

# 电动力学

第三章：磁标势方法，磁多级矩

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

April 18, 2019

## 磁标势:

静磁场是有旋矢量场，一般情况下不能用标势描写，只能采用矢势描写。

但是在铁磁质情形下，空间中不存在传导电流分布 ( $\vec{J}_f = 0$ )，静磁场基本方程退化为： $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ， $\nabla \times \vec{H} = 0$ ，这里，

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$\vec{M}$ 是铁磁质的磁化强度。利用此式，可以把磁场的 Gauss 定理用磁场强度  $\vec{H}$  的散度重新表达为：

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

类比于静电场中极化电介质束缚电荷体密度  $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ ，现在定义铁磁质中“假想磁荷体密度”为：

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

## 磁标势 (二):

因此, 在  $\vec{J}_f = 0$  的区域, 磁场强度矢量  $\vec{H}$  满足微分方程:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m / \mu_0, \quad \nabla \times \vec{H} = 0$$

警告:

$\nabla \times \vec{H} = 0$  并不足以确保对于  $\vec{J}_f = 0$  区域的任何一条闭合曲线  $C$ , 均有:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 倘若回路  $C$  链环着电流、即有电流穿过  $C$  所围的曲面  $S$ , 即使无旋条件  $\nabla \times \vec{H} = 0$  在回路  $C$  上处处成立, 我们仍有:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

## 磁标势:

倘若在区域  $V$  中,

- $\vec{j}_f = 0$ .
- 所有的闭合曲线  $C$  都没有链环着电流<sup>1</sup>,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

则此区域中静磁场的磁场强度矢量可以看做保守力场, 从而可以将其表为一个标量场  $\varphi_m$  的负梯度:

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$\varphi_m$  就称为静磁场的磁标势.

---

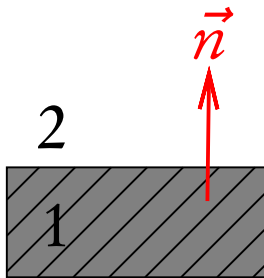
<sup>1</sup>即区域  $V$  是没有自由电流分布的单连通区域.

## 例题:

例: 证明  $\mu \rightarrow \infty$  的磁性物质与真空的分界面是等磁标势面.

解: 以角标 1 代表磁性介质, 2 代表真空. 设所考虑的空间区域中  $\vec{J}_f = 0$ , 以致于静磁基本方程是:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = 0.$$



将静磁基本方程运用到磁介质与真空的分界面上, 则得到:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0.$$

即:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}.$$

在磁介质中,  $\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1$ . 在真空中,  $\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2$ . 于是,  $B_{2n} = B_{1n}$  可以等价地写为  $\mu_0 H_{2n} = \mu H_{1n}$ .

## 例 (二):

用  $\mu_0 H_{2n} = \mu H_{1n}$  替代  $B_{2n} = B_{1n}$  的前提条件是  $H_{1n} \neq 0$ . 倘若  $H_{1n} = 0$ , 则磁介质的物态方程  $\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1$  不再有效, 应代之以  $\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M})$ , 此时  $B_{1n} = \mu_0 M_n$ , 边界条件  $B_{2n} = B_{1n}$  应改写为:  $H_{2n} = M_n$ .

分界面上真空一侧磁场强度的切向分量与法向分量的比值计算如下:

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{\mu_0 H_{2t}}{B_{2n}} = \frac{\mu_0 H_{1t}}{B_{1n}} = \left[ \frac{\mu_0}{\mu} \right] \frac{H_{1t}}{H_{1n}}$$

当  $\mu \rightarrow \infty$ ,

$$H_{2t} \rightarrow 0$$

即分界面真空一侧的磁场强度方向与分界面垂直, 因而分界面为等磁标势面.

物理小贴士:

一般软磁材料的  $\mu$  值都很大,  $\mu \geq 10000$ , 因此用这些材料制成的磁极, 其表面近似为等磁标势面. 这个特点对于磁极设计是很重要的.

## 例题:

**例:** 半径为  $R$  的铁磁球均匀磁化, 设其磁化强度矢量为  $\vec{M}$ . 求其产生的磁场.

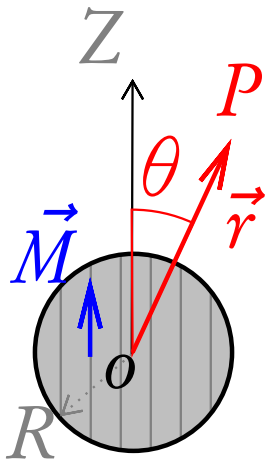
**解:** 将空间划分为球内 (1 区)、球外 (2 区) 两个区域. 球外显然无假想磁荷. 在铁磁球内部, 由于均匀磁化, 也没有假想磁荷分布:

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0$$

故假想磁荷只能分布于铁磁球表面. 球内外的磁标势均满足 Laplace 方程:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0.$$

设场点  $P$  的位置用球坐标  $(r, \theta, \phi)$  描写, 并以  $\vec{M}$  的方向为  $Z$  轴正向建立辅助的直角坐标系. 显然, 磁标势的分布具有关于  $Z$  轴的“轴对称性”:



## 例 (二):

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

球内磁标势在  $r \rightarrow 0$  时应该有限, 故  $\varphi_1(r, \theta)$  应只依赖于  $r$  的非负幂次:

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (0 \leq r < R)$$

球外磁标势在  $r \rightarrow \infty$  时应该有限, 故  $\varphi_2(r, \theta)$  应只依赖于  $r$  的负幂次:

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (R < r < \infty)$$

由此求得铁磁球内外空间磁场强度  $\vec{H}$  的分布如下:



### 例 (三):

球内磁场强度矢量:

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= -\nabla\varphi_1 \\&= -\left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\right)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nr^nP_n(\cos\theta) \\&= -\vec{e}_r\sum_{n=0}^{+\infty}na_nr^{n-1}P_n(\cos\theta) - \vec{e}_\theta\sum_{n=0}^{+\infty}a_nr^{n-1}\partial_\theta P_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

球外磁场强度矢量:

$$\begin{aligned}\vec{H}_2 &= -\nabla\varphi_2 \\&= -\left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \\&= \vec{e}_r\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{b_n}{r^{n+2}}P_n(\cos\theta) - \vec{e}_\theta\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{r^{n+2}}\partial_\theta P_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

#### 例(四):

铁磁球表面内外两侧磁场强度的切向分量分别为:

$$H_{1\theta} = - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^{n-1} \partial_{\theta} P_n(\cos \theta)$$
$$H_{2\theta} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{r^{n+2}} \partial_{\theta} P_n(\cos \theta)$$

而磁感应强度  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$  的法向分量分别为:

$$\begin{aligned} B_{1r} &= \mu_0 H_{1r} + \mu_0 M_r \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} n \mu_0 a_n r^{n-1} P_n(\cos \theta) + \mu_0 M \cos \theta \\ B_{2r} &= \mu_0 H_{2r} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \mu_0 \frac{b_n}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

## 例 (五):

在铁磁球表面上 ( $r = R$ ),  $B_{1r} = B_{2r}$ ,  $H_{1\theta} = H_{2\theta}$ . 于是,

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{+\infty} n \mu_0 a_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) + \mu_0 M \cos \theta &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \mu_0 \frac{b_n}{R^{n+2}} P_n(\cos \theta) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^{n-1} \partial_\theta P_n(\cos \theta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{R^{n+2}} \partial_\theta P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

比较  $P_n(\cos \theta)$  的系数<sup>2</sup>, 得:

$$a_1 = \frac{1}{3}M, \quad b_1 = \frac{1}{3}MR^3, \quad a_n = b_n = 0, \quad \forall n \neq 1.$$

所以, 均匀磁化的铁磁球内外磁标势分布情况如下:

$$\varphi_1 = \frac{1}{3}Mr \cos \theta = \frac{1}{3} \vec{M} \cdot \vec{r}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3} \frac{MR^3}{r^2} \cos \theta = \frac{R^3}{3} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

---

<sup>2</sup> 回忆:  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ .

例 (六):

铁磁球内部的磁场强度分布计算如下:

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= -\nabla\varphi_1 \\&= -\frac{M}{3}\left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\right)(r\cos\theta) \\&= -\frac{M}{3}(\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta) \\&= -\frac{M}{3}\left[(\cos\theta\hat{k} + \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j})\cos\theta\right. \\&\quad \left.-(-\sin\theta\hat{k} + \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j})\sin\theta\right] \\&= -\frac{M}{3}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\hat{k} = -\frac{\vec{M}}{3}\end{aligned}$$

所以, 球内的磁感应强度分布是:

$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}, \quad \text{匀强磁场.}$$

## 例 (七):

铁磁球外部空间的磁场强度分布计算如下:

$$\begin{aligned}\vec{H}_2 &= -\nabla\varphi_2 = -\frac{MR^3}{3}\left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\right)\frac{\cos\theta}{r^2} \\&= \frac{MR^3}{3r^3}(2\vec{e}_r\cos\theta + \vec{e}_\theta\sin\theta) \\&= \frac{MR^3}{3r^3}[3\vec{e}_r\cos\theta - (\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta)] \\&= \frac{MR^3}{3r^3}(3\vec{e}_r\cos\theta - \hat{k}) = \frac{R^3}{3}\frac{3(\vec{M}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}\end{aligned}$$

回忆电磁学知识知: 电偶极子  $\vec{p}$  激发的静电场场强分布为,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

所以, 铁磁球外部的磁场是一个磁偶极矩为  $\vec{m}$  的磁偶极子产生的场:

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}, \quad \vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\vec{M}.$$

例 (八):

铁磁球外部空间磁场的磁感应强度分布是:

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2 = \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{M}}{r^5}$$

## 作业:

- ① 将一半径为  $R$ 、磁导率为  $\mu$  的介质球置于均匀外磁场  $\vec{H}_0$  中. 求空间的磁感应强度分布和介质球的磁偶极矩  $\vec{m}$ .
- ② 一个内外半径分别为  $a$ 、 $b$  的磁介质球壳, 其磁导率为  $\mu$ . 现将其放入均匀外磁场  $\vec{H}_0$ , 求球壳内部的  $\vec{B}$  并讨论  $\mu \gg \mu_0$  极限下的磁屏蔽效应.
- ③ 一个半径为  $R$  的均匀磁化球放入磁导率为  $\mu$  的无限大介质中. 设此磁化球的固有磁化强度矢量为  $\vec{M}_0$ , 试求空间的磁场分布.

## 磁多极矩:

本节目的:

现在研究空间局部范围内的稳恒电流分布在远处场点产生的静磁场. 将引入“磁多极矩”的概念.

给定电流分布在空间激发的磁场的矢势是:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}, \quad r = |\vec{x} - \vec{x}'|.$$

写出此式时已经选择无穷远点为矢势零点. 如果电流分布于小区内, 而场点距离该区域非常远, 则可以将  $1/r$  按照  $(1/R)$  作泰勒展开<sup>3</sup>:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - x'_i \partial_i \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \cdots$$

将此展开式代入到上述矢势的表达式中, 可得:

---

<sup>3</sup>我们约定:  $R = |\vec{x}|$ .



## 矢势的多极展开:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \left[ \frac{1}{R} - x'_i \partial_i \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{R} + \cdots \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{R^3} \int_V d^3x' x'_i \vec{J}(\vec{x}') + \cdots\end{aligned}$$

这里利用了数学恒等式<sup>4</sup>:

$$\partial_i \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \partial_i R = -\frac{1}{R^2} \partial_i \sqrt{x_j x_j} = -\frac{1}{2R^2} \frac{2x_j (\partial_i x_j)}{\sqrt{x_k x_k}} = -\frac{x_j \delta_{ij}}{R^3} = -\frac{x_i}{R^3}.$$

矢势展开式的前两项分别是:

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}')$$

和

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} x_i \int_V d^3x' x'_i \vec{J}(\vec{x}')$$

---

<sup>4</sup>场点位置矢径的长度是:  $R = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x_i x_i}$ .

## 矢势的多极展开 (二):

为了看清矢势多极展开各项的物理意义, 我们现在构造一个数学恒等式. 我们已经约定电流分布于小区域  $V$  中, 没有电流溢出  $V$  的边界面  $S$ . 所以, 若以  $f, g$  表示源点坐标的两个任意的标量函数, 则有:

$$\oint_S \left[ f(\vec{x}') g(\vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') \right] \cdot d\vec{s}' = 0$$

可以利用奥高定理将此式左端改写为区域  $V$  上的体积分:

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot \left[ f(\vec{x}') g(\vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') \right]$$

注意到,

$$\nabla' \cdot (f \vec{g}) = (\nabla' f \cdot \vec{g} + f \nabla' \cdot \vec{g}) + f g \nabla' \cdot \vec{J}$$

以及稳恒电流连续性方程  $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}') = 0$ , 我们有:

$$\int_V d^3x' \left[ f(\vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') \cdot \nabla' g(\vec{x}') + g(\vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') \cdot \nabla' f(\vec{x}') \right] = 0.$$

### 矢势的多极展开 (三):

- 取  $f=1$ ,  $g=x'_i$ . 在直角坐标系中,

$$\nabla' f = 0, \quad \nabla' g = \vec{e}_j \partial'_j x'_i = \vec{e}_j \delta_{ij} = \vec{e}_i$$

上述数学恒等式退化为:

$$0 = \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{e}_i = \int_V d^3x' J_i(\vec{x}')$$

鉴于直角坐标系基矢是常矢量, 上式的成立意味着:

$$\int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') = 0$$

所以, 矢势多极展开的首项等于零,

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V d^3x' \vec{J}(\vec{x}') = 0$$

此式表明: 与静电标势情形不同, 静磁矢势展开式不含“点磁荷”项, 即不含与点电荷静电势对应的项。

## 矢势的多极展开 (四):

- 取  $f = x'_i$ ,  $g = x'_k$ . 在直角坐标系中,

$$\nabla' f = \vec{e}_j \partial'_j x'_i = \vec{e}_j \delta_{ij} = \vec{e}_i, \quad \nabla' g = \vec{e}_k$$

上述数学恒等式退化为:

$$0 = \int_V d^3 x' \left[ x'_i \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{e}_k + x'_k \vec{J}(\vec{x}') \cdot \vec{e}_i \right] = \int_V d^3 x' \left[ x'_i J_k(\vec{x}') + x'_k J_i(\vec{x}') \right]$$

于是, 矢势多极展开式的第二项所涉及的积分可进一步简化. 选取直角坐标系使得  $\vec{J}(\vec{x}') = \vec{e}_k J_k(\vec{x}')$ , 则:

$$\begin{aligned} x_i \int_V d^3 x' x'_i \vec{J}(\vec{x}') &= x_i \vec{e}_k \int_V d^3 x' x'_i J_k(\vec{x}') \\ &= \frac{1}{2} x_i \vec{e}_k \int_V d^3 x' \left[ x'_i J_k(\vec{x}') - x'_k J_i(\vec{x}') \right] \\ &= \frac{1}{2} x_i \vec{e}_k \int_V d^3 x' \epsilon_{ikl} \left[ \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') \right]_l = -\vec{x} \times \left[ \frac{1}{2} \int_V d^3 x' \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') \right] \end{aligned}$$

## 矢势的多极展开 (五):

矢势展开式的第二项代表磁偶极子的矢势. 磁偶极矩定义为:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')$$

所以, 磁偶极子磁场的矢势可以写为:

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{R^3}$$

式中  $R = |\vec{x}|$  是场点到磁偶极子的距离.

- 倘若稳恒电流分布于闭合导线  $C$ , 则有  $\vec{j} d^3x' = I d\vec{l}$ , 此载流线圈表现为一个磁偶极子, 其磁偶极矩矢量表达为:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{x}' \times d\vec{l} = I \vec{S}$$

这里的  $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{x}' \times d\vec{l}$  是闭合曲线  $C$  所包围的面积矢量.

## 磁偶极子的磁场:

现在计算磁偶极子所激发磁场的磁感应强度矢量:

$$\begin{aligned}\vec{B}^{(1)}(\vec{x}) &= \nabla \times \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \frac{\vec{x}}{R^3} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \vec{m} \times \nabla \frac{1}{R} \right]\end{aligned}$$

这里使用了数学恒等式:

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{x}}{R^3}$$

进一步的化简需要计算  $\nabla \times (\vec{m} \times \nabla \psi)$ , 此处  $\psi = 1/R$ . 采用直角坐标系, 我们有:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{m} \times \nabla \psi) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} m_l \partial_m \psi) \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{lnk} m_l \partial_j \partial_n \psi \\ &= \vec{e}_i (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) m_l \partial_j \partial_n \psi \\ &= \vec{e}_i m_i \partial_j \partial_j \psi - \vec{e}_i m_j \partial_j \partial_i \psi = \vec{m} \nabla^2 \psi - (\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \psi\end{aligned}$$

## 磁偶极子的磁场 (二):

回忆,

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x})$$

对于远场区的场点,  $\vec{x} \neq 0$ , 所以  $\nabla^2 \psi = 0$ . 于是, 磁偶极子  $\vec{m}$  在远场区激发的磁场的磁感应强度分布是:

$$\vec{B}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \psi = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{x}}{R^3}$$

磁偶极子的磁标势:

上述磁偶极子的磁感应强度的表达式启发我们可以引入磁标势

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{4\pi R^3}$$

描写磁偶极子的磁场,  $\vec{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)}$ .

## 磁偶极子的磁场 (三):

理由如下.

选择整体直角坐标系做计算, 则  $\nabla = \vec{e}_i \partial_i$ ,  $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$  且  $R = \sqrt{x_i x_i}$ . 于是,

$$\partial_j \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \partial_j R = -\frac{1}{R^2} \partial_j \sqrt{x_i x_i} = -\frac{2x_i (\partial_j x_i)}{2R^3} = -\frac{x_j}{R^3}$$

由此我们推论:

$$\frac{\vec{x}}{R^3} = \vec{e}_j \frac{x_j}{R^3} = -\vec{e}_j \partial_j \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R}$$

所以, 磁偶极子的磁感应强度可以等价地改写为:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(1)} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{x}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} m_j \partial_j \left[ \vec{e}_i \partial_i \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_i \partial_i \left[ m_j \partial_j \frac{1}{R} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_i \partial_i \left[ m_j \frac{x_j}{R^3} \right] \\ &= -\mu_0 \nabla \left[ \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{4\pi R^3} \right] = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)} \end{aligned}$$



## 磁偶极子的磁场 (四):

设磁偶极矩矢量沿  $Z$  轴正向,  $\vec{m} = m\hat{k}$ . 对场点  $P$  的位置取球坐标  $(R, \theta, \phi)$ , 则  $\vec{x} = R\vec{e}_R$ , 这里的  $\vec{e}_R$  是  $P$  点  $R$  增大方向的单位矢量:

$$\vec{e}_R = \cos \theta \hat{k} + \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j}$$

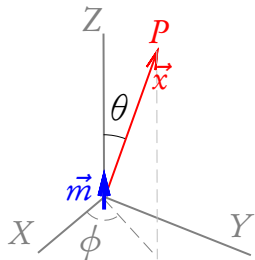
根据定义  $\vec{e}_\theta = \partial_\theta \vec{e}_R$  和  $\vec{e}_\phi = \partial_\phi \vec{e}_R / \sin \theta$ ,  $P$  点处另外两个球坐标系基矢也可以用整体直角坐标系基矢表出:

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \hat{k} + \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

所以,

$$\vec{m} \cdot \nabla = m\hat{k} \cdot \left[ \vec{e}_R \partial_R + \frac{\vec{e}_\theta}{R} \partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{R \sin \theta} \partial_\phi \right] = m \left[ \cos \theta \partial_R - \frac{\sin \theta}{R} \partial_\theta \right]$$



## 磁偶极子的磁场 (五):

场点  $P$  处的磁感应强度计算如下:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{x}}{R^3} \\ &= -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[ \cos \theta \partial_R - \frac{\sin \theta}{R} \partial_\theta \right] \frac{\vec{e}_R}{R^2} \\ &= -\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (-2 \cos \theta \vec{e}_R - \sin \theta \partial_\theta \vec{e}_R) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \vec{e}_R + \sin \theta \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

对于一个由“载有电流强度为  $I$  且半径为  $a$  的圆环状导线”形成的磁偶极子,  $m = \pi a^2 I$ , 上式可等价地表达为:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{4R^3} (2 \cos \theta \vec{e}_R + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

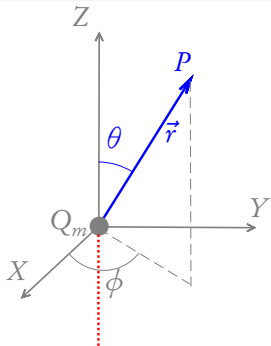
这正是前面例题中得到的结果.

## 例题:

例: 假设存在磁单极子, 其磁荷为  $Q_m$ , 它的磁场强度分布为:

$$\vec{H} = \frac{Q_m \vec{r}}{4\pi\mu_0 r^3}$$

试求出它的矢势的一个可能的表达式, 并讨论其奇异性.



解: 此磁单极子所产生的磁场的磁感应强度为  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ . 从朴素的观点出发, 人们常常把磁单极设想成点磁荷. 以点磁荷占据的位置为坐标原点建立直角坐标系, 如图示. 利用数学恒等式

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

求  $\vec{B}$  的散度, 知:

$$\nabla \cdot \vec{B} = Q_m \delta^{(3)}(\vec{r})$$

## 例 (二):

所以, 在除去点磁荷所占据的坐标原点之外的其他空间点上 ( $r \neq 0$ ), 均有  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , 因此引入矢势  $\vec{A}$  使得:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = \frac{Q_m \vec{r}}{4\pi r^3}$$

的可能性是存在的<sup>5</sup>. 在场点  $P$  处建立球坐标系, 则:  $\vec{r} = r\vec{e}_r$ . 注意到  $\vec{e}_r = \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi$ , 可以将磁单极的磁感应强度矢量改写为:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{Q_m \vec{e}_r}{4\pi r^2} \\ &= \frac{Q_m (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi)}{4\pi r^2} \\ &= \frac{Q_m \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{\vec{e}_\theta}{r} \times \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \right] \\ &= \frac{Q_m \sin \theta}{4\pi} (\nabla \theta \times \nabla \phi) = -\frac{Q_m}{4\pi} [\nabla(\cos \theta) \times \nabla \phi]\end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>事实上,  $\vec{A}$  的存在还需要同时排除 Dirac 奇异弦占据的空间.

### 例 (三):

回忆矢量分析公式

$$\nabla \Phi \times \nabla \Psi = \nabla \times (\Phi \nabla \Psi),$$

$$\nabla \times \nabla \Psi = 0,$$

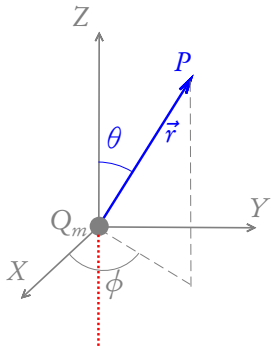
以及

$$\nabla \phi = \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta},$$

上式可以继续改写如下:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= -\frac{Q_m}{4\pi} \nabla \times (\cos \theta \nabla \phi) \\ &= \frac{Q_m}{4\pi} \nabla \times [(c - \cos \theta) \nabla \phi] \\ &= \nabla \times \left[ \frac{Q_m (c - \cos \theta) \vec{e}_\phi}{4\pi r \sin \theta} \right] = \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

式中的  $c$  是一任意常数.

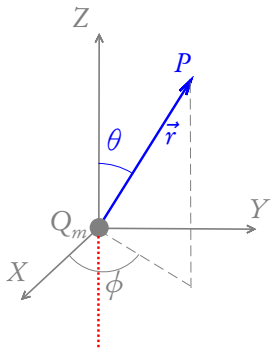


#### 例(四):

所以, 磁单极子磁场矢量势的一个可能的表达式可以通过取  $c=1$  得到:

$$\vec{A} = \frac{Q_m(1 - \cos\theta)\vec{e}_\phi}{4\pi r \sin\theta}$$

式中  $r > 0$  且  $0 \leq \theta < \pi$ . 注意矢势的这一表达式在  $\theta = \pi$  的负  $z$  轴上奇异. 负  $z$  轴因此称为 Dirac 奇异弦.



若取  $c = -1$ , 则得磁单极子磁场矢量势的另一可能的表达式:

$$\vec{A}' = -\frac{Q_m(1 + \cos\theta)\vec{e}_\phi}{4\pi r \sin\theta}$$

式中  $r > 0$  且  $0 < \theta \leq \pi$ . 矢势  $\vec{A}'$  在  $\theta = 0$  的正  $z$  轴上奇异. 此时正  $z$  轴是 Dirac 弦. 不难看出:  $\vec{A}' - \vec{A} = -\frac{Q_m}{2\pi} \nabla\phi$ , 合理!

## 疑问：

Dirac 磁单极所激发的磁场是如何保证磁感应线的闭合性的？

前面的分析表明：磁单极矢势

$$\vec{A}' = -\frac{Q_m(1 + \cos\theta)\vec{e}_\phi}{4\pi r \sin\theta}$$

的定义域为  $r > 0$  且  $0 < \theta \leq \pi$ 。如果要求其磁感应强度分布具有相同的定义域：

$$\vec{B} = \frac{Q_m \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad (r > 0, 0 < \theta \leq \pi)$$

则完全有可能保证磁感应线的闭合性。事实上，Dirac 建议把磁单极的磁感应强度定义为：

$$\vec{B} = \frac{Q_m \vec{r}}{4\pi r^3} - Q_m \delta(x) \delta(y) \Theta(z) \hat{k}$$

式中  $\Theta(s)$  是 Heaviside 阶跃函数,

$$\Theta(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} \rightsquigarrow \frac{d\Theta(s)}{ds} = \delta(s)$$

在离开原点与正  $z$  轴的场点处, 磁单极和点磁荷  $Q_m$  激发的磁感应分布并无二致:

$$\vec{B} = \frac{Q_m \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad (r > 0, 0 < \theta \leq \pi)$$

点磁荷的磁场是有源场、违反了 Maxwell 方程组。磁单极的磁场却是无源场、它并没有违反 Maxwell 方程组:

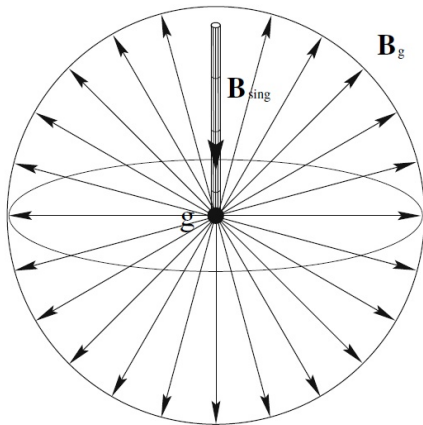
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot \left[ \frac{Q_m \vec{r}}{4\pi r^3} - Q_m \delta(x) \delta(y) \Theta(z) \hat{k} \right] \\ &= \frac{Q_m}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} - Q_m \delta(x) \delta(y) \frac{d\Theta(z)}{dz} \\ &= Q_m \left[ \delta^{(3)}(\vec{r}) - \delta(x) \delta(y) \delta(z) \right] = 0 \end{aligned}$$



从初等电磁学知, 置于正  $z$  轴上的一个半无限长载流螺线管激发的磁场是磁力线分布于螺线管内部的均匀磁场:

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \hat{k}, & 0 \leq r < a \\ 0, & a < r < +\infty \end{cases}$$

式中  $a$  为螺线管的截面半径. 所以, 电动力学理论允许的磁单极具有如下物理图像:



- 把磁单极子理解为半无限长的载流螺线管，这一图像早就出现在某些电动力学教材中了，例如著名的泡利物理学讲义第一卷(中译本)Page43.

## § 12. 静磁学

电动力学现象不能仅由电场描述；而且还需要磁场。正如电场与电荷相互作用一样，磁场与所谓磁偶极子相互作用，藉助于后者则能量度磁场。(以后将看到，也可以用运动电荷来量度磁场。)

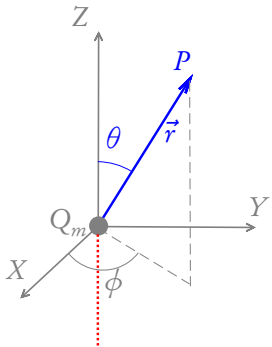
同电的情况相比，一个非常本质的差别是并不存在磁单极子；它们总是成对地出现的，因此“总磁荷”为零。可以通过把磁偶极子的一个磁极移至足够远处而近似地得到单极子(即，很长的偶极子)。吉伯(Gilbert)曾证明，库仑定律对这些单极子也适用。

- 半无限长现实吗？一个可能的解决方案是借助于黑洞。

## 新问题：

磁单极子磁场的矢量势有其他表达式吗？

我们可以按如下方式重新改写磁单极子磁场的磁感应强度：



$$\begin{aligned}\vec{B} &= -\frac{Q_m}{4\pi} \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \times \left( \sin \theta \frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) \\&= -\frac{Q_m}{4\pi} \nabla \phi \times (\sin \theta \nabla \theta) \\&= \frac{Q_m}{4\pi} \nabla(\phi + c) \times \nabla(\cos \theta) \\&= \frac{Q_m}{4\pi} \nabla \times [(\phi + c) \nabla(\cos \theta)] \\&= -\frac{Q_m}{4\pi} \nabla \times \left[ \frac{(\phi + c) \sin \theta \vec{e}_\theta}{r} \right]\end{aligned}$$

式中的  $c$  是一任意常数。

把上式与磁矢势的定义式  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  相比较，显然可见磁单极子的矢量势可以表为：

$$\vec{A} = -\frac{Q_m}{4\pi} \frac{(\phi + c) \sin \theta \vec{e}_\theta}{r}$$

此式不具有方位角变换

$$\phi \rightarrow \phi + 2\pi$$

下的周期性。因此，矢势的奇异性必定在某个  $\phi$  等于常数的平面内。若取  $c = 0$  且  $0 \leq \phi < 2\pi$ ，则矢势的奇异性为  $\phi = 2\pi$  的平面，

$$\vec{A} = -\frac{Q_m}{4\pi} \frac{\phi \sin \theta \vec{e}_\theta}{r}$$

注释：

- ① 奇异性为  $\phi = 2\pi$  的平面不能解释为 Dirac 弦，只能解释为 Dirac 膜 (brane)。
- ② 那么，Dirac 弦沿  $z$  轴的磁单极子的矢量势应该具有什么样的表达式呢？

## 小结:

设磁单极子坐落在坐标原点，建立球坐标系及辅助的直角坐标系，则在库仑规范中我们有：

- ① Dirac 弦分别是正、负  $x$  轴的磁单极子的矢量势为：

$$\vec{A}_{\pm} = \pm \frac{Q_m}{4\pi r} \frac{(\sin \phi \vec{e}_{\theta} + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_{\phi})}{1 \mp \sin \theta \cos \phi}$$

- ② Dirac 弦分别是正、负  $y$  轴的磁单极子的矢量势为：

$$\vec{A}'_{\pm} = \mp \frac{Q_m}{4\pi r} \frac{(\cos \phi \vec{e}_{\theta} - \cos \theta \sin \phi \vec{e}_{\phi})}{1 \mp \sin \theta \sin \phi}$$

## 练习题<sup>6</sup>:

- 请逐一分析上述四个磁单极子矢量势的奇异性，并计算它们的散度与旋度。

---

<sup>6</sup>It is only optional.