中山大学**东校区** 2005 级第一学期高等数学一期末考试试题(A)答案 （2006 年 1 月）

一. 1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)-(3-x)}{(x^2-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x})}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 。

2. $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\cos\frac{3}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\cos\frac{3}{x}}\cdot(-\sin\frac{3}{x})\cdot\frac{-3}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}}=-\dfrac{9}{2}$

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{9}{2}}$ 。

二. 1. $dy=e^{\tan x}(\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}+\sqrt{2+x^2}\sec^2 x)dx$ 。

2. $y'=(1+3^x)^{\arcsin x}\cdot(\dfrac{\ln(1+3^x)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3^x\ln 3\cdot\arcsin x}{1+3^x})$ 。

3. $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ ，

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$ 。

三. 1. 原式 $=\int(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+x})dx$

$=-\dfrac{1}{x}-\ln|x|+\ln|1+x|+C$ 。

2. 原式 $=\int\dfrac{1}{a^2\cos^2 t}dt=\dfrac{1}{a^2}\tan t+C$

$=\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$ 。

3．原式$=\int_2^3 \frac{2}{5}te^t dt \quad =\frac{2}{5}(te^t-e^t)\Big|_2^3=\frac{2}{5}(2e^3-e^2)$ 。

4．原式$=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)dx-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=\frac{19}{3}$ 。

四．直线 l 的参数方程是：$\begin{cases} x= \ \ -2t \\ y= \ 5+3t \\ z=14+7t \end{cases}$ ，

所求直线的方程是：$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-8}{1}$ 。

五．$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} t^2 e^{-t^2}dt}{x(1-\cos x)}$ ，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x}{1-\cos x+x\sin x}=\frac{2}{3}$$ 。

六．（1） $f'(x)=\dfrac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$ ，

单调增区间：$(-\infty,0),(0,1),(3,+\infty)$，单调减区间：$(1,3)$ ，

极小值点 $x=3$ ，

（2） $f''(x)=\dfrac{6x}{(1-x)^4}$ ，

凸区间：$(-\infty,0)$ ，凹区间：$(0,1),(1,+\infty)$ ，

拐点： $x=0$ ，

（3） 渐近线： $x=1$ ， $y=x+2$ 。

七．1．令 $f(x)=e^{x-1}-x$ ，则 $f'(x)=e^{x-1}-1$ ，

因此 $f'(x)<0$ ， $x<1$ ； $f'(x)>0$ ， $x>1$

且 $f(1)=0$ ，$\therefore$ $f(x)\geq f(1)$ ，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$ ，

即 $e^{x-1}\geq x$ ， $x\in(-\infty,+\infty)$ 。

2. 由题设条件在$[a,c],[c,b]$上应用拉格朗日定理：

$\exists\xi_1\in(a,c)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ ，

$\exists\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$ ，

$$\because\ \frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

再由题设条件在$[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$上应用洛尔定理：

$\exists t\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得 $f''(t)=0$ 。