第二章　傅里叶变换

2.1 一维函数的傅里叶变换

2.2 二维函数的傅里叶变换

2.3 傅里叶变换的性质

2.4 傅里叶变换的MATLAB实现

2.5 卷积和卷积定理

2.6 相关和相关定理

2.7 傅里叶变换的基本定理

在数学中，利用变换手段可以把较复杂的运算转化为较简单的运算。如解析几何中的坐标变换。还有如积分运算，是把一个函数变成另一个函数的变换，就可称为积分变换。傅里叶变换就是最常用的积分变换之一。在科学技术的许多领域，傅里叶变换起着重要的作用。如同其他变换一样，傅里叶变换可以被单纯看做数学泛函；但在许多时候，傅里叶变换的结果又与它所起源的函数一样有着明确的物理意义。例如，波形和谱互为傅里叶变换，所以不管是光的、电的或声的一个波形，还是和这个波形的谱，都同样可理解为可测量的对象。类似这样的关系，在物理学中经常遇到，使傅里叶变换成为物理学中最为有用的工具之一。

随着电磁理论、电子通信以及电信号理论和技术的发展，傅里叶变换得到了广泛的应用。在传统模拟信号传输和处理的时代，傅里叶变换是分析连续信号和系统的主要数学工具。随着数学信号时代的来临，傅里叶变换也产生了相应的处理离散信号的离散傅里叶变换及其快速算法，即快速傅里叶变换，这有利于计算机的实现与处理。借助傅里叶变换，把要在空域中解决的问题转换到频域中去解决。傅里叶变换是光信息处理中应用最广的一种变换，如模拟光学分析、变换和处理，数字图像处理等，在光信息处理的许多方面都要用到傅里叶变换。建立在傅里叶分析基础上的傅里叶光学直接促进了图像科学、应用光学、光纤通信和光电子学的发展。可以认为，傅里叶光学是光学、光电子学、信息论的交叉科学，也是信息光学应用在各种领域中的数理基础。

2.1 一维函数的傅里叶变换

2.1.1 傅里叶级数

2.1.2 傅里叶积分定理

2.1.3 傅里叶变换

2.1.4 极限情况下的傅里叶变换

2.1.5 δ 函数的傅里叶变换

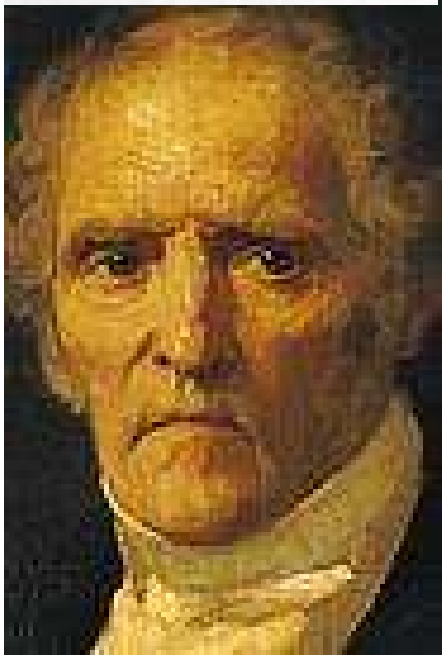
2.1.6 常用一维函数傅里叶变换对

由于英国科学家牛顿 (Newton, 1642-1727) 和德国科学家莱布尼茨 (Leibniz, 1646–1716) 等人在17世纪和18世纪对科学作出的杰出贡献，数学得到了巨大的发展。

在函数、极限、微积分和级数理论的基础上，法国数学家傅里叶 (Fourier，1768 - 1830) 于1822年发表了论文《热的解析理论》。在该论文中，傅里叶提出了著名的傅里叶级数，即周期函数可展开成无限多个正弦函数和余弦函数的和。后来，傅里叶把函数的展开从周期函数推广到了非周期函数，并提出了傅里叶积分。

傅里叶级数和傅里叶积分的提出，奠定了傅里叶变换的基础。

傅里叶（Fourier,Jean Baptiste Joseph,1768-1830）也译作傅立叶，法国数学家、物理学家



1768年 3 月 21 日生于奥塞尔，1840年5月16日卒于巴黎。9岁父母双亡， 被当地教堂收养。12岁由一主教送入地方军事学校读书。17岁（1785）回乡教数学，1794到巴 黎，成为高等师范学校的首批学员， 次年到巴黎综合工科学校执教。1798年随拿破仑远征埃及时任军中文书和埃及研究院秘书，1801年回国后任伊泽尔 省地方长官。1817年当选为科学院院 士，1822年任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席。

2.1.1 傅里叶级数

$\xi_0 = 1/L$ 基频

1. 三角函数形式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi n\xi_0 x + b_n \sin 2\pi n\xi_0 x)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nk_0 x + b_n \sin nk_0 x)$$

。

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\mathrm{d}x$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos 2\pi n\xi_0 x\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos nk_0 x\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin 2\pi n\xi_0 x\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin nk_0 x\mathrm{d}x$$

圆频率

2. 紧凑三角函数形式

由三角函数的关系，可将傅里叶级数改写成另一种紧凑的三角型函数形式：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(2\pi n\xi_0 x+\phi_n)$$

振幅谱 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

$\phi_n=\arctan(-b_n/a_n)$ 相位谱

$$a_n=A_n\cos\phi_n \qquad b_n=-A_n\sin\phi_n$$

$$a_n\cos nk_0x+b_n\sin nk_0x=A_n\cos\phi_n\cos 2\pi n\xi_0x-A_n\sin\phi_n\sin 2\pi n\xi_0x$$
$$=A_n\cos(2\pi n\xi_0x+\phi_n)$$

3. 复指数函数形式

三角函数形式的傅里叶级数含义比较明确，但运算上常感觉不够方便，因而经常采用指数形式

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{i2\pi n\xi_0 x}+c_{-n}e^{-i2\pi n\xi_0 x}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i2\pi n\xi_0 x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{ink_0 x}$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}\qquad c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=|c_n|e^{i\varphi_n}\qquad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)=|c_{-n}|e^{i\varphi_{-n}}$$

复振幅频谱

$$\varphi_n=\arctan(-b_n/a_n)$$

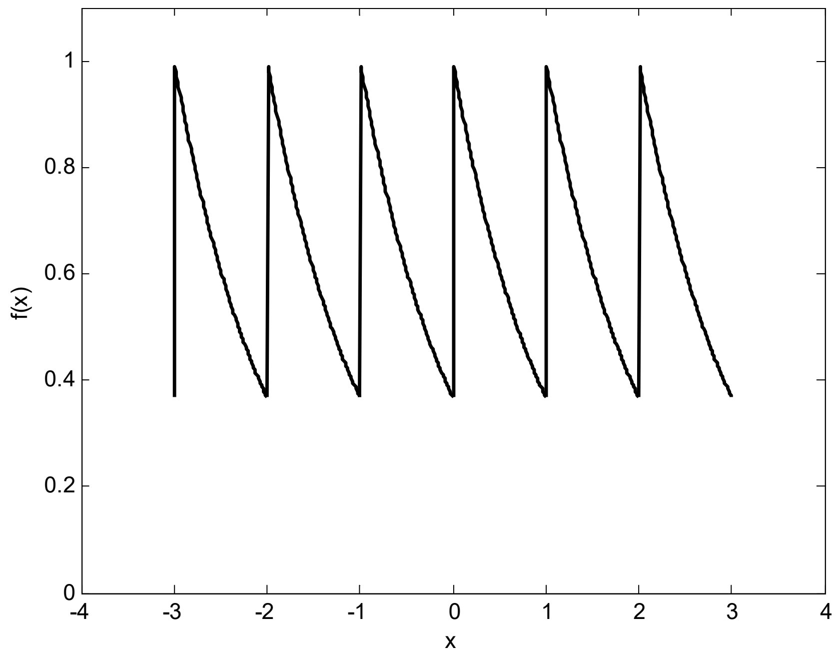
相位谱

$$\varphi_{-n}=\arctan(b_n/a_n)$$

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}A_n$$

$$\phi_n=\varphi_n=-\varphi_{-n}$$

例：求右图周期信号的紧凑三角函数型级数，画出其振幅谱和相位谱。



解：从图中可以看出，周期为**1**，因而基频也为**1**

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 2(1-\mathrm{e}^{-1}) = 1.2642$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos 2\pi n\xi_0 x\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\cos 2\pi n x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^{-x}}{1+(2\pi n)^2}(-1\cos 2\pi n x + 2\pi n\sin 2\pi n x)\Big|_0^1$$

$$= 2(1-\mathrm{e}^{-1})\frac{1}{1+(2\pi n)^2} = 1.2642\frac{1}{1+(2\pi n)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin 2\pi n\xi_0 x\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin 2\pi n x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^{-x}}{1+(2\pi n)^2}(-1\sin 2\pi n x - 2\pi n\cos 2\pi n x)\Big|_0^1$$

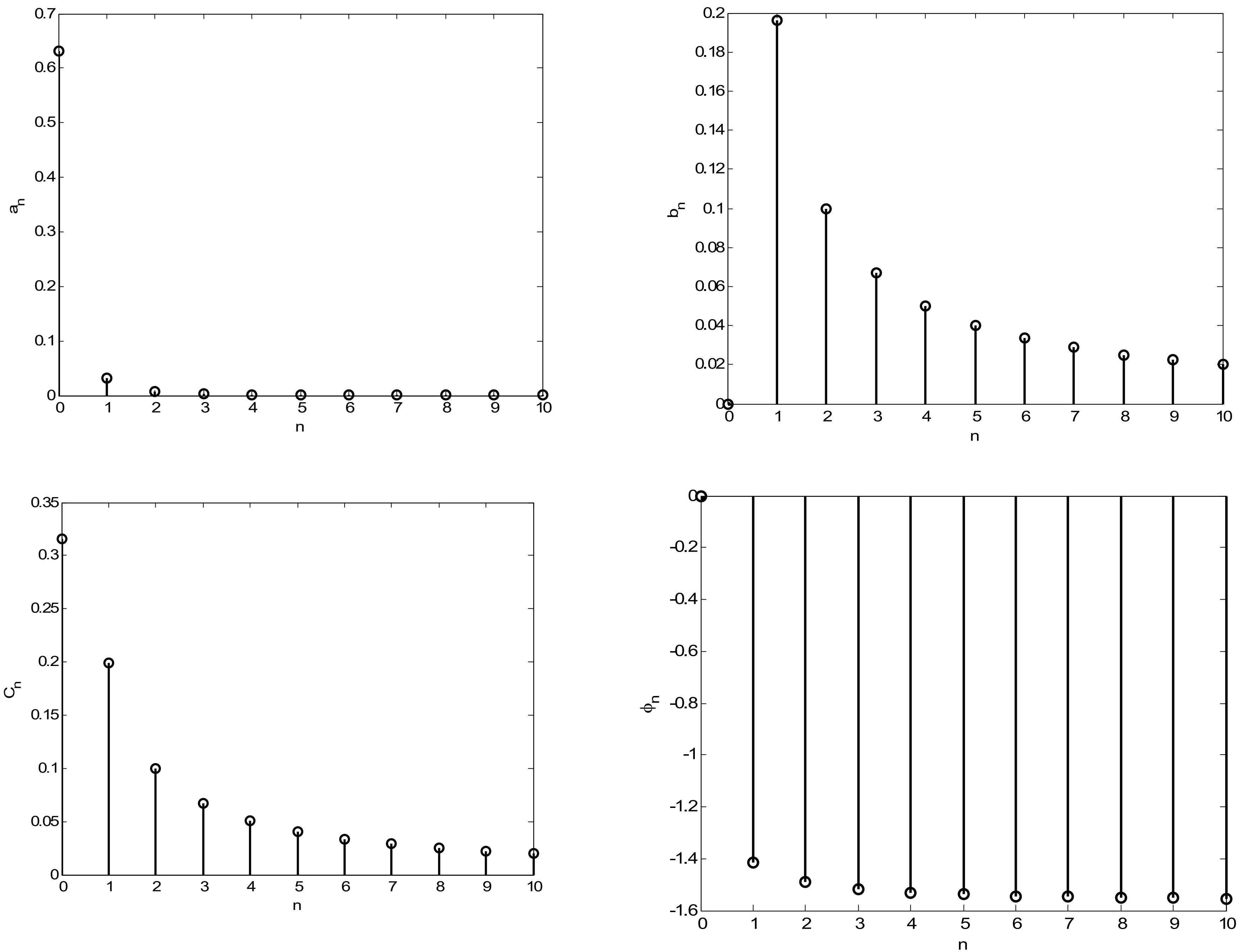
$$= \frac{-2\mathrm{e}^{-1}2\pi n + 2\pi n}{1+(2\pi n)^2} = 2(1-\mathrm{e}^{-1})\frac{2\pi n}{1+(2\pi n)^2} = 1.2642\frac{2\pi n}{1+(2\pi n)^2}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 1.2642\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi n)^2}}$$

$$\phi_n = \arctan(-b_n / a_n) = \arctan(-2\pi n) = -\arctan(2\pi n)$$

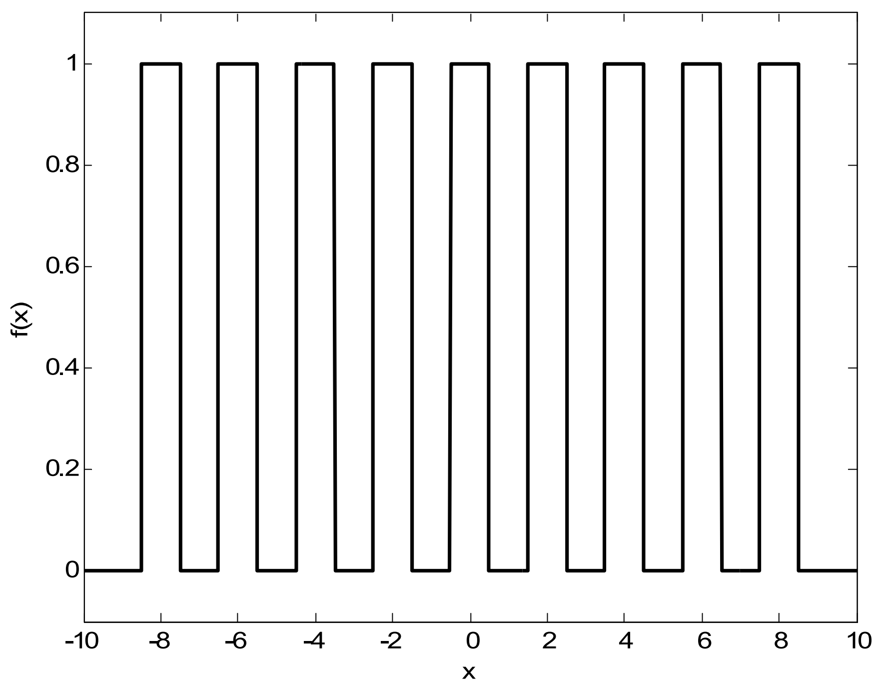
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(2\pi n\xi_0 x + \phi_n)$$

$$= 0.6321 + 0.6321\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{1+(2\pi n)^2}}\cos[2\pi n x - \arctan(2\pi n)]$$



0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
a_n
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
b_n
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
C_n
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
ϕ_n
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n

例：求右图求周期性矩形脉冲(图2.1.3)的紧凑型三角级数和复数形式的傅里叶级数的振幅频谱图和相位频谱图



解：脉冲宽度为**w=1**，高度为**h=1**, 周期**L=2**，区间为**[-1/2,1/2]**的矩形脉冲为：

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<\frac{1}{2}\text{和}-\frac{1}{2}<x<1\\ h & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

基频为 $\xi_0=\frac{1}{2}$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-w/2}^{w/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} 1\mathrm{d}x = 1$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-w/2}^{w/2} f(x)\cos 2\pi n\xi_0 x\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi n x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n x)\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

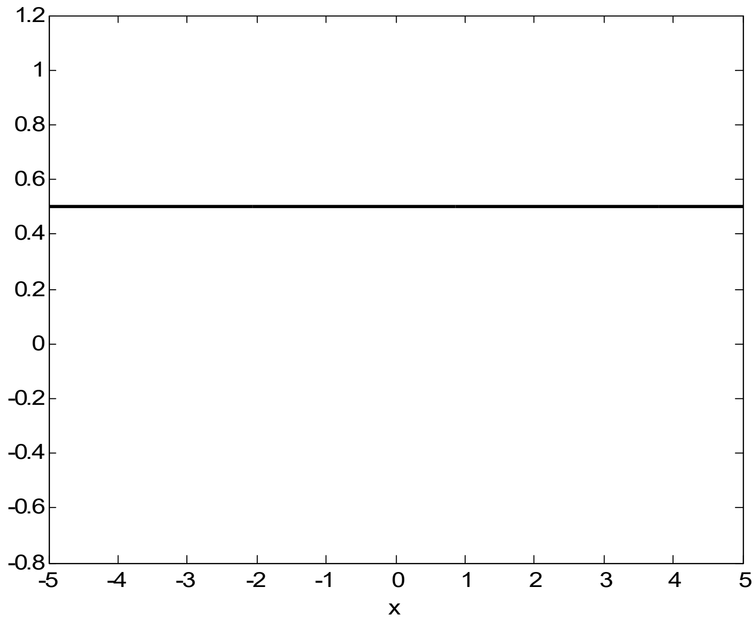
$$= \frac{1}{\pi n}[\sin(\pi n/2) - \sin(-\pi n/2)] = \frac{2}{\pi n}\sin(\pi n/2) = \begin{cases} 0 & n = 2,4,6,8,\cdots \\ \dfrac{2}{\pi n} & n = 1,5,9,13,\cdots \\ -\dfrac{2}{\pi n} & n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$

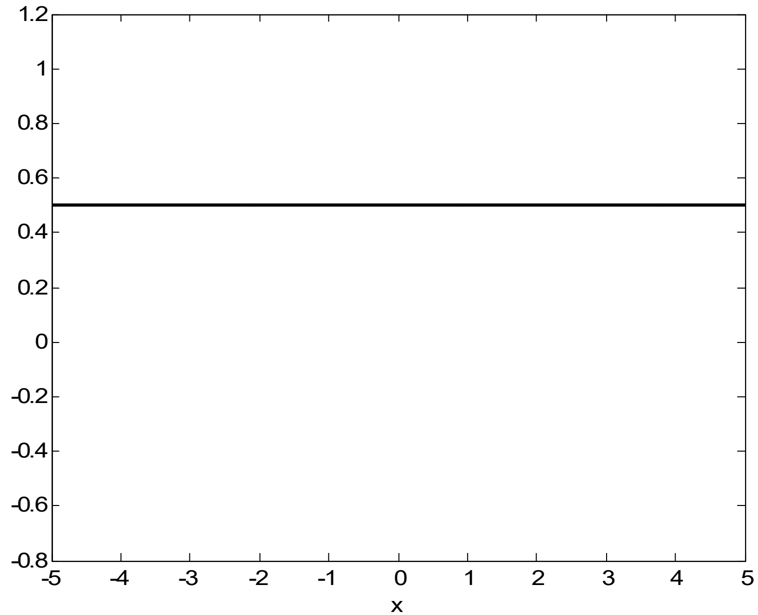
$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-w/2}^{w/2} f(x)\sin 2\pi n\xi_0 x\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} \sin(\pi n x)\mathrm{d}x = 0$$

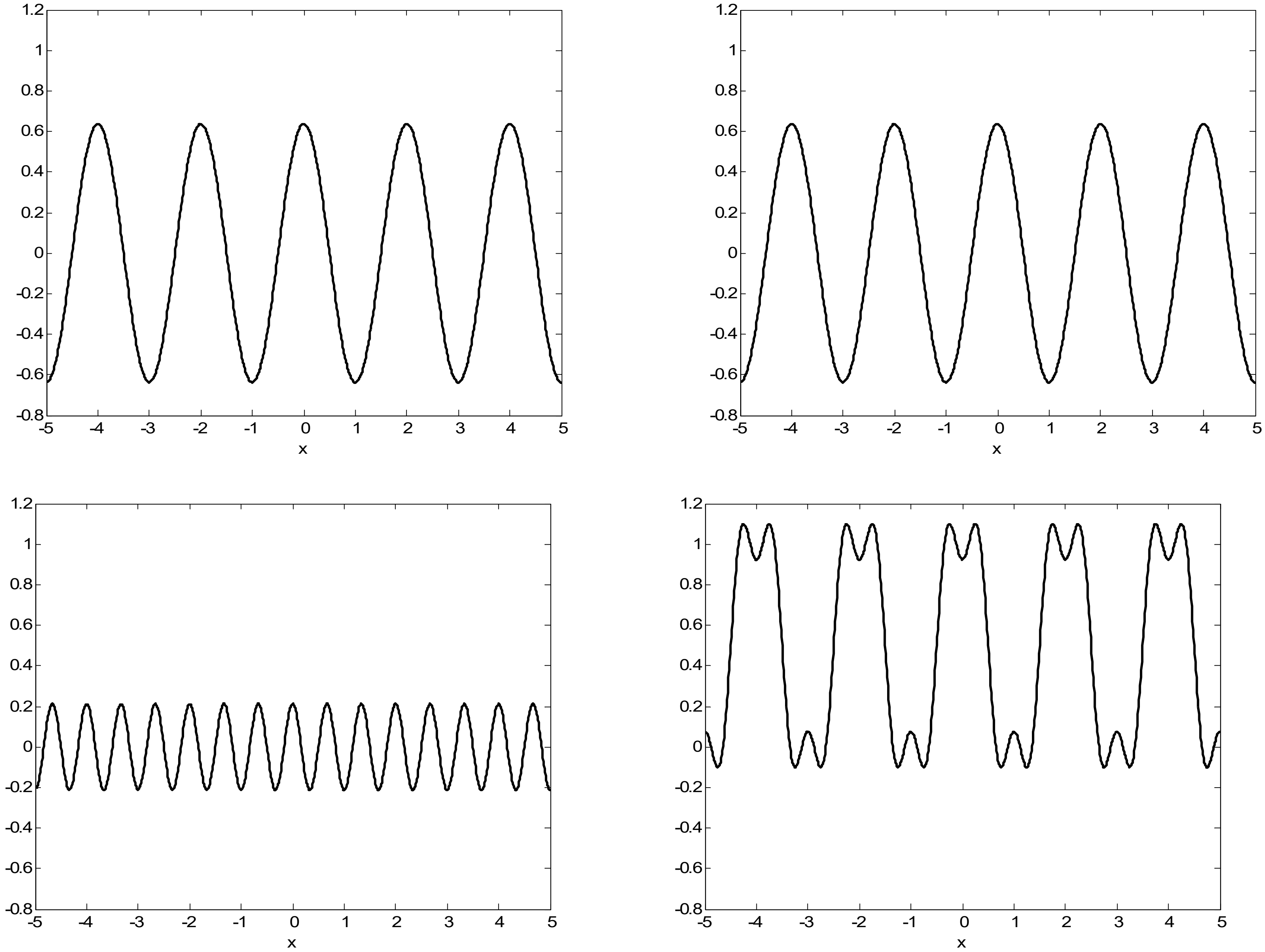
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi x-\frac{1}{3}\cos 3\pi x+\frac{1}{5}\cos 5\pi x-\frac{1}{7}\cos 7\pi x+\cdots\right)$$

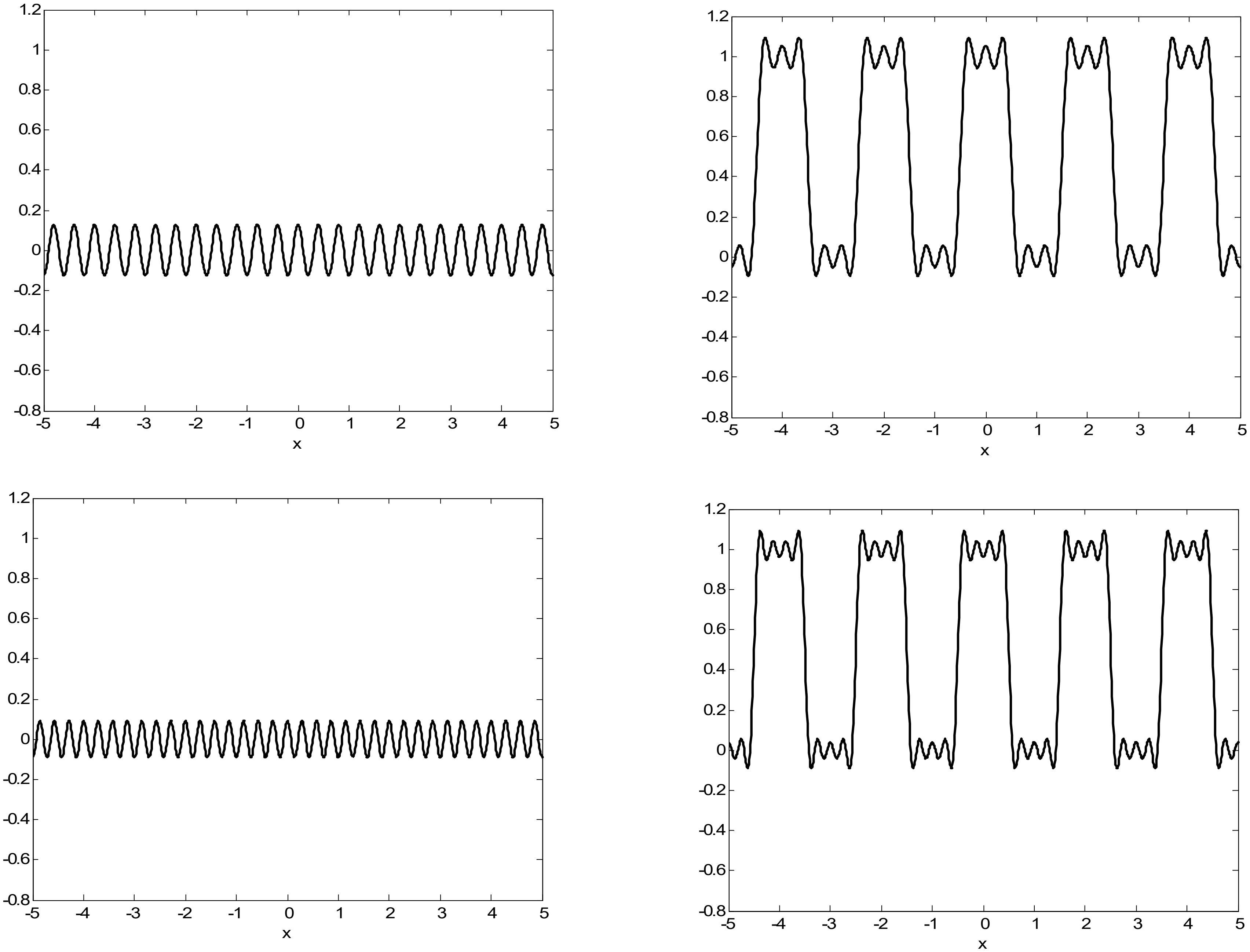
$$-\cos x=\cos(x-\pi) \qquad \xi_0=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos(2\pi\xi_0 x)+\frac{1}{3}\cos(2\pi 3\xi_0 x-\pi)+\frac{1}{5}\cos(2\pi 5\xi_0 x)+\frac{1}{7}\cos(2\pi 7\xi_0 x-\pi)\cdots\right]$$



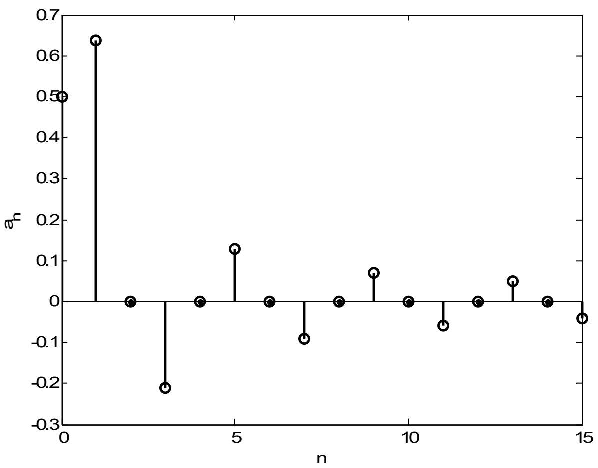


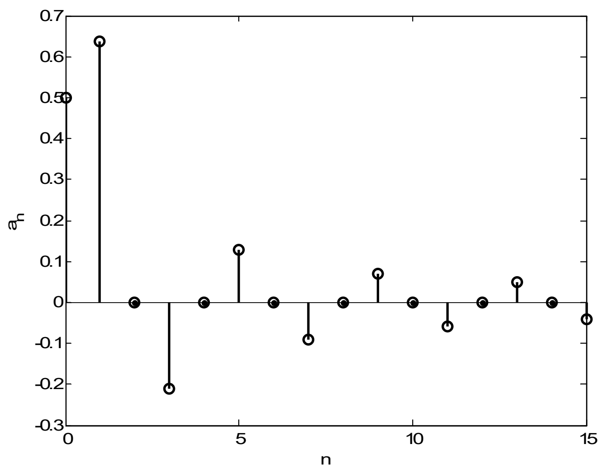

x
x
x
x

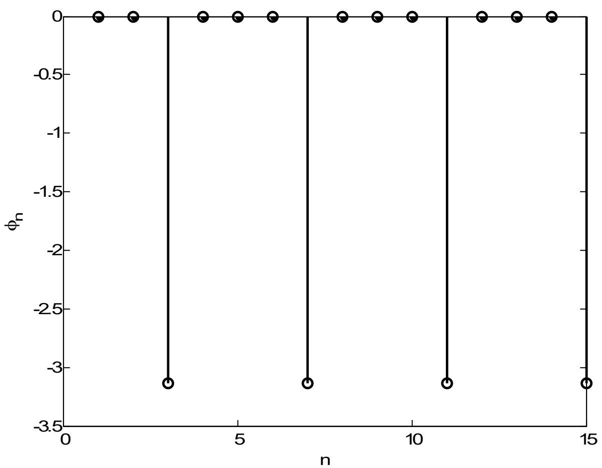


$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = | a_n | = \frac{2}{\pi n} \left| \sin(\pi n / 2) \right| = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, 8, \cdots \\ \dfrac{2}{\pi n} & n = 1, 3, 5, 7, \cdots \end{cases}$$

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & n \neq 3, 7, 11, 15, \cdots \\ -\pi & n = 3, 7, 11, 15, \cdots \end{cases}$$

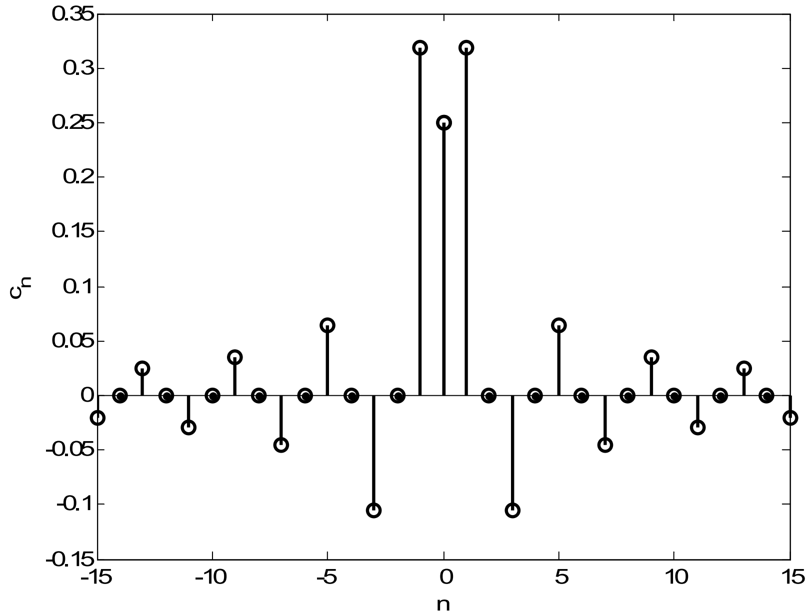


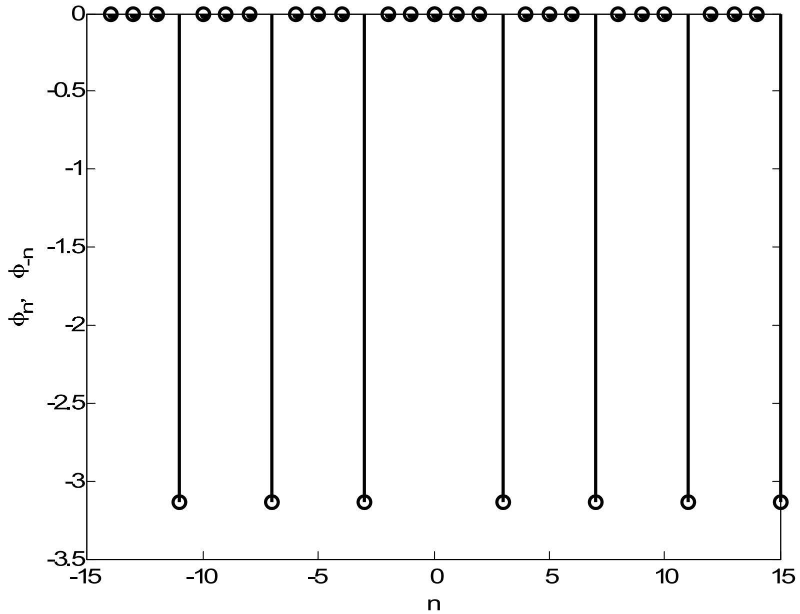




$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \begin{cases} 0 & n = 2,4,6,8,\cdots \\ \dfrac{1}{\pi n} & n = 1,3,5,7,\cdots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan(-b_n / a_n) = \begin{cases} 0 & n \neq 3,7,11,15,\cdots \\ -\pi & n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$





2.1.2 傅里叶积分定理

非周期性函数的展开问题，可由傅里叶积分定理得到。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi\alpha}\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi\alpha}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha}\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

间断点处 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

奇函数时，可得到傅里叶正弦积分公式：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}f(\alpha)\sin k\alpha\mathrm{d}\alpha\right]\sin kx\mathrm{d}k$$

偶函数时，可得到傅里叶余弦积分公式：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}f(\alpha)\cos k\alpha\mathrm{d}\alpha\right]\cos kx\mathrm{d}k$$

例：求函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的傅里叶积分表达式.

解：

$x\ne\pm1$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}(\cos k\alpha-\mathrm{i}\sin k\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{1}\cos k\alpha\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k}{k}(\cos k\alpha+\mathrm{i}\sin k\alpha)\mathrm{d}k=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\cos kx}{k}\mathrm{d}k\text{。}$$

$$f(x)=\frac{f(\pm1+0)+f(\pm1-0)}{2}=\frac{1}{2}\quad\longleftarrow\quad x=\pm1$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\cos kx}{k}\mathrm{d}k=\begin{cases}f(x) & x\ne\pm1\\ 1/2 & x=\pm1\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin k\cos kx}{k}\mathrm{d}k=\begin{cases}\pi/2 & |x|<1\\ \pi/4 & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin k}{k}\mathrm{d}k=\frac{\pi}{2}$$

3.1.3 傅里叶变换

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad F(\xi)=F\{f(x)\}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}\xi \quad \longleftrightarrow \quad f(x)=F^{-1}\{F(\xi)\}$$

$$\boxed{f(x)\leftrightarrow F(\xi)}$$

$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

傅里叶正弦变换

$$F_s(k)=\int_0^{\infty} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_s(k)\sin kx\mathrm{d}k$$

傅里叶余弦变换

$$F_c(k)=\int_0^{\infty} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(k)\cos kx\mathrm{d}k$$

$$F(\xi)=|F(\xi)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\xi)}$$

幅角，相位频谱函数

模，振幅频谱函数

例：求一般形式高斯函数 $f(x)=h\mathrm{e}^{-bx^2}$ 的傅里叶变换．

解：

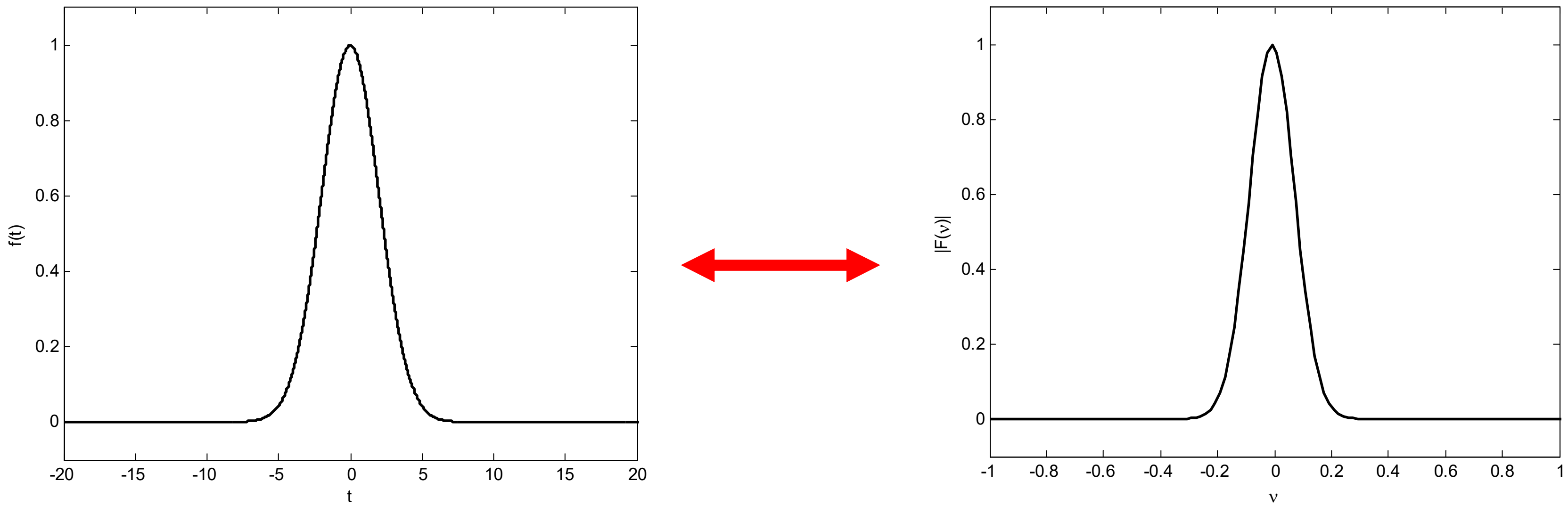
$$F(\xi)=F\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}h\mathrm{e}^{-bx^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x=h\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-b(x^2+\mathrm{i}2\pi\xi x/b)}\mathrm{d}x$$

$$=h\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{b}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-b(x+\mathrm{i}\pi\xi/b)^2}\mathrm{d}x=h\sqrt{\frac{\pi}{b}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{b}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-b(x+\mathrm{i}\pi\xi/b)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

高斯函数的傅里叶变换，仍然是一个高斯函数。特别地：

$$F(\xi)=F\{\mathrm{Gaus}(x,a)\}=F\{\mathrm{e}^{-\pi x^2}\}=\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$$



例：线性调频信号(**chirp signal**)或编码脉冲信号可用函数 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi x^2}$ 表示，求该函数的傅里叶变换 .

解：

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm\pi x^2-2\pi\xi x)}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm(\sqrt{\pi}x)^2-2\pi\xi x\pm(\sqrt{\pi}\xi)^2)}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\xi^2}\mathrm{d}x$$

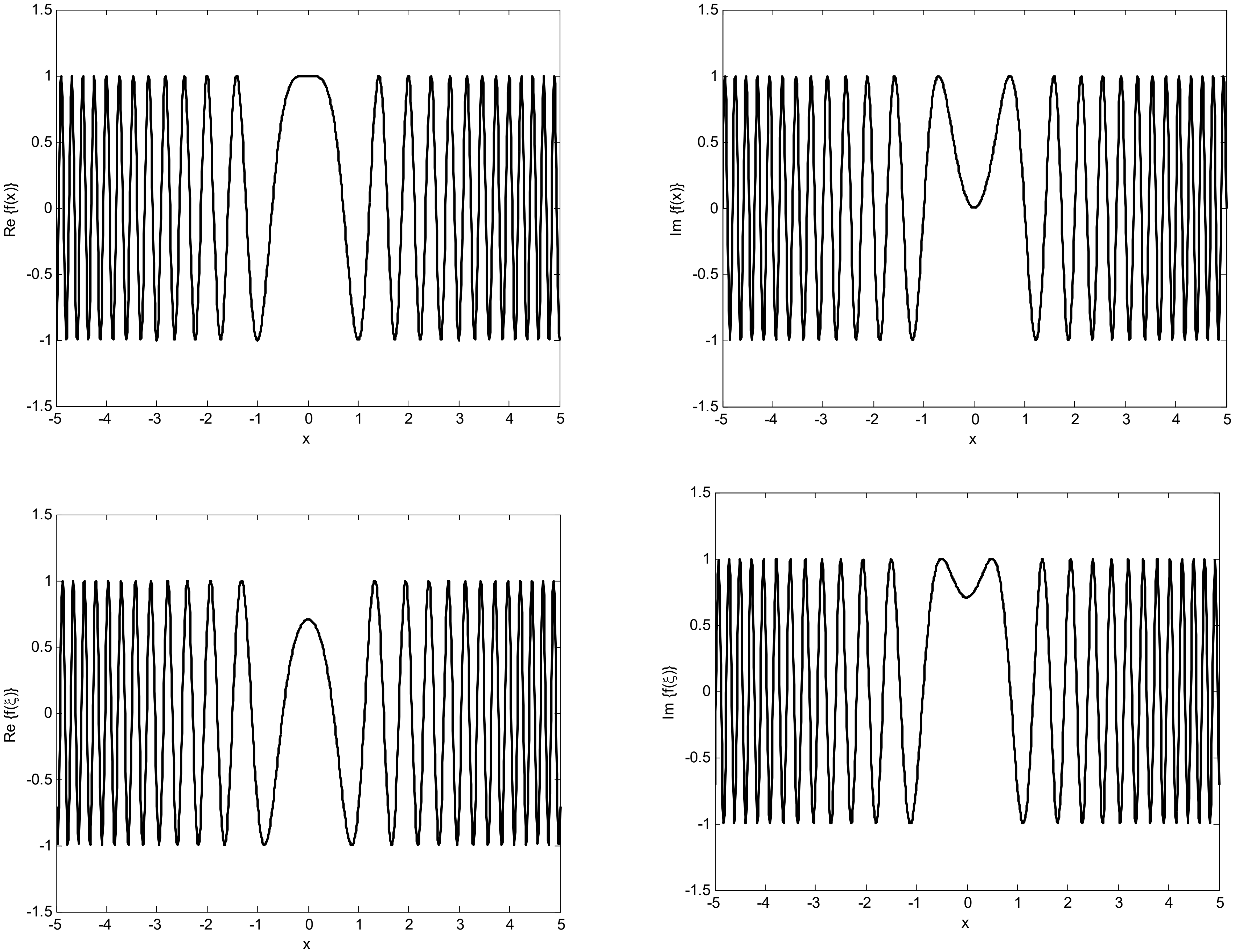
$$=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi((x-\xi)^2}\mathrm{d}x$$

$$\alpha=\sqrt{x}(x-\xi)$$

$$\int_0^{\infty}\cos\alpha^2\mathrm{d}\alpha=\int_0^{\infty}\sin\alpha^2\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$F(\xi)=\frac{\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\xi^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha^2}\mathrm{d}\alpha=\frac{2\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\xi^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha^2}\mathrm{d}\alpha$$

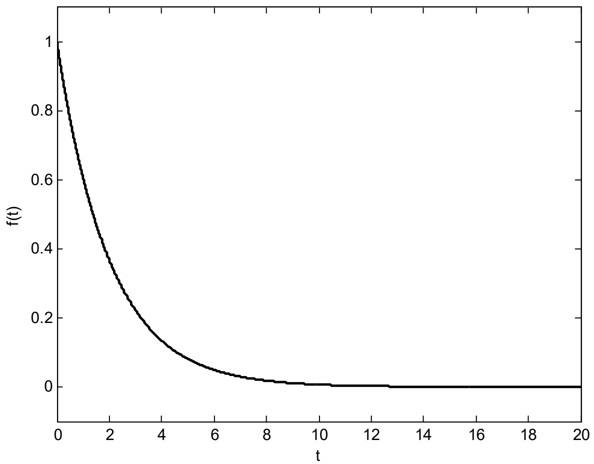
$$=\frac{2\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\xi^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(\cos\alpha^2\pm\mathrm{i}\sin\alpha^2)\mathrm{d}\alpha=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi\xi^2}$$

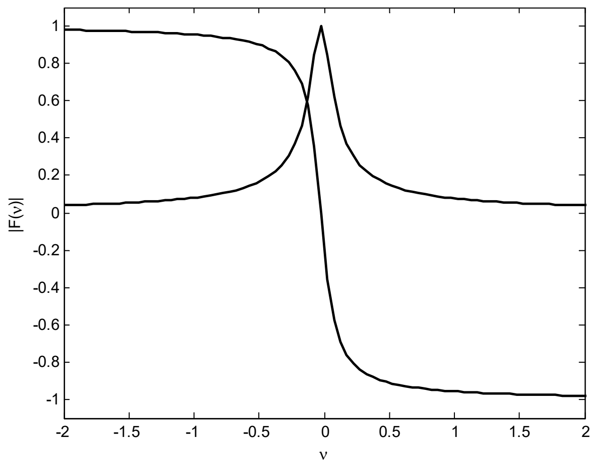

Re {f(x)}
Im {f(x)}
Re {f(ξ)}
Im {f(ξ)}
x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

例：求指数衰减函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ 的傅里叶变换．

解：
$$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}e^{-ikx}dx=\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+ik)x}dx=\frac{1}{\alpha+ik}$$
$$=\frac{\alpha-ik}{\alpha^2+k^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}-i\frac{k}{\alpha^2+k^2}$$

$$|F(k)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+k^2}} \qquad \arg F(k)=-\arctan\frac{k}{\alpha}$$



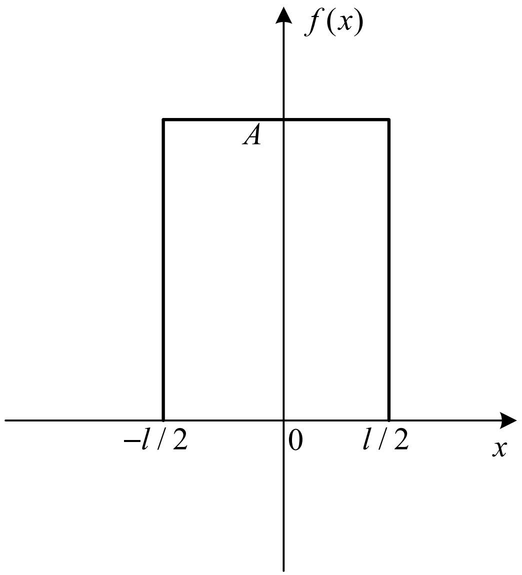


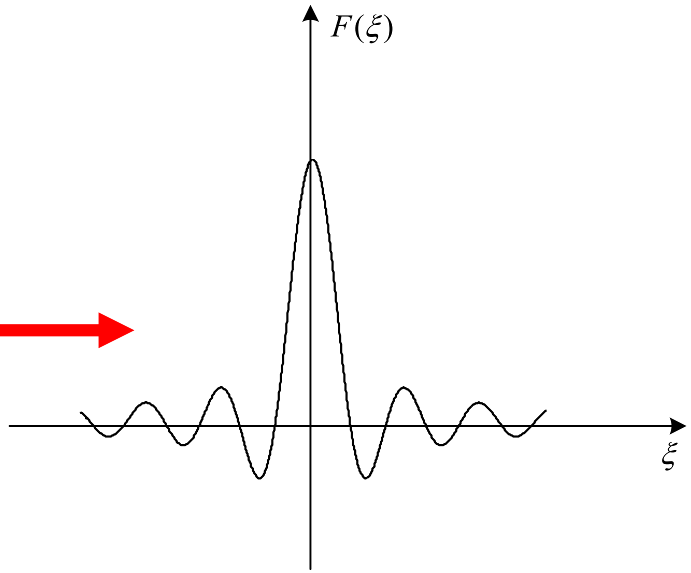
例：求矩阵函数 $f(x)=A\mathrm{rect}\left(\dfrac{x}{L/2}\right)$ 的傅里叶变换．

解：

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x = A\int_{-L/4}^{L/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x = \frac{A}{-\mathrm{i}2\pi\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\Big|_{-L/4}^{L/4}$$

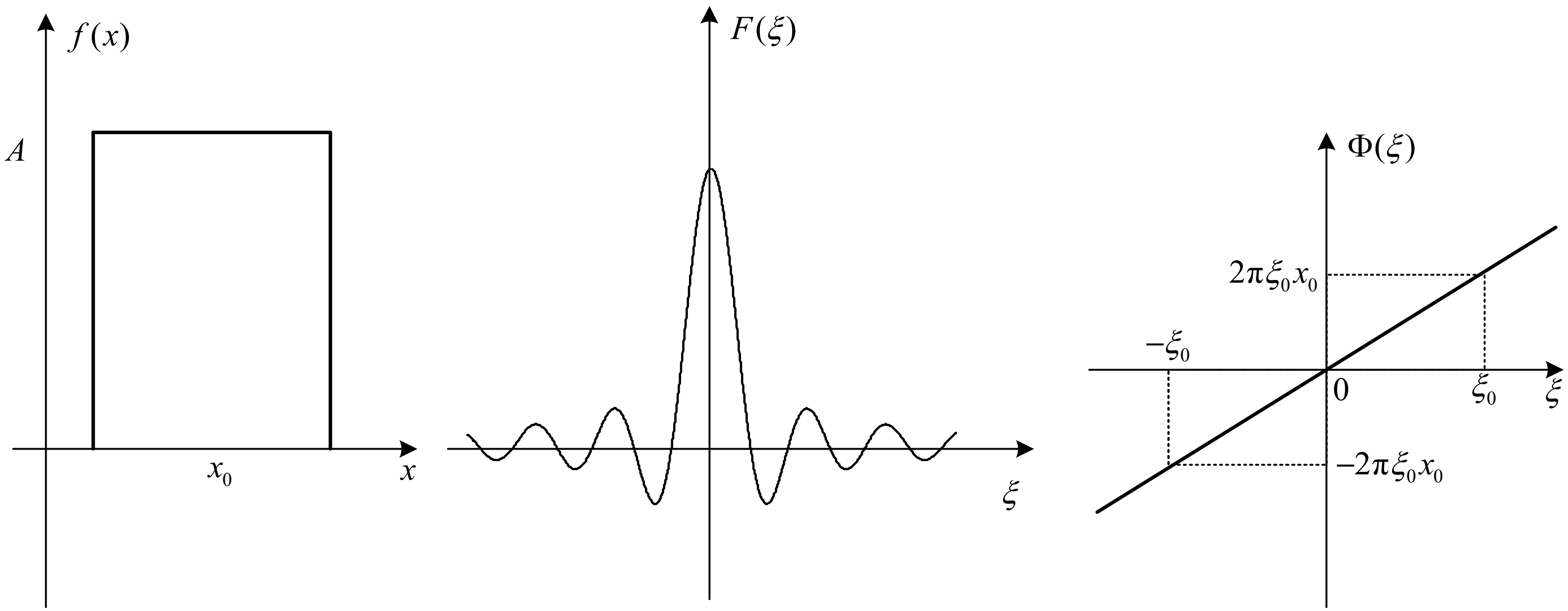
$$=\frac{A}{-\mathrm{i}2\pi\xi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi L/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\xi L/2}\right]=\frac{AL}{2}\frac{\sin(\pi\xi L/2)}{\pi\xi L/2}=\frac{AL}{2}\mathrm{sinc}(\pi\xi L/2)$$





$$f(x) = A\mathrm{rect}\left(\frac{x - x_0}{L/2}\right)$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x = \frac{AL}{2}\mathrm{sinc}(\pi\xi L/2)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu x_0}$$



例：求矩阵函数 $f(x)=\begin{cases}0 & x\geq 1\\ 1 & 0\leq x<1\end{cases}$ 的正弦和余弦傅里叶变换．

解：

矩形函数的正弦变换为：

$$F_s(k)=\int_0^\infty f(x)\sin kx\mathrm{d}x=\frac{1-\cos k}{k}$$

矩形函数的余正弦变换为：

$$F_c(k)=\int_0^\infty f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{\sin k}{k}$$

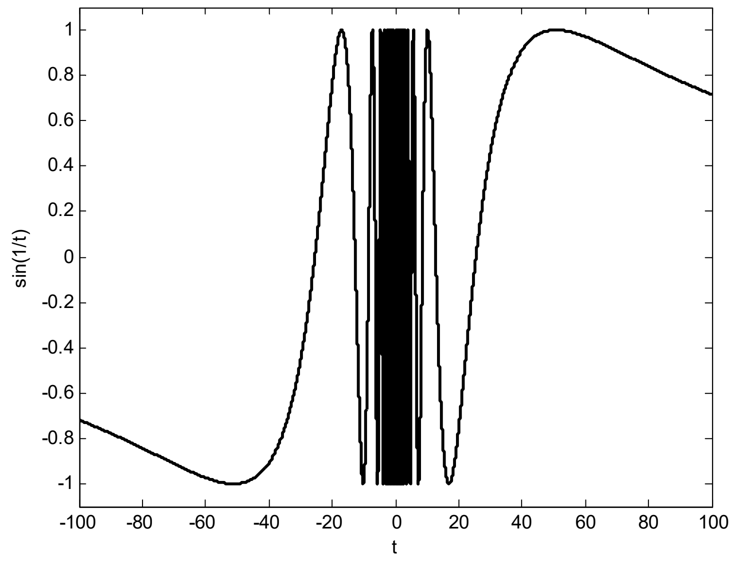
2.1.4 极限情况下的傅里叶变换

傅里叶变换存在是要一定条件的，但这种要求通常不是严格的。例如，当被变换的函数是一个物理量的精确描述时，变换的存在性问题确实可以忽略。物理可实现性是变换存在的一个有效的充分条件。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$F_n(\xi)=F\{f_n(x)\}$$

$$F\{f(x)\}=\lim_{n\to\infty} F\{f_n(x)\}$$



例：求符号函数 **sgn(*x*)** 傅里叶变换 .

解：

$$f_n(x)=\begin{cases} e^{-x/n} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -e^{x/n} & x<0 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn}(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} +1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$F\{f_n(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-i2\pi\xi x}dx=-\int_{-\infty}^{0} e^{x/n}e^{-i2\pi\xi x}dx+\int_{0}^{\infty} e^{-x/n}e^{-i2\pi\xi x}dx=\frac{-i4\pi\xi}{\frac{1}{n^2}+(2\pi\xi)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$F\{\operatorname{sgn}(x)\}=\lim_{n\to\infty} F\{f_n(x)\}=\begin{cases} \dfrac{1}{i\pi\xi} & \xi\neq 0 \\ 0 & \xi=0 \end{cases}$$

2.1.5 δ函数的傅里叶变换

δ函数本身就是一个广义函数，显然，狭义傅里叶变换的概念是不适用的，我们可以用上面广义傅里叶变换的定义及方法来求δ函数的傅里叶变换。

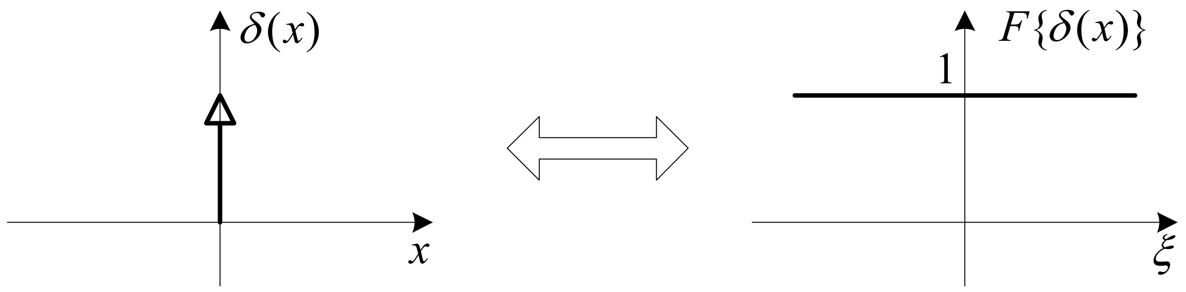
$$f_n(x) = n\mathrm{e}^{-\pi(nx)^2} \longrightarrow \delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\{n\mathrm{e}^{-\pi(nx)^2}\}$$

$$F_n(\xi) = F\{f_n(x)\} = n\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi(nx)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x = n\mathrm{e}^{-\pi\xi^2/n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-[\sqrt{\pi}nx+\mathrm{i}\sqrt{\pi}\xi/n]^2}\mathrm{d}x$$

$$\downarrow$$

$$F\{\delta(x)\} = \lim_{n\to\infty} F\{f_n(x)\} = 1$$

$$F\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x = \delta(\xi) \longleftarrow \text{逆变换}$$



用上述方法，可以求得其他一些非初等函数的广义傅里叶变换。例如，阶跃函数**step(*x*)**可根据其与符号函数的关系式来求得其傅里叶变换，即：

$$F\{\mathrm{step}(x)\} = \frac{1}{2} F\{1 + \mathrm{sgn}(x)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(\xi) - \frac{\mathrm{i}}{\pi\xi}\right]$$

例：求梳状函数的傅里叶变换.

解：
$$\operatorname{comb}\left(\frac{x}{a}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{a}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[\frac{1}{a}-(x-na)\right]=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)$$

所以，**comb(*x*/*a*)**是周期为***a***的周期函数，可将其展开成傅里叶级数，即有：

$$\operatorname{comb}(x/a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i2\pi nx/a}\qquad c_0=1, c_n=1$$

$$c_0=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\mathrm{d}t=\int_{-a/2}^{a/2}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

$$c_n=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)e^{-i2\pi nx/a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)e^{-i2\pi nx/a}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-a/2}^{a/2}\delta(x)e^{-i2\pi nx/a}\mathrm{d}x=1$$

这样，梳状函数的傅里叶变换为：

$$F\{\mathrm{comb}(x/a)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/a}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx/a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left\{\xi - \frac{n}{a}\right\}$$

$$= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(a\xi - n) = a\,\mathrm{comb}(a\xi)$$

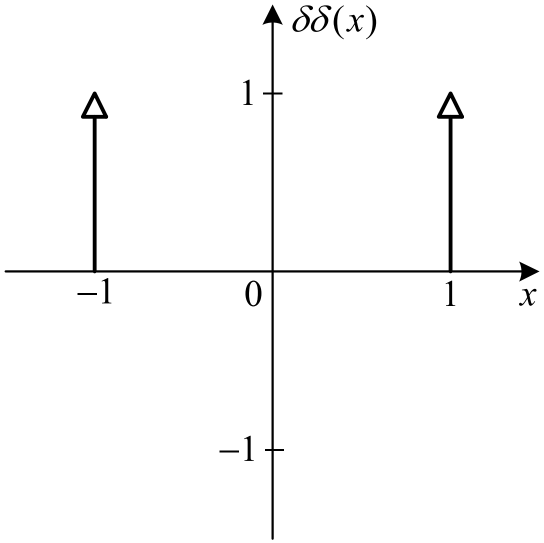
$$F\{\mathrm{comb}(x)\} = \mathrm{comb}(\xi) \longleftarrow \quad a = 1$$

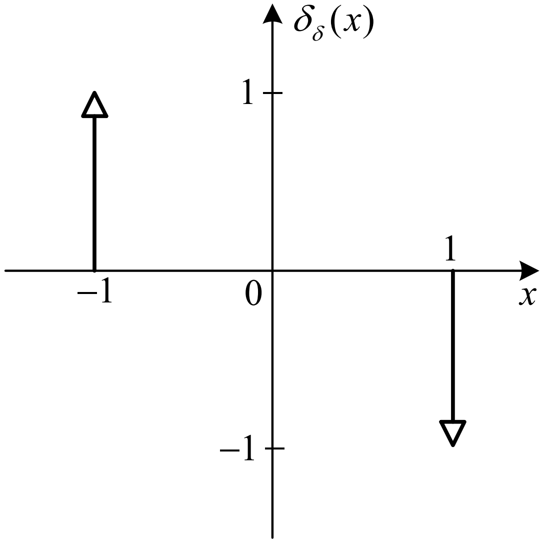
例：求偶脉冲对和奇脉冲对的傅里叶变换．

解：

$$\delta\delta(x) = II(x) = \delta(x+1) + \delta(x-1)$$ ← 偶脉冲对

$$\delta_{\delta}(x) = I_{I}(x) = \delta(x+1) - \delta(x-1)$$ ← 奇脉冲对

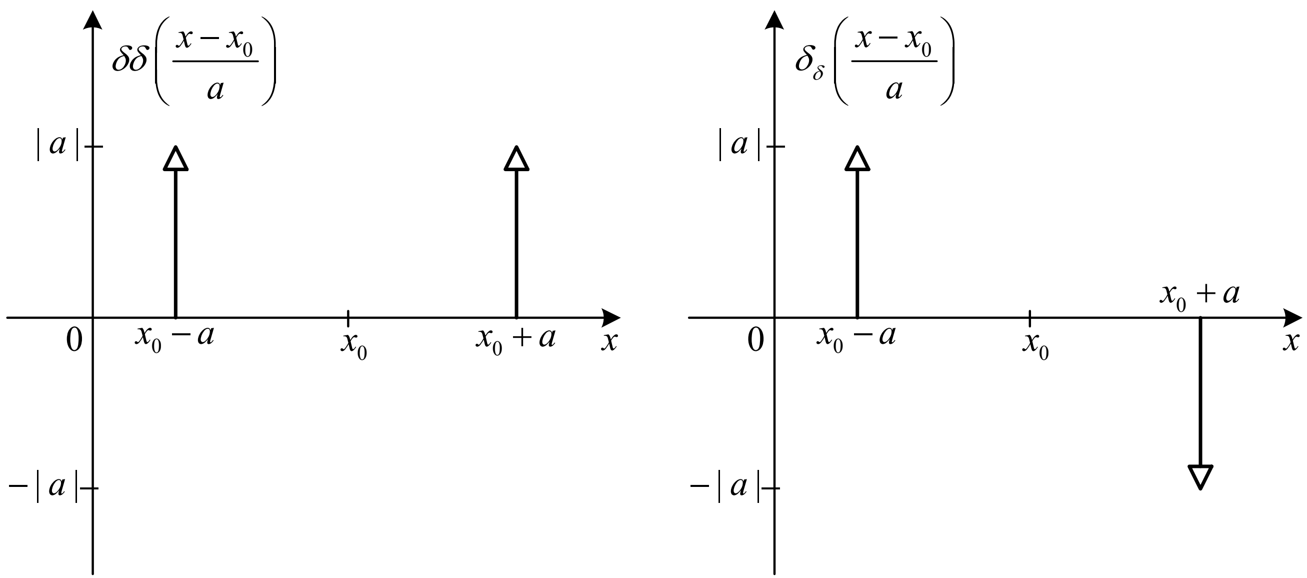




偶、奇脉冲对可以沿x轴位移和缩放，这时它们的表达式为

$$\delta\delta\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=|a|[\delta(x-x_0+a)+\delta(x-x_0-a)]$$

$$\delta_\delta\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=|a|[\delta(x-x_0+a)-\delta(x-x_0-a)]$$



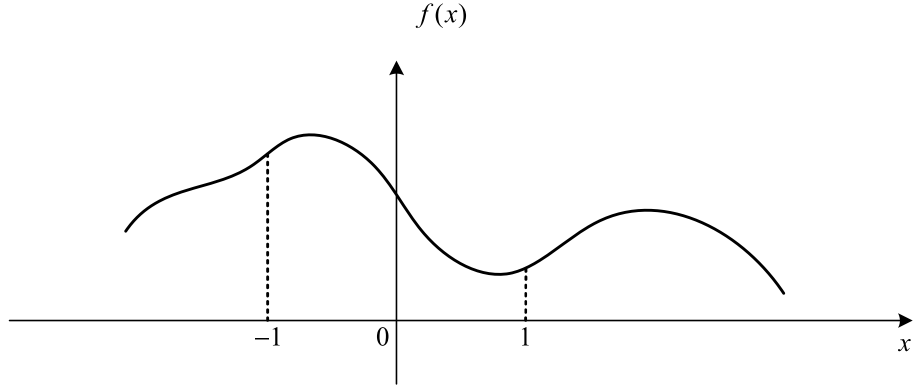
偶、奇脉冲对可以用来表示天空的双星、两个分开一定距离的点光源偶、奇脉冲对是由两个δ函数的和与差构成的。因此，由 δ函数的定义和性质，不难得到偶、奇脉冲对的一些性质，如筛选性质、乘积性质和复制性质等。如：偶脉冲对是偶函数，奇脉冲对是奇函数，即：

$$\delta\delta(x)=\delta\delta(-x) \qquad \delta_{\delta}(x)=-\delta_{\delta}(-x)$$

脉冲可用于一个函数在两个地方的抽样，即“筛选”出它在两点的值：

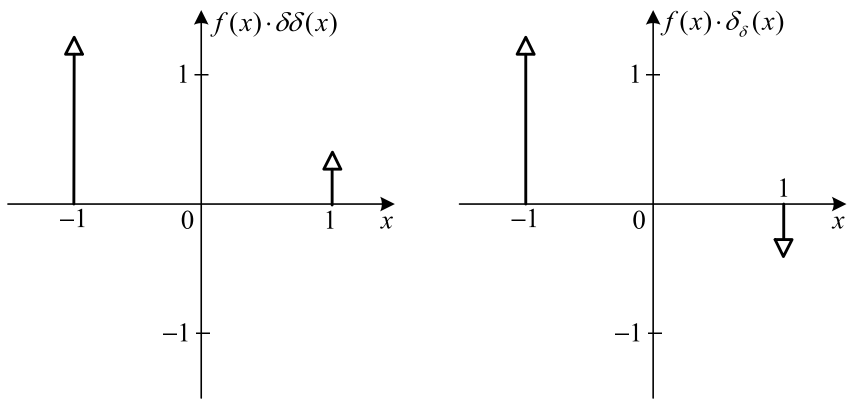
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\delta\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=|a|[f(x_0-a)+f(x_0+a)]$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\delta}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=|a|[f(x_0-a)-f(x_0+a)]$$



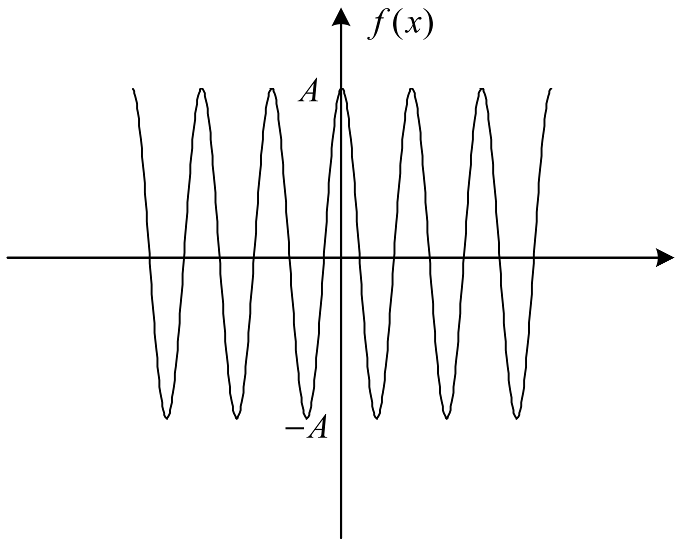
偶、奇脉冲对傅里叶变换，可以从傅里叶变换的定义来求得，如对偶脉冲对有

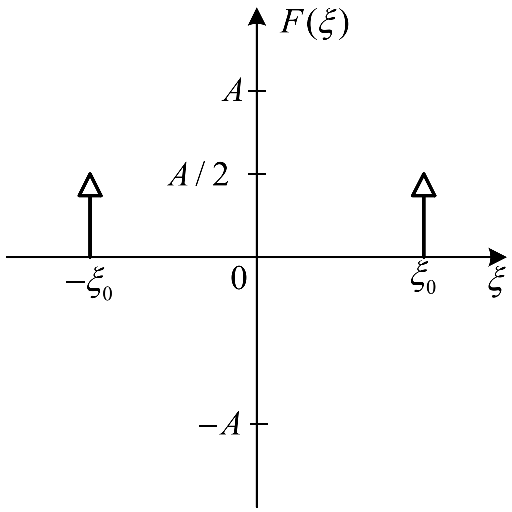
$$F\{\delta\delta(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}=2\cos 2\pi\xi$$

$$\delta\delta(x)\leftrightarrow 2\cos 2\pi\xi \qquad \delta_{\delta}(x)\leftrightarrow \mathrm{i}2\sin 2\pi\xi$$

$$F\{\cos(2\pi\xi_0 x)\}=\frac{A}{2\xi_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}(\xi_0 x)$$

$$=\frac{A}{2}\left[\delta\left(\xi+\xi_0\right)+\delta\left(\xi-\xi_0\right)\right]=\frac{A}{2\xi_0}\delta\delta(\xi/\xi_0)。$$



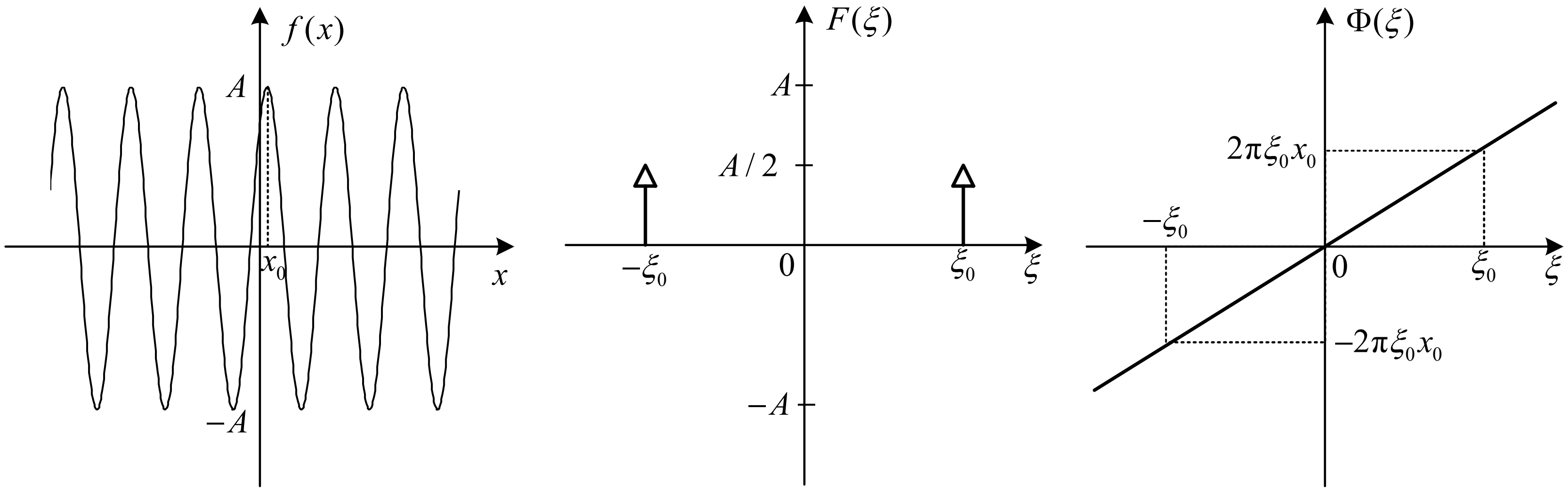


如果这个函数作一个平移，则相位谱就不再为零。平移后的余弦函数为：

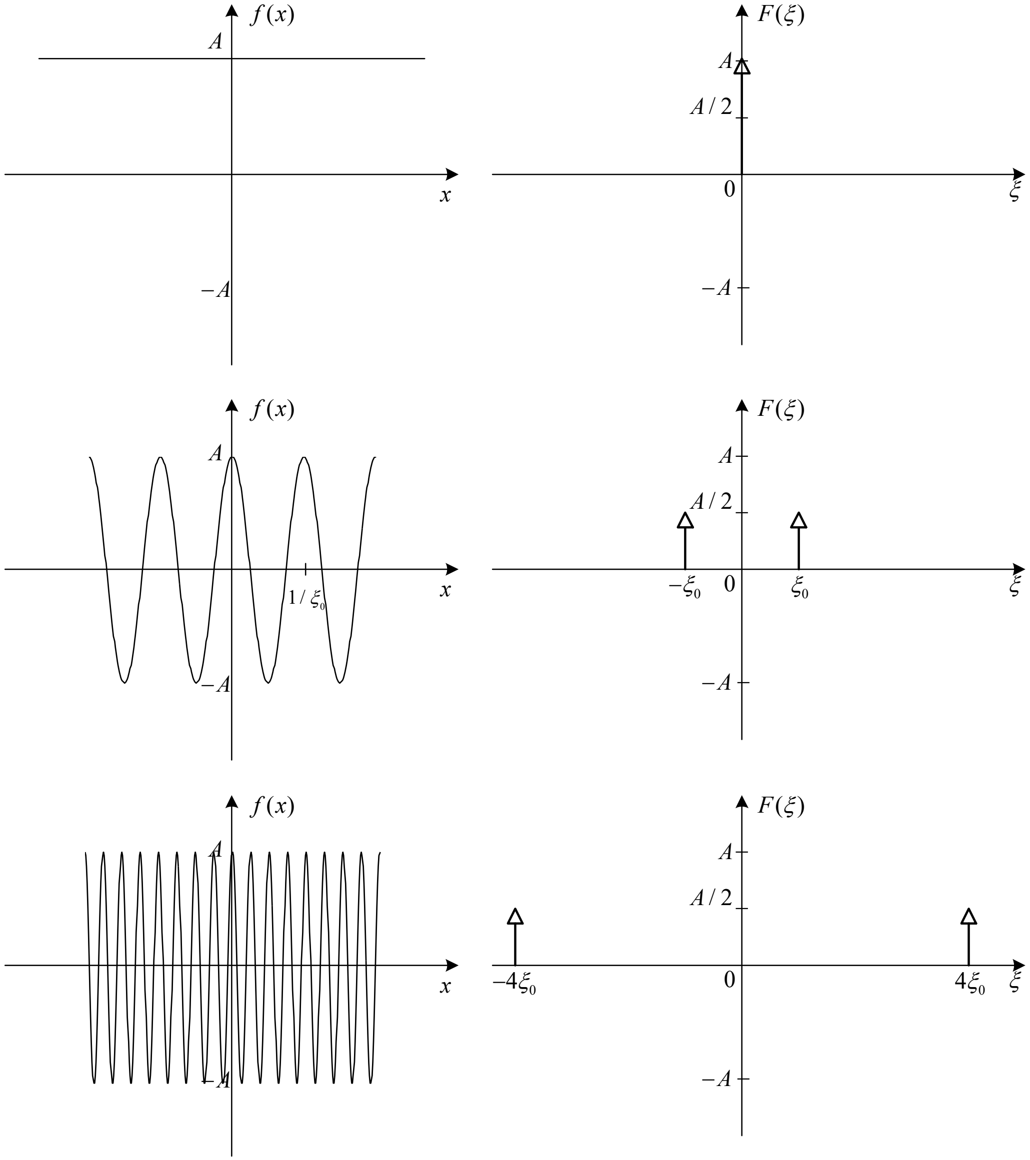
$$f(x) = A\cos(2\pi\xi_0 x - \phi_0) = A\cos 2\pi\xi_0 (x - x_0)$$

$$F\{\cos[2\pi\xi_0(x-x_0)]\} = \frac{A}{2}\left[\delta\left(\xi+\xi_0\right)+\delta\left(\xi-\xi_0\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x_0}$$

$$= \frac{A}{2\xi_0}\delta\delta(\xi/\xi_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x_0}$$。



余弦函数的频率越高，它的频谱沿ξ轴延伸的越远，反之，频率越低，频谱也变得越窄，对于零频的情况，频谱只是一个位于原点的 δ函数。

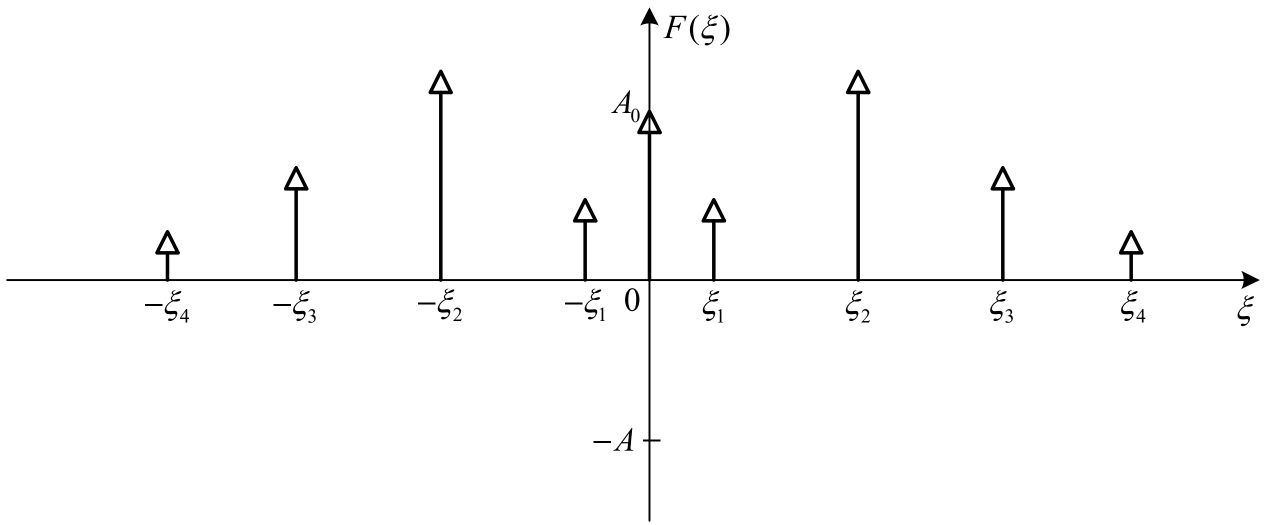


几个不同频率余弦函数之和的傅里叶变换

$$f(x)=A_0+A_1\cos(2\pi\xi_1 x)+A_2\cos(2\pi\xi_2 x)+A_3\cos(2\pi\xi_3 x)+A_4\cos(2\pi\xi_4 x)$$

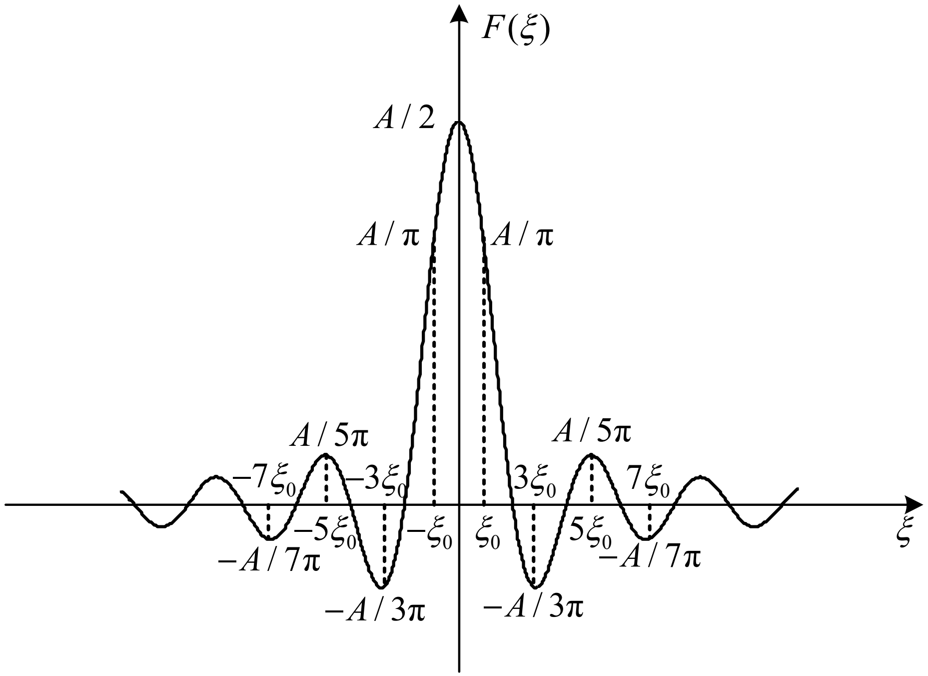
$$F(\xi)=A_0\delta(\xi)+\frac{A_1}{2\nu_1}\delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)+\frac{A_2}{2\xi_2}\delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_2}\right)+\frac{A_3}{2\xi_3}\delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_3}\right)+\frac{A_4}{2\xi_4}\delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_4}\right)$$

仅包含慢变分量的函数具有窄频谱，而具有快变分量的函数其频谱的全宽度也宽。



例：求周期为**L**的矩形脉冲序列的傅里叶变换.

解：
$$F(\xi)=\frac{A}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\nu}{2\xi_0}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-n\xi_0)=\frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\delta(\xi-n\xi_0)$$



从振幅谱中可以看出，其频率含有基频及其奇次谐频成份。因而，可以想到，原函数f (x) 可以展开含有这些频率成份的函数。如：

$$f(x)=\frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\xi_0 x}=\frac{A}{2}+\frac{A}{\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\right]$$

$$-\frac{A}{3\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(3\xi_0)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(3\xi_0)x}\right]+\frac{A}{5\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(5\xi_0)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(5\xi_0)x}\right]-\frac{A}{7\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(7\xi_0)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(7\xi_0)x}\right]+\cdots$$

$$=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left[\cos 2\pi\xi_0 x-\frac{1}{3}\cos 2\pi(3\xi_0)x+\frac{1}{5}\cos 2\pi(5\xi_0)x-\frac{1}{7}\cos 2\pi(7\xi_0)x+\cdots\right]$$

显然，上述函数是如下复值函数的实部，

$$h(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(3\xi_0)x}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(5\xi_0)x}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(7\xi_0)x}+\cdots\right]$$

从复值函数来理解，**f(x)**在任意位置的值由把**h(x)**的相矢量分量加在一起然后把所得的和投影在实数轴上来确定。

如前面看到的一样，平移对频谱是会产生影响的。如上述函数沿正方向移动了1/4周期

$$F(\xi)=\frac{A}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_0}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi\nu/2\xi_0)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-n\xi_0)$$

$$=\frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(n/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi\nu/2\xi_0)}\delta(\xi-n\xi_0)$$

。

其振幅谱和相位谱

$$A(\xi)=\frac{A}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_0}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-n\xi_0) \qquad \Phi(\xi)=\frac{\pi\xi}{2\xi_0}$$

由上可见，平移后的振幅谱没有变换，而相位谱不再是零，每一谐频分量的相位都发生了移动。所移动的量正比于它的频率，而这就引起了所有分量都在时间上移动一个相当的量。

2.1.6 常用一维函数傅里叶对

1. δ 函数

$$F\{\delta(x)\}=1 \quad F\{a\delta(x)\}=a \qquad F\{\delta(x\pm x_0)\}=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi x_0\xi}$$

2. 常数

$$F\{a\}=a\delta(\xi)$$

3. 矩阵函数

$$F\{\mathrm{rect}(x)\}=\mathrm{sinc}\xi$$

$$F\left\{h\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\right\}=ha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x_0\xi}\cdot\mathrm{sinc}(a\xi)$$

$$F\left\{\sum_i h_i\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_{0i}}{a_i}\right)\right\}=\sum_i h_i a_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x_{0i}\xi}\cdot\mathrm{sinc}(a_i\xi)$$

4. sinc函数

$$F\{\mathrm{sinc}(x)\}=\mathrm{rect}(\xi)$$

5. 三角函数

$$F\{\mathrm{tri}(x)\}=\mathrm{sinc}^2(\xi)$$

6. 符号函数

$$F\{\mathrm{sgn}(x)\}=\frac{1}{\mathrm{i}\pi\xi}$$

7. 阶跃函数

$$F\{\mathrm{step}(x)\}=\frac{1}{2}\delta(\xi)+\frac{1}{\mathrm{i}2\pi\xi}$$

8. 斜坡函数

$$F\{\mathrm{R}(x)\}=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{i}}{\xi}\delta(\xi)+\frac{1}{\pi\xi^{2}}\right]$$

9. 指数函数

$$F\{\mathrm{e}^{-|x|}\}=\frac{2}{1+(2\pi\xi)^{2}}$$

10. x^k函数

$$F\{x^{k}\}=\left(\frac{-1}{\mathrm{i}2\pi}\right)^{k}\delta^{(k)}(\xi)$$

11. $e^{\pm i2\pi x^2}$ 函数

$$F\{e^{\pm i2\pi x^2}\} = e^{\pm i\pi/4} e^{\mp i\pi\xi^2}$$

12. 复指数函数

$$F\{e^{\pm i2\pi\xi_0 x}\} = \delta(\xi \mp \xi_0)$$

13. 余弦函数

$$F\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = \frac{1}{2}[\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi + \xi_0)] = \frac{1}{2|\xi_0|}\delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$$

14. 正弦函数

$$F\{\sin(2\pi\xi_0 x)\} = \frac{1}{2i}[\delta(\xi - \xi_0) - \delta(\xi + \xi_0)] = \frac{i}{2|\xi_0|}\delta_\delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$$

15. 梳状函数

$$F\{\mathrm{comb}(x)\}=\mathrm{comb}(\xi)$$

16. 高斯函数

$$F\{\mathrm{Gaus}(x)\}=\mathrm{Gaus}(\xi)$$

17. 双曲正割函数

$$F\{\mathrm{sech}(\pi x)\}=\mathrm{sech}(\pi\xi)$$

18. 平方根的倒数函数

$$F\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

原函数与傅里叶变换后的函数形式是一样的

2.2 二维函数的傅里叶变换

2.2.1 二维函数傅里叶变换的定义

2.2.2 极坐标中的二维傅里叶变换

2.2.3 常用二维函数傅里叶变换对

2.2.1 二维函数的傅里叶变换的定义

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \longleftrightarrow f(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

象原函数　　原函数

$$\xi,\eta \longleftrightarrow x,y$$

空间频率　　空间坐标

$$F(\xi,\eta)=\left|F(\xi,\eta)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\xi,\eta)}$$

幅角，傅里叶变换相位谱

傅里叶变换谱

模，傅里叶变换振幅谱

$$\left|F(\xi,\eta)\right|^2$$

傅里叶变换功率谱

$$\iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\begin{cases} f(x,y) \\ \dfrac{1}{2}\left[f(x-0,y-0)+f(x+0,y+0)\right] \end{cases}$$

有间断点时

从应用傅里叶变换的各个领域中的大量事实证明，作为空间函数而实际存在的物理量，总具有保证其傅里叶变换存在的基本条件。可以说，物理上的可能就是傅里叶变换存在的有力充分条件。这可以参看出2.1.3节极限条件下的傅里叶变换中的有关论述。对一维函数傅里叶变换的推广的定义与方法，同样适用于二维函数的傅里叶变换。

2.2.2 极坐标系的二维傅里叶变换

1. 极坐标中的二维傅里叶变换

空间坐标： $x-y \longleftrightarrow (r,\varphi)$

笛卡尔坐标　　极坐标

空间频率： $\xi-\eta \longleftrightarrow (\rho,\phi)$

笛卡尔坐标　　极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \rho\cos\phi \\ \eta = \rho\sin\phi \\ \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \\ \phi = \arctan\dfrac{\xi}{\eta} \\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi r\rho\cos(\varphi-\phi)}$$

$$f(x,y)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=g(r,\varphi)$$

$$F(\xi,\eta)=F(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)=G(\rho,\phi)$$

$$G(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}rg(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi r\rho\cos(\varphi-\phi)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$g(r,\varphi)=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho G(\rho,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi r\rho\cos(\varphi-\phi)}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$$

2. 可分离变量函数的变换

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y) \longleftrightarrow F(\xi,\eta)=F_\xi(\xi)F_\eta(\eta)$$

$$g(r,\theta)=g_r(r)g_\varphi(\varphi) \longleftrightarrow \begin{aligned} G(\rho,\phi) &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} rg_r(r)g_\varphi(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi r\rho\cos(\varphi-\phi)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^\infty rg_r(r)\left\{\int_0^{2\pi} g_\varphi(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi r\rho\cos(\varphi-\phi)}\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}r \end{aligned}$$

由贝塞尔函数关系式： $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ $\quad \mathrm{J}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{J}_n(x)$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi r\rho\cos(\varphi-\phi)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(-2\pi\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\varphi-\phi)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\mathrm{J}_n(2\pi\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\varphi-\phi)}$$

$$F\{g(r,\theta)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-\mathrm{i})^n c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\mathrm{H}_n\{g_r(r)\} \qquad \mathrm{H}_n\{g_r(r)\}=2\pi\int_0^{2\pi} rg_r(r)\mathrm{J}_n(2\pi r\rho)\mathrm{d}r$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\theta(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta$$

n阶第三类贝塞尔函数，也称为汉开尔函数

3. 圆对称函数的傅里叶-贝塞尔变换

圆对称函数是在极坐标系中可分离变量函数的一类函数。由于许多光学系统都具有圆对称性，因而圆对称函数在信息光学中具有重要的应用。圆对称函数在极坐标系中只有一个变量，即半径***r***， 可表示为

$$g(r,\varphi)=g_r(r), \qquad g_\varphi(\varphi)=1$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

傅里叶－贝塞尔变换

$$G_0(\rho)=F\{g_r(r)\}=B\{g_r(r)\}=\mathrm{H}_0\{g_r(r)\}=2\pi\int_0^\infty rg_r(r)\mathrm{J}_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r$$

$$g_r(r)=F^{-1}\{G_0(\rho)\}=B^{-1}\{G_0(\rho)\}=2\pi\int_0^\infty \rho G_0(\rho)\mathrm{J}_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}\rho$$

傅里叶变换后得到的结果不再依赖角度φ，仅是半径 ρ的函数，而且，通过计算式 **(2.2.22)**可得其结果也是圆对称的，所以圆对称函数的傅里叶变换也是圆对称的。由于这变换经常用到，又与贝塞尔函数有关，所以常被称为傅里叶-贝塞尔变换 **(Fourier - Bessel transform)**，用符号 **B{ }**表示。傅里叶变换中的所有性质在傅里叶－贝塞尔变换中都有着完全对应的性质 。如：

$$BB^{-1}\{g_r(r)\} = B^{-1}B\{g_r(r)\} = g_r(r)$$

由缩放与反演定理可直接证明：

$$B\{g_r(ar)\} = \frac{1}{a^2}G_0\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

例：求圆域函数 $g_r(r)=\mathrm{circ}(r/a)$ 的傅里叶-贝塞尔变换.

解：
$$G_0(\rho)=B\{g_r(r)\}=2\pi\int_0^a r\mathrm{J}_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r$$

极坐标系中

$$r'=2\pi r\rho$$

$$B\{g_r(r)\}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi a\rho} r'\mathrm{J}_0(r')\mathrm{d}r'=\frac{a\mathrm{J}_1(2\pi a\rho)}{\rho}=(\pi a^2)\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi a\rho)}{(2\pi a\rho)}$$

$$G_0(\xi,\eta)=(\pi a^2)\frac{2\mathrm{J}_1(2\pi a\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{(2\pi a\sqrt{\xi^2+\eta^2})}$$

直角坐标系中

在讨论圆孔的夫琅和费衍射和光学系统分辨本领时都会用到圆域函数的傅里叶–贝塞尔变换。

2.2.3 常用二维函数傅里叶变换对

$$1 \leftrightarrow \delta(\xi,\eta)$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(ax+by)} \leftrightarrow \delta(\xi-a,\eta-b)$$

$$\delta(x-x_0,y-y_0) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)}$$

$$\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y) \leftrightarrow \mathrm{sinc}(\xi)\mathrm{sinc}(\eta)$$

$$\mathrm{tri}(x)\mathrm{tri}(y) \leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(\xi)\mathrm{sinc}^2(\eta)$$

$$\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y) \leftrightarrow \mathrm{comb}(\xi)\mathrm{comb}(\eta)$$

$$\mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)} \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\pi(\xi^2+\eta^2)}$$

$$\mathrm{circ}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \leftrightarrow \frac{\mathrm{J}_1\left(2\pi\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

$$\mathrm{sgn}(x)\,\mathrm{sgn}(y) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{i}\pi\xi}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}\pi\eta}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(x^2+y^2)} \leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(\xi^2+\eta^2)}$$

2.3 傅里叶变换的性质

2.3.1 傅里叶变换的基本性质

2.3.2 虚、实、奇和偶函数的傅里叶变换

2.3.1 傅里叶变换的基本性质

$$f(x,y) \leftrightarrow F(\xi,\eta) \qquad g(x,y) \leftrightarrow G(\xi,\eta) \qquad h(x,y) \leftrightarrow H(\xi,\eta)$$

1. 线性性质

$$F\{af(x,y)+bg(x,y)\} = aF(\xi,\mu)+bG(\xi,\eta)$$

2. 反演(翻转)性质

$$F\{f(-x,-y)\} = F(-\xi,-\eta)$$

3. 对称性质

$$F\{F(-x,-y)\} = f(\xi,\eta)$$

4. 迭次傅里叶变换

$$F\{F\{f(x,y)\}\} = F^{-1}\{F^{-1}\{f(x,y)\}\} = f(-x,-y)$$

$$F\{F^{-1}\{f(x,y)\}\} = F^{-1}\{F\{f(x,y)\}\} = f(x,y)$$

5. 坐标缩放性质

$$F\{f(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)$$

6. 平移性质

$$F\{f(x\pm x_0, y\pm y_0)\} = F(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)}$$

$$F^{-1}\{F(\xi\pm\xi_0,\eta\pm\eta_0)\} = f(x,y)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}$$

$$F\{f(x,y)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}\} = F(\xi\pm\xi_0,\eta\pm\eta_0)$$

7. 复共轭函数的傅里叶变换

$$F\{f^*(x,y)\} = F^*(-\xi,-\eta) \quad F^{-1}\{F^*(\xi,\eta)\} = f^*(x,y) \quad F(\xi,\eta) = F^*(-\xi,-\eta)$$

2.3.2 虚、实、奇和偶函数的傅里叶变换

复函数的傅里叶变换可以改写成：

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cos[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{i}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\sin[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令： $f(x,y)=f_R(x,y)+\mathrm{i}f_I(x,y)$

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f_R(x,y)\cos[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{-\infty}^{\infty} f_I(x,y)\sin[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

$$+\mathrm{i}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f_I(x,y)\cos[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{-\infty}^{\infty} f_R(x,y)\sin[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

$$=F_R(\xi,\eta)+\mathrm{i}F_I(\xi,\eta)$$

1. 实函数

$$F_R(\xi,\eta)=F_R(-\xi,-\eta) \qquad F_I(\xi,\eta)=-F_I(-\xi,-\eta)$$

2. 实偶函数

$$F(\xi,\eta)=2\int\int_0^\infty f(x,y)\cos[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y)=2\int\int_0^\infty F(\xi,\eta)\cos[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

3. 实奇函数

$$F(\xi,\eta)=-2\mathrm{i}\int\int_0^\infty f(x,y)\sin[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y)=2\mathrm{i}\int\int_0^\infty F_s(\xi,\eta)\sin[2\pi(\xi x+\eta y)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

2.4 傅里叶变换的MATLAB实现

2.4.1 符号傅里叶变换

2.4.2 傅里叶变换的数值计算

由于傅里叶变换就是以时间(或空间)为变量的“信号”与以频率为变量的“频谱”函数之间的一种变换关系，当变量时间(或空间)和频率取连续值或离散值时，就形成不同形式的傅里叶变换对。前面讨论的都是变量取连续值的情况，即连续时间(或空间)、连续频率的傅里叶变换对。另外还有离散时间 (或空间)、连续频率的序列傅里叶变换对和离散时间 (或空间)、离散频率的离散傅里叶变换对。

要在计算机上实现傅里叶变换的各种运算，其所涉及到的变量都是离散的。上面提到的三种傅里叶变换对中，时 (空) 域或频域只要有一个是连续的，就不可能在计算机上进行运算和实现。因此，在计算机上的数值计算只能处理离散傅里叶变换(DFT，discrete Fourier transform)。

2.4.1 符号傅里叶变换

用MATLAB实现符号傅里叶变换有两种方法：一是用函数fourier( )和ifourier( )；二是根据式(2.1.20)和式(2.1.22)定义，用积分函数int( )实现。这里介绍第一种方法，第二种方法读者可参看有关MATLAB使用的书籍。

傅里叶逆变换：

格式1：Fw=fourier(fx)

格式1：Fw=fourier(fx,v)

格式3：Fw=fourier(fx, u, v)

傅里叶逆变换：

格式1：fx = ifourier(Fw)

格式2：fx = ifourier(Fw, v)

格式3：fx = ifourier(Fw, u,v)

2.4.2 傅里叶变换的数值计算

1. 离散傅里叶变换

$$F(k)=F\{f(n)\}=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)W_N^{nk}$$

$$k=0,1,\cdots N-1$$

$$\updownarrow$$

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(k)\mathrm{e}^{i2\pi kx/N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(k)W_N^{-nk}$$

$$n=0,1,\cdots N-1$$

$$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/N}$$

$$F(k,l)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}f(n,m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(kn+lm)/N}$$

$$k,l=0,1,\cdots N-1$$

$$f(m,n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}F(k,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(kn+lm)/N}$$

$$n,m=0,1,\cdots N-1$$

离散傅里叶变换的**MATLAB**实现。

```
function [Xk]=dft(xn,N)
```

离散傅里叶逆变换的**MATLAB**实现。

```
function [xn]=idft(Xk,N)
```

2. 快速傅里变换

离散傅里叶变换DFT是信息处理中最基本的方法，但直接计算DFT时，其运算量与变换长度N成的平方成正比。所以当 N较大时，计算量迅速增大。快速傅立叶变换(FFT，fast Fourier transform) 便是针对离散傅立叶变换DFT 计算量很大的矛盾而提出的。所有快速算法的思想都是一个，就是尽量减少乘法运算。求一个 N点的DFT要完成N×N次复数乘法和 N×(N-1)复数加法，当N很大时，其计算量是相当大的。1965年，库利(Cooley)和图基(Tukey)巧妙地利用因子的周期性和对称性，构造了一个DFT的快速算法，即FFT，从而使得DFT的运算真正得到广泛应用。

根据二维离散傅里叶变换可以分解成两个一维傅里叶进行计算，因此在讨论FFT算法时，只从一维傅里叶变换入手。

MATLAB不仅提了一维快速傅里叶变换和逆变换函数fft和ifft，同时还提供了多维快速傅里叶正变换和逆变换的函数fft2、ifft2、fftn和ifftn。

(1)一维快速傅里叶变换函数fft

格式：X=fft(x,N)

(2) 一维快速傅里叶逆变换函数ifft

格式：x=ifft(X,N)

(3) 二维快速傅里叶变换函数fft2

格式：X=fft2(x)

(4) 二维快速傅里叶逆变换函数fft2

格式：x=fft2(X)

(5) 将零频分量移至频谱中心的函数fftshift

格式：Y=fftshift(X)

2.5 卷积和卷积定理

2.5.1 卷积的定义

2.5.2 卷积的计算

2.5.3 普通函数与δ函数的卷积

2.5.4 卷积的效应

2.5.5 卷积的基本性质

2.5.6 卷积的MATLAB实现

在数学上，卷积**(convolution)**代表一种运算，也是一个由含参变量的无穷积分定义的函数。卷积在物理上有着广泛的意义，卷积描述了一个观测仪器在一些变量的小范围上对某些物理量进行加权平均的操作。通常，加权函数的形式不随变量中心值的改变而变化，观测到的量是所要求的量的分布和加权函数的卷积，而不是所要求的物理量本身的值。卷积运算在线性系统理论、光学成像理论和傅里叶变换及应用中经常用到。

2.5.1 卷积的定义

一维复函数

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha = f(x)*h(x)$$

二维复函数

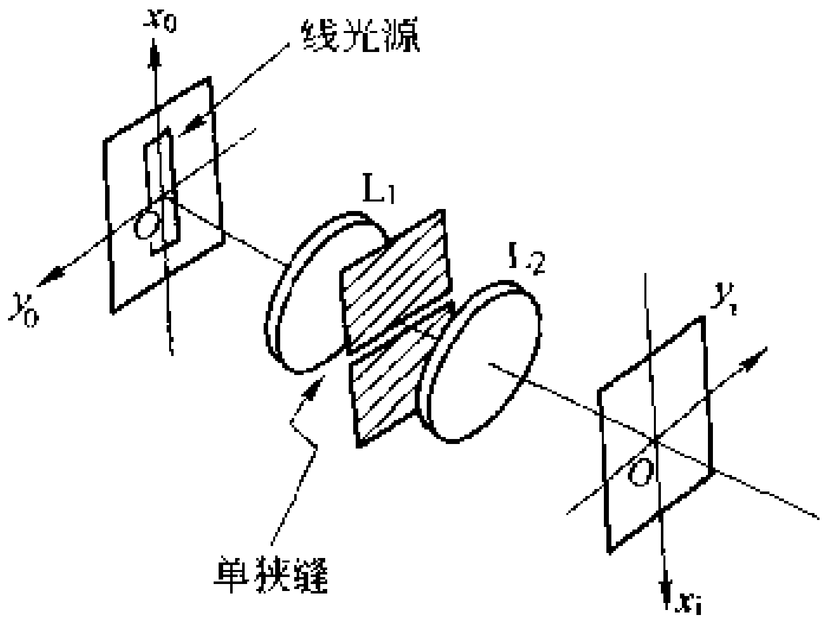
$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = f(x,y)*h(x,y)$$

积分变量

卷积运算

卷积是一种无穷积分运算，也有积分存在条件的问题，与傅里叶变换相似，可以认为在物理上实现的可能性，为卷积存在提供了充分条件。

一个光学例子



光源照明的夫琅和费单缝衍射

$$I_i(x_i) = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} I_o(\alpha_i)\Delta\alpha \cdot I(x_i - \alpha_i) = \int_{-\infty}^{\infty} I_o(\alpha) I(x_i - \alpha)\mathrm{d}\alpha$$

光学系统像平面上的光强分布是物的光强分布与单位强度点光源对应的像强度分布的卷积。

2.5.2 卷积的计算

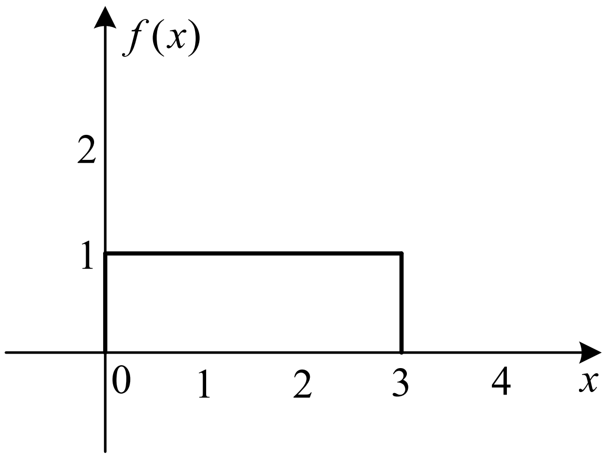
卷积的计算通常用两种方法，即图解法和解析法。

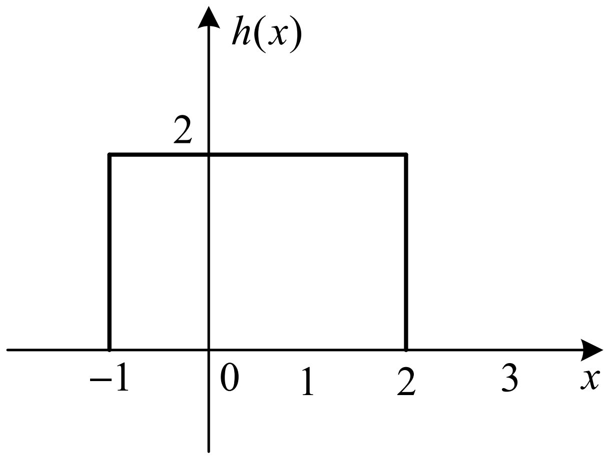
1. 图解法和卷积的几何解释

由卷积的定义可知，卷积是一种积分运算，由定积分的几何意义可知，可以把卷积理解求两个函数 $f(\alpha)$和 $h(x-\alpha)$重叠部分的面积，这个面积的值随着x的取不同而有不同的值。所以，以x为横轴，面积值为纵坐标作出的图形就是卷积的结果 $g(x)$。由于在卷积运算中有 $h(x-\alpha)$这一项，使其与两个一般函数乘积的积分不同，要理解卷积的几何意义，就需要理解 $h(x-\alpha)$的含义。

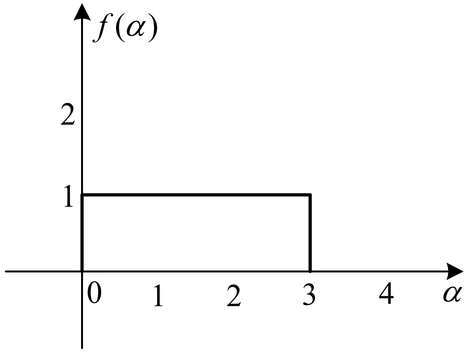
求如下两个函数的卷积：

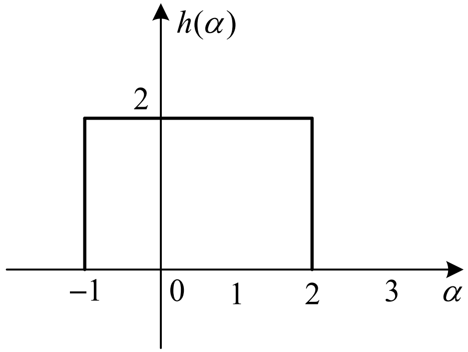
$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}2 & -1\le x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



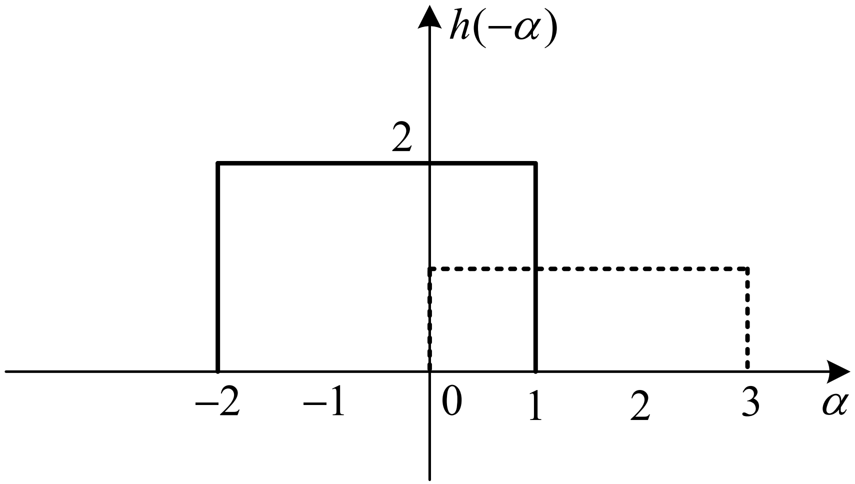


(1) 置换变量


$f(\alpha)$
2
1
0
1
2
3
4
α

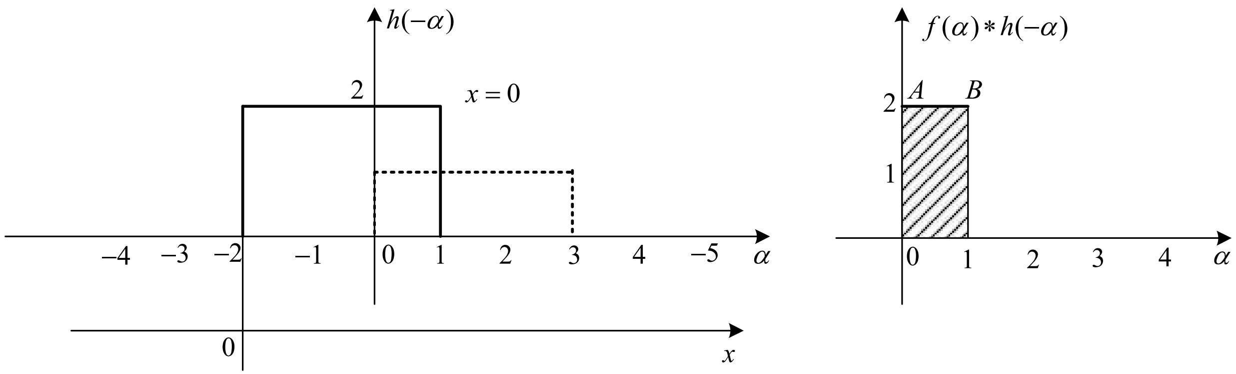

$h(\alpha)$
2
−1
0
1
2
3
α

(2) 折叠


$h(-\alpha)$
2
−2
−1
0
1
2
3
α

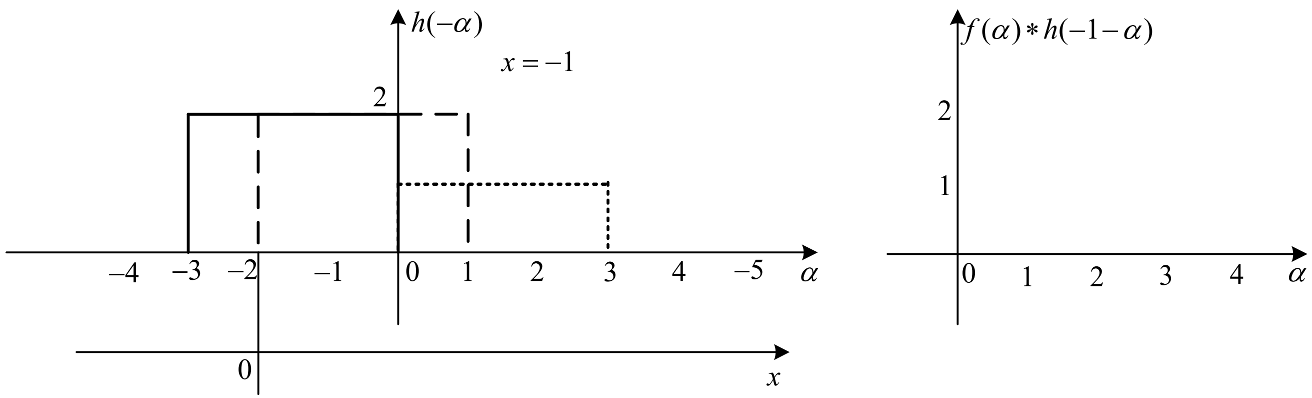
(3) 平移

(4) 相乘



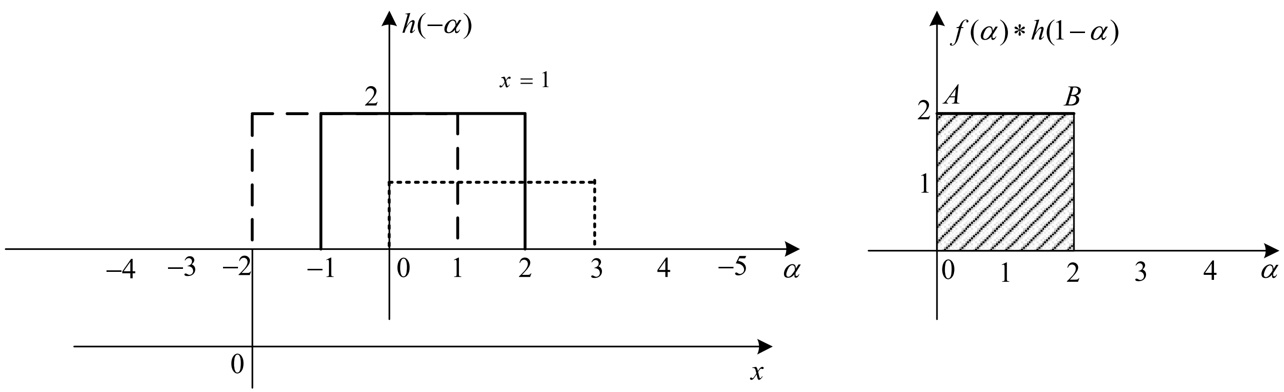
h(−α)
2
x = 0
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 −5 α
0
x
f(α)∗h(−α)
A B
2
1
0 1 2 3 4 α

(a)



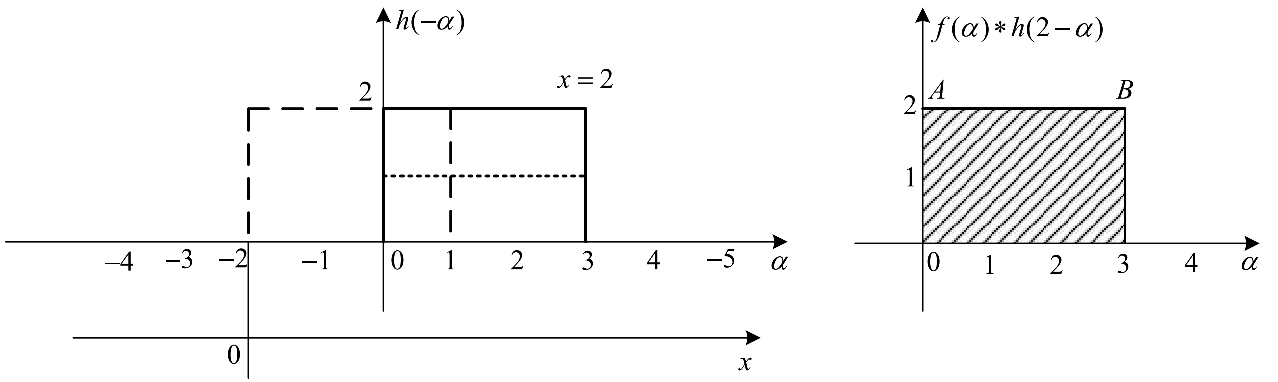
h(−α)
x = −1
2
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 −5 α
0
x
f(α)∗h(−1−α)
2
1
0 1 2 3 4 α

(b)



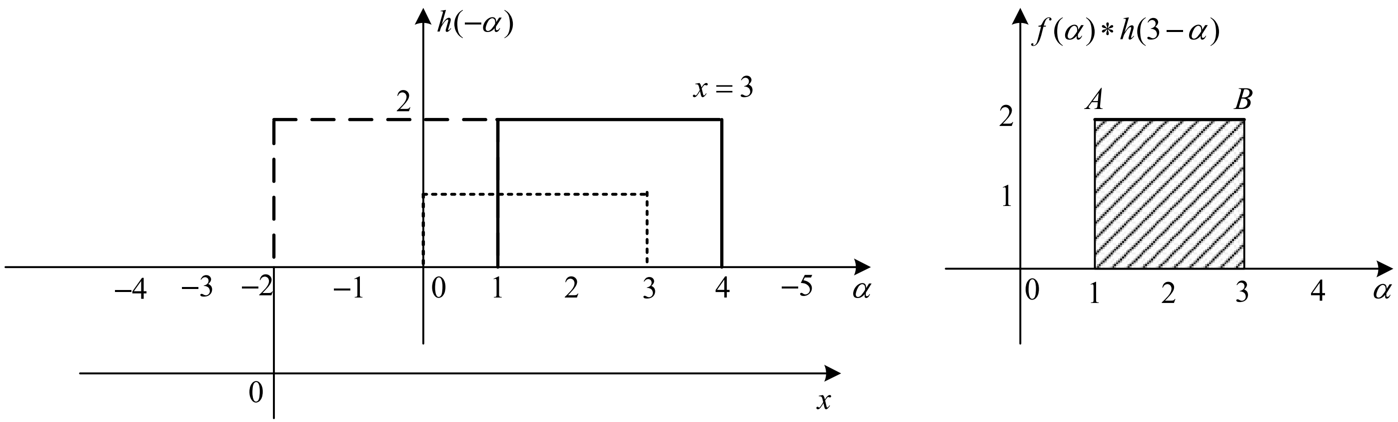
h(−α)
x = 1
2
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 −5 α
0
x
f(α)∗h(1−α)
A B
2
1
0 1 2 3 4 α

(c)



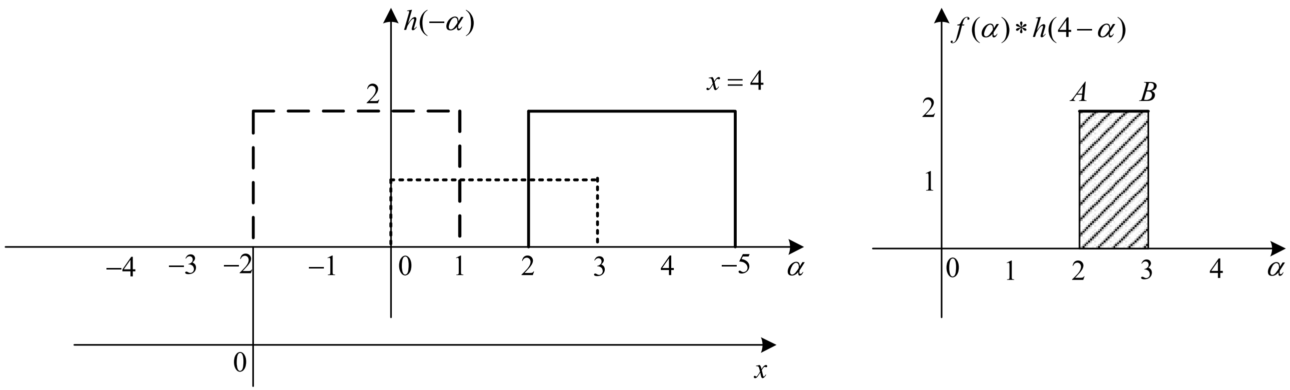
$h(-\alpha)$
$x=2$
2
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 −5 α
0
x
$f(\alpha)*h(2-\alpha)$
A B
2
1
0 1 2 3 4 α

(d)



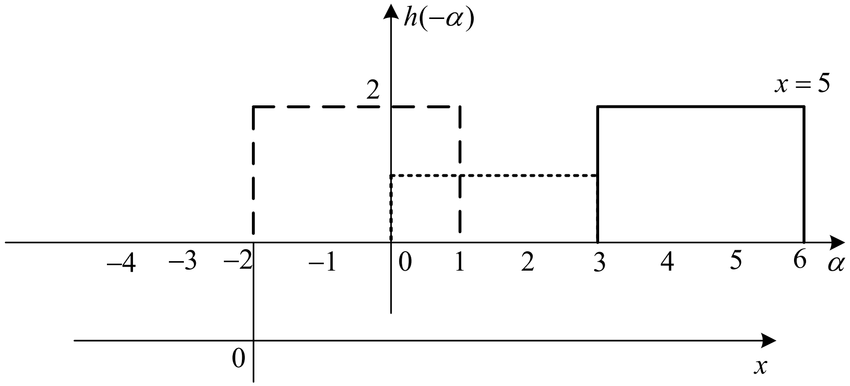
$h(-\alpha)$
$x=3$
2
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 −5 α
0
x
$f(\alpha)*h(3-\alpha)$
A B
2
1
0 1 2 3 4 α

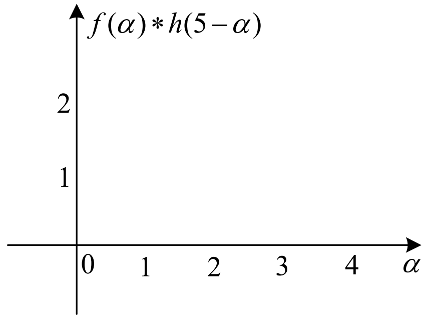
(e)



$h(-\alpha)$
$x=4$
2
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 −5 α
0
x
$f(\alpha)*h(4-\alpha)$
A B
2
1
0 1 2 3 4 α

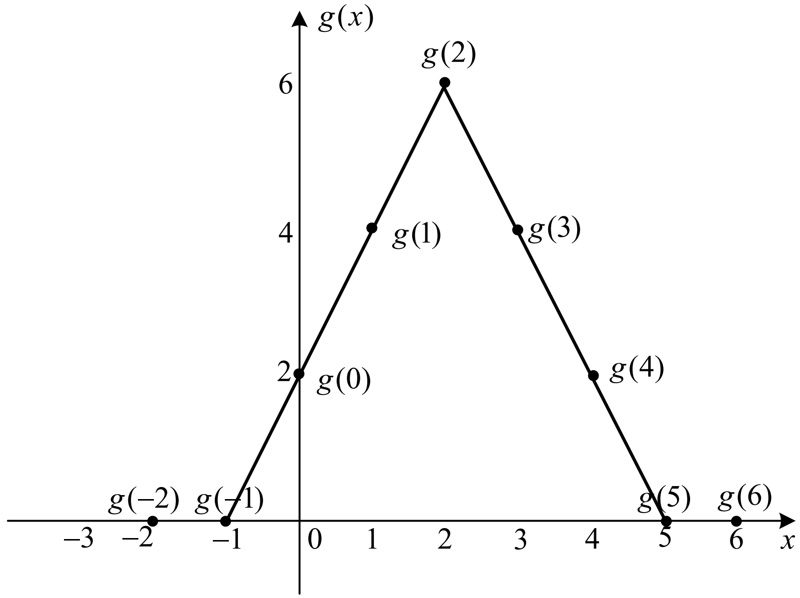
(f)





(g)

(5) 积分



图解法计算两函数卷积

2. 解析法

直接计算式(2.5.1)所定的卷积积分就是解析法。从上面的图解法求卷积，我们可以看到，卷积的结果通常不是一条完整的曲线，而是分段的，不同的段有不同的函数表达式，一个积分式显然只能得到一个积分结果，所以必须段积分。因此，与一般积分相比，计算卷积的困难在于积分区间的分段和确定每段区间的上下限。也就是说，卷积结果还没有出来就要知道它是由几段曲线组成的，显然这是一段不容易确定的事。因此，解析法通常也要依赖于图解法的方法，即先用图解法大致看看两图形重叠部分的变换趋势，看看有无突变的情况。一个经典而较古老的做法是先在一张较厚的纸上画现$f(\alpha)$的图形，然后在一张透明纸上画出$f(-\alpha)$的图形，并把它重叠在$f(\alpha)$图形上来回在移动。观察重叠区间的变化，以确定每段积分的区间。

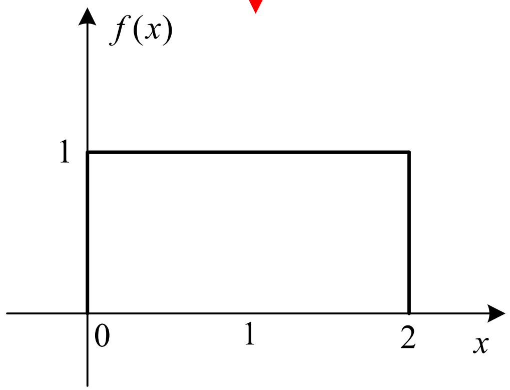
卷积的结果为：

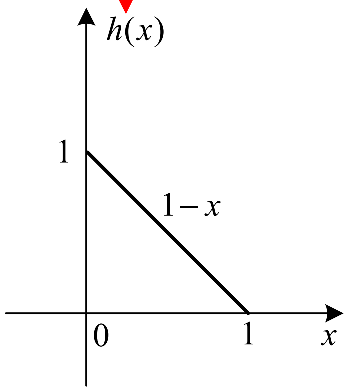
$$f(x)*h(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ \int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)h(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_{0}^{x+1}2\mathrm{d}\alpha=2(x+1) & -1<x\le 2\\ g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)h(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_{x-2}^{3}2\mathrm{d}\alpha=2(5-x) & 2<x\le 5\\ 0 & x>5\end{cases}$$

卷积的计算是比较复杂，不管是解析法计算卷积还是图解法，都是比较繁琐的。实际计算时，通常是把两个方法结合起来会相对简便一些，即用图解法进行积分区间的分段，解析法用于计算$\boldsymbol{f(\alpha)h(x-\alpha)}$的积分值。随着计算机技术的发展，现在也可以借用计算方便的进行复杂的计算。

例：求函数 $f(x)=\mathrm{rect}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ 和 $h(x)=\mathrm{tri}(x)\cdot\mathrm{step}(x)$ 的卷积。

解：

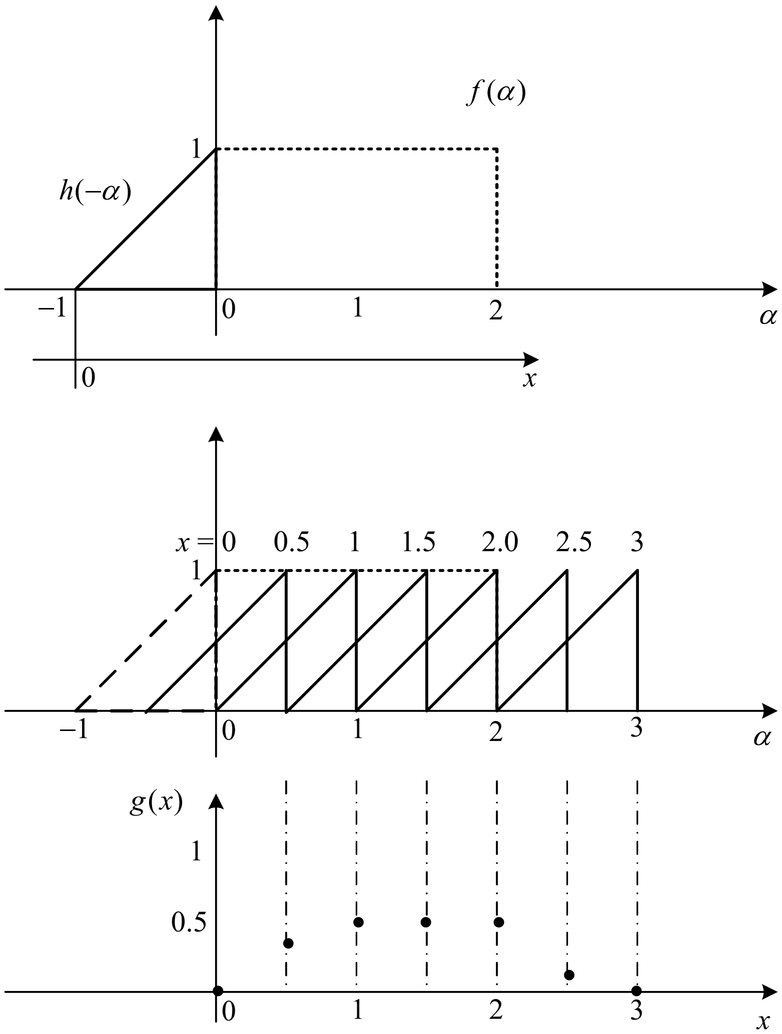




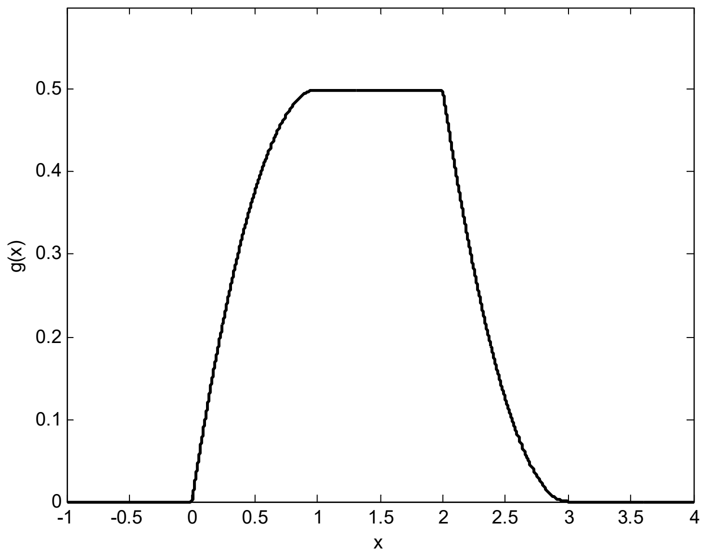
卷积结果

$$g(x)=f(x)*h(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \int_0^x(1+\alpha-x)\mathrm{d}\alpha=x-\dfrac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ \int_{x-1}^x(1+\alpha-x)\mathrm{d}\alpha=\dfrac{1}{2} & 1<x\le 2\\ \int_{x-1}^2(1+\alpha-x)\mathrm{d}\alpha=\dfrac{9}{2}-3x+\dfrac{x^2}{2} & 2<x<3\\ 0 & x\ge 3\end{cases}$$

卷积运算过程示意图



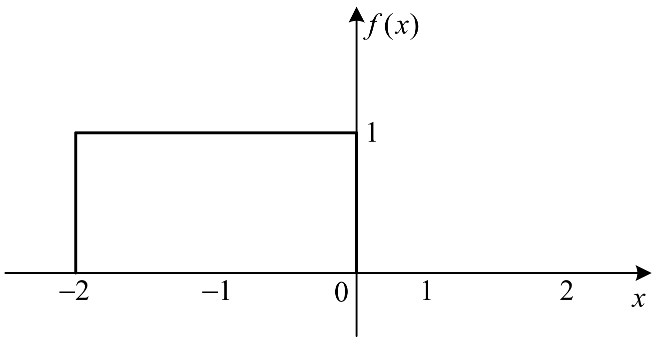
f(α)
h(−α)
1
−1
0
1
2
α
0
x
x = 0
0.5
1
1.5
2.0
2.5
3
1
−1
0
1
2
3
α
g(x)
1
0.5
0
1
2
3
x

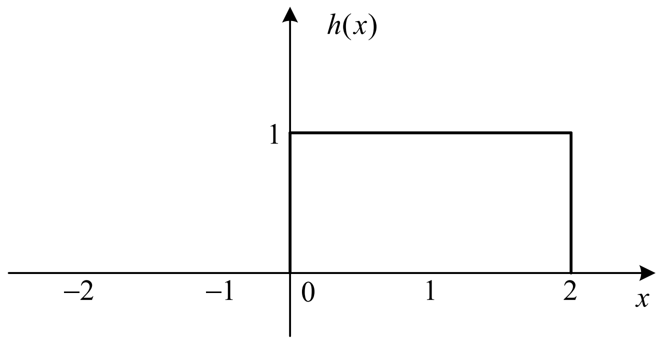


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
g(x)
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x

例：求函数 $f(x)=\mathrm{rect}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ 和 $h(x)=\mathrm{rect}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ 的卷积。

解：



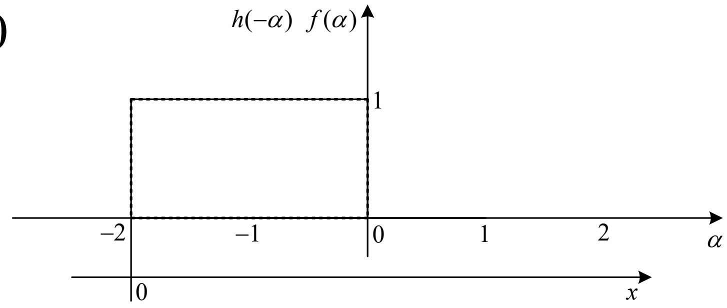


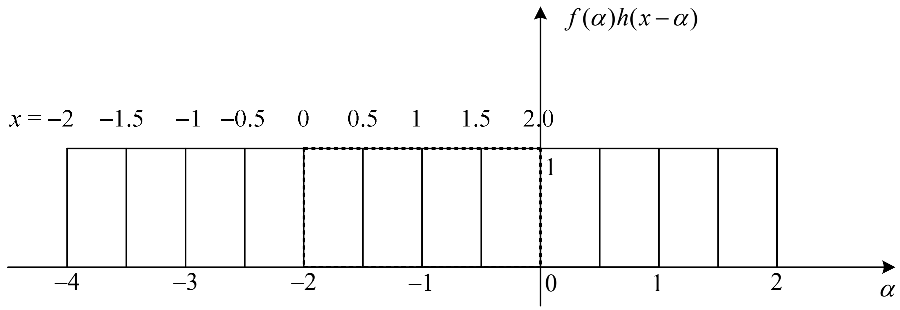
$$g(x)=f(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x-\alpha-1}{2}\right)\mathrm{d}\alpha=\int_{-2}^{0}\mathrm{rect}\left(\frac{x-\alpha-1}{2}\right)\mathrm{d}\alpha$$

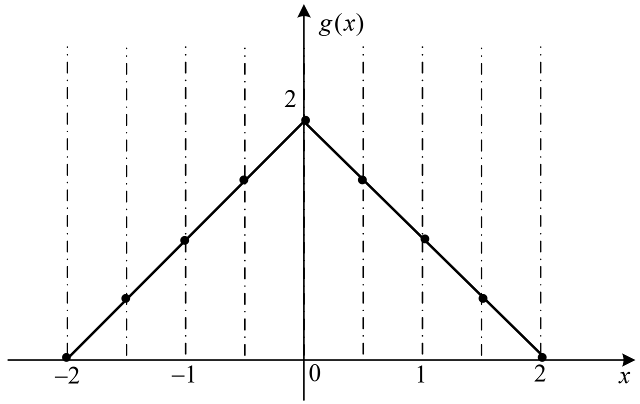
$$\mathrm{rect}\left(\frac{x-\alpha-1}{2}\right)=\begin{cases}1 & x-2\le\alpha\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & -\infty \le x \le -2 \\ \int_{-2}^{x} \mathrm{d}\alpha = 2+x = 2(1+x/2) & -2 < x \le 0 \\ \int_{-2}^{x} \mathrm{d}\alpha = 2-x = 2(1-x/2) & 0 \le x < 2 \\ 0 & 2 \le x \le \infty \end{cases}$$

$$= 2\mathrm{tri}\left(\frac{x}{2}\right)$$







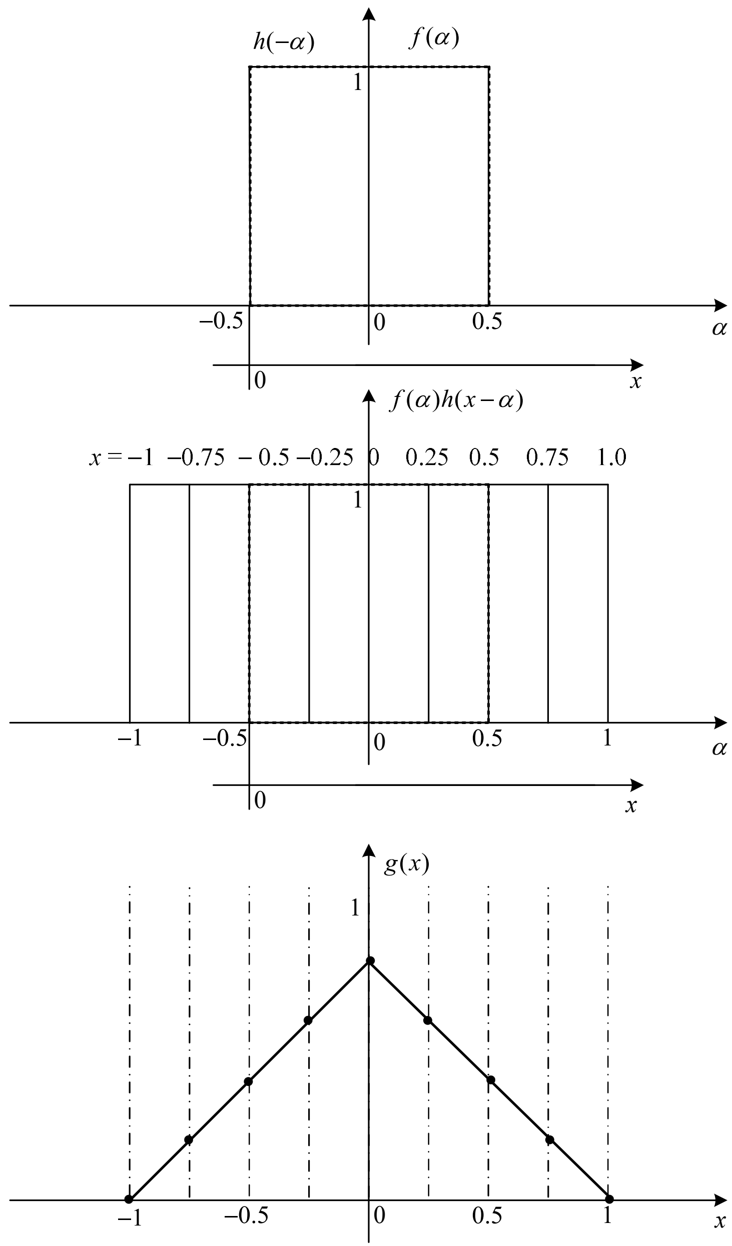
例：求函数 $f(x)=\mathrm{rect}(x)$ 和 $h(x)=\mathrm{rect}(x)$ 的卷积 .

解：

$$g(x)=f(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{rect}(x+\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{rect}(x+\alpha)=\begin{cases}1 & -\dfrac{1}{2}-x\le\alpha\le\dfrac{1}{2}x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & -\infty\le x\le -1\\ \int_{-1/2}^{x+1/2}\mathrm{d}\alpha=1+x & -1<x\le 0\\ \int_{x-1/2}^{1/2}\mathrm{d}\alpha=1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & 1\le x\le\infty\end{cases}=\mathrm{tri}(x)$$



$h(-\alpha)$
$f(\alpha)$
1
−0.5
0
0.5
α
0
x
$f(\alpha)h(x-\alpha)$
$x=-1$ −0.75 − 0.5 −0.25 0 0.25 0.5 0.75 1.0
1
−1
−0.5
0
0.5
1
α
0
x
$g(x)$
1
−1
−0.5
0
0.5
1
x

2.5.3 普通函数与δ函数的卷积

设$\boldsymbol{f(x, y)}$为任一连续函数，则有

$$f(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)\delta(x-x_0-\alpha,y-y_0-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=f(x-x_0,y-y_0),$$

一维函数的情形为

$$f(x)*\delta(x-x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\delta(x-x_0-\alpha)\mathrm{d}\alpha=f(x-x_0)$$

在原点处为： $f(x,y)*\delta(x,y)=f(x,y),$

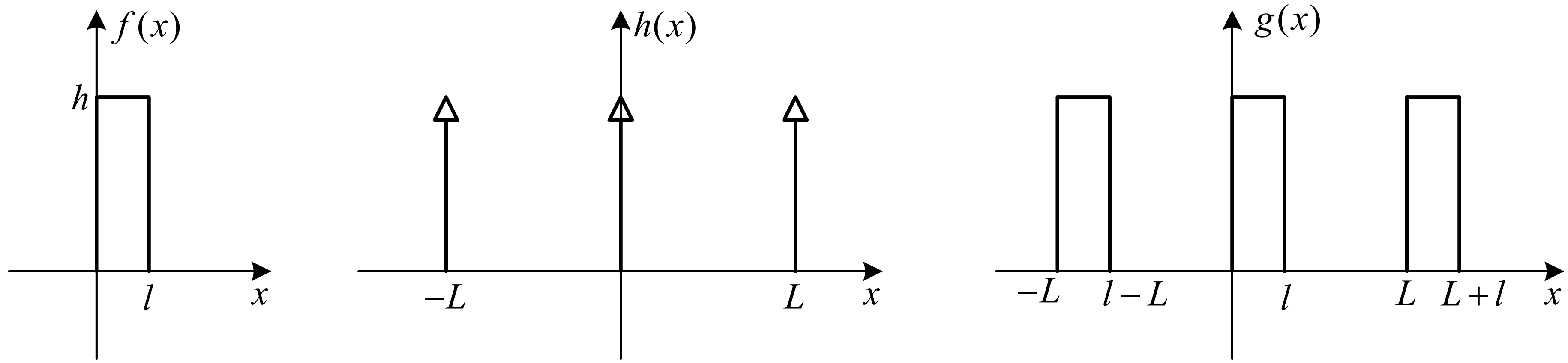
$$f(x)*\delta(x)=f(x)$$

这一性质也是δ函数的卷积特性，又称为复制特性。

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) h(x-\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) [\delta(x+L-\alpha) + \delta(x-\alpha) + \delta(x-L-\alpha)] \mathrm{d}\alpha$$

$$= f(x+L) + f(x) + (x-L)$$



$$\delta(x-x_0)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-x_0)\delta(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\delta(x-x_0)$$

$$\delta(x)*\delta(x)=\delta(x)$$

$$f(x)*\delta^{(m)}(x)=f^{(m)}(x)$$

$$f^{(k)}(x)=f(x)*\delta^{(k)}(x)$$

$$h^{(l)}(x)=h(x)*\delta^{(l)}(x)$$

$$f^{(k)}(x)*h^{(l)}(x)=\left[f(x)*\delta^{(k)}(x)\right]*\left[h(x)*\delta^{(l)}(x)\right]$$
$$=f(x)*h(x)*\delta^{(k)}(x)*\delta^{(l)}(x)=g(x)*\delta^{(k+l)}(x)=g^{(k+l)}(x)$$

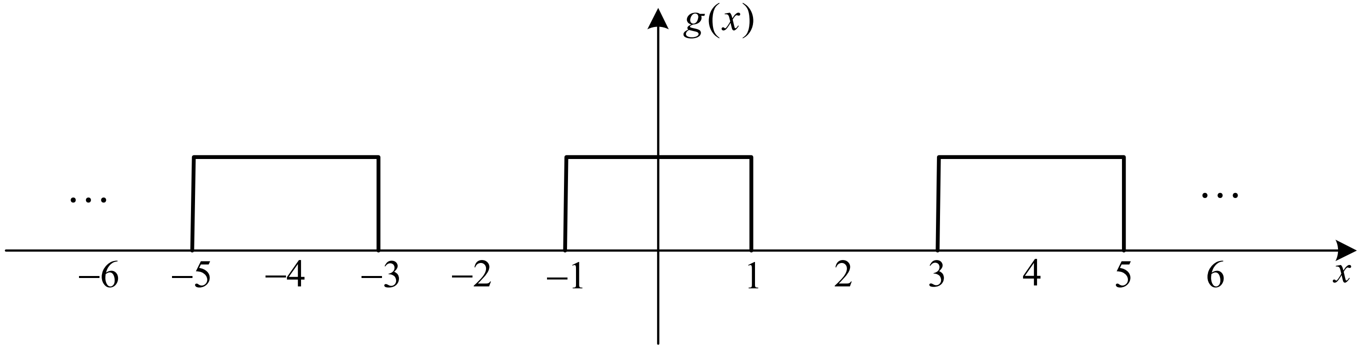
例：求梳状函数$f(x)=\frac{1}{4}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{4}\right)$和 $h(x)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2}\right)$ 的卷积 .

解：

$$g(x)=f(x)*h(x)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{\alpha}{4}-n\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$4n-1<x<4n+1$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-4n)\mathrm{rect}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\mathrm{d}\alpha=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x-4n}{2}\right)$$



这是罗奇**(Ronchi)**光栅的强度透过率

2.5.4 卷积的效应

1. 展宽效应

函数的宽度通常是指函数不为零的一个有限区间，卷积的展宽即卷积的非零值范围等于被卷积两函数的非零值范围之和。即一般来说，卷积函数的宽度等于被卷函数宽度之和。由卷积的几何意义很明显可以看出，只要$f(x)$和$h(x)$在非零范围有重叠，则二者的卷积就不为零。

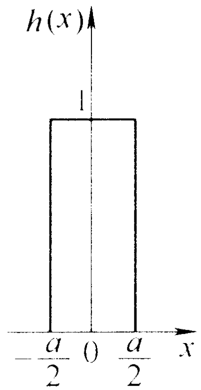
2. 平滑效应

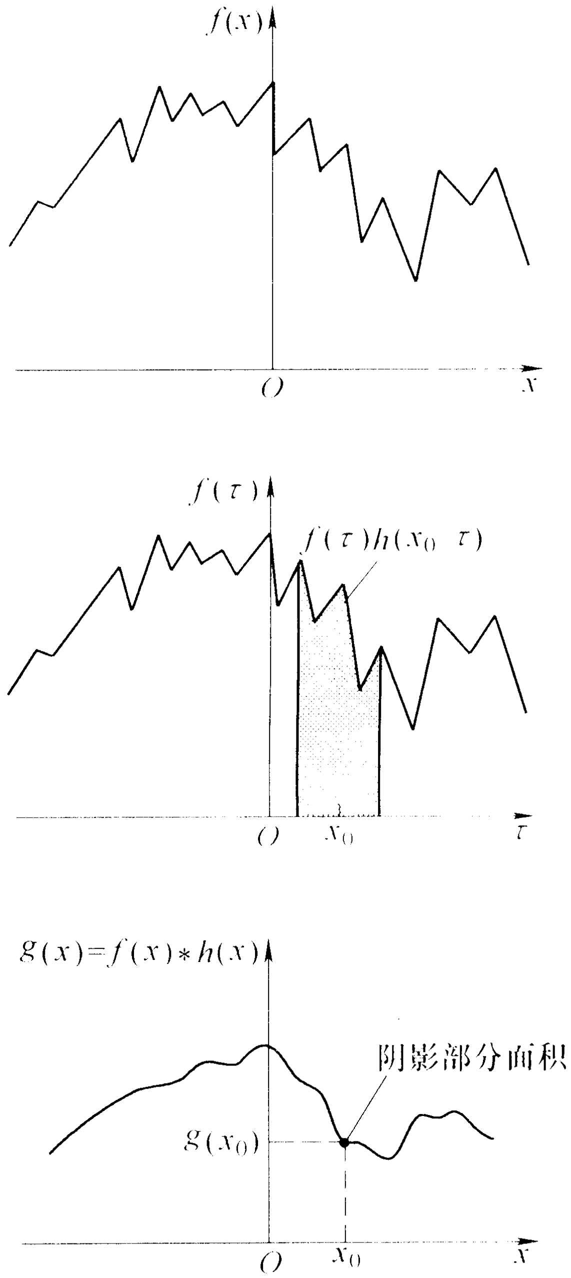
卷积 $g(x, y)$总是比参与卷积的函数 $f(x, y)$和 $h(x,y)$中的任何一个函数更平滑，也就是经过卷积后，参与卷积函数的细微结构在一定程度上被消除了，函数本身的起伏振荡变得平缓圆滑，所以卷积运算具有“磨光”。卷积平滑程度，取决于参与卷积函数的他分布特性。

在数学上有一条关于卷积的定理，即在某些相当普遍的条件下，n个函数的卷积，当 $n\to\infty$(在实用上，一般展 n=10也就可以了)，趋于高斯函数形式。

矩形函数 **rect(*x*/*a*)**和三角函数**tri(*x*/*a*)**这一类有界函数就是良好的平滑函数，宽度 **a**越大，平滑展宽效果越好。

如果 ***f*** **(*x*)**和 ***h*** **(*x*)**均为有界函数，其宽度分别为$\boldsymbol{a_1}$和$\boldsymbol{a_2}$，则其卷积也是有界函数，且宽度扩展到 $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{= a_1+a_2}$。





由于δ函数与普通函数的卷积的结果，只重建原来的函数，因此δ函数是非平滑函数，不具有平滑和展宽的作用。

sinc函数的自卷积仍然为**sinc**，即**sinc(*x*)*sinc(*x*)=sinc(*x*)**。当**sinc(*x*/a)**有一个有限带宽函数***f*** **(*x*)**用卷积时，如果***f*** **(*x*)**的带宽**W**和**sinc**函数的主瓣宽度 ***a***满足***aW***≤**1**，则有：

$$\frac{1}{a} f(x) * \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = f(x)$$

所以，**sinc**函数与带限函数的卷积，即无平滑效应，又无展宽效应，只能重建原来的带限函数。

光学中的一些现象可以用卷积效应来解释，如一个无像差光学系统的　成像过程可以看成是卷积运算的结果，物点通过光学成像系统后，之所以得到一个像斑，而不是一个像点，这是由于系统光瞳的衍射造成的，在数学上就是卷积运行的结果。

2.5.5 卷积运算的基本性质

1. 卷积的分配律

函数线性组合的卷积等于卷积的线性组合，即卷积满足分配律。

$$[af_1(x,y)+bf_2(x,y)]*h(x,y)=af_1(x,y)*h(x,y)+bf_2(x,y)*h(x,y)$$

$$h(x,y)*[af_1(x,y)+bf_2(x,y)]=ah(x,y)*f_1(x,y)+bh(x,y)*f_2(x,y)$$

利用卷积的线性性质，可以证明，两个复函数的卷积可以转化为几个实函数卷积的线性叠加。

2. 卷积的交换律和结合律

卷积满足交换律，即两个函数卷积时的先后次序不影响卷积的结果.

$$f(x,y)*h(x,y)=h(x,y)*f(x,y)$$

$$[f(x,y)*h_1(x,y)]*h_2(x,y)=f(x,y)*[h_1(x,y)*h_2(x,y)]$$

3. 复函数的卷积

$$f(x,y)=f_R(x,y)+\mathrm{i}f_I(x,y) \qquad h(x,y)=h_R(x,y)+\mathrm{i}h_I(x,y)$$

$$g(x,y)=[f_R(x,y)+\mathrm{i}f_I(x,y)]*[h_R(x,y)+\mathrm{i}h_I(x,y)]$$

$$=[f_R(x,y)*h_R(x,y)-f_I(x,y)*h_I(x,y)]$$

$$+\mathrm{i}[f_R(x,y)*h_I(x,y)+f_I(x,y)*h_R(x,y)]=g_R(x,y)+\mathrm{i}g_I(x,y)$$

复函数的卷积运算的仍然是复函数

4. 可分离变量

对于直角坐标系下的两个可分离变量的二元函数，其二维卷积也是可分离变量的函数。

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y) \qquad h(x,y)=h_x(x)h_y(y)$$

$$g(x,y)=f(x,y)*h(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(\alpha)h_x(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f_y(\beta)h_y(y-\beta)\mathrm{d}\beta=g_x(x)g_y(y)$$

只有一个函数是可分离变量的，则卷积是不可分离变量的 。

5. 平移不变性

$$f(x,y)*h(x,y)=g(x,y)$$

$$f(x-x_0,y-y_0)*h(x,y)=f(x,y)*h(x-x_0,y-y_0)=g(x-x_0,y-y_0)$$

6. 坐标缩放性质

$$f(x,y)*h(x,y)=g(x,y) \longrightarrow f(ax,by)*h(ax,by)=\frac{1}{|ab|}g(ax,by)$$

7. 卷积的面积

对二个一维函数的卷积，卷积的面积是指卷积的结果在整个区间上的积分值。可以用来检验卷积的结果是否正确。

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)h(\beta-\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}x=\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\beta)\mathrm{d}\beta\right]$$

8. 常数与函数的卷积

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = M$$

$$a * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} af(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathrm{d}x' = aM$$

在一定的条件下，常数与某一函数的卷积为另一常数.

2.5.6 卷积的MATLAB实现

计算卷积是件非常沉闷与乏味的事。如果用计算机来计算，则计算会变得简单又有意思。

1. 用符号积分的方法

从卷积的定义可知，卷积的计算也是一种积分计算，所以可以用**MATLAB**求积分的函数**int( )**来计算卷积。

格式：**fI=int(f, x, a, b)**

功能：给出函数**f**对指定变量**x**的的定积分。**x**缺省时，积分对**findsym**确认的变更进行。**a, b**分别是积分的上、下限，允许它们取任何值或符号表达式。求解无穷积分时，允许将**a, b**设置成**-Inf**或**Inf**，如果得出的结果不是确切的，还要以用**vpa( )**函数取得定积分的解。

2. 卷积的数值计算

卷积的数值计算，实际上是卷积被近似为一个求和过程。当卷积函数是连续时，就意味着在计算卷积求和前，函数需要离散化。当离散化的间隔(采样间隔)较小时，求和的结果便能够非常接近卷积的准确表达式。

离散卷积的原理基本上与连续卷积相同，其差别仅仅在于与抽样间隔对应的离散增量处发生位移，以及用求和代替积分。

二维离散卷积为

$$f_e(x,y)*h_e(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{M-1}f_e(m,n)h_e(x-m,y-n) \qquad x,y=0,1,\cdots,M-1$$

MATLAB中的**conv**函数可以进行离散时间卷积，只需要给定两个表示离散函数***f***和***h***即可。**conv**函数的格式为：**y=conv(x1,x2)**。离散函数**x_1(n)**和**x_2(n)**必须长度有限。

2.6 相关和相关定理

2.6.1 互相关

2.6.2 自相关

2.6.3 归一化互相关函数和自相关函数

2.6.4 有限功率函数的相关

2.6.5 相关的计算方法

2.6.6 相关的MATLAB实现

两个函数之间的相互关联性，在数学上的用相关运算来描述。相关(correlation)和卷积类似，它既是一个由含参变量的无穷积分定义的函数，又代表一种运算。相关在部分相干理论、信号检测、模式识别等方面都有重要的应用。相关与卷积都与傅里叶变换有着密切的联系。

2.6.1 互相关

1. 互相关的定义

一维函数

$$R_{fh}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\alpha)h(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha=f(x)\bigstar h(x)$$

二维函数

$$R_{fh}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f^*(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=f(x,y)\bigstar h(x,y)$$

函数的复共轭

相关运算

$$x-\alpha=\alpha' \qquad \beta-y=\beta'$$

$$R_{fh}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\alpha+x,\beta+y)h^*(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=f(x,y)\bigstar h(x,y)$$

从相关的定义可以看出，相关与卷积不管是数学运算或是物理含义，都是迥然不同的，但两者之间也有一定的联系。在相关运算中，函数 $f(x,y)$ 要取复共轭，图形不需要翻转，但位移、相乘和积分这三个过程在两种运算都是需要的。可以把互相关表达成为卷积的形式，即有：

$$f(x,y) \bigstar h(x,y) = f(x,y) * h^*(-x,-y)$$

2. 互相关的性质

(1) 互相关运算不满足交换律

$$R_{hf}(x,y) \neq R_{fh}(x,y)$$

$$R_{hf}(x,y) = R_{fh}^{\ *}(-x,-y)$$

$$R_{hf}(x,y) = R_{fh}(-x,-y) \longleftarrow \text{实函数}$$

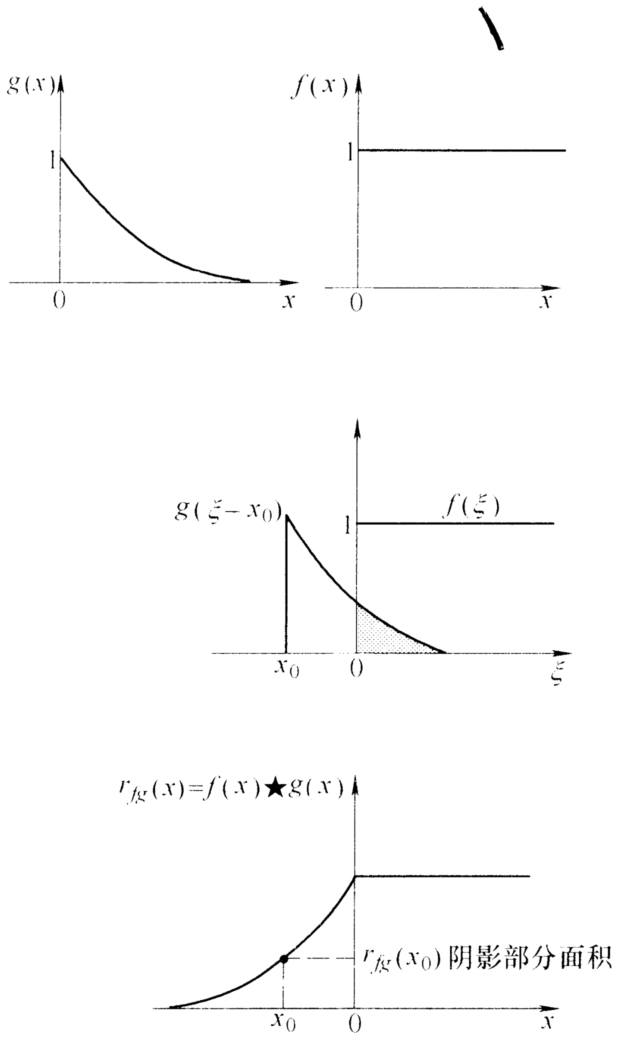
(2) 互相关函数 $R_{fh}(x,y)$ 满足下面的不等式

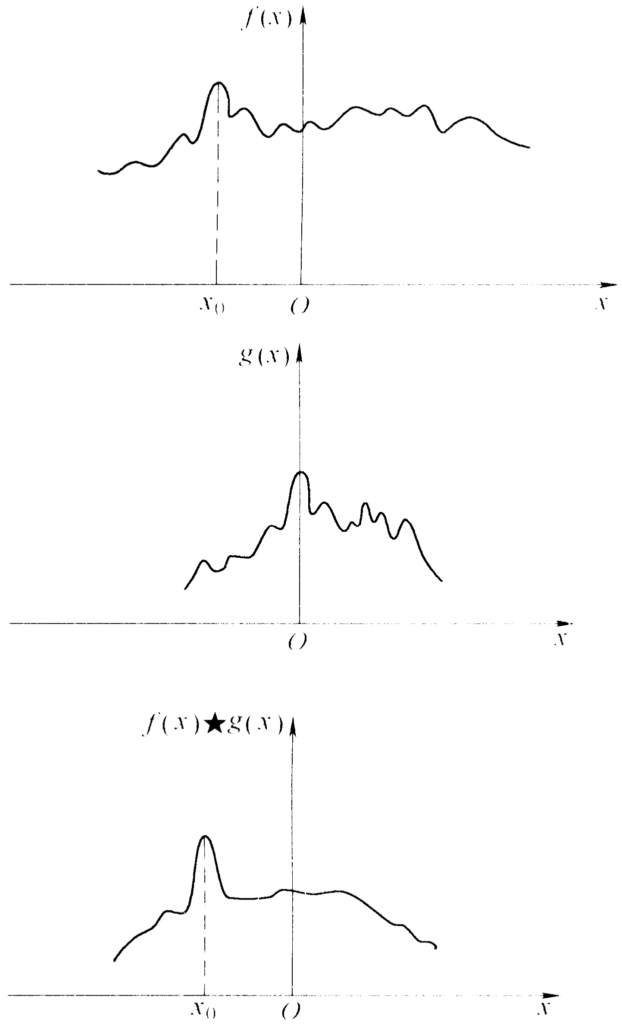
$$\left|R_{fh}(x,y)\right|^2 \le R_{ff}(0,0)R_{hh}(0,0)$$

函数的自相关

(3) 当 $|x| \to +\infty$ 时，$R_{fh}(x)$ 趋于零，即

$$\lim_{|x|\to\infty} R_{fh}(x) = 0$$





互相关是两个函数(信号)存在多少相似性或关联性的量度。两个完全不同的、毫无关联的信号，对所有位置，它们互相关的值为零。如果两个信号由于某种物理上的联系在一些部位存在相似性，则在相应位置上就存在非零的互相关值。

2.6.2 自相关

1. 自相关的定义

$$R_{ff}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)f^*(\alpha-x,\beta-y)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = f(x,y)\bigstar f^*(x,y)$$

$$R_{ff}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha+x,\beta+y)f^*(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = f(x,y)\bigstar f^*(x,y)$$

$$R_{ff}(x)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)f^*(\alpha-x)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = f(x)\bigstar f^*(x)$$

自相关与卷积的关系为：

$$R_{ff}(x,y)=f(x,y)*f^*(-x,-y)$$

2. 自相关的性质

(1) 自相关函数是厄米的。即复自相关函数是厄米函数：

$$R_{ff}(x,y)=R_{ff}^{*}(-x,-y)$$

复自相关函数可以是复函数或实函数，但不能是虚函数。

$$R_{ff}(x,y)=R_{ff}(-x,-y)$$

$f(x,y)$为实函数时，自相关函数是实的偶函数。

(2) 自相关函数的模在原点处有最大值。即：

$$\left|R_{ff}(x,y)\right|\le R_{ff}(0,0)$$

施瓦兹(Schwarz)不等式

$$\left|\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^{2}\le\iint_{-\infty}^{\infty}\left|f(x,y)\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint_{-\infty}^{\infty}\left|h(x,y)\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

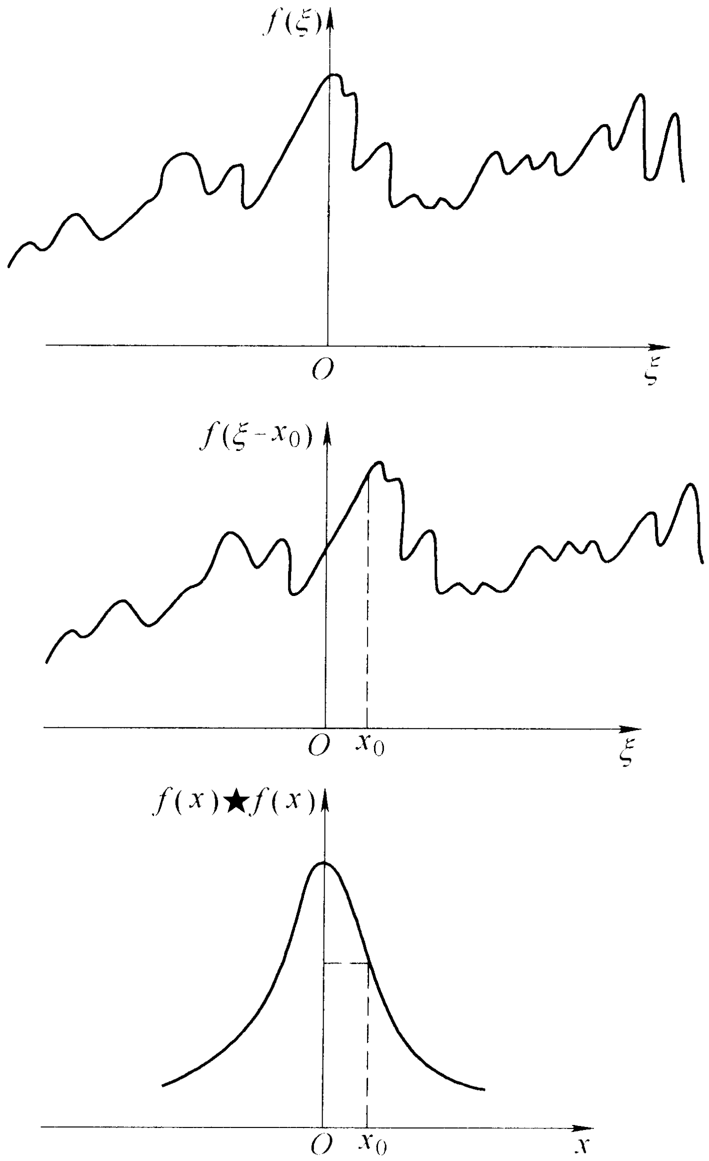
(3) 当$|x| \to +\infty$时，$R_{ff}(x)$趋于零，即

$$\lim_{|x|\to\infty} R_{ff}(x) = 0$$

自相关是两个相同函数图像的重叠程度的量度。在原点处，即当$\boldsymbol{x=0}$时，两个相同函数完全重叠时，显然$\boldsymbol{R_{ff}(0)=0}$最大自相关有一极大峰值，称为自相关峰 **(autocorrelation peak)**。由于只有相同函数的图形才能完全重合，故相同函数间自相关的相关程度比不同函数之间的互相关的相关程度要高得多。

自相关函数是自变量相差某一大小时，函数值间相关程序的量度。

当信号相对本身有平移时，就改变了位移为零时具有的逐点相似性，相关程度减小。但是只要信号本身在不同部分存在相似结构，相应部位还会产生不为零的自相关值。当位移足够大时，自相关值可能趋于零。



一个实函数自相关

2.6.3 归一化互相关函数和自相关函数

归一化互相关函数和归一化的自相关函数，定义如下：

$$\gamma_{fh}(x,y)=\frac{R_{fh}(x,y)}{\sqrt{R_{ff}(0,0)R_{hh}(0,0)}} \qquad 0\le\left|\gamma_{fh}(x,y)\right|\le 1$$

$$\gamma(x,y)=\frac{R_{ff}(x,y)}{R_{ff}(0,0)} \qquad 0\le\left|\gamma(x,y)\right|\le 1$$

2.7.4 有限功率函数的相关

$$|f(x,y)|^2 \qquad |h(x,y)|^2 \qquad |f(x,y)\cdot h(x,y)|$$

称为功率函数，其积分通常代表总能量，积分收敛则表示能量有限。在前面给出的互相关定义中，要求函数 ***f* (*x*, *y*)**和 ***h* (*x*, *y*)**是有限能量函数，即其函数的平方是绝对可积的：

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty \qquad \iint_{-\infty}^{\infty}|h(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

有些函数，例如周期函数、平稳随机函数等并不满足这一条件，但满足下述极限：

$$\lim_{L,W\to\infty}\frac{1}{4LW}\int_{-L}^{L}\int_{-W}^{W}|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

$$\lim_{L,W\to\infty}\frac{1}{4LW}\int_{-L}^{L}\int_{-W}^{W}|g(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

在系统中能量传递的平均功率为有限值的这类函数，称为有限功率函数。

当两个复函数都是有限功率函数时，它们的互相关定义为：

$$R_{fh}(x,y)=\left\langle f(\alpha,\beta)h^*(\alpha-x,\beta-y)\right\rangle=$$

求平均

$$\lim_{L,W\to\infty}\frac{1}{4LW}\int_{-L}^{L}\int_{-W}^{W}f(\alpha,\beta)h(\alpha-x,\beta-y)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

自相关定义为：

$$R_{ff}(x,y)=\left\langle f(\alpha,\beta)f^*(\alpha-x,\beta-y)\right\rangle$$

$$=\lim_{L,W\to\infty}\frac{1}{4LW}\int_{-L}^{L}\int_{-W}^{W}f^*(\alpha-x,\beta-y)f(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

上式适用于功率有限的信号，

2.6.5 相关的计算方法

与计算卷积一样，相关的计算也可用图解法和解析法来进行，两者的步骤也基本相同，下面简要介绍一下相关的计算方法。

1. 图解法

由相关定义，在函数 $f(x)$和 $h(x)$的相关运算中，$f(x)$需取共轭，但 $h(x)$不需要翻转，只须作平移，再作两函数的乘积和积分。其步骤如下：　(1) 平移　(2) 相乘　(3) 积分

2. 解析法

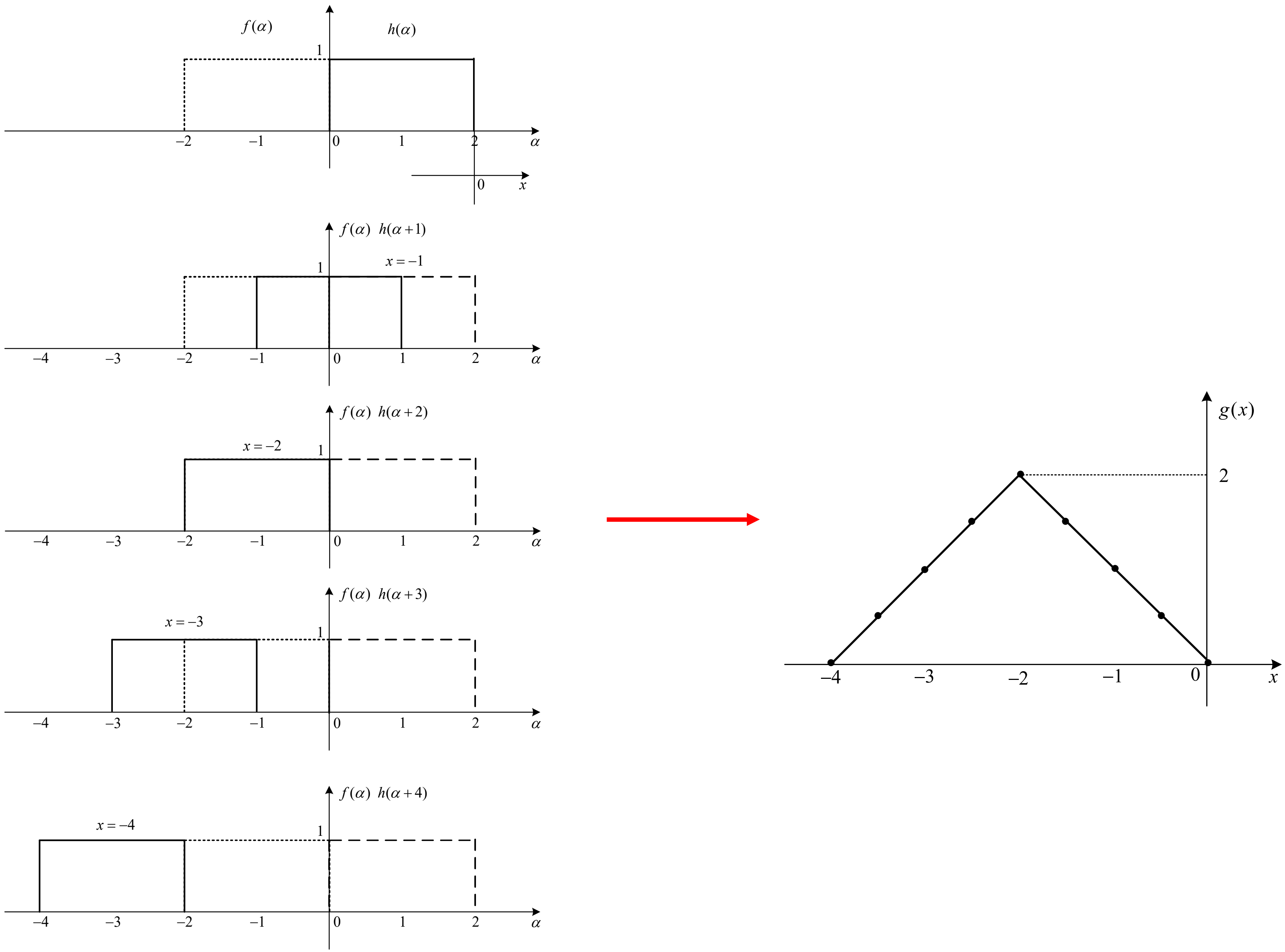
用解析法计算相关，与卷积计算一样，也要进行区间的分段和确定积分上下限，其方法和规则与卷积计算一样.

例：求两个矩形函数$f(x)=\mathrm{rect}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ 和 $h(x)=\mathrm{rect}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$的互相关.

解：

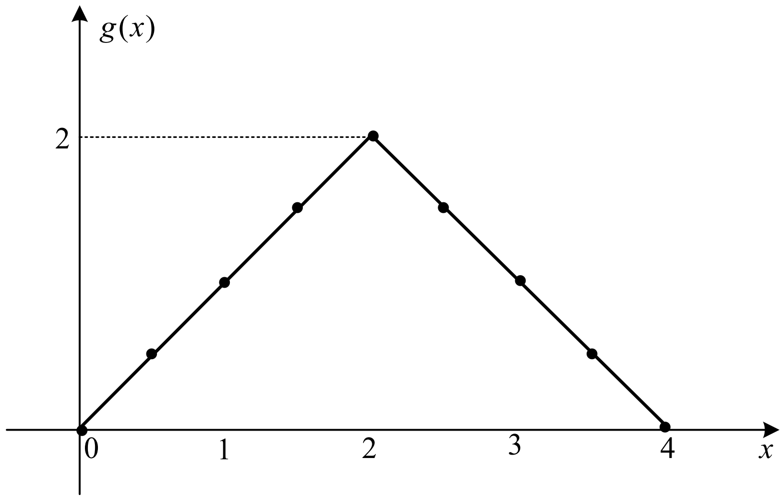
$$g(x)=f(x)\bigstar h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x+\alpha-1}{2}\right)\mathrm{d}\alpha=\int_{-2}^{0}\mathrm{rect}\left(\frac{x+\alpha-1}{2}\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & x>0 \\ \displaystyle\int_{x}^{0}\mathrm{d}\alpha=2\left(1-\frac{x+2}{2}\right) & -2<x\le 0 \\ \displaystyle\int_{-2}^{x+2}\mathrm{d}\alpha=2\left(1+\frac{x+2}{2}\right) & -4<x<2 \\ 0 & x<-4 \end{cases}=2\mathrm{tri}\left(\frac{x+2}{2}\right)$$



f(α)
h(α)
1
−2
−1
0
1
2
α
0
x
f(α) h(α+1)
x = −1
−4
−3
f(α) h(α+2)
x = −2
f(α) h(α+3)
x = −3
f(α) h(α+4)
x = −4
g(x)
2

用类似的方法，可得：$g(x) = h(x) \star f(x) = 2\,\mathrm{tri}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$

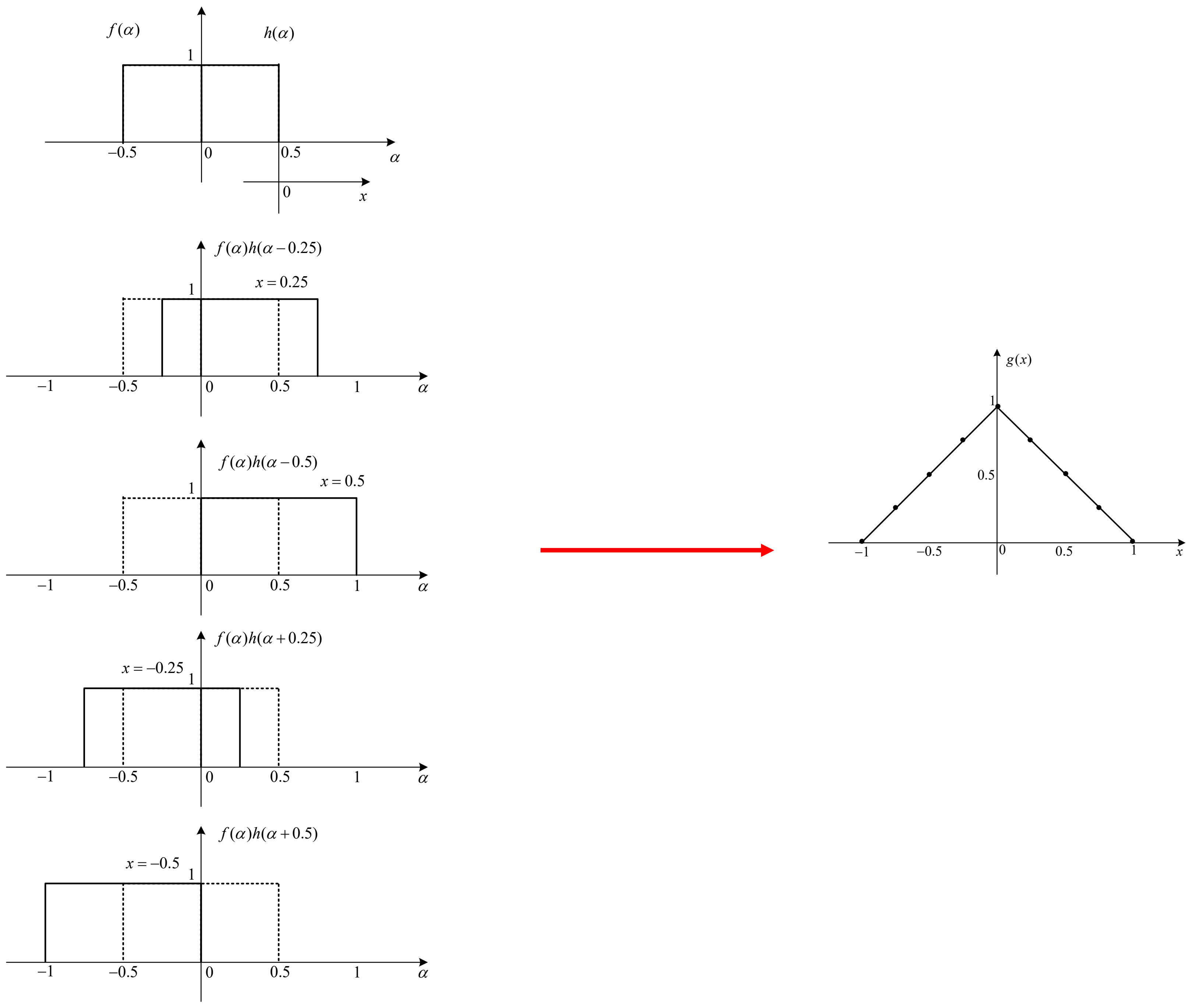


例：求两个矩形函数rect(*x*)的自相关.

解：

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(\alpha)\mathrm{rect}(x+\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{rect}(x+\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

$$g(x)=\mathrm{rect}(x)\bigstar\mathrm{rect}(x)=\begin{cases}\int_{-1/2}^{x+1/2}\mathrm{d}\alpha & -1\le x\le \\ \int_{x-1/2}^{1/2}\mathrm{d}\alpha & 0\le x\le 1\end{cases}=\mathrm{tri}(x)$$



$f(\alpha)$
$h(\alpha)$
1
−0.5
0
0.5
α
0
x
$f(\alpha)h(\alpha-0.25)$
$x=0.25$
1
−1
−0.5
0
0.5
1
α
$f(\alpha)h(\alpha-0.5)$
$x=0.5$
1
−1
−0.5
0
0.5
1
α
$f(\alpha)h(\alpha+0.25)$
$x=-0.25$
1
−1
−0.5
0
0.5
1
α
$f(\alpha)h(\alpha+0.5)$
$x=-0.5$
1
−1
−0.5
0
0.5
1
α
$g(x)$
1
0.5
−1
−0.5
0
0.5
1
x

2.6.6 相关的MATLAB实现

1. 用符号积分的方法

与卷积一样，相关的计算也是一种积分计算，因而也可以用**MATLAB**求积分的函数**int( )**来计算相关。

2. 相关的数值计算

相关的数值计算，首先要将函数离散化。在离散情况下，与离散卷积一样，要使相关及两个离散函数都具有相同的周期，以免产生交叠误差。两个离散函数相关运算的数学描述为：

$$g(m) = \sum_{n} x_1(n) x_2(n-m)$$

两个离散函数相关运算的**MATLAB**的相关实现用函数**xcorr( )**。

格式**1**：**Rxx = xcorr(x, N)**

格式**2**：**Rxy = xcorr(x, y, N)**

功能：格式**1**用于计算自相关；格式**2**用于计算互相关。

2.7 傅里叶变换的基本定理

2.7.1 卷积定理
2.7.2. 列阵定理
2.7.3 互相关定理
2.7.4 自相关定理
2.7.5 巴塞伐定理
2.7.6 广义巴塞伐定理
2.7.7 导数定理或微分变换定理
2.7.8 积分变换定理
2.7.9 转动定理
2.7.10 矩定理

2.7.1 卷积定理

$$F\{f(x,y)*g(x,y)\}=F(\xi,\eta)G(\xi,\eta)$$

$$F\{f(x,y)g(x,y)\}=F(\xi,\eta)*G(\xi,\eta)$$

两函数的卷积的傅里叶变换等于两函数各自傅里叶变换的乘积，而两个函数乘积的傅里叶变换等于两函数各自傅里叶变换的卷积。换言之，通过傅里叶变换，可将空间域(或频域)中的卷积运算，对应频域(或空间域)中的乘积运算。这一特性在傅里叶光学中非常有实用价值，它将傅里叶变换和卷积运算联系起来了，这空间频率滤波和光学信息处理提供了理论依据。另外，该定理为复杂的卷积运算提供了一条捷径：先求二函数各自的傅里叶变换，再相乘，然后对该乘积取逆傅里叶变换。

2.7.2 列阵定理

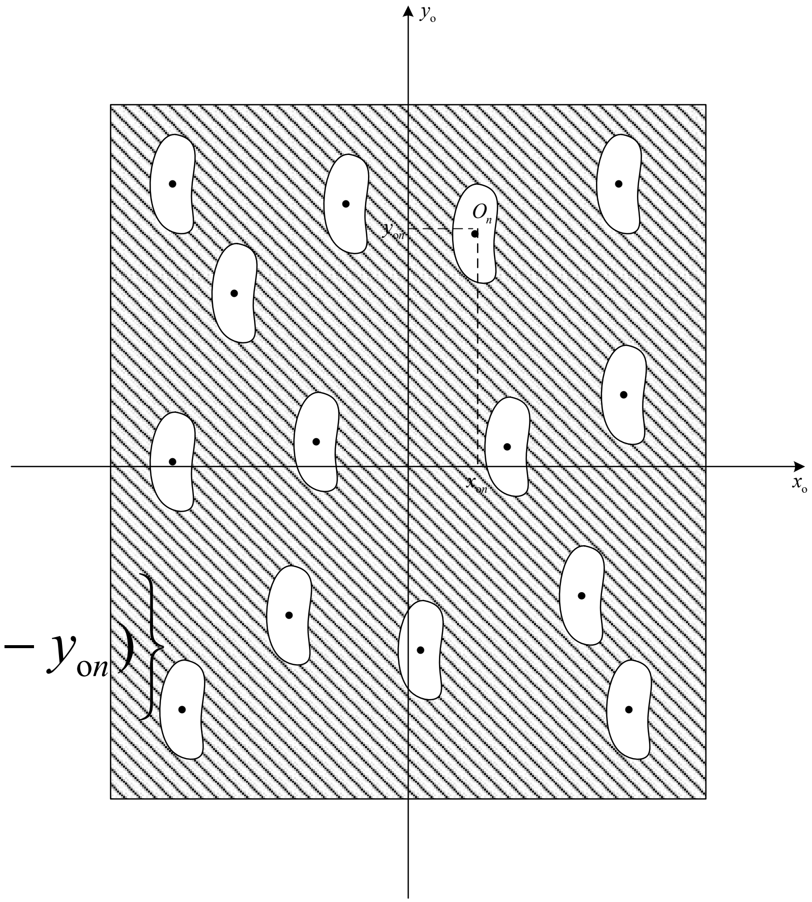
在光信息处理中，有时会遇到这样一类问题，如通过一个小孔的平移来构成的同形的取向相同的多孔的衍射屏，对于多孔的情况，这在数学上可用与卷积有关的列阵定理来表示。

$$t(x_o,y_o)=\sum_{n=1}^{N}t_n(x_o-x_{on},y_o-y_{on})$$

$$t(x_o,y_o)=t_0(x_o,y_o)*\sum_{n=1}^{N}\delta(x_o-x_{on},y_o-y_{on})$$

$$T(\xi_o,\eta_o)=F\{t_0(x_o,y_o)\}\cdot F\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta(x_o-x_{on},y_o-y_{on})\right\}$$

$$=T(\xi_o,\eta_o)\cdot\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi_o x_{on}+\eta_o y_{on})}$$



上式即为列阵定理。它说明取向相同的同形孔径构成的阵列，其频谱等于单个基元孔径频谱与排列成同样组态的点源列阵的频谱的乘积。

特别地，如果小孔是周期性排列的。因为卷积是一个平移运算过程，这样，周期性分布的多孔透过率函数可表示为：

$$t(x_o, y_o) = t_0(x_o, y_o) * \sum_{n=1}^{N} \delta(x_o - nL_x, y_o - nL_y)$$

$$\Downarrow$$

$$T(\xi_o, \eta_o) = F\{t_0(x_o, y_o)\} \cdot F\left\{\sum_{n=1}^{N} \delta(x_o - nL_x, y_o - nL_y)\right\}$$

$$= T(\xi_o, \eta_o) \cdot \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi_o nL_x + \eta_o nL_y)}$$

2.7.3 互相关定理

互谱能量密度或互功率谱

互相关定理又称为维纳-辛钦定理

$$F\{f(x,y) \star g(x,y)\} = F^*(\xi,\eta)\cdot G(\xi,\eta)$$

$$F\{f^*(x,y)\cdot g(x,y)\} = F^*(\xi,\eta) \star G(\xi,\eta)$$

所以，两个函数的互相关函数与它们的互谱密度构成傅里叶变换对。

上两式表示的互相关定理只适用于能量有限的信号。对能量无限、功能有限的信号，互相关定理也同样成立。设：

$$f_L(x)=\begin{cases} f(x) & |x|\le L \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{且有：} \quad F\{f_L(x)\}=F_L(\xi)$$

$$h_L(x)=\begin{cases} h(x) & |x|\le L \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{且有：} \quad F\{h_L(x)\}=H_L(\xi)$$

则互相关定理可表示为：

$$F\left\{\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\alpha)h_L^*(\alpha-x)\mathrm{d}\alpha\right\}=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\left[F_L(\xi)H_L(\xi)\right]$$

$$F\left\{\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\left[f_L(x)\cdot h_L^*(x)\right]\right\}=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F_L(\beta)H_L^*(\beta-\xi)\mathrm{d}\beta=F_L(\xi)\bigstar H_L^*(\xi)$$

例：已知函数 $f(x)=\delta(x+1)-\delta(x-1)$ 求该函数的卷积和自相关。

解：

$$f(x)*f(x)=[\delta(x+1)-\delta(x-1)]*[\delta(x+1)-\delta(x-1)]$$

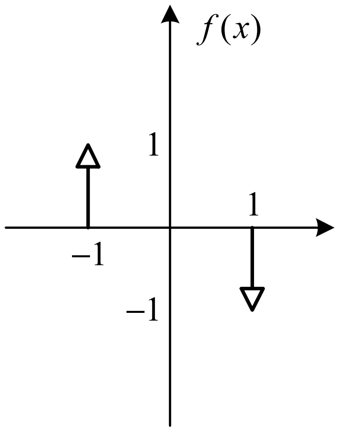
$$=\delta(x+1)*\delta(x+1)-\delta(x+1)*\delta(x-1)-\delta(x-1)*\delta(x+1)+\delta(x-1)*\delta(x-1)$$

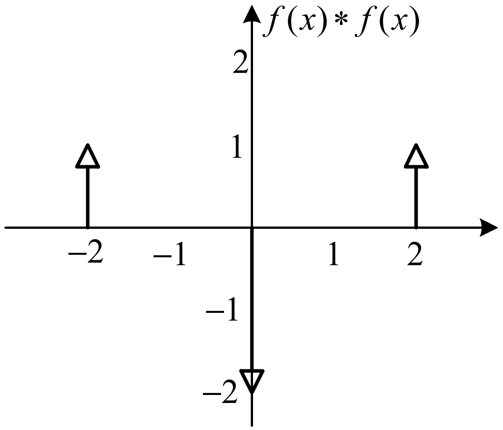
$$=\delta(x+2)-2\delta(x)+\delta(x-2)$$

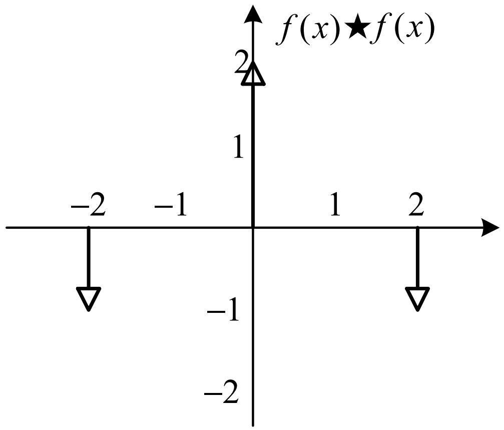
$$f(x)\bigstar f(x)=f(x)*f(-x)=[\delta(x+1)-\delta(x-1)]*[\delta(-x+1)-\delta(-x-1)]$$

$$=\delta(x+1)*\delta[-(x-1)]-\delta(x+1)*\delta[-(x+1)]-\delta(x-1)*\delta[-(x-1)]$$

$$+\delta(x+1)*\delta[-(x+1)]=-\delta(x+2)+2\delta(x)-\delta(x-2)$$







2.7.4 自相关定理

$$F\{f(x,y) \star f(x,y)\} = |F(\xi,\eta)|^2$$

$$F\{|f(x,y)|^2\} = F(\xi,\eta) \star F(\xi,\eta)$$

即信号的自相关函数与其功率谱函数之间存在傅里叶变换关系。对于能量无限，功率有限的函数，自相关定理为：

$$F\{f_L(x) \star f_L(x)\} = |F_L(\xi)|^2$$

$$F\left\{\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}|f_L(x)|^2\right\} = F_L(\xi) \star F(\xi)$$

2.7.5 巴塞伐定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} |F(\xi,\eta)|^2 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

巴塞伐定理与函数的自相关运算相对应。这个定理表明对能量计算既可在空间域中进行，也可以在频域中进行，两者完全等价。从物理意义上看这是能量守恒的体现，故也称为能量积分定理。

2.7.6 广义巴塞伐定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)G^*(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

广义巴塞伐定理与函数的互相关运算相对应。

2.7.7 导数定理或微分变换定理

$$f^{(m,n)}(x,y)=\frac{\partial^{(m+n)}f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \qquad F^{(m,n)}(\xi,\eta)=\frac{\partial^{(m+n)}f(\xi,\eta)}{\partial \xi^m \partial \eta^n}$$

$$F\{f^{(m,n)}(x,y)\}=(\mathrm{i}2\pi\xi)^m(\mathrm{i}2\pi\eta)^n F(\xi,\eta)$$

$$F^{-1}\{F^{(m,n)}(\xi,\eta)\}=(-\mathrm{i}2\pi x)^m(-\mathrm{i}2\pi y)^n f(x,y)$$

$$\delta^{(m,n)}(x,y)=\frac{\partial^{(m+n)}\delta(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \qquad F\{\delta^{(m,n)}(x,y)\}=(\mathrm{i}2\pi\xi)^m(\mathrm{i}2\pi\eta)^n$$

导数定理是设计微分滤波器的理论基础，在数字信号处理和光学信息处理中都具有重要的应用。应用导数定理，还可以方便地计算某些初等函数的导数。

2.7.8 积分变换定理

$$F\left\{\int_{-\infty}^{x} f(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{i}2\pi\xi}F(\xi) & \xi \neq 0 \\ \dfrac{F(0)}{2}\delta(\xi) & \xi = 0 \end{cases}$$

2.7.9 转动定理

$$F\{f(r,\theta)\} = F(\rho,\phi)$$

$$F\{f(r,\theta+\alpha\} = F(\rho,\phi+\alpha)$$

2.7.10 矩定理

$$M_{m,n}=\iint_{-\infty}^{\infty}x^m y^n f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1. 零阶矩定理

体积对应关系

$$M_{0,0}=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(0,0) \qquad f(0,0)=\iint_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

2. 一阶矩定理

$$M_{1,0}=\iint_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}F^{(1,0)}(0,0)$$

$$M_{0,1}=\iint_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}F^{(0,1)}(0,0)$$

表示某随机变量的概率密度时，其一阶矩就是该随机变量统计平均 **(**数学期望**)**。

3. 二阶矩定理

$$M_{1,1}=\iint_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)F^{(1,1)}(0,0)$$

$$M_{2,0}=\iint_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 F^{(2,0)}(0,0)$$

$$M_{0,2}=\iint_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 F^{(0,2)}(0,0)$$

二阶矩在概率论中称为均方值。