

数学物理方法作业集

潘逸文*, 余钊焕†

中国广州中山大学物理学院

September 29, 2019

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文件也会每周更新, 可在 QQ 群文件, 或 <https://panyw5.github.io/courses/mmp.html> 以及 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{e}, \quad (b) 2 + \sqrt{2}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (d) \sqrt{3} + i \text{ 的所有 } 7 \text{ 次方根} \quad (1.1)$$

2. 定义点集 $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0, R)\}$, 其中 $R > 0, N = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}_{>0}$. 讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集, 是否真子集, 写明推理。

3. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, 其中 $R > 0$. 求解最大的 $N \in \mathbb{N}$, 使得对于任意 S 的内点 z , z^N 都还是内点。写明推理。

4. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. (若上周没做这道题) 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$, 其中 $R > 0$. S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数, 其中 $a, b \in \mathbb{R}, i$ 是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设 $u(x, y) = e^x \sin y, v(x, y) = -e^x \cos y$, 并考虑复变函数 $w = u(x, y) + iv(x, y)$. 验证 w 是 \mathbb{C} 上解析函数。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数, 同时, 其值域是 \mathbb{R} 的子集。求证 f 是常数函数。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$, 求其虚部, 并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$, 其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R > 0$, 逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R > 0$, 逆时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数 f 在单连通区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续, $G \subset D$ 是其单连通子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$. 证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元 $d\bar{z} dz = 2i dx dy$ 。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (4.1)$$

1. 计算围道积分, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\oint_C \left(z + \frac{\lambda}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.2)$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (4.3)$$

5 第五周 (10 月 8 日交; 作为一次考察)

1. 设函数 $f(z)$ 在 $\overline{N(0, R)}$ 上解析。计算积分

$$\oint_C f(z) \bar{z}^{n+1} dz, \quad C = \partial N(0, R). \quad (5.1)$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ 。

2. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k = (-1)^{k^2}$, $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$ 。分情况 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 讨论级数是否收敛, 是否绝对收敛, 给出简要说明。

3. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n. \quad (5.2)$$

4. 设 $f(z)$ 是 $N(0, 1)$ 内的解析函数。计算 $(1-z)^{-1}f(z)$ 以原点 $a = 0$ 为中心的泰勒展开 (给出泰勒级数通项, 用 f 的各阶导数表达)。

5. 考虑 3 个互异复数 $a_i, i = 1, 2, 3$ 。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} dz, \quad (5.3)$$

其中 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$ 。化简最后结果。