电动力学 第四章

导体中的电磁波

真空中的Maxwell方程组：

$$\rho = 0$$

$$\vec{J} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \cancel{\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{J}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

数学上： $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{E}\right)}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}}$$

同理：

波动方程

表明电场和磁场是以c的速度传播的

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

定态电磁波——单一频率成分的简谐波

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

空间部分

时间部分

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E}=0\\&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\\&\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0\\&\nabla\times\vec{E}(\vec{x})=i\omega\vec{B}(\vec{x})\\&\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})=0\\&\nabla\times\vec{B}(\vec{x})=-i\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x})\end{aligned}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}(\vec{x})\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})\right)-\nabla^2\vec{E}(\vec{x})=-(i\omega)(i\omega\mu_0\varepsilon_0)\vec{E}(\vec{x})$$

Helmholtz方程

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=0$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$

且要求 $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0$

$$\vec{B}(\vec{x})=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}(\vec{x})$$

$$\nabla^2\vec{B}(\vec{x})+k^2\vec{B}(\vec{x})=0$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$

且要求 $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})=0$

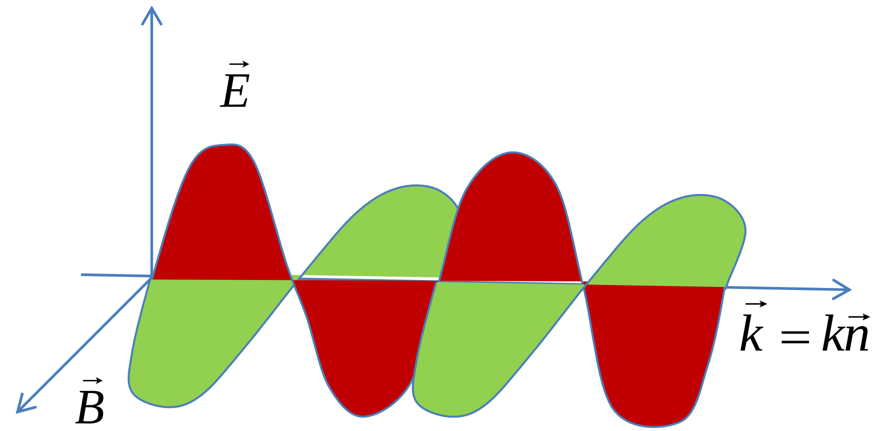
$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{i}{\omega\mu_0\varepsilon_0}\nabla\times\vec{B}(\vec{x})$$

无界空间最简单的解——平面波解

$$\vec{E}(\vec{x})=\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

于是 $\boxed{\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}$

色散关系 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$



总结：

（i） 平面电磁波是横波， $\vec{E}$ 、$\vec{B}$ 、$\vec{k}$ 三者互相垂直，且 $\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{k}$ 方向

（ii） $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ 电场和磁场的相位相同

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

（iii） 在均匀介质中

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=\frac{|\vec{E}|}{|\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{n}\times\vec{E}|}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$$

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c \quad \text{（真空）}$$

（iv） 介质中电磁波的相速度：

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\omega}{c}n \qquad v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{n}$$

折射率

（v） 电场的振动方向——电磁波的偏振

（vi） 电磁波的能量与能流

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \varepsilon|\vec{E}|^2=\frac{1}{\mu}|\vec{B}|^2$$

电场蕴藏的能量与磁场的相等

能量密度的瞬时值：

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{2\mu}\vec{B}^2=\varepsilon\vec{E}^2=\frac{1}{\mu}\vec{B}^2=\varepsilon\vec{E}_0^2\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)=\frac{1}{\mu}\vec{B}_0^2\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)$$

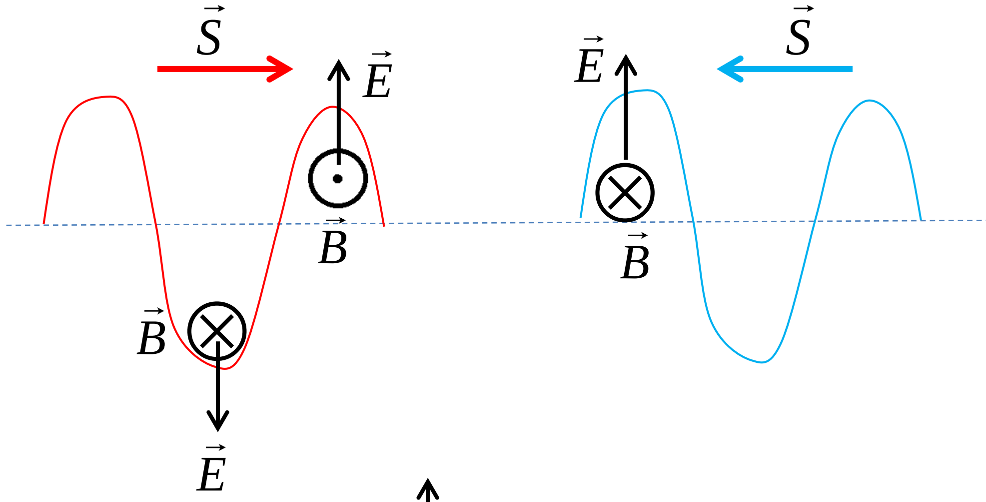
能流密度的瞬时值：

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}\times\left(\vec{n}\times\vec{E}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{E}^2\vec{n}-\underline{\left(\vec{n}\cdot\vec{E}\right)}\vec{E}\right]$$

$$=0$$

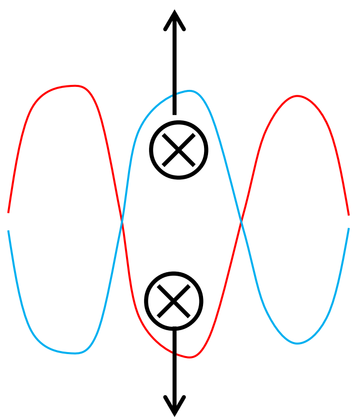
$$=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}^2\vec{n}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\vec{n}$$

例：两列频率、强度、偏振都一样的平面电磁波相向而行，求总的电磁波能量密度



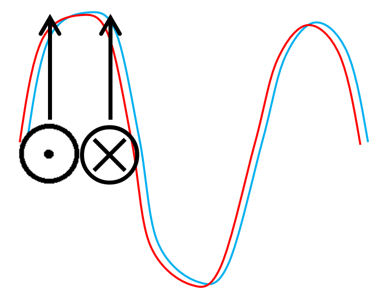
$$w = 2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right) = 2\varepsilon_0\vec{E}^2$$

$$= 2\varepsilon_0\vec{E}_0^{\ 2}\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$



在彼此的波峰和波谷重叠的一刹那，电场方向相反而相互抵消，磁场方向相同而相互叠加，电场能全部转化为磁能

$$w = \frac{\left(2\vec{B}\right)^2}{2\mu_0} = 2\varepsilon_0\vec{E}_0^{\ 2}\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$



在彼此的波峰与波峰重叠的一刹那，磁场方向相反而相互抵消，电场方向相同而相互叠加，磁场能全部转化为电场能

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(2\vec{E}\right)^2 = 2\varepsilon_0\vec{E}_0^{\ 2}\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

（一）导体中的自由电荷

Gauss定理： $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

Ohm定理： $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

电荷守恒定律： $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} = -\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\sigma \frac{\rho}{\varepsilon}$$

解为： $\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$

当 $\rho(t)$ 衰减到 $\rho(0)$ 的 $\frac{1}{e}$ 时，时间为 $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ 特征时间（电荷少掉大半所需的时间）

若电磁波振动周期 $T \gg \tau$，即电磁波还没振完一周期，电荷就快没了

可认为导体内自由电荷为零 $\rho = 0$

$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ 即 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$ 良导体条件

例：对铜材料 $\sigma \sim 6.3\times10^{7}(\Omega\cdot m)^{-1}$ $\varepsilon \sim \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}C^2/Nm^2$

只要 $\omega \ll 10^{17}Hz$ 则 $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$ 可见光都满足

典型材料的电导率：

铜： $\sigma \sim 6.3\times10^{7}(\Omega\cdot m)^{-1}$

饱和盐水： $\sigma \sim 2.3\times10(\Omega\cdot m)^{-1}$

硅： $\sigma \sim 4\times10^{-4}(\Omega\cdot m)^{-1}$ 当中相差22个数量级之巨！！！

纯净水： $\sigma \sim 4\times10^{-6}(\Omega\cdot m)^{-1}$

玻璃： $\sigma : 10^{-10} \sim 10^{-14}(\Omega\cdot m)^{-1}$

$\vec{J} = \sigma\vec{E}$ 绝缘体中 $\sigma \to 0$ 不管 $\vec{E}$ 如何大，电流为零 $\vec{J} \to 0$

超导体中 $\sigma \to \infty$ 即使 $\vec{E} \to 0$，仍有电流

（二）导体中的平面电磁波

什么是导体？位移电流项不可忽略的材料就可看成是导体

$$\rho = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \cancel{\frac{\rho_f}{\varepsilon}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \underline{\mu \vec{J}} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

假设导体中的仍然有平面电磁波传播 $\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{B} = i\frac{\mu\sigma}{\omega}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

若： 第一项 $\gg$ 第二项 $\left|i\frac{\mu\sigma}{\omega}\right|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \gg \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

即： $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$ 良导体条件

$$\nabla\times\vec{B}=i\frac{\mu\sigma}{\omega}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\left(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\right)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\varepsilon'\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

导体中传导电流的存在，相当于使得介电常数变成了复数

$$\boxed{\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}}$$

实数部分代表位移电流的贡献，它不引起电磁波功率的损耗

虚数部分是传导电流的贡献，由于$\sigma\neq0$，则$\vec{J}_f=\sigma\vec{E}\neq0$，传导电流引起热效应，它损耗的平均功率为：

$$p=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{J}_f\cdot\vec{E}^*\right)=\frac{1}{2}\sigma E_0^2$$

Helmholtz方程

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=0$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}$

且要求 $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0$

$$\vec{B}(\vec{x})=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}(\vec{x})=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\left(\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)=-\frac{i}{\omega}\left[\left(\nabla\times\vec{E}_0\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\times\vec{E}_0\right]$$

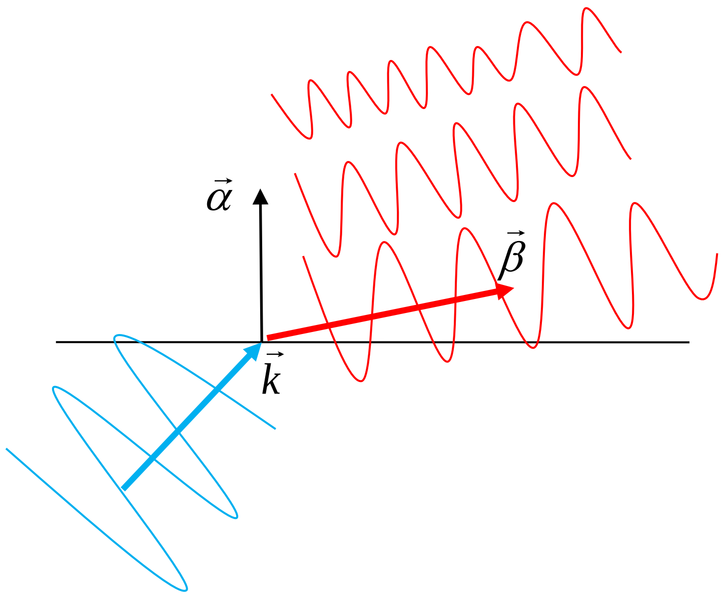
$$=-\frac{i}{\omega}\left(i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\times\vec{E}_0\right)=\frac{1}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}\vec{n}\times\vec{E}}{\omega}=\sqrt{\mu_0\varepsilon'}\vec{n}\times\vec{E}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}=\omega\sqrt{\mu(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega})}$$

$$\boxed{\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}}$$

复矢量

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i(\omega t-\vec{\beta}\cdot\vec{r})}$$



表明：随着电磁波的深入导体，振幅指数衰减！

当进入厚度为 $\dfrac{1}{\alpha}$ 时，已衰减到$\dfrac{1}{e}$

电磁波的不能在导体中传播

$\delta=\dfrac{1}{\alpha}$ 称为穿透深度

$\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 一般不同方向

$\vec{\beta}$ 的意义： 刻画导体内平面波的传播，原来的波矢。其方向是波的等相面传播的方向

$$\phi=\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t \qquad \vec{\beta}=\frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$$

$\vec{\alpha}$ 的意义：衰减强度，其方向是能量衰减的方向

（三）穿透深度

$$\vec{k}^2=\omega^2\varepsilon'\mu=\omega^2\mu(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega})=(\vec{\beta}+i\vec{\alpha})^2$$

$$=\beta^2-\alpha^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})i$$

$$\Longrightarrow \quad \omega^2\mu\varepsilon=\beta^2-\alpha^2$$

$$\omega\mu\sigma=2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

设：电磁波垂直入射到导体 $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\parallel\vec{k}$ $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha\beta$

解得：

$$\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)\right]^{1/2} \qquad \beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)\right]^{1/2}$$

对良导体 $\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\pm1\approx\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$ $\qquad \alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

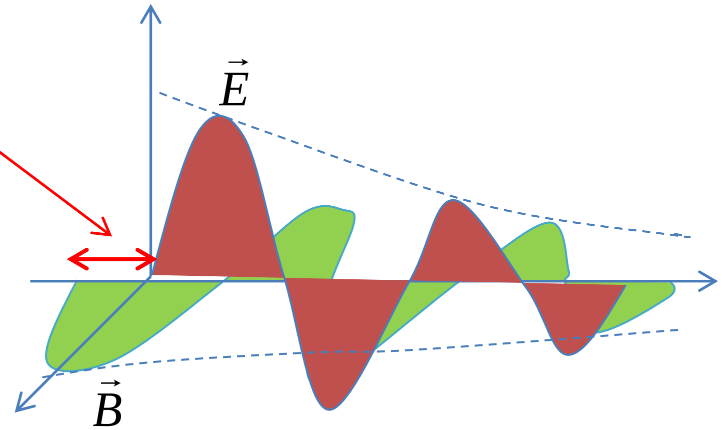
$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

若 σ 越大，或ω 越高，则δ 越小，趋肤效应

对于理想导体 $\sigma\to\infty$， 有$\delta\to0$，理想导体内的电磁场为零

（四）导体中平面电磁波的磁场

在垂直入射情况下



$$\boxed{\vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}}=\sqrt{\mu\varepsilon'}\cdot\vec{n}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\varepsilon(1+i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}\cdot\vec{n}\times\vec{E}$$

$$\approx\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\sqrt{i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}\cdot\vec{n}\times\vec{E}=e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\omega}}\cdot\vec{n}\times\vec{E}$$

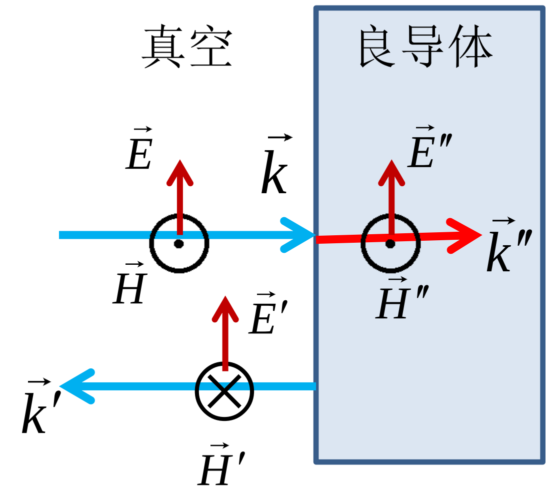
表明：良导体内，磁场 $\vec{B}$ （或 $\vec{H}$ ）的相位滞后于电场 $\vec{E}$ 的相位 $\pi/4$ ，意味着电磁能流不是一直往前流深入进去，而是作前后振荡，变成焦耳热损耗掉

其相速度远小于c

并且 $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\vec{H}}{\vec{E}}\right|=\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\gg 1$ 　　良导体内电磁波的能量主要是磁场的能量

对比：真空 $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\vec{H}}{\vec{E}}\right|=1$

（五）良导体表面的反射



在垂直入射情况下，且电场平行于入射面

边值关系 $\boxed{\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau} \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau} \end{aligned}}$

即
$$E + E' = E''$$
$$H - H' = H''$$

由 $H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E \qquad H' = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E' \qquad H'' = \sqrt{\dfrac{\sigma}{2\omega\mu_0}}(1+i)E''$

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)E''$$

解出：
$$\frac{E'}{E} = \frac{1-\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}+i}{1+\sqrt{\dfrac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}+i}$$

于是，反射系数为：

Taylor展开

$$R=\left|\frac{E'}{E}\right|^2=\frac{E'\cdot E'^*}{E\cdot E^*}=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}{\left(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}\approx 1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

对于理想导体，$\sigma\to\infty$　$R\to 1$　理想导体表面电磁波被全部反射

作业

1。
各向异性晶体介质中，若$\vec{D}$、$\vec{E}$ 、$\vec{H}$ 、$\vec{B}$ 仍按 $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ 变化，但$\vec{D}$、$\vec{E}$ 不再平行，

（i）证明 $\vec{k}\cdot\vec{B}=\vec{k}\cdot\vec{D}=\vec{D}\cdot\vec{B}=\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ ，但一般$\vec{k}\cdot\vec{E}\neq 0$

（ii）证明 $\vec{D}=\dfrac{1}{\omega^2\mu}\left[k^2\vec{E}-\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right)\vec{k}\right]$

（iii）证明$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 的方向不在 $\vec{k}$ 方向上。

2。
频率为 ω的平面电磁波垂直入射到电导率σ 的良导体表面，在导体内，

（i）证明电磁波的磁场能量密度平均值远大于电场能量密度平均值；

（ii）证明电磁波能量密度平均值约为 $\dfrac{\beta^2}{2\mu\omega^2}E_0^2e^{-2\alpha z}$

（iii）求电磁波相速度，证明它远小于c

（iv）求电磁波能流密度瞬时值，并说明它不是一直往前流。

作业

3。

频率为 ω 的平面电磁波垂直入射到电导率 σ 的良导体表面，在导体内，

（i）证明电磁波的磁场能量密度平均值远大于电场能量密度平均值；

（ii）证明电磁波能量密度平均值约为 $\dfrac{\beta^2}{2\mu\omega^2}E_0^2 e^{-2\alpha z}$

（iii）求电磁波相速度，证明它远小于 c

（iv）求电磁波能流密度瞬时值，并说明它不是一直往前流。