3)\text{时，}y'<0.$$

函数的二阶导数为：

$$y''=\frac{8}{(x-1)^3}\Rightarrow x<1\text{时，}y''<0;\quad x>1\text{时，}y''>0.$$

(1) 函数的单调递增区间为：$(-\infty,-1)\bigcup(3,+\infty)$,单调递减区间为：$(-1,1)\bigcup(1,3)$。函数的极大值为： $y(-1)=-8$；函数的极小值为：$y(3)=0$。

(2) 函数的上凸区间为：$(-\infty,1)$；下凸区间为：$(1,+\infty)$。

四 . 设 $f(x),g(x)$在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$ $(A$ 为常数$)$，

证明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

并利用该等式计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}\,dx$ 的值 .

解：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)g(x)dx$

其中，

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)d(-t) = \int_{0}^{a} f(-t)g(-t)dt$$

$$\int_{0}^{a}[A-f(t)]g(t)dt = A\int_{0}^{a} Ag(t)dt - \int_{0}^{a} f(t)g(t)dt$$

$$\therefore \text{原式}=A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx, \text{其中} f(x)=\frac{1}{1+e^x}, f(-x)+f(x)=1, g(x)=x^2 \quad ,$$

所以，$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx = \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}.$

五. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续， 在区间 $(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$， 证明: $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0$.

解：令 $F(x)=xf(x)$,

$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$F(0)=0, F(1)=f(1)=0$，

$F(0)=F(1)=0$,由罗尔中值定理，得，

存在$\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

六. 求过点 M(1, -3, 2) 且与直线 $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-y+3z+10=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解：设平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$ ，该法向量与已知直线方向相同，

而直线的方向向量为：$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4,-1,-3)$ ，所以 $\vec{n}=(4,-1,-3)$ ，

因此平面方程为：$4(x-1)-(y+3)-3(z-2)=0$, 即：4x-y-3z-1=0

七．求椭圆面 $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线上的点到坐标原点的最大距离与最小距离.

解：解法一：这道题目要用到 6.9 节条件极值的方法（推荐解法）。

解：$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}-1)+\mu(x+y+z).$

求解方程组 $\begin{cases} L_x=2x+\frac{1}{2}\lambda x+\mu=0, \\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ L_z=2z+\frac{1}{2}\lambda z+\mu=0, \\ \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

由前三个方程得

$\begin{cases} (2+\frac{1}{2}\lambda)x=(2+\frac{1}{2}\lambda)z, \\ 2y(1+\lambda)=2z+\frac{1}{2}\lambda z. \end{cases}$ 下面分两种情况求解，

(1)当 $2+\frac{1}{2}\lambda=0$，即 $\lambda=-4$ 时, 由以上方程组得 $y=0$, 再由第一个方程的后两个方程得 $(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$. 这两点与原点距离为2.

(2)当 $\lambda\neq-4$ 时，由方程组得 $x=z$, 再由第一个方程组的后两个方程得 $(\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3})$. 这两点与原点距离为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

所以，在$(\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$和$(-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3})$有最小距离$\frac{2}{\sqrt{3}}$；在$(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$和$(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$有最大距离2.

解法二：求$\boldsymbol{d}^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2$ 在以下曲线上的最大值和最小值，

$$\text{曲线}\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1,\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

因为

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1, y^2=1-\frac{1}{4}(x^2+z^2)\geq 0\text{，所以}x^2+z^2\leq 4\text{；又因为}y=-(x+z),$$

$$\text{所以}y^2=(x+z)^2\leq 2(x^2+z^2)\text{,结合上面}y^2\text{的表达式，得:}1-\frac{1}{4}(x^2+z^2)\leq 2(x^2+z^2),$$

$$\text{因此，}4\geq x^2+z^2\geq\frac{4}{9}.$$

$\boldsymbol{d}^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2+1-\frac{1}{4}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2)=\frac{3}{4}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2)\geq\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+1=\frac{4}{3}$ ，所以最小距离是$\frac{2}{\sqrt{3}}$；$\boldsymbol{d}^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2+1-\frac{1}{4}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2)=\frac{3}{4}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{z}^2)+1\leq 4$，所以最大距离是 2.

八．求曲线$\boldsymbol{x}^{\frac{3}{2}}+\boldsymbol{y}^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{a}^{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{a}>0)$ 过点$\boldsymbol{P}(\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a},\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a})$ 处的切线方程.

解：设曲线上的某点坐标为$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ ，那么该曲线在该点处的切线的斜率就可用隐函数求导的方法求出：

$$\frac{3}{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{y}'=0\Rightarrow\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=-\frac{\sqrt{\boldsymbol{x}_0}}{\sqrt{\boldsymbol{y}_0}}$$ 所以切线方程为：

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0=-\frac{\sqrt{\boldsymbol{x}_0}}{\sqrt{\boldsymbol{y}_0}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

又所求的切线方程过 P 点，所以$\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{y}_0=-\frac{\sqrt{\boldsymbol{x}_0}}{\sqrt{\boldsymbol{y}_0}}(\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}_0)$且$\boldsymbol{x}_0^{\frac{3}{2}}+\boldsymbol{y}_0^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{a}^{\frac{3}{2}}$，

从而解得。但由于本题数据的问题，通过解析方法无法求出$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0$.

但是从理论上是可以解出的。

我又回去检查了一下原题，是我写错了，原题目如下：

求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 在点 $P(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程.

解：$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0\Rightarrow y'(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)=-1$,

所以切线方程是 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a)$,即$y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}a$.