

阿苏克 金 赵 编

# 高等光学习题集

GAODENG  
GUANGXUEXITIJ



理工大学出版社

# 第一章 电磁场的基本性质

## 1. 标量波

1-1 设电磁场随时间谐变。证明 当  $T' \gg T$  时 ( $T$  是电磁场变化周期)，坡印廷矢量  $\vec{S}$  在  $-T'$  到  $+T'$  内取平均的结果与一周期内取平均的结果相同。

1-2 一平面波在某种液体中传播时其  $E_x = 2\cos\theta$ ,  $E_y = \cos\theta$ ,  $E_z = -\cos\theta$ ,  $\theta = \pi \times 10^{15} \left( t - \frac{y+z}{0.8c} \right) + \frac{\pi}{6}$ 。

求：(1) 该光波的频率，波长，振幅和原点的初位相；  
(2) 波的传播方向和电矢量的振动方向；  
(3) 磁矢量的表示式；  
(4) 液体的折射率。

1-3 一个波包在  $t=0$  时的位移由下式描述：

$$\phi(x, t=0) = a \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \cos kx$$

试把这个位移表示为一些平面波的迭加，并从物理上解释  $k\sigma \gg 1$  时式子的意义。

1-4 由三维波包群速公式

$$v^{(g)} = \left| \nabla \left( \frac{\partial g(r)}{\partial \omega} \right)_{\bar{\omega}} \right|$$

出发，作为特例，导出一维波包群速公式

$$v^{(g)} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{\vec{k}}$$

1-5 (1) 已知色散关系  $\omega = ak^2$ , 求出相速和群速。

(2) 某一假想物质的折射率  $n = \frac{A}{\lambda_0}$  ( $\lambda_0$  是真空中波长), 证明在波长  $\lambda_0$  处的群速恰为相速的一半。

1-6 试计算下列各种情况下的群速:

(1)  $v_p = v_0$  (常数) (无色散媒质);

(2)  $v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left( g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^3 \rho} \right)}$  (液面波,  $g$  为重力加速度,  $T$  为表面张力,  $\rho$  为液体密度);

(3)  $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$  (正常色散媒质中光波的科希公式);

(4)  $\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2$  (波导中的电磁波,  $\omega_c$  为截止圆频率)。

## 2. 矢量波

1-7 为什么说严格的单色光总是偏振的? 试证明之。

1-8 $\Delta$  为什么均匀平面波在各向同性媒质中传播时, 其偏振状态保持不变?

1-9 一束椭圆偏振光通过一  $1/4$  波片, 当  $1/4$  波片转到两个相互正交的位置时, 射出的是平面偏振光, 其振动面分别与竖直方向成  $24^\circ$ 、 $80^\circ$  角。求: 入射椭圆偏振光的长轴与竖直方向之夹角及长短轴之比  $\frac{a}{b}$ 。

1-10 一列波的电矢量  $\vec{E} = E_0 (\vec{i} + \vec{j} b e^{i\delta}) e^{i(kz - \omega t)}$  对下述各种情况讨论其偏振态:

- (1)  $\delta = 0, b = 1;$
- (2)  $\delta = 0, b = 2;$
- (3)  $\delta = -\frac{\pi}{2}, b = -1;$
- (4)  $\delta = -\frac{\pi}{4}, b = 1;$
- (5)  $\delta = -\frac{\pi}{6}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

1-11 美国物理学家琼斯 (R. C. Jones) 在 1941 年提出可以把偏振波表示为一个矢量, 即  $\vec{\tilde{E}} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix}$ 。写出 1—10 题中各偏振波的琼斯矢量。

1-12 描述琼斯矢量为  $\begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$  的波的偏振态, 并找出以上各种矢量的正交琼斯矢量, 且描述其偏振态。

1-13 琼斯矢量  $\begin{bmatrix} A \\ B e^{i\Delta} \end{bmatrix}$  表示一般情况。证明这个矢量表示椭圆偏振光, 并且其椭圆的主轴与  $x$  轴的交角为  $\frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2AB \cos \Delta}{A^2 - B^2} \right)$ 。

1-14 $\Delta$  各种偏振器件可表示为特性矩阵  $G$ , 其作用由矩阵方程  $\vec{\tilde{E}} = \vec{G} E_1$  所决定 ( $\vec{\tilde{E}}$  表示琼斯矢量)。据此证明

(1) 透光轴沿  $x$  轴方向的起偏器, 其  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

透光轴与  $x$  轴成  $\theta$  角时,  $G = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$ ,

(2)  $1/4$  波片的快轴沿  $x$  轴方向时,  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ , 快轴与  $x$  轴成  $\pm \frac{\pi}{4}$  夹角时,  $G = \frac{1+i}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$  (所谓快轴即当光矢量沿此方向时, 光传播速度最快);

(3) 一般波片 (产生相位差  $\delta$ ) 快轴与  $x$  轴成  $\pm \frac{\pi}{4}$  角

时,  $G = e^{i\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mp i \tan \frac{\delta}{2} \\ \mp i \tan \frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ,

(4) 各向同性移相器 (产生相移  $\phi$ ) 的  $G = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$ ,

(5) 利用自然光和圆偏振光的相干矩阵\*验证圆偏振器的特性矩阵  $G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$ , 上面符号对应右旋, 下面符号对应左旋。

**1-15** 斯托克斯参量  $s_0, s_1, s_2, s_3$  也可写成单列矩阵 (即矢量) 形式

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

---

\*关于相干矩阵见《光学原理》§10.8节。

试写出右旋圆偏振光（简称 $\mathcal{R}$ 态）和左旋圆偏振光（简称 $\mathcal{L}$ 态）的斯托克斯矢量。

**1-16** 美国物理学家密勒（H. Mueller）于1943年提出，当把光线用斯托克斯矢量表示时，任何偏振器件的作用都可表示为一个 $4 \times 4$ 阶方阵。我们把这个矩阵称为密勒矩阵 $\mathcal{M}$ 。试证

$$(1) \text{ 透光轴沿 } x \text{ 方向的起偏器 } \mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{ 快轴沿 } x \text{ 方向的 } \frac{1}{4} \text{ 波片 } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{ 圆偏振器 } \mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**1-17** 分别导出快轴沿 $x$ 轴方向和沿 $y$ 轴方向的半波片的密勒矩阵。证明当入射光为 $\mathcal{R}$ 态时，通过以上两种波片后的光变为 $\mathcal{L}$ 态，反之，当入射光为 $\mathcal{L}$ 态时，通过以上两种波片后的光变为 $\mathcal{R}$ 态。

**1-18** 求由起偏器和 $1/4$ 波片组成的右旋圆起偏器的 $\mathcal{M}$ 。讨论当自然光、 $\mathcal{R}$ 态偏振光和 $\mathcal{L}$ 态偏振光分别通过这种圆起偏器和通过圆偏振器时的结果，借以了解这种圆起偏器和圆偏振器作用的异同。

**1-19** 作出振幅传输系数  $t$  的各向同性吸收板的密勒矩阵。什么样的密勒矩阵将使任何波完全退出偏振而不影响其强度（设有物理的对应物）？

### 3. 平面波的反射和折射

**1-20** 证明，当入射角  $\theta_i = 45^\circ$  时，光波在任何两种媒质界面上反射都满足  $r_{//} = r_{\perp}$ 。

**1-21** 有一种磁导率满足  $\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  的磁性电介质，试证明：光正入射时这种材料的反射系数恒等于零。这一事实相当于在两条传输线的接合处阻抗匹配的情况（量  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  可视为媒质的固有阻抗）。

**1-22** 证明斯托克斯公式  $1 + rr' = tt'$ 。式中  $r$  和  $t$  是光线由媒质1射向媒质2时的反射系数和透射系数， $r'$  和  $t'$  是当光线沿原路反向传播时的反射系数和透射系数。

**1-23** 设一反射表面具有复振幅反射系数  $\rho = \rho_0 e^{i\delta}$ ，即如果入射的电场可表为

$$E_i(x, t) = A \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right) + \phi \right] \quad (1)$$

则反射波将为

$$E_r(x, t) = \rho_0 A \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{v} \right) + \phi + \delta \right] \quad (2)$$

若  $\rho_0 \neq 1$ ，证明合成波为驻波与行波的迭加

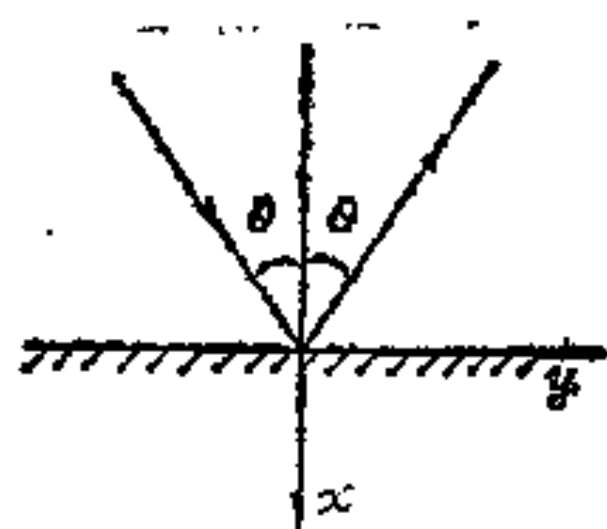


图 1

1-24 平面波以 $\theta$ 角入射到反射平面上。若反射面的反射系数与上题一样为  $\rho = \rho_0 e^{i\delta}$ ，在图1的坐标系中推广 1-23 题的结果，证明总场可表示为：

$$\begin{aligned}
 E_{\text{总}} = & (1 - \rho_0) A_0 \\
 & \times \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x \cos \theta - y \sin \theta}{v} + \phi \right) \right] \\
 & + 2\rho_0 A_0 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{y \sin \theta}{v} \right) + \phi + \frac{\delta}{2} \right] \\
 & \times \cos \left[ 2\pi\nu \frac{x \cos \theta}{v} + \frac{\delta}{2} \right]
 \end{aligned}$$

解释此结果并求驻波部分的空间频率。

1-25 $\Delta$  一束右旋圆偏振光以  $\theta_i = 50^\circ$  的入射角从空气入射到玻璃 ( $n = 1.5$ ) 界面，确定反射波和透射波的偏振状态。

1-26 一个电矢量振动方向与入射面成  $45^\circ$  的线偏振光入射到两种电介质的分界面上，若入射角  $\theta_i = 50^\circ$ ，第一媒质、第二媒质的折射率分别为  $n_1 = 1$ ， $n_2 = 1.5$ 。问反射光光矢量与入射面所成的角度是多少？若  $\theta_i = 60^\circ$  所成的角度又如何？

1-27 聚苯己烯的折射率  $n \approx 1.64$ ，试计算布儒斯特角。证明入射角为  $60^\circ$  时，TE 波和 TM 波的反射系数分别为  $r_{\perp} \approx -0.515$ ； $r_{\parallel} \approx -0.0747$ 。若一束右旋圆偏振光在这个角度下入射，求反射光和折射光的偏振态。

1-28 分别求 1-27 题中反射光和折射光的斯托克斯参量，以及它们在邦加球上对应点的位置。



1-29 一束强度为  $10^4 \text{ W/m}^2$  的左旋圆偏振光在  $60^\circ$  角下入射到空气——玻璃分界面上，试求反射和折射光束的偏振态以及它们的强度。根据入射角很接近布儒斯特角这一事实，解释这一结果的物理意义。

1-30 某一物质的全内反射临界角为  $45^\circ$ ，求外反射时的布儒斯特角。

1-31 证明在发生全反射时，沿媒质界面切向坡印廷矢量的时间平均值为

$$\frac{c\sqrt{\epsilon_2} \sin\theta_i}{8\pi n} \left| E_0^{(r)} \right|^2$$

式中， $c$ ——真空中光速，

$\epsilon_2$ ——第二种（光疏）媒质的介电常数，

$n$ ——第二种媒质相对于第一种媒质的折射率，

$\theta_i$ ——入射角，

$E_0^{(r)}$ ——折射波场强振幅。（本题中取  $\mu = 1$ ）。

1-32 一束光垂直入射到等腰直角玻璃（ $n = 1.5$ ）棱镜的直角边上，在棱镜的斜边上发生全内反射。光的波长为  $5000 \text{ \AA}$  求：离表面多远处倏逝波的振幅为其在表面处的  $\frac{1}{e}$ ？离表面

$1 \text{ mm}$  处倏逝波的强度以何因子衰减？

1-33 $\Delta$  所谓全反射时的古斯-汉欣位移，指的是反射光线



图 2

相对于入射光线在媒质界面上移过的距离（图2中的  $x_s$ ）。对TE波和TM波分别推导古斯-汉欣位移的表示式。这个位移和倏逝波的存在，以及电磁场透入光疏媒质

中的深度之间有怎样的关系？

**1-34** 一根直圆筒形光纤(如图3)，纤维芯的折射率为 $n_1$ ，外套的折射率为 $n_2$ ，且 $n_1 > n_2$ 。

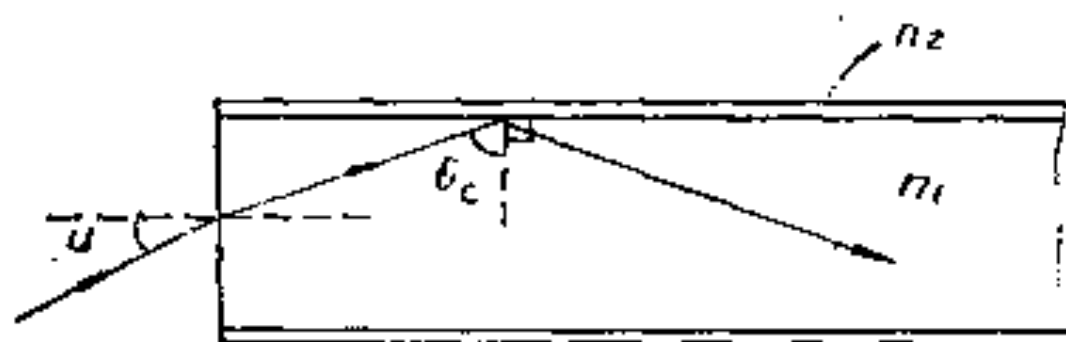


图 3

(1) 证明入射光的最大孔径角  $2u$  (保证光束在光纤芯和外套界面发生全反射) 满足关系式  $\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

(2) 若 $n_1 = 1.62$ ， $n_2 = 1.52$ ，求最大孔径角 $2u$ 。

**1-35** 一根弯曲的筒形光纤(如图4)，纤维芯和外套的折

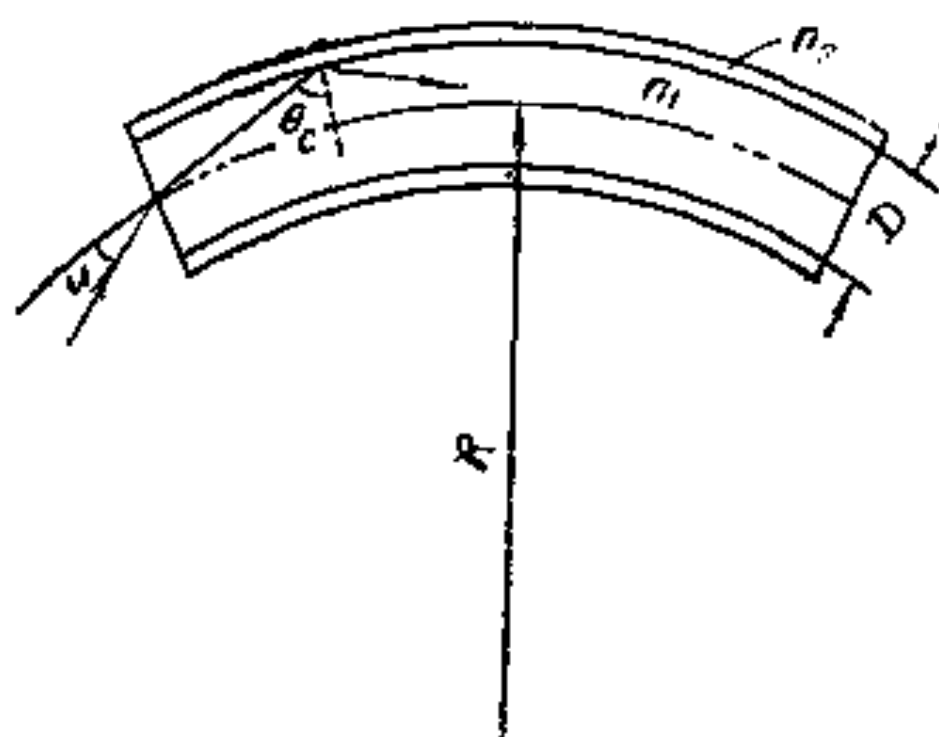


图 4

射率分别为 $n_1$ 和 $n_2$  ( $n_1 > n_2$ )。纤维芯的直径为 $D$ ，中心曲率半径为 $R$ 。

(1) 证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足

$$\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2}$$

(2) 若  $n_1 = 1.62$ ,  $n_2 = 1.52$ ,  $D = 70\mu\text{m}$ ,  $R = 12\text{mm}$ , 最大孔径角  $2u$  为多少?

1-36 为把光束引入光波导, 常采用棱镜耦合 (如图5)。

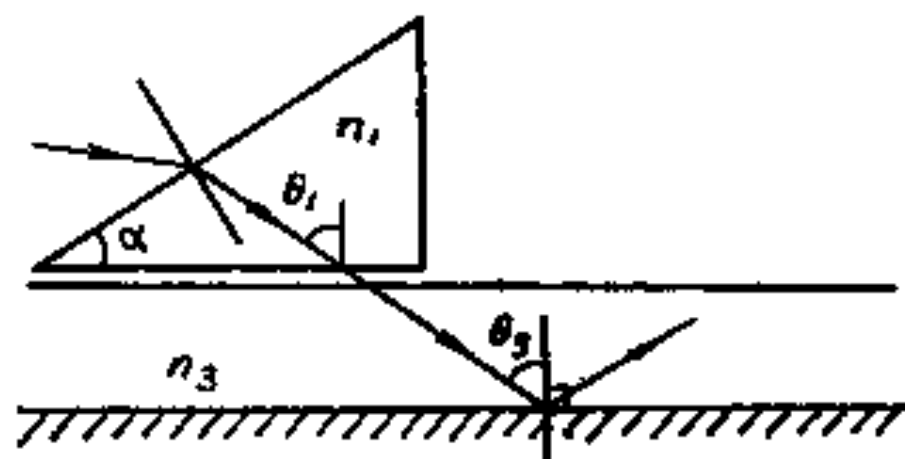


图 5

在棱镜底面与薄膜上表面之间保持很薄的空气层, 其厚度约在  $\frac{\lambda}{8} \sim \frac{\lambda}{4}$ 。当激光射到棱镜底面上时发生全反射, 由于存在倏逝波, 激光束的能量可进入作为光波导的薄膜中。已知

$n_1 = 2.30$ ,  $n_3 = 2.21$ ,  $\theta_s = 68^\circ$ 。问 棱镜的  $\alpha$  角必须大于多少?

1-37 极限法测液体折射率的装置如图6所示,  $ABC$ 是直角

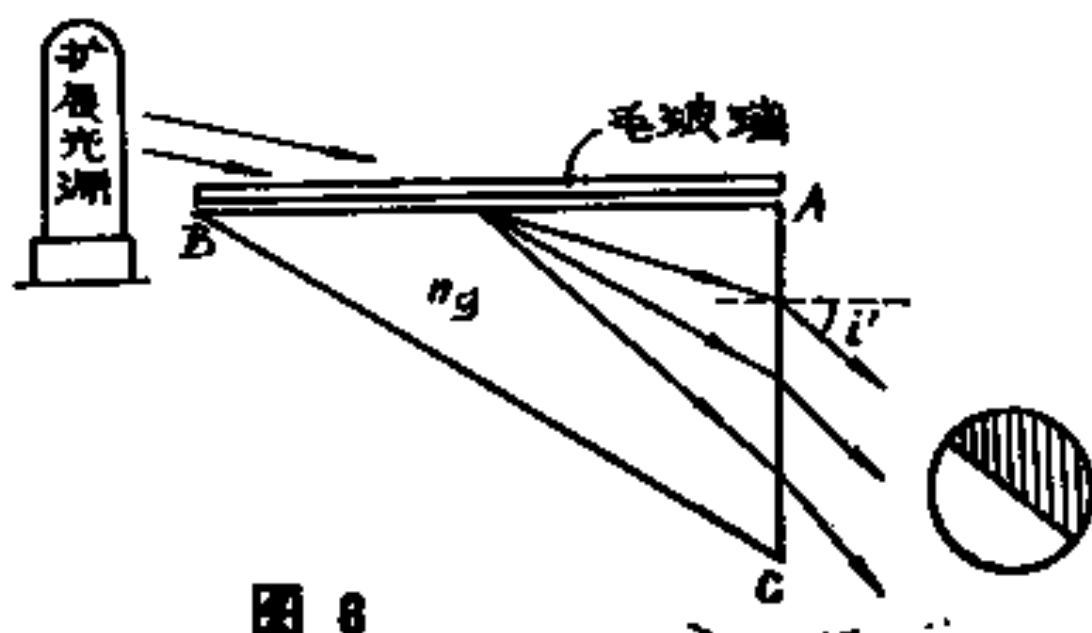


图 6

棱镜，其折射率 $n_0$ 已知。将待测液体涂一薄层于其上表面 $AB$ ，覆盖一块毛玻璃。用扩展光源在掠入射的方向照明。从棱镜的 $AC$ 面出射光线的折射角将有一下限 $i'$ （用望远镜观察，则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区）。试证明待测液体的折射率 $n$ 可如下计算

$$n = \sqrt{n_0^2 - \sin^2 i'}$$

并回答下列问题：

(1) 用这种方法测液体折射率，测量范围受到什么限制？

(2) 为什么需要用望远镜观察？

(3) 为什么在望远镜视场中出现有明显分界线的半明半暗区？

**1-38Δ** 如图7，这是产生圆偏振光的穆尼棱镜。证明若棱镜折射率为1.65，则顶角 $A \approx 60^\circ$ 。

**1-39** (1) 计算 $n_1 = 1.51$ ， $n_2 = 1.0$ ，入射角为 $54^\circ 37'$ 时全反射光的相移 $\delta_{//}$ 和 $\delta_{\perp}$ 。

(2) 如果入射光是线偏振的，全反射光中 $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{//}$ 的值是多少？反射光的偏振态如何？

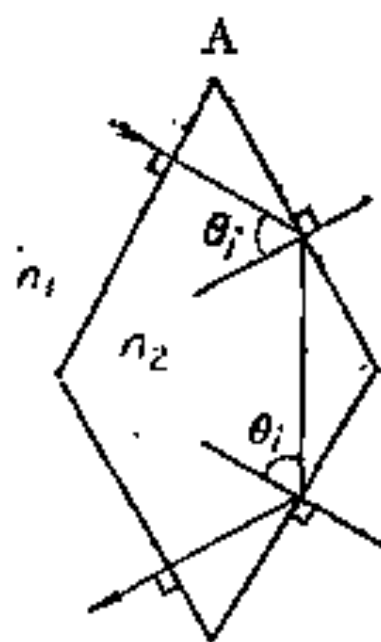


图 7

## 4. 波在分层媒质中的传播 介质膜理论

**1-40** 由非均匀媒质中的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} + (\nabla \log \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla(\vec{E} \cdot \nabla \log \epsilon) = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}} + (\nabla \log \epsilon) \times (\nabla \times \vec{H}) + \nabla(\vec{H} \cdot \nabla \log \mu) = 0$$

导出分层媒质中的TE波解。

1-41Δ 证明 由于介质膜的特性矩阵是单位模矩阵, 即  $|M| = 1$ , 可以推得  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ 。也就是它对应于能量守恒。

1-42 有一光学系统由两片分离的透镜组成, 两片透镜的折射率分别为1.5和1.7, 求此系统的反射光能损失。如果透镜表面镀有增透膜使反射率降为1%, 问此系统的光能损失又是多少?

1-43 如图8所示, 一支半导体砷化镓发光管, 管芯AB为



图 8

发光区, 其直径 $d$ 约为3mm。为了避免全反射, 发光管上部研磨成半球形, 以使内部发的光能够以最大的透射率向外输送。

(1) 要使发光区边缘两点A和B发的光不致全反射, 半球的半径至少应取多少? 已知砷化镓的折射率为3.4 (对发射的 $0.9\mu\text{m}$ 波长)。

(2) 为了减少光在砷化镓—空气界面的反射, 工艺上常在砷化镓表面镀一层氧化硅增透膜, 氧化硅折射率为1.7。加膜后入射角为多大才不致在空气表面发生全反射? 试与不加膜时相比较 (设膜很薄, 可按平板计算)。

1-44 1-43题的砷化镓发光管, 近似认为发光区位于球心。

(1) 不加增透膜时, 球面的光强反射率多大?

(2) 增透膜的折射率和厚度应取多大?

(3) 如果用氟化镁 ( 折射率为1.38 ) 能否增透? 光强反射率有多大?

(4) 如果用硫化锌 ( 折射率为2.35 ) 能否增透? 光强反射率有多大?

**1-45** 在玻璃 ( $n=1.5$ ) 上镀折射率为2.0的单层膜, 入射光波长  $\lambda=5000 \text{ \AA}$ , 求在正入射时给出最大透射率和最小反射率的膜厚。

**1-46** 在玻璃 ( $n=1.6$ ) 上镀单层增透膜, 膜层材料是氟化镁, 控制膜厚使在正入射下对  $\lambda=5000 \text{ \AA}$  的光给出最小反射率。试求这个膜在下列条件下的反射率,

(1)  $\lambda=6000 \text{ \AA}$ , 入射角  $\theta_0=0^\circ$ ;

(2)  $\lambda=5000 \text{ \AA}$ , 入射角  $\theta_0=30^\circ$ ;

(3)  $\lambda=4000 \text{ \AA}$ , 入射角  $\theta_0=45^\circ$ 。

**1-47** 试证: 若  $1 < n_1 < n_2$ , 玻璃加上任意厚度的膜层, 其透射率总比单层玻璃大。当  $n_1=1.35$ ,  $n_2=1.5$ , 且膜层以最佳厚度蒸镀时, 其反射率较单层玻璃时降低多少?

**1-48** 把折射率为  $n_2$  的膜镀在折射率为  $n_3$  的基底上, 光从折射率为  $n_1$  的媒质斜入射到膜上。

(1) 证明: 对 TE 波, 无论入射角  $\theta_1$  取何值, 都不能使反射率  $\mathcal{R}_1=0$ 。

(2) 证明: 对 TM 波, 当入射角  $\theta_1$  满足

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

且膜厚  $h = \frac{\lambda_0}{4n_2 \cos \theta_2}$  时, 反射率  $\mathcal{R}_{//} = 0$ 。这里:

$$A = n_1^2 (n_2^4 - n_3^4)$$

$$B = -n_2^2 (n_1^2 n_3^4 + n_2^4 n_3^2 - 2n_1^4 n_3^4)$$

$$C = n_2^4 n_3^2 (n_2^4 - n_1^2 n_3^2)$$

(3) 若入射的是天然光,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2.5$ ,  $n_3 = 1.53$ ,

$\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$ 。求使反射光变为完全偏振光的入射角  $\theta_1$  及膜厚  $h$ , 并求这时的反射率  $\mathcal{R} = ?$

1-49Δ 在受抑全反射(如图9)中, 入射为单色光(波长  $\lambda_0$ ),

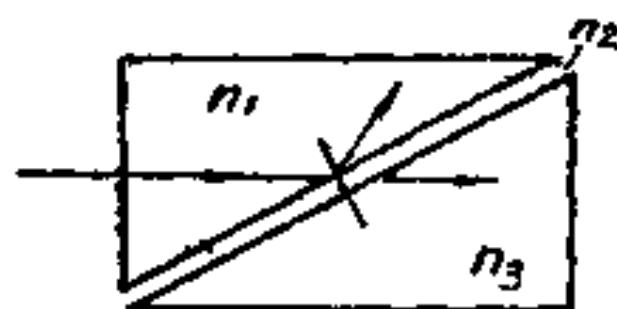


图 9

$n_1 = n_3$ , 媒质夹层 2 的厚度为  $\lambda_0/4$ , 用均匀介质膜理论求出在媒质 1 和 2 分界面上的反射率和进入媒质 3 的透射率。

1-50 图 10 为受抑全反射干涉滤波器\*, 图中  $a$  是两层完全相同的低折射率媒质层, 其折射率为  $n_2$ ,  $b$  是高折射率媒质间隔

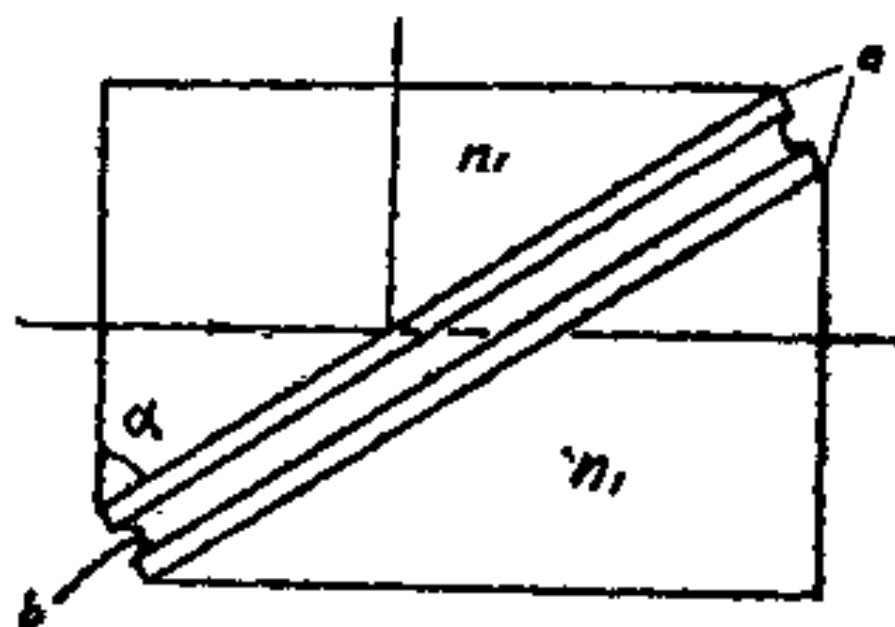


图 10

\*关于干涉滤波器见“光学原理”书中 §7.6 节。

层，其折射率为 $n_3$ 。已知 $n_1 = 1.6$ ， $\alpha = 60^\circ$ ， $n_2 = 1.35$ ， $n_3 = 2.3$ ， $a$ 、 $b$ 每一膜层的光学厚度都为 $\lambda_0/4$ ， $\lambda_0 = 6000 \text{ \AA}$ 。求透射率 $\mathcal{T} = ?$

1-51 $\Delta$  已知  $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ ，证明：

$$[M]^N = \begin{bmatrix} m_{11} \mathcal{U}_{N-1} - \mathcal{U}_{N-2} & m_{12} \mathcal{U}_{N-1} \\ m_{21} \mathcal{U}_{N-1} & m_{22} \mathcal{U}_{N-1} - \mathcal{U}_{N-2} \end{bmatrix}$$

式中，

$$\mathcal{U}_N = \frac{\sin[(N+1)\arccos \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})]}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(m_{11} + m_{22})^2}}$$

1-52 比较两个 $\lambda/4$ 膜系（均为七合）的反射率

$$(1) \quad n_0 = 1.50, \quad n_H = 2.40, \quad n_L = 1.38$$

$$(2) \quad n_0 = 1.50, \quad n_H = 2.20, \quad n_L = 1.38$$

1-53 求出由折射率 $n_L = 1.4$ ， $n_H = 2.8$ 的8层高低折射率材料（每种4层）组成的高反射多层膜的峰值反射率。

1-54 $\Delta$  波长 $\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$ 的单色光垂直入射到玻璃( $n = 1.5$ )板上。

(1) 在玻璃板上镀双层增透膜，要求透射率达100%，一种物质是 $\text{MgF}_2$  ( $n = 1.38$ )，另一种物质的折射率应选为多少？先镀哪种物质？

(2) 在玻璃板上镀增反膜，欲使反射率达99%以上，所给两种物质是冰晶石 ( $n = 1.35$ ) 和二氧化钛 ( $n = 2.45$ ) 最少应镀多少层？怎样排列？（在本问题中，每层膜的光学厚度均是 $\lambda_0/4$ ，空气折射率 $n = 1$ ）。



## 第二章 几何光学基础

2-1Δ 把  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$  及  $\vec{E}_0 = \vec{e}(\vec{r}) e^{ik\phi(\vec{r})}$  代入波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{E} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla(\vec{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) = 0$$

$$\text{导出 } \vec{K}(\vec{e}, \phi, n) + \frac{1}{ik_0} \vec{L}(\vec{e}, \phi, n, \mu) + \frac{1}{(ik_0)^2} \times \vec{M}(\vec{e}, \epsilon, \mu) = 0$$

$$\text{式中 } \vec{K}(\vec{e}, \phi, n) = \{n^2 - (\nabla \phi)^2\} \vec{e}$$

$$\vec{L}(\vec{e}, \phi, n, \mu) = \{\nabla \phi \cdot \nabla \ln \mu - \nabla^2 \phi\} \vec{e}$$

$$- 2\{\vec{e} \cdot \nabla \ln n\} \nabla \phi - 2\{\nabla \phi \cdot \nabla\} \vec{e}$$

$$\vec{M}(\vec{e}, \epsilon, \mu) = (\nabla \times \vec{e}) \times \nabla \ln \mu - \nabla^2 \vec{e} - \nabla(\vec{e} \cdot \nabla \ln \epsilon)$$

进而再导出程函方程。

2-2 证明电能密度  $w_e$  和磁能密度  $w_m$  的时间平均值相等，即

$$\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle = \frac{1}{16\pi} [\vec{e}, \vec{h}^*, \nabla \phi]$$

式中， $[\vec{e}, \vec{h}^*, \nabla \phi]$  表示三矢量的混合积。

2-3 由  $\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1} \exp \left\{ - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \phi}{n} ds \right\}$  导出在均匀媒质中

点光源情况的光强平方反比定律。

2-4 把场强写成  $\vec{E} = \vec{e} e^{i[k\phi(\vec{r}) - \omega t]}$ ,

$$\vec{H} = \vec{h} e^{i[k\phi(\vec{r}) - \omega t]}$$

式中  $\vec{e}$  和  $\vec{h}$  一般是复矢量。

(1) 写出平面波的程函  $\phi(\vec{r})$  表示式。证明平面波的  $|\vec{e}|$  和  $|\vec{h}|$  不随传播而变。

(2) 写出球面波的  $\phi(\vec{r})$  表示式。对球面波求  $|\vec{e}|$  和  $|\vec{h}|$  随传播而变化的关系式。

**2-5** 证明光线微分方程的  $z$  分量式可以由  $x$  和  $y$  两个分量式推出, 即

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

可由

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}$$

和

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

推出。

**2-6** 根据光线微分方程在均匀媒质中的解, 证明在均匀媒质中光线是直线。

**2-7** 考虑光在二维空间传播 (如图11所示), 已知折射率  $n = n(x)$  只是  $x$  的函数。由方程

$$\frac{d}{ds} (n \vec{s}) = \nabla n$$

证明

$$n(x) \sin \theta(x) = n(0) \sin \theta(0)$$

式中,  $\vec{s}$  是沿光线的单位矢量。

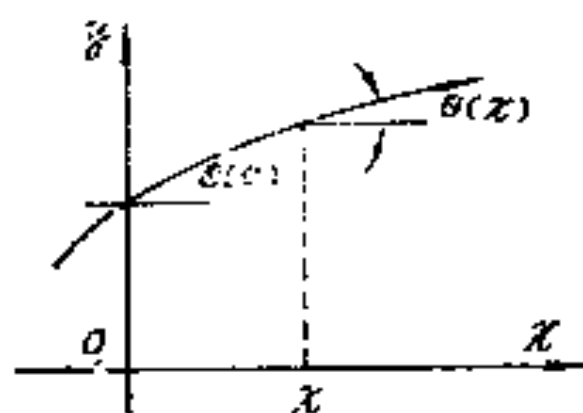


图 11

2-8Δ 当媒质折射率  $n$  不随  $z$  而变时, 证明  $x(z)$  满足

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial(n^2)}{\partial x}。式中  $c$  是常数。$$

2-9 利用上题的结果证明对折射率  $n$  满足  $n^2(x, y, z) = n_0^2[1 - \alpha^2(x^2 + y^2)]$  的自聚焦光纤, 子午光线的轨迹由

$$x(z) = \frac{\sin\gamma_0}{\alpha} \sin\left(\frac{2z}{\cos\gamma_0}\right) \text{ 给出。这里我们已假定光线在}$$

$z=0$  处与光纤的轴相交, 交角为  $\gamma_0$ 。

2-10 证明上题中的子午光线传播  $L$  距离所用时间  $T(\gamma_0) =$

$$\frac{n_0 L}{c} \left[ 1 + \frac{15}{192} \gamma_0^4 + \dots \right]。根据这个结果, 说明对傍轴光线$$

( $\gamma_0 \approx 0$ ), 这种光纤确有聚焦作用。

2-11Δ 有一光导纤维, 其折射率  $n$  随离轴距离  $r$  按下式变化:

$$n^2(r) = n_0^2(1 - \alpha^2 r^2)$$

式中,  $n_0$  是沿轴折射率,  $\alpha$  是远远小于 1 的常数。若选取笛卡尔坐标系的  $z$  轴沿光纤轴向, 光纤入射端  $z=0$ 。  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  表示入射光方向角, 在以下两种边界条件下, 求光线微分方程的解。

$$(1) \quad z=0 \text{ 时, } x=x_0, y=0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}, \gamma_0 \text{ 已知,}$$

$$(2) \quad z=0 \text{ 时, } x=x_0 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\gamma_0, y=0, \alpha_0 = \frac{\pi}{2}。$$

并且证明这种光纤满足自聚焦条件 (沿不同方向入射光纤的近轴光线具有相同的空间周期)。

2-12 当两条光线从端面中心以不同的入射角  $\theta_1, \theta_2$  射入 2-11 题所给的光纤时, 分别求这两条光线轨迹上离轴最远

点的 $r$ 值, 以及这时两光线的相位差。

**2-13Δ** 某透明媒质, 其折射率沿光轴方向呈线性变化, 即 $n(z) = a + bz$ , 在近轴条件下求光线微分方程的解。

**2-14** 考虑一条在 $xy$ 平面中传播的光线, 已知折射率 $n = n(x)$ 。由光线微分方程出发,

$$(1) \text{ 证明 } \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 + 1 = \frac{n^2(x)}{n^2(0) \sin^2 \theta(0)}$$

(2) 已知 $n(x) = a + bx$ , 且光线通过原点时与 $x$ 轴所成角度 $\theta_0 \ll \frac{\pi}{2}$ , 求光线的轨迹方程。

**2-15** 有一折射率仅在 $z$ 方向有变化的媒质, 即 $n = n(z)$ 。证明在这种媒质中, 程函满足

$$\phi(x, y, z) = ax + by + \int_{z_1}^z \sqrt{[n(z)]^2 - (a^2 + b^2)} dz$$

式中, 积分常数 $a$ 、 $b$ 可由边界条件决定。

**2-16** 证明在 $n = n(z)$ 媒质中, 通过原点且与 $z$ 轴成 $\theta_0$ 角、与 $x$ 轴成 $\phi_0$ 角的光线之轨迹方程为

$$x = \int_0^z \frac{n_0 \sin \phi_0 \cos \theta_0}{\sqrt{[n(z)]^2 - n_0^2 \sin^2 \phi_0}} dz$$

$$y = \int_0^z \frac{n_0 \sin \phi_0 \sin \theta_0}{\sqrt{[n(z)]^2 - n_0^2 \sin^2 \phi_0}} dz$$

式中,  $n_0$ 是 $z = 0$ 时的折射率。

**2-17Δ** 若一透明体的折射率 $n$ 沿 $y$ 轴方向变化, 证明一光线近似平行于 $x$ 轴射入薄透明体中, 其传播轨迹是一半径为 $\left( \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} \right)^{-1}$ 的圆弧。

2-18 当媒质折射率  $n(x) = n_0 \operatorname{sech}(\alpha x)$  时, 求

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial(n^2)}{\partial x}$$

的解, 并证明光线的变化周期与边界条件无关。

2-19 已知  $n = n_0 e^{\alpha x}$ , 证明光线微分方程的解为

$$x(z) = x_1 - \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\sin[\alpha(z - z_1) + \theta_1]}{\sin \theta_1} \right\}$$

当  $z = z_1$  时  $x = x_1$ 。

2-20 当媒质折射率按  $n^2(x) = n_0^2 + n_1^2(1 - e^{-\alpha x})$  变化时 ( $x > 0$ ), 求光线微分方程的解。

2-21 折射率分布由  $n^2 = n_0^2 + n_1^2 e^{-\alpha x}$  给出, 证明从  $P(x_0, z_0)$  点发出的光线的轨迹满足

$$\arcsin \left( K e^{\frac{\alpha x}{2}} \right) = \frac{K \alpha n_1}{2n_1 \sin i} (z - z_0) + \arcsin \left[ K e^{\frac{\alpha x_0}{2}} \right]$$

式中,  $n_1 = n(x_0)$ ,  $i$  是光线在  $P$  点处与  $x$  轴的夹角,  $K = (n_1^2 \sin^2 i - n_0^2) / n_1^2$ 。

2-22 在炽热地面上方的空气, 折射率随高度增加而增大, 可表示为  $n^2(x) = n_0^2 + n_p^2(1 - e^{-\alpha x})$ , 式中  $x > 0$ , 表示离地面的高度。与上述相反, 在寒冷的海面上, 空气折射率随高度增加而减小, 可表为  $n^2 = n_0^2 + n_p^2 e^{-\alpha x}$ 。在以上两种情况下都可能观察到海市蜃楼现象。用 2-20, 2-21 两题的结果, 具体分析海市蜃楼现象。

2-23△ 一平面平行透明薄圆板, 其折射率随半径  $r$  而变, 射入板中的光线近于平行板轴。

(1) 为使圆板能起凸透镜作用, 求  $n(r)$  应具有的函数形式,

(2) 为使圆板能起凹透镜作用, 求  $n(r)$  应具有的函数形式。

(3) 用半径为10cm的上述圆板做成一个焦距为50cm的透镜, 折射率变化范围在1.1~1.4之间, 求板厚和  $n(r)$ 。

2-24 已知球对称媒质的折射率  $n = \frac{n_0}{r}$ , 式中  $n_0$  是常数。

求光线在这种媒质中传播时的轨迹方程。

2-25 地球周围的大气层可视为球对称媒质, 其折射率可近似地用  $n = n_1 - n_2 r$  表示, 式中  $n_1$  和  $n_2$  是常数。求在这种媒质中的光线轨迹方程。

2-26  $\Delta$  当媒质分界面由  $f(x, y, z) = 0$  给出时, 从费马原理出发, 导出折射定律和反射定律。

2-27 图12中  $\Sigma$  是半径为  $R$  的球面, 球心在  $C$ ,  $SO = OP = x$ 。

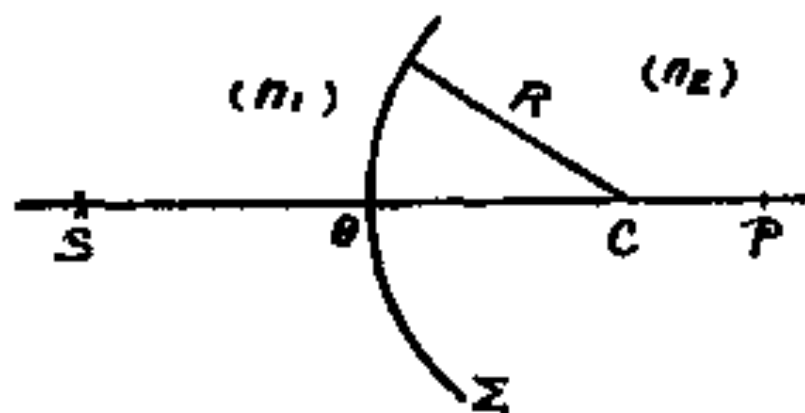


图 12

试证明直线路径  $SOP$  对应极值: 当满足

$$x < R \frac{n+1}{n-1}$$

时为极小值; 当

$$x > R \frac{n+1}{n-1}$$

时为极大值; 当

$$x = R \frac{n+1}{n-1}$$

时为稳定值。这个稳定值与  $S$  点的傍轴象相对应。式中,

$$n = \frac{n_2}{n_1}, \text{ 设 } n > 1.$$

**2-28** 图13中 $\Sigma$ 是绕长轴旋转而成的旋转椭球面。试用费

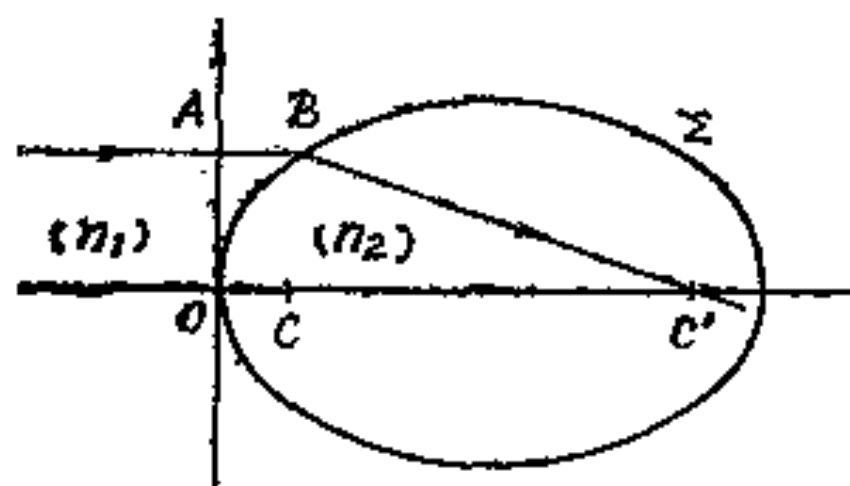


图 13

马原理证明所有平行于椭球长轴的光线, 折射后聚焦于椭圆的一个焦点。这里假定椭圆的偏心率为  $\frac{n_1}{n_2}$ 。(提示: 从

$$\text{条件 } n_2 \overline{OC'} = n_1 \overline{AB} +$$

$n_1 \overline{BC'}$  出发, 证明  $B$  点是在椭圆上。)

**2-29** 在图14中,  $C$  点是半径为  $R$  的反射球的中心,  $P_1$  和  $P_2$  是一条直径上与中心等距的两点。试求:

(1) 光程  $P_1M + P_2M$  随  $\theta$  角的变化关系;

(2) 当  $\theta$  为何值时,  $P_1MP_2$  是在球面上反射的一条光线的路径?

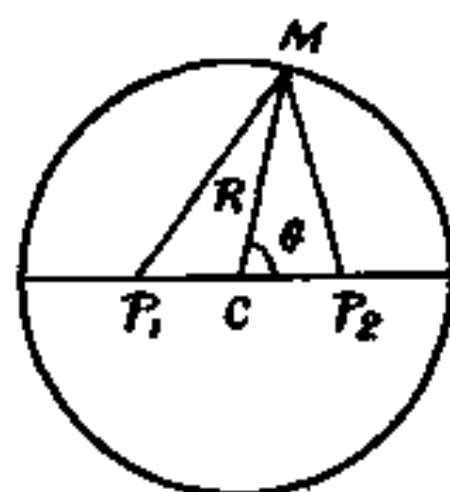


图 14

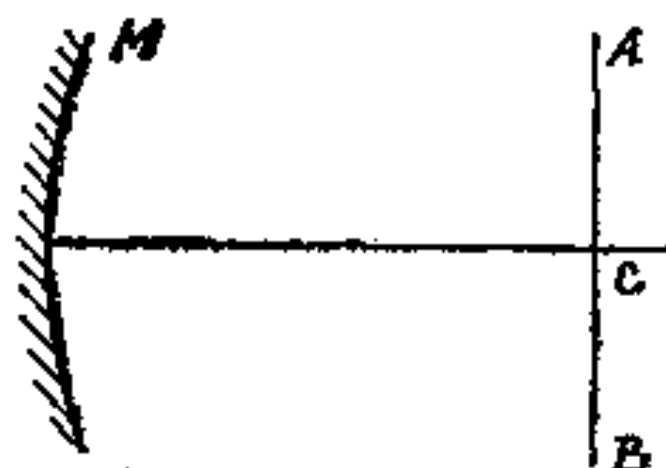


图 15

**2-30** 如图15, 一凹球面反射镜, 球心为  $C$ ,  $\overline{AB}$  是过  $C$  且垂直于光轴的线段, 且  $\overline{AC} = \overline{CB}$ 。

证明从  $A$  点发出经球面镜反射到达  $B$  点的实际光线与其邻域的其他路线相比有最大光程。

### 第三章 光学成象的几何理论 成象仪器

#### 1. 哈密顿特征函数 理想成象

3-1△ 以 $z$ 轴为对称轴的旋转曲面方程可表示为 $z = F(x^2 + y^2)$ 。将其展开成幂级数, 则 $z = c_0 + c_2(x^2 + y^2) + c_4(x^2 + y^2)^2 + \dots$ , 当曲面过原点时 $c_0 = 0$ 。证明

$$(1) \quad c_2 = \frac{1}{2r}, \quad r \text{ 是旋转曲面在原点处的曲率半径,}$$

$$(2) \quad \text{对半径为 } r \text{ 的球面 } c_4 = \frac{1}{8r^3}。$$

3-2 证明: 对旋转折射面, 角特征函数展开式  $T = n_1 a_1 - n_0 a_0 + \mathcal{A}u^2 + \mathcal{B}v^2 + \mathcal{C}w^2 + \mathcal{D}u^4 + \mathcal{E}v^4 + \mathcal{F}w^4 + \mathcal{G}u^2v^2 + \mathcal{H}u^2w^2 + \mathcal{K}v^2w^2$

中各系数分别为

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{n_1 - n_0} + \frac{a_0}{n_0} \right],$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{n_1 - n_0} - \frac{a_1}{n_1} \right],$$

$$\mathcal{C} = - \frac{r}{n_1 - n_0},$$

$$\mathcal{D} = - \frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{2(n_1 - n_0)} + \frac{1}{n_0} \right] + \frac{a_0}{8n_0^3},$$



$$\mathcal{C} = -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{2(n_1 - n_0)} - \frac{1}{n_1} \right] - \frac{a_1}{8n_1^3},$$

$$\mathcal{G} = -\frac{(1+b)r}{2(n_1 - n_0)^3},$$

$$\mathcal{G} = -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{n_1 - n_0} + \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} \right],$$

$$\mathcal{H} = \frac{r}{2(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{n_1 - n_0} + \frac{1}{n_0} \right],$$

$$\mathcal{H} = \frac{r}{2(n_1 - n_0)^2} \left[ \frac{1+b}{n_1 - n_0} - \frac{1}{n_1} \right].$$

3-3 取平面反射镜的镜面为  $oxy$  坐标面, 证明平面反射镜的点特征函数为

$$V(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2]^{1/2}$$

3-4 (1) 如图16 (a) 所示, 若光线1、2相交于  $P$  点, 经过一理想光具组 (即绝对仪器) 后, 它们的共轭光线  $1'$ 、 $2'$  是否一定相交? 如果有交点, 令此交点为  $P'$ 。两光线在  $P$  和  $P'$  间的光程是否相等?

(2) 如图16 (b) 所示, 从点光源  $P$  发出两根光线1和2,

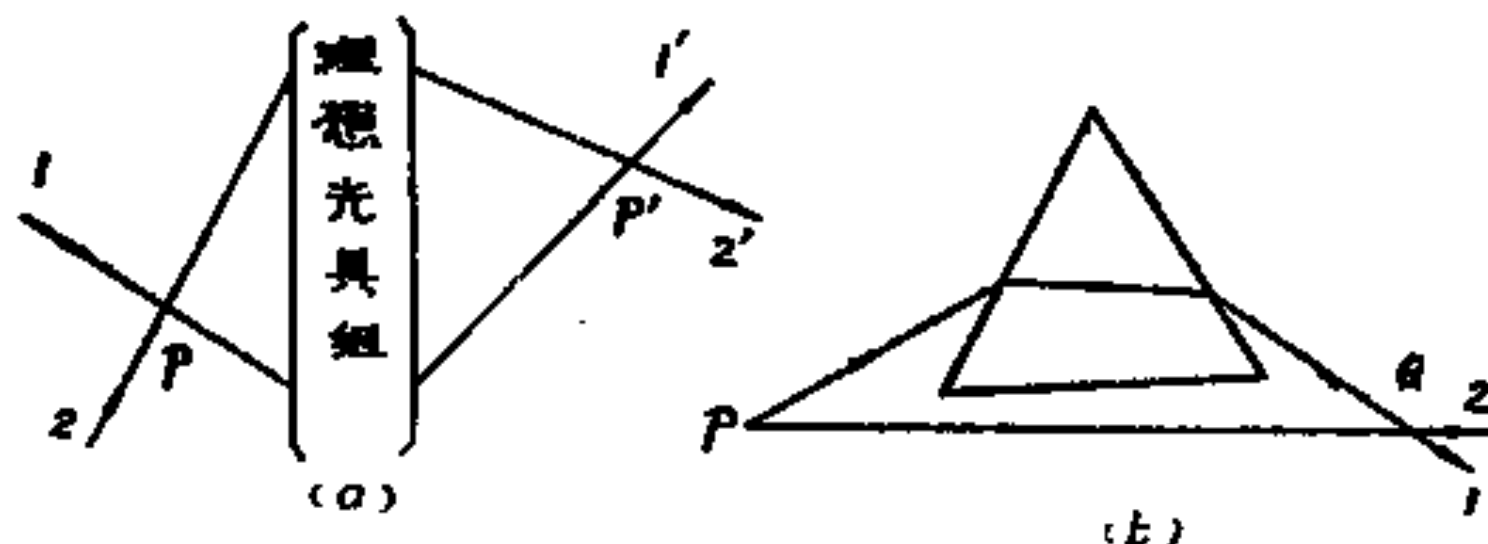


图 16

光线1经棱镜偏折，光线2不经过棱镜，两光线相交于 $\alpha$ 。在 $P$ 和 $\alpha$ 间两光线的光程是否相等？

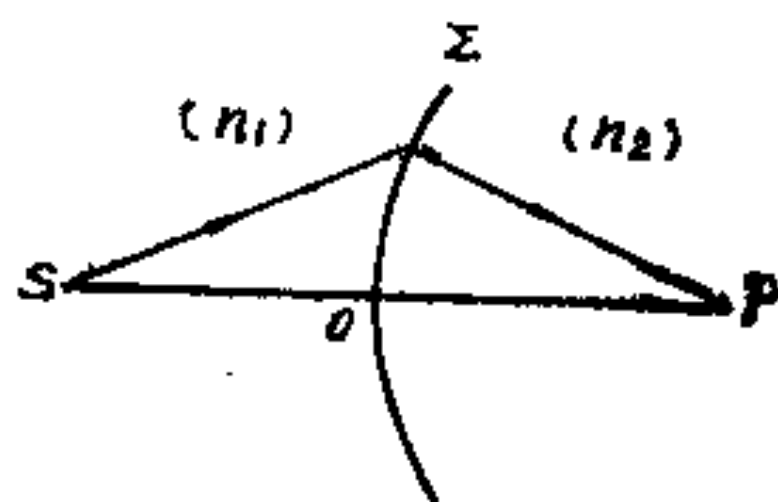


图 17

3-5 如图17，两种媒质的分界面 $\Sigma$ 是个以 $SP$ 为旋转轴的旋转曲面， $P$ 点是 $S$ 点的无象散象。已知 $SO = l_0$ ， $OP = l_1$ ，取 $O$ 为坐标原点， $z$ 轴沿 $OP$ 方向。求 $\Sigma$ 面满足的方程

## 2. 具有轴对称的投影变换 高斯光学

3-6 $\Delta$  满足如下关系的变换称为投影变换（即射影变换）

$$x' = \frac{F_1}{F_0}, \quad y' = \frac{F_2}{F_0}, \quad z' = \frac{F_3}{F_0}$$

式中， $F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ )。

证明其反变换为

$$x = \frac{F'_1}{F'_0}, \quad y = \frac{F'_2}{F'_0}, \quad z = \frac{F'_3}{F'_0}$$

式中， $F'_i = a'_i x' + b'_i y' + c'_i z' + d'_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ )。

3-7 证明：在投影变换中，直线经过变换仍是直线，平面经过变换仍是平面。

3-8 以节点为坐标原点，投影变换的牛顿方程将变成什么形式？

3-9 在投影变换中，已知物空间焦距  $f > 0$ ，象空间焦距

$f' = \frac{1}{2}f$ , 物距  $Z = -f$ 。

(1) 画出各基点位置,

(2) 证明两主点间距  $UU'$  和两节点间距  $NN'$  相等,

(3) 用作图法求象距。

3-10 已知投影变换的垂轴放大率  $\beta = \left( -\frac{dy'}{dy} \right)_{Z=\text{常数}} =$

-10, 由物面到象面的距离为 720cm, 物空间和象空间两焦点距离为 114cm。求焦距  $f$ , 并绘出各基点位置图。

3-11 (1) 用作图法求投影变换组合的主平面和焦点,

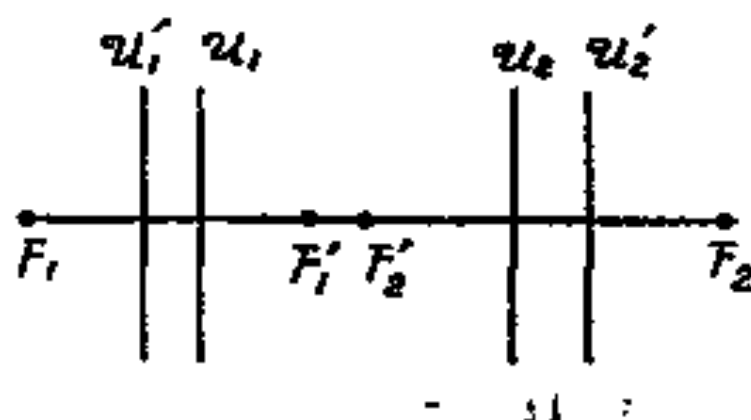


图 18

(2) 用作图法求正方形  $ABCD$  的象。

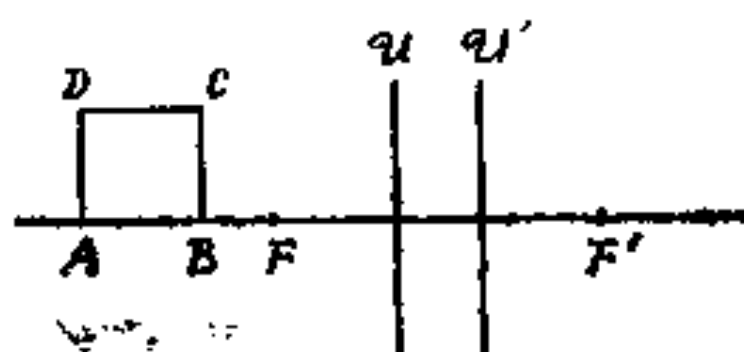


图 19

3-12 $\Delta$  对单个旋转折射面, 在高斯光学的锐成象条件下, 证明物空间和象空间之间的变换确是投影变换, 并求出轴对称投影变换公式中的各系数。

**3-13** 一平行平面玻璃板的折射率为 $n$ ，厚度为 $h$ ，点光源 $Q$ 发出的傍轴光束（即接近正入射的光束）经上表面反射成象于 $Q_1$ ；穿过上表面后在下表面反射，再经上表面折射的光束成象于 $Q_2$ 。证明 $Q_1$ 与 $Q_2$ 间的距离为 $\frac{2h}{n}$ 。

（提示：把平面看成 $r \rightarrow \infty$ 的球面，利用球面折射公式计算）。

**3-14** 一个玻璃球直径为40cm，玻璃的折射率为1.5，球中有两个小气泡，一个正在球心，另一个在 $\frac{1}{2}$ 半径处。沿两气泡的连线方向，在球的两边观测这两个气泡，它们应在什么位置？如果在水中观测（水的折射率 $n=1.3$ ）时，它们应在什么地方？

**3-15** 一个折射率为1.5，半径为20cm的半球形透镜（如

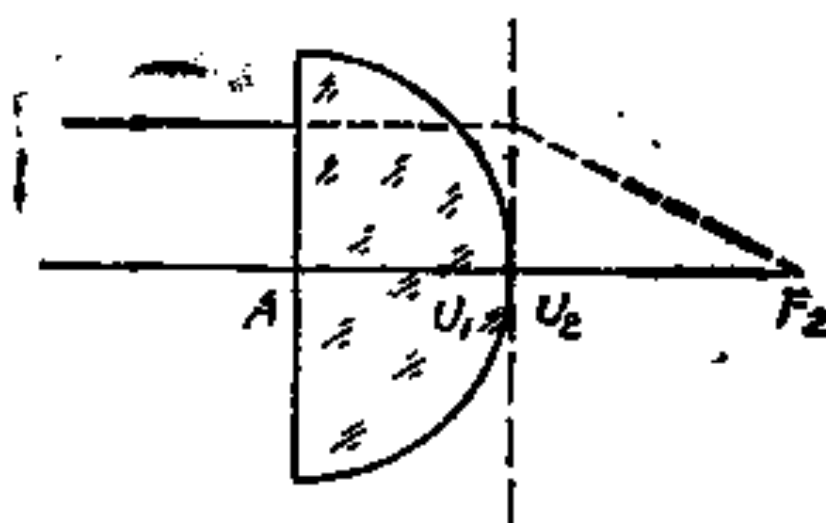


图 20

图20)。 $U_1$ 和 $U_2$ 分别表示物、象空间的主点。

试证明：

$$AU_1 = 13.3\text{cm},$$

$$AU_2 = 20\text{cm},$$

$$f = 40\text{cm}.$$

**3-16** 一个玻璃半球，球半径为6cm，玻璃折射率为1.5。如果凸面向着入射平行光束的半球镀反射膜，其会聚点在何处？如果在凹面向着光束的半球镀反射膜，其在玻璃中的会聚点在什么地方？这样的反射光束经前表面折射后的会聚点又在什么地方？并说明这些会聚点的虚实。

**3-17Δ** 有一平凸透镜，凸面朝向来光方向，半径 $r=30\text{cm}$ ，

透镜中心的厚度  $t = 2\text{cm}$ ，透镜的折射率  $n_1 = 1.5$ ，两侧是空气( $n = 1$ )。一物点在透镜左方，到光轴的垂直距离为  $15\text{cm}$ ，其在光轴上的垂足距凸面顶点  $30\text{cm}$ 。

(1) 求这个厚透镜各基点位置和焦距；

(2) 用高斯光学公式求象点到透镜平表面的垂直距离；

(3) 用光线追迹法，由平行光轴光线和过凸面顶点光线，求象点到透镜平表面之垂直距离。

**8-18** 一束平行光垂直入射到平凸透镜上，会聚于透镜后  $48\text{cm}$  处。如果在此透镜凸面上镀银，则平行光会聚于透镜前  $8\text{cm}$  处。求透镜折射率和凸面曲率半径。

**8-19** 双凹厚透镜第一面曲率半径是  $-10\text{cm}$ ，第二面曲率半径是  $+20\text{cm}$ ，厚  $1.0\text{cm}$ ，折射率为  $1.5$ 。求主平面的位置。

**8-20** 一共轴光学系统的主点和节点重合（如图21）， $1-1'$  是一对共轭光线，求光线2的共轭光线。

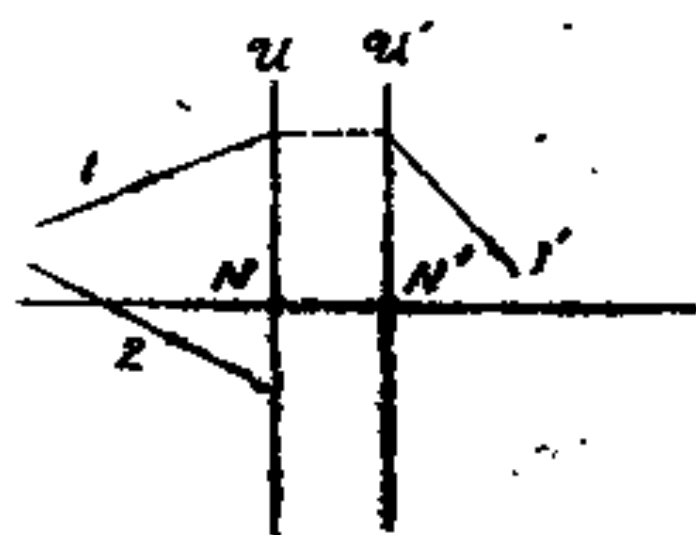


图 21

**8-21** 一薄透镜焦距为  $10\text{cm}$ ，另一薄透镜焦距为  $5\text{cm}$ ，二者组成共轴系统，其组合焦距仍为  $10\text{cm}$ 。求二薄透镜的相对位置及其基点位置，以图解法校核之。

**8-22** 试证：由  $k$  个薄透镜组成的共轴系统，其光焦度  $\mathcal{P}$  满足

$$y_1 \mathcal{P} = y_1 \mathcal{P}_1 + y_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + y_k \mathcal{P}_k = \sum_{i=1}^k y_i \mathcal{P}_i$$

式中,  $y_i$  是光线与透镜交点距光轴高度,  $\mathcal{P}_i$  是第  $i$  个透镜的光焦度。(入射光与光轴平行)。

**3-23** 证明: 由  $k$  个球面组成的共轴系统的光焦度

$$\mathcal{P} = \left[ \prod_{i=1}^{k-1} (1 - d_i \nu'_i) \right] \nu'_k$$

式中,  $d_i$  是相邻球面顶点间距,  $\nu'_i$  是第  $i$  面象距的倒数。

(物在无穷远处, 即物距  $S_1 = \infty$ )。

**3-24** 证明: 由  $k$  个球面组成的共轴系统的光焦度

$$\mathcal{P} = \nu'_1 \prod_{i=2}^k \frac{\nu'_i}{\nu_i}$$

式中  $\nu'_i$  的含意同 3-23 题,  $\nu_i$  是第  $i$  面物距的倒数。

**3-25 $\Delta$**  证明: 由  $k$  个球面组成的共轴系统的焦距

$$f' = -\frac{h_1}{h_k} s'_k$$

式中  $h_i$  的含意同 3-22 题,  $s'_k$  是第  $k$  个折射面顶点到共轴系统象空间焦点的距离。(物在无穷远)。

**3-26** 由两个分开的透镜组成的共轴系统, 如果物体相对于第一透镜的物方焦点移动一小距离  $\Delta x$ , 则其象相应地对第二透镜的象方焦点移动  $\Delta x'_2$ 。试证  $\Delta x'_2 = \Delta x_1 \left( \frac{f'_2}{f'_1} \right)^2$ 。

**3-27** 对一共轴系统, 测得当物距改变  $\Delta s$  时, 象距改变  $\Delta s'$ , 同时放大率由  $M_1$  变为  $M_2$ 。试证此系统的焦距为

$$f = -\frac{\Delta s}{\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1}}, \quad f' = \frac{\Delta s'}{M_2 - M_1}。$$

这里提供了一种测焦距的方法, 它与测焦点位置的方法

配合起来，可以用实验的方法确定系统的主平面位置。

### 3. 正弦条件 象散光锥

3-28Δ 一旋转折射面，两侧是均匀媒质，其折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ 。

(1) 欲使发自光轴上一点  $A$  的所有折射光线虚交于光轴上的另一点  $B$  (即  $B$  点是  $A$  点的无象散象，这样的一对共轭点称齐明点)，且满足  $n_1 z_0 = n_2 (z_0 - z')$ ，求折射面方程。坐标原点取在  $A$ ， $z$  轴沿旋转轴， $B$  点坐标为  $(0, 0, z')$ ，折射面顶点  $O$  的坐标为  $(0, 0, z_0)$ 。

(2) 证明：齐明点满足正弦条件，换句话说，齐明点也就是不晕点。

3-29 如图22，从点光源  $P$  以入射角  $i$  射到楔形膜上的光线

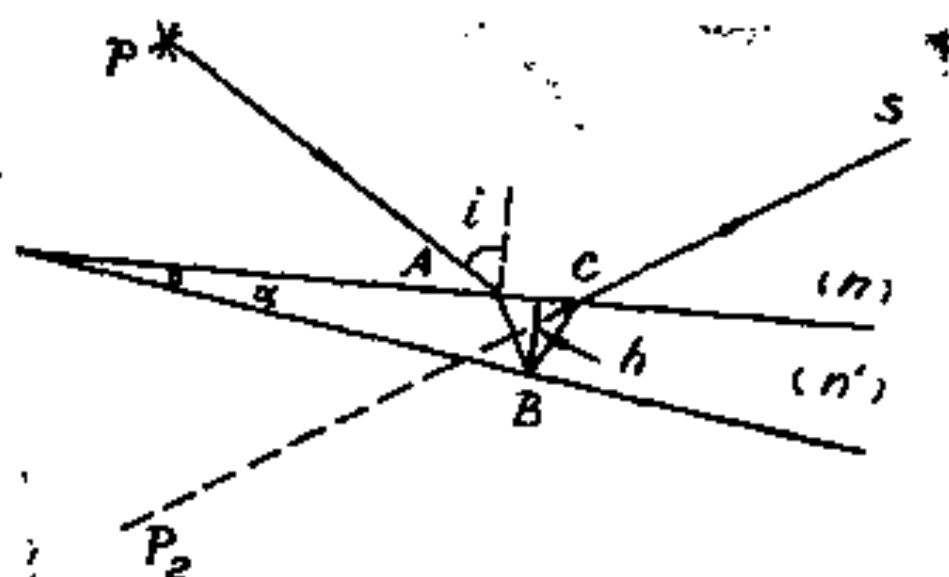


图 22

$PA$  ( $PA = l$ ) 经折射进入膜内，在膜的下表面  $B$  点反射，反射线在  $C$  点又发生折射，沿  $CS$  方向射出， $P_2$  是  $P$  点的象。 $A$  点膜厚为  $h$ ，楔形膜的顶角  $\alpha$  很小。用象散细光锥的成象公式，

在子午光线成象和弧矢光线成象两种不同情况下，分别导出  $CP_z$  的表示式。

**3-30Δ** 点光源发出的细光锥由折射率为  $n_0$  的媒质，以入射角  $\theta_0$  射到折射率为  $n_1$  的媒质中，媒质分界面是平面。点光源到界面的垂直距离  $h$  已知，求折射后象散光锥的象散焦差。

#### 4. 色差 棱镜的色散 光度学和孔径

**3-31Δ** 以  $K_g$  ( $n_D = 1.5163$ ,  $n_F = 1.5220$ ,  $n_C = 1.5139$ ) 和  $F_g$  ( $n_D = 1.6199$ ,  $n_F = 1.6321$ ,  $n_C = 1.6150$ ) 组合为消色差胶合透镜组，焦距为  $10\text{cm}$ 。求两透镜的焦距。

**3-32** 有一惠更斯目镜，两透镜的焦距比为  $f'_1 : f'_2 = 2 : 1$ ，设两透镜所用玻璃的折射率均为  $1.6$ ，目镜焦距为  $5\text{cm}$ 。为消除目镜的放大率色差，试求透镜凸面的曲率半径及目镜的主点和焦点位置，并绘图表示之。

**3-33** 为了增大棱镜光谱仪的角色散，可采用卢瑟福—布洛宁复合棱镜(如图23)，其中  $ABC$  为一等腰棱镜，棱镜  $ABD$  和  $ACE$  的截面为全等三角形。当在最小偏向角条件下使用这种复合棱镜时，证明其角色散等于

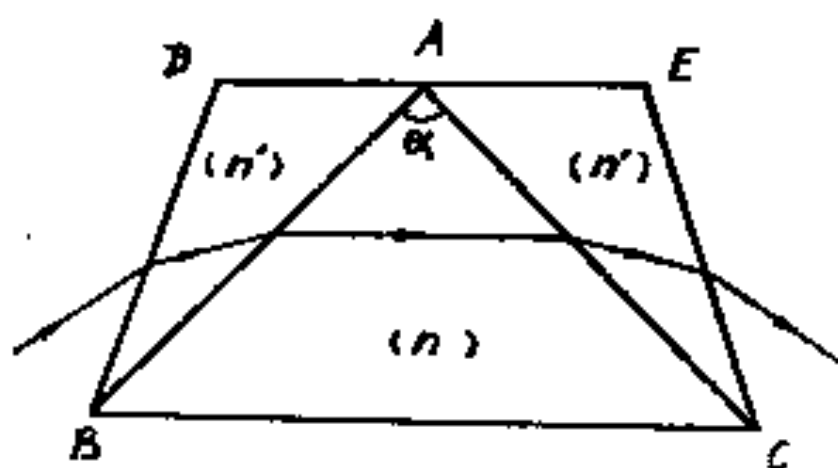


图 23



$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = 2 \left( \frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right) \frac{n \sin \frac{\alpha}{2}}{n' \sqrt{1 - \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

**3-34** 用于跟踪天空飞行目标的电视摄象机, 摄象管所要求的象面最低照度为  $20 \text{ lx}$ , 假设天空的亮度为  $2.5 \times 10^{-6} \text{ cd/m}^2$ 。光学系统的透过率  $K$  等于  $0.7$ , 问要求使用多大相对孔径的摄影物镜?

**3-35** He-Ne激光器发射功率为  $3 \text{ 毫瓦}$ , 波长是  $6328 \text{ \AA}$  的激光束, 问此激光束的光通量是多少流明? 发光强度是多少? 如果此激光束的发散角为  $\pm 0.001$  弧度, 放电毛细管的直径是  $1 \text{ 毫米}$ , 假定人眼只能观看  $10^4$  坎德拉的亮度, 则当人眼对着光束前进方向直视此激光束时, 应戴透过率为多少的防护眼镜?

**3-36** 惠更斯目镜的结构如图24。今在两透镜中间放一光

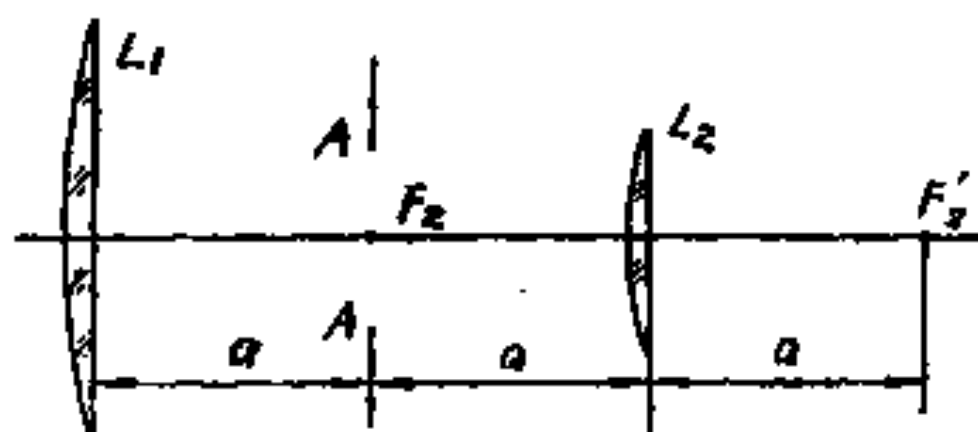


图 24

阑  $AA$ , 设透镜  $L_1$ 、 $L_2$  和光阑的直径分别为  $D_1$ 、 $D_2$  和  $D$ 。试证

(1) 当满足条件  $\frac{D_1}{3} > D < D_2$  时,  $AA$  是孔径光阑;

(2) 对  $F_2'$  点的出射孔径角  $\theta'$  满足  $\tan \theta' = \frac{D}{2a}$ 。

## 5. 光线追迹 非球面设计

**3-37** 利用光线追迹法证明：对半径为 $r$ 的球面折射面，物距 $L$ 和象距 $L'$ 满足

$$\frac{L^2}{n^2(L-r)^2} - \frac{L'^2}{n'^2(L'-r)^2} = 4r \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ \frac{1}{n^2(L-r)} - \frac{1}{n'^2(L'-r)} \right] \quad (A)$$

式中 $\phi = U + I = U' + I'$ ， $U$ 、 $U'$ 分别是入射光、折射光与光轴的夹角， $I$ 、 $I'$ 分别是入射光、折射光与折射面在入射点处的法线之夹角。

用(A)式进一步证明：

(1) 在广角光锥成象时，无象散成象的一对共轭点就是齐明点（不晕点）；

(2) 在傍轴光线成象条件下，(A)式给出

$$\frac{f}{L} + \frac{f'}{L'} = -1$$

式中 $f$ 和 $f'$ 是折射面物、象空间的焦距。

**3-38Δ** 设单透镜的第一个面是非球面，它能使平行光轴的光线都交于光轴上一点，第二面是球面。欲使此透镜对无穷远点消除球差，求第一个面的方程。

**3-39Δ** 平行光束以高度 $h = 5\text{cm}$ 入射到一球面反射镜上，聚焦时光斑较大。为了消除球差，以非球面镜取代该球面镜，设原球面镜的曲率半径 $r = -50\text{cm}$ ，求非球面镜的偏心率及曲面方程。

## 6. 成象仪器

**3-40** 一望远镜物镜焦距为  $1\text{m}$ ，相对孔径  $1:12$ ，测得出射光瞳直径为  $4\text{mm}$ ，试求望远镜的放大率和目镜焦距。

**3-41** 为看清  $10\text{km}$  处相隔  $10\text{cm}$  的两物点

(1) 望远镜至少应选用多大倍率（正常放大率）？

(2) 筒长为  $46.5\text{cm}$ ，求物镜和目镜焦距。

(3) 为满足正常放大率的要求，保证人眼的分辨角  $1'$ ，物镜口径应多大？

(4) 物方视场  $2\omega = 2^\circ$ ，求象方视场。在  $10\text{km}$  处能看清多大范围？在不拦光的条件下，目镜口径应为多少？

**3-42** 望远镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明出射光瞳直径  $D'$  与物镜直径  $D_0$  之比等于望远镜视角放大率绝对值  $|M|$  的倒数。

**3-43** 一架显微镜，物镜焦距为  $4\text{mm}$ ，中间象成在物镜第二焦点后  $160\text{mm}$  处，如果目镜放大倍数为 20 倍，求显微镜总放大率。

**3-44** 显微镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明出射光瞳的直径  $D'$  与数值孔径  $n\sin\theta_0$  的关系是

$$D' = \frac{2s_0 n \sin\theta_0}{|M|}$$

式中  $s_0 = 25\text{cm}$  是明视距离， $n$  是物镜的物方折射率， $\theta_0$  是入射孔径角， $M$  是显微镜的视角放大率。

**3-45Δ** 显微镜油浸物镜的构造如图 25。由物点  $Q_1$  发出的光

The diagram illustrates a three-stage optical system. Light rays from a source at the bottom pass through three lenses, labeled  $Q_1$ ,  $Q_2$ , and  $Q_3$  from top to bottom. The system forms three intermediate images, labeled  $C_1$ ,  $C_2$ , and  $C_3$ . The distances between the lenses and the images are labeled  $u_1$ ,  $u_2$ , and  $u_3$ . The diagram shows how the light rays converge and diverge at each stage, forming the images  $C_1$ ,  $C_2$ , and  $C_3$ .

图 25

**3-46** 在 3-45 题中设  $n=1.5$ , 试计算此物镜的数值孔径  $N.A. = n \sin u_1$ , 以及孔径角  $u_2$  和  $u_3$ 。

— 35 —

## 第四章 干涉理论基础和干涉仪

### 1. 干涉的基本概念

4-1 由光强是能流密度的时间平均值这个定义出发, 证明两束平面光波, 当其传播方向间的夹角较大时, 合光强不再与  $\langle E^2 \rangle$  成正比。这里  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  表合场强。

4-2 三束相干的平面波在 origin  $O$  处的初相位都是零, 振幅比为  $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 1$ , 在  $oxy$  平面内传播,  $\vec{k}_1$  与  $z$  轴夹角为  $\theta$ ,  $\vec{k}_2$  与  $z$  轴夹角为零,  $\vec{k}_3$  与  $z$  轴夹角为  $-\theta$  ( $\theta$  角很小)。

(1) 写出以上三束平面波的复数表示式,

(2) 求  $z=0$  面上的强度分布函数, 并分析干涉条纹的特征。

4-3 用两个相距很近的、互不相干的点光源  $s_1$  和  $s_2$  照射杨氏实验中的双缝, 在什么样的条件下观察屏上的照度等于  $4I_0$ ?  $I_0$  是在遮住一个缝的情况下,  $s_1$  或  $s_2$  单独在屏上产生的照度。

4-4 一光源以光强  $I_1$ 、 $I_2$  ( $I_2 < I_1$ ) 发射二种频带无限窄的光, 其中心频率为  $\nu_1$ 、 $\nu_2$ 。当通过干涉装置后, 证明: 最小可见度为

$$\gamma_{\min} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

试解释能否根据可见度曲线决定哪个频率大?

4-5  $\Delta$  (1) 两个频率和振幅相同, 相位差恒定, 但振动方

向不同的光波能否发生干涉？当振动方向成  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  夹角时，求干涉条纹的可见度。

(2) 当两相干光束强度不相等时，证明其干涉条纹的可见度随  $\Delta I = |I_1 - I_2|$  的增大而减小。

4-6 如果在杨氏干涉实验中用三条等间距的狭缝，试求干涉图样的强度分布。

4-7 (1) 平面光波正入射到一个开有双孔的平面上，两孔间距是  $d$ ，在双孔后置一凸透镜，证明：在透镜焦面上观察到的条纹宽度为  $f\lambda/d$ ，其中  $f$  是透镜焦距。

(2) 证明：若开有双孔的平面放在透镜的前焦面上，则干涉条纹是一些平行直线。但若该平面不放在前焦面上，干涉条纹则是一些双曲线。

4-8 $\Delta$  (1) 用一块光密度(光密度定义  $\Delta = \lg \frac{I_i}{I_t}$ ， $I_i$  和  $I_t$  分别是入射和透射光强)  $\Delta = 2$  的吸收片挡住杨氏实验中的狭缝之一，求此种条件下干涉条纹的可见度。

(2) 在杨氏实验中，具有固定长度  $h$  和可变宽度的带状光源被安放在距双缝  $s_1$ 、 $s_2$  所在平面  $1\text{m}$  处。双缝距离  $s_1 s_2 = 2\text{mm}$ ，光波长  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$  描述当逐渐使光源增宽时所观察到的现象。求出使可见度下降不超过  $10\%$  时，光源的最大宽度。

## 2. 分波阵面干涉装置

4-9 菲涅耳双面镜夹角为  $1'$ ，双面镜交线到光源和屏的距离分别为  $10\text{cm}$  和  $1\text{m}$ 。求光源的最大宽度 ( $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ )。

4-10 在非涅耳双棱镜干涉装置中, 双棱镜的折 射 率  $n = 1.50$ , 顶 角  $\alpha = 30'$ , 光 源 到 双 棱 镜 和 观 察 屏 的 距 离 分 别 为  $20\text{cm}$  和  $120\text{cm}$ , 光 波 长  $6000\text{\AA}$ 。求

(1) 相邻干涉亮纹间的距离;

(2) 光源的最大宽度。

4-11 图26为洛埃镜干涉装置,  $s$  是点光源, 发出频率为  $5 \times 10^{14}\text{Hz}$  的光波。  $AB$  是平面反射镜,  $LOM$  是观察屏。已知  $SP = 2\text{mm}$ ,  $PA = 10\text{cm}$ ,  $AB = 20\text{cm}$ ,  $BO = 170\text{cm}$ 。

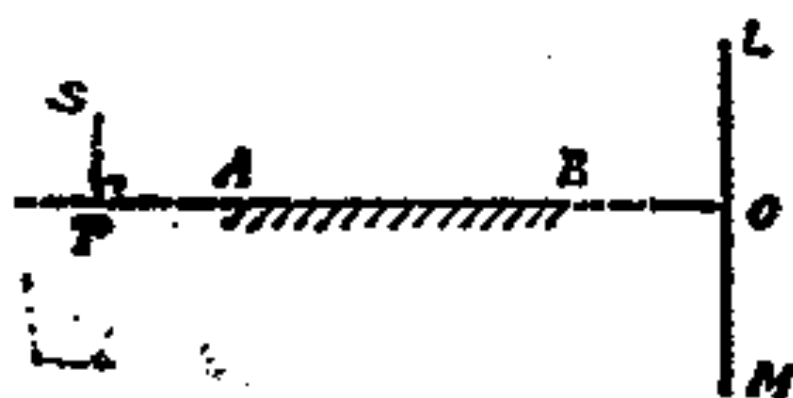


图 26

(1) 求出屏上可以观察到干涉条纹的区域, 并计算可以看到的条纹数目;

(2) 在直接射到屏上的光路中加入一云母片, 使最下方的条纹成为中央条纹, 求云母片厚度。

4-12 $\Delta$  在洛埃镜干涉装置中, 当使用扩展光源时, 求光源临界宽度和许可宽度的表示式。

4-13 比累对切透镜两半透镜分开的距离为  $1\text{mm}$ , 光源到透镜和屏的距离分别为  $20\text{cm}$  和  $1\text{m}$ , 透镜的焦距为  $10\text{cm}$ , 光的波长是  $5000\text{\AA}$ 。求干涉条纹的间距和光源的临界宽度。

4-14 在梅斯林干涉装置中, 在光束交迭区放一与光轴垂直的观察屏, 干涉条纹的形状是怎样的? 设透镜焦距为  $30\text{cm}$ , 光源  $s$  与靠近的前半透镜的距离是  $60\text{cm}$ , 两个半透镜的间距是  $8\text{cm}$ ,  $\lambda = 5000\text{\AA}$ 。求两象间的中点距后半透镜多远? 在这中点处放观察屏, 求亮纹间距。

**4-15** 在瑞利干涉仪中，开始时 $T_2$ 管充以空气， $T_1$ 管抽成真空，并观测干涉条纹。然后逐渐使空气进入 $T_1$ 管，直到它与 $T_2$ 管的气压相同为止。记下这一过程中条纹移动的数目。

设 $\lambda_0 = 5893 \text{ \AA}$ ，管长  $20\text{cm}$ ，条纹移动 98 根，求空气的折射率。

**4-16** 已知太阳的表观角直径为  $0.5^\circ$ 。平均有效波长为  $6000 \text{ \AA}$ ，求阳光的横向相干宽度。

**4-17** 一个直径为  $1\text{cm}$  的发光面元，如果用干涉孔径角量度的话，其空间相干性是多少弧度？如果用相干面积量度，问  $1\text{m}$  远处的相干面积多大？ $10\text{cm}$  远处的相干面积多大？

**4-18** 用迈克尔孙测星干涉仪测参宿四时，两反射镜的间距为  $1.586\text{m}$  时干涉条纹消失，求其角直径（设平均有效波长为  $5900 \text{ \AA}$ ）。

### 3. 分振幅干涉

**4-19** 如图27所示，由点光源 $S$ 发出的两条光线1和2，分别

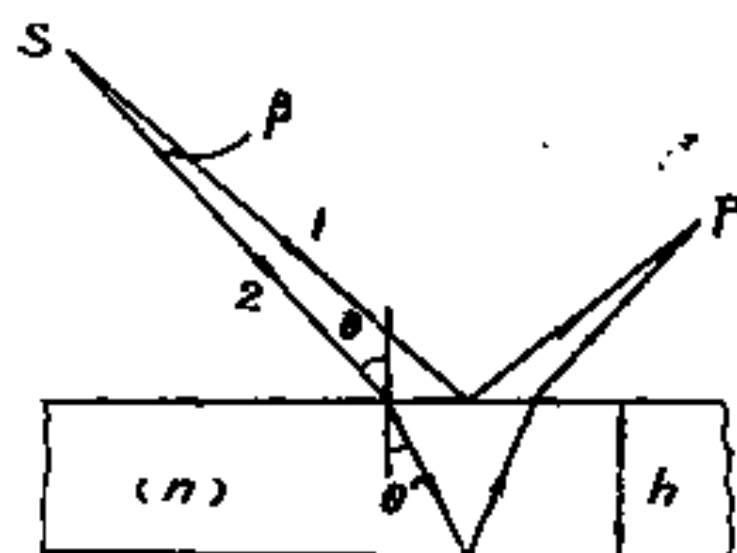


图 27



经平行平板的上、下表面反射后交于P点。证明：两条光线在P点相遇时的光程差  $\Delta \mathcal{L} = 2nh \cos \theta' \left[ 1 - \frac{\sin \theta \cos \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)} \frac{\beta}{2} \right]$

$+\frac{\lambda}{2}$  式中  $\beta$  是干涉孔径角。

4-20 $\Delta$  对平行平板的干涉情况，证明：光源的临界宽度  $e_k$  和干涉孔径  $\beta$  满足  $e_k = \frac{\lambda}{\beta}$ 。

4-21 根据干涉条纹可见度的相位差判据

$$\delta_{\max} - \delta_{\min} \leq \frac{\pi}{4}$$

求接近正入射时，薄膜等厚干涉中光源的许可宽度。

4-22 一竖直放置的肥皂膜，由于重力作用成上薄下厚的尖劈状，劈的顶角很小，膜的折射率取为1.33，周围空气折射率取为1。来自波长为5893 Å 的单色扩展光源的一束光，在劈的主截面内传播，以  $30^\circ$  入射角射到膜面上，入射点处膜厚0.1mm。在反射光中观察干涉条纹，为使条纹有较高的可见度，求光源容许扩展的角半径。

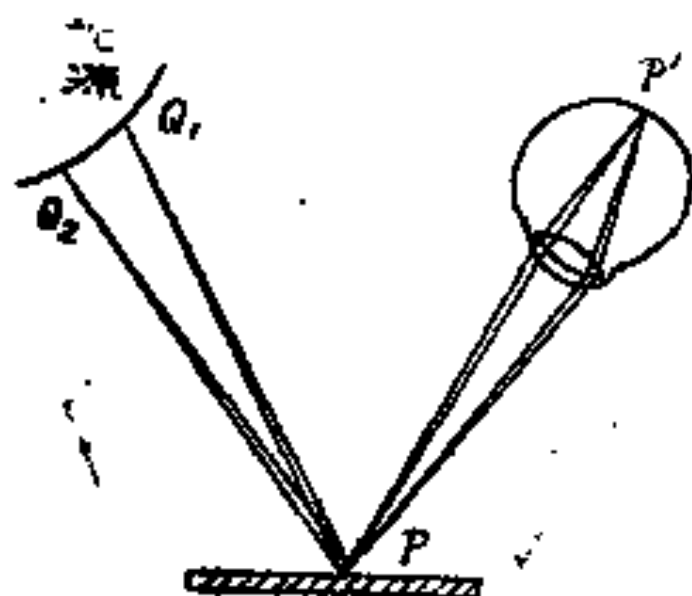


图 28

4-23 如图28，用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹。设瞳孔直径4mm，与膜面距30cm，视线与膜面法线夹角  $30^\circ$ ，薄膜折射率1.5。

(1) 分别计算膜厚2cm

和 $20 \times 10^{-6} \text{ m}$ 两种情况下，点源 $Q_1$ 和 $Q_2$ 在观察点 $P$ 产生的光程差改变量 $\delta(\Delta \mathcal{L})$ 。

(2) 为了条纹有一定的可见度，要求上述光程差改变量的数量级不能超过多少？以此来估计一下对膜厚的限制。

4-24 图29是干涉条纹定域的Searle方法。薄膜的两个表

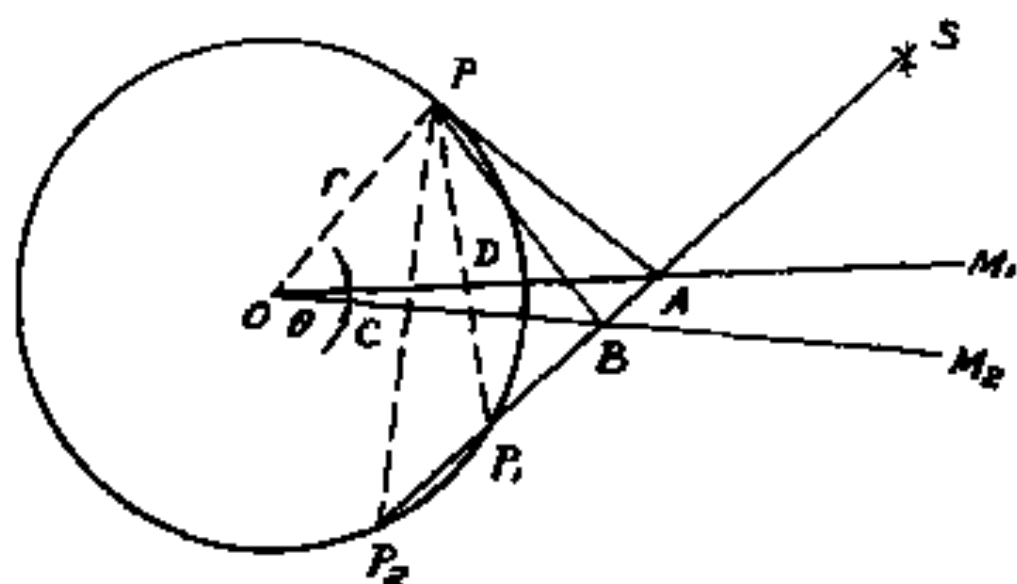


图 29

面 $OM_1$ 和 $OM_2$ 反射从光源 $s$ 射来的一束光。证明这两条光线的光程差为 $2r \sin \theta$ 。讨论这种作图法对研究干涉条纹定域的用途。

4-25 由两块平板玻璃夹成一空气尖劈，劈的顶角很小。一束平行光在劈的主截面内传播，以 $10^\circ$ 角入射到玻璃板的外表面上，求空气尖劈所形成的干涉条纹定域面的位置。

4-26 (1) 在牛顿环装置中，如果入射光包含两种波长（ $4000 \text{ \AA}$ 和 $4002 \text{ \AA}$ ），试计算从圆环条纹消失处到接触点的距离。设透镜凸面曲率半径为 $80 \text{ cm}$ 。

(2) 在本题(1)中，如透镜缓慢地向上升高，试计算中心附近的条纹消失时透镜上升的高度。

4-27 $\Delta$  在特怀曼干涉仪中，把平面镜 $M_2$ 换成半径为 $R$ 的球

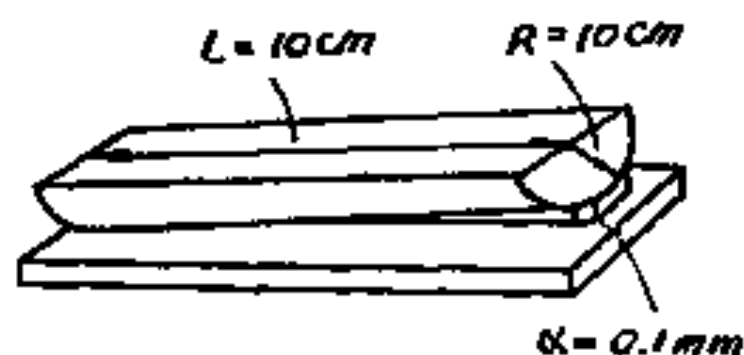
面镜，其顶点与  $M_1'$  ( $M_1$  经分束镜  $\mathcal{A}$  成的象) 相切。观察  $M_1'$  面上的干涉条纹；

(1) 干涉条纹的形状如何？中心点是亮还是暗？计算第三亮纹距中心的距离。用凸面镜和凹面镜得出的结果是否相同？

(2) 当  $M_2$  是凸球面镜时，使  $M_1$  向  $\mathcal{A}$  移动，干涉条纹怎样移动？

(3) 如果  $M_2$  是凹面镜，(2) 的结果又如何？

**4-28** 半圆形玻璃柱放在一光学平面上，如图30所示，柱的一端与平面接触，另一端用  $d = 0.1\text{mm}$  的小物块垫起。



(1) 观察到的干涉条纹的形状如何？

图 30

(2) 当  $\lambda = 4500 \text{ \AA}$ ,  $L = 10\text{cm}$ ,  $R = 10\text{cm}$  时，在两个相互垂直的方向上（沿柱体轴线方向和与之垂直的方向），由接触点向外数第  $N$  个暗纹到接触点的距离如何计算？

**4-29** 用折射率  $n = 1.6$ 、厚  $2\text{mm}$  的光学平板观察等倾干涉图样。光波长  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ，计算图样中心处的干涉序？在角半径为  $1/30\text{rad}$  的锥面内，可看到多少条亮纹？

**4-30 $\Delta$**  在迈克耳孙干涉仪中，光源是中心在光轴上的圆盘状均匀单色光源，平面镜  $M_1$  和  $M_2$  严格垂直，到分束镜  $\mathcal{A}$  的距离之差为  $d$ ，准直透镜和聚焦透镜的焦距都是  $f$ 。问

(1) 条纹定域在何处？条纹的形状如何？

(2) 当中央是亮点时, 第三亮环半径是多大?

(3) 若  $M_1$  经  $\mathcal{M}$  所成的象  $M_1'$  向着  $M_2$  移动, 干涉条纹如何变化?

(4) 要想看到第三亮环, 光源直径至少要多大?

(5) 若将圆盘光源的圆心沿圆盘所在平面移离光轴, 将出现什么现象? 画图说明之。

4-31 用  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  的单色光照射迈克耳孙干涉仪

(1) 当  $M_1'$  与  $M_2$  的距离  $d$  从  $0.5 \text{ mm}$  变到  $5 \text{ mm}$  时, 中心干涉序改变了多少?

(2) 若干涉仪的反射镜是直径为  $50 \text{ mm}$  的圆形反射镜, 在距  $M_1$  为  $400 \text{ mm}$  处用肉眼观察, 当  $d$  从  $0.5 \text{ mm}$  变到  $5 \text{ mm}$  时, 视场中干涉环的数目改变了多少? 是增加还是减少?

4-32 在用迈克耳孙干涉仪观察等倾条纹时, 若所用单色光的  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ , 聚焦透镜的焦距为  $30 \text{ cm}$ , 当空气层厚度为  $0.5 \text{ mm}$  时, 求第10个和第20个亮环的干涉序和其间的角距离。

4-33 $\Delta$  在迈克耳孙干涉仪中, 当两反射镜严格垂直时, 计算当两反射镜到分束镜的距离之差  $d = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$ ,  $m$  序亮环对应的  $\theta$  值。证明: 若  $d$  减小到  $4.997 \times 10^{-3} \text{ cm}$ , 对应于  $m = 200$  的条纹将消失 (设  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ )。

4-34 雅满干涉仪的构造如图31所示。用平行光束照射, 当板  $ABCD$  和板  $EFGH$  严格平行时, 视场均匀照明, 看不到干涉条纹。以  $CD$  边为轴使板  $ABCD$  转过一个小角度  $\alpha$ , 则可观察到布儒斯特干涉条纹。已知板厚  $5 \text{ cm}$ , 板的折射率为

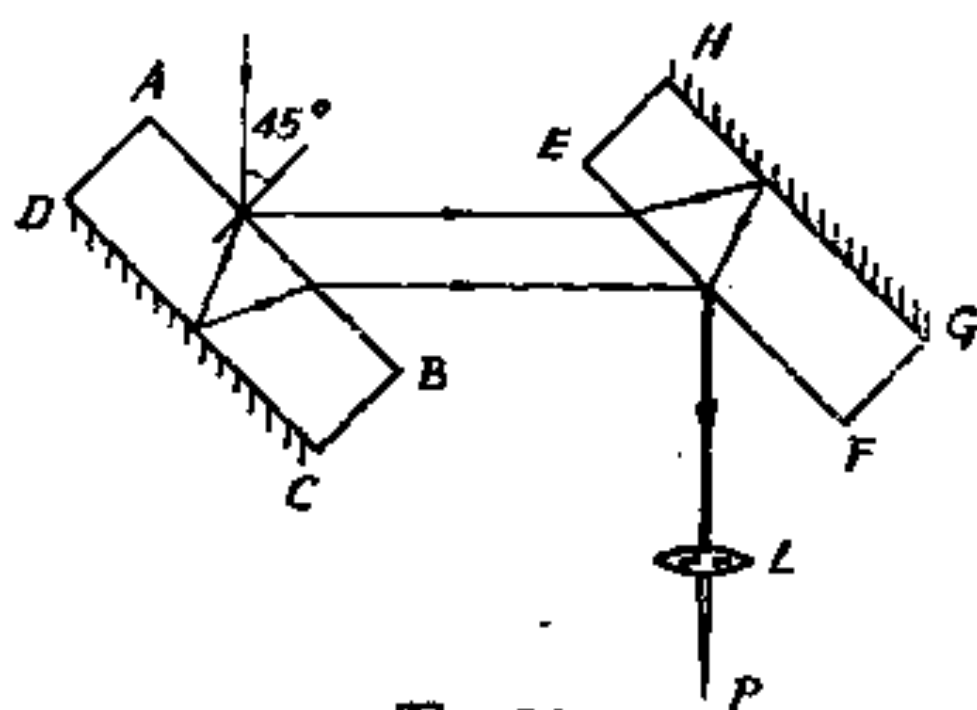


图 31

1.50, 透镜 $L$ 的焦距是 $20\text{cm}$ ,  $\alpha = 5^\circ$ , 光波长 $5500\text{\AA}$ , 求两相邻干涉亮纹间的距离。

4-35 用马赫-泽德干涉仪测量气体折射率, 在其两臂  $M_1D_1$  和  $M_2D_2$  中放置长为  $L$  的透明盒, 两透明盒都抽成真空, 然后使待测气体徐徐通入  $M_2D_2$  一臂的透明盒中, 记下横越视场移过的干涉条纹数。若已知  $L = 30\text{cm}$ ,  $\lambda = 5500\text{\AA}$ , 移过的亮纹数为1500条, 求气体折射率。

4-36 用波阵面切变干涉仪检查一轴对称光学系统的成象质量, 测得干涉条纹的序位移  $\Delta m(r; a) = e^{\frac{r}{a}}$ , 求此轴对称系统的角象差函数  $\mathcal{S}(r) = ?$

4-37 在观察平行平板等倾干涉的装置中, 板置于空气中, 其折射率  $n = 1.5$ , 观察望远镜的轴沿板的法线方向。试计算在反射光中观察和在透射光中观察两种不同情况下, 干涉条纹的可见度。

## 4. 相干长度 光强的频谱分布

4—38 计算一列阻尼波

$$f(t) = \begin{cases} A \exp(-at - i\omega_0 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的频谱。

4—39 在点光源的干涉实验中,若光源发光的波长宽度为  $\Delta\lambda$  (相应的波数宽度为  $\Delta k$ )。且  $\Delta\lambda$  内各波长成分的强度相等。证明:干涉条纹的可见度  $\mathcal{V}$  与波数宽度  $\Delta k$  及光程差  $\Delta\mathcal{S}$  的关系为

$$\mathcal{V} = \frac{|\sin(\frac{1}{2}\Delta k \Delta\mathcal{S})|}{|\frac{1}{2}\Delta k \Delta\mathcal{S}|}$$

4—40 $\Delta$  已知某线光谱的光强按波长分布是高斯型分布,即

$$i(x) = i_0 e^{-\alpha^2 x^2}$$

式中,  $i$  是单位波数间隔的光强,  $\alpha$ 、 $i_0$  是常数,  $x = k_0 - \bar{k}_0$ ,  $k_0$  是真空中波数,  $\bar{k}_0$  是平均波数。求在迈克耳孙干涉仪中测得的此线光谱的可见度与光程差的函数关系。

4—41 波长为  $6328 \text{ \AA}$  的红色激光,其波长宽度  $\Delta\lambda = 2 \times 10^{-7} \text{ \AA}$ , 试计算其频宽、相干时间和相干长度。

4—42 $\Delta$  在迈克耳孙干涉仪中,用钠光灯为光源,在干涉图样两次消失之间,平面镜移动  $0.289 \text{ mm}$ 。试计算两条钠谱线的波长差 (其中一条谱线的波长  $\lambda = 5889.95 \text{ \AA}$ )。

4—43 由相干长度  $\Delta L = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda}$ , 在准单色条件下,导出薄膜

干涉时膜的容许厚度为

$$h_p = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda\sqrt{n'^2 - n^2\sin\theta}}$$

式中,  $n'$  是膜的折射率,  $n$  是周围媒质的折射率,  $\theta$  是入射角。

## 5. 多光束干涉

4-44 利用菲涅耳公式, 计算当光近于正入射到放在水中的平板玻璃上时, 前三条反射光线和透射光线的反射系数和透射系数。水的折射率  $n=1.33$ , 玻璃的折射率  $n=1.5$ 。

4-45 根据介质膜理论所得到的公式

$$\mathcal{T} = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \cdot \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{(1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12} r_{23} \cos 2\beta)}$$

导出平行平面板多光束干涉的爱里公式。

在介质膜理论中并未考虑光束数目, 而其结果却与多光束干涉理论的结果完全一致, 是何缘故?

4-46 如果平行平面板两侧媒质的折射率不等, 设入射光强为  $I^{(i)}$ 。在多光束干涉条件下

(1) 导出反射光强  $I^{(r)}$  和透射光强  $I^{(t)}$  的公式。

(2) 证明只有同时满足  $n_3 > n_2 > n_1$ 、 $n_2 h = \lambda_0/4$  和  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$  等三个条件时, 才能使波长为  $\lambda_0$  的正入射光完全透过。

4-47 已知法布里-珀罗标准具中反射面的反射系数  $r=0.8944$ , 标准具空气层厚度  $h=2\text{mm}$ , 以  $\lambda=5000\text{\AA}$  的单色光

照射，反射相变 $\phi$ 取为0。求半宽度 $\varepsilon$ 、细度 $\mathcal{F}$ 、衬比因子 $\mathcal{C}$ 、分辨本领 $\lambda/\Delta\lambda$ 和光谱范围 $(\Delta\lambda)_{S.R.}$ 。

**4—48Δ** 在法布里—珀罗干涉仪中，两反射面间空气层的厚度是1cm，准直透镜 $L_1$ 和聚焦透镜 $L_2$ 的焦距相等，都是15cm，以中心在 $L_1$ 焦点、直径1cm的圆盘状光源照明， $\lambda = 4900 \text{ Å}$ 。

(1) 计算 $L_2$ 焦点上干涉图样中心的干涉序，在 $L_2$ 的焦面上共可看到多少亮环？

(2) 在干涉仪的空气间隔层中插入一不透明屏，挡住板面的一半，在 $L_2$ 的焦平面上将看到什么现象？

(3) 用一块厚0.5mm， $n=1.5$ 的透明薄板代替(2)中的不透明屏，干涉条纹有何变化？

**4—49** 法布里-珀罗标准具的反射膜由 $(LH)^4L$ （即为LHLHLHLHL）多层介质膜镀在 $n=1.5$ 的玻璃上构成。L是低折射率膜层，H是高折射率膜层，二者的光学厚度都是 $\lambda/4$ 。已知 $\lambda=5000 \text{ Å}$ ，L的折射率 $n_L=1.35$ ，H的折射率 $n_H=2.3$ ，空气间隔层厚度 $h=2\text{mm}$ 。

(1) 求此法布里—珀罗标准具各特性参量、光谱范围和分辨本领的理论值。

(2) 若板面稍有球形弯曲，使标准具中心和边缘的光学厚度相差 $100 \text{ Å}$ ，则细度的极限值和实际可达到的分辨本领各是多少？

**4—50** 激光器的谐振腔可以看作是一个法布里-珀罗标准具。

(1) 导出输出谱线宽度的表示式；



(2) 导出激光器输出激光的频率间隔表示式;

(3) 若氦氖激光器腔长  $h = 0.5\text{m}$ , 两反射镜的反射率  $\mathscr{R} = 0.99$ , 求输出激光的谱线宽度和频率间隔是多少? (设气体折射率  $n = 1$ , 输出谱线的中心波长  $\lambda = 6328\text{\AA}$ )。

**4—51** 法布里-珀罗标准具的腔长  $5\text{cm}$ , 用扩展光源做实验,  $\lambda = 6000\text{\AA}$ 。问

(1) 中心干涉序是多少?

(2) 在倾角为  $1^\circ$  附近, 干涉亮环的半角宽度是多少?  
设  $\mathscr{R} = 0.98$ ;

(3) 这个标准具可分辨的最小波长间隔多大?

(4) 如果用这个标准具对白光进行选频, 透射最强的谱线有几条? 波长各为多少? 每条谱线的半宽度多大?

(5) 由于热胀冷缩, 引起腔长的改变量为  $10^{-6}$  (相对值), 求谱线的漂移量是多少?

**4—52** 法布里-珀罗干涉仪常用来测量波长相差很小的两条谱线的波长差。设干涉仪两板间距为  $0.25\text{mm}$ , 它产生的  $\lambda_1$  谱线的干涉环系中第2环和第5环的半径分别为  $2\text{mm}$  和  $3.8\text{mm}$ ,  $\lambda_2$  谱线的干涉环系中第2环和第5环的半径分别为  $2.1\text{mm}$  和  $3.85\text{mm}$ 。两谱线的平均波长为  $5000\text{\AA}$ 。求两谱线的波长差。

**4—53**  $\Delta$  已知汞谱线的超精细结构为  $5460.753\text{\AA}$ ,  $5460.745\text{\AA}$ ,  $5460.734\text{\AA}$  和  $5460.728\text{\AA}$ , 它们分别属于汞的同位素  $\text{Hg}^{198}$ ,  $\text{Hg}^{200}$ ,  $\text{Hg}^{202}$  和  $\text{Hg}^{204}$ 。问用法布里-珀罗标准具分析这一结构时如何选取标准具的间距? (设标准具板面反射率为

0.9)。

**4-54** 把一稍小于  $6000 \text{ \AA}$  的未知波长与一个  $6000 \text{ \AA}$  的标准波长在法布里-珀罗干涉仪上进行比较。当干涉仪的两镜面间距改变  $1.5 \text{ mm}$  时，两波长的干涉条纹就重合一次，试求未知波长。

**4-55** 法布里-珀罗标准具的空气隙为  $2.5 \text{ mm}$ ，试问对  $\lambda = 25000 \text{ \AA}$  的红外线，中心条纹的干涉序为几？如果在第一亮环外  $1/100$  条纹间距处发现另一波长的亮环，试问这波长是多少（设这波长与  $5000 \text{ \AA}$  相差很少）？

**4-56** 一束准直的白光束正入射在一块折射率为  $n$ 、厚度为  $h$  的玻璃板上。证明满足  $\lambda_m = \frac{2nh}{m}$  的波长具有最大透射

率，式中  $m$  是整数。可见，透射率是频率的周期函数，并称为沟槽光谱。

**4-57** 在一  $n = 2.5$ 、 $h = 1 \text{ mm}$  的玻璃平板两表面上镀上相同的增反膜就制成了一个法布里-珀罗标准具。当白光照射时，求沟槽光谱的最大和最小透射率，以及  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  附近的两相邻沟槽的波长间隔。

**4-58** 已知鲁末-盖尔克板的厚度为  $5 \text{ mm}$ ，板长  $25 \text{ cm}$ ，板的折射率  $n = 1.55$ ，其色散很小可忽略不计，板面所镀增反膜反射率为  $0.855$ 。求此鲁末-盖尔克板的光谱范围和分辨本领，并将所得结果与同样光学厚度的法布里-珀罗标准具在光近于垂直入射时的光谱范围和分辨本领加以比较。

**4-59** 考察一个折射率为  $1.38$  的消反射膜，设该膜的厚度为  $9 \times 10^{-6} \text{ cm}$ 。试计算在可见光范围该膜的最大透射波长。

对厚度为  $4.5 \times 10^{-8} \text{ cm}$  的空气膜重复以上计算。证明两种膜都对同一波长消反射，但只有前一种膜是适用的，为什么？

**4-60Δ** (1) 干涉滤波器的间隔层为折射率  $n = 1.35$  的冰晶石，要求滤波器对  $\lambda = 5500 \text{ Å}$  的正入射平行光束有最大透射率，且在  $4000 \text{ Å} \sim 7500 \text{ Å}$  之间只有一个通带，试确定间隔层的最大厚度。

(2) 当平行光束在干涉滤波器上的入射角  $\theta_i \neq 0$  时，最大透射率所对应的波长有什么变化？在非平行光束中使用干涉滤波器时，滤光性能受到怎样的影响？

**4-61** 已知干涉滤波器中高反射膜的反射率为 0.9，间隔层厚度为  $1.6 \times 10^{-3} \text{ mm}$ ，折射率  $n = 1.5$ 。试求

(1) 正入射情况下，滤波器在可见光范围的最大透射率波长；

(2) 波长  $\lambda = 6000 \text{ Å}$  对应的波长宽度。

**4-62** 一个适用于  $6600 \text{ Å}$  的干涉滤波器，其膜层结构为  $(\text{HL})^5 - 2\text{H} - (\text{LH})^5$ ，H 代表光学厚度为  $\lambda/4$  的硫化锌 ( $n = 2.3$ ) 膜，L 代表光学厚度为  $\frac{\lambda}{4}$  的冰晶石 ( $n = 1.35$ )

膜。求这个滤波器的峰值透射率  $\tau$  和波长半宽度  $(\Delta\lambda)_{\text{H.W.}}$ 。

**4-63** 一受抑全反射滤波器，两侧是由  $\text{TiO}_2$  ( $n = 2.45$ ) 制成的等腰直角棱镜，低折射率媒质层是  $\text{MgF}_2$  ( $n = 1.38$ )，其厚度为  $5 \times 10^{-8} \text{ cm}$ ，高折射率媒质间隔层是  $\text{TiO}_2$ ，厚度  $15 \times 10^{-8} \text{ cm}$ 。求此滤波器在可见光范围的最大透射率波长、峰值透射率和波长半宽度（忽略反射相变  $\phi$  和在棱镜与空气接触面的反射损失）。

**4—64Δ** 法布里—珀罗标准具的金属膜反射率为95%，吸收率为3%，在正入射附近的反射相变  $\phi = 3/4\pi$ ，空气夹层的厚度为1mm。

(1) 在标准具两侧放置焦距同为20cm的凸透镜，以中心在准直透镜焦点的单色 ( $\lambda = 6000 \text{ Å}$ ) 圆盘 (直径 2cm) 光源照明，光源面垂直透镜光轴，观察屏垂直放置在聚焦透镜焦面上。计算图样中心的干涉序。中心是亮还是暗？在中心以外可看到几个亮环？

(2) 把两个上述标准具串联使用，求其总的细度、总峰值透射率、总衬比因子和在  $\lambda = 5000 \text{ Å}$  处的光谱范围，这时的分辨本领大约和一个多宽的光栅之一级光谱的分辨本领相等？（设光栅每毫米有1800条刻线）

**4—65** 使平均波长  $\bar{\lambda} = 5000 \text{ Å}$  的准单色光通过前后平行放置且厚度同为了3mm的两个法布里—珀罗标准具。在二标准具抽空的情况下，将其中一个稍稍调斜，则看到平行等距的干涉条纹。当把待测气体徐徐通入固定标准具时，观察到干涉条纹移过5条，求气体的折射率。

## 第五章 衍射理论

### 1. 惠更斯-菲涅耳衍射

**5-1** 证明当光波波长比考察点到波面距离小得多时，各菲涅耳波带的面积相等。

**5-2Δ** 利用基尔霍夫公式计算第  $j$  个波带在观察点  $P$  产生的复振幅，并比较光波自由传播情形和第一个波带在  $P$  点产生的复振幅。

**5-3** 在菲涅耳圆孔衍射中，分别按下列两种情况，画出观察点  $P$  的光强变化曲线。

(1) 固定光源  $P_0$  和观察点  $P$  到圆孔的距离，连续增大圆孔半径；

(2) 固定圆孔半径，连续增大光源  $P_0$ （或观察点  $P$ ）到孔的距离。

**5-4** 将奇数或偶数波带遮挡住的光阑称为波带片，证明：

(1) 波带片有一个类似普通透镜的成象公式；

(2) 若  $f$  是波带片的焦距，相应决定一个主焦点，则在  $f/3, f/5, f/7, \dots$  处尚有一系列次焦点；

(3) 一波带片主焦点的强度约为入射光强度的400倍，

在  $\lambda = 5893 \text{ Å}$  的钠黄光照射下的主焦距为  $1.5 \text{ m}$ ，求波带片的半径和其上有几个开带？

## 2. 基尔霍夫衍射理论

5-5Δ 说明下列各公式的适用条件

$$(1) \quad V(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [V] \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{CS} \frac{\partial s}{\partial n} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right] - \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] \right\} dS,$$

$$(2) \quad U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS,$$

$$(3) \quad U(P) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \iint_W \frac{e^{iks}}{s} (1 + \cos x) dS,$$

$$(4) \quad U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{\cos \delta}{r' s'} \iint_A e^{ik(r+s)} dS,$$

$$(5) \quad U(P) = \iint_A U(S) \frac{e^{iks}}{s} K(x) dS,$$

$$(6) \quad U(P) = C \iint_A e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta,$$

$$(7) \quad U(p, q) = C \iint_A F(\xi, \eta) e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta.$$

5-6 为了得到在  $R \rightarrow \infty$  时, 在  $\mathcal{C}$  面上的  $U \rightarrow 0$  和  $\frac{\partial U}{\partial n} \rightarrow 0$ ,

《光学原理》书中假定光源从某一时刻  $t_0$  开始向外发射光波, 但这违背了单色光的前提。在严格的论述中应代之以索

末菲辐射条件  $\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0$ 。证明发散球面波满足

索末菲辐射条件。

**5-7** 为了克服在基尔霍夫衍射理论中存在的不自恰困难,瑞利-索末菲衍射理论指出不应选  $U = e^{iks}/s$  作为格林函数,而比如选

$$U' = \frac{e^{iks}}{s} + \frac{e^{iks'}}{s'}$$

式中  $s'$  是由  $P$  点孔面所成的镜面象  $P'$  到孔上任一点  $Q$  的距离。

(1) 证明如上选取的格林函数  $U'$  的法线方向导数  $\frac{\partial U'}{\partial n}$  在孔面上为零;

(2) 利用这个格林函数求出用孔径上各点的复振幅来表示  $U(p)$  的表示式。为导出此结果必须满足怎样的边界条件?

(3) 利用 (2) 的结果, 求出当孔径被从  $P_0$  点发出的发散球面波照射时,  $U(p)$  的表示式。

**5-8** 一非单色扰动  $V^{(r)}(P_0, t)$ , 其中心频率为  $\bar{\nu}$ 。带宽为  $\Delta\nu$ 。定义一个相缩合的复扰动  $V_-(P_0, t)$ , 它只由  $V^{(r)}(p_0, t)$  的负频分量构成, 即

$$V_-(P_0, t) = \int_{-\infty}^0 U(P_0, \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

式中  $U(P_0, \nu)$  是  $V^{(r)}(P_0, t)$  的傅里叶频谱。证明若

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1 \quad \text{及} \quad \frac{1}{\Delta\nu} \ll \frac{s}{c}$$

$$\text{则 } V_-(p, t) = -\frac{i}{\lambda} \iint_A V_-(p_0, t) \frac{\exp(i\bar{k}s)}{s} \cos(\vec{n}, \vec{s}) dS$$

$$\text{式中, } \bar{\lambda} = \frac{C}{\nu}, \quad \bar{k} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}$$

**5-9** 不透明屏上有一个开孔 $\mathscr{A}$ ，用向 $P$ 点会聚的一个球面波照明， $P$ 点位于孔后距离为 $z$ 的平行平面上。设（1） $P$ 在 $z$ 轴上，及（2） $P$ 不在 $z$ 轴上，但距轴很近。如果从孔径平面到包含 $P$ 点的观察平面间为非涅耳衍射，证明在上述两种情形下，所观察到的强度分布都是该孔的夫琅和费衍射图样，其中心在 $P$ 点。

**5-10** 在衍射实验中，采用波长为 $5000 \text{ \AA}$ 的一个点光源，从光源到衍射孔的距离是 $20 \text{ m}$ ，衍射圆孔直径 $1 \text{ mm}$ 。试确定当观察屏到孔的距离是（1） $2 \text{ cm}$ ；（2） $1 \text{ m}$ ；（3） $20 \text{ m}$ 时，各属何种衍射？

**5-11 $\Delta$**  为能观察到菲涅耳衍射，试导出光源和观察点到衍射孔距离 $r'$ 和 $s'$ 所应满足的条件。

**5-12** 基尔霍夫衍射理论是以严格单色标量波所满足的亥姆霍兹方程 $(\nabla^2 + k^2)U = 0$ 为前提而建立的，但实际的光波是非单色矢量波。试论述在怎样的限制条件下，可以用基尔霍夫理论处理实际光波的衍射问题。

**5-13** 证明图32中（1） $\sim$ （4）的情况是等价的，即，屏 $P$ 上观察到的都是 $\Sigma$ 面上圆孔的夫琅和费衍射。进一步论证，在一切光学仪器中产生的衍射都可视为夫琅和费衍射。



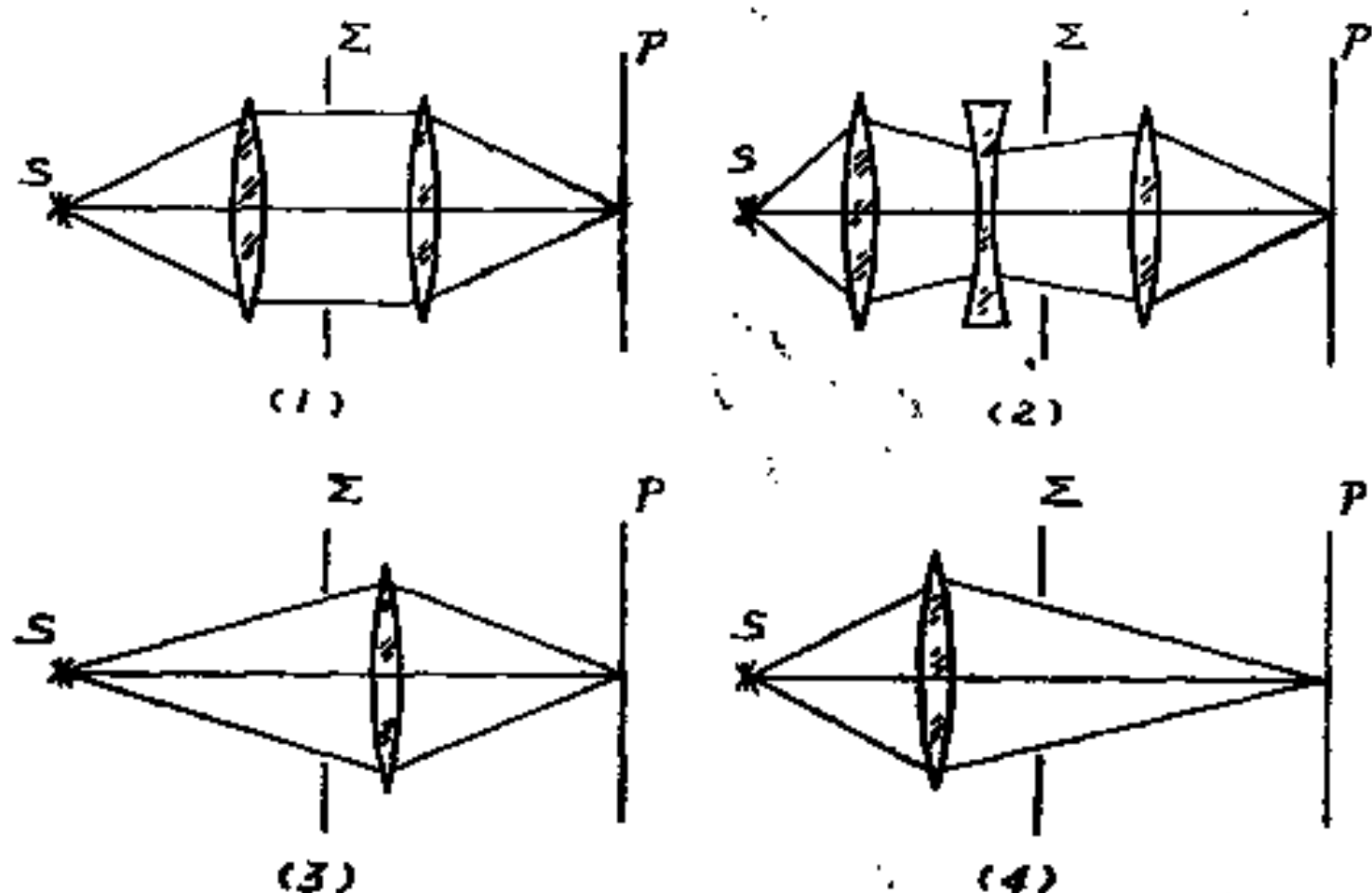


图 32

5-14 在图33所示的光学系统中， $s$ 是单色点光源，发出光

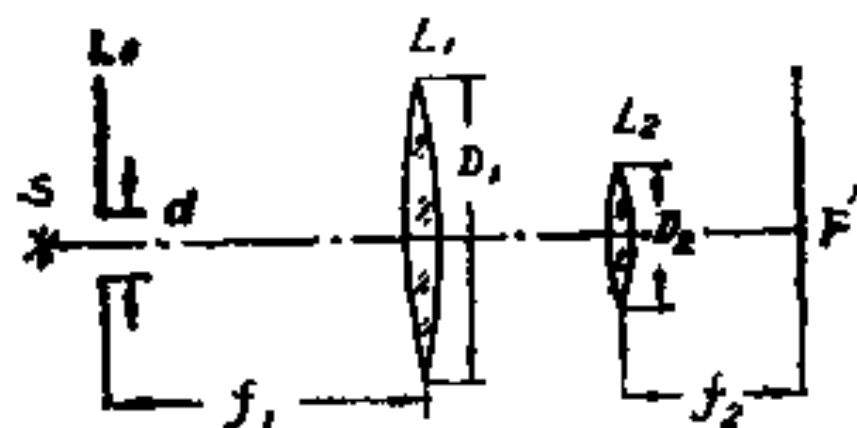


图 33

波的波长是 $\lambda$ ， $L_0$ 是直径为 $d$ 的小圆孔，透镜 $L_1$ 的焦距为 $f_1$ ，直径为 $D_1$ ，透镜 $L_2$ 的焦距为 $f_2$ ，直径为 $D_2$ ， $D_1 > D_2$ 。

(1) 当 $d$ 足够小时，在焦面 $F'$ 上出现的圆形衍射条纹，是由哪个孔径的衍射产生的？

(2) 写出衍射条纹中央亮斑的直径表达式。

(3) 如果加大 $d$ ，衍射条纹有什么变化？为什么？

### 3. 各种形状光孔上的夫琅和费衍射

**5-15** 一个矩孔长  $b = 1\text{cm}$ , 宽  $a = 0.01\text{cm}$ , 入射光波长  $\lambda = 5000\text{\AA}$ 。求其夫琅和费衍射图样中强度最大和最小的位置。证明大部分光能分布在与孔长垂直的  $x$  轴附近。

**5-16 $\Delta$**  用  $\lambda = 5000\text{\AA}$  的单色线光源, 通过一柱透镜照射一宽为  $0.4\text{mm}$  的狭缝, 光源放在透镜焦面上, 且光源、柱透镜母线和狭缝三者平行。求光源的最大允许宽度 (透镜焦距为  $30\text{cm}$ )。

**5-17** 试证明: 在一个单缝产生的衍射图样中, 次极大出现在  $\beta = \text{tg}\beta$  的点上, 并证明头三个根近似地为  $\beta = 1.43\pi$ ,  $2.46\pi$ ,  $3.47\pi$ 。进而证明对于大的  $\beta$ , 其相应的根接近于  $(n + \frac{1}{2})\pi$ , 其中  $n$  是整数。

**5-18** 衍射细丝测径仪就是把单缝夫琅和费衍射装置中的单缝用细丝代替而构成。今测得零级衍射斑的宽度为  $1\text{cm}$ , 求细丝的直径。已知光波长为  $6300\text{\AA}$ , 透镜焦距为  $50\text{cm}$ 。

**5-19** 设想通过一块方格光栅观察一个在  $20\text{m}$  远的点光源, 若看到一个围绕点光源的亮斑方阵, 两相邻亮斑的间距是  $12\text{cm}$ , 试求方格光栅的栅距。设光波长  $\lambda = 6000\text{\AA}$ 。

**5-20** 观察长  $2x_0$ 、宽  $2y_0$  的矩孔的夫琅和费衍射,  $x$  和  $y$  表示观察面上的坐标, 衍射图样中心在  $x = y = 0$  处。求沿  $x = y$  直线上衍射光强分布的表示式。

**5-21** 透明媒质的正常色散满足科希公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda}$$

对钡火石玻璃，当 $\lambda = 4861 \text{ \AA}$ 时， $n = 1.59825$ ； $\lambda = 2988 \text{ \AA}$ 时， $n = 1.60870$ 。由这些数据可以确定常数 $A$ 和 $B$ 。求用这种玻璃制成的三棱镜，当 $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ 时的分辨本领。已知棱镜底边长 $50\text{cm}$ 。

**5-22** 对半径为 $a$ 的圆孔夫琅和费衍射，用极坐标求出的衍射积分为

$$U(P) = CD \left[ \frac{2J_1(kaw)}{kaw} \right] \quad (1)$$

当光垂直入射到孔面上时，也可不用极坐标求衍射积分。不失一般性，可令 $P$ 点在 $x$ 轴上，则 $q = 0$ ，夫琅和费衍射积分化为

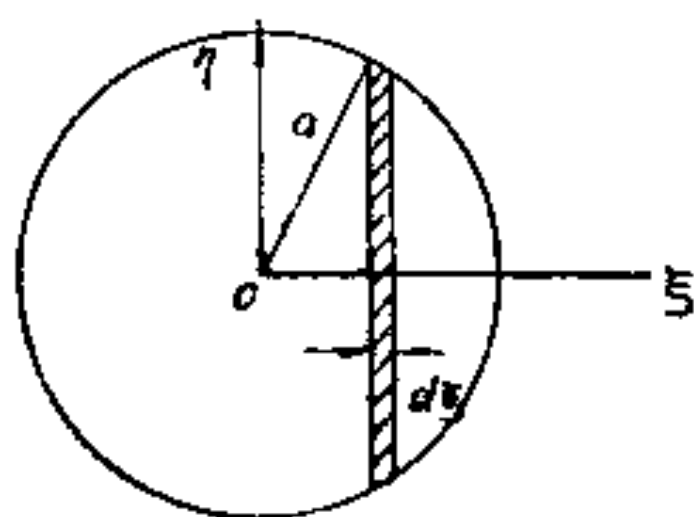


图 34

$$U(P) = C \iint_A e^{-ikP\xi} d\xi d\eta$$

令 $u = \frac{\xi}{a}$ ，根据图34证明

$$U(P) = 4a^2 C \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \cos t u du \quad (2)$$

式中 $t = k a p = k a w$ 。对比(1)、(2)两式，可得出一阶贝塞耳函数 $J_1(t)$ 的另一种表示

$$J_1(t) = \frac{2t}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \cos t u du。$$

**5-23** 在焦距为 $20\text{cm}$ 的凸透镜的焦面上观察一个半径为

0.5mm的圆孔的夫琅和费衍射图样。

(1) 计算第一和第二暗环的半径 ( $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ ) ;

(2) 计算在焦面上包含总能量95%的圆斑的面积。

**5-24** 考察一束波长为 $5000 \text{ \AA}$ 的激光, 它的截面是直径3cm的圆。试计算这束激光在传播了3km远后直径的数量级。

**5-25 $\Delta$**  由功率为1W的氩离子激光器发射出直径6cm的激光束( $\lambda = 488 \text{ nm}$ )。把这束激光用一无象差的理想透镜聚焦, 透镜焦距为16cm, 紧贴透镜放置一直径4cm的光阑。求

(1) 透镜焦点处的场强是光阑处的多少倍?

(2) 透镜焦点处的光强。

**5-26** 内外半径分别为 $\epsilon a$ 和 $a$ 的环孔 ( $0 \leq \epsilon < 1$ ) , 当平行光束垂直射到环孔上发生夫琅和费衍射时, 求

(1) 衍射图样中的强度分布;

(2) 当 $\epsilon \rightarrow 1$ 时, 第一暗环的角半径;

(3) 当 $\epsilon \rightarrow 1$ 时, 环孔的最小可分辨角。

**5-27 $\Delta$**  用波长 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ 的单色光垂直照射焦距 $f = 25 \text{ cm}$ 的透镜, 在透镜前放入一遮光圆屏, 圆屏中心在光轴上。

(1) 若在焦点 $F$ 处放置观察屏, 求屏上振幅分布和强度分布及衍射图样中心强度与不加屏时中心强度之比。

(2)  $\alpha_0$ 是透镜在 $F$ 点所张的角半径,  $\alpha_1$ 是屏在 $F$ 点张的角半径。若 $\alpha_0 = 2\alpha_1$ , 问第一暗环半径多大?

**5-28** 在一边长为 $L$ 的正方形孔的中心放置一边长为 $l$ 的正方形遮光屏, 二者中心重合。当这种孔发生夫琅和费衍射时, 求强度分布的表示式。

**5-29** 如图35, 衍射孔由半径为 $a_1$ 和 $a_2$ 的两半圆孔对接而

成，平行光束垂直照射到孔上，衍射光经焦距为  $f$  的透镜会聚，在透镜的焦面上放置观察屏。

(1) 大致描绘衍射图样的形状；

(2) 求过衍射图样中心，且与  $\xi$  轴平行的直线上的复振幅分布。

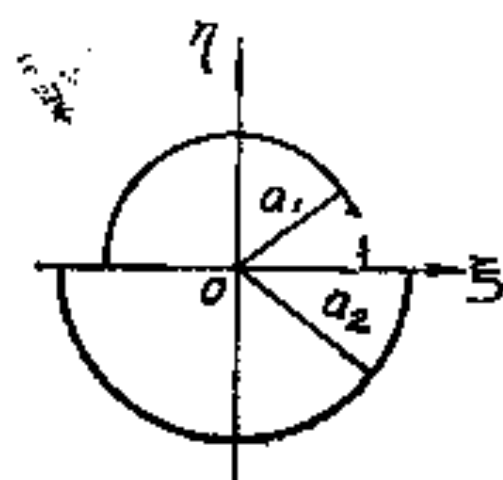


图35

5-30 一半径为  $\rho$  的圆孔，沿其直径

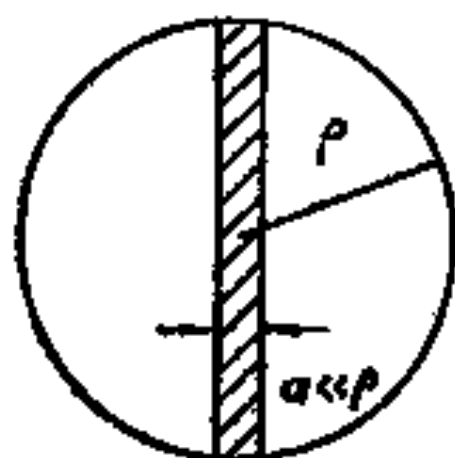


图 36

放置一宽为  $a$  的遮光窄带，如图 36 所示，且  $a \ll \rho$ 。试求在其夫琅和费衍射图样中，沿过图样中心且垂直于窄带的直线上的复振幅分布。

5-31 (1) 从  $U(p, q)$

$$= C \iint_A e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \text{ 出发证明：只}$$

要衍射孔范围内的场没有相位变化，不论孔的形状如何，夫琅和费衍射图样都有一个对称中心，即  $I(p, q) = I(-p, -q)$ 。这一结果等于说光瞳函数是实函数。

(2) 设单色平面波垂直入射到一个具有一个对称轴的孔上，根据 (1) 中结果，讨论其夫琅和费衍射图样的对称性。

(3) 从对称性考虑出发，画出正三角形孔和十字形孔的夫琅和费衍射图样的大致形状。

#### 4. 全同孔衍射 各种衍射光栅

5-32 在夫琅和费双缝衍射装置中，设线光源与狭缝平行，

光源宽度为  $b$ ，位于透镜的前焦面上，若双缝间隔为  $d$ ，缝宽为  $a$ 。求出在透镜后焦面上衍射条纹的强度分布，并分别讨论在 (1) 光源宽度  $b$  缩小，(2) 缝宽  $a$  缩小，间隔  $d$  不变；(3) 间隔  $d$  缩小，缝宽  $a$  不变；(4) 透镜焦距  $f_2$  增大；(5) 双缝所在平面沿平行于双缝宽的方向平移；(6) 光源平面沿平行于缝宽方向平移；(7) 双缝平面绕光轴旋转；(8) 光源平面绕光轴旋转等情况下，衍射条纹有何变化？

**5-33Δ** 利用双缝衍射原理制成的瑞利干涉仪可用来测量气体的折射率。设干涉仪气室  $T_1$  和  $T_2$  的长度为  $0.5\text{m}$ ，使用的光波之波长  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ 。如果测量双缝条纹移动的准确度可以达到  $1/10$  条纹，求干涉仪测量折射率的精度。

**5-34** 衍射孔由两个宽为  $a$ 、长为  $b$ 、中心相距为  $d$  的全同矩孔平行排列而成，如图37所示。

- (1) 求其夫琅和费衍射图样中强度分布的表示式；
- (2)  $a$  和  $d$  之间满足什么关系时，可使偶数序衍射条纹的强度减到极小，而同时零序条纹的强度近似保持不变？

**5-35** 试求如图38所示的两全同矩孔的夫琅和费衍射图样中强度分布的表示式。

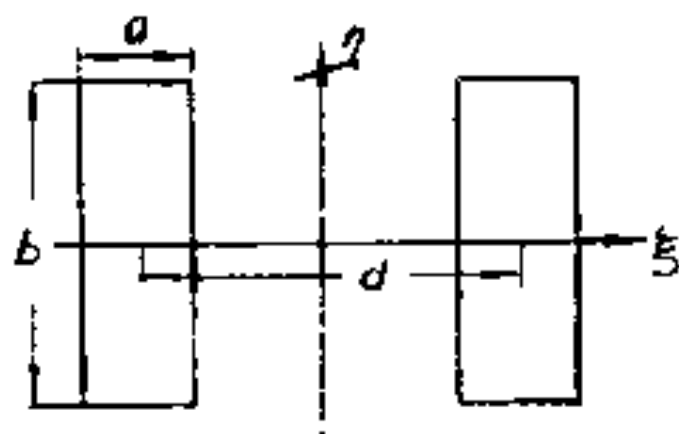


图 37

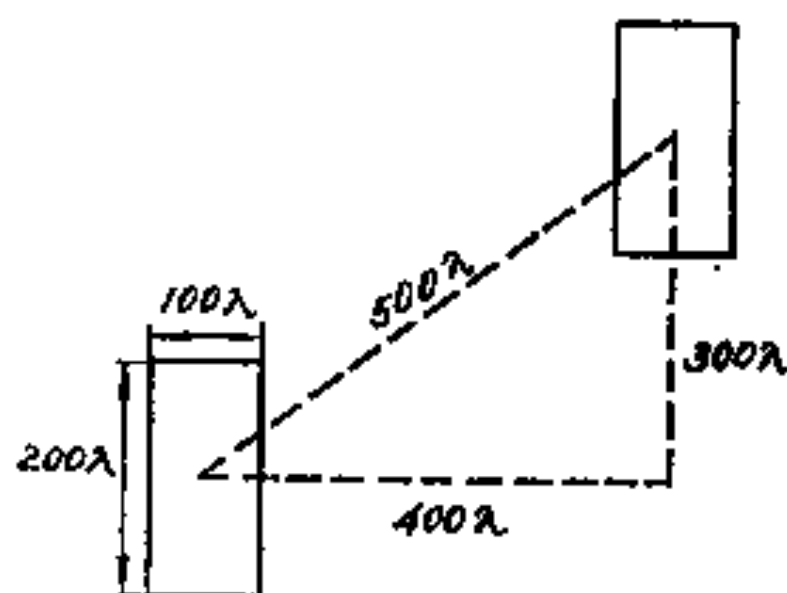


图 38

**5-36** 试求两个半径同为 $a$ ，相距 $d$ 的圆孔的夫琅和费衍射复振幅分布表示式。画出当 $d = 2a$ 时的光强分布草图。

**5-37** 一束功率为 $1\text{mw}$ 、直径为 $2\text{mm}$ 的 He-Ne 激光( $\lambda = 633\text{nm}$ ) 垂直照射到一个开有两小圆孔的遮光屏上。而小圆孔直径均为 $0.01\text{mm}$ ，间距 $1\text{mm}$ 。在遮光屏后 $2\text{m}$ 远处放置观察屏，求

(1) 条纹的形状和两相邻亮纹的间距，

(2) 在衍射图样中心处的光强。

**5-38 $\Delta$**   $N$ 个全同椭圆孔沿其长轴方向等间隔地排列，椭圆孔的长轴为 $a$ ，短轴为 $b$ ，中心间隔为 $d$ 。在夫琅和费衍射条件下，求衍射光强在过衍射图样中心，且与孔心连线相平行的直线上的分布。

**5-39** 一光栅由一系列宽为 $d/4$ 的狭缝平行排列而成，相邻狭缝间距为 $d$ 。

(1) 分别求当缝数为4和100时的衍射光强分布，

(2) 改变入射角对衍射图有何影响？

(3) 当入射光不是严格平行光束，而是具有角宽度

$\Delta\theta = \frac{\lambda}{10d}$ 时，简略说明其对光强分布的影响。

**5-40** 试说明一块光栅常数 $d$ 是缝宽 $a$ 的两倍的透射光栅，

(1) 只出现奇数序亮纹，

(2) 第一序亮纹的光强约为中央亮纹光强的40%。

**5-41** 一个宽度为 $1\text{cm}$ 的透射光栅有1000条刻线，试计算第二序主极大的角宽度，并将结果与 $1\text{cm}$ 宽的有5000条刻线的光栅的相应值进行比较（设 $\lambda = 5000\text{\AA}$ ）。

5-42 一He-Ne激光器其谐振腔长 $h=0.3\text{m}$ ,为在一块1000条每毫米刻线的光栅之一级光谱中分辨 $\lambda=6328\text{\AA}$ 谱线的模结构,光栅须多宽?

5-43 一光栅常数为 $d$ 的透射光栅,在它前面放一开有半径为 $a$ 的圆孔的透光屏,且 $a \gg d$ 。平行光束垂直射到光栅上,参考5-22题的积分方法,求衍射光强和衍射角 $\theta$ 的函数关系。

5-44 $\Delta$  一块有 $3N$ 个缝的透射光栅,设栅缝无限狭窄,每个缝的衍射因子可视为常数。将第 $3n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ )缝遮住,当 $N \rightarrow \infty$ 时,求光强分布和光强取极大值的条件。

5-45 平行光束垂直照射在由 $M$ 行, $N$ 列平行等距排列的全同方孔组成的二维光栅上,孔的边长为 $a$ ,相邻孔的中心间距为 $d$ ,求其衍射光强分布。

5-46 $\Delta$  一透射光栅是在折射率为 $n$ 的透明薄板上刻上如图39所示的 $N$ 组周期性刻槽而制成。用波长为 $\lambda$ 的平行光束垂直照射光栅,求其衍射光强分布和光栅方程。

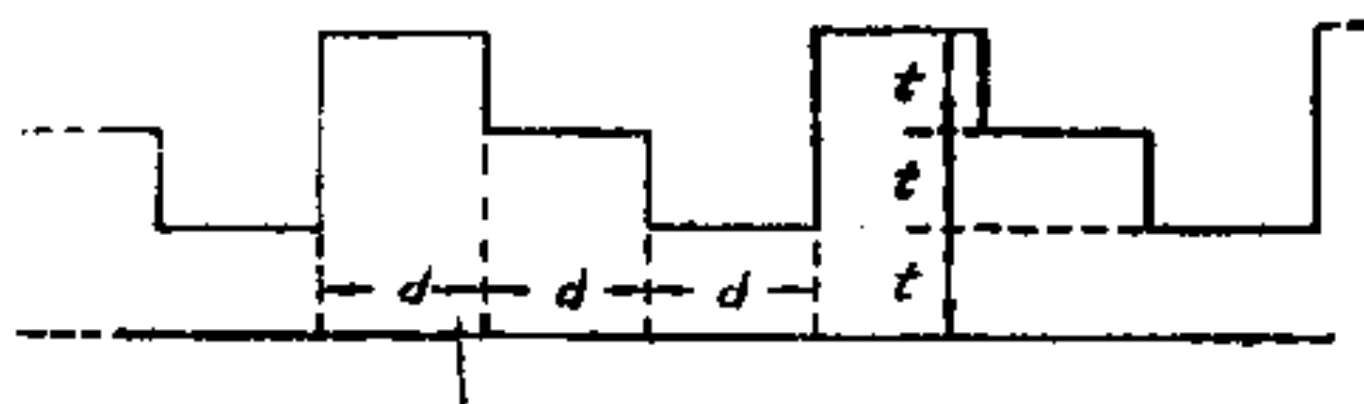


图 39

5-47 (1) 反射式闪耀光栅的闪耀角为 $\gamma$ ,栅距为 $d$ ,平行光束对栅面的入射角为 $\theta_0$ , $m$ 为光谱级数,试导出闪耀波长与这些参量的关系式。



(2) 已知一闪耀光栅每毫米有 1800 刻槽, 闪耀角  $\gamma = 30^\circ$ , 入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ , 求二级闪耀波长和相应的衍射角。

5-48 一闪耀光栅宽 52mm, 每毫米有 600 刻槽, 一级闪耀波长为  $7500\text{\AA}$ , 求其闪耀角和分辨本领。

5-49 (1) 证明反射阶梯光栅相邻光束的光程差为  $\Delta\mathcal{L} = 2t - pd$ , 其分辨本领为  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = \frac{2t - pd}{\lambda} N$ , 式中,  $t$  是每块板的厚度,  $d$  是阶梯高度,  $N$  是光束数 (即板数),  $\lambda$  是光波长,  $p = \sin\theta - \sin\theta_0$ ,  $\theta_0$  是入射角,  $\theta$  是衍射角。

(2) 已知一反射阶梯光栅的  $N = 20$ ,  $t = 1\text{cm}$ ,  $d = 0.1\text{cm}$ , 入射角  $\theta_0 = 0^\circ$ 。用此反射光栅研究可见光光谱, 问所能看到的光谱级次共有哪些?

(3) 求 (2) 中的反射阶梯光栅当  $\lambda = 6000\text{\AA}$  时的最大分辨本领。对一般光栅, 若每毫米有 1200 条刻线, 在一级光谱中欲得同样分辨本领, 光栅的宽度应是多少?

5-50 证明当入射狭缝放置在以凹面光栅曲率半径为直径的圆周上时 (此圆称为洛蓝圆, 它与光栅中点相切), 光栅光谱也聚焦在这圆周上。

5-51 设有一个平行  $y$  轴的宽为  $b$  的单缝, 在整个单缝面上光瞳函数取常数值  $C$ 。如果我们现在用一个余弦函数振幅模片对单缝进行切趾, 换句话说, 我们通过一个余弦型的下降使光瞳函数从中心的  $C$  值逐渐变到  $\pm b/2$  处的零值 (这种单缝又称为软边单缝), 求衍射强度分布。

5-52A 一正弦型振幅光栅的透射函数

$$F(\xi) = A \sin \frac{2\pi\xi}{d} \quad (|A| < 1)$$

求其夫琅和费衍射光强分布。

**5-53** 一余弦光栅其透射函数为

$$F(\xi) = \frac{1}{2}A(1 + B\cos\xi) \quad (|A| < 1, |B| < 1)$$

设光栅总长为 $2\pi$ , 且 $N = \frac{2\pi}{\pi}$ 是整数, 求衍射光强分布和

可以看到的最高衍射序。

**5-54** 一正弦型相位光栅的透射函数

$$F(\xi) = \exp[i\frac{1}{2}A\sin(k\xi)]$$

求其夫琅和费衍射的复振幅分布和光强分布。

## 5. 成象系统的分辨本领 象衬观察法

**5-55△** 有一双缝经一柱透镜成象, 柱透镜的母线与双缝平行。用瑞利判据和史派劳判据分别求当狭缝在非相照明和相干照明两种不同条件下, 透镜的分辨本领。

(分辨本领的史派劳判据: 两衍射图样合强度曲线的鞍点刚刚消失时, 两点恰不能被分辨。)

**5-56** 计算在瑞利判据情况, 两刚可被分辨的彼此平行的线光源, 在其衍射图样中心处的光强。

**5-57** 利用波长为 $3000\text{Å}$ 的紫外光作显微照相(物镜用石英制成), 显微镜的数值孔径 $N.A. = 0.9$ 。

(1) 求其最小分辨距离;

(2) 利用油浸物镜使 $N.A.$ 增大到1.50, 分辨本领提高多少倍?

(3) 显微镜的放大率应设计成多大(设人眼瞳孔直径为 $2.5\text{mm}$ )?

**5—58** 用相衬法检测一块玻璃的不平度,用波长  $\lambda = 5000\text{\AA}$  的光照明,试求在用 (1) 完全透明的相位板, (2) 有一定吸收,使光强透过率减小到  $1/25$  的相位板,所能检测的玻璃的最小不平度。假设所能观测的最小对比度(衬比)为  $0.03$ 。

**5—59** 用相干光照明一余弦光栅  $F(\xi) = \cos 2\pi \frac{\xi}{d}$ , 在透镜的后焦面上得到它的夫琅和费衍射条纹为两条亮线。如果在其中一条亮线处放置一块  $\lambda/4$  相位板,试问光栅象面的光强分布将有何变化?

## 6. 菲涅耳衍射

**5—60** 在直边的菲涅耳衍射图样中,如果所用的光波长是  $6000\text{\AA}$ , 观察屏与直边间的距离为  $100\text{cm}$ , 试求在最强的极大值与相邻的极小值间的距离。

**5—61** 在实验室中我们可以用图 40 所示的装置观察菲涅耳

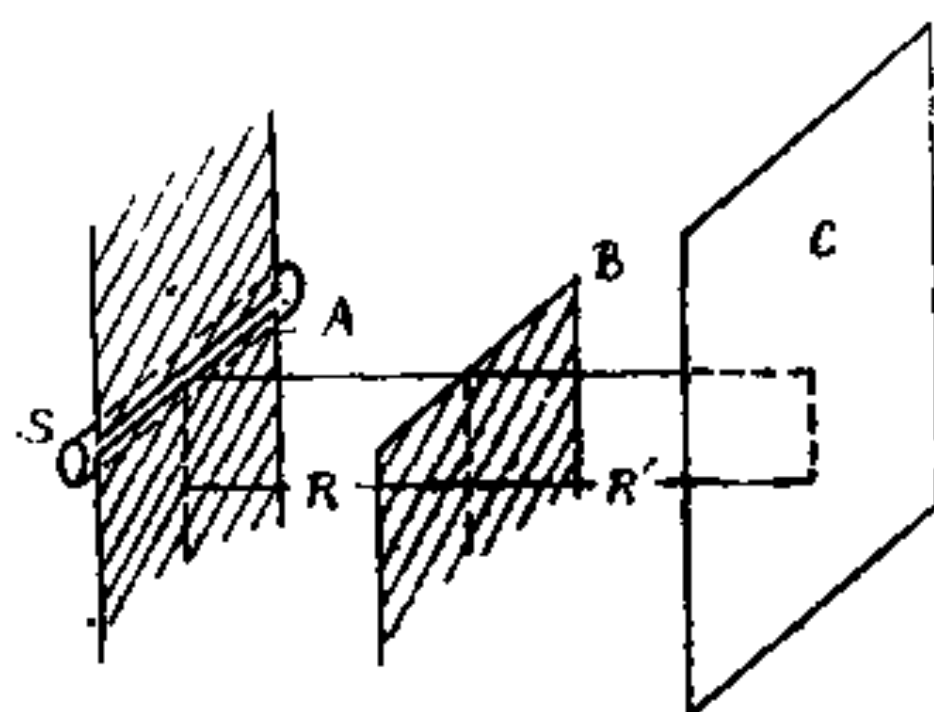


图 40

直边衍射。 $S$ 是柱状光源， $A$ 是一与直边 $B$ 平行的狭缝， $C$ 是观察屏。狭缝可视为由许多非相干点光源组成。试讨论下述每种情况对衍射图样的影响

(1) 光源具有小的波长宽度 $\Delta\lambda$ ;

(2) 缝具有有限宽度 $e$ ;

(3) 缝在其本身平面内沿垂直缝的方向位移，缝和直边连线与水平面间夹角为 $\phi$ ;

(4) 直边是粗糙的，有 $\Delta x$ 的起伏。

**5—62** (1) 当平行光垂直照射在宽为 $b$ 的单缝上时，在单缝后距离为 $d$ 且与单缝所在平面平行的屏上观察，证明屏上的光强分布

$$I = \frac{1}{2} I_0 \{ [\mathcal{C}(v_2 + v_1) - \mathcal{C}(v_2 - v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2 + v_1) - \mathcal{S}(v_2 - v_1)]^2 \}$$

式中， $\mathcal{C}(v) = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau$ ， $\mathcal{S}(v) = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau$

是菲涅耳积分， $v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} \frac{b}{2}$ ， $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} x$ ， $x$ 是在观

察屏上沿垂直于缝方向的坐标。

(2) 利用考纽螺线，概略画出(1)中沿 $x$ 轴的光强分布。

**5—63Δ** (1) 证明当 $v$ 很大时，若忽略 $\frac{1}{v^3}$ 量级的项，则

$$\mathcal{C}(v) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi v} \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right)$$

$$\mathcal{S}(v) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi v} \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right)$$

(2) 当观察屏远离狭缝时, 即 $d$ 很大时,  $\nu_1$ 很小,  $\nu_2$ 很大,  $\nu_2 + \nu_1$ 及 $\nu_2 - \nu_1$ 都很大。用5—62题结果证明这时菲涅耳单缝衍射的光强分布和夫琅和费单缝衍射的光强分布完全一致。

**5—64** 由惠更斯-菲涅耳积分出发, 证明在圆孔的菲涅耳衍射中, 孔的轴线上复振幅分布满足

$$U(P) = \frac{A e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0} [1 - e^{ik\Delta}]$$

$$\Delta = [(\gamma_0^2 + a^2)^{1/2} + (s_0^2 + a^2)^{1/2} - (r_0 + s_0)]$$

式中,  $r_0$ 和 $s_0$ 分别是点光源和观察点到圆孔中心的距离,  $a$ 是圆孔半径。

**5—65** 由5—64题结果, 利用巴俾涅原理, 求在半径为 $a$ 的圆屏的菲涅耳衍射中, 圆屏后方沿轴的强度分布, 并把所得结果与用菲涅耳波带法得到的结果加以比较。

**5—66** 若衍射孔上的透射函数为 $F(\xi, \eta)$ , 试证明在傍轴近似下, 衍射积分为

$$U(\xi, \eta) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} \iint F(\xi, \eta) e^{\frac{ik}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta.$$

**5—67** (1) 设 $z=0$ 平面上的透射函数为

$$F(\xi, \eta) = A \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{w_0^2} \right]$$

利用5—66题结果, 求在 $z$ 取任意值的平面上的衍射复振幅分布。

(2) 证明当 $z$ 值很大时, 在靠近 $z$ 轴处, (1)中得到的衍射波的等相面可近似视为半径为

$$R(z) = z \left[ 1 + \frac{k^2 w_0^4}{2z^2} \right]$$

的球面。

(本题所讨论的衍射问题, 也就是高斯光束的传播情况。)

## 7. 其他问题

**5—68Δ** 分别求出在透镜焦点附近, (1) 几何阴影中; (2) 照明区的衍射光强表示式。

**5—69** 有一焦距为25cm的理想透镜, 透镜的直径为4cm, 物距1m, 求象面的装配公差。光波长取为5500 Å

**5—70** 在梅斯林干涉装置中, 发生干涉的两束光为什么有 $x$ 的附加相位差?

**5—71** 根据稳定相原理, 证明在边界衍射波中只是服从反射定律的那部分具有较大贡献。

**5—72** 若全息底片的分辨本领为400条线/毫米, 物光和参考光都是平面波, 试求参考光与物光之间的最大夹角。光波长为6000 Å。

**5—73Δ** (1) 考察用一个点物和一系列平面参考光波形成的全息图, 假定参考光波正入射到底板上, 点物距底板为 $r_0$ , 光波长为 $\lambda$ 。试求全息图所记录下来的干涉图样;

(2) 试比较菲涅耳波带片的透射率分布和(1)中所得到的全息图上的透射率分布有什么不同?

**5—74** 当单色平面波垂直照射半平面完全导电屏时, 根据

索末菲得到的矢量波衍射理论的严格解，

(1) 导出和基尔霍夫衍射理论对直边菲涅耳衍射给出的强度分布公式相一致的结果，进而说明基尔霍夫理论在处理这种衍射问题时的局限性。

(2) 说明边界衍射波的存在，并指出在空间哪些区域可把边界衍射波视为发自屏边的柱面波？

**5-75** 当入射波不是单色平面波，而是发自任意形状光源的单色波时，试略述对半平面完全导电屏衍射问题的处理方法。

**5-76** 光被超声波衍射时，如果超声波频率较低，且入射光方向垂直于超声波传播方向（即入射角  $\theta = 0^\circ$ ），则发生喇曼-纳斯衍射，这时出现多序衍射光，且各序衍射极大对称地分布在零序极大两侧。如果超声波频率较高，且光斜入射时，则发生布喇格衍射，这时衍射光的分布是不对称的，一般只出现零序和  $+1$  序或  $-1$  序。

用水作声光媒质，水的折射率  $n = 1.33$ ，超声波在水中的速度  $v = 1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$ ，超声束宽  $6 \text{ cm}$ ，媒质的  $\Delta = 10^{-8}$ 。

由He-Ne激光器射来的波长  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  的红色激光束被超声波衍射，对下述两种情况求各级衍射光强，并区分两种情况各属何种衍射。

(1) 超声波频率  $\nu \approx 1 \text{ MHz}$ ，光正入射；

(2) 超声波频率  $\nu \approx 40 \text{ MHz}$ ，光的入射角分别为  $0^\circ$  和  $30'$ 。由入射角  $\theta = 0^\circ$  时算出的结果，可以确信，在光正入射情况下，实际上是观察不到布喇格衍射的。

# 第六章 象差的几何理论和 象差的衍射理论

## 1. 象差的几何理论

6-1 证明由平面反射镜所成的象没有任何象差。

6-2 图41中 $G$ 是一块放在空气中的玻璃平板，试用折射定律直接求出 $G$ 对发自 $P_0$ 的光线 $P_0A$ 的球差表示式。还有别的什么种类的象差影响象的质量吗？

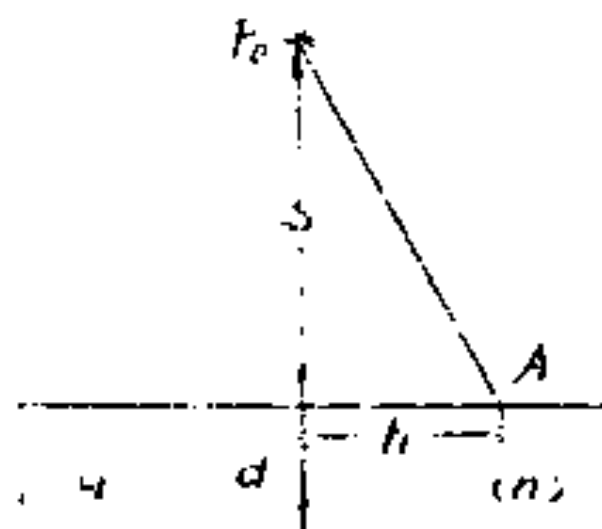


图 41

6-3 用一个只有球差的共轴光学系统对图42中所示的物体成像，试画出象的略图。



图 42

6-4 证明在初级慧差中，当出瞳面上的横坐标 $\rho$ 取各种值时，各象差曲线圆有两条相交于高斯象点的公切线，且两公切线交角是 $60^\circ$ 。

6-5 $\Delta$  证明由于初级象散和场曲的存在，点物经轴对称光学系统所成的象一般是椭圆形光斑。



**6—6** 用光路图说明，对于有负球差的透镜，孔径光阑在透镜前时（如图43 (a) 所示）产生桶形畸变；孔径光阑在透镜后时（如图43 (b) 所示）产生枕形畸变。有正球差的透镜则正相反。

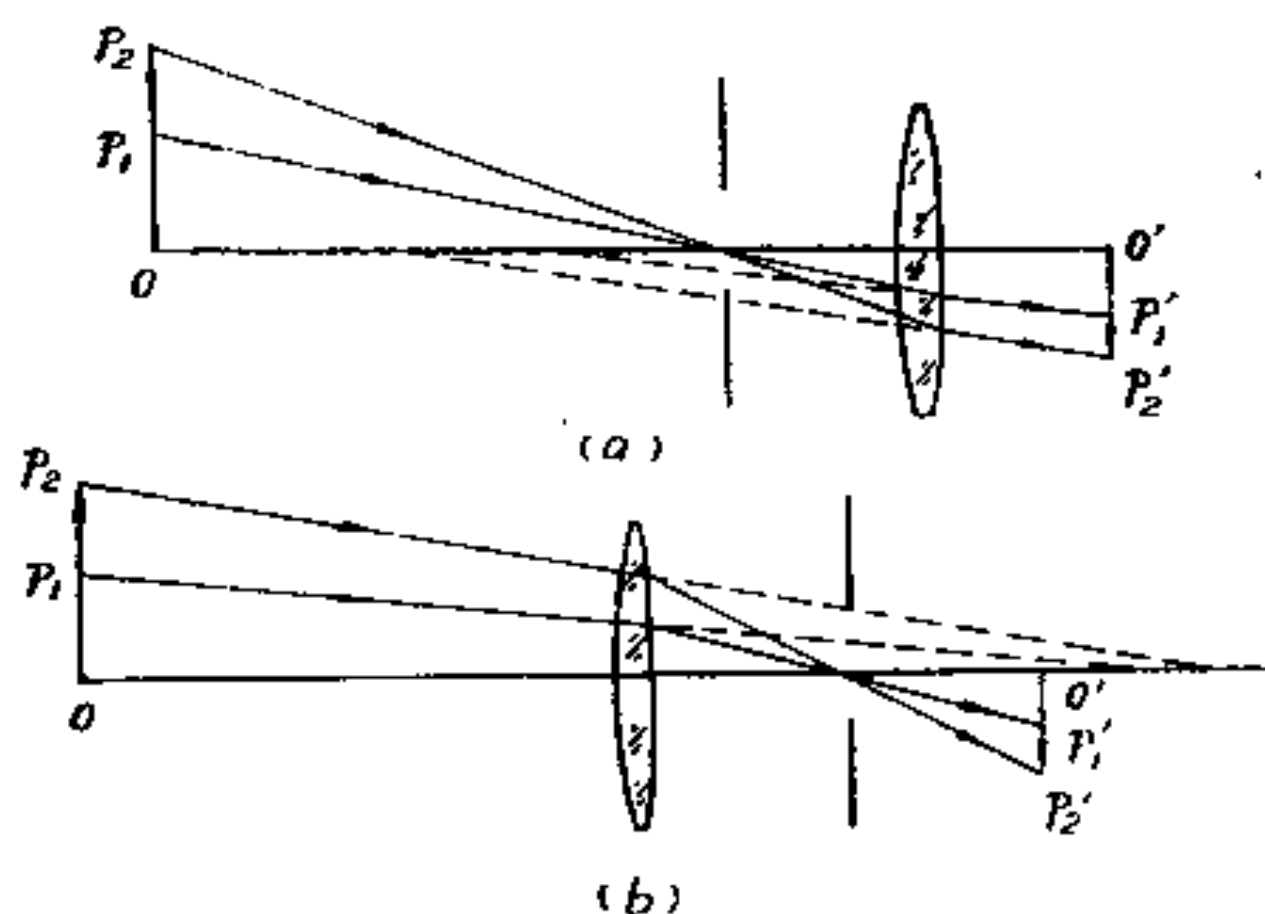


图 43

**6—7Δ** 当共轴光学系统只有畸变而没有其它象差时，用一中心在光轴上，且与光轴垂直的“田”字形网格物体证明，当  $E > 0$  时为桶形畸变， $E < 0$  时为枕形畸变。

**6—8** 证明五级象差有九个象差系数，并简略说明每个象差系数对应于什么样的象差。

**6—9** 一胶合透镜，由一双凸透镜和一平凹透镜粘合而成。凸透镜用冕牌玻璃，其折射率为1.51；凹透镜用火石玻璃，其折射率为1.62。胶合透镜的焦距  $f = 20\text{cm}$ 。欲使此透镜消除场曲，试求各面曲率半径。

**6—10** 证明放在空气中的薄透镜，对平行于光轴的入射光

线之横向球差 $S_{\perp}$ 和纵向球差 $S_{//}$ 分别为

$$S_{\perp} = -\frac{(n-1)f^2h^3}{2n^2} \left\{ \frac{1}{r_1^3} - \left( \frac{1}{r_2} - \mathcal{P} \right) \left[ \frac{1}{r_2} - (n+1)\mathcal{P} \right] \right\}$$

$$S_{//} = -\frac{(n-1)f^2h^2}{2n^2} \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \left( \frac{1}{r_2} - \mathcal{P} \right) \left[ \frac{1}{r_2} - (n+1)\mathcal{P} \right] \right\}$$

式中,  $n$ 是透镜的折射率,  $f$ 是透镜的焦距,  $\mathcal{P}$ 是透镜的光焦度,  $r_1$ 和 $r_2$ 是透镜两个表面的曲率半径,  $h$ 是平行于光轴的入射光线与光轴的距离。

**6—11** 薄透镜的  $n=1.5$ ,  $r_1=-40\text{cm}$ ,  $r_2=-8\text{cm}$ 。求平行光轴且与透镜交在距光轴1cm处的入射光线之纵向球差。

**6—12** He-Ne 激光器发出直径3mm的激光束(波长 $\lambda=633\text{nm}$ )被一平凸透镜聚焦, 透镜的折射率 $n=1.5$ , 焦距 $f=1\text{m}$ 。问纵向和横向球差分别是波长的多少倍?

**6—13** 一平凸透镜的折射率 $n=1.5$ , 凸面曲率半径是10cm。计算此透镜对入射高度为1cm的平行于光轴的光线之纵向球差。对透镜凸面朝向入射光和平面向入射光两种情况分别计算, 并将两种情况算出的结果加以比较。

**6—14 $\Delta$**  给定一个薄透镜的光焦度 $\mathcal{P}$ 和物距 $s_1$ , 且 $s_1 \neq \infty$ , 为了得到一对不晕点, 应怎样选择透镜两表面的曲率半径和形变系数 $\beta$ ?

**6—15** 设物点在无限远, 斜入射光线与光轴成 $\theta$ 角, 光线与透镜交点到光轴的距离为 $h$ 。证明薄透镜对此光线之慧差为

$$\begin{aligned} \text{慧差} = & \frac{3(n-1)}{2} f h^2 \operatorname{tg} \theta \left[ \frac{(n-1)(2n+1)}{n r_1 r_2} \right. \\ & \left. - \frac{n^2 - n - 1}{n r_1^2} - \frac{n}{r_2^2} \right] \end{aligned}$$

**6—16** 一条发自无限远物点的光线，以  $\theta = \arctg\left(-\frac{1}{5}\right)$  的入射角斜入射到 6—11 题所给的薄透镜上，光线与透镜交点距光轴 1cm，求此光线的慧差。

**6—17** 对薄透镜可定义形状因子  $q = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}$ ，从而可把两表面曲率半径  $r_1$  和  $r_2$  表示为焦距  $f$ 、形状因子  $q$  以及折射率  $n$  的函数。当  $f$  和  $n$  给定时，每个  $q$  值对应一对  $r_1$  和  $r_2$ 。已知  $f = 20\text{cm}$ ， $n = 1.5$ ， $h = 1\text{cm}$ ，用 6—10 题的结果，求当  $q = -2.0, -1.5, -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  等值时的横向球差。根据所得结果绘制球差随  $q$  的变化曲线。

**6—18** 除上题所给数据外，还知道发自无限远物点的光线，以入射角  $\theta = \arctg\left(-\frac{1}{5}\right)$  射到薄透镜上，用 6—15 题的结果，绘制慧差随  $q$  的变化曲线。

**6—19** (1) 证明适当地放置光阑，可消除象散或场曲。

(2) 对一个薄透镜，象散和场曲能否同时消除？为什么？

**6—20△** 计算 3—17 题的各种初级象差系数和对已给出的轴外物点之各种初级象差，并判断是否满足正弦条件和柏兹伐条件？（设透镜直径为 6cm）。

**6—21** (1) 一薄双凸透镜的  $r_2 = -r_1$ ，折射率  $n = 1.5$ ，放在空气中，物体到透镜的距离在怎样的范围时才能消除象散？

(2) 欲使 (1) 中的透镜对物距  $s_1 = -2f$  ( $f$  是透镜焦距) 的点不晕成象，求透镜的形变系数。

**6—22** 一薄镜的  $r_1 = 20\text{cm}$ ,  $r_2 = -20\text{cm}$ ,  $n = 1.5$ , 物距  $s_1 = -30\text{cm}$ , 且物点距光轴  $1\text{cm}$ , 求各种初级象差系数。

**6—23** 某摄谱仪的聚焦系统用一焦距  $f = 1\text{m}$  的球面镜, 其  $F$  数 (即  $\frac{D}{f}$ ) 为 10, 出瞳距反射镜  $\frac{1}{4}\text{m}$ 。平行光入射到球面镜上给出一个距光轴  $1\text{cm}$  的象, 考虑到球差、慧差和象散的影响, 讨论真实象的大小和形状。

**6—24△** 一置于空气中的薄透镜的  $r_1 = 0.2\text{m}$ ,  $r_2 = -0.2\text{m}$ ,  $n = 1.5$ 。

(1) 当入瞳与透镜重合时, 欲得不晕成象, 求物距  $s_1$  和第一面的形变系数  $b_1$  (设  $b_2 = 0$ ), 并求出这时的  $C$ 、 $D$ 、 $E$  等象差系数。

(2) 当入瞳随意放置且物距  $s_1 = -\frac{2}{3}\text{m}$  时, 能否消除象散?

**6—25** 一玻璃平板厚  $2\text{cm}$ , 玻璃的折射率  $n = 1.6$ , 色散本领  $\Delta = 0.028$ , 物点距板的前表面  $5\text{cm}$ , 求象的位置色差。

**6—26△** 把一般共轴系统的消位置色差和消放大率色差条件

$$\sum_{i=1}^n h_i^2 K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_n}{n_n} \right) + \frac{\delta s'_n}{s'_n - t'_n}$$

$$+ \sum_{i=1}^n h_i^2 k_i K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right) = 0$$

(1) 用在单个薄透镜上, 导出其消除两种色差应满足的条件, 并对所得结果加以讨论。

(2) 用在两个薄透镜的组合上, 根据所得结果对两接触薄透镜组合和两非接触薄透镜组合等两种情况加以讨论。

**6—27** 有一个焦距为25cm 的消色差双胶合透镜, 它由一个对称的双凸冕牌玻璃 ( $n_D = 1.5163$ ,  $n_F = 1.5220$ ,  $n_C = 1.5139$ ) 透镜和一个火石玻璃 ( $n_D = 1.6199$ ,  $n_F = 1.6321$ ,  $n_C = 1.6150$ ) 凹透镜粘合而成, 试计算各个面的曲率半径以及每个透镜的焦距。

**6—28** 用6—27题所给的冕牌玻璃和火石玻璃分别制做薄凸透镜和薄凹透镜, 使两透镜的顶点接触但非密合。要求此透镜组合没有色差且焦距  $f = 10\text{cm}$ , 同时对无限远物点可得不晕成象, 问透镜的各表面的曲率半径分别应是多少?

**6—29** 一惠更斯目镜由两平凸透镜组成, 两透镜都是凸面朝向来光方向, 两透镜焦距和间距之比为  $f_1 : f_2 : d = 3 : 1 : 2$ 。已知两透镜均由折射率  $n = 1.500$ 、色散本领  $\Delta = 0.015$  的玻璃制成, 目镜焦距  $f = 5\text{cm}$ , 求此目镜对无限远物点的位置色差。

**6—30** 冉斯登目镜由两平凸透镜组成, 两透镜凸面相对, 两透镜焦距和间距之比为  $f_1 : f_2 : d = 1 : 1 : 1$ 。已知两透镜均由6—29题所给的玻璃制成, 目镜焦距  $f = 5\text{cm}$ , 入射光经此目镜在明视距离处成一虚象, 求其放大率色差。

## 2. 象差的衍射理论

**6—31** 详述在 (1) 改变实际光学系统, 但不改变参考球心和 (2) 改变参考球心, 但不改变光学系统两种情况下, 位移定理的含意, 并针对 (1)、(2) 两种情况各举一例。

**6—32** 根据位移定理证明, 一个无象差的理想光学系统, 如果聚焦不足 (即接收平面相对理想象面沿光轴方向有小量位移 $z$ ), 则其象差函数可写成  $\phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \rho^2 z^2$

式中,  $\rho = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}} \leq 1$  是出瞳面上的矢径,  $a$  是出瞳半径,  $R$  是过出瞳中心的高斯参考球半径。

**6—33Δ** 把象差函数 $\phi$ 用泽尼克圆多项式 $R_n^m(\rho)$ 展开, 可写成

$$\begin{aligned} \phi = & A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} A_{n0} R_n^0(\rho) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \end{aligned}$$

证明 (1)  $\overline{\phi} = A_{00}$ ;

$$(2) \overline{\phi^2} = A_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A_{nm}^2}{n+1}。$$

式中 $\overline{\phi}$  (或 $\overline{\phi^2}$ ) 是 $\phi$  (或 $\phi^2$ ) 在整个出瞳面上取平均。

**6—34** 试详述用泽尼克圆多项式展开象差函数的优点。

**6—35** 一共轴光学系统 I 的象差函数

$$\phi_1 = A\rho^6 + B\rho^4 + C\rho^3 \cos\theta + D\rho^2 \cos^2\theta$$

式中,  $A = 2 \times 10^{-4}$ ,  $B = -3 \times 10^{-4}$ ,  $C = 6 \times 10^{-3}$ ,  $D = 4 \times 10^{-4}$ 。由于象差的存在, 象面上强度最大的点不在高斯象点, 欲使强度最大的点回到高斯象点上, 可在原光学系统上附加另一同轴光学系统 II。求光学系统 II 的象差函数 $\phi_{II}$ 。

**6—36** 何谓衍射焦点? 何谓斯特列耳强度? 衍射焦点和高斯象点是否重合? 何谓衍射焦点位移。

**6—37** 证明：(1) 一光学系统只有小量初级球差时，其衍射焦点恰在近轴焦点和边缘焦点连线的中点处；

(2) 一光学系统只有小量初级象散时，其衍射焦点恰在子午焦线和弧矢焦线的中点。

**6—38Δ** 计算 6—20 题中各种象差的衍射焦点位移和容限，并说明为什么场曲和畸变没有容限。

**6—39** 一凸透镜的直径是 2cm，近轴光线焦距是 20cm，边缘光线焦距是 19.98cm。以波长 5000Å 的平行光束照射此透镜，求 (1) 焦点公差；(2) 衍射焦点位置；(3) 此透镜的球差超没超过容限？

**6—40** 证明：(1) 在有小量初级慧差时，衍射积分展开式中的二次项系数

$$U_2 = \frac{1}{2\nu} \left\{ \frac{J_1(\nu)}{4} - \frac{J_3(\nu)}{20} + \frac{J_5(\nu)}{4} - \frac{9J_7(\nu)}{20} - \cos(2\phi) \left[ \frac{2J_3(\nu)}{5} + \frac{3J_7(\nu)}{5} \right] \right\}$$

式中  $J$  表贝塞耳函数。

(2) 在有小量初级象散时，

$$U_2 = \frac{1}{2\nu} \left\{ \frac{1}{3} J_1(\nu) - \frac{1}{2} J_3(\nu) + \frac{1}{6} J_5(\nu) + \cos(4\phi) J_5(\nu) \right\}$$

(在 (1)、(2) 中，都仅限于讨论过  $z=0$  平面上的衍射积分)。

**6—41Δ** 证明：在小象差条件下，初级球差的衍射积分展开

式中二次项的系数

$$U_2(u, v) = e^{-\frac{u^2}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{H}} \frac{1}{v} \sum_{s=0}^{\infty} (v)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{4}\right) \\ \times [a_s J_{2s+9}(v) + b_s J_{2s+8}(v) + c_s J_{2s+7}(v) \\ + d_s J_{2s+6}(v) + e_s J_{2s+5}(v)]$$

式中,  $a_s = \frac{9}{4} \frac{(s+1)}{(2s+1)} \frac{(s+2)}{(2s+3)} \frac{(s+3)}{(2s+5)} \frac{(s+4)}{(2s+7)}$ ,

$$b_s = 3^3 \frac{(s+1)(s+2)}{(2s-1)(2s+1)^2(2s+3)^2} \\ \times \frac{(8s^6 + 60s^4 + 146s^3 + 69s^2 - s - 15)}{(2s+5)(2s+7)};$$

$$c_s = \frac{3}{2} \frac{(144s^8 + 768s^7 + 536s^6 - 1368s^5 - 2515s^4)}{(2s-3)(2s-1)^2(2s+1)^2(2s+3)^2(2s+5)} \\ + \frac{(1646s^3 + 1477s^2 + 146s - 143)}{(2s-3)(2s-1)^2(2s+1)^2(2s+3)^2(2s+5)};$$

$$d_s = \frac{3}{2} \frac{s(s-1)(16s^5 - 40s^4 - 40s^3 + 46s^2 + 45s - 63)}{(2s-5)(2s-3)(2s-1)^2(2s+1)^2(2s+3)};$$

$$e_s = \frac{9}{4} \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{(2s-5)(2s-3)(2s-1)(2s+1)}.$$

### 3. 傅里叶光学理论基础

#### 6—42 (1) 证明两高斯函数

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-ax^2), \quad h(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \exp(-bx^2)$$



的卷积仍为高斯函数，即

$$\begin{aligned} g(x) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x')h(x')dx' \\ &= \sqrt{\frac{c}{\pi}} \exp(-cx^2) \end{aligned}$$

式中， $c = \frac{ab}{a+b}$ 。

(2) 证明两洛仑兹函数

$$g(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad h(x) = \frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + x^2}$$

的卷积仍为洛仑兹函数，即

$$g(x) * h(x) = \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + x^2}$$

式中， $c = a + b$ 。

**6—43** 振幅透射函数为

$$F(\xi) = \begin{cases} e^{-a\xi}, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (a > 0)$$

的衍射屏，放在透镜的前焦面上，衍射屏受单位振幅的单色平面波垂直照射。求透镜后焦面上的复振幅分布。

**6—44** 设光栅的透射函数

$$F(\xi) = t_0 + t_1 \cos(2\pi f\xi) + t_1 \cos\left(2\pi f\xi + \frac{\pi}{2}\right)$$

这块光栅的夫琅和费衍射场中将出现几个衍射斑？各斑的中心强度与零级斑中心强度的比值是多少？

**6—45** 求一个半平面屏的夫琅和费衍射图样中的振幅分布。

**6—46Δ** 求边长为 $L$ 的方形孔和与其相内切的圆形孔的相干

传递函数 $CTF$  (即相干照明时的频率响应函数) 和光学传递函数 $OTF$  (即非相干照明时的频率响应函数)。该方孔和内切圆孔有相同的截止频率吗?

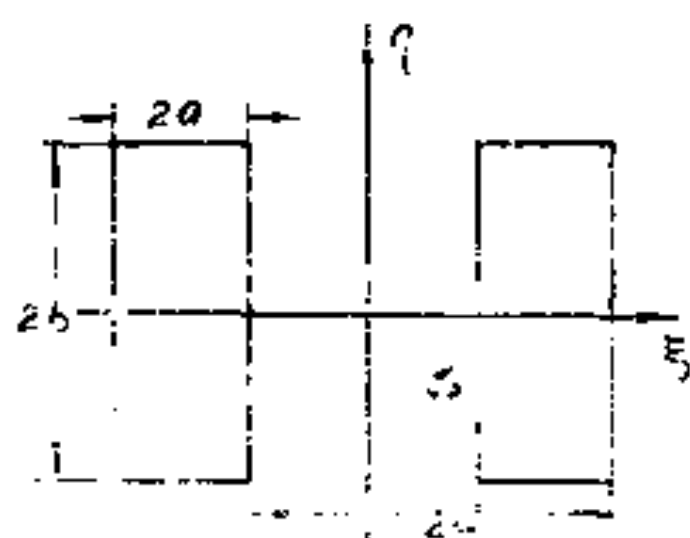


图 44

**6—47** 求如图44所示的双矩孔的 $OTF$ , 并画出沿 $x$ 轴方向的归一化的 $OTF$ 曲线。

**6—48** 透射函数分别为

$$F_1(\xi) = \left| \cos\left(2\pi \frac{\xi}{b}\right) \right|$$

$$F_2(\xi) = \cos\left(2\pi \frac{\xi}{b}\right)$$

的两物体, 经半径为 $a$ 的圆孔产生夫琅和费衍射,  $a$ 满足

$$\frac{\lambda f}{b} < a < -\frac{2\lambda f}{b}$$

式中 $f$ 是透镜焦距。在相干与非相干照明两种条件下, 比较两物体的象。

**6—49** 一台照相机的镜头直径为3cm, 焦距为6cm, 拍摄2m远处的物体。

(1) 当用相干光照明物体时, 求照相机的 $CTF$  (相干传递函数) 和截止频率;

(2) 当用非相干光照明物体时, 求照相机的 $OTF$  (光学传递函数) 和截止频率。

**6—50** 一个有小量球差且聚焦不足的共轴系统, 其象差函数可写成

$$\phi(\xi, \eta) = A\rho^4 + B\rho^2$$

式中系数  $A$  和  $B$  分别表球差系数和散焦影响。试分别求  $A=0$  和  $B=0$  时的  $OTF$ 。

## 第七章 部分相干光的干涉和衍射

### 1. 解析信号 复相干度

7—1 若  $A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$ , 证明当  $A(t)$  是实函数时,  $a^*(\nu) = a(-\nu)$ 。

7—2 一高斯脉冲  $V^{(r)}(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right) \cdot \cos 2\pi\nu_0 t$

(1) 求与之相缔合的解析信号;

(2) 求它的频谱半宽度 (简称频宽);

(3) 在怎样的条件下可把此高斯脉冲视为窄带信号。

7—3 $\Delta$  用薛华兹不等式

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} V_{\tau}(P_1, t+\tau) V^*(P_2, t) dt \right|^2 \leq \left[ \int_{-\tau}^{\tau} V_{\tau}(P_1, t+\tau) V_{\tau}^*(P_1, t+\tau) dt \right] \times \left[ \int_{-\tau}^{\tau} V_{\tau}(P_2, t) V_{\tau}^*(P_2, t) dt \right]$$

证明复相干度的模  $|\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$ 。

### 2. 自相干函数

7—4 一个频率为  $\nu_0$  的理想单色光源, 其光波场中某点的复扰动可表示为

$$V(t) = V_0 e^{-i2\pi\nu_0 t}$$

证明：谱密度  $G(\nu) = \frac{1}{4} V_0^2 \delta(\nu - \nu_0)$ ，这里  $\delta$  表示  $\delta$  函数，

可见  $G(\nu)$  就是频谱分布函数。

7—5 两个振幅相同的单色波迭加后的总扰动为

$$\begin{aligned} V^{(r)}(t) &= A \cos 2\pi\nu_1 t + A \cos 2\pi\nu_2 t \\ &= 2A \cos 2\pi \bar{\nu} t \cos 2\pi \Delta\nu t \end{aligned}$$

式中， $\bar{\nu} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ ， $\Delta\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2) > 0$ 。设  $\Delta\nu \ll \bar{\nu}$ ，

求  $\gamma^{(r)}(\tau)$  的近似表示式。

7—6 考虑两个中心频率分别为  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的准单色光之间的干涉，问观测时间必须短到什么程度才能测得干涉条纹？

7—7 非单色光源可用归一化的频谱分布函数  $P(\nu)^* = \frac{I(\nu)}{I}$  来表征，式中， $I(\nu)$  是在频率  $\nu$  处单位频率间隔内的

光强， $I = \int_0^\infty I(\nu) d\nu$  是总光强。显然  $\int_0^\infty P(\nu) d\nu = 1$ 。

证明：在迈克耳孙干涉仪中，如果用归一化频谱分布函数为  $P(\nu)$  的光源，则其干涉光强为  $I = 2KI_0[1 + \gamma_{11}^{(r)}(\tau)]$

式中， $K$  是从光源到接收装置的光强透射率， $I_0$  是光源发出的总光强， $\gamma_{11}^{(r)}(\tau)$  表示复相干度

$$\gamma_{11}(\tau) = \int_0^\infty P(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu$$

的实部， $\tau = \frac{s_2 - s_1}{c}$ 。

7—8 在7—7题中，设光源是准单色光源，其  $P(\nu) = D(\nu -$

\*  $P(\nu)$  与谱密度  $G(\nu)$  仅相差一归一化因子。

$\nu_0$ ), 这里  $D(\nu - \nu_0)$  表示一个仅在  $-\frac{\Delta\nu}{2} < \nu - \nu_0 < \frac{\Delta\nu}{2}$  范围内不为零的函数。令  $u = \nu - \nu_0$ , 证明

$$\gamma_{11}(\tau) = C(\tau) \cos 2\pi\nu_0\tau - S(\tau) \sin 2\pi\nu_0\tau$$

式中,  $C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} D(u) \cos 2\pi u\tau du$ ,

$$S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} D(u) \sin 2\pi u\tau du.$$

7—9 已知  $I(\nu) = \begin{cases} A \text{ (常数)}, & \text{当 } \nu_0 < \nu \leq 2\nu_0 \text{ 时;} \\ 0 & \text{, 当 } \nu \leq \nu_0 \text{ 及 } \nu > 2\nu_0 \text{ 时;} \end{cases}$

利用7—8题的结果, 求  $\gamma_{11}^{(1)}(\tau)$  等于多少?

7—10 $\Delta$  用部分相干光理论解4—42题。

7—11 根据7—8题中对函数  $C(\tau)$  和  $S(\tau)$  的定义,

(1) 证明  $C(\tau)$  是偶函数,  $S(\tau)$  是奇函数, 即  $C(-\tau) = C(\tau)$ ,  $S(-\tau) = -S(\tau)$ ;

(2) 证明  $D(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} [C(\tau) + iS(\tau)] e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau$ ;

(3) 利用  $D_e(\mu) = \frac{1}{2} [D(\mu) + D(-\mu)]$ ,  $D_o(\mu) = \frac{1}{2} [D(\mu) - D(-\mu)]$  可把  $D(\mu)$  写成  $D(\mu) = D_e(\mu) + D_o(\mu)$ , 其中  $D_e(\mu)$  表偶函数,  $D_o(\mu)$  表奇函数。证明

$$D_e(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi\mu\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi\mu\tau d\tau$$

$$D_o(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \sin 2\pi\mu\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} S(\tau) \sin 2\pi\mu\tau d\tau$$

7—12 已知窄带解析信号 (即准单色复扰动)

$$V(t) = A(t) e^{i[\phi(t) - 2\pi\nu_0 t]}$$

(1) 证明其复相干度

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle A(t+\tau) A(t) e^{i[\phi(t+\tau) - \phi(t) - 2\pi\nu_0\tau]} \rangle}{\langle [A(t)]^2 \rangle} ;$$

(2) 利用 (1) 和 7—8 题结果, 证明

$$C(\tau) = \frac{\langle A(t+\tau) A(t) \cos[\phi(t+\tau) - \phi(t)] \rangle}{\langle [A(t)]^2 \rangle} ,$$

$$S(\tau) = \frac{\langle A(t+\tau) A(t) \sin[\phi(t+\tau) - \phi(t)] \rangle}{\langle [A(t)]^2 \rangle} .$$

7—13 由 7—7 及 7—8 题,  $\gamma(\tau) = \int_0^\infty P(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu$ , 当  $P(\nu) = D(\nu - \nu_0)$  时, 利用帕塞瓦定理, 证明

$$4 \int_0^\infty [\gamma^{(n)}(\tau)]^2 d\tau = \int_0^\infty [P(\nu)]^2 d\nu$$

7—14 $\Delta$  (1) 证明光场中某点  $P$  在两不同时刻的扰动间的复相干度是

$$\gamma(\tau) = \frac{\int_0^\infty G(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu}{\int_0^\infty G(\nu) d\nu} .$$

(2) 一个激光光源振荡于频率差为  $10^8 \text{ Hz}$  的两个靠近的频率上, 若两频率成分的频宽都是无限窄的, 即  $G(\nu) = I_1 \delta(\nu - \nu_1) + I_2 \delta(\nu - \nu_2)$ , 试求  $P$  点的  $\gamma(\tau)$ 。

7—15 一光源由两个频谱分布函数相同, 中心频率分别在  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的准单色成分组成, 其频谱分布函数为  $P(\nu) = \frac{1}{3}$

$D(\nu - \nu_1) + \frac{2}{3} D(\nu - \nu_2)$ 。已知  $D(\mu)$  相对于  $\mu = 0$  对称, 且

$\int_{-\infty}^{\infty} D(\mu) \cos 2\pi \mu \tau d\mu = e^{-\frac{\tau^2}{t_1^2}}$ 。设  $\nu_1 > \nu_2$ ,  $\frac{1}{\tau_0} \ll (\nu_1 - \nu_2) \ll$

$\nu_2$ , 求光场中某点的  $\gamma^{(n)}(\tau)$  并画出其随  $\tau$  的变化曲线。

**7—16** 一光源同时发射两列准单色波, 光波场中某点的复扰动为

$$V(t) = A_1 e^{i[\phi_1(t) - 2\pi\nu_1 t]} + A_2 e^{i[\phi_2(t) - 2\pi\nu_2 t]}$$

设  $\langle \cos[\phi_1(t + \tau) - \phi_1(t)] \rangle = e^{-\frac{\tau^2}{t_1^2}}$ ,  $\langle \cos[\phi_2(t + \tau)$

$- \phi_2(t)] \rangle = e^{-\frac{\tau^2}{t_2^2}}$ ,  $A_1$  和  $A_2$  是常数, 且  $\nu_1 t_1 \gg 1$ ,  $\nu_2 t_2 \gg 1$ ,  $t_1 \approx t_2$ ,  $\nu_1 \gg \nu_1 - \nu_2 > 0$ 。求复相干度的实部  $\gamma^{(n)}(\tau)$  和频谱分布函数  $P(\nu)$ 。

**7—17Δ** 设光源随机发射一系列振幅和频率相同、持续时间为  $\theta$  的正弦波列, 场中某点复扰动可表示为

$$V(t) = e^{i[\phi(t) - 2\pi\nu t]}$$

式中,  $\phi(t) = C_j$ , 当  $j\theta < t < (j+1)\theta$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n = \frac{T}{\theta}$ ,  $C_j$  是一随机常数数列, 观测时间  $T \gg \theta$ 。证明

(1) 当  $\Delta t > \theta$  时,  $\gamma(\Delta t) = 0$ ;

(2) 当  $0 < \Delta t < \theta$  时,  $\gamma(\Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\theta}\right) e^{-i2\pi\nu\Delta t}$ 。

**7—18** 热光源可近似视为由许多互相独立的、具有同一中心频率  $\nu_0$  的准单色振子组成, 在其发射的光波场中某点  $P$  的复扰动可表示为

$$V(t) = \sum_{j=1}^N V_j(t) = \sum_{j=1}^N A_j(t) e^{i[\phi_j(t) - 2\pi\nu_0 t]}$$

式中  $N$  表光源中的总振子数。对不同振子  $A_j(t)$  和  $\phi_j(t)$  都各



自独立地随时间变化，证明  $P$  点的复相干度

$$\gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{\infty} A_j^2(t) dt \right] \gamma_j(\tau)}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} A_j^2(t) dt}$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } \gamma_j(\tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} A_j(t+\tau) A_j(t) \exp i \\ & \times [\phi_j(t+\tau) - \phi_j(t) - 2\pi\nu_0\tau] dt \\ & / \int_{-\infty}^{\infty} A_j^2(t) dt \end{aligned}$$

是和第  $j$  振子相对应的复相干度。

**7—19** 在 7—18 题中，若假设  $\phi_j$  不随时间  $t$  而变，且各振子有相同的振幅，即  $A_j = A$ ，

$$(1) \text{ 证明 } \gamma(\tau) = \gamma_A(\tau) e^{-i2\pi\nu_0\tau}$$

$$\text{式中 } \gamma_A(\tau) = \frac{\langle A(t+\tau) A(t) \rangle}{\langle A^2(t) \rangle};$$

(2) 利用 7—8 及 7—12 题结果证明

$$\gamma(A) = C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\mu) \cos 2\pi\mu\tau d\mu。$$

**7—20** (1) 一有限长余弦波列相缩合的解析信号可表示为

$$V(t) = \begin{cases} Ae^{-i2\pi\nu_0 t}, & \text{当 } |t| \leq \frac{t_1}{2} \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } |t| > \frac{t_1}{2} \text{ 时。} \end{cases}$$

利用 7—19 题结果，证明

$$\gamma_A(\tau) = C(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{t_1}, & \text{当 } |\tau| \leq t_1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } |\tau| > t_1 \text{ 时。} \end{cases}$$

(2) 利用 (1) 及 7—19 题的结果, 证明在碰撞展宽情况,  $\gamma(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{t_c} - i2\pi\nu_0\tau}$ , 式中  $t_c$  是两次碰撞间的平均自由飞行时间。

7—21 阻尼振子辐射场中某点  $P$  的复扰动可表示为

$$V(t) = \begin{cases} Ae^{-\frac{t}{t_1} + i(\phi - 2\pi\nu_0 t)}, & \text{当 } t \geq 0 \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } t < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

式中  $t_1$  是自发辐射寿命。证明  $P$  点的复相干度

$$\gamma(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{t_1} - i2\pi\nu_0\tau}$$

注意  $\gamma(\tau)$  与 7—20 题的结果有相同形式。

7—22 有许多如 7—21 题所描述的阻尼振子, 各振子随机发射。

(1) 求  $V(t)$  的傅里叶变换  $\mathcal{V}(\nu)$  及  $|\mathcal{V}(\nu)|^2$  的表示式。注意  $I(\nu)$  与  $|\mathcal{V}(\nu)|^2$  成正比。

(2) 证明当  $\nu_0 t_1 \gg 1$  时,  $I(\nu)$  与  $e^{-\frac{|\nu|}{\nu_0 t_1} - i2\pi\nu_0\tau}$  成正比。

### 3. 互相干函数

7—23Δ (1) 证明互相干函数的实部

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= 2 \langle V^{(r)}(P_1, t + \tau) V^{(r)}(P_2, t) \rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu, \end{aligned}$$

式中,  $V^{(r)}$  表示实扰动,  $G_{12}$  是互谱密度;

(2) 证明复相干度的实部

$$\gamma_{12}^{(r)}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu}{\sqrt{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\nu) d\nu \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\nu) d\nu \right]}}$$

式中,  $G_1(\nu)$  和  $G_2(\nu)$  是谱密度。

7—24 复相干度  $\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{i(\alpha_{12}(\tau) - \delta)}$ , 式中,

$\alpha_{12}(\tau) = \delta + \arg \gamma_{12}(\tau)$ ,  $\delta = 2\pi \bar{\nu} \tau = \frac{2\pi}{\lambda} (s_2 - s_1)$ 。证明对

准单色光  $|\gamma_{12}(\tau)|$  和  $\alpha_{12}(\tau)$  随  $\tau$  的变化比  $\cos 2\pi \bar{\nu} \tau$ 、 $\sin 2\pi \bar{\nu} \tau$  缓慢得多。

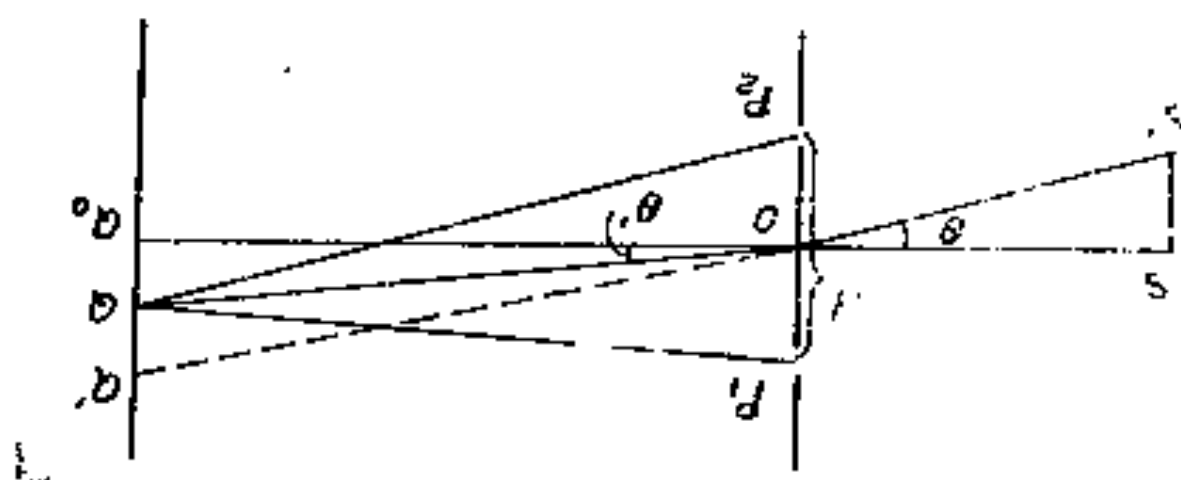


图 45

7—25 (1) 如图45所示, 在杨氏双缝干涉实验中, 当光源从  $S$  点移到  $S'$  点时, 观察屏  $\Sigma$  上零级亮纹从  $Q_0$  移到  $Q'$ 。证明光源移动的角距离  $\theta$  与零级亮纹移动的角距离相等。

(2) 证明对屏  $\Sigma$  上的  $Q$  点,

$$\tau = \frac{(S'P_2 + P_2Q) - (S'P_1 + P_1Q)}{C} \approx \frac{d(\theta' - \theta)}{C}。$$

7—26 如图46, 当两个同频率的单色点光源  $S_1$  和  $S_2$  同时

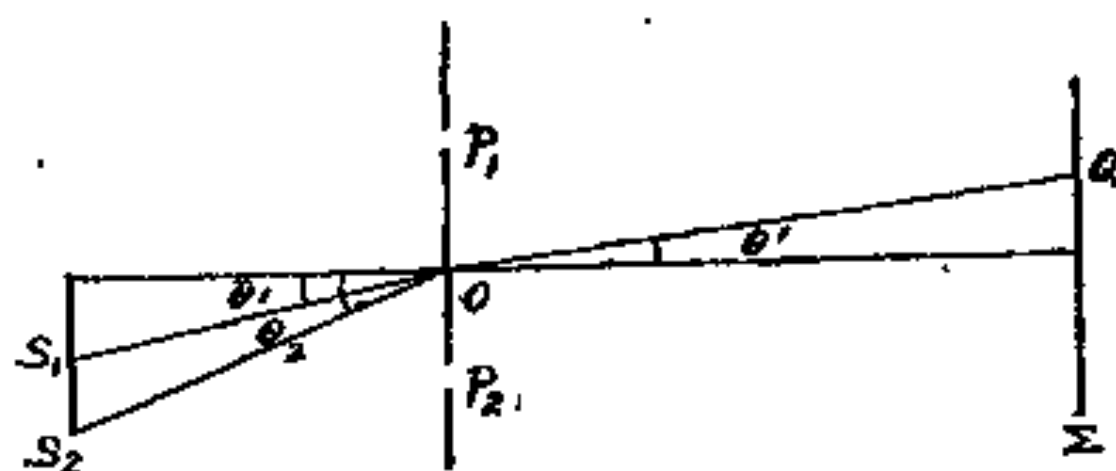


图 46

照射两狭缝 $P_1$ 、 $P_2$ 时，证明观察屏 $\Sigma$ 上 $Q$ 点的强度

$$I = I_1 \{1 + \cos 2\pi \nu \tau_1\} + I_2 \{1 + \cos 2\pi \nu \tau_2\}$$

$$= I_1 + I_2 + I_0 \cos \left( \alpha - \frac{2\pi \nu d \theta'}{C} \right)$$

式中， $I_1$ 、 $I_2$ 分别是 $S_1$ 、 $S_2$ 发出的光通过一个缝在 $Q$ 点产生的

光强， $\tau_1 = \frac{d(\theta' - \theta_1)}{C}$ ， $\tau_2 = \frac{d(\theta' - \theta_2)}{C}$ ，

$$I_0 = \left[ I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos \frac{2\pi \nu d(\theta_2 - \theta_1)}{C} \right]^{1/2},$$

$$\alpha = \arctg \frac{\left[ I_1 \sin \frac{2\pi \nu d \theta_1}{C} + I_2 \sin \frac{2\pi \nu d \theta_2}{C} \right]}{\left[ I_1 \cos \frac{2\pi \nu d \theta_1}{C} + I_2 \cos \frac{2\pi \nu d \theta_2}{C} \right]}.$$

7—27 在如图47的实验装置中， $\sigma$ 是准单色光源，其平均波长 $\bar{\lambda} = 6000 \text{ \AA}$ ，波长宽度 $\Delta\lambda = 0.1 \text{ \AA}$ ， $S_1 = 29.97 \text{ cm}$ ， $S_2 = 30.00 \text{ cm}$ 。只开 $P_1$ 孔时 $Q$ 点强度 $I^{(1)}(Q) =$

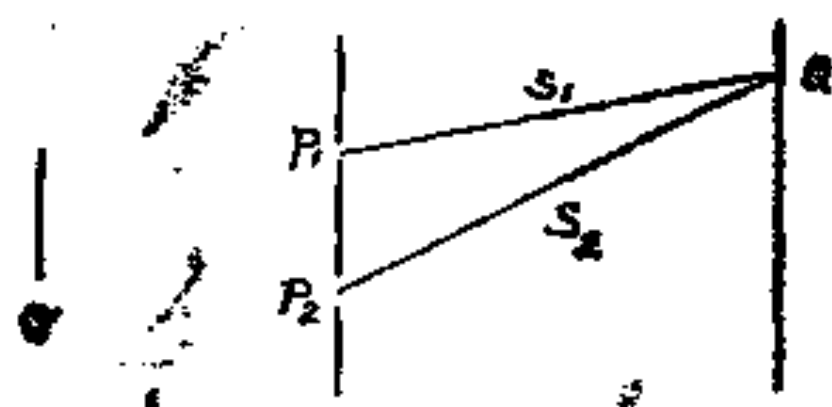


图 47

$I_0$ ，只开 $P_2$ 孔时 $Q$ 点强度 $I^{(2)}(Q) = 4I_0$ ，两孔都开时 $Q$ 点强度 $I(Q) = 8I_0$ ， $Q$ 点干涉条纹的可见度 $\mathcal{V}(Q) = 0.4$ 。求复相干因子 $\mu_{12} = ?$

**7—28Δ** 在杨氏双缝干涉实验中，用与双缝平行的准单色( $\bar{\lambda} = 0.55\mu\text{m}$ )带状光源照明，光源到双缝所在平面的垂直距离为1m，双缝间距2mm。设光源均匀发光，且其长度比宽度大得多。

(1) 用范西特-泽尼克定理求两缝 $P_1$ 和 $P_2$ 的互强度 $I(P_1, P_2)$ 及复相干因子 $\mu(P_1, P_2)$ ；

(2) 求观察屏上中点附近的可见度。当要求可见度大于0.9时，求光源的最大宽度，把本题结果和4—8(2)的结果加以比较。

**7—29** 在图48中， $S$ 是扩展的准单色初级光源，屏 $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$ 、 $\Sigma_3$ 彼此平行， $\Sigma_1$ 上开两狭缝 $P_1$ 、 $P_2$ ， $\Sigma_2$ 上也开两狭缝 $Q_1$ 、 $Q_2$ ， $P_1$ 、 $P_2$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$ 互相平行， $L_1 \gg d_1$ ， $L_2 \gg d_2$ 。固定 $L_2$ 、 $d_1$ 和 $d_2$ ，改变 $L_1$ ，问当 $L_1$ 取何值时， $\Sigma_3$ 上的干涉条纹消失？

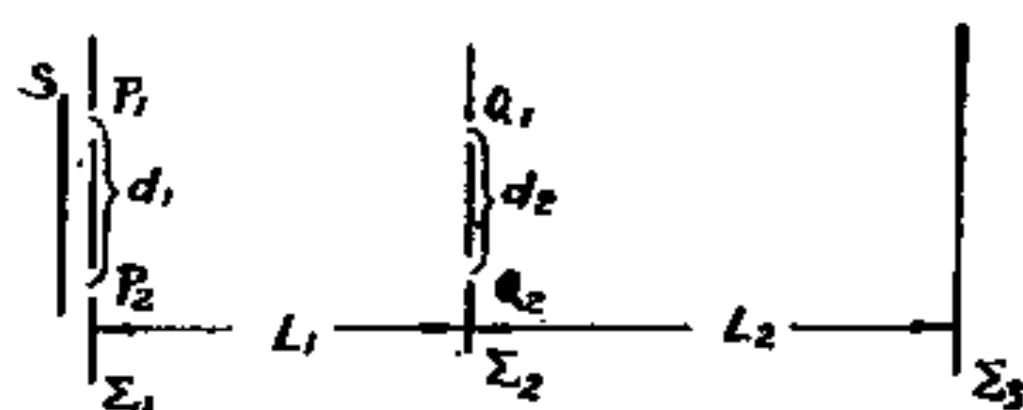


图 48

**7—30** 如图49所示，在7—29题的装置中，在屏 $\Sigma_2$ 的前后各加一透镜，且透镜 $L_1$ 、 $L_2$ 均靠近 $\Sigma_2$ ， $f_1$ 、 $f_2$ 分别是 $L_1$ 和

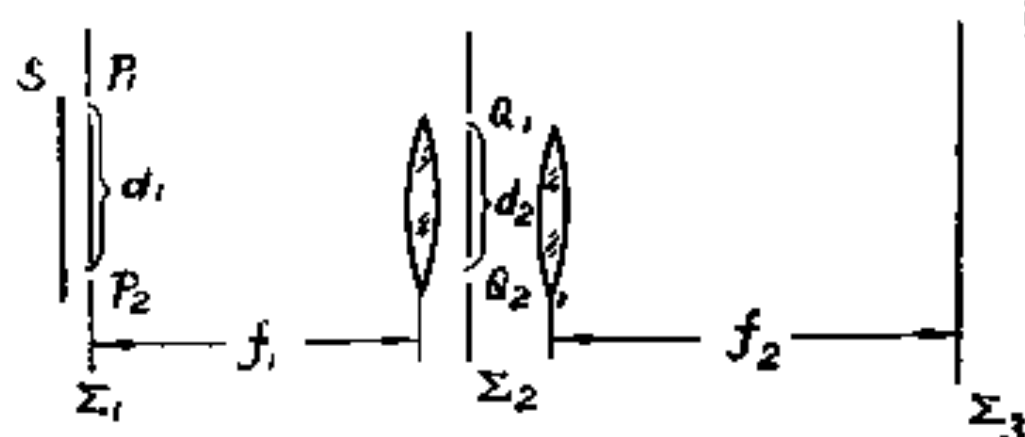


图 49

$L_2$  的焦距。固定  $d_2$ 、 $f_1$ 、 $f_2$ ，改变  $d_1$ ，问当  $d_1$  取何值时， $\Sigma_3$  上的干涉条纹消失？

7—31 在图50所示的光学系统中，光源  $S$  是钨灯，其直径为  $2.54 \times 10^{-3} \text{ cm}$ ，灯前放一透射波长  $\lambda = 550 \text{ nm}$  的滤色片，要求通过物面的光束几乎是完全相干的，即光束直径应小于相干圆直径。已知  $L_1$  的焦距  $f_1 = 20 \text{ cm}$ ，直径  $D_1 = 3 \text{ cm}$ ，试问所给的光源适用吗？

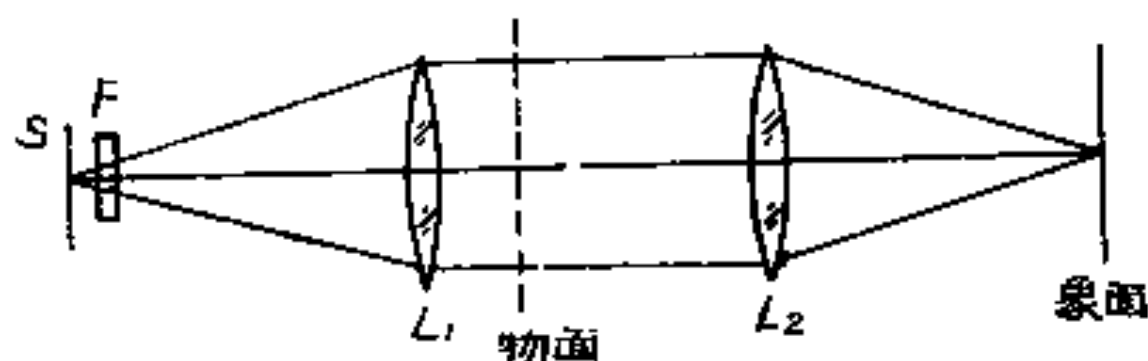


图 50

7—32 求下列两种情况的复相干因子  $\mu_{12}$ 。

- (1) 两个角距离为  $\Delta\theta$  的等强度准单色点光源；
- (2) 角宽度为  $\Delta\theta$  的准单色均匀带状光源。

7—33 在望远镜物镜前加一双孔光阑用以观测双星，某双星中两星体的光强相等，逐渐加大双孔间距，设第一次使可见度降为零时的双孔间距为  $d_1$ 。问当双孔间距  $d = \frac{d_1}{10}$  时，

可见度是多少?

7—34Δ (1)  $\iint_{\sigma} \exp[-ik(p\xi + q\eta)]d\xi d\eta / \iint_{\sigma} d\xi d\eta$  的积分区域  $\sigma$  是半径为  $a$  的圆; (2)  $\iint_{\Omega} \exp\{ik[p(x_1 - x_2) + q(y_1 - y_2)]\}dpdq / \iint_{\Omega} dpdq$  的积分区域  $\Omega$  是与  $\sqrt{p^2 + q^2} \leq \sin\theta_c$  相对应的立体角, 证明 (1) 和 (2) 的结果都可写成  $\frac{2J_1(u)}{u}$ , 并求出相应于 (1)、(2) 两种情况各自的  $u$ 。

7—35 把衍射计中的圆孔  $\sigma_1$  换成边长为  $b$  的正方形小孔, 并使其一组对边和掩模上两孔  $P_1$ 、 $P_2$  的连线平行,  $P_1$  和  $P_2$  仍保持为圆孔。求

(1) 观察屏  $J$  上光强分布的表示式;

(3) 光源沿哪个方向扩展会影响  $J$  上干涉条纹的可见度? 光源线度增加到多大时, 可见度降为零?

7—36 扩展光源可用归一化的角分布函数  $i(\theta) = \frac{I(\theta)}{I}$  表征, 式中,  $I(\theta)$  是在  $\theta$  角处单位角间隔光源面所发出的光强,  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I(\theta)d\theta$  是光源发出的总光强, 显然

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i(\theta)d\theta \equiv 1, \text{ 光源的张角可定义为 } \Delta\theta \equiv \frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i^2(\theta)d\theta}。$$

今有一均匀发光的带状光源, 其两个带边在观察者处的张角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 证明用以上定义求出的  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ 。

7—37 定义扩展光源的横向相干宽度  $l_t = 2 \int_0^\infty |\hat{i}(\frac{\nu l}{c})|^2 dl$ ,

式中,  $\hat{i}$  表示角分布函数的傅里叶变换,  $l$  是空间两点的间距, 相当于杨氏干涉实验中双缝的间距  $d$ , 根据定义和 7—36 题的关系, 证明  $l_t = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$ 。

7—38 根据量子力学的测不准关系证明

(1) 光子动量的大小由  $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$  给出, 令一束近于准直的光子沿  $z$  轴传播, 如果频宽是  $\Delta\nu$ , 则位置的最小不准确量  $\Delta z = l_t = c\tau_c$ , 这里,  $l_t$  是相干长度,  $\tau_c$  是相干时间;

(2) 假设光束偏离准直是由光源具有一定角宽度  $\Delta\theta_x$  引起的, 则横向位置的最小不准确量  $\Delta x = l_t = \frac{\lambda}{\Delta\theta_x}$ , 式中  $l_t$  是横向相干宽度。

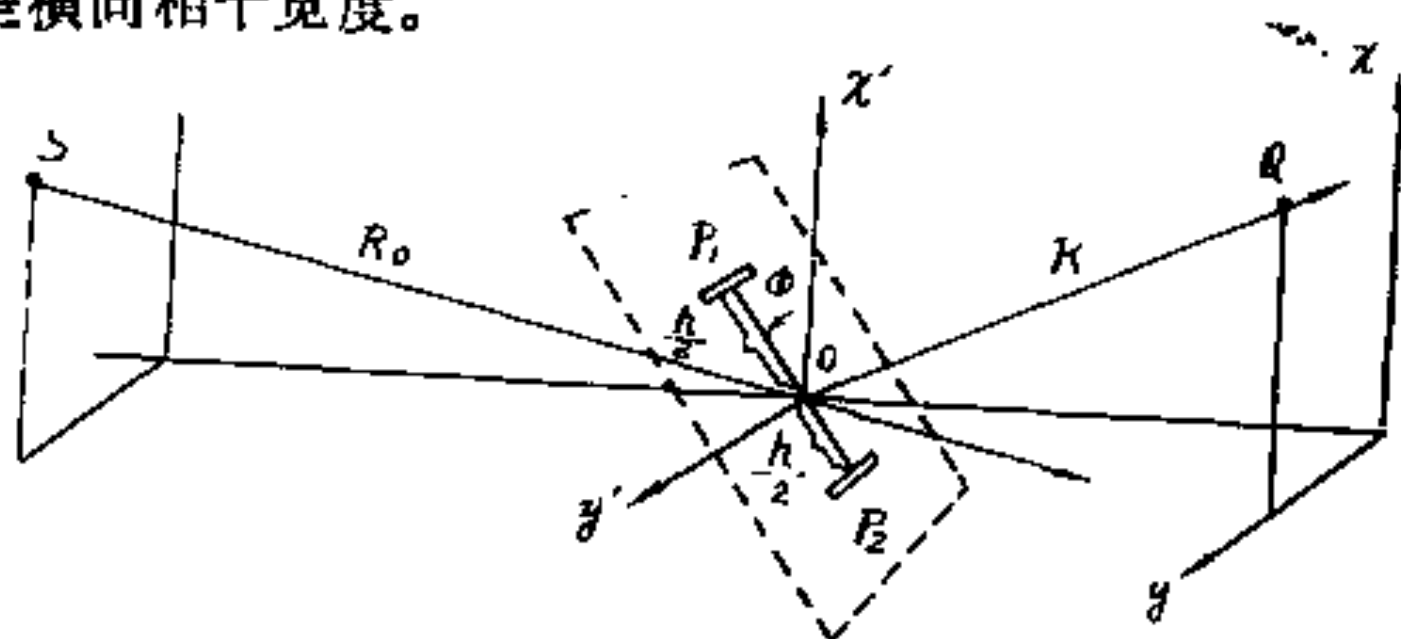


图 51

7—39 如图51所示,  $S$  是光源上的一点,  $Q$  是观察点,  $O$  是双缝  $P_1$ 、 $P_2$  中心连线的中点,  $SO$  的方向余弦是  $(\alpha, \beta,$



$\gamma$ ),  $OQ$  的方向余弦是  $(\alpha', \beta', \gamma')$ 。以  $P_1P_2$  为轴将双缝所在平面向图面外旋转  $\phi$  角,  $R_0$  和  $R$  都比双缝间距  $h$  大得多。

$$(1) \text{ 证明 } \tau = \frac{P_2Q - P_1Q}{c} = \frac{h}{c} (\alpha' \cos\phi + \beta' \sin\phi)。$$

$$(2) \text{ 证明 } \tau_s = \frac{SP_2 - SP_1}{c} = \frac{h}{c} (\alpha \cos\phi + \beta \sin\phi)。$$

(3) 如果光源是平均频率为  $\bar{\nu}$  的准单色光源, 其归一化角分布函数为  $i(\alpha, \beta)$ , 证明  $oxy$  平面上的光强和  $1 + \gamma_{12}^{(r)}$  ( $\tau, h, \phi$ ) 成正比, 这里  $\gamma_{12}^{(r)}$  是复相干度  $\gamma_{12}(\tau, h, \phi) = \gamma(\tau)\gamma_{12}(0, h, \phi)$  的实部,  $\gamma(\tau)$  是与自相干函数相对应的复相干度, 导出

$$\gamma_{12}(0, h, \phi) = \hat{i}\left(\frac{h}{\lambda}\cos\phi, \frac{h}{\lambda}\sin\phi\right)$$

式中,  $\hat{i}(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} i(\alpha, \beta) e^{-i2\pi(\alpha u + \beta v)} d\alpha d\beta$  是角分布函数  $i(\alpha, \beta)$  的二维傅里叶变换。

可以假定  $i(\alpha, \beta)$  是以  $\alpha = 0, \beta = 0$  为中心的角分布函数。

(4) 干涉图样是  $h$  和  $\phi$  的函数, 说明如何根据对干涉图样的分析确定实函数  $i(\alpha, \beta)$ 。

7—40 $\Delta$  在杨氏双缝干涉实验中, 用非单色扩展初级光源照明双缝, 光源的归一化频谱分布函数为  $P(\nu)$ , 角分布函数为  $i(\theta)$ 。证明两缝  $P_1$  和  $P_2$  的复相干度为

$$\gamma_{12}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\theta_0) \gamma\left[\frac{d(\theta - \theta_0)}{c}\right] d\theta_0$$

式中,  $\gamma\left[\frac{d(\theta-\theta_0)}{c}\right] = \int_0 P(v) e^{-i2\pi v\left[\frac{d(\theta-\theta_0)}{c}\right]} dv$  是与自

相干函数对应的复相干度,  $\theta_0$  相当于图45中的 $\theta$ ,  $\theta$  相当于图45中的 $\theta'$ ,  $d$  是两缝间距。

**7—41** 为什么部分相干光的衍射问题不能用基尔霍夫衍射理论处理? 应怎样处理部分相干光的衍射问题?

**7—42** 在研究单缝夫琅和费衍射时, 如果所用的光源不是理想单色光源, 而是频宽为 $\Delta\nu$ 的准单色光源, 问缝宽应满足怎样的条件, 基尔霍夫衍射理论导出的结果才适用?

**7—43** (1) 当把一单色点光源放在一会聚透镜物空间焦点上, 观察屏与透镜象空间焦面重合, 则观察到夫琅和费圆孔衍射图样。现在把光源换为圆盘状准单色初级光源, 圆盘中心在光轴上, 盘面垂直于光轴, 要想仍获得夫琅和费圆孔衍射图样, 对光源大小、频宽以及透镜直径应有什么限制?

(2) 在衍射计实验中, 光源不是单色点光源, 但仍引用夫琅和费圆孔衍射的结果, 即取

$$I^{(1)}(Q) = I^{(2)}(Q) = \left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2, \quad u = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\phi$$

根据(1)的结果, 试说明为什么可以如此处理?

**7—44** 在处理实际光学仪器中的衍射问题时, 一般都依据基尔霍夫衍射理论, 根据7—42和7—43题的分析, 试说明这种方法只是近似的, 从理论上看不够严格。

**7—45Δ** 一望远镜物镜的直径是5m, 焦距17m, 目镜放大率为10倍。用它观察某天体, 天体的角直径 $2''$ , 求象面上的复相干因子。设天体发出波长 $\bar{\lambda} = 5500 \text{ \AA}$ 的准单色光。

**7—46** 试分别讨论用瑞利判据和史派劳判据在准单色部分

相干光照明条件下圆孔衍射的分辨本领。

7—47△ 用瑞利判据和史派劳判据分别求一母线与缝平行的柱透镜对两一维缝在准单色部分相干光照明条件下的分辨本领。

7—48 显微镜的分辨极限可表示为

$$(P_1 P_2)_{\text{极限}} = L(m) \frac{\overline{\lambda}_0}{n_0 \sin \theta_0}$$

式中,  $(P_1 P_2)_{\text{极限}}$  是刚可被分辨的两点  $P_1$  和  $P_2$  的距离,  $\overline{\lambda}_0$  是照明用的准单色光在真空中的平均波长,  $n_0 \sin \theta_0$  是显微镜物镜物空间的数值孔径,  $m = \frac{n'_c \sin \theta'_c}{n_0 \sin \theta_0}$ , 这里  $n'_c \sin \theta'_c$  是照明用聚光镜象空间的数值孔径,  $L(m)$  表示以  $m$  为变量的函数。

试用瑞利判据求  $L(m)$  所应满足的关系式 (不必解出  $L(m)$  的显式)。

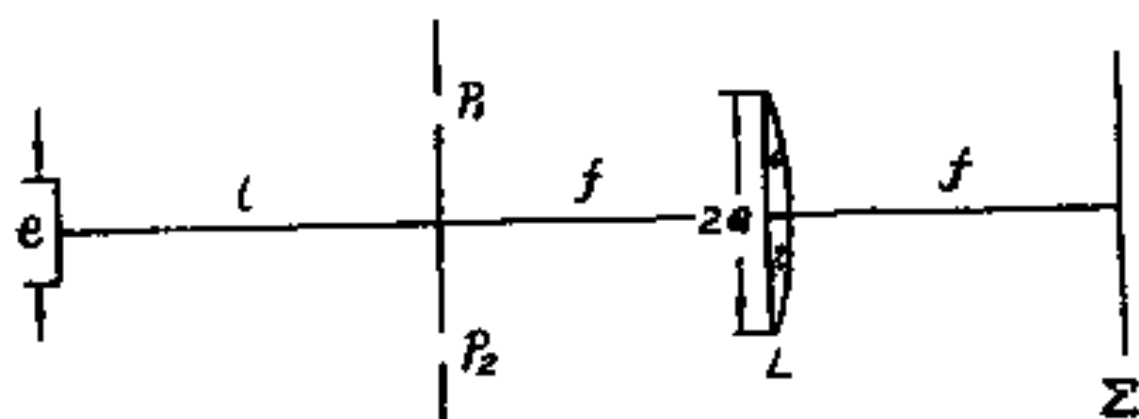


图 52

7—49 在图52中  $\delta$  是与图面垂直的、均匀的、准单色带状初级光源, 其宽度  $e = 5\text{mm}$ , 平均波长  $\overline{\lambda} = 5000\text{\AA}$ ,  $l = 10\text{m}$ 。  $P_1$ 、 $P_2$  是与光源平行的无限窄狭缝,  $P_1$ 、 $P_2$  所在平面与透镜  $L$  的前焦面重合。  $L$  是柱面透镜, 其焦距  $f = 40\text{cm}$ , 宽度

$2a = 2\text{cm}$ , 在  $L$  的后焦面上放置观察屏  $\Sigma$ , 求刚可被分辨的双缝间距  $d$ 。

7—50 函数  $H_0^-(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0) = \left( \frac{2H_1(mv)}{mv} \right) I_0^-$

式中  $v = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(x'_0 - x_0)^2 + (y'_0 - y_0)^2} n_0 \sin \theta_0$ 。利用

夫琅和费圆孔衍射的类似关系式, 证明  $H_0^-(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$  的傅里叶变换是

$$\mathcal{H}_0^-(f, g) = \left( \frac{\overline{\lambda_0^2}}{\pi m^2 n_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) I_0^-,$$

$$\text{当 } f^2 + g^2 < \frac{m^2 n_0^2 \sin^2 \theta_0}{\overline{\lambda_0^2}} \text{ 时,}$$

$$\mathcal{H}_0^-(f, g) = 0, \text{ 当 } f^2 + g^2 > \frac{m^2 n_0^2 \sin^2 \theta_0}{\overline{\lambda_0^2}} \text{ 时。}$$

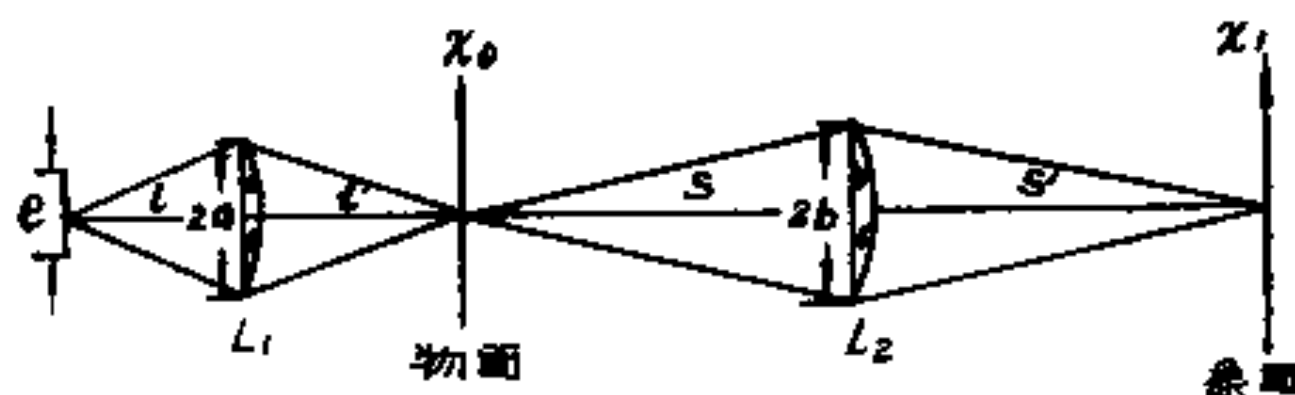


图 53

7—51 一宽为  $e$  的带状光源, 通过一同轴的柱面聚光透镜  $L_1$  照明物体, 物体经一同轴的薄柱透镜  $L_2$  成象, 两柱透镜  $L_1$  和  $L_2$  的母线均与光源平行 (即垂直图面), 如图53所示。

(1) 求物面和象面互强度  $I_0(x_0, x'_0)$  和  $I_1(x_1, x'_1)$

的表示式。

(2) 如果在物面放一余弦光栅, 其透射函数  $F(x_0) = \cos f_0 x_0$ , 求透射交叉系数  $\mathcal{F}$ , 象面强度分布  $I_1(x_1)$  和对频谱的限制。

(提示: 矩形函数  $\text{rect} \frac{x}{a} = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq a \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |x| > a \text{ 时} \end{cases}$  的傅里

叶变换为  $2a \text{sinc}(2\pi a f_x) = \frac{\sin(2\pi a f_x)}{\pi f_x}$ , 反之亦然, 可表示为  $\text{rect} \frac{x}{a} \longleftrightarrow 2a \text{sinc}(2\pi a f_x)$ 。

7—52Δ 用与推导部分相干准单色照明频率响应函数相同的方法, 分别导出完全相干和完全非相干两种情况的频率响应函数。

7—53 证明在非均匀媒质中, 互相干的传播公式为

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_A \int_A dP_1 dP_2 \int_0^\infty \left[ \int_S U(S, P_1, \nu) U^*(S, P_2, \nu) dS \right] K(P_1, Q_1, \nu) K^*(P_2, Q_2, \nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu$$

当光的频宽不太大时, 可用对应于平均频率  $\bar{\nu}$  的  $\overline{K(P, Q)}$  代替  $K(P, Q, \nu)$ , 则上式可简化为

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_A \int_A \overline{K(P_1, Q_1)} \overline{K^*(P_2, Q_2)} \times \Gamma(P_1, P_2, \tau) dP_1 dP_2。$$

#### 4. 准单色光的偏振特性

7—54  $E_x$  和  $E_y$  的频谱分别是以  $\nu$  为中心、宽度为  $a$  和  $b$  的矩

形函数，且  $a$  和  $b$  都比波长  $\lambda$  大得多。

(1) 若把  $\vec{E}$  写成

$$E_x = a_1(t)e^{i[\phi_1(t) - 2\pi \bar{\nu} t]}, \quad E_y = a_2(t)e^{i[\phi_2(t) - 2\pi \bar{\nu} t]}$$

试求  $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $\phi_1(t)$  和  $\phi_2(t)$ ；

(2) 求相干矩阵。

(在本题中设  $E_x$  和  $E_y$  的平均频率相同)。

7—55 由复相干度的定义  $\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}J_{yy}}}$  和 偏振度表示

$$\text{式 } P = \sqrt{1 - \frac{4|J|^2}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}, \text{ 证明}$$

$$(1) |\mu_{xy}| \leq 1,$$

$$(2) |\mu_{xy}| \leq P.$$

7—56 详述测定偏振度  $P$  的实验方法。

7—57△ 证明相干矩阵的迹  $T$ 、 $J$  及其行列式  $|J|$  是 旋转不变量，这个性质的物理意义是什么？

7—58 各种偏振器件可以用其特性矩阵表征（见 1—14 题），试证明当一束相干矩阵为  $J$  的光通过特性矩阵为  $G$  的偏振器件后，其相干矩阵变为  $J' = GJG^+$

式中  $G^+$  是  $G$  的共轭矩阵。

7—59 利用相干矩阵证明

(1) 当光通过补偿器时，其强度和偏振度不变；

(2) 当光通过吸收片时，若吸收片各向同性，则强度减弱，但偏振度不变。

7—60 当 (1) 一束振动方向与  $x$  轴成  $\alpha$  角的线偏振光，

(2) 一束右旋圆偏振光； (3) 一束自然光，先通过一片快

轴与 $x$ 轴成 $\beta$ 角的四分之一波片，再通过一个透光方向与 $x$ 轴成 $\gamma$ 角的检偏器，试分别求出出射光的相干矩阵。

7—61 经尼科耳棱镜观察部分偏振光，当尼科耳棱镜由对应于极大强度的位置转过 $60^\circ$ 时，光强减为一半，求入射光束的偏振度。

7—62 (1) 一束光强为 $I_0$ 的自然光射在空气( $n$ 取为1)和玻璃( $n=1.5$ )的分界面上，入射角为 $45^\circ$ ，求反射光的相干矩阵、光强和偏振度。

(2) 令(1)中的反射光再通过一个快轴与入射面成 $45^\circ$ 角的四分之一波片，然后通过一个检偏器，转动检偏器时出射光强变不变？为什么？

7—63 $\Delta$  光强为 $I_0$ 的自然光通过一块二向色性晶片，然后通过透光轴与晶片 $x$ 轴成 $30^\circ$ 角的起偏器，再通过快轴与 $x$ 轴成 $45^\circ$ 角的 $\frac{\lambda}{4}$ 波片，已知二向色晶片的特性矩阵

$$G_1 = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\alpha_x}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha_y}{2}} \end{bmatrix}, \text{ 求}$$

(1) 通过二向色晶片后光的偏振度和复相干度；

(2) 通过起偏器后的光强；

(3) 通过 $\lambda/4$ 波片后的光是何种偏振光？

—64 一偏振片对沿 $x$ 方向振动的线偏振光之光强透过率为81%，而对沿 $y$ 方向振动的线偏振光之光强透过率为1%。用这种偏振片为起偏器和检偏器，二者透光方向相交成 $60^\circ$ 角，中间夹一 $\frac{\lambda}{4}$ 波片，波片快轴与起偏器、检偏器的透光

方向均成  $30^\circ$  角。当入射光是自然光时，求从检偏器射出的光的相干矩阵、光强和偏振度。

7—65 一束光先通过一补偿器，再通过一检偏器，补偿器使  $y$  方向振动的相位比  $x$  方向推迟  $\varepsilon$ ，检偏器透光轴与  $x$  轴成  $\theta$  角，以  $I_0$  表示入射光强， $I(\theta, \varepsilon)$  表示出射光强。由实验测得

$$I(0, 0) = \frac{I_0}{2}, \quad I(90^\circ, 0) = \frac{I_0}{2},$$

$$I(45^\circ, 0) = \frac{5}{8}I_0, \quad I(135^\circ, 0) = \frac{3}{8}I_0,$$

$$I(45^\circ, \frac{\pi}{2}) = \frac{4 + \sqrt{3}}{8}I_0, \quad I(135^\circ, \frac{\pi}{2}) = \frac{4 - \sqrt{3}}{8}I_0,$$

求 (1) 入射光的斯托克斯参量  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  和  $S_4$ ；

(2) 入射光的偏振度；

(3) 入射光中偏振部分的椭圆短轴与长轴之比，以及偏振椭圆长轴与  $x$  轴的夹角。



## 第八章 电磁势 电磁极化 金属光学

### 1. 电磁势 电磁极化

8—1 (1) 线偏振平面波  $\vec{E} = E_0 \vec{i} e^{i(kz - \omega t)}$  照射到一个绝缘电介质球上 (式中  $\vec{i}$  表示  $x$  轴方向基矢), 引起介质球的均匀极化。当平面波的波长远大于介质球半径时, 求极化强度  $\vec{P}$ 。

(2) 求在远离介质球处, 由于介质球的极化而形成的赫兹矢量  $\vec{H}_0$ 。

8—2 (1) 利用8—1题的结果, 求远离介质球处的总电磁场,

(2) 作一个半径很大且与介质球同心的球面, 求每秒通过此球面的辐射能 (即总辐射功率)。

8—3 一根细导线弯成半径为  $a$  的圆, 其中通以随时间按正弦规律变化的电流, 求在远离导线圈处的 (1) 赫兹矢量  $\vec{H}_m$ ; (2)  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$ ; (3) 总辐射功率。

8—4 $\Delta$  近似可认为空气是由 75% (重量百分比) 的  $N_2$  和 25% 的  $O_2$  组成, 已知在常温常压下空气的折射率  $n = 1.0002929$ , 氧的原子折射度  $A = 2.01$ , 求氮的原子折射度。

8—5 对于离子性晶体（如  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CaF}_2$  等），我们必须考虑离子的红外共振振荡。试证明这时代替  $n^2 - 1 \approx$

$\frac{4\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$  将有

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{4\pi P N e^2}{M(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

式中， $N$  是单位体积内的色散电子数（在理想情况每个分子中的色散电子数等于其价数）， $m$  是电子质量， $M$  是两个离子的约化质量， $P$  是离子价（对  $\text{NaCl}$   $P=1$ ，对  $\text{CaF}_2$   $P=2$ ）。

并证明上式还可写成  $n^2 = n_\infty^2 + \frac{A_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{A_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}$

式中， $\lambda_1 = \frac{2\pi c}{\omega_1}$ ,  $\lambda_2 = \frac{2\pi c}{\omega_2}$ ,

$$A_1 = \frac{N e^2}{\pi c^2 m} \lambda_1^4, \quad A_2 = \frac{P N e^2}{\pi c^2 M} \lambda_2^4.$$

8—6 对  $\text{CaF}_2$ ，折射率在可见光谱区的变化可以写成如下形式

$$n^2 = 6.09 + \frac{6.12 \times 10^{-15}}{\lambda^2 - 8.88 \times 10^{-15}} + \frac{5.10 \times 10^{-9}}{\lambda^2 - 1.26 \times 10^{-9}}$$

式中  $\lambda$  以米计。

(1) 画出在可见光区  $n^2$  随  $\lambda$  变化的曲线，

(2) 根据  $A_1$  和  $A_2$  的值证明  $\frac{m}{M} \approx 2.07 \times 10^{-5}$ ，并把

这一数值与准确值相比较。

8—7 (1) 由自由电子组成的气体（电子等离子体）中不存在恢复力，因而必须令  $\omega_0 = 0$ ，这样折射率表示式变为

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

式中, 
$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}} \approx 56.414 \sqrt{N} \text{ 1/s}$$

称为等离子体频率。在电离层中,  $N$  的极大值  $\approx 10^{10} \sim 10^{12}$  个电子/米<sup>3</sup>, 试计算等离子体频率。注意高频时  $n^2 \approx 1$ , 因此高频波 (如电视传输使用的电波) 不受电离层反射, 而对于低频波, 折射率为虚数 (象是一个导体), 因此波束要受到反射。这一事实被用在远距离通讯中。

(2) 假设当距地面高度  $h \approx 200\text{km}$  时,  $N = 10^{12}$  个电子/米<sup>3</sup> 在  $h \approx 300\text{km}$  时  $N$  增加到  $2 \times 10^{12}$  个电子/米<sup>3</sup>。当  $h \geq 300\text{km}$  时,  $N$  减小。设  $N$  的变化是抛物线型的, 试画出相应的折射率变化曲线。

8—8 当光的频率接近媒质的固有频率时, 要考虑阻尼项的影响, 这时应由

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\beta \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = e \vec{E}$$

出发求解。证明由这个解导出的复折射率  $\hat{n}$  满足

$$\hat{n}^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

8—9 对弱吸收媒质, 即复折射率的虚部  $n\kappa$  比实部  $n$  小得多时, 证明  $n$  和  $\kappa$  的表示式为

$$n = \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \right]^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{\beta \omega_p^2 \omega}{2[\omega^4 + (\beta^2 - 2\omega_0^2 - \omega_p^2)\omega^2 + \omega_0^2(\omega_0^2 + \omega_p^2)]}$$

式中  $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$  是等离子体频率。根据  $n$  的表示式，绘制色散曲线（即  $n \sim \lambda$  曲线）草图。

8—10Δ 根据8—9的结果，求  $n$  的极值。

8—11 由8—8得到的  $\hat{n}^2$  表示式证明

$$2n^2\kappa = \frac{\omega_p^2}{2\pi c} \frac{\beta\lambda_0^4\lambda^3}{(2\pi c)^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + \beta^2\lambda_0^4\lambda^2}$$

再根据上式证明  $2n^2\kappa$  的极大值（即吸收峰高度）反比于  $\beta$ ，而吸收峰的波长半宽度则正比于  $\beta$ 。

8—12 在低频区，水的折射率从在室温下的约 90 减小到接近沸点时的约 7.5。另一方面，在光学区，折射率约为 1.33，并且在上述温度范围折射率的变化很小，约 1%。试定性解释这一现象。

8—13 已知冕牌玻璃对  $F(4861 \text{ \AA})$ 、 $D(5893 \text{ \AA})$ 、 $C(6563 \text{ \AA})$  三条谱线的折射率分别为  $n_F = 1.52195$ ， $n_D = 1.51630$ ，

$n_C = 1.51389$ ，求科希公式 
$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

中的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为三个常数。

8—14 在一折射率为  $n$  的媒质中稀疏地均匀分布着某种带电粒子， $N$  表示每单位体积中的带电粒子数，每个粒子的质量是  $m$ ，电荷是  $e$ ，共振频率是  $\omega_0$ ，弛豫时间是  $\tau$ ，且  $\omega_0\tau \gg 1$ 。媒质本身在  $\omega_0$  附近没有吸收，因此当入射光频率  $\omega$  靠近  $\omega_0$  时，媒质的折射率  $n$  可视为实常数。证明当  $\omega$  靠近  $\omega_0$  时，吸收系数  $\chi$  近似为

$$\chi = \frac{2\pi^2 N e^2}{mc} \frac{(n+2)^2}{9n} L \left[ (\omega - \omega_0), \frac{1}{2\tau} \right]$$

式中  $L(x, \gamma) = \frac{\gamma/\pi}{x^2 + \gamma^2}$  是洛伦兹函数。

8—15 (1) 证明洛伦兹函数  $L(x, \gamma)$  的极大值  $\frac{1}{\pi\gamma}$  出现在  $x=0$  处, 半宽度是  $\gamma$ , 且  $\int_{-\infty}^{\infty} L(x, \gamma) dx = 1$ 。

(2) 用波数  $\frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c}$  为变量, 根据 (1) 的结果, 证明8—14题求得的吸收系数  $x$  满足

$$\int x \left( -\frac{1}{\lambda} \right) d \left( -\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{(n+2)^2}{9n} \frac{\pi}{\lambda_p^2}$$

式中,  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$  是和等离子体频率对应的真空中的波长, 积分范围是在共振峰附近吸收系数  $x$  不为零的整个区间。

8—16Δ (1) 以  $v^{(g)}$  表示群速, 证明  $\frac{c}{v^{(g)}} \approx n + \omega \frac{dn}{d\omega}$ ,

(2) 由  $v^{(g)} < c$ , 证明  $(n^2 - 1) + \omega^2 \frac{d(n^2 - 1)}{d\omega^2} > 0$ ,

(3) 当  $n^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}$  时, 证明 (2) 的结果仍成立。

8—17 利用色散方程  $n^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}$ ,

(1) 证明高频电磁波 (比如X射线) 的群速度由下式给出

$$v^{(g)} \approx \frac{c}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

(2) 相速度  $v^{(p)}$  是多少? 证明  $v^{(p)} \cdot v^{(g)} \approx 1$ 。

(提示: 因 $f_k$ 是权重因子,  $\sum_k f_k = 1$ )。

8—18 试说明厄瓦耳特-欧西恩消光定理是在哪些前提下, 通过怎样的论证(无须数学推导, 只要求讲清论证要点)得到的? 由这个定理可以得到哪些重要结果?

## 2. 金属光学

8—19 $\Delta$  设海水为非磁性电介质, 其 $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 80$  ( $\epsilon_0$ 是真空介电常数)  $\sigma = 4.3\text{s/m}$  ( $s$ 表示电导单位西门子),

(1) 计算穿透深度为10cm的电磁波频率,

(2) 证明当频率小于 $10^9\text{Hz}$ 时, 海水可视为良导体。

8—20 证明当电磁波频率 $\nu \leq 10^9\text{Hz}$ 时, 硅将起良导体作用。设硅的 $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 12$ ,  $\sigma = 2\text{s/m}$ 。

8—21 为什么说在金属中的折射波是非均匀波? 全反射时的倏逝波也是非均匀波, 它和金属中的折射波有何异同?

8—22 证明如果引入有效折射率 $n_{\text{eff}} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta'_i}$ , 式中 $\theta'_i$ 是

真正的折射角, 当把金属的复折射率写成 $\hat{n} = n(1 + i\kappa)$ 时,  $n_{\text{eff}}$ 满足

$$(n_{\text{eff}}^2 - n^2 + n^2\kappa^2)(n_{\text{eff}}^2 - \sin^2\theta_i) = n^4\kappa^2$$

式中,  $\theta_i$ 是斜入射的入射角。

8—23 $\Delta$  已知铝的 $n \approx 1.44$ ,  $n\kappa = 5.23$ 。一束平面单色波以 $45^\circ$ 入射角从空气射入铝内, 求折射角。

8—24 由菲涅耳公式导出当  $TE$  波和  $TM$  波在金属表面反射时，反射系数的表示式和反射相变的表示式。

8—25 所谓理想导体就是当  $\sigma \rightarrow \infty$  时的导体。一束右旋圆偏振光在  $45^\circ$  角下入射到理想导体上，试证明反射光束为左旋圆偏振光。

8—26 下式表示的一束线偏振光在  $45^\circ$  角下入射到理想导体上

$$E_x = \frac{1}{2} E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$E_z = \frac{1}{2} E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

证明反射光束也是线偏振的，但其电矢量  $\vec{E}$  转动了  $90^\circ$  ( $x$  轴沿界面法线方向， $y$  轴垂直入射面)。

8—27 证明在正入射时，金属反射所产生的相变等于

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2n\kappa}{n^2 + n^2\kappa^2 - 1}\right)。$$

8—28 铝在  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  时， $n = 1.5$ ， $n\kappa = 3.2$ 。求光正入射到铝表面时的反射率和反射相变。

8—29 $\Delta$  证明当光以入射角  $\theta_i$  斜入射到金属表面时，金属的复折射率  $\hat{n}$  和入射角  $\theta_i$  满足下式

$$\frac{\sqrt{\hat{n}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\sin \theta_i \operatorname{tg} \theta_i} = - \frac{\cos 2\psi + i \sin 2\psi \sin \Delta}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta}$$

式中,  $\phi = \operatorname{arctg} P = \operatorname{arctg} \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}}$ ,  $\Delta = \phi_{\parallel} - \phi_{\perp}$ , 而  $\phi$  及  $\rho$  由  $TE$  波的反射系数  $r_{\perp}$  和  $TM$  波的反射系数  $r_{\parallel}$  据以下关系确定

$$r_{\perp} = \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \rho_{\perp} e^{i\phi_{\perp}}, \quad r_{\parallel} = \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \rho_{\parallel} e^{i\phi_{\parallel}}.$$

**8—30** 金属的光学常数  $n$  和  $\kappa$  是通过什么途径测量的? 试详述测量方法。

**8—31** 由实验测得铜对  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$  的  $n = 0.62$ ,  $\kappa = 4.15$ 。求铜对这种波长的  $\epsilon$  和  $\sigma$  (取  $\mu = 1$ )。

**8—32** 已知银对  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$  的主入射角  $\bar{\theta}_i = 74.38^\circ$ 。使发自钠光灯且经起偏器后的单色线偏振光以主入射角  $\bar{\theta}_i$  射到银的表面, 经测定入射光及反射光的振动方位角分别为  $45^\circ$  及  $46.66^\circ$ 。根据以上数据求银对钠黄光的  $\epsilon$  和  $\sigma$  (取  $\mu = 1$ )。

**8—33Δ** 由电子论观点, 当电磁波的波长不是很大时, 电导率  $\sigma$  应为复量。对  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  的光, 求钠的复电导率。应如何理解电导率为复量的物理意义? 钠的临界波长  $\lambda_c = 2100 \text{ \AA}$ 。

**8—34** 证明在高频情况 ( $\omega \gg \beta$ ), 介电常数实质上是实数, 即

$$\epsilon \approx 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

式中  $\omega_p$  是等离子体频率。在  $X$  射线频率下, 对多数金属上式都成立。假定在这种频率下, 原子中的所有电子都可认为是自由的, 试计算铜的  $\omega_p$ 。铜的原子序数为 29, 质量数为 63, 密度为  $8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

**8—35** 当  $\lambda = 1 \text{ \AA}$  时, 求金属钠折射率的近似值。假定这时



钠的所有电子都是自由的。

8—36 设有一种假想金属，其  $\omega_p = 10^{16} \text{ Hz}$ ，弛豫时间  $\tau = 10^{-13} \text{ s}$ 。分别求出在频率  $\omega = \omega_p$ ， $\omega = 2\omega_p$  及  $\omega = \frac{\omega_p}{2}$  时，折射率的实部和虚部。

8—37△ 银的电导率静态值为  $6.8 \times 10^7 \text{ s/m}$ 。假定载流子是密度为  $1.5 \times 10^{28} \text{ 个/米}^3$  的自由电子，试求 (1) 弛豫时间  $\tau$ ；(2) 临界频率  $\omega_c$ ；(3) 当  $\lambda = 10^{-6} \text{ m}$  时，折射率的实部和虚部；(4)  $\lambda = 10^{-6} \text{ m}$  正入射时的反射率。

8—38 在 1933 年伍德 (Wood) 发现碱金属对紫外光是透明的，这证实当  $\omega > \omega_c$  时，折射率是实数。假定折射率主要是由自由电子决定的，并假定每个原子只有一个自由电子，试证明 Li、Na、K、Rb 的临界波长  $\lambda_c$  分别是  $1551 \text{ \AA}$ 、 $2093 \text{ \AA}$ 、 $2884 \text{ \AA}$ 、 $3214 \text{ \AA}$ 。这四种原子的原子量分别为 6.94、22.99、39.10、85.48，密度分别为 0.534、0.9712、0.870、 $1.532 \text{ g/cm}^3$ 。

8—39 金属钠的等离子体频率  $\omega_p = 6 \times 10^{15} \text{ Hz}$ ，弛豫时间  $\tau = 3.33 \times 10^{-14} \text{ s}$ ，试计算波长分别为 349、314 和 286 nm 的正入射光的穿透深度  $d = \frac{1}{\alpha}$ 。

8—40 证明当入射光的频率  $\omega$  小于临界频率  $\omega_c$ ，且复介电常数的虚部  $\text{Im} \hat{\epsilon} \ll 1$  时，正入射光的反射率  $R$  满足

$$1 - R \approx \frac{4n}{1 + n^2 \kappa^2}$$

式中， $n$  是折射率的实部， $\kappa$  是衰减常数。

**8—41** 某种金属当  $\frac{\omega}{\omega_p} = 0.8$  和  $0.95$  时,  $\omega_p \tau = 100$ , 根据 8—40 题的结果, 试计算正入射下的  $1 - R$ 。这里,  $\omega_p$  是等离子体频率,  $\tau$  是弛豫时间。

**8—42Δ** 在银板上镀一层透明介质膜, 膜的光学厚度是  $\frac{\lambda}{4}$ ,  $\lambda = 5893 \text{ Å}$  的单色光垂直入射, 银对此种波长的  $n = 0.2$ ,  $n\kappa = 3.44$ 。

(1) 若膜的折射率  $n = 1.5$ , 试问镀膜后银的反射率大于还是小于不镀膜情况的反射率?

(2) 若镀三硫化二锑 ( $\text{Sb}_2\text{S}_3$ ) 膜, 其  $n = 2.8$ , 情况又如何?

**8—43** 在一块平玻璃 ( $n = 1.5$ ) 板上镀一层厚  $h = \frac{\lambda}{4}$  的银膜,  $\lambda = 5893 \text{ Å}$ , 光线正入射, 求反射率、透射率、吸收率和反射光、透射光的相位改变。

**8—44Δ** 在 M-2L-M 滤波器中, 金属膜是厚为  $\frac{\lambda}{10\pi}$  的铝膜, 已知铝对  $\lambda = 5893 \text{ Å}$  的  $n = 1.44$ ,  $n\kappa = 5.23$ ; 介质膜用  $\text{MgF}_2$ , 其  $n_L = 1.38$ , 光学厚度为  $\frac{\lambda}{2}$ 。求此滤波器在极大透射率波长  $5893 \text{ Å}$  附近的峰值透射率和波长半宽度 (忽略  $\phi$  随  $\lambda$  的变化)。

**8—45** 当散射粒子的半径比光波长小得多时, 将发生瑞利散射。试用导体球衍射的米氏理论说明 (1) 散射光强与  $\lambda^4$  成正比; (2) 散射光强的角分布和偏振规律。

**8—46** 根据在瑞利散射条件下对系数 $^{\circ}B_1$ 和 $^mB_1$ 所求得的结果，计算单个散射粒子的消光截面。

## 第九章 晶体光学

### 1. 光在晶体中的传播

9—1 证明在各向异性媒质中，对应于某一给定的波矢 $\vec{s}$ 的两线偏振波之 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$ 一般不互相垂直。

9—2 说明在非涅耳公式中的主传播速度 $v_x$ 、 $v_y$ 和 $v_z$ 的物理意义，可否把它们看成是某个真实速度的三个分量？

9—3 详述晶体光学中对偶规则的内容，提出对偶规则的依据以及对偶规则的用处。

9—4 $\Delta$  在晶体中波法线方向 $\vec{s}$ 和光线方向 $\vec{t}$ 之间的夹角称为离散角，以 $\alpha$ 表之。

(1) 求离散角的一般表示式；

(2) 导出单轴晶体中的离散角公式。

9—5 (1) 证明在单轴晶体中，当 $\vec{s}$ 与光轴夹角 $\theta$ 满足 $\operatorname{tg}\theta = \frac{n_o}{n_e}$ 时，离散角 $\alpha$ 达极大值，且

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \left( \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o n_e} \right),$$

(2) 对钠黄光方解石的 $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ ，求方解石晶体中光线和波法线间的最大夹角。

**9—6△** 证明在晶体中波法线沿任一主轴方向时，光线方向与波法线方向一致，光线速度与法线速度相等；反之，当光线沿晶体的任一主轴方向时，则波法线方向与光线方向一致，光线速度和法线速度也相等。

**9—7** (1) 详述波法线椭球（又称折射率椭球）和光线椭球（又称菲涅耳椭球）二者的联系和区别，并指出它们各自的用处。

(2) 详述法线面、光线面和折射率曲面（又称波法线的反曲面）各自的定义，它们之间的联系和区别以及它们各自的用处。

**9—8** 在单轴晶体中，法线面是个怎样的双叶曲面？由法线面方程导出在单轴晶体中非常光折射率满足的基本公式

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}。$$

**9—9** (1) 在双轴晶体中，法线面是个怎样的双叶曲面？如何确定两波法线光轴的方位？在  $n_x < n_y < n_z$  的条件下，导出折射率满足的基本公式

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_z^2} + \left( \frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) \cos(\theta_1 \pm \theta_2) \right]$$

(2) 云母是双轴晶体，对于波长  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  的光，其主折射率  $n_x \approx 1.5977$ ， $n_y = 1.5936$ ， $n_z = 1.5601$ 。试计算其光轴与  $z$  轴的夹角（云母的解理面是与这两个光轴之间的平分线垂直的）。

**9—10** 对双轴晶体，当  $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$  时，导出确定光线光轴方位和光线速度的公式。

**9—11** 导出在晶体的主轴坐标系中，单轴晶体和双轴晶体

的法线面和光线面的直角坐标方程。

9—12 已知晶体的折射率椭球，并给定波矢  $\vec{s}$  和场强  $E$  的大小，试详述如何确定  $\vec{D}$ 、 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$  和坡印廷矢量  $\vec{S}$ 。

## 2. 光在晶体中的折射

9—13 光从空气射入方解石 ( $n_o \approx 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ ) 晶体，晶体的光轴在入射面内，且与晶体表面成  $30^\circ$  角。用惠更斯作图法分别画出垂直入射和以  $45^\circ$  入射角斜入射两种情况下，晶体中寻常光和非常光的传播方向，以及与之相应的波法线方向的示意图。

在以上作图法中，用的是四种曲面（波法线椭球面、光线椭球面、法线面和光线面）中的哪种曲面？画波法线方向和光线方向的依据是什么？

9—14 $\Delta$  一束自然光垂直入射到主折射率为  $n_o$  和  $n_e$  的单轴晶体上，光轴与晶体表面成  $\theta$  角，求晶体中  $o$  光和  $e$  光的折射率。

9—15 钠黄光正入射到一块石英晶片上，晶片厚度  $d = 0.025\text{mm}$ ，晶片表面与光轴成  $30^\circ$  角，晶片的  $n_o = 1.544$ ， $n_e = 1.553$ 。试求

(1) 晶片内  $e$  光的偏向角；

(2)  $o$  光和  $e$  光通过晶片后的相位差。

9—16 在9—15题中，要使  $e$  光的偏向角为最大，

(1) 晶片表面应与光轴成多大的角度？

(2)  $e$  光的最大偏向角是多少？

**9—17** 方解石的自然解理面与光轴成  $45^\circ$  角。来自钠光灯的一束黄色自然光垂直射到方解石的自然解理面上，通过晶体后形成传播方向相互平行的两束线偏振光。已知方解石对钠黄光的折射率为  $n_o = 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ ，证明

(1) 在方解石中非常光和寻常光传播方向间的夹角为  $6.3^\circ$ ；

(2) 非常光的折射率  $n' \approx 1.57$ ；

(3) 两束出射光的相位差为  $\delta = \frac{4\pi d}{\lambda} (n_o - n')$ ，式中  $d$  是方解石的厚度。

**9—18Δ** 有一块主折射率  $n_o = 1.5246$ ,  $n_e = 1.4792$  的 ADP ( $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ ) 电光晶体，厚度  $d = 1\text{mm}$ ，晶体的光轴与其表面成  $45^\circ$  角，波长  $\lambda = 5000\text{\AA}$  的自然光正入射到晶体上，求

(1) 晶体内  $o$  光和  $e$  光传播方向间的夹角；

(2)  $o$  光和  $e$  光的光线速度；

(3)  $o$  光和  $e$  光从晶体后表面射出时的相位差。

**9—19** 两个大小相同的方解石晶体  $A$ 、 $B$  前后平行排列，强度为  $I_0$  的自然光垂直于  $A$  的表面入射，相继通过  $A$  和  $B$ 。 $A$ 、 $B$  的主截面之间的夹角为  $\phi$ 。当  $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  时，求由  $B$  射出的光束数目和每束光的强度（忽略反射、吸收等损失）。

**9—20** 用费尔马原理证明当一束光由各向同性媒质射入单轴晶体时，晶体中的非常光传播方向与光轴的夹角  $\theta$  满足

$$n_1 \sin \theta_1 = \frac{n_o^2 \cos \theta \sin \phi + n_e^2 \sin \theta \cos \phi}{[n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta]^{1/2}}$$

式中， $n_1$  是各向同性媒质的折射率， $n_o$  和  $n_e$  是晶体的主折射

率,  $\theta_1$  是入射角,  $\phi$  是光轴与媒质界面法线间的夹角。设光轴在入射面内。

**9—21** 以  $(p_1, q_1, r_1)$ 、 $(p, q, r)$  和  $(l, m, n)$  分别表示 9—20 题中入射光、折射光和光轴三者的方向余弦。

试证明

$$\frac{n_e^2 p + l(n_e^2 - n_o^2) \cos \theta}{(n_e^2 \sin^2 \theta + n_o^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} = -n_1 p_1$$

$$\frac{n_o^2 q + m(n_e^2 - n_o^2) \cos \theta}{(n_e^2 \sin^2 \theta + n_o^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} = -n_1 q_1。$$

**9—22** 光线斜入射到单轴晶体表面上, 已知晶体的光轴在入射面内且平行于表面。试证明寻常光线折射角  $\theta_o$  和非常光线折射角  $\theta_e$  满足

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_o}{\operatorname{tg} \theta_e} = \frac{n_o}{n_e}。$$

**9—23△** 光从空气以入射角  $\theta_1$  射到单轴晶体表面, 晶体的光轴在入射面内, 且与界面的夹角为  $\phi$ , 晶体的主折射率为  $n_o$  和  $n_e$ , 求在晶体中非常光的传播方向。

**9—24** 方解石晶片的光轴在入射面内, 且与表面成  $60^\circ$  角, 方解石对钠黄光的折射率为  $n_o = 1.6584$ ,  $n_e = 1.4864$ , 问钠黄光在多大的角度下入射, 可使在晶片内不发生双折射。

**9—25** 用石英 ( $n_o = 1.544$ ,  $n_e = 1.553$ ) 制成顶角为  $30^\circ$  的等腰三棱镜, 其光轴平行于顶角棱边。一束光以近于最小偏向角的方向入射, 求两出射线间的夹角。

**9—26** 自然光垂直入射到方解石棱镜上, 如图 54 所示, 图中  $oo'$  表示光轴。已知方解石的  $n_o = 1.668$ ,  $n_e = 1.491$  (对波长  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  的光),



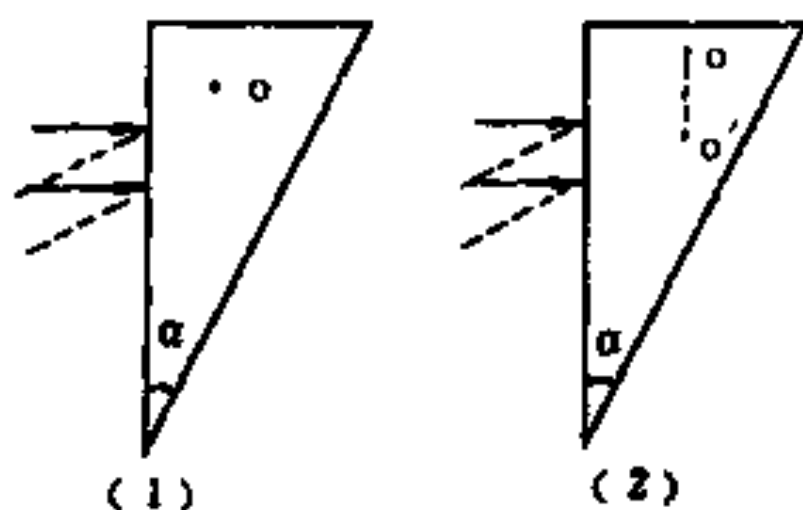


图 54

(1) 为使寻常光在棱镜的另一表面发生全反射, 求顶角 $\alpha$ 的值;

(2) 图54中的 (1)、(2) 对垂直入射情况是等效的吗? 如果光线沿图中虚线所示方向斜入射, (1) 和 (2) 图是否等效?

9—27 一束自然光垂直入射到绿松石 (又称土耳其玉) 制做的棱镜表面上, 如图55所示。已知绿松石的主折射率  $n_x = 1.520$ ,  $n_y = 1.523$ ,  $n_z = 1.530$ 。针对如下三种切割:  $AB \parallel x$ 轴,  $BC \parallel y$ 轴;  $AB \parallel y$ 轴,  $BC \parallel z$ 轴;  $AB \parallel z$ 轴,  $BC \parallel y$ 轴, 求

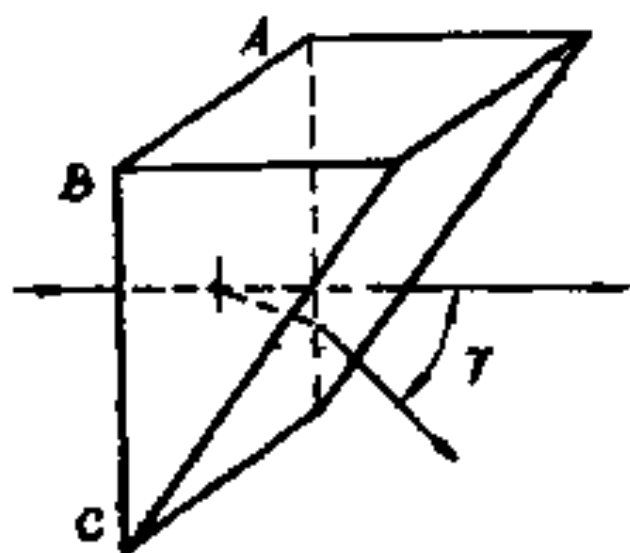


图 55

(1) 顶角 $c = 30^\circ$ 时的偏向角 $\gamma$ ;

(2) 为使双折射所形成的两束线偏振光中的一束在棱镜的另一表面上发生全反射, 顶角 $c$ 应是多少?

9—28 $\Delta$  (1) 把双轴晶体的主轴取为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴, 已知  $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$ , 设波矢  $\vec{s}$  在  $xOz$  平面中,  $\vec{s}$  与  $z$  轴夹角为  $\theta$ 。求与

$\vec{s}$  方向相对应的两个线偏振波的折射率。

(2) 晶体硫是双轴晶体, 其主折射率为  $n_x = 2.240$ ,  $n_y = 2.043$ ,  $n_z = 1.950$ 。现有一晶体制成的平行晶片, 其一个波法线光轴与晶体表面平行, 两光轴所在的平面与晶体表面垂直, 且与入射面重合, 自然光的入射角  $\theta_i = 30^\circ$ , 晶片厚  $1\text{cm}$ , 求两出射线分开的距离。

9—29 一细束自然光垂直入射到厚度  $d_1 = 5\text{mm}$  的方解石晶体上, 其光轴与表面成  $60^\circ$  角。紧靠方解石晶体放一厚度  $d_2 = 1\text{mm}$  的霏石晶片, 霏石是双轴晶体, 其两光轴的内分角线与方解石的光轴平行。方解石的主折射率  $n_o = 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ , 霏石的主折射率  $n_x = 1.531$ ,  $n_y = 1.682$ ,  $n_z = 1.686$ 。求两束出射线分开的距离。

9—30 光沿单轴晶体主截面入射到空气和晶体的分界面上, 试导出折射光和反射光振幅所满足的非涅耳公式。

9—31 光在各向异性媒质和各向同性媒质分界面上发生反射时, 什么情况下遵守反射定律? 什么情况下不遵守反射定律? 在不遵守反射定律时, 如何确定反射线的方向?

9—32 $\Delta$  用冰洲石(即方解石,  $n_o = 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ )磨成截面为等边三角形的棱镜, 一细束单色线偏振光垂直入射到棱镜的一个面上, 经底面全反射后再从棱镜的另一个面射出。已知入射光的振动方位角(即振动面与入射面的夹角)为  $45^\circ$ 。

(1) 当晶体的光轴与棱边平行时, 证明出射光为椭圆偏振光, 并求出椭圆形状与棱镜截面的高  $h$ 、 $n_o$  和  $n_e$  的关系;

(2) 当晶体光轴沿入射面的法线方向时, 出射光分成两束, 求每束出射光的振动方向和传播方向。

9—33 已知红宝石的主折射率为 1.531、1.682 和 1.686，用 0.5cm 厚的红宝石片观察内圆锥折射，问晶片应如何切割？实验装置怎样安排？所得亮环半径多大？

9—34 在两个静止的、理想的、相互正交的起偏器之间，放置另一个以角速率  $\omega$  旋转的理想起偏器，证明透射光强将被调制，调制频率为  $4\omega$ ，且透射光强为

$$I = \frac{I_1}{8} (1 - \cos 4\omega t)$$

式中， $I_1$  是从第一个起偏器出射的光强。

### 3. 晶体的光学测量

9—35 $\Delta$  由主折射率为  $n_o$  和  $n_e$  的单轴晶体制成 (1) 洛匈棱镜，如图 56 (1) 所示；(2) 渥拉斯顿棱镜，如图 56 (2) 所示。自然光垂直入射，求两条出射线间的夹角  $\gamma$ 。

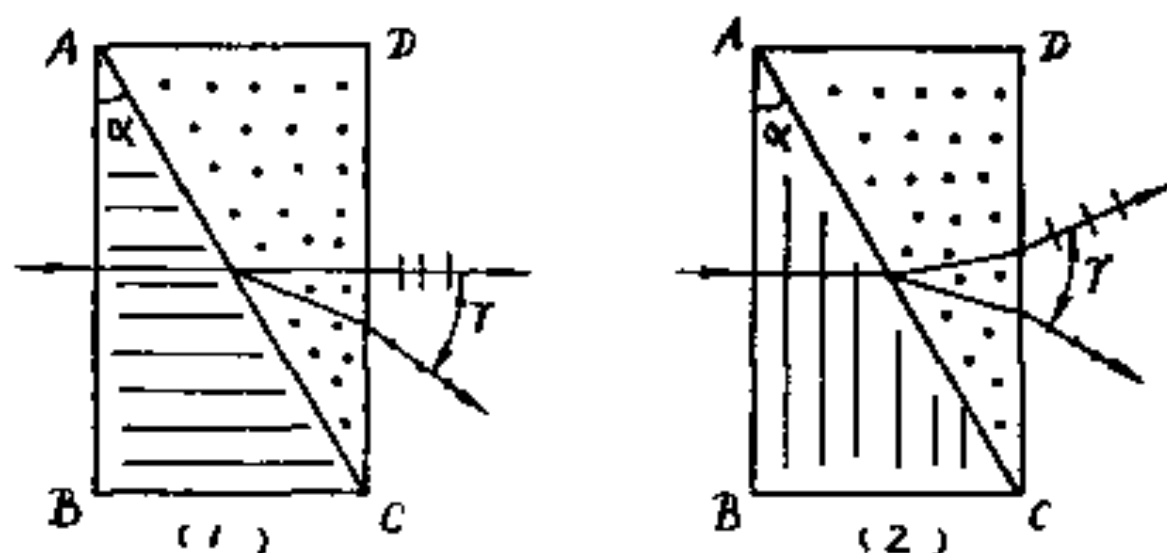


图 56

若制造棱镜所用的晶体是方解石， $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ ，顶角  $\alpha = 30^\circ$ ，具体计算 (1)、(2) 两种情况的  $\gamma$ 。

**9—36** 在偏振光度计 (如图57) 中, 从光源  $S_1$  和  $S_2$  射来的光都被渥拉斯顿棱镜  $W$  分为两束线偏振光, 但其中一束被挡住, 进入视场的只有一束。来自  $S_1$  的这束光的光矢量在图面内, 来自  $S_2$  的这束光的光矢量垂直于图面。转动检偏器  $N$ , 直到视场两半的亮度相等, 设这时检偏器的透光轴与图面的夹角为  $\theta$ , 试证明光源  $S_2$  与  $S_1$  的强度之比是  $\text{tg}^2 \theta$ 。

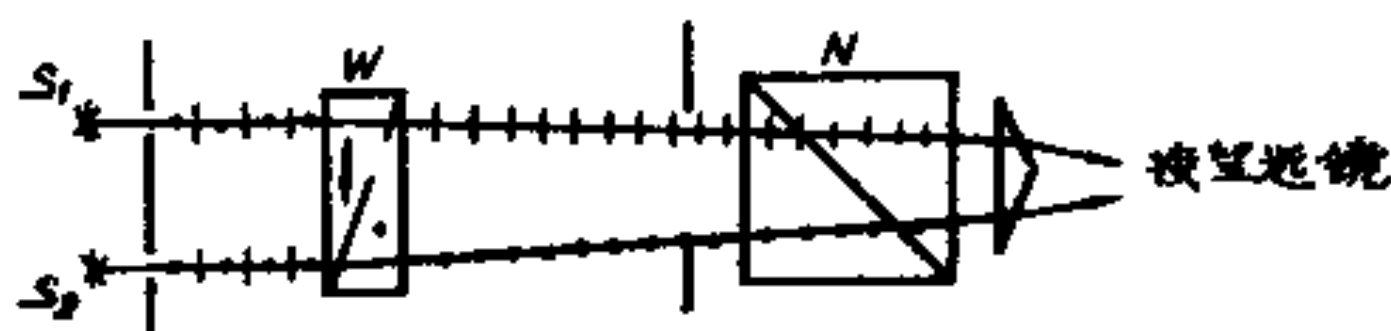


图 57

**9—37** 图58所示的格蓝棱镜由方解石制成, 其  $n_o = 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ , 组成它的两棱镜间是空气隙。

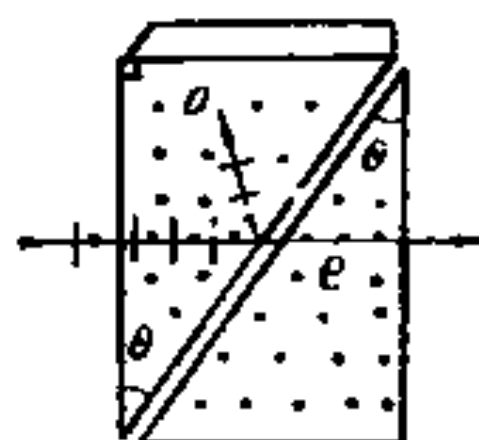


图 58

(1) 当自然光正入射时, 要获得线偏振光, 棱镜顶角  $\alpha$  至少是几度?

(2) 入射孔径角多大?

**9—38** 在9—37题中的两直角棱镜间, 如果不是空气隙, 而是加拿大树胶 ( $n = 1.55$ )。

(1) 为从自然光获得线偏振光, 求棱镜顶角应大于多少度?

(2) 若图58中晶体的光轴不是垂直于图面, 而是在图面内, 且平行于前表面, 它还有没有起偏作用? 这样制做有什么缺点? (提示: 考虑透射率)。

**9—39** 在格蓝棱镜中,把前面的那块直角棱镜用各向同性媒质制做,要求垂直入射的自然光束所产生的两束出射光夹角为 $60^\circ$ ,求棱镜的顶角 $\alpha$ 。设各向同性媒质的折射率 $n=4/3$ ,

晶体的主折射率 $n_o=\sqrt{3}$ ,  $n_e=4/3$ 。

**9—40 $\Delta$**  计算在尼科耳棱镜中 $o$ 光和 $e$ 光在加拿大树胶粘合层表面的入射角 $i_o$ 和 $i_e$ 。

**9—41** 试求会聚自然光通过尼科耳棱镜后能成为完全偏振光的最大入射孔径角。

**9—42** 一束自然光通过起偏器后再通过 $\frac{1}{4}$ 波片,然后射到反射镜上,欲使反射光不能透过起偏器,波片的光轴与起偏器的透光方向间应该成多大角度?为什么?

**9—43** 方解石的主折射率当波长 $\lambda=4046\text{ \AA}$ 时,  $n_o=1.68134$ ,  $n_e=1.49694$ ; 当 $\lambda=7065\text{ \AA}$ 时,  $n_o=1.65207$ ,  $n_e=1.48359$ 。现在有一片对应于 $\lambda=4046\text{ \AA}$ 的方解石 $\frac{1}{4}$ 波片,

一束 $\lambda=7065\text{ \AA}$ 的左旋圆偏振光入射到这晶片上,试求出射光束的偏振态。

**9—44** 当经过尼科耳棱镜观察一束光时,其强度随着尼科耳棱镜的旋转而改变,但总不为零。当在强度为极大时,在检偏器前插入一片 $\frac{1}{4}$ 波片,转动 $\frac{1}{4}$ 波片使它的快轴平行于检偏器的透光方向,再把检偏器沿顺时针方向转动 $20^\circ$ 就完全消光。

(1) 问这是什么偏振光?

(2) 写出它的琼斯矢量(坐标轴自选)。

9—45 (1) 证明在接近垂直入射条件下, 用双轴晶体薄片制做  $\frac{1}{4}$  波片是可能的;

(2) 已知云母对  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  的光之主折射率为  $n_x = 1.5601$ ,  $n_y = 1.5936$ ,  $n_z = 1.5977$ , 求用云母制做的  $\frac{1}{4}$  波片的最小厚度。

9—46 波长  $\lambda$  的圆偏振光通过一个对应于波长  $\lambda_0$  的  $\frac{1}{4}$  波片, 已知  $\epsilon = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \pm 0.1$ 。从波片射出的光再通过一个检偏器, 转动检偏器时可观察到透射光强的变化, 求  $I_{\max}/I_{\min}$ 。

9—47 线偏振光垂直通过一块波片, 线偏振光的振动方向与波片光轴成  $\alpha$  角, 波片的相位延迟角为  $\delta$ 。试导出

(1) 所得椭圆偏振光的椭圆长轴与波片光轴夹角的表示式;

(2) 椭圆两半轴比的表示式。

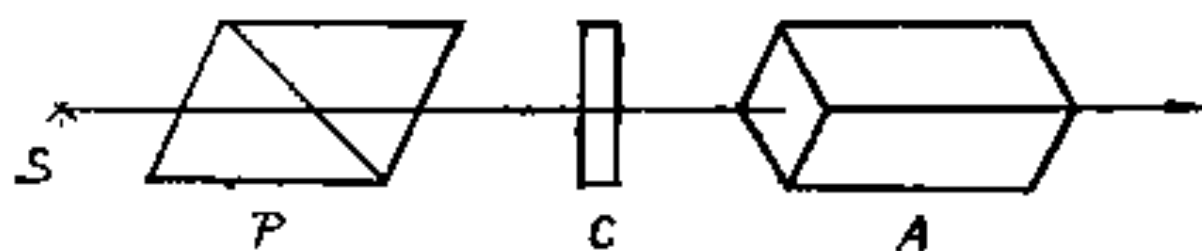


图 59

9—48 $\Delta$  图59是观察偏振光干涉的一种装置, 图中S是光源, P是起偏器, A是检偏器, C是平面平行晶片。试用偏振光的琼斯矢量表示法推导透射光光强公式

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \cos^2 \gamma - \sin 2\phi \sin 2(\phi - \gamma) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}$$

式中,  $\gamma$  是  $A$  和  $P$  的透光方向间的夹角,  $\phi$  是  $P$  的透光方向和  $C$  中光线的主平面间夹角,  $\delta$  是晶片引入的相位差。

**9—49** 将一块  $\frac{1}{8}$  波片插入两个前后放置的尼科耳棱镜中间, 波片的光轴与两尼科耳棱镜主截面的夹角分别为  $-30^\circ$  和  $40^\circ$ , 问光强为  $I_0$  的自然光通过这一系统后的强度是多少?

**9—50** 一块厚度为  $0.05\text{mm}$  的方解石波片放在两正交的尼科耳棱镜中间, 波片的光轴方向与尼科耳棱镜主截面成  $\pm 45^\circ$  角, 问在可见光范围哪些波长的光不能通过? (方解石的  $n_o = 1.66168$ ,  $n_e = 1.48792$ )。

**9—51Δ** 在两个线偏振器之间放入相位延迟角为  $\delta$  的一块波片, 波片的光轴与起偏器的透光方向成  $\alpha$  角, 与检偏器的透光方向成  $\beta$  角。试利用偏振光干涉原理证明, 当转动检偏器时, 透射光强极大值所对应的  $\beta$  角为

$$\beta = -\frac{1}{2} \arctg(\tg 2\alpha \cos \delta)。$$

**9—52** 在杨氏干涉装置中, 以  $S$  表示单色自然光源,  $S_1$  和  $S_2$  表示双孔,  $\Sigma$  表示观察屏。

(1) 若在  $S$  后放一偏振片  $P$ , 干涉条纹有没有变化? 有何变化?

(2) 若在  $S_1$  和  $S_2$  之前再各放一偏振片  $P_1$  和  $P_2$ , 它们的透光方向相互垂直, 且都与  $P$  的透光方向成  $45^\circ$  角,  $\Sigma$  上的强度分布如何?

(3) 在  $\Sigma$  前再放一偏振片  $P'$ , 其透光方向与  $P$  平行, 试

比较在这种情形下观察到的干涉条纹与 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P'$ 都不存在时的区别；

(4) 同(3)，如果将 $P$ 转过 $90^\circ$ ， $\Sigma$ 上干涉条纹有何变化？

(5) 同(3)，如果把 $P$ 撤去， $\Sigma$ 上是否还有干涉条纹？

**9—53** 将平行于光轴切割的一块方解石晶片放置在主截面成 $35^\circ$ 角的一对尼科耳棱镜之间，晶片的光轴平分此角。求

(1) 从方解石晶片射出的两束光的振幅与光强；

(2) 由第二个尼科耳棱镜射出的两束光的振幅与光强。

设入射的自然光光强为 $I_0 = A^2$ ，反射和吸收等损失可忽略，方解石的 $n_o \approx 1.6617$ ， $n_e \approx 1.4879$ ，晶片厚 $0.05\text{mm}$ 。

**9—54.** 楔形水晶棱镜顶角为 $0.5^\circ$ ，棱边与光轴平行，放在正交尼科耳棱镜之间，使其主截面与两尼科耳棱镜的主截面都成 $45^\circ$ 角，以汞的 $\lambda = 4047 \text{ \AA}$ 的紫色平行光正入射，对这种波长的光水晶的 $n_o \approx 1.55716$ ， $n_e \approx 1.56671$ 。

(1) 通过第二个尼科耳棱镜将看到怎样的干涉图样？

(2) 相邻暗纹的间隔等于多少？

(3) 若将第二个尼科耳棱镜的主截面转过 $90^\circ$ ，干涉图样有何变化？

(4) 保持两尼科耳棱镜正交，但把晶片的主截面转过 $45^\circ$ ，使之与第二尼科耳棱镜主截面垂直，干涉图样有何变化？

**9—55** 以线偏振的平行光束垂直照射在巴俾涅补偿器上，通过检偏器观察，在视场中央对应补偿器的两楔形棱镜厚度相等处有一暗线，与中央暗线相距 $a$ 处又有一暗线。今以同样波长的椭圆偏振平行光束射在此巴俾涅补偿器上，发



现暗线移至距中央  $b$  处。

(1) 求椭圆偏振光在补偿器中分解成的两个振动分量之初始相位差与  $a$ 、 $b$  的关系；

(2) 如果椭圆的长短轴正好分别与两楔形棱晶的光轴平行，试证此时  $b = \frac{a}{4}$ ；

(3) 设已知偏振片的透光方向与补偿器一楔的光轴夹角为  $\theta$ ，找出  $\theta$  与 (2) 中椭圆长短轴比值的关系。

**9—56** 来自钠光灯的一束平行光，通过两平行尼科耳棱镜和其间的方解石平行晶片，晶片光轴与表面垂直，欲使钠双线中只有一条通过此系统，且以最大强度通过，求晶片的最小厚度。已知：

$\lambda (\text{\AA})$	5876	5893
$n_o$	1.65846	1.65836
$n_e$	1.48647	1.48641

**9—57Δ** (1) 一束白色自然光通过两正交尼科耳棱镜和其间放置的晶片，晶片的光轴与表面平行，且与尼科耳棱镜主截面成  $45^\circ$  角。出射光束再通过一块光栅和一个会聚透镜，在透镜焦面上放置观察屏，定性描述在屏上观察到的图样，

(2) 用上述装置观察到一级光谱中  $\lambda_1 = 5000\text{\AA}$ 、 $\lambda_2 = 6000\text{\AA}$  处为暗纹，且其间有 399 条暗线，求晶片的厚度（晶片的  $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ ）。

**9—58** 用如图60所示的装置观察晶片  $C$  在会聚光照射时的干涉图样， $N_1$ 、 $N_2$  是主截面相互正交的尼科耳棱镜，光源  $S$  放在透镜  $L_1$  的前焦面上，观察屏  $A$  放在透镜  $L_2$  的后焦面上，用钠光灯照射的毛玻璃作光源。

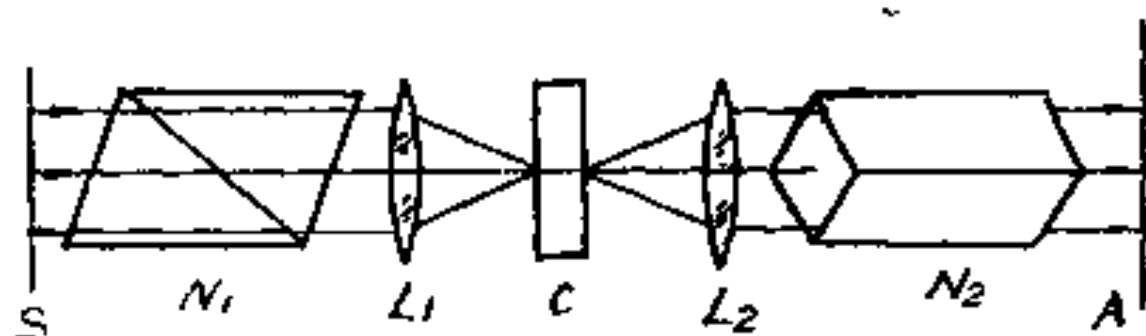


图 60

(1) 晶片C由石英制成，其光轴与晶片表面垂直，晶片厚 2mm。对钠 D 线，石英的主折射率  $n_o = 1.544$ ， $n_e = 1.553$ 。求干涉序  $m = 10$  和  $m = 15$  的两等色线间的距离；

(2) 若石英晶片的光轴与晶片表面成  $45^\circ$  角，大致画出所观察到的干涉图样；

(3) 若 C 是由双轴晶体制成的晶片，且其一个光轴与晶表面垂直，大致画出所观察到的干涉图样。

## 4. 其它问题

### 9—59 证明

(1) 对立方晶系的晶体，在 36 个应力光学常数  $q_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6$ ) 中，只有三个是独立的，即  $q_{11} = q_{22} = q_{33}$ ， $q_{12} = q_{21} = q_{23} = q_{32} = q_{31} = q_{13}$ ， $q_{44} = q_{55} = q_{66}$ ，其余系数均为零。

(2) 对各向同性媒质，只有两个应力光学常数是独立的，即除了满足 (1) 中的条件外，还必须满足  $2q_{44} = q_{11} - q_{22}$ 。

9—60 某单轴有弱吸收的晶体，对  $\lambda = 4030 \text{ \AA}$  的光，其  $n_o = 1.693$ ， $n_e = 1.496$ ，其电导率为  $1 \times 10^{11} \text{ S/m}$ 。

(1) 求主衰减指数 $\kappa_0$ 和 $\kappa_a$ ;

(2) 用这种晶体制成一块 1cm 厚的平行平板, 其光轴与表面成  $45^\circ$  角, 当一细束自然光垂直射到这种晶体上时, 求两束出射光的强度比。

**9—61** 有一双轴晶体, 当  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  时, 其主折射率  $n_x = 3.203$ ,  $n_y = 4.062$ ,  $n_z = 4.321$ , 主衰减常数  $\kappa_x = 9.747 \times 10^{-12}$ ,  $\kappa_y = 6.061 \times 10^{-12}$ ,  $\kappa_z = 5.356 \times 10^{-12}$ 。

(1) 求两光轴间的夹角;

(2) 当波矢  $\vec{s}$  沿光轴之一时, 求相应于这个  $\vec{s}$  方向的两个线偏振波的电位移  $\vec{D}$  的方向, 并求这两个线偏振波的衰减常数。

**9—62** 在有吸收的晶体中, 折射率 $n$ 和衰减常数 $\kappa$ 满足

$$\frac{1}{n^2} = \frac{s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_z^2}$$

$$\frac{\kappa}{n^2} = \frac{\kappa_x}{n_x^2} (\cos^2 \alpha) + \frac{\kappa_y}{n_y^2} (\cos^2 \beta) + \frac{\kappa_z}{n_z^2} (\cos^2 \gamma)$$

式中,  $s_x$ 、 $s_y$ 、 $s_z$  是波矢  $\vec{s}$  沿晶体主轴的分量,  $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$  是  $\vec{D}$  对晶体主轴的方向余弦,  $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$  是主折射率,  $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$ 、 $\kappa_z$  是主衰减常数。

(1) 导出以上两式, 并指出在推导过程中取了哪些近似和这些近似的物理意义;

(2) 简略说明由上两式怎样求对给定  $\vec{s}$  的  $n$  和  $\kappa$ 。

**9—63** 假设有一块三向色性立方晶体, 晶体表面分别垂直

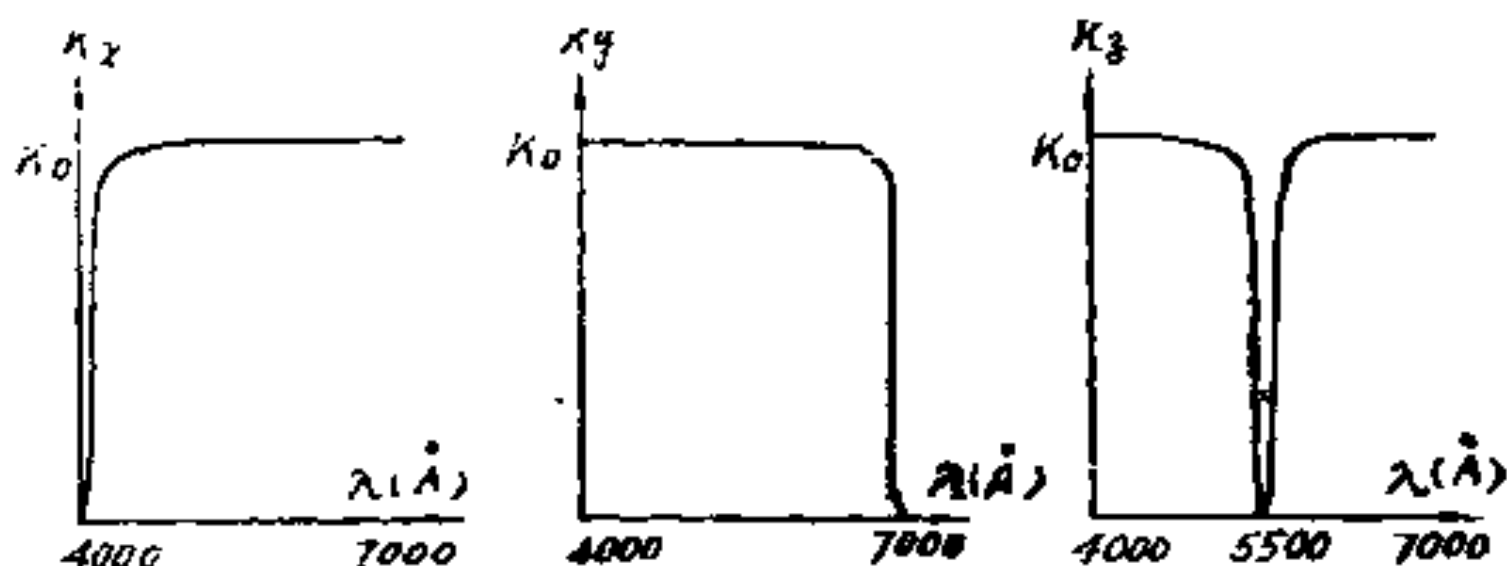


图 61

晶体的三个主轴，其主衰减常数在可见光范围随波长的变化如图61所示。设晶体足够厚，当  $\kappa = \kappa_0$  时意味着完全吸收。一束白色自然光通过一尼科耳棱镜后垂直射到此三向色性立方晶体表面上，(1) 沿  $x$  轴；(2) 沿  $y$  轴；(3) 沿  $z$  轴通过晶体，当转动尼科耳棱镜时，透射光的颜色发生怎样的变化？

9—64 以  $n$  表示折射率， $\kappa$  表示衰减常数， $l$  表示晶片厚度，当入射自然光波长  $\lambda = 6000 \text{Å}$  时，

(1) 电气石对寻常光  $(n\kappa)_o = 2.026 \times 10^{-3}$ ，对非常光  $(n\kappa)_e = 3.117 \times 10^{-4}$ ，已知电气石晶片厚  $0.2 \text{mm}$ ，求寻常光和非常光的光强透射率；

(2) 蓝色聚乙醇乙烯上碘对寻常光  $(n\kappa l)_o = 3.762 \times 10^{-6} \text{mm}$ ，对非常光  $(n\kappa l)_e = 3.235 \times 10^{-4} \text{mm}$ ，求寻常光和非常光的光强透射率。

9—65Δ 有一种电光晶体调Q的方法是用铌酸锂 ( $\text{LiNbO}_3$ ) 双  $45^\circ$  晶体，如图62所示，此晶体是负单轴晶体，其光轴沿  $BC$  方向。对波长  $\lambda = 1.06 \times 10^{-6} \text{m}$  的红外线，铌酸锂晶体的

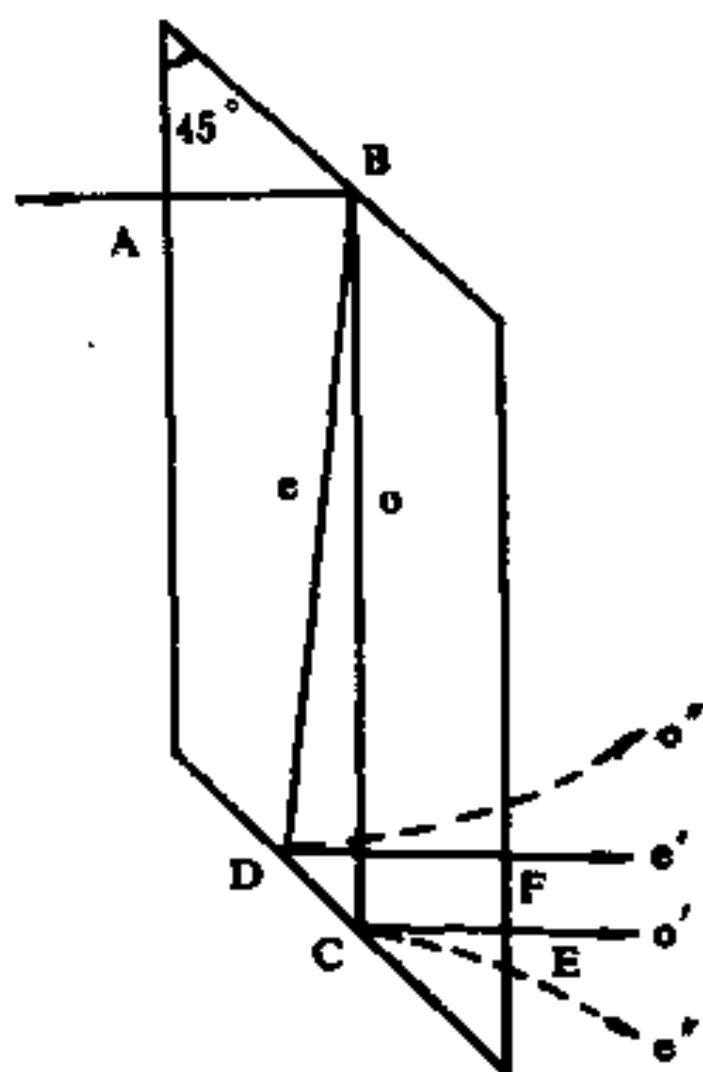


图 62

主折射率  $n_o = 2.233$ ,  $n_e = 2.154$ 。自然光沿  $AB$  方向垂直入射,

- (1) 当不加电场时,证明出射的  $o'$  光和  $e'$  光近似平行,
- (2) 当沿垂直图面方向加半波电压时,其影响只是使  $BC$  段晶体相当于一个  $\frac{1}{2}$  波片,即使  $o$  光和  $e$  光的振动面几乎各转过  $\frac{\pi}{2}$  角,求这时从晶体射出的  $o''$  光和  $e''$  光分开的角度。

(提示:从  $B$  到  $C$  的  $o$  光和从  $B$  到  $D$  的  $e$  光间夹角很小,取  $e$  光的折射率  $n'_e \approx n_o$ ,对  $CE$  段和  $DF$  段的光也取类似近似)。

# 习 题 选 解

## 第一章 电磁场的基本性质

1—8 解 为了简单, 且不失一般性, 设波沿  $z$  方向传播。

因为是平面波, 所以等相面必与  $z$  轴垂直, 故有

$$E_x = R\{a'_x(x, y, z)e^{-i(\omega t - k_x z)}\}$$

式中  $a'_x(x, y, z)$  是复振幅, 可写成:

$a'_x(x, y, z) = a_x(x, y, z)e^{i\delta_x}$  这里,  $a_x(x, y, z)$  是实振幅,  $\delta_x$  是初位相,  $k_x$  是光矢沿  $x$  方向时的波数。故有

$$E_x = a_x(x, y, z)\cos(\omega t - k_x z - \delta_x)$$

同理  $E_y = a_y(x, y, z)\cos(\omega t - k_y z - \delta_y)$

在各向同性媒质中  $k_x = k_y = k$

令  $\tau = \omega t - kz$

$$\text{则 } \frac{E_x}{a_x(x, y, z)} = \cos(\tau - \delta_x) = \cos\tau\cos\delta_x + \sin\tau\sin\delta_x$$

$$\frac{E_y}{a_y(x, y, z)} = \cos(\tau - \delta_y) = \cos\tau\cos\delta_y + \sin\tau\sin\delta_y$$

$$\begin{aligned}\text{又 } \frac{E_x\sin\delta_y}{a_x(x, y, z)} - \frac{E_y\sin\delta_x}{a_y(x, y, z)} &= \cos\tau(\cos\delta_x\sin\delta_y - \cos\delta_y\sin\delta_x) \\ &= \cos\tau\sin(\delta_y - \delta_x) \quad (1)\end{aligned}$$

$$\frac{E_x \cos \delta_y}{a_x(x, y, z)} - \frac{E_y \cos \delta_x}{a_y(x, y, z)} = \sin \tau (\sin \delta_x \cos \delta_y - \cos \delta_x \sin \delta_y) \\ = -\sin \tau \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2)$$

(1)<sup>2</sup> + (2)<sup>2</sup> 并整理得

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right)\cos(\delta_y - \delta_x) = \sin^2(\delta_y - \delta_x)$$

可见偏振状态由  $\delta = \delta_y - \delta_x$  及  $a_x, a_y$  的值决定, 只有当  $\delta, a_x, a_y$  不随空间位置改变时, 偏振态在场中各点才都是一样的。

显然,  $\delta$  不是空间坐标的函数, 而  $a_x(x, y, z), a_y(x, y, z)$  一般是空间坐标的函数, 只有均匀平面波的  $a_x, a_y$  才是常数。

所以, 均匀平面波在各向同性媒质中传播时, 其偏振态保持不变。

1-14 证 (1) 设  $\vec{E}_{\text{出}} = \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix}, \vec{E}_{\text{入}} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix},$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{E}_{\text{出}} = G \vec{E}_{\text{入}}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}E_x + G_{12}E_y \\ G_{21}E_x + G_{22}E_y \end{bmatrix}$$

透光轴沿  $x$  方向, 即  $E'_x = E_x, E'_y = 0$ , 故有

$$G_{11}E_x + G_{12}E_y = E_x$$

$$G_{21}E_x + G_{22}E_y = 0$$

比较系数得  $G_{11} = 1, G_{12} = G_{21} = G_{22} = 0$ , 所以

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当透光轴与 $x$ 轴成 $\theta$ 角时

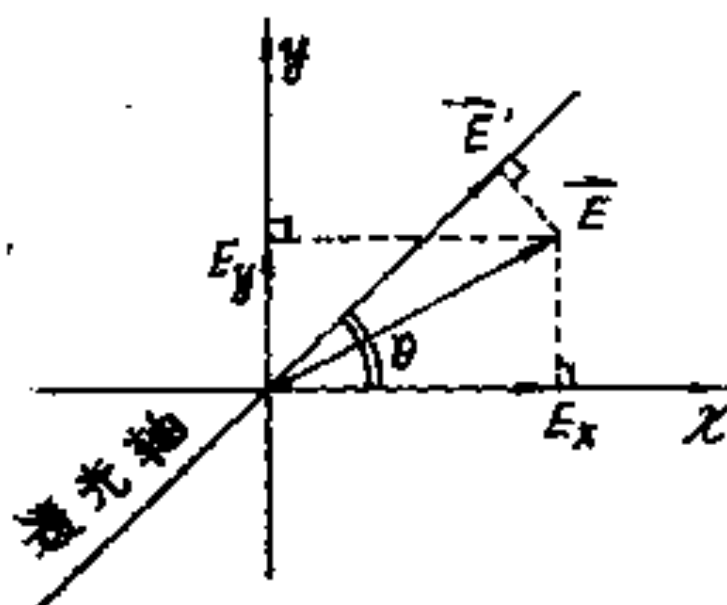


图 63

因为只有沿透光轴的分量能通过，所以通过起偏器后，光矢量为

$$|\vec{E}'| = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$$

再把 $\vec{E}'$ 分解成沿 $x$ 方向的分量 $E'_x$ 和沿 $y$ 方向的分量 $E'_y$ ，得

$$\begin{aligned} E'_x &= |\vec{E}'| \cos \theta = (E_x \cos \theta + E_y \sin \theta) \cos \theta \\ &= E_x \cos^2 \theta + \frac{1}{2} E_y \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$E'_y = |\vec{E}'| \sin \theta = \frac{1}{2} E_x \sin 2\theta + E_y \sin^2 \theta$$

比较 $\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} E_x + G_{12} E_y \\ G_{21} E_x + G_{22} E_y \end{bmatrix}$  得 $G_{11} = \cos^2 \theta$ ,

$G_{22} = \sin^2 \theta, G_{12} = G_{21} = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ ，因而得到

$$G = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

(2) 四分之一波片快轴沿 $x$ 方向，即出射光的 $E_y$ 分量



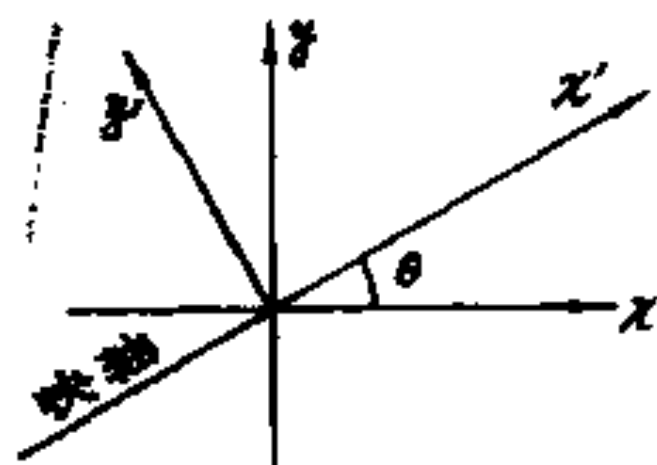
比 $E_x$ 分量位相滞后 $-\frac{\pi}{2}$ ，所以

$$\vec{E}_{\text{出}} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = G \vec{E}_{\text{入}} = \begin{bmatrix} G_{11} E_x + G_{12} E_y \\ G_{21} E_x + G_{22} E_y \end{bmatrix}$$

比较系数得 $G_{11} = 1$ ,  $G_{22} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ,  $G_{12} = G_{21} = 0$

所以有  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

当快轴与 $x$ 轴成 $\theta$ 角时，设 $x'$ 轴沿快轴方向， $y'$ 轴垂直快轴方向(如图64)，则出射光沿 $x'$



的分量为  $E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$ ，沿 $y'$ 的分量为

$$\begin{aligned} E_{y'} &= (-E_x \sin \theta + E_y \cos \theta) e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= -i E_x \sin \theta + i E_y \cos \theta \end{aligned}$$

若将出射光分解为沿 $x$ 和沿 $y$

方向的分量 $E'_x$ 和 $E'_y$ ，则有

$$E'_x = E_x (\cos^2 \theta + i \sin^2 \theta) + \frac{(1-i)}{2} E_y \sin 2\theta$$

$$E'_y = \frac{(1-i)}{2} E_x \sin 2\theta + E_y (\sin^2 \theta + i \cos^2 \theta)$$

即

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & \frac{(1-i)}{2} \sin 2\theta \\ \frac{(1-i)}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$G\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 如同 (2) 一样，设 $x'$ 轴沿快轴方向， $y'$ 轴垂直于

快轴，出射光沿  $y'$  的分量的位相滞后  $\delta$ ，所以

$$E'_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$$

$$E'_{y'} = (-E_x \sin \theta + E_y \cos \theta) e^{i\delta}$$

算得 
$$E'_x = E_x (\cos^2 \theta + e^{i\delta} \sin^2 \theta) + E_y \frac{(1 - e^{i\delta})}{2} \sin 2\theta$$

$$E'_y = E_x \frac{(1 - e^{i\delta})}{2} \sin 2\theta + E_y (\sin^2 \theta + e^{i\delta} \cos^2 \theta)$$

即

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + e^{i\delta} \sin^2 \theta & \frac{(1 - e^{i\delta})}{2} \sin 2\theta \\ \frac{(1 - e^{i\delta})}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta + e^{i\delta} \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$G\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\delta}{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} & \mp i \sin \frac{\delta}{2} \\ \mp i \sin \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} \end{bmatrix}$$

$$= e^{i\frac{\delta}{2}} \cos \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mp i \tan \frac{\delta}{2} \\ \mp i \tan \frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 移相器使  $E'_x = E_x e^{i\phi}$ ,  $E'_y = E_y e^{i\phi}$

$$\text{即} \begin{bmatrix} E_x e^{i\phi} \\ E_y e^{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} E_x + G_{12} E_y \\ G_{21} E_x + G_{22} E_y \end{bmatrix}$$

$G_{11} = G_{22} = e^{i\phi}$ ,  $G_{12} = G_{21} = 0$  故得

$$G = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

(5) 自然光的相干矩阵  $J = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ( $I_0$  为光强),

光强为  $I_0$  的自然光通过圆偏振器后形成的圆偏振光的相干矩阵  $J' = \frac{I_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$ , 上面符号对应右旋光, 下面符号对应左旋光。

欲验证  $GJG^+ = J'$  (见7—59题)

把  $G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} GJG^+ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix} \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{I_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix} = J' \end{aligned}$$

证毕

1—25 解 选定坐标系, 使  $z$  轴垂直于界面,  $x$  轴在入射面和分界面中。入射光电矢量可表示为

$$E_{//} = A_{//} e^{-i\omega t}, \quad E_{\perp} = A_{\perp} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

因为是圆偏振光, 所以

$$A_{//} = A_{\perp} = A$$

又由折射定律  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$  得

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1.5} \sin 50^\circ \right) = 30.71^\circ$$

(1) 反射波

$$E_{//}^{(r)} = R_{//} e^{-i\omega t}, \quad E_{\perp}^{(r)} = R_{\perp} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\therefore R_{//} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} A_{//} = \frac{\operatorname{tg}(50^\circ - 30.71^\circ)}{\operatorname{tg}(50^\circ + 30.71^\circ)} A_{//} = 0.057 A$$

$$R_{\perp} = \frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} A_{\perp} = \frac{-\sin(50^\circ - 30.71^\circ)}{\sin(50^\circ + 30.71^\circ)} A_{\perp} = -0.335 A$$

$$\therefore E_{//}^{(r)} = 0.057 A e^{-i\omega t}$$

$$E_{\perp}^{(r)} = -0.335 A e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = 0.335 A e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

即反射波是左旋椭圆偏振光，椭圆的长轴垂直于入射面。

(2) 透射波

$$E_{//}^{(t)} = T_{//} e^{-i\omega t}, \quad E_{\perp}^{(t)} = T_{\perp} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{aligned} \therefore T_{//} &= \frac{2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} A_{//} \\ &= \frac{2\sin(30.71^\circ) \cos(50^\circ)}{\sin(80.71^\circ) \cos(19.29^\circ)} A = 0.705 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= \frac{2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} A_{\perp} \\ &= \frac{2\sin(30.71^\circ) \cos(50^\circ)}{\sin(80.71^\circ)} A = 0.665 A \end{aligned}$$

$$\therefore E_{//}^{(t)} = 0.705 A e^{-i\omega t}$$

$$E_{\perp}^{(t)} = 0.665 A e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

即透射波是长轴平行于入射面的右旋椭圆偏振光。

**1—33 解** 全反射时古斯-汉欣位移的出现是与入射平面波波阵面的有限宽度相联系的。若入射平面波波阵面无限展宽，则不存在古斯-汉欣位移。对有限宽波阵面的入射平面波，可视为入射平面波通过了一个有限宽的直缝后再射

到媒质界面上。而平面波通过缝后要发生衍射，形成各种传播方向的平面波迭加。由于直缝很宽，故通过缝后波矢  $\vec{k}$  的展宽  $\Delta\vec{k}$  很小。为简单起见，设入射到媒质界面上的光波是由波矢为  $\vec{k} \pm \Delta\vec{k}$  的两束平面波迭加而成的波包。

取坐标系的  $z$  轴垂直界面， $x$  轴沿入射面与界面的交线，则两入射光波波矢的  $x$  分量应为  $k_x \pm \Delta k_x$ ， $z$  分量都是  $k_z$ ，入射角分别为  $\theta_1 \pm \Delta\theta_1$ 。入射角与波矢分量的关系为

$$\sin(\theta_1 \pm \Delta\theta_1) = \frac{k_x \pm \Delta k_x}{k}$$

式中， $k \approx \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ 。因此入射波包在界面 ( $z=0$ ) 上的复振幅为

$$A = A_0 e^{ik_x x} [e^{i\Delta k_x x} + e^{-i\Delta k_x x}] = 2A_0 \cos(\Delta k_x x) \cdot e^{ik_x x}$$

$$\text{由 } \operatorname{tg} \frac{\delta_{//}}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1}$$

可见，全反射时的相移  $\delta_{//}$  和  $\delta_{\perp}$  都是入射角  $\theta_1$  的函数，当  $\theta_1$  改变  $\Delta\theta_1$  时，相移改变  $\Delta\delta_{//}$  (或  $\Delta\delta_{\perp}$ )。在  $\Delta\theta_1$  和  $\Delta\delta_{//}$  都很小的条件下

$$\Delta\delta_{//} = \frac{d(\delta_{//})}{d\theta_1} \cdot \Delta\theta_1 = \frac{d(\delta_{//})}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dk_x} \cdot \Delta k_x$$

故反射波包在界面 ( $z=0$ ) 上的复振幅

$$\begin{aligned} R_{//} &= A_0 e^{i(k_x x + \delta_{//})} [e^{i(\Delta k_x x + \Delta\delta_{//})} + e^{-i(\Delta k_x x + \Delta\delta_{//})}] \\ &= 2A_0 \cos(\Delta k_x x + \Delta\delta_{//}) \cdot e^{i(k_x x + \delta_{//})} \\ &= 2A_0 \cos[(x - x_{s//}) \Delta k_x] \cdot e^{i(k_x x + \delta_{//})} \end{aligned}$$

式中  $x_{s//} = - \frac{d\delta_{//}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dk_x}$  就是波包的古斯-汉欣位移。由

$$\delta_{//} = 2 \operatorname{arctg} \left[ - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1} \right]$$

$$\therefore \frac{d(\delta_{//})}{d\theta_1} = \frac{2n^2(1-n^2)\sin\theta_1}{(n^4\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 - n^2)\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}$$

又由  $\sin\theta_1 = \frac{k_x}{k} = \frac{\lambda k_x}{2\pi}$ ,  $\therefore \cos\theta_1 d\theta_1 = \frac{\lambda}{2\pi} dk_x$ , 得

$$\frac{d\theta_1}{dk_x} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\cos\theta_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore x_{s//} &= \frac{d(\delta_{//})}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dk_x} \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \frac{n^2(1-n^2)\operatorname{tg}\theta_1}{(n^4\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 - n^2)\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} \end{aligned}$$

这是  $TM$  波的古斯-汉欣位移。

同理可导出对  $TE$  波的古斯-汉欣位移

$$x_{s\perp} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}$$

古斯-汉欣位移和倏逝波都是由于在全反射时电磁场透入光疏媒质引起的, 如图65所示。粗略地可以认为: 光波不是在媒质表面发生全反射, 而是在进入光疏媒质后, 在深度  $d$  处才发生全反射。由图65易证

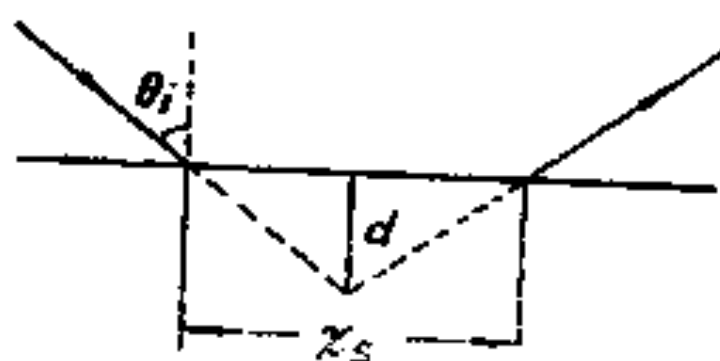


图 65

$$d = \frac{x_s}{2\operatorname{tg}\theta_1}$$

这样求出的透入深度  $d$  在数量级上和由倏逝波得到的  $d$  值完全

一致。

1—38 证 由图7可见  $\angle A = \angle \theta_1$

欲证  $\angle A \approx 60^\circ$  只须证明  $\angle \theta_1 \approx 60^\circ$

因为线偏振光经二次全反射产生圆偏振光，意味着每次全反射TE波与TM波相位变化之差为  $\frac{\pi}{4}$ ，即

$$\delta = \delta_{\perp} - \delta_{//} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 22.5^\circ$$

由式

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{//}}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{n^2 \cos \theta_1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\cos \theta_1}$$

得

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\delta_{//}}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta_{//}}{2}} = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2}}{\sin^2 \theta_1}$$

即

$$\frac{\cos^2 \theta_1}{\sin^4 \theta_1} (\sin^2 \theta_1 - n^2) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{8} \right) = 0.17$$

令  $\sin^2 \theta_1 = x$  则  $\cos^2 \theta_1 = 1 - x$

上式化为

$$\frac{1-x}{x^2} (x - n^2) = 0.17$$

整理得

$$(1 + 0.17)x^2 - (1 + n^2)x + n^2 = 0$$

$$\therefore n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1.65}$$

$$\therefore n^2 = 0.367$$

代入方程，得

$$1.17x^2 - 1.367x + 0.367 = 0$$

此方程有二个解：

$$x_1 = 0.75 \quad \text{对应 } \theta_{11} = 40.28^\circ$$

$$x_2 = 0.418 \quad \text{对应 } \theta_{12} = 60.02^\circ$$

所以顶角  $A$  为  $40.28^\circ$  或  $60.02^\circ$  时，可把线偏振光变成圆偏振光。但  $\angle A = 40.28^\circ$  时光不能在相邻二面上进行全反射，要按图示光线进行，顶角只能为  $60.02^\circ$ 。

$$\text{即} \quad \angle A \approx 60^\circ$$

证毕

1—41 证 已知

$$r = \frac{R}{A} = \frac{(m_{11} + m_{12}p_1)p_1 - (m_{21} + m_{22}p_1)}{(m_{11} + m_{12}p_1)p_1 + (m_{21} + m_{22}p_1)}$$

$$\mathcal{R} = r^2 \approx rr^*$$

$$t = \frac{2p_1}{(m_{11} + m_{12}p_1)p_1 + (m_{21} + m_{22}p_1)}$$

$$\mathcal{T} = \frac{p_1}{p_1} tt^*$$

$$\therefore M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & i\bar{m}_{12} \\ i\bar{m}_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$



其中,  $\bar{im}_{12} \equiv m_{12}, \bar{im}_{21} \equiv m_{21}$

$$\therefore |M| = m_{11}m_{22} + \bar{m}_{12}\bar{m}_{21} = 1$$

把  $\bar{im}_{12}$ 、 $\bar{im}_{21}$  代入  $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{T}$  之表示式可得

$$\mathcal{R} = \frac{(m_{11} + \bar{im}_{12}p_1)p_1 - (\bar{im}_{21} + m_{22}p_1)}{(m_{11} + \bar{im}_{12}p_1)p_1 + (\bar{im}_{21} + m_{22}p_1)}$$

$$\mathcal{T} = \frac{\frac{p_1}{p_1} \cdot 2p_1}{\frac{(m_{11} + \bar{im}_{12}p_1)p_1 + (\bar{im}_{21} + m_{22}p_1)}{2p_1}}$$

$$\mathcal{T} = \frac{(m_{11} - \bar{im}_{12}p_1)p_1 - (-\bar{im}_{21} + m_{22}p_1)}{(m_{11} - \bar{im}_{12}p_1)p_1 + (-\bar{im}_{21} + m_{22}p_1)}$$

可以整理得

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = \frac{p_1^2 m_{11}^2 + p_1^2 p_1^2 \bar{m}_{12}^2 + \bar{m}_{21}^2 + m_{22}^2 p_1^2 - 2p_1 p_1 + 4p_1 p_1}{p_1^2 m_{11}^2 + p_1^2 p_1^2 \bar{m}_{12}^2 + \bar{m}_{21}^2 + m_{22}^2 p_1^2 + 2p_1 p_1}$$

$$= 1$$

上面是对TE波推出的,同理可证对TM波也有  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ , 即能量守恒。

证毕

1—49 解: 在1~2界面上全反射

$$\therefore n_2 \cos \theta_2 = i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}$$

则有

$$r_{12} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1 + i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}$$

$$r_{23} = \frac{i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2} - n_3 \cos \theta_3}{i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2} + n_3 \cos \theta_3}$$

$$\text{令 } b = \frac{2\pi}{\lambda_0} h_2 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}$$

$$\text{则 } \beta = ib$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } r &= \frac{r_{12} + r_{23} e^{i2\beta}}{1 + r_{12} r_{23} e^{i2\beta}} \\ &= \frac{r_{12} + r_{23} e^{-2b}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-2b}} \end{aligned}$$

考虑到  $|r_{12}| = |r_{23}| = 1$ , 所以总可以写成

$$r_{12} = e^{i\phi_{12}}, \quad r_{23} = e^{i\phi_{23}}$$

得总反射率

$$\mathcal{R} = |r|^2 = \frac{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} - \phi_{23})}{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} + \phi_{23})}$$

下面确定  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{23}$

$$\because h_2 = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\therefore b = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{4} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1 + i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}} \\ &= \frac{(n_1^2 \cos^2 \theta_1 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 + n_2^2) - i2n_1 \cos \theta_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1^2 \cos^2 \theta_1 + n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2} \\ &\equiv e^{i\phi_{12}} \end{aligned}$$

由此可得

$$\operatorname{tg} \phi_{12} = \frac{-2n_1 \cos \theta_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1^2 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) + n_2^2}$$

$$\phi_{12} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-2n_1 \cos \theta_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1^2 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) + n_2^2} \right]$$

同理可得

$$\phi_{23} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-2n_3 \cos \theta_3 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_3^2 \cos^2 \theta_3 - n_1 \sin^2 \theta_1 + n_2^2} \right]$$

$$\because n_3 = n_1$$

$$\therefore \phi_{23} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-2n_1 \cos \theta_3 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1^2 (\cos^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_1) + n_2^2} \right]$$

透射率

$$\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$$

$$= 1 - \frac{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} - \phi_{23})}{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} + \phi_{23})}$$

$$= \frac{-4\sin\phi_{12}\sin\phi_{23}}{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} + \phi_{23})}$$

1—51 证 设  $\cos \theta = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})$

$$\text{则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{4}(m_{11} + m_{12})^2}$$

$$\mathcal{U}_{N-1} = \frac{\sin[N\theta]}{\sin\theta}, \quad \mathcal{U}_{N-2} = \frac{\sin[(N-1)\theta]}{\sin\theta}$$

问题归结为要证明

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} m_{11} \sin[N\theta] - \sin[(N-1)\theta] & m_{12} \sin[N\theta] \\ m_{21} \sin[N\theta] & m_{22} \sin[N\theta] - \sin[(N-1)\theta] \end{bmatrix} \quad (1)$$

用数学归纳法证明

当  $N=2$  时有

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} m_{11}^2 + m_{12} m_{21} & m_{12} m_{22} + m_{11} m_{12} \\ m_{21} m_{11} + m_{22} m_{21} & m_{22}^2 + m_{12} m_{21} \end{bmatrix}$$

由 (1) 式, 当  $N=2$  时得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^2 &= \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} m_{11} \sin 2\theta - \sin \theta & m_{12} \sin 2\theta \\ m_{21} \sin 2\theta & m_{22} \sin 2\theta - \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2m_{11} \cos \theta - 1 & 2m_{12} \cos \theta \\ 2m_{21} \cos \theta & 2m_{22} \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2m_{11} \frac{m_{11} + m_{22}}{2} - 1 & 2m_{12} \frac{m_{11} + m_{12}}{2} \\ 2m_{21} \frac{m_{11} + m_{12}}{2} & 2m_{22} \frac{m_{11} + m_{22}}{2} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{11}^2 + m_{11} m_{22} - 1 & m_{12} m_{11} + m_{12} m_{22} \\ m_{21} m_{11} + m_{21} m_{22} & m_{22} m_{11} + m_{22}^2 - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{11}^2 + m_{12} m_{21} & m_{12} m_{22} + m_{11} m_{12} \\ m_{21} m_{11} + m_{21} m_{22} & m_{22}^2 + m_{12} m_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式最后一步用了  $|M| = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} = 1$

可见当  $N=2$  时 (1) 式成立

设  $N = k$  时 (1) 式成立, 即

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^k = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} m_{11} \sin[k\theta] - \sin[(k-1)\theta] & m_{12} \sin[k\theta] \\ m_{21} \sin[k\theta] & m_{22} \sin[k\theta] - \sin[(k-1)\theta] \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{k+1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} m_{11} \sin[k\theta] - \sin[(k-1)\theta] & m_{12} \sin[k\theta] \\ m_{21} \sin[k\theta] & m_{22} \sin[k\theta] - \sin[(k-1)\theta] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2)$$

根据矩阵乘法定义并引用关系式

$$\begin{aligned} \sin(k+1)\theta &= \sin k\theta \cos \theta + \sin \theta \cos k\theta \\ &= 2\sin k\theta \cos \theta - (\sin k\theta \cos \theta - \sin \theta \cos k\theta) \\ &= \sin k\theta \cdot (m_{11} + m_{22}) - \sin(k-1)\theta \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} a &= m_{11} [m_{11} \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] + m_{12} m_{21} \sin k\theta \\ &= m_{11} [m_{11} \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] + (m_{11} m_{22} - 1) \sin k\theta \\ &= m_{11} [(m_{11} + m_{22}) \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] - \sin k\theta \\ &= m_{11} \sin(k+1)\theta - \sin k\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= m_{12} [m_{11} \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] + m_{12} m_{22} \sin k\theta \\ &= m_{12} [(m_{11} + m_{22}) \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] \\ &= m_{12} \sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= m_{12} m_{21} \sin k\theta + m_{22} [m_{22} \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] \\ &= (m_{11} m_{22} - 1) \sin k\theta + m_{22} (m_{22} \sin k\theta - \sin(k-1)\theta) \\ &= m_{22} [(m_{11} + m_{22}) \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] - \sin k\theta \\ &= m_{22} \sin(k+1)\theta - \sin k\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= m_{21} m_{11} \sin k\theta + m_{21} [m_{22} \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] \\
&= m_{21} [(m_{11} + m_{22}) \sin k\theta - \sin(k-1)\theta] \\
&= m_{21} \sin(k+1)\theta
\end{aligned}$$

把以上求出的 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 代入(2)式, 结果与(1)式当 $N=k+1$ 时的结果完全一致。所以 $N=k+1$ 时(1)式也成立。

结论: (1) 式对任意正整数都成立。

证毕

1—54 解 (1) 双层即 $2N=2$

$\therefore$  透射率 $\mathcal{T}=100\%$ , 即 $\mathcal{R}=0$

$$\therefore 1 - \frac{n_1}{n_3} \left( \frac{n_2}{n_3} \right)^2 = 0$$

$$\therefore n_1 = 1 \quad \therefore \frac{n_2}{n_3} = \frac{1}{\sqrt{n_1}} = \frac{1}{\sqrt{1.5}}$$

若先镀 $\text{MgF}_2$ , 即 $n_3=1.38$

$$\text{则 } n_2 = \frac{1.38}{\sqrt{1.5}} = 1.127$$

到目前为止还没发现这么低折射率的固体材料。

若后镀 $\text{MgF}_2$ , 即 $n_2=1.38$

$$\text{则 } n_3 = 1.38 \times \sqrt{1.5} = 1.69$$

(2) 此题共有四种镀法:

法 I 镀奇数层膜, 按 $n_1(n_H n_L)^{2N} n_H n_1$ 排列

$$\begin{aligned}
&\text{由} \\
r &= \frac{1 - \frac{n_3^2}{n_1 n_1} \left( \frac{n_3}{n_2} \right)^{2N}}{1 + \frac{n_3^2}{n_1 n_1} \left( \frac{n_3}{n_2} \right)^{2N}}
\end{aligned}$$

$$n_s = n_H = 2.45, \quad n_2 = n_L = 1.35, \quad n_1 = 1.5, \quad n_i \approx 1$$

欲使  $\mathcal{R} \geq 99\%$  必须有  $|r| \geq \sqrt{0.99}$

即  $r \geq \sqrt{0.99}$  或  $r \leq -\sqrt{0.99}$

$$\text{令 } a \equiv \frac{n_s^2}{n_1} = \frac{n_H^2}{n_1} = 4.0, \quad b \equiv \frac{n_s}{n_2} = \frac{n_H}{n_L} = 1.815$$

$r \geq \sqrt{0.99}$  算得  $N$  不合题意，略去。

$$\text{由 } r \leq -\sqrt{0.99}, \text{ 得 } \frac{1 - ab^{2N}}{1 + ab^{2N}} \leq -\sqrt{0.99}$$

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\ln \left[ \frac{1 + \sqrt{0.99}}{1 - \sqrt{0.99}} \right] - \ln a}{\ln b} = 3.86$$

取  $N = 4$ ，所以依此法至少要镀  $2N + 1$  即 9 层膜。

法 II 镀奇数层膜，按  $n_1(n_L n_H)^{2N} n_L n_i$  排列

$$\text{令 } a \equiv \frac{n_s^2}{n_1} = \frac{n_L^2}{n_1} = 1.215, \quad b \equiv \frac{n_s}{n_2} = \frac{n_L}{n_H} = 0.551$$

$r \leq -\sqrt{0.99}$  算得结果不合题意，略去。

$$\text{由 } r \geq \sqrt{0.99}, \text{ 得 } \frac{1 - ab^{2N}}{1 + ab^{2N}} \geq \sqrt{0.99}$$

$$N \geq 5.2$$

取  $N = 6$ ，依此法至少要镀  $2N + 1$  即 13 层膜。

法 III 镀偶数层膜，按  $n_1(n_H n_L)^{2N} n_i$  排列

$$r = \frac{1 - \frac{n_1}{n_3} \left( \frac{n_2}{n_3} \right)^{2N}}{1 + \frac{n_1}{n_3} \left( \frac{n_2}{n_3} \right)^{2N}}$$

$$\text{令 } a \equiv \frac{n_1}{n_2} = 1.5,$$

$$b \equiv \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_L}{n_H} = 0.551$$

$r \leq -\sqrt{0.99}$  算得结果不合题意，略去。

$$\text{由 } r \geq \sqrt{0.99}, \text{ 得 } \frac{1 - ab^{2N}}{1 + ab^{2N}} \geq \sqrt{0.99}$$

算得  $N \geq 5.36$

取  $N = 6$ ，依此法至少要镀  $2N$  即 12 层膜。

法 IV 镀偶数层膜，按  $n_1(n_L n_H)^{2N} n_1$  排列

$$\text{令 } a \equiv \frac{n_1}{n_2} = 1.5$$

$$b \equiv \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_H}{n_L} = 1.815$$

$r \geq \sqrt{0.99}$  算得结果不合题意，略去。

$$\text{由 } r \leq -\sqrt{0.99}, \text{ 得 } \frac{1 - ab^{2N}}{1 + ab^{2N}} \leq -\sqrt{0.99},$$

算得  $N \geq 4.7$

取  $N = 5$ ，依此法至少要镀  $2N$  即 10 层膜。

比较上述四种方法，可见 I 所镀膜层最少。



## 第二章 几何光学基础

2-1 解  $\because \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \vec{e} \cdot e^{i(k_0 \varphi - \omega t)}$

$$\ddot{\vec{E}} = -\omega^2 \vec{E} = -(k_0 C)^2 \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \therefore -\frac{\varepsilon\mu}{C^2} \ddot{\vec{E}} &= -\frac{1}{v^2} \cdot (-k_0^2 C^2) \vec{E} \\ &= (k_0 n)^2 \vec{e} \cdot e^{i(k_0 \varphi - \omega t)} \end{aligned} \quad (1)$$

利用关系式

$$\nabla \times (u \vec{A}) = u \nabla \times \vec{A} + \nabla u \times \vec{A}$$

$$\text{以及 } \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\text{得 } \nabla \times \vec{E} = (\nabla \times \vec{e} + ik_0 \nabla \varphi \times \vec{e}) e^{i(k_0 \varphi - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla \ln \mu \times (\nabla \times \vec{e} + ik_0 \nabla \varphi \times \vec{e}) e^{i(k_0 \varphi - \omega t)} \\ &= [ -(\nabla \times \vec{e}) \times \nabla \ln \mu + ik_0 (\vec{e} \cdot \nabla \ln \mu) \nabla \varphi \\ &\quad - ik_0 (\nabla \ln \mu \cdot \nabla \varphi) \vec{e} ] e^{i(k_0 \varphi - \omega t)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{又 } \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [ \vec{e} \cdot e^{i(k_0 \varphi - \omega t)} ] = \left( \frac{\partial \vec{e}}{\partial x} + ik_0 \vec{e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) e^{i(k_0 \varphi - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} &= \left[ \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k_0^2 \vec{e} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. ik_0 \vec{e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] e^{i(k_0 \varphi - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} = [\nabla^2 \vec{e} + 2ik_0 (\nabla\varphi \cdot \nabla) \vec{e} - k_0^2 \vec{e} (\nabla\varphi)^2 + ik_0 \vec{e} \nabla^2 \varphi] e^{i(k_0\varphi - \omega t)} \quad (3)$$

再利用下式

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$$

计算得

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) &= \vec{E} \times [\nabla \times (\nabla \ln \varepsilon)] + (\vec{E} \cdot \nabla) \nabla \ln \varepsilon + \\ &\quad \nabla \ln \varepsilon \times (\nabla \times \vec{E}) + (\nabla \ln \varepsilon \cdot \nabla) \vec{E} \\ \therefore \nabla \times (\nabla \ln \varepsilon) &= 0 \\ \therefore \nabla(\vec{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) &= [(\vec{e} \cdot \nabla) \nabla \ln \varepsilon + \nabla \ln \varepsilon \times (\nabla \times \vec{e}) \\ &\quad + ik_0 (\vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon) \nabla \varphi - ik_0 (\nabla \ln \varepsilon \cdot \nabla \varphi) \vec{e} \\ &\quad + (\nabla \ln \varepsilon \cdot \nabla) \vec{e} + ik_0 \vec{e} (\nabla \ln \varepsilon \cdot \nabla) \varphi] e^{i(k_0\varphi - \omega t)} \end{aligned} \quad (4)$$

把 (1)、(2)、(3)、(4) 式代入波动方程, 并消去公因子  $e^{i(k_0\varphi - \omega t)}$ , 整理得

$$\begin{aligned} k_0^2 [n^2 - (\nabla\varphi)^2] \vec{e} + ik_0 \{ [\nabla^2 \varphi - \nabla\varphi \cdot \nabla \ln \mu] \vec{e} + 2(\nabla\varphi \cdot \nabla) \vec{e} \\ + (\vec{e} \cdot \nabla \ln \mu + \vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon) \nabla \varphi \} + \{ \nabla^2 \vec{e} - (\nabla \times \vec{e}) \times \nabla \ln \mu \\ + \nabla \ln \varepsilon \times (\nabla \times \vec{e}) + (\vec{e} \cdot \nabla) \nabla \ln \varepsilon + (\nabla \ln \varepsilon \cdot \nabla) \vec{e} \} = 0 \\ \therefore 2\nabla \ln n = 2\nabla \ln \sqrt{\varepsilon \mu} \\ = \frac{1}{\varepsilon \mu} (\mu \nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla \mu) \\ = \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\nabla \mu}{\mu} \\ = \nabla \ln \varepsilon + \nabla \ln \mu \end{aligned}$$

$$\because \vec{e} \cdot \nabla \ln \mu + \vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon = 2 \vec{e} \cdot \nabla \ln n$$

$$\text{又 } \because \nabla(\vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon) = \nabla \ln \varepsilon \times (\nabla \times \vec{e}) + (\vec{e} \cdot \nabla) \nabla \ln \varepsilon + (\nabla \ln \varepsilon \cdot \nabla) \vec{e}$$

$$\begin{aligned} \therefore k_0^2 [n^2 - (\nabla \varphi)^2] \vec{e} + ik_0 \{ [\nabla^2 \varphi - \nabla \varphi \cdot \nabla \ln \mu] \vec{e} \\ + 2(\nabla \varphi \cdot \nabla) \vec{e} + 2(\vec{e} \cdot \nabla \ln n) \nabla \varphi \} + \{ \nabla^2 \vec{e} \\ - (\nabla \times \vec{e}) \times \nabla \ln \mu + \nabla(\vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon) \} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \vec{K}(\vec{e}, \varphi, n) = \{n^2 - (\nabla \varphi)^2\} \vec{e}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{e}, \varphi, n, \mu) = \{ [\nabla \varphi \cdot \nabla \ln \mu - \nabla^2 \varphi] \vec{e} - \\ 2(\nabla \varphi \cdot \nabla) \vec{e} - 2(\vec{e} \cdot \nabla \ln n) \nabla \varphi \} \end{aligned}$$

$$\vec{M}(\vec{e}, \varepsilon, \mu) = (\nabla \times \vec{e}) \times \nabla \ln \mu - \nabla^2 \vec{e} - \nabla(\vec{e} \cdot \nabla \ln \varepsilon)$$

$$\text{则有 } k_0^2 \vec{K} - ik_0 \vec{L} - \vec{M} = 0$$

$$\text{即 } \vec{K} + \frac{1}{ik_0} \vec{L} + \frac{1}{(ik_0)^2} \vec{M} = 0$$

当  $k_0$  足够大时上式的第二、第三项均可忽略不计, 这时  $\vec{K}(\vec{e}, \varphi, n) = 0$ , 即

$$\{n^2 - (\nabla \varphi)^2\} \vec{e} = 0$$

$$\because \vec{e} \neq 0$$

$$\therefore n^2 - (\nabla \varphi)^2 = 0$$

上式就是程函方程。

**2—8 解** 已知折射率  $n$  与  $z$  无关, 所以光线微分方程

$-\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n$  的  $z$  分量式可表为

$$-\frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

即

$$n\frac{dz}{ds} = c \quad (1)$$

(1) 式中常量  $c$  可由下式确定

$$c = n(x_0, y_0) \cos \gamma_0$$

式中  $\gamma_0$  为光线在  $(x_0, y_0)$  点入射时与  $z$  轴正向之夹角。

由 (1) 式得

$$\begin{aligned} ndz = cds &= c\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= c\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1} dz \end{aligned}$$

故有 
$$c = \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \quad (2)$$

又由拉格朗日方程\*可得

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{n \frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} \right] = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (3)$$

\*令  $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) = n(x, y, z) \frac{ds}{dz}$ ,  $\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  式中 “ $\dot{\phantom{x}}$ ” 表

示对  $z$  求导, 则几何光学中的拉格朗日方程为  $-\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$ , 它可

由费马原理  $\delta \int_{z_1}^{z_2} ndz = \delta \int_{z_1}^{z_2} Ldz = 0$  导出。

把 (2) 式代入 (3) 式得

$$\frac{d}{dz} \left[ c \frac{dx}{dz} \right] = \frac{n}{c} \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\text{即 } c \frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{n}{c} \frac{\partial n}{\partial x}$$

由此得

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{n}{c^2} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial (n^2)}{\partial x}$$

证毕。

2—11 解 已知光线微分方程为

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{\vec{dr}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \because ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1} dz \end{aligned}$$

在近轴条件下

$$\frac{dx}{dz} \approx 0, \quad \frac{dy}{dz} \approx 0$$

$$\therefore ds \approx dz$$

(1) 式化为

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{\vec{dr}}{dz} \right) = \nabla n \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \because n^2 &= n_0^2 (1 - \alpha^2 r^2) \\ &= n_0^2 [1 - \alpha^2 (x^2 + y^2)] \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dz} \left( n \frac{d\vec{r}}{dz} \right) = \frac{dn}{dz} \frac{d\vec{r}}{dz} + n \frac{d^2\vec{r}}{dz^2} = n \frac{d^2\vec{r}}{dz^2} \quad (3)$$

比较 (2) 、 (3) 式得

$$\frac{d^2\vec{r}}{dz^2} = \frac{\nabla n}{n} \quad (4)$$

$$\because n^2(r) = n_0^2(1 - \alpha^2 r^2), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\nabla n^2 = 2n \nabla n = -n_0^2 \alpha^2 \cdot 2r \cdot \nabla r$$

$$= -2n_0^2 \alpha^2 (x \vec{i} + y \vec{j})$$

$$\therefore \nabla n = -\frac{n_0^2 \alpha^2}{n} (x \vec{i} + y \vec{j})$$

$$\because \frac{d^2\vec{r}}{dz^2} = \frac{d^2x}{dz^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dz^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dz^2} \vec{k}$$

$$= \frac{d^2x}{dz^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dz^2} \vec{j}$$

$\therefore$  (4) 式化为

$$\frac{d^2x}{dz^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dz^2} \vec{j} = -\frac{n_0^2 \alpha^2}{n} (x \vec{i} + y \vec{j})$$

$$= -\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2 r^2} (x \vec{i} + y \vec{j})$$

$$\approx -\alpha^2 (x \vec{i} + y \vec{j})$$

即 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dz^2} = -\alpha^2 x \\ \frac{d^2y}{dz^2} = -\alpha^2 y \end{cases}$$

其解为

$$\begin{cases} x = A\cos\alpha z + B\sin\alpha z \\ y = C\cos\alpha z + D\sin\alpha z \end{cases}$$

可见 $x, y$ 都是 $z$ 的周期函数, 周期均为 $\frac{2\pi}{\alpha}$ , 与入射方向无关, 所以满足自聚焦条件。

(1) 把边界条件 $z=0, x=x_0, y=0, \beta_0 = \frac{\pi}{2}$ 代入解中, 确定常数 $A, B, C, D$ 得

$$C=0, A=x_0$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)_{z=0}}{\left(\frac{dz}{ds}\right)_{z=0}} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\gamma_0} \equiv \alpha B$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\cos\beta_0}{\cos\gamma_0} \equiv \alpha D$$

$$\because \beta_0 = \frac{\pi}{2}, \cos\beta_0 = 0$$

$$\therefore \cos\alpha_0 = \sin\gamma_0 \quad \text{得} \quad B = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\gamma_0, D=0$$

$$\therefore \begin{cases} x(z) = x_0 \cos\alpha z + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\gamma_0 \sin\alpha z \\ y(z) = 0 \end{cases}$$

可见光在 $xz$ 平面中传播。

$$(2) \text{ 把 } z=0, x=x_0, y=0, \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, x_0 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\gamma_0$$

代入解中, 得

$$A = x_0, \quad C = 0$$

$$\therefore \left( \frac{dx}{dz} \right)_{z=0} = \alpha B = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \gamma_0} = 0$$

$$\therefore B = 0$$

$$\therefore \left( \frac{dy}{dz} \right)_{z=0} = \alpha D = \frac{\cos \beta_0}{\cos \gamma_0} = \operatorname{tg} \gamma_0$$

$$\therefore D = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \gamma_0 = x_0$$

故得解

$$\begin{cases} x(z) = x_0 \cos \alpha z \\ y(z) = x_0 \sin \alpha z \end{cases}$$

可见光线轨迹为等距螺旋线。

**2—13 解** 光线微分方程  $-\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n$  可表示为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) \vec{i} + \frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) \vec{j} + \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) \vec{k} \\ &= \frac{dn}{dx} \vec{i} + \frac{dn}{dy} \vec{j} + \frac{dn}{dz} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\therefore n = n(z)$$

$$\therefore \frac{dn}{dx} = \frac{dn}{dy} = 0$$

即

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = 0$$



$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{dn}{dz}$$

$$\text{又 } \because \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{s}, \quad n\vec{s} = p_0 \vec{i} + q_0 \vec{j} + l \vec{k}$$

$$\therefore n \frac{dx}{ds} = p_0, \quad n \frac{dy}{ds} = q_0, \quad n \frac{dz}{ds} = l$$

这是光线的三个分量。

$$\text{且} \quad p_0^2 + q_0^2 + l^2 = n^2$$

$$\text{由} \quad n \frac{dx}{ds} = n \frac{dx}{dz} \frac{dz}{ds} = l \frac{dx}{dz} = p_0$$

解得

$$x = x_0 + p_0 \int_{z_0}^z \frac{dz}{l}$$

同理可得

$$y = y_0 + q_0 \int_{z_0}^z \frac{dz}{l}$$

$$\therefore \quad l = \sqrt{n^2 - p_0^2 - q_0^2}$$

$$n = a + bz = n(0) + bz$$

式中  $n(0)$  为  $z=0$  处的折射率。

$$\therefore \int_{z_0}^z \frac{dz}{l} = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(a+bz)^2 - (p_0^2 + q_0^2)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b} \ln \left[ a + bz + \sqrt{(a + bz)^2 - (p_0^2 + q_0^2)} \right] \Big|_{z_0}^z \\
&= \frac{1}{b} \ln \frac{a + bz + \sqrt{(a + bz)^2 - (p_0^2 + q_0^2)}}{a + bz_0 + \sqrt{(a + bz_0)^2 - (p_0^2 + q_0^2)}}
\end{aligned}$$

在近轴条件下

$$p_0^2 + q_0^2 \ll (a + bz_0)^2$$

$$p_0^2 + q_0^2 \ll (a + bz)^2$$

所以

$$x = x_0 + \frac{p_0}{b} \ln \frac{a + bz}{a + bz_0}$$

$$= x_0 + \frac{p_0}{b} \ln \frac{n(0) + bz}{n(0) + bz_0}$$

$$y = y_0 + \frac{q_0}{b} \ln \frac{n(0) + bz}{n(0) + bz_0}$$

$$\therefore n = \sqrt{l^2 + p_0^2 + q_0^2}$$

$$\approx l = n(0) + bz$$

$$\therefore z = \frac{1}{b} [l - n(0)]$$

微分方程的解为

$$\begin{cases}
x = x_0 + \frac{p_0}{b} \ln \frac{n(0) + bz}{n(0) + bz_0} \\
y = y_0 + \frac{q_0}{b} \ln \frac{n(0) + bz}{n(0) + bz_0} \\
z = \frac{1}{b} [l - n(0)]
\end{cases}$$

$$2-17 \quad \text{证} \quad \text{由} \quad \frac{1}{\rho} = \vec{v} \cdot \nabla \ln n$$

$$\because \quad n = n(y)$$

$$\therefore \quad \nabla \ln n = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dy} \vec{j}$$

由于光线近于平行  $x$  轴入射,  $\vec{v}$  为主法线方向的单位矢量, 故  $\vec{v} = \vec{j}$ , 由此可得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dy} \right)$$

$$\rho = \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dy} \right) \right]^{-1}$$

由于透明体很薄, 所以光线在透明体中的轨迹近似是一半径为  $\rho = \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dy} \right) \right]^{-1}$  的圆弧。若透明体不薄, 则随着光线远离表面将逐渐偏离圆弧。

2-23 解 (1) 设任意一条近于平行板轴的光线在  $A$  点处入射, 其中  $OA = r$ 。因为当光线沿  $x$  轴入射, 在折射率随  $y$  坐标变化的透明体中光线轨迹是一圆弧 (见 2-17 题)。若  $n(\vec{r})$  随  $\vec{r}$  增加而减小, 则光线轨迹  $\widehat{AB}$  的曲率中心在  $O'$  点, 曲率半径  $\rho = O'B$ 。图 66 中  $\overline{BC}$  为  $\widehat{AB}$  在  $B$  点的切线。

$$\because \quad O'B \perp BC, \quad O'A \perp \vec{i}$$

$$\therefore \quad \angle AO'B = \alpha$$

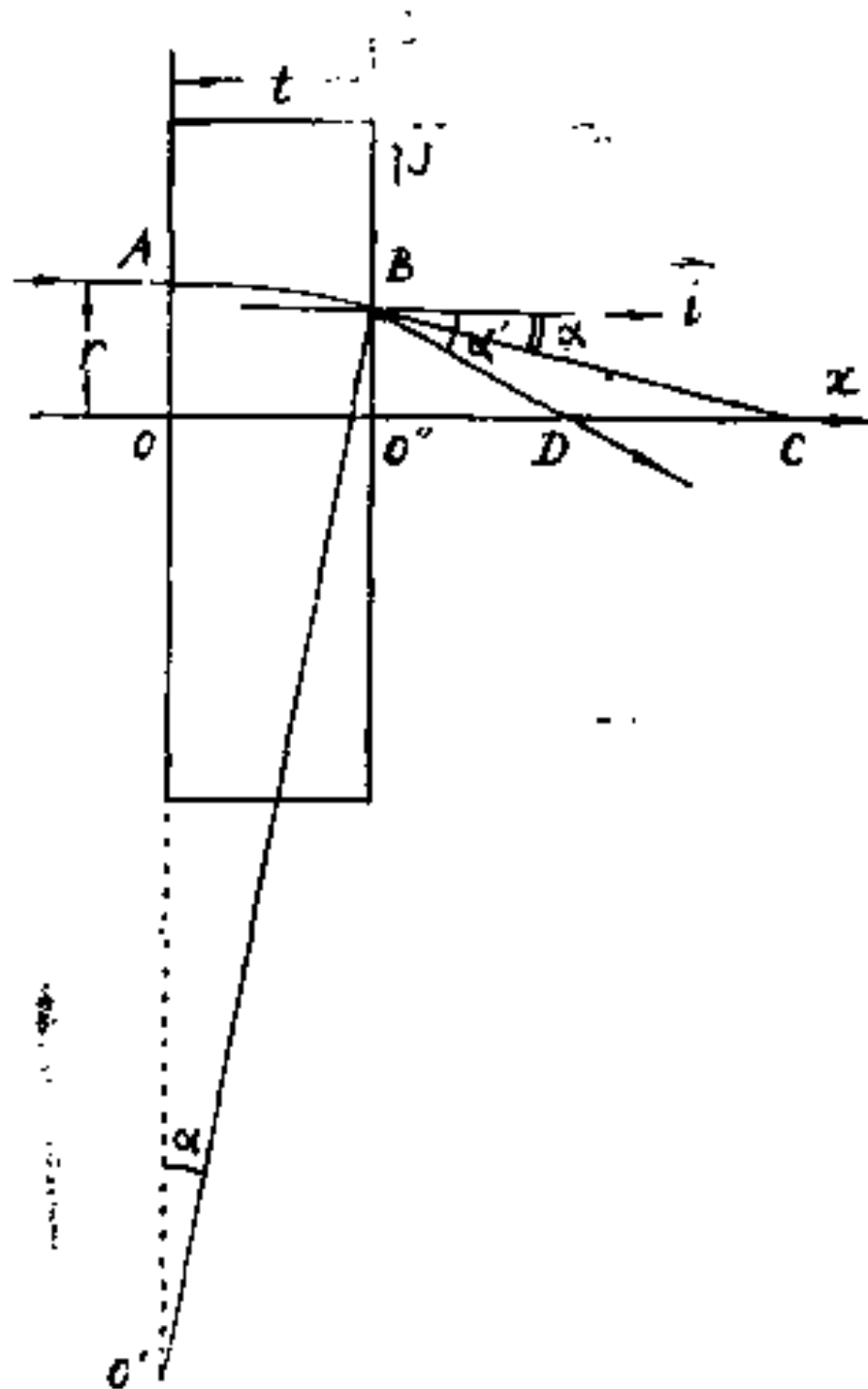


图 66

出射光线在  $B$  点出射时产生的折射线沿  $BD$  方向。

设  $O''B = y \approx r$ ,  $O''D = x_0$

若  $D$  为焦点, 则  $x_0$  应是与  $r$  无关的常数。

由折射定律

$$n \sin \alpha = \sin \alpha' \approx \tan \alpha'$$

$$\approx \frac{y}{x_0} \approx \frac{r}{x_0}$$

$$\therefore \sin \alpha \approx \frac{t}{\rho}$$

$$\therefore \frac{nt}{\rho} = \frac{r}{x_0}$$

即

$$\frac{n}{\rho} = \frac{r}{tx_0}$$

$$\text{又 } \therefore \frac{n}{\rho} = \vec{v} \cdot \nabla n = -\vec{j} \cdot \frac{dn}{dy} \vec{j}$$

$$= -\frac{dn}{dy} \approx -\frac{dn}{dr}$$

$$\therefore \frac{r}{tx_0} = -\frac{dn}{dr}$$

积分

$$\int_0^r r dr = - \int_{n_0}^n tx_0 dn$$

$$\frac{1}{2} r^2 = -tx_0(n - n_0)$$

得

$$n = n_0 - \frac{r^2}{2x_0 t} \quad (1)$$

(2) 要起凹透镜作用, 则要求圆板中心折射率最低, 随着远离中心折射率逐渐增大, 即  $n$  随  $r$  之增加而增大。这时

(1) 式仍成立, 但求出的  $x_0$  为负, 意味着成的是虚象。

(3) 已知  $n_0 = 1.4$ ,  $n = 1.1$ ,  $r = 10\text{cm}$ ,  $x_0 = 50\text{cm}$

代入 (1) 式:  $1.1 = 1.4 - \frac{10^2}{2 \times 50t}$

解得  $t = 3.3\text{cm}$

$\therefore n(r) = 1.4 - 0.003r^2$

**2—26 解** 如图 67 所示, 设由界面  $f(x, y, z) = 0$  分开的二媒质的折射分别为  $n_1$ 、 $n_2$ , 先考虑折射分量, 让光线从  $A(x_1, y_1, z_1)$  出发, 经界面上的  $P(x, y, z)$  点折射后到达点  $B(x_2, y_2, z_2)$ 。

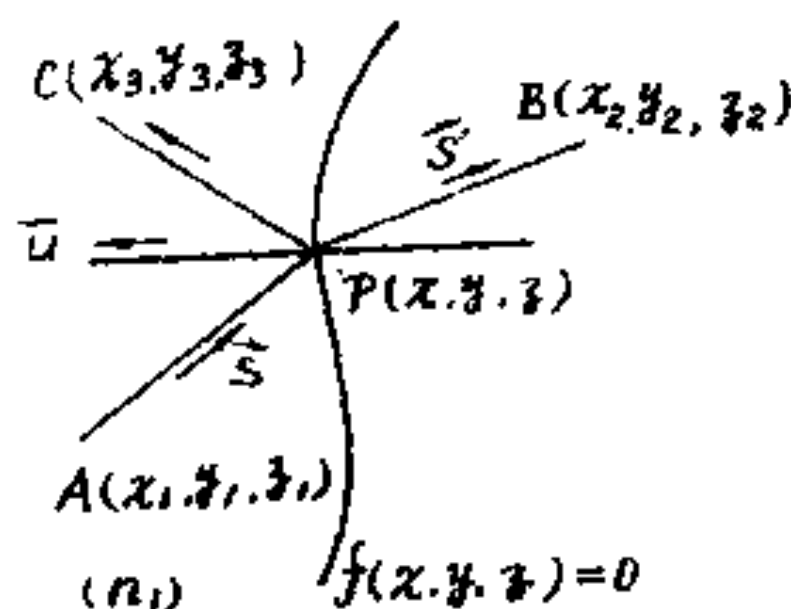


图 67

$\vec{u}$  为界面上  $P$  点处的单位法向矢量,  $\vec{s}$ 、 $\vec{s}'$  分别为沿  $AP$  和  $PB$  的单位矢量。

下面求  $\vec{s}$ 、 $\vec{s}'$  和  $\vec{u}$  三者间的关系。

因为沿  $APB$  的光程  $\Delta$  为

$$\Delta(x, y, z) = n_1 d_1 + n_2 d_2$$

$$\text{式中 } d_1 = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}$$

$$d_2 = [(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2]^{1/2}$$

如果折射点移到  $P'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$  点, 则光程变化为

$$\delta\Delta = (n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2)\delta x + (n_1\beta_1 - n_2\beta_2)\delta y + (n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2)\delta z = 0 \quad (1)$$

式中,  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\gamma_1$  和  $\alpha_2$ 、 $\beta_2$ 、 $\gamma_2$  分别表示  $AP$  和  $PB$  的方向余弦, 即分别是  $\vec{s}$ 、 $\vec{s}'$  的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分量。

(1) 式中  $\delta x$ 、 $\delta y$ 、 $\delta z$  三者不是完全独立的, 因为变化必须使  $P'$  点仍在界面  $f(x, y, z) = 0$  上, 所以必有

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

从上式解出  $\delta z$  代入 (1) 式可得到  $\delta x$ 、 $\delta y$  独立变化的等式。这样  $\delta x$ 、 $\delta y$  的系数必须都为零才能使 (1) 式成立。这就导出

$$\frac{n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{\partial f/\partial x} = \frac{n_1\beta_1 - n_2\beta_2}{\partial f/\partial y} = \frac{n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2}{\partial f/\partial z} = K$$

式中  $K$  是常数。

即

$$\begin{cases} n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = K \frac{\partial f}{\partial x} \\ n_1\beta_1 - n_2\beta_2 = K \frac{\partial f}{\partial y} \\ n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2 = K \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (2)$$

$\therefore \nabla f$  垂直于分界面，即由  $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial z}$  组成的矢量是界面的法向矢量。

$\therefore$  (2) 式可写成

$$n_1 \vec{s} - n_2 \vec{s}' = K_1 \vec{u} \quad (3)$$

$K_1$  是由分量  $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial z}$  组成的矢量的大小的  $K$  倍值。

式 (3) 表明  $\vec{s}$ 、 $\vec{s}'$ 、 $\vec{u}$  共面，即入射光、折射光、分界面法线在同一平面里。

(3) 式两边矢乘  $\vec{u}$ ，得  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ，这就是折射定律。 $i_1$  是  $\vec{u}$ 、 $\vec{s}$  间夹角， $i_2$  是  $\vec{u}$ 、 $\vec{s}'$  间夹角。

用同样的方法，可以推出反射定律。

**2—27** 证如图 68，设  $C$  是折射面  $\Sigma$  的曲率中心， $A$  是  $\Sigma$  上的任意一点。用  $\Delta$  表示沿  $SAP$  的光程，则

$$\Delta = [SAP] = [SA] + [AP] = n_1 SA + n_2 AP$$

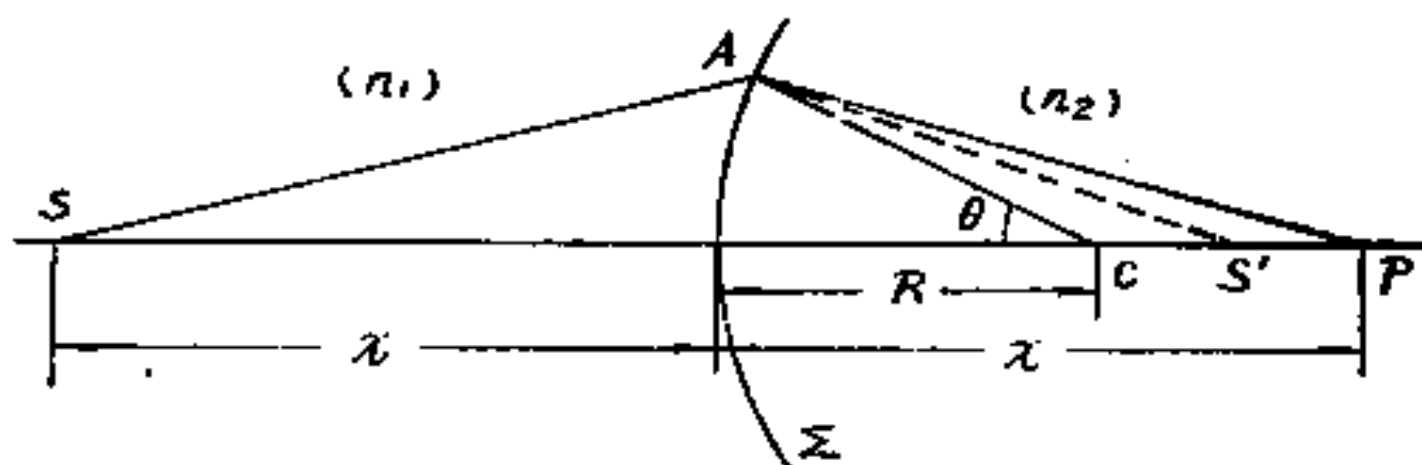


图 68



在 $\triangle SAC$ 中, 边 $SC = x + R$ , 由余弦定理得

$$SA = [(x + R)^2 + R^2 - 2(x + R)R\cos\theta]^{1/2}$$

式中的 $\theta$ 角如图所示。当 $\theta$ 角很小时,

$$\begin{aligned} SA &\doteq [x^2 + 2xR + R^2 + R^2 - 2(xR + R^2)(1 - \frac{\theta^2}{2})]^{1/2} \\ &\doteq x \left[ 1 + \frac{(x + R)R\theta^2}{x^2} \right]^{1/2} \doteq x + \frac{(x + R)R\theta^2}{2x} \end{aligned}$$

同理由 $\triangle PAC$ , 利用余弦定理可得

$$AP \doteq x - \frac{(x - R)R\theta^2}{2x}$$

$$\text{因此 } \Delta \doteq n_1 x + n_1 \frac{(x + R)R\theta^2}{2x} + n_2 x - n_2 \frac{(x - R)R\theta^2}{2x}$$

$$\therefore \frac{d\Delta}{d\theta} \doteq n_1 \frac{(x + R)R}{x} \theta - n_2 \frac{(x - R)R}{x} \theta$$

显然, 当 $\theta = 0$ 时,  $\frac{d\Delta}{d\theta} = 0$ 。因此路径 $SAP$  (指 $SAP$ 的光程而言) 总是对应于极值, 所以根据费马原理它总是一条实际光线的路径。这个结论也可以很容易地由折射定律得出。

为了确定这个极值是极大还是极小, 我们计算  $\frac{d^2\Delta}{d\theta^2}$  在  $\theta = 0$  处的值,

$$\left. \frac{d^2\Delta}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{n_1(x + R)R}{x} - \frac{n_2(x - R)R}{x}$$

$$= n_1 \frac{R}{x} [R(n+1) - x(n-1)]$$

式中  $n = \frac{n_2}{n_1}$  代表相对折射率，已经定  $n > 1$ 。显然，若

$$x > R \frac{n+1}{n-1}$$

则  $-\frac{d^2 \Delta}{d\theta^2}$  为负，因而实际光线路径  $SAP$  对应极大值。反之，就对应极小值。可是，若

$$x = R \frac{n+1}{n-1}$$

则实际光线路径对应于光程的平稳值。这意味着（当  $\theta$  很小时）所有邻近的路径都对应于实际光线，也就是说， $P$  点是  $S$  点的傍轴象（高斯象）。

上述问题也能由等光程原理给出更一般的结果。如果  $S'$  是  $S$  的傍轴象点，则由等光程原理

$$[SOS'] = [SAS']$$

$$\text{即} \quad n_1 SO + n_2 OS' = n_1 SA + n_2 AS'$$

$$\begin{aligned} \text{因此} \quad n_1 SO + n_2 OP &= n_1 SA + n_2 (AS' - OS' + OP) \\ &= n_1 SA + n_2 (AS' + S'P) > n_1 SA + n_2 AP \end{aligned}$$

同理，如果  $P$  点在  $S'$  的左边，则可证明  $n_1 SO + n_2 OP$  将小于  $n_1 SA + n_2 AP$ 。请注意，在这个证明中，并不要求  $SO = OP$ 。去掉  $SO = OP$  的条件，我们得到的一般性结论是：当  $P$  点在傍轴象点右侧时， $SOP$  的光程对应于极大值，当  $P$  点在傍轴

象点的左侧时,  $SOP$  的光程对应于极小值。这个结论也包括了前面在  $SO = OP$  的条件下所得到的特殊结果。

### 第三章 光学成象的几何理论 成象仪器

3-1 证 (1)  $z = c_0 + c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4 + \dots$

式中,  $\xi^2 \equiv x^2 + y^2$

$$z' = \frac{dz}{d\xi} = 2c_2 \xi + 4c_4 \xi^3$$

$$z'' = \frac{d^2 z}{d\xi^2} = 2c_2 + 12c_4 \xi^2$$

由曲率半径的公式  $\rho = \left| \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{z''} \right|$  得原点处曲率半径

$$r = \left| \frac{1 + (2c_2 \xi + 4c_4 \xi^3)^2}{2c_2 + 12c_4 \xi^2} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{2c_2}$$

$$\therefore c_2 = \frac{1}{2r}$$

(2) 过原点, 圆心在  $z$  轴上, 半径为  $r$  的球面方程可表示为

$$x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$$

即

$$z - r = \pm \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$$

考虑左半圆, 根号前应取负号, 即

$$z = r - \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$$

在 origin 附近作级数展开, 得

$$\begin{aligned} z &= r - r \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8r^4} - \dots \right) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{2r} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{8r^3} + \dots \end{aligned}$$

已知

$$z = c_0 + c_2(x^2 + y^2) + c_4(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

当曲面过坐标原点时,  $c_0 = 0$

比较二式, 可得

$$c_2 = \frac{1}{2r}, \quad c_4 = \frac{1}{8r^3}$$

证毕

3-6 证: 已知投影变换公式:

$$\begin{cases} x' = \frac{F_1}{F_0} = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y' = \frac{F_2}{F_0} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} z' = \frac{F_3}{F_0} = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0} \end{cases} \quad (3)$$

欲证

$$x = \frac{F'_1}{F'_0} = \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' + d'_1}{a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0}$$

$$y = \frac{F'_2}{F'_0} = \frac{a'_2x' + b'_2y' + c'_2z' + d'_2}{a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0}$$

$$z = \frac{F'_3}{F'_0} = \frac{a'_3 x' + b'_3 y' + c'_3 z' + d'_3}{a'_0 x' + b'_0 y' + c'_0 z' + d'_0}$$

把 (1)、(2)、(3) 式整理成下面形式

$$(a_1 - x' a_0)x + (b_1 - x' b_0)y + (c_1 - x' c_0)z = (x' d_0 - d_1)$$

$$(a_2 - y' a_0)x + (b_2 - y' b_0)y + (c_2 - y' c_0)z = (y' d_0 - d_2)$$

$$(a_3 - z' a_0)x + (b_3 - z' b_0)y + (c_3 - z' c_0)z = (z' d_0 - d_3)$$

令

$$a_{11} = (a_1 - x' a_0), \quad a_{12} = (b_1 - x' b_0), \quad a_{13} = (c_1 - x' c_0)$$

$$a_{21} = (a_2 - y' a_0), \quad a_{22} = (b_2 - y' b_0), \quad a_{23} = (c_2 - y' c_0)$$

$$a_{31} = (a_3 - z' a_0), \quad a_{32} = (b_3 - z' b_0), \quad a_{33} = (c_3 - z' c_0)$$

$$C_1 = (x' d_0 - d_1), \quad C_2 = (y' d_0 - d_2), \quad C_3 = (z' d_0 - d_3)$$

则方程化为

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = C_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = C_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C_3 \end{cases}$$

用矩阵可表示为  $AX = C$  式中,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

由线性代数的克拉麦尔定理, 此方程的解可表示为:

$$x = \frac{D_1}{|A|}, \quad y = \frac{D_2}{|A|}, \quad z = \frac{D_3}{|A|}$$

式中,  $|A|$  为矩阵  $A$  的行列式值,

$$D_1 = \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} & a_{13} \\ C_2 & a_{22} & a_{23} \\ C_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & C_1 & a_{13} \\ a_{21} & C_2 & a_{23} \\ a_{31} & C_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & C_3 \end{vmatrix}$$

这样不难算得  $|A| = a'_0x + b'_0y + c'_0z + d'_0$

式中,

$$a'_0 \equiv a_0(b_3c_2 - b_2c_3) + b_0(a_2c_3 - a_3c_2) + c_0(a_3b_2 - a_2b_3)$$

$$b'_0 \equiv a_1(b_3c_0 - b_0c_3) + b_1(a_0c_3 - a_3c_0) + c_0(a_3b_0 - a_0b_3)$$

$$c'_0 \equiv a_1(b_0 - c_0) + b_1(c_0 - a_0) + c_1(a_0 - b_0)$$

$$d'_0 \equiv a_1(c_3 - b_3) + b_1(a_3 - c_3) + c_1(a_3 - b_3)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} & a_{13} \\ C_2 & a_{22} & a_{23} \\ C_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1$$

式中,

$$a'_1 \equiv b_0(c_2d_3 - c_3d_2) + c_0(b_3d_2 - b_2d_3) + d_0(b_2c_3 - b_3c_2)$$

$$b'_1 \equiv b_0(c_3d_1 - c_1d_3) + c_0(b_1d_3 - b_3d_1) + d_0(b_3c_1 - b_1c_3)$$

$$c'_1 \equiv b_0(c_1d_2 - c_2d_1) + c_0(b_2d_1 - b_1d_2) + d_0(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$d'_1 \equiv b_1(c_3d_2 - c_2d_3) + c_1(b_2d_3 - b_3d_2) + d_1(b_3c_2 - b_2c_3)$$

$$\therefore x = -\frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' + d'_1}{a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0} = \frac{F'_1}{F'_0}$$

同理可证  $y = \frac{F'_2}{F'_0}, \quad z = \frac{F'_3}{F'_0}$

证毕

### 3—12 (1) 证明

适当选择坐标系, 一个具有轴对称的投影变换可表示为

$$y = \frac{(c_0 d_3 - c_3 d_0) y'}{b_2 (c_0 z' - c_3)} \quad (1)$$

$$z = \frac{-d_0 z' + d_3}{c_0 z' - c_3} \quad (2)$$

在高斯光学锐成象条件下, 角特征函数为

$$T = T^{(0)} + T^{(2)} = n_1 a_1 - n_0 a_0 + \mathcal{A} u^2 + \mathcal{B} v^2 + \mathcal{C} w^2$$

式中,

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \frac{1}{2} \frac{r}{(n_1 - n_0)}, \quad \mathcal{C} = -\frac{r}{n_1 - n_0},$$

$$u^2 = p_0^2 + q_0^2, \quad v^2 = p_1^2 + q_1^2, \quad w^2 = p_0 p_1 + q_0 q_1.$$

如图69选取坐标系。

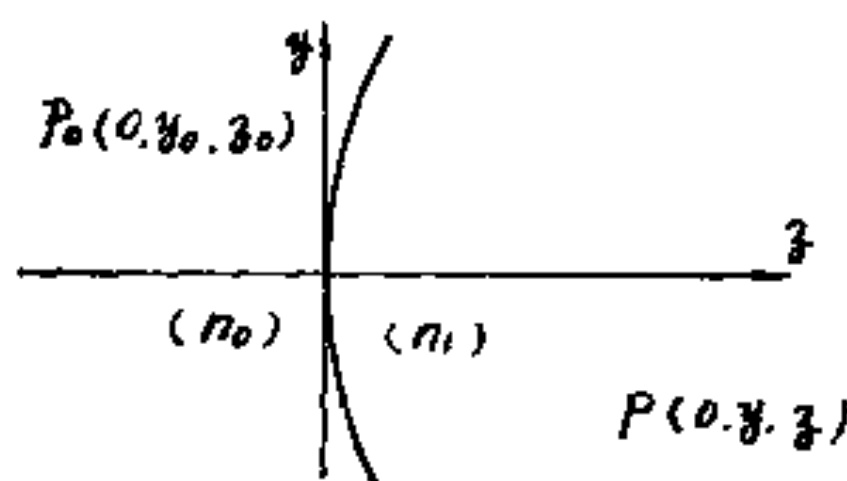


图 69

$\therefore$  物坐标系和象坐标系重合

$$\therefore a_0 = a_1 = 0$$

则 
$$T = \mathcal{A} u^2 + \mathcal{B} v^2 + \mathcal{C} w^2$$

设一对共轭点  $P_0$ 、 $P_1$  在  $yoz$  平面中，其坐标分别为  $(0, y_0, z_0)$ 、 $(0, y_1, z_1)$

$$\begin{aligned} \therefore y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial q_0} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q_0} + \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial q_0} \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial q_0} \end{aligned}$$

$$\therefore y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 = 2\mathcal{A}q_0 + \mathcal{C}q_1 \quad (3)$$

同理  $y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial T}{\partial q_1} = -(2\mathcal{B}q_1 - \mathcal{C}q_0) \quad (4)$

由 (3) 式得  $q_1 = \frac{1}{\mathcal{C}} \left( y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 - 2\mathcal{A}q_0 \right)$

代入 (4) 式得

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{q_1}{m_1} z_1 - 2\mathcal{B}q_1 + \mathcal{C}q_0 = \left( \frac{z_1}{m_1} - 2\mathcal{B} \right) q_1 + \mathcal{C}q_0 \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}} \left( \frac{z_1}{m_1} - 2\mathcal{B} \right) \left( y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 - 2\mathcal{A}q_0 \right) + \mathcal{C}q_0 \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}} \left( \frac{z_1}{m_1} - 2\mathcal{B} \right) y_0 - \left[ \frac{1}{\mathcal{C}} \left( \frac{z_1}{m_1} - 2\mathcal{B} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{z_0}{m_0} + 2\mathcal{A} \right) + \mathcal{C} \right] q_0 \end{aligned}$$

$\therefore P_0$ 、 $P_1$  是一对共轭点，消去  $q_1$  的同时， $q_0$  也必须消去。所以有



$$\frac{1}{\mathcal{C}} \left( \frac{z_1}{m_1} - 2\mathcal{B} \right) \left( \frac{z_0}{m_0} + 2\mathcal{A} \right) + \mathcal{C} = 0$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{\mathcal{C}} \left( \frac{z_1}{m_1} - 2\mathcal{B} \right) y_0$$

在高斯光学范围内  $m_0 \approx n_0$ ,  $m_1 \approx n_1$

$$\therefore y_0 = \frac{\mathcal{C} y_1}{\frac{z_1}{n_1} - 2\mathcal{B}} \quad (5)$$

$$z_0 = \frac{-\frac{2\mathcal{A}n_0}{n_1} z_1 + n_0 (4\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2)}{\frac{z_1}{n_1} - 2\mathcal{B}} \quad (6)$$

(1)、(2) 式中的  $y$ 、 $z$ 、 $y'$ 、 $z'$  分别相当于 (5)、(6) 式中的  $y_0$ 、 $z_0$ 、 $y_1$ 、 $z_1$ 。比较两对式子可见高斯光学锐成像条件下，单个旋转折射面物空间和象空间的变换确实是投影变换。

(2) 计算有关常数：

比较 (5) 式与 (1) 式得：

$$\frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2} = \mathcal{C}$$

$$c_0 = \frac{1}{n_1}$$

$$c_3 = 2\mathcal{B}$$

比较 (6) 式与 (2) 式得：

$$d_0 = \frac{2\mathcal{A}n_0}{n_1}$$

$$d_3 = n_0 (4AB - C^2)$$

由  $A = B = \frac{1}{2} \frac{r}{n_1 - n_0}$ ,  $C = -\frac{r}{n_1 - n_0}$  可整理得

$$b_2 = -\frac{n_0}{n_1} \frac{r}{(n_1 - n_0)}$$

$$c_0 = \frac{1}{n_1}$$

$$c_3 = \frac{r}{n_1 - n_0}$$

$$d_0 = \frac{n_0}{n_1} \frac{r}{(n_1 - n_0)}$$

$$d_3 = 0$$

3—17 解 (1)

已知:  $r_1 = 30\text{cm}$ ,  $r_2 \rightarrow -\infty$ ,  $t = 2\text{cm}$ ,  $n = 1.5$

$$\Delta = (n-1)[n(r_1 - r_2) - (n-1)t]$$

当  $r_2 \rightarrow -\infty$  时  $\Delta \rightarrow \infty$

从凸面顶点到主点  $U$  的距离  $d = (n-1) - \frac{r_1 t}{\Delta} = 0$

从平面顶点到象主点  $U'$  的距离  $d' = (n-1) - \frac{r_2 t}{\Delta}$

$$\therefore \frac{1}{d'} = \frac{\Delta}{(n-1)r_2 t} = \frac{n(r_1 - r_2) - (n-1)t}{r_2 t}$$

$$\approx -\frac{n}{t} = -\frac{1.5}{2}$$

$$\therefore d' = -\frac{2}{1.5} \approx -1.3$$

$$\text{凸面光焦度 } \mathcal{P}_1 = \frac{n-1}{r_1} = \frac{0.5}{0.3}$$

$$\text{平面光焦度 } \mathcal{P}_2 = \frac{1-n}{r_2} = 0$$

$$\text{透镜总光焦度 } \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \frac{t}{n} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$$

$\therefore$  透镜物象空间的折射率均为 1

$$\therefore f = -f' = \frac{1}{\mathcal{P}} = 0.6\text{m} = 60\text{cm}$$

即  $\overline{FU} = 60\text{cm}$ ,  $\overline{F'U'} = -60\text{cm}$

物空间节点与物空间主点重合, 象空间节点与象空间主点重合 (见图70)。

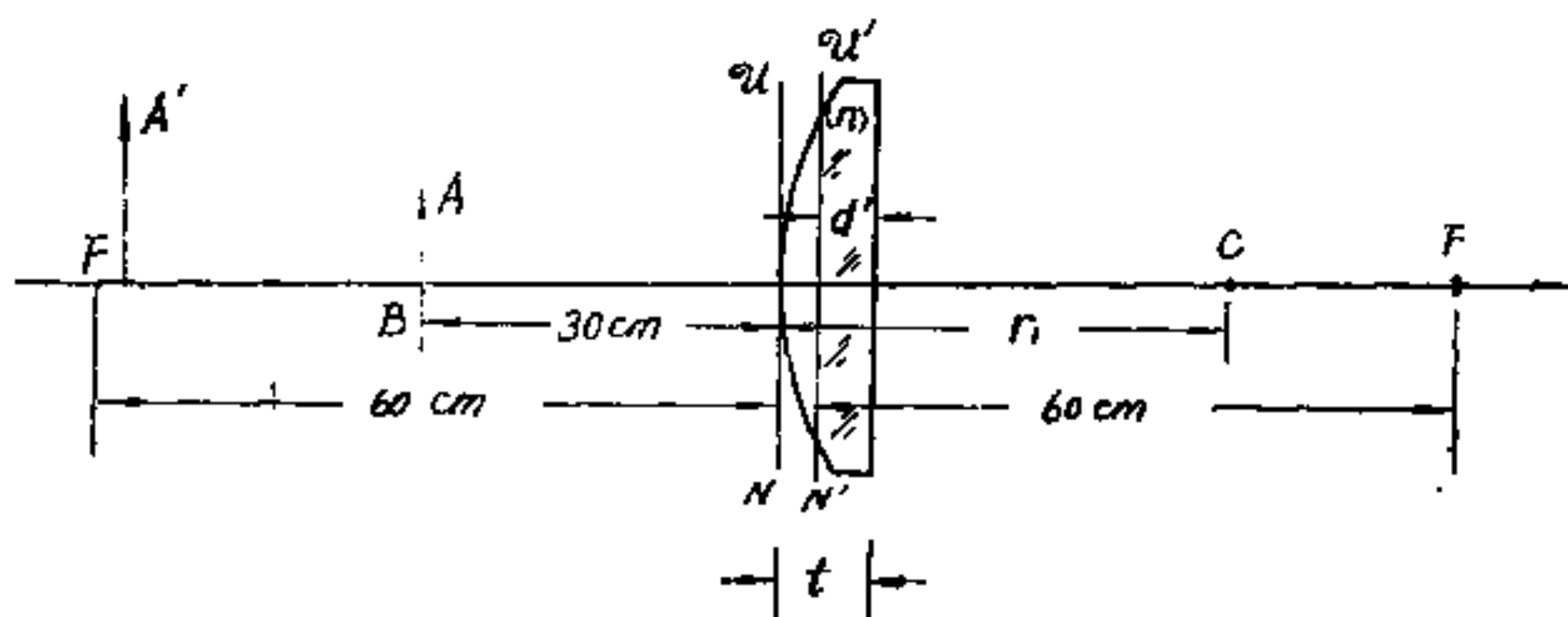


图 70

(2) 由题意, 物距  $OB = -30\text{cm}$  即

$$Z_{\text{物}} = FB = FO + OB = 30\text{cm}$$

由牛顿公式  $Z Z' = ff'$

$$\therefore Z' = \frac{ff'}{Z} = \frac{-60 \times 60}{30} = -120 \text{ cm}$$

象在焦点  $F'$  左边 120 cm 处，即在平表面左侧

$$120 - (60 - 1.3) = 61.3 \text{ cm 处。}$$

(3) 追迹法的基本公式  $\sin I_1 = \frac{y}{r_1}$  ,

$$\sin I'_K = \frac{n_K}{n'_K} \sin I_K, \quad U'_K = U_K + I_K - I'_K, \quad L'_K = \frac{\sin I'_K}{\sin U'_K} r_K + r_K$$

传递公式  $L_{K+1} = L'_K - d_K, \quad U_{K+1} = U'_K$

如图 71 所示,  $C$  是凸面的曲率中心。按题意要求追迹从  $P$  点发出的光线 1 和光线 2 来求得  $P$  的象  $P'$  的位置。

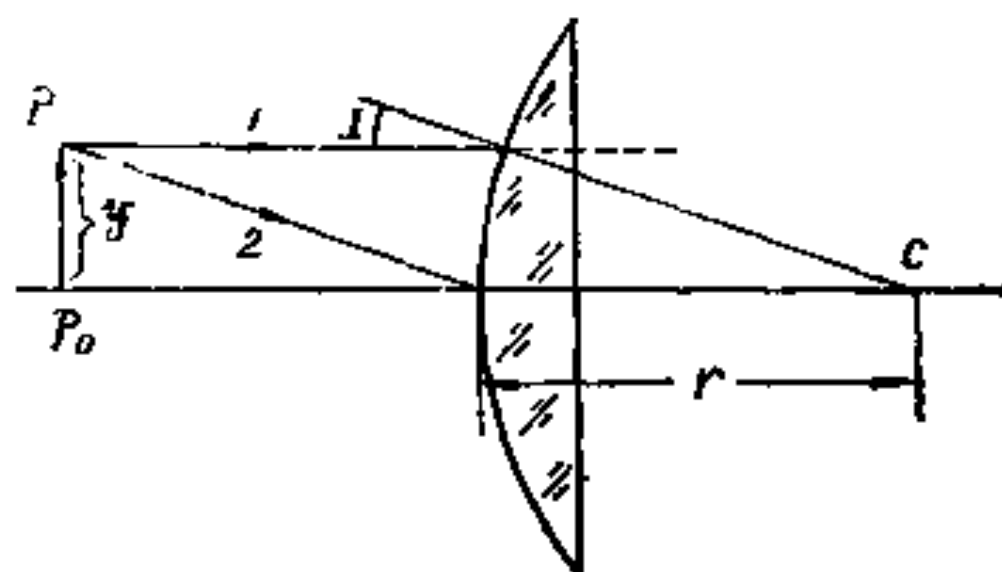


图 71

(a) 光线 1 追迹:

$$\because y = 15 \text{ cm}, \quad r_1 = 30 \text{ cm}$$

$$\therefore \sin I_1 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \quad \text{即 } I_1 = 30^\circ$$

$$\sin I'_1 = \frac{n_1}{n'_1} \sin I_1 = \frac{1}{1.5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{即 } I' = 19.5^\circ$$

$$\because U_1 = 0$$

$$\therefore U'_1 = U_1 + I_1 - I'_1 = 0 + 30^\circ - 19.5^\circ = 10.5^\circ$$

$$L'_1 = \frac{\sin I'_1}{\sin U'_1} r_1 + r_1 = \frac{\frac{1}{3} \times 30}{0.18} + 30 = 84.7 \text{ cm}$$

$$U_2 = U'_1 = 10.5^\circ$$

$$L_2 = L'_1 - d_1 = 84.7 - 2 = 82.7 \text{ cm}$$

$$I_2 = -U_2 = -10.5^\circ$$

$$\sin I'_2 = \frac{n_2}{n'_2} \sin I_2 = \frac{1.5}{1} \sin(-10.5^\circ) = -0.27$$

$$\text{即 } I'_2 = -15.9^\circ$$

$$U'_2 = -I'_2 = 15.9^\circ$$

$$L'_2 = \frac{\text{tg} U_2}{\text{tg} U'_2} L_2 = \frac{\text{tg} 10.5^\circ}{\text{tg} 15.9^\circ} \times 82.7 = 53.9 \text{ cm}$$

$\therefore$  光线 1 与轴的交点和平表面右侧 53.9cm 处, 二者交角为  $15.9^\circ$ 。

(b) 光线 2 追迹

$$L_1 = 0, \quad U_1 = \text{arctg} \left( \frac{15}{30} \right) = 26.6^\circ, \quad n_1 = 1, \quad n'_1 = 1.5$$

$$I_1 = -U_1 = -26.6^\circ$$

$$\sin I'_1 = \frac{n_1}{n'_1} \sin I_1 = \frac{1}{1.5} \sin(-26.6^\circ) = -0.298$$

$$\text{即 } I'_1 = -17.4^\circ$$

$$U'_1 = U_1 + I_1 - I'_1 = 26.6^\circ - 26.6^\circ + 17.4^\circ = 17.4^\circ$$

$$L'_1 = \frac{\sin I'_1}{\sin U'_1} r_1 + r_1 = \frac{\sin(-17.4^\circ)}{\sin(17.4^\circ)} \times 30 + 30 = 0$$

$$L_2 = L'_1 - d_1 = 0 - 2 = -2\text{cm}$$

$$U_2 = U'_1 = 17.4^\circ$$

$$I_2 = -U_2 = -17.4^\circ$$

$$I'_2 = \arcsin\left[\frac{n_2}{n_1} \sin I_2\right] = \arcsin[1.5 \sin(-17.4^\circ)]$$

$$= -26.6^\circ$$

$$U'_2 = -I'_2 = 26.6^\circ$$

$$L'_2 = \frac{\text{tg} U_2}{\text{tg} U'_2} L_2 = \frac{\text{tg}(17.4^\circ)}{\text{tg}(26.6^\circ)} \times (-2) = -1.25\text{cm}$$

∴ 光线2与轴之交点在于平表面左边1.25cm处，二者交角为26.6°。

(c) 光线1和光线2的交点  $P_i$  就是  $P$  的象（见图72）。

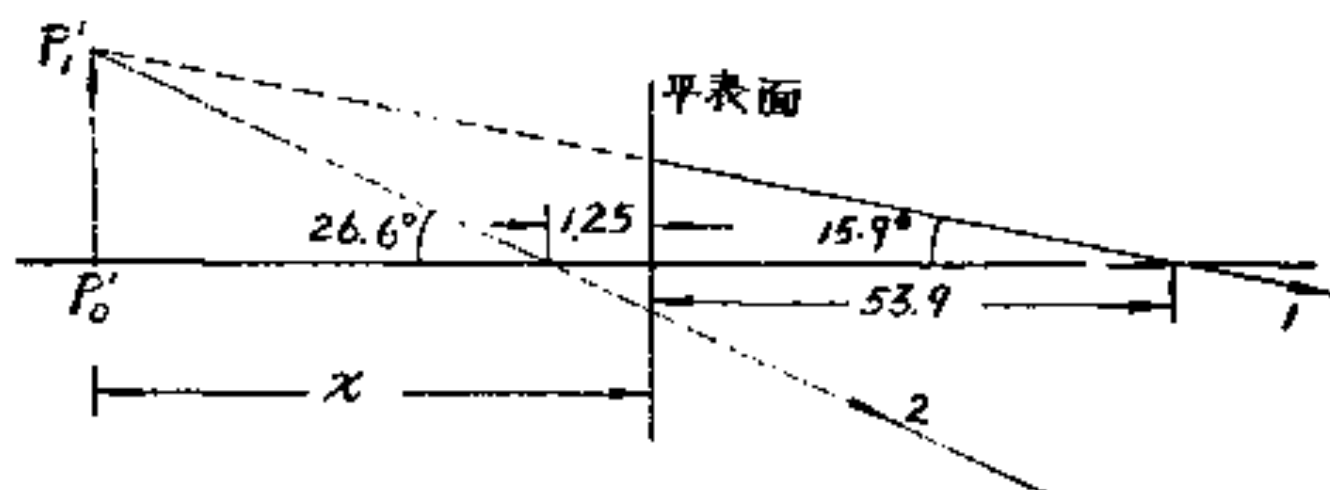


图 72

设象点距离平表面为  $x$ ，则有

$$(x - 1.25) \text{tg}(26.6^\circ) = (x + 53.9) \text{tg}(15.9^\circ)$$

解得

$$x = 74.4\text{cm}$$

### 3—25 证

如图73所示,  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  为共轴系统的各折射面。发自无穷远物体上的光线1, 平行于光轴入射, 与  $\Sigma_1$  交于  $A_1$  点,  $A_1$  点与光轴的垂直距离为  $h_1$ 。设整个光学系统在象空间的主平面为  $\mathcal{Q}$ , 则光线1与  $\mathcal{Q}$  交于  $A'$  点,  $A'$  与光轴的垂直距离也应是  $h_1$ 。象空间出射光线1' 过焦点  $F'$  与  $\Sigma_k$  交于  $A_k$  点,  $A_k$  离轴距离为  $h_k$ 。

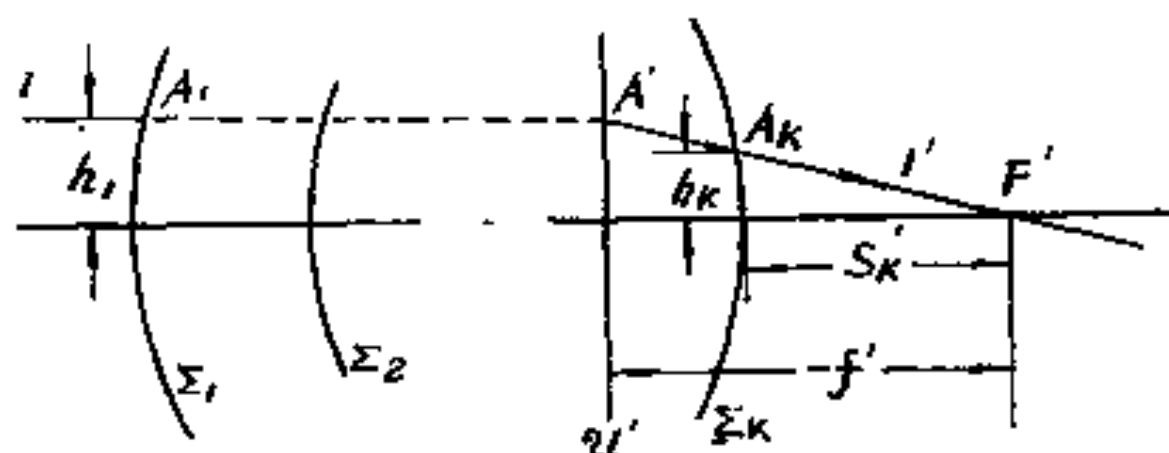


图 73

由图可见:

$$\frac{h_k}{S_k'} = -\frac{h_1}{f'}$$

$$\therefore f' = -\frac{h_1}{h_k} S_k'$$

证毕

3—28 解 (1) 如图74所示, 根据等光程原理得

$$[APB] = [AOB]$$

$$\because [APB] = [AP] + [PB] = [AP] - [BP]$$

$$\therefore [APB] = n_1 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$-n_2\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}$$

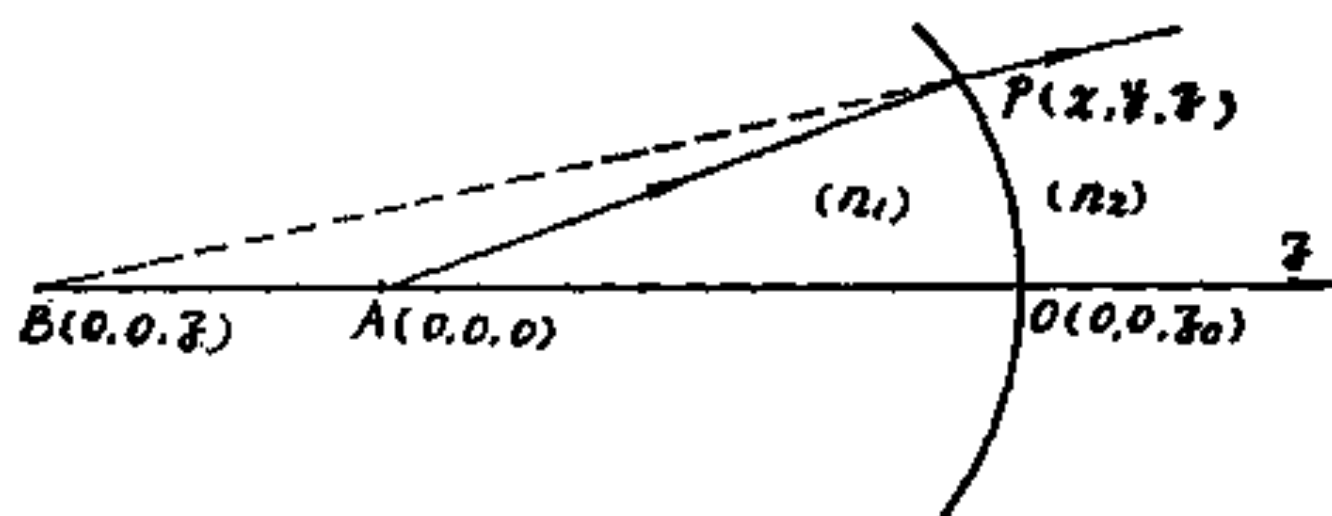


图 74

同理  $[AOB] = [AO] + [OB] = [AO] - [BO]$   
 $= n_1 z_0 - n_2 (z_0 - z')$

已知  $n_1 z_0 = n_2 (z_0 - z')$

$$\therefore n_1 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - n_2 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} = 0$$

即  $n_1^2 (x^2 + y^2 + z^2) = n_2^2 [x^2 + y^2 + (z - z')^2]$

由于折射面是旋转曲面，为了简单，可以先令  $x=0$ ，也就是在子午面内计算曲线方程，再把所得结果中的  $y^2$  改为  $(x^2 + y^2)$  就可得曲面方程。

$$\therefore n_1^2 (y^2 + z^2) = n_2^2 [y^2 + (z - z')^2]$$

由已知条件  $n_1 z_0 = n_2 (z_0 - z')$  可得  $z' = \frac{n_2 - n_1}{n_2} z_0$ ，代入上式

$$\text{得 } n_1^2 (y^2 + z^2) = n_2^2 \left[ y^2 + \left( z - \frac{n_2 - n_1}{n_2} z_0 \right)^2 \right]$$



整理得

$$y^2 + z^2 - 2 \frac{n_2 z_0}{n_1 + n_2} z + \left( \frac{n_2 z_0}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{n_1}{n_1 + n_2} z_0 \right)^2$$

$$y^2 + \left( z - \frac{n_2 z_0}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{n_1 z_0}{n_1 + n_2} \right)^2$$

把 $y^2$ 改为 $(x^2 + y^2)$ , 得曲面方程:

$$x^2 + y^2 + \left( z - \frac{n_2 z_0}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{n_1 z_0}{n_1 + n_2} \right)^2$$

∴ 折射面是球心在 $(0, 0, \frac{n_2 z_0}{n_1 + n_2})$ 处, 半径为 $\frac{n_1 z_0}{n_1 + n_2}$ 的球面。

(2) 证欲证齐明点满足正弦条件, 即证明

$$y_1 n_1 \sin \gamma_1 = y_2 n_2 \sin \gamma_2$$

由上题结果知折射面是球心在 $(0, 0, \frac{n_2 z_0}{n_1 + n_2})$ 处的球面。

如图 75, 在  $\triangle AO'P$  中应用正弦定理:

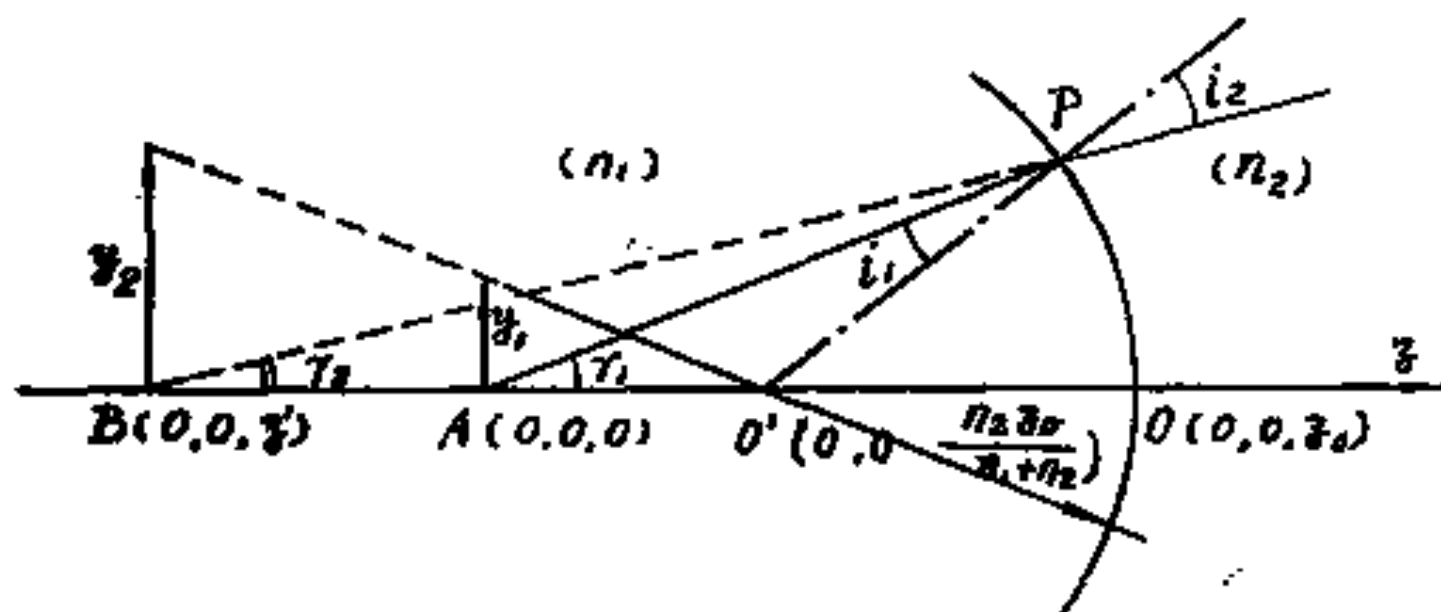


图 75

$$\sin \gamma_1 / \overline{O'P} = \sin i_1 / \overline{AO'}$$

得  $\sin \gamma_1 = (\overline{O'P} / \overline{AO'}) \sin i_1$

在  $\triangle BO'P$  中应用正弦定理:

$$\sin \gamma_2 / \overline{O'P} = \sin i_2 / \overline{BO'}$$

得  $\sin i_2 = (\overline{BO'} / \overline{O'P}) \sin \gamma_2$

根据折射定律  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  得  $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \gamma_1 &= (\overline{O'P} / \overline{AO'}) \sin i_1 = (\overline{O'P} / \overline{AO'}) \frac{n_2}{n_1} \sin i_2 \\ &= (n_2 \overline{BO'} \overline{O'P} / n_1 \overline{AO'} \overline{O'P}) \sin \gamma_2 \\ &= (n_2 \overline{BO'} / n_1 \overline{AO'}) \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

由图可见横向放大率  $y_2 / y_1 = \overline{BO'} / \overline{AO'}$

$$\therefore \sin \gamma_1 = (n_2 y_2 / n_1 y_1) \sin \gamma_2$$

即  $n_1 y_1 \sin \gamma_1 = n_2 y_2 \sin \gamma_2$

证毕

**3—30 解** 细光锥的成象公式:

子午焦线

$$\frac{n_0 \cos^3 \theta_0}{\zeta_0} - \frac{n_1 \cos^3 \theta_1}{\zeta_1} = \frac{n_0 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_1}{r_y}$$

弧矢焦线

$$\frac{n_0 \cos \theta_0}{\zeta'_0} - \frac{n_1 \cos \theta_1}{\zeta'_1} = \frac{n_0 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_1}{r_x}$$

如图76, 令  $d_0^{(s)} = \overline{F'_0 O} = \frac{\zeta'_0}{\cos \theta_0}$

$$d_0^{(i)} = \overline{F_0 O} = \frac{\zeta_0}{\cos \theta_0}$$

$$d_1^{(s)} = \overline{O F'_1} = \frac{\zeta'_1}{\cos \theta_1}$$

$$d_1^{(i)} = \overline{O F_1} = \frac{\zeta_1}{\cos \theta_1}$$

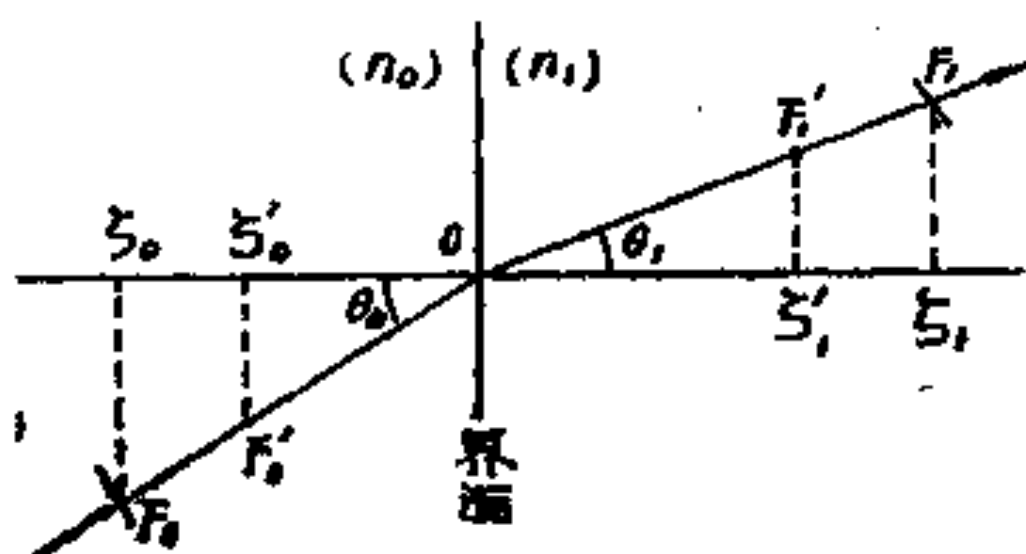


图 76

并考虑到对于平面媒质分界面  $r_x = r_y \rightarrow \infty$

成像公式化为  $\frac{n_0 \cos^2 \theta_0}{d_0^{(i)}} - \frac{n_1 \cos^2 \theta_1}{d_1^{(i)}} = 0$

$$\frac{n_0}{d_0^{(s)}} - \frac{n_1}{d_1^{(s)}} = 0$$

由于是点光源发出的光, 所以必有  $F_0$  与  $F'_0$  重合即

$$\zeta_0 = \zeta'_0 = h, \quad d_0^{(s)} = d_0^{(i)} = \frac{h}{\cos \theta_0}$$

$$\therefore \text{象散焦差 } \Delta = d_1^{(t)} - d_1^{(s)} = \frac{n_1}{n_0} \frac{h}{\cos^3 \theta_0} (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_0)$$

由折射定理  $n_1 \sin \theta_1 = n_0 \sin \theta_0$  得

$$\cos^2 \theta_1 = 1 - \sin^2 \theta_1 = 1 - \frac{n_0^2}{n_1^2} \sin^2 \theta_0$$

$$\therefore \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_0 = \left( 1 - \frac{n_0^2}{n_1^2} \right) \sin^2 \theta_0$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \frac{n_1}{n_0} \frac{h}{\cos^3 \theta_0} \left( 1 - \frac{n_0^2}{n_1^2} \right) \sin^2 \theta_0 \\ &= \left( \frac{n_1}{n_0} - \frac{n_0}{n_1} \right) h \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^3 \theta_0} \end{aligned}$$

**3—28 解** 已知第二个面是球面，设其半径为  $r$ ，并使球心恰与第一折射面的焦点  $F'_1$  重合。这样，凡是与轴平行的入射光线在穿过第一折射面后都与球面正交，因而在第二折射面上不发生折射。故欲使整个透镜对无穷远的物点消除球差，只需要考虑第一折射面的形状。

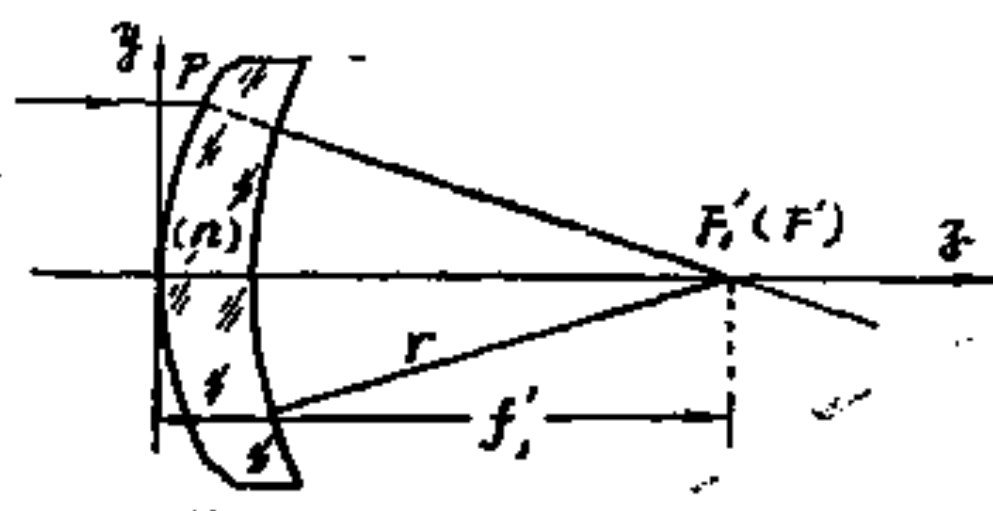


图 77.

设任意一条平行于轴的光线在  $P(y, z)$  点入射, 根据等光程原理, 从入射波波阵面上各点到  $F'$  的光程都应相等, 而  $F'$  与  $F_1$  正好重合, 即

$$z + n\sqrt{(f'_1 - z)^2 + y^2} = nf'_1$$

整理得

$$\frac{\left[ z - \frac{n}{n+1}f'_1 \right]^2}{\left( -\frac{n}{n+1}f'_1 \right)^2} + \frac{y^2}{\left( \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}f'_1 \right)^2} = 1$$

这是个椭圆方程, 其中心在  $y=0, z = \frac{n}{n+1}f'_1$  处,

二个半轴分别为  $\frac{n}{n+1}f'_1, \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}f'_1$ 。就是说第一个折射面应设计成旋转椭球面。

**3—45** 如图 78, 以  $\Sigma_1$  表示显微镜油浸物镜半球形透镜之球面,  $\Sigma_2$  和  $\Sigma_3$  分别表示凹凸透镜之凹面及凸面。已知  $\Sigma_1$  之半径为  $r$ ,  $\Sigma_2$  半径为  $Q_2B=R$ , 设  $\Sigma_3$  之半径为  $R'$ ,  $AB=d, BD=t$ 。

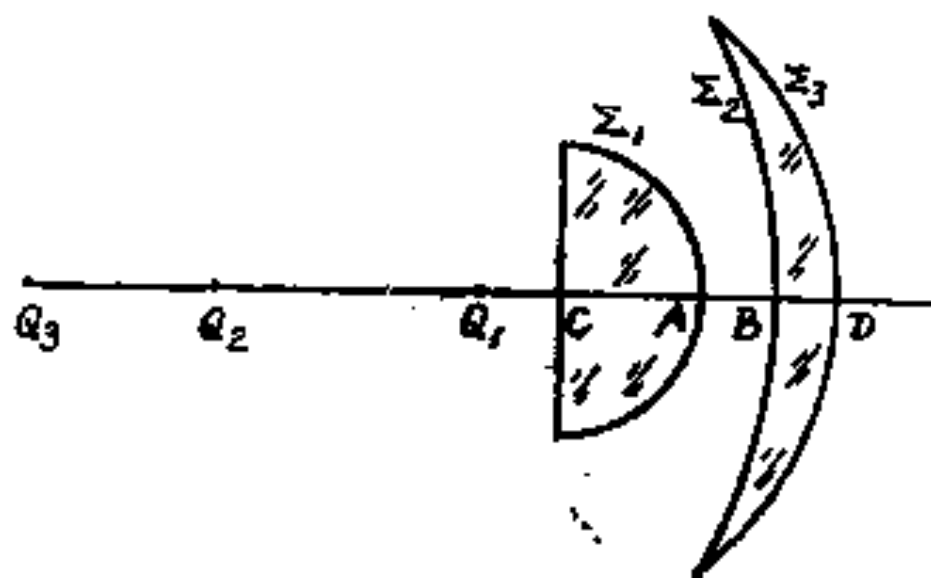


图 78

$Q_1$ 和 $Q_2$ 相于 $\Sigma_1$ 面为一对不晕点,  $Q_2$ 和 $Q_3$ 相对于 $\Sigma_3$ 面为一对不晕点。由 3—28 题的结果可知,  $Q_1$ 、 $Q_2$  应满足

$$n(Q_1 C_1 + r) = Q_2 C_1 + r \quad (1)$$

$$r = \frac{n(Q_1 C_1 + r)}{n+1} \quad (2)$$

$Q_2$ 、 $Q_3$ 应满足

$$n(Q_2 C_3 + r + d + t) = Q_3 C_1 + r + d + t \quad (3)$$

$$R' = \frac{n(R + t)}{n+1} \quad (4)$$

由 (1)、(2) 可解得

$$Q_1 C_1 = \frac{r}{n} \quad (5)$$

$$Q_2 C_1 = nr \quad (6)$$

由 (4) 得

$$R + t = \frac{n+1}{n} R' \quad (7)$$

代入 (3) 得

$$Q_3 C_1 = nr + \frac{n^2 - 1}{n} R' \quad (8)$$

欲求得  $R'$  须对边缘光线进行追迹。由光线追迹公式

$$\sin I_k = \frac{L_k - r_k}{r_k} \sin U_k \quad (9)$$

$$\sin I'_k = \frac{n_{k-1}}{n_k} \sin I_k \quad (10)$$

$$U'_k = U_k + I_k - I'_k \quad (11)$$

$$U_{k+1} = U'_k \quad (12)$$

$$\text{对 } \Sigma_1 \text{ 面有 } r_1 = -r \quad (13)$$

$$U_1 = -u_1$$

$$L_1 = -(Q_1 C_1 + r) = -\frac{n+1}{n}r \quad (14)$$

由三角关系知  $\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(-U_1) = \frac{r}{Q_1 C_1} = n$  由三角公式可解得

$$\sin U_1 = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (15)$$

$$\therefore \cos U_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad (16)$$

把 (13)、(14)、(15) 代入 (9) 得

$$\sin I_1 = -\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad (17)$$

$$\therefore \cos I_1 = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (18)$$

把 (17) 式代入 (10)，并考虑到  $n_0 = n$ ,  $n_1 = 1$  得

$$\sin I'_1 = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (19)$$

$$\therefore \cos I'_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad (20)$$

由 (11) 式

$$\begin{aligned}\sin U'_1 &= \sin(U_1 + I_1 - I'_1) \\ &= \sin U_1 \cos I_1 \cos I'_1 + \sin U_1 \sin I_1 \sin I'_1 \\ &\quad + \cos U_1 \sin I_1 \cos I'_1 - \cos U_1 \cos I_1 \sin I'_1\end{aligned}$$

把 (15) ~ (20) 代入上式, 可得

$$\sin U'_1 = -\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (21)$$

由 (13)  $-u_2 = U_2 = U'_1$

利用 (21) 式

$$\sin(-u_2) = \sin U_2 = -\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (22)$$

$$\therefore \cos u_2 = \cos U_2 = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (23)$$

因  $Q_2$  恰位于  $\Sigma_2$  之球心处, 故经  $\Sigma_2$  时不发生折射, 且  $L'_2 = L_2 = -Q_2 B = -R$ ,  $U'_2 = U_2$ , 代入 (12) 得

$$U_3 = U'_2 = U_2 \quad (24)$$

$$\text{及 } L_3 = L'_2 - t = -(R + t) = -\frac{n+1}{n}R' \quad (25)$$

上式的最后一步用了 (7) 式。

对  $\Sigma_3$  面有  $r_3 = -R'$ ,  $n_2 = n$ ,  $n_3 = 1$ 。把 (22)、(24) 和 (25) 代入 (9) 式得

$$\sin I_3 = \frac{1}{n\sqrt{n^2 + 1}} \quad (26)$$

$$\therefore \cos I_3 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^4 + n^2 - 1}{n^2 + 1}} \quad (27)$$



如图79,  $Q_2$ 是 $\Sigma_2$ 面的球心,  $C_3$ 是 $\Sigma_3$ 面的球心。作 $PN$ 与光轴垂直, 令 $PN=h$ 。易证得

$$h = Q_2 P \sin u_2 = C_3 P \sin \phi$$

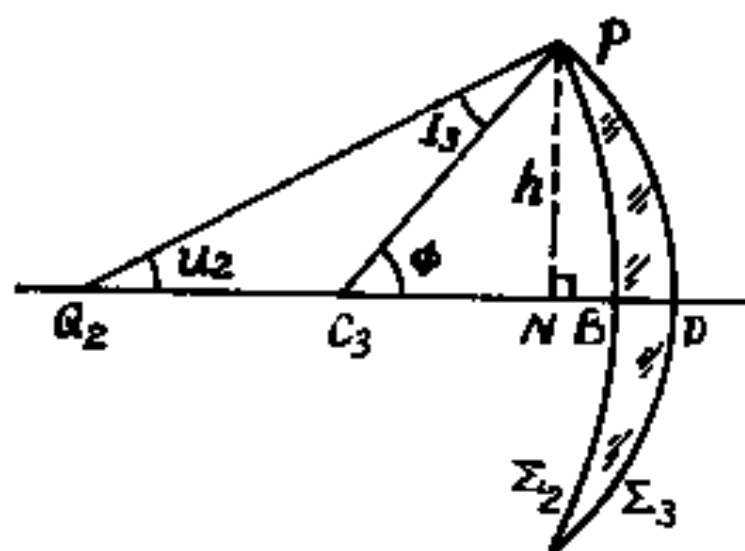


图 79

因  $Q_2 P = R$ ,  $C_3 P = R'$ ,  $\phi = u_2 + I_3$

$$\therefore R \sin u_2 = R' (\sin u_2 \cos I_3 + \cos u_2 \sin I_3)$$

把 (22)、(23)、(26) 和 (27) 代入上式, 解得

$$R' = \frac{n\sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^4+n^2-1}} R \quad (28)$$

把 (28) 代入 (8) 式, 得

$$Q_3 C_1 = nr + \frac{(n^2-1)\sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^4+n^2-1}} R \quad (29)$$

(5)、(6)、(28) 及 (29) 即为所求结果。

## 第四章 干涉理论基础和干涉仪

4—5 (1) 解 只要光矢量振动方向不互相垂直, 就能发

生干涉。

$$\text{设 } \vec{E}_1 = \vec{A} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{B} e^{-i\omega t}$$

分别表示二个沿 $z$ 轴正方向传播的光波。其中 $\vec{E}_1$ 沿 $x$ 轴振动， $\vec{E}_2$ 与 $x$ 轴成 $\alpha$ 角，则二复振幅分别为

$$\vec{A} = A \vec{i} = a e^{i\theta} \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \\ &= a \cos \alpha e^{ik} \vec{i} + a \sin \alpha e^{ik} \vec{j} \end{aligned}$$

则光强为

$$\begin{aligned} I &= \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle \\ &= \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \Re \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \\ &= a^2 + a^2 + 2a^2 \cos \alpha \cos(g - k) \\ &= 2a^2 (1 + \cos \alpha \cos \delta) \end{aligned}$$

式中， $\delta \equiv g - k$

当  $\delta = 2m\pi$  时， $\cos \delta = 1$  可得到光强极大值

$$I_{\max} = 2a^2 (1 + \cos \alpha)$$

当  $\delta = (2m + 1)\pi$  时  $\cos \delta = -1$  可得到光强极小值

$$I_{\min} = 2a^2 (1 - \cos \alpha)$$

故由定义得可见度

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \cos \alpha$$

$$(\alpha \text{ 取 } 0 \sim \frac{\pi}{2})$$

当  $\alpha = 30^\circ$  时,  $\mathcal{V} = 0.866$

当  $\alpha = 45^\circ$  时,  $\mathcal{V} = 0.707$

当  $\alpha = 60^\circ$  时,  $\mathcal{V} = 0.5$

(2) 证 同 (1), 只须把  $\vec{B}$  改成

$$\vec{B} = b \cos \alpha e^{ik} \vec{i} + b \sin \alpha e^{ik} \vec{j}$$

则光强为

$$\begin{aligned} I &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \cos \delta \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha \cos \delta \end{aligned}$$

设

$$I_2 = I_1 + \Delta I$$

则

$$I = 2I_1 + \Delta I + 2\sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I} \cos \alpha \cos \delta$$

$$I_{\max} = 2I_1 + \Delta I + 2\sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I} \cos \alpha$$

$$I_{\min} = 2I_1 + \Delta I - 2\sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I} \cos \alpha$$

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$= \frac{2\sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I} \cos \alpha}{2I_1 + \Delta I}$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{d(\Delta I)} = \frac{\frac{I_1 \cos \alpha}{\sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I}} (2I_1 + \Delta I) - 2\sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I} \cos \alpha}{(2I_1 + \Delta I)^2}$$

$$= \frac{-I_1 \Delta I \cos \alpha}{(2I_1 + \Delta I)^2 \sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I}}$$

$$\because I_1 > 0$$

$$\cos\alpha > 0 \quad (\alpha \text{ 取 } 0 \sim \frac{\pi}{2})$$

$$(2I_1 + \Delta I)^2 \sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I} > 0$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{V}}{d(\Delta I)} = -K^2 \Delta I$$

$$\left( K^2 = \frac{I_1 \cos\alpha}{(2I_1 + \Delta I)^2 \sqrt{I_1^2 + I_1 \Delta I}} \right)$$

$$\text{当 } \Delta I > 0 \text{ 时 } |\Delta I| = \Delta I$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{d|\Delta I|} = -K^2 \Delta I < 0$$

$$\text{当 } \Delta I < 0 \text{ 时 } |\Delta I| = -\Delta I$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{d|\Delta I|} = -\frac{d\mathcal{V}}{d(\Delta I)} = K^2 \Delta I < 0$$

由此可见, 无论  $\Delta I > 0$  或  $\Delta I < 0$ ,  $\frac{d\mathcal{V}}{d|\Delta I|} < 0$  恒成立。

即可见度总是随  $|\Delta I|$  的增大而减小, 当  $\Delta I = 0$  时,  $\mathcal{M} = \cos\alpha$ , 可见度达最大值。

证毕

4—8 (1) 解

$$\because I = I_A + I_B + 2 \sqrt{I_A I_B} \cos\alpha \cos\delta$$

由题意

$$I_A = I_i, \quad I_B = I_t = \frac{I_i}{10^{\Delta}} = 0.01 I_i$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= I_i + 0.01 I_i + 2 \sqrt{0.01 I_i^2} \cos \delta \\ &= 1.01 I_i + 0.2 I_i \cos \delta \\ &= I_i (1.01 + 0.2 \cos \delta) \end{aligned}$$

$$I_{\max} = I_i (1.01 + 0.2) = 1.21 I_i$$

$$I_{\min} = I_i (1.01 - 0.2) = 0.81 I_i$$

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{1.21 - 0.81}{1.21 + 0.81} = 0.198$$

(2) 解 如图80, 从扩展光源上一点  $S'$  出发, 经双缝到屏上  $P$  点的光程差  $\Delta\varphi'$  为

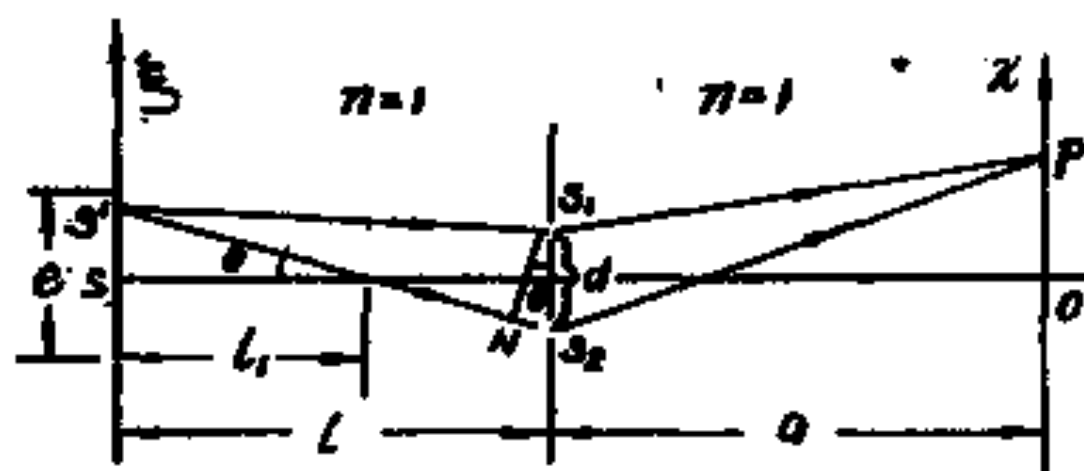


图 80

$$\Delta\varphi' = [S'S_2] - [S'S_1] + \Delta\varphi \quad \left( \Delta\varphi = \frac{x d}{a} \right)$$

$$\because [S'S_2] - [S'S_1] \approx [NS_2] \approx \theta d$$

$$= \frac{\xi}{l_1} d \approx \frac{\xi d}{l} = \xi \beta$$

式中  $\beta = \frac{d}{l}$  称为干涉孔径

$$\therefore \Delta\varphi' = \xi\beta + \Delta\varphi$$

把光源沿  $\xi$  方向分成宽度为  $d\xi$  的小条，设光源上单位宽度通过一个缝在  $P$  点产生的光强为  $i_0$ ，则每一小条经双缝在  $P$  点产生的光强为

$$\begin{aligned} di_{s'} &= 2i_0 d\xi (1 + \cos\delta) \\ &= 2i_0 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta\varphi + \xi\beta) \right] d\xi \end{aligned}$$

总光强为

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} di_{s'} = 2i_0 \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta\varphi + \xi\beta) \right] d\xi \\ &= 2i_0 e + 2i_0 \frac{\lambda}{2\pi\beta} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta\varphi + \xi\beta) \Big|_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \\ &= 2i_0 e + 2i_0 \frac{\lambda}{\pi\beta} \sin \frac{\pi e\beta}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\varphi \end{aligned}$$

随着观察屏上  $P$  点位置变化，光强也强弱交替地变化。

$$I_{\max} = 2i_0 \left( e + \frac{\lambda}{\pi\beta} \sin \frac{\pi e\beta}{\lambda} \right)$$

$$I_{\min} = 2i_0 \left( e - \frac{\lambda}{\pi\beta} \sin \frac{\pi e\beta}{\lambda} \right)$$

$$\psi = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left| \sin \frac{\pi e\beta}{\lambda} \right|}{\frac{\pi e\beta}{\lambda}} \end{aligned}$$

$$= \frac{|\sin x|}{x} = |\operatorname{sinc} x|$$

式中,  $x \equiv \frac{\pi e \beta}{\lambda}$

由  $\operatorname{sinc}$  函数的性质可知, 随着光源宽度  $e$  的增加, 可见度  $\mathcal{V}$  迅速下降。

由题意可知

$$\mathcal{V} = |\operatorname{sinc} x| > 0.9$$

即光强下降不超过10%必须满足

$$x < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi e \beta}{\lambda} < \frac{\pi}{4}$$

$$e < \frac{\lambda}{4\beta} = \frac{\lambda l}{4d} = \frac{0.55 \times 10^3}{4 \times 2 \times 10^3} = 68.75 \mu\text{m}$$

所以光源缝宽不可超过 68.75 微米。

**4—12 解** 如图81, 光源宽度为  $e$ ,  $S_0$  是光源的中点,  $S'_0$  是其象,  $S_0$  与  $S'_0$  之距离以  $d$  表之,  $S$  是光源上任意一点,  $S'$  是  $S$  的象, 取  $\zeta$  轴沿  $S'_0 S_0$  连线方向, 以  $S_0$  为原点, 则  $S$  之坐标为  $\zeta$ 。

$S_0$  和  $S'_0$  到观察屏上  $P$  点之光程差为

$$\Delta\varphi = \frac{nd}{a} x$$

式中,  $n$  是媒质的折射率。

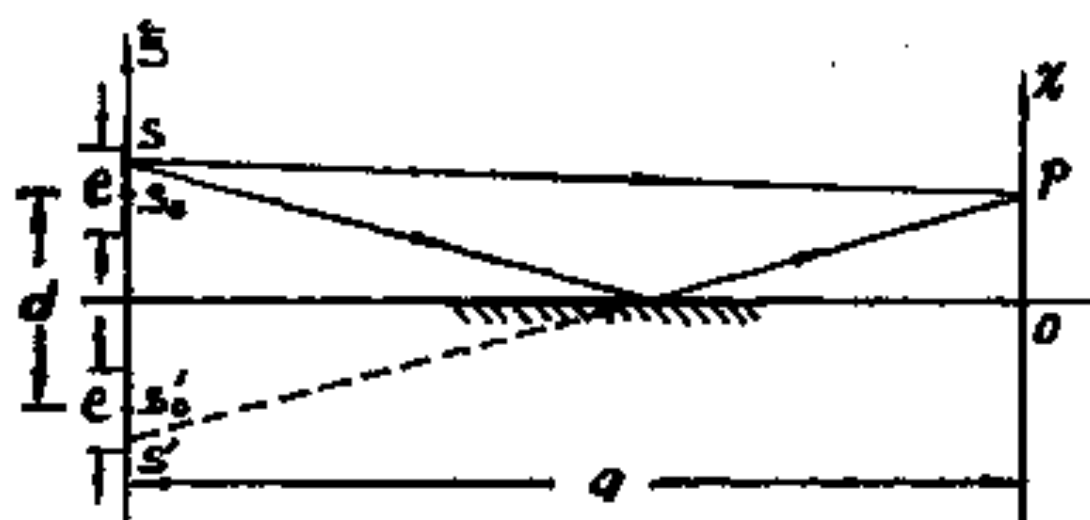


图 81

$S$  和  $S'$  到  $P$  点之光程差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi' &= 2\pi \frac{x}{a} \left( \frac{d}{2} + \zeta \right) \\ &= \Delta\varphi + \frac{2\pi x}{a} \zeta\end{aligned}$$

在光源上  $S$  处, 宽度为  $d\zeta$  的窄带在  $P$  点产生的干涉光强为

$$dI = 2i \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\varphi' \right) d\zeta$$

$P$  点的总光强

$$\begin{aligned}I &= \int dI \\ &= 2i \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \Delta\varphi + \frac{2\pi x}{a} \zeta \right) \right] d\zeta \\ &= 2ie + \frac{ia\lambda}{2\pi nx} \left[ \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \Delta\varphi + \frac{nx e}{a} \right) \right]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \Delta\varphi - \frac{nxe}{a} \right) \right] \\
&= 2ie \left\{ 1 + \frac{a\lambda}{2\pi nxe} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\varphi \right) \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} \right) \right\} \\
&= 2ie \left\{ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\varphi \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$I_{\max} = 2ie \left\{ 1 + \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} \right) \right| \right\}$$

$$I_{\min} = 2ie \left\{ 1 - \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} \right) \right| \right\}$$

可见度

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} \right) \right|$$

当  $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} = \pi$  时  $\mathcal{V} = 0$  解得光源的临界宽度

$$e_k = \frac{a\lambda}{2nx}.$$

当  $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nxe}{a} = \frac{\pi}{4}$  时  $\mathcal{V} = 0.9$ , 这时的光源宽度

称为许可宽度, 以  $e_p$  表之。解得

$$e_p = \frac{a\lambda}{8nx}.$$

**4—20 证** 如图 82 所示, 考察离平板不太远的  $P$  点的干涉。图中  $P_1$ 、 $P_2$  是  $P$  点经板的上、下表面所成的象。 $S_1$ 、

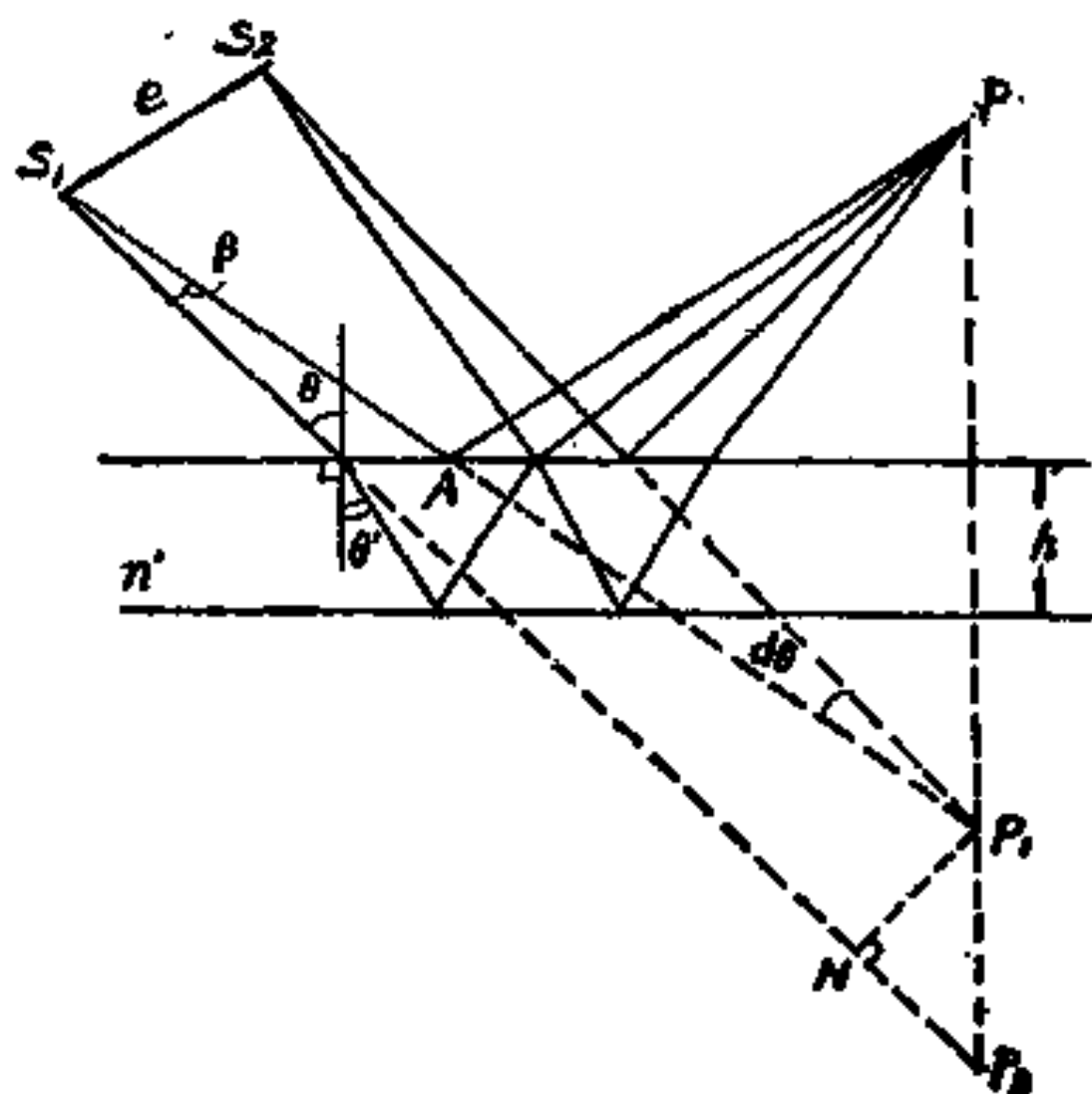


图 82

$S_2$  是宽度为  $e$  的光源的边缘两点。由  $S_1$  发出的经板的上、下表面反射后在  $P$  点相遇的两条光线之光程差为

$$\Delta\varphi = 2n'h\cos\theta' + \frac{\lambda}{2}$$

由  $S_2$  射到板上的光线与来自  $S_1$  的光线相比，入射角有一微小变化  $d\theta$ ，相应的折射角变化

$$d\theta' \approx \frac{d\theta}{n'}$$

引起的光程差变化为

$$\begin{aligned} |d\Delta\varphi| &= 2n'h\sin\theta' d\theta' \\ &= 2h\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{n'} \end{aligned}$$

不难证明

$$\frac{2h}{n'} = \overline{P_1 P_2}$$

$$\therefore \overline{P_1 P_2} \sin \theta \approx \overline{P_1 N}$$

$$\therefore |d\Delta\varphi| = \overline{P_1 N} d\theta$$

$$\approx \beta (\overline{S_1 A} + \overline{AP_1}) d\theta = \beta e$$

当  $|d\Delta\varphi| = \lambda$  时,  $S_1$  在  $P$  点产生的干涉条纹与光源中点  $S_0$  在  $P$  点产生的干涉条纹互相错移半序, 迭加后在  $P$  点附近没有干涉条纹, 即可见度为零, 因此光源的临界宽度

$$e_k = \frac{\lambda}{\beta}$$

证毕

4—27 解 (1) 因为从  $M_1$  上反射的波阵面  $w$ , 经分束镜所形成的虚象  $w'$  和从  $M_2$  上反射的波阵面  $w_2$  之间发生等厚干涉。当把  $M_2$  换成球面镜时, 观察到牛顿环。因中心处光程差为 0, 且光在  $M_1$ 、 $M_2$  上反射时半波损失状况相同, 所以中心为亮点。

由图83可得亮纹条件为

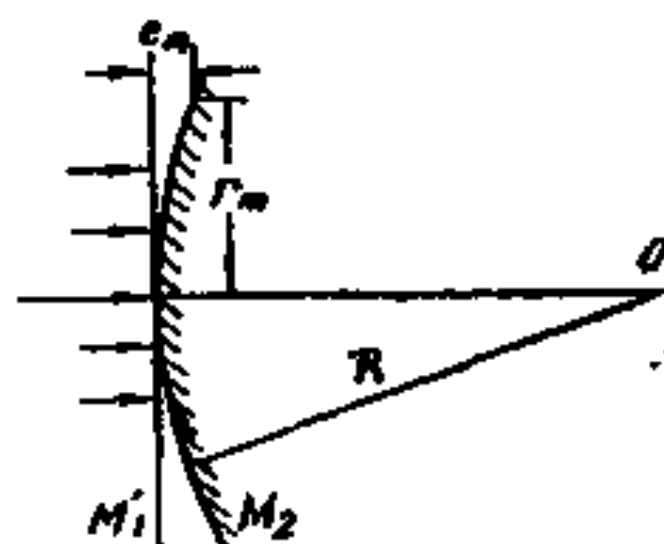


图 83

$$\delta = 2e_m = m\lambda$$

$$\therefore R^2 = r_m^2 + (R - e_m)^2$$

$$\approx r_m^2 + R^2 - 2e_m R$$

$$\therefore r_m^2 \approx 2e_m R = m\lambda R$$

第三亮环的半径

$$r_3 = \sqrt{3\lambda R}$$

使用凸球面镜与用凹球面镜的结果相同。

(2)  $M_2$ 是凸球面镜时,  $M_1$ 向 $\mathcal{M}$ 移动意味着其象  $M_1'$  远离  $M_2$ , 即 $\delta$ 增大, 则干涉序  $m$  随之增大, 外圈高序环 往里“缩”, 在中心淹没。

(3)  $M_2$ 是凹球面镜时,  $M_1$ 向  $\mathcal{M}$  移动也是  $M_1'$  远离  $M_2$ , 则内圈小环“涨”大, 从中心不断往外“涌”。

4—30 解 (1) 这是等倾干涉, 条纹定域在无穷远处, 形状为一族同心圆环。

(2) 由亮纹条件

$$\delta = 2h\cos\varphi = m\lambda$$

中心对应 $\varphi = 0$ , 故得中心干涉序

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda}$$

第三亮环干涉序

$$m_3 = \frac{2h}{\lambda} - 3$$

$\therefore \varphi$  很小

$$\therefore \cos\varphi_3 \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi_3^2$$

由  $2h\cos\varphi_3 = m_3\lambda$

得  $2h\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_3^2\right) = \left(-\frac{2h}{\lambda} - 3\right)\lambda$

解得

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{3\lambda}{h}}$$

所以  $r_3 = f\varphi_3 = f\sqrt{\frac{3\lambda}{h}}$

(3)  $M_1$ 向 $M_2$ 移动即  $h$  减小, 对应同一  $\varphi$  值的  $m$  减小。因为最高序在中心处, 所以表现为外圈的干涉环向内“缩”, 在中心淹没。

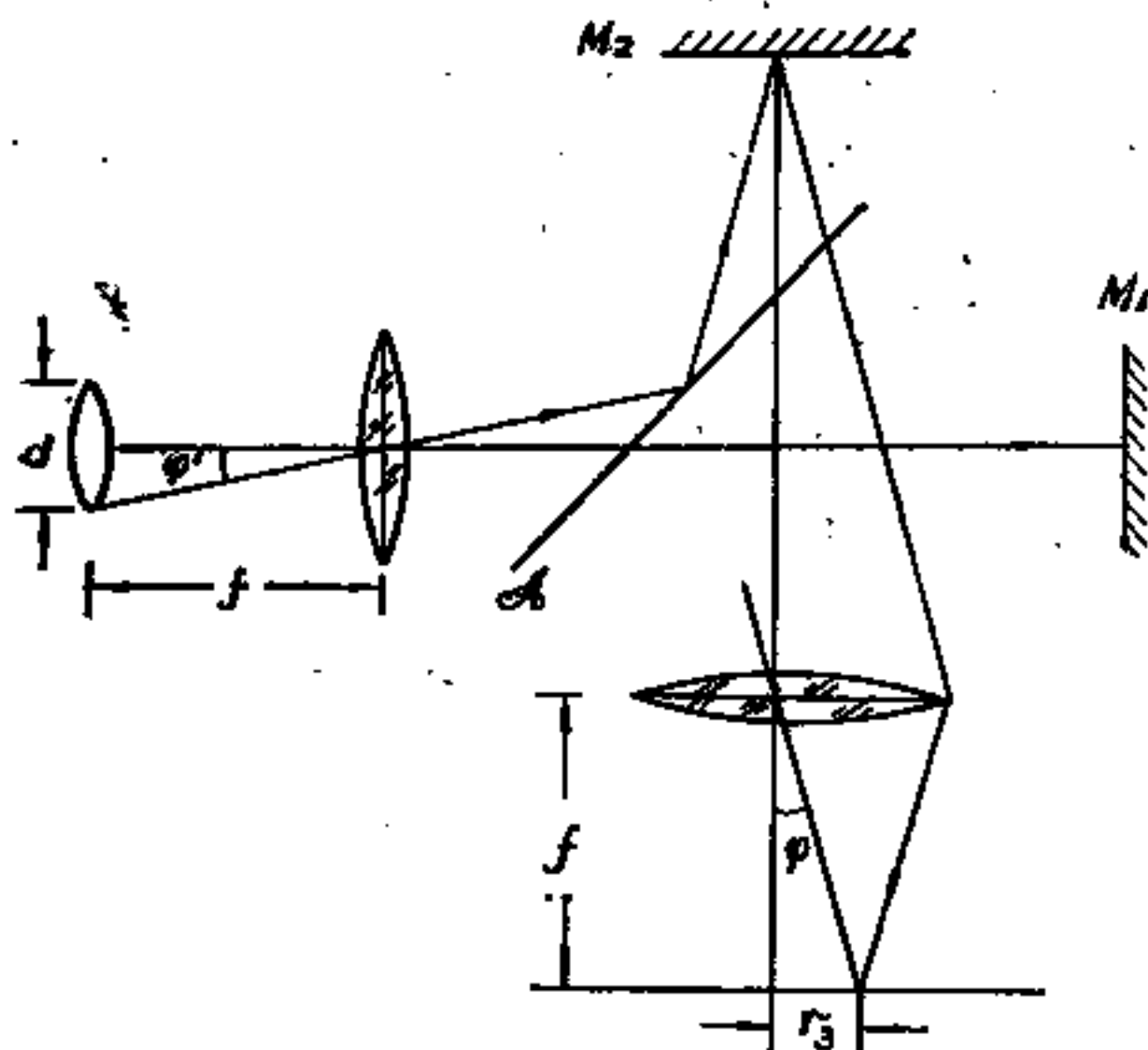


图 84

(4)  $\because \varphi' = \varphi$  (见图84)  
且已知透镜的焦距相等。

$$\therefore \operatorname{tg} \varphi' = \frac{d/2}{f} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{r_s}{f} \quad \text{即}$$

$$d = 2r_s = 2f \sqrt{\frac{3\lambda}{h}}$$

(5) 干涉条纹中心不动，条纹也不动，但随着光源的移动，视场也发生移动，在中心一侧的条纹减少了，而在另一侧条纹增多了。如图85所示。



图 85

4—33 解 当迈克耳孙干涉仪的两反射镜严格垂直时，观察到亮纹的条件是

$$2h \cos \theta = m\lambda$$

中心对应  $\theta = 0$

当  $h = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$  时

中心干涉序

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-5}} = 200$$

从中心向外各级亮纹的干涉序依次为199、198、……

当  $h = 4.997 \times 10^{-3} \text{ cm}$  时

中心干涉序为

$$m = \frac{2 \times 4.997 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-6}} = 199$$

向外依次为198、197、……即  $m = 200$  的条纹已在中心淹没了。

4—40 解 由

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 + \cos[(x + \bar{k}) \Delta\varphi] \right\} i_0 e^{-\alpha^2 x^2} dx^* \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} i_0 e^{-\alpha^2 x^2} dx \\ &\quad + 2i_0 \cos(\bar{k} \Delta\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x \Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx \\ &\quad - 2i_0 \sin(\bar{k} \Delta\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x \Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx \end{aligned}$$

记

$$P \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$C \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x \Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$S \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x \Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

则有

$$I = 2i_0 \left\{ P + \cos(\bar{k} \Delta\varphi) C - \sin(\bar{k} \Delta\varphi) S \right\} \quad (1)$$

---

\*见波恩·沃耳夫《光学原理》P.418(112)式。

考虑到  $C$ 、 $S$  是随  $\Delta\varphi$  的缓变函数，所以

$$\frac{\partial I}{\partial(\Delta\varphi)} \approx 2i_0 \left\{ -\overline{k} \sin(\overline{k} \Delta\varphi) C - \overline{k} \cos(\overline{k} \Delta\varphi) S \right\}$$

令 
$$\frac{\partial I}{\partial(\Delta\varphi)} = 0$$

得 
$$\operatorname{tg}(\overline{k} \Delta\varphi) = -\frac{S}{C}$$

则 
$$\sin(\overline{k} \Delta\varphi) = \pm \frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}}$$

$$\cos(\overline{k} \Delta\varphi) = \mp \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}}$$

代入 (1) 式中可得光强极值

$$I_{\max} = 2i_0 (P + \sqrt{S^2 + C^2})$$

$$I_{\min} = 2i_0 (P - \sqrt{S^2 + C^2})$$

可见度

$$\gamma = \frac{\sqrt{S^2 + C^2}}{P}$$

计算积分式

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \\ S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x \Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0 \end{aligned}$$



(因为被积函数是奇函数。)

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \cos(x\Delta\varphi) e^{-\alpha^2 x^2} dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{i\Delta\varphi x} + e^{-i\Delta\varphi x}}{2} e^{-\alpha^2 x^2} dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{i\Delta\varphi x - \alpha^2 x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-i\Delta\varphi x - \alpha^2 x^2} dx \\
 &= e^{-\left(\frac{\Delta\varphi}{2\alpha}\right)^2} \left\{ \int_0^{\infty} e^{\left(ix + \frac{\Delta\varphi}{2\alpha}\right)^2} dx + \int_0^{\infty} e^{\left(ix - \frac{\Delta\varphi}{2\alpha}\right)^2} dx \right\} \\
 &= e^{-\left(\frac{\Delta\varphi}{2\alpha}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P} = \frac{|C|}{P}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left| \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\Delta\varphi}{2\alpha}\right)^2} \right|}{\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}} = e^{-\left(\frac{\Delta\varphi}{2\alpha}\right)^2}
 \end{aligned}$$

可见度随  $\Delta\varphi$  的变化曲线也是高斯曲线。

**4—42 解** 以  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  分别表示钠光两谱线的波长, (设  $\lambda_2 > \lambda_1$ )。中央条纹对应的干涉序分别为

$$m_1 = \frac{2d}{\lambda_1}, \quad m_2 = \frac{2d}{\lambda_2}$$

当  $\Delta m = m_1 - m_2$  为半整数时, 波长为  $\lambda_1$  的亮纹恰与波长为  $\lambda_2$  的暗纹重合, 这时干涉条纹将消失。

计算

$$\begin{aligned}\Delta m = m_1 - m_2 &= 2d \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \quad (n=0, 1, 2\cdots)\end{aligned}$$

连续两次条纹消失，平面镜所移过的距离 $\Delta d$ 应满足

$$2(d + \Delta d) \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{2n+1}{2} + 1$$

$$\therefore 2d \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{2n+1}{2}$$

$$\therefore 2\Delta d \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 1$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{2\Delta d} = \frac{1}{5890} - \frac{1}{2 \times 2.89 \times 10^8} = 1.696 \times 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$$

**4—48** 解 (1) 多光束等倾干涉亮纹条件是光程差满足

$$\Delta\varphi = 2nh\cos\theta = m\lambda \quad (m \text{ 为整数})$$

因为已知空气层折射率  $n=1$ ，所以各环对透镜  $L_2$  中心的张角  $\theta$  与该环干涉序的关系为

$$m = \frac{2h\cos\theta}{\lambda}$$

在  $L_2$  的焦点上  $\theta = 0$

故有

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda} = \frac{2 \times 10^8}{4900} = 40816.33$$

设  $\theta_p$  为最外面一环对  $L_2$  中心的张角

$$\therefore \theta_p = \arctg \left( \frac{d/2}{f} \right) = \arctg \left( \frac{0.5}{15} \right) \approx 1.9^\circ$$

$$\therefore m_p = \frac{2h \cos \theta_p}{\lambda} = m_0 \cos \theta_p = 40793.89$$

在  $L_2$  焦平面上共可看到亮纹数

$$N = 40816 - 40793 = 23 \text{ (条)}$$

(2) 挡住一半入射光线, 标准具的有效表面减少一半, 除了照度减半外条纹的形状, 位置, 个数均不变。

(3) 设平行光束与系统光轴成  $\theta$  角入射, 通过标准具未遮挡的一半的相邻二光线的光程差仍为

$$\Delta\varphi = 2h \cos \theta$$

而通过被透明板的遮挡的一半的相邻二光线的光程差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi' &= 2(h - h') \cos \theta + 2n' h' \cos \theta' \\ &= \Delta\varphi + 2h' (n' \cos \theta' - \cos \theta) \end{aligned}$$

式中  $h'$ 、 $n'$  分别为透明板的厚度与折射率。

由折射定律

$$\sin \theta = n' \sin \theta'$$

得

$$\cos \theta' = \sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2 \theta}{n'^2}}$$

所以，通过由遮挡处的光产生干涉环的中心干涉序为

$$m'_0 = \frac{2(h - h') + 2n'h'}{\lambda}$$

$$= \frac{2 \times (10 - 0.5) + 2 \times 1.5 \times 0.5}{4.9 \times 10^{-4}} = 41836.73$$

最外圈亮环干涉序为

$$m'_p = \frac{2(h - h')\cos\theta_p + 2n'h' \sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2\theta_p}{n'^2}}}{\lambda}$$

$$= 41814.67$$

所以可见条纹数

$$N' = 41836 - 41814 = 22(\text{条})$$

以上结果说明在  $L_2$  的焦面上有二组干涉圆环，列表如下：

组 别	无 遮 挡	有 遮 挡
中心干涉序	40816.33	41836.73
边缘干涉序	40793.89	41814.67
可见亮环数	23	22

二组干涉环若无重迭，则可见45条亮环。

**4—53 解** 选取标准具间距的原则是：第一，使标准具的光谱范围  $(\Delta\lambda)_{S,R}$  大于超精细结构的最大波长差；第二，同时使标准具的分辨极限小于超精细结构的最小波长差。

$$\therefore (\Delta\lambda)_{S.R} = \frac{\overline{\lambda^2}}{2n'h} > (\Delta\lambda)_{\max}$$

$$\therefore h < \frac{\overline{\lambda^2}}{2n'(\Delta\lambda)_{\max}} \quad (1)$$

由分辨本领

$$\frac{\overline{\lambda}}{\Delta\lambda} = 0.97m\mathcal{F}$$

$$\therefore \Delta\lambda < (\Delta\lambda)_{\min}, \quad m = \frac{2n'h}{\overline{\lambda}}, \quad \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

$$\therefore h > \frac{(1-R)\overline{\lambda^2}}{1.94\pi n'\sqrt{R}(\Delta\lambda)_{\min}}$$

在本题中

$$n' = 1$$

$$\begin{aligned} \overline{\lambda} &= \frac{1}{4} \times (5460.753 + 5460.745 + 5460.734 + 5460.728) \\ &= 5460.74 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$$(\Delta\lambda)_{\max} = 5460.753 - 5460.728 = 0.025 \text{ \AA}$$

$$(\Delta\lambda)_{\min} = 5460.734 - 5460.728 = 0.006 \text{ \AA}$$

$$\mathcal{F} = 0.9$$

代入 (1)、(2) 式得

$$59.64 \times 10^7 \text{ \AA} > h > 8.6 \times 10^7 \text{ \AA}$$

即标准距的间距  $h$  应满足

$$59.64 \text{ mm} > h > 8.6 \text{ mm}$$

4—60 解 (1) 欲使 $5500\text{\AA}$ 波长的光有最大透射率, 厚度 $h$ 应满足

$$h = \frac{m\lambda_0}{2n'} = \frac{5500}{2 \times 1.35} m = 2037m \quad (1)$$

欲使滤波器在 $4000\text{\AA} \sim 7500\text{\AA}$ 间只有 $5500\text{\AA}$ 一个通带,  $h$ 必须满足

$$\frac{(m-1)7500}{2n'} < h < \frac{(m+1)4000}{2n'} \quad (2)$$

$$\text{当 } m=1 \text{ 时 } \quad h = 2037\text{\AA}$$

此值代入 (2) 式

$$\text{左边} = 0, \quad \text{右边} = 2963\text{\AA}$$

(2) 式成立。

$$\text{当 } m=2 \text{ 时 } \quad h = 4074\text{\AA}$$

代入 (2) 式

$$\text{左边} = 2778\text{\AA}$$

$$\text{右边} = 4445\text{\AA}$$

(2) 式成立。

$$\text{当 } m=3 \text{ 时 } \quad h = 6111\text{\AA}$$

代入 (2) 式

$$\text{左边} = 5556\text{\AA}$$

$$\text{右边} = 5926\text{\AA}$$

(2) 式不成立。

所以最大厚度为 $4074\text{\AA}$

(2)  $\theta_i \neq 0$  时透射波波长应满足

$$2n'h\cos\theta_i = m\lambda_0$$

最大透射率波长为

$$(\lambda_0)_{\max} = \frac{2n'h\cos\theta_i}{m}$$

当  $\theta_i$  从 0 开始增大时,  $(\lambda_0)_{\max}$  随之减小。若入射光是一束角半径为  $\Delta\theta_i$  的细光锥, 则滤光片可允许波长范围在

$$|\Delta\lambda_0| = \frac{2n'h\sin\theta_i \cdot \Delta\theta_i}{m}$$

中的各种波长成份的光通过, 这意味着滤光性能变坏。

4--64 解 (1) 在本题条件下亮纹条件为

$$\delta = -\frac{4\pi n'h\cos\theta'}{\lambda_0} + 2\phi = 2m\pi$$

$$\text{已知 } n'h = 1\text{mm}, \quad \phi = \frac{3}{4}\pi$$

所以中心干涉序

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{2n'h}{\lambda_0} + \frac{\phi}{\pi} \\ &= \frac{2 \times 10^7}{6000} + \frac{3}{4} = 3333\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = 3334\frac{1}{12} \end{aligned}$$

从中心往外第一个亮环的干涉序为

$$m_1 = 3334$$

它与到中心点相位之差为

$$\Delta\delta = 2\pi \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52 \text{ 弧度}$$

$$\therefore F = \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} = \frac{4 \times 0.95}{(1-0.95)^2} \approx 1520$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} \approx 0.1 \text{ 弧度}$$

$\varepsilon$  是亮纹的锐度,  $\varepsilon < \Delta\delta$  说明最中心点是暗的。

又因最大亮环的角半径  $\theta_p$  满足

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{d/2}{f} = \frac{1}{20}$$

$$\theta_p \approx 2.86 \text{ 弧度}$$

所以最大亮环的干涉序

$$m_p = \left( \frac{2n' h \cos \theta_p}{\lambda_0} + \frac{\phi}{\pi} \right) = 3329.92$$

可见亮纹数

$$N = 3334 - 3329 = 5 \text{ 条}$$

它们的干涉序依次为: 3330, 3331, 3332, 3333, 3334。

(2) 串联

$$\text{细度 } \mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon}$$

$$\therefore F = \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} = \frac{4 \times 0.95}{(1-0.95)^2} = 1520$$

$$\sqrt{F} \approx 39$$

$$\frac{F_1}{a^2} = F_2 = F \quad (\text{本题中 } a = \frac{n'_1 h_1}{n'_2 h_2} = 1)$$



$$\therefore \varepsilon = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{F_2 + \frac{F_1}{a^2}} + \sqrt{F_2^2 + \frac{6F_1F_2}{a^2} + \frac{F_1}{a^4}}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2F + 2F\sqrt{2}}} = 0.066$$

得细度

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon} = 95.15$$

总峰值透射率

$$\bar{\tau} = \tau_1 \cdot \tau_2 = \left[ \left( 1 - \frac{\mathcal{A}}{1 - \mathcal{R}} \right)^2 \right]^2$$

$$= \left( 1 - \frac{\mathcal{A}}{1 - \mathcal{R}} \right)^4 = \left( 1 - \frac{0.03}{1 - 0.95} \right)^4 = 2.56\%$$

总衬比因子

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 = (1 + F)^2 = 2.31 \times 10^6$$

$\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$  处的光谱范围

$$(\Delta\lambda_0)_{\text{S.R}} = \frac{\lambda_0}{m} = \frac{\lambda_0}{\frac{2n'h}{\lambda_0} + \frac{\phi}{\pi}}$$

$$\approx \frac{\lambda_0^2}{2n'h} = 1.25 \text{ \AA}$$

分辨本领

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = 0.97 \mathcal{L} m = 0.97 \mathcal{L} \frac{2n'h}{\lambda_0}$$

$$= 0.97 \times 95.15 \times \frac{2 \times 10^7}{5000} = 3.69 \times 10^5$$

因为光栅的分辨本领为

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = Nm$$

本题中  $m=1$ ,  $N=1800W$  ( $W$  为光栅宽) 所以有

$$1800W = 3.69 \times 10^5$$

$$W = \frac{3.69 \times 10^5}{1800} = 205\text{mm} = 20.5\text{cm}$$

即此法布里-珀罗标准具的分辨本领相当于一个 20.5 厘米宽, 每毫米刻痕为 1800 条的光栅的一级光谱的分辨本领。

## 第五章 衍射理论

**5—2 解** (1) 由于波带很狭窄, 设同一波带内各点发出的子波的倾斜因子相同, 第  $j$  个波带的倾斜因子记为  $K_j$ 。由基尔霍夫公式, 第  $j$  个波带在  $P$  点产生的复振幅

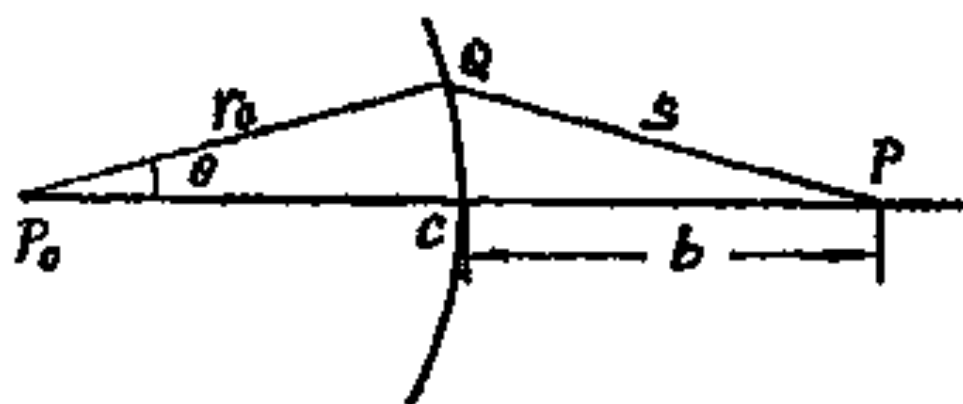


图 86

$$dS = \frac{r_0}{r_0 + b} s ds d\phi \quad (4)$$

把 (4) 式代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} U_1(P) &= K_1 \frac{Ae^{ikr_1}}{r_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{b+(l-1)\frac{\lambda}{2}}^{b+l\frac{\lambda}{2}} \frac{e^{iks}}{s} \frac{r_0}{(r_0 + b)} s ds \\ &= 2\pi K_1 \frac{Ae^{ikr_1}}{r_0 + b} \int_{b+(l-1)\frac{\lambda}{2}}^{b+l\frac{\lambda}{2}} e^{iks} ds \\ &= -i\lambda K_1 \frac{Ae^{ikr_1}}{r_0 + b} e^{ik(b+l)\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) \\ &= -i\lambda K_1 \frac{Ae^{ik(r_1+b)}}{r_0 + b} e^{ikl\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) \end{aligned}$$

$$\because e^{ikl\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) = e^{i\pi l} (1 - e^{-i\pi}) = (-1)^{l+1} \cdot 2$$

$$\therefore U_1(P) = 2i\lambda(-1)^{l+1} K_1 \frac{Ae^{ik(r_1+b)}}{r_0 + b} \quad (5)$$

(2) 由 (5) 式得第一个波带在  $P$  点产生的复振幅

$$U_1(P) = 2i\lambda K_1 \frac{Ae^{ik(r_1+b)}}{r_0 + b}$$

对于第一个波带

$$K_1 = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos\chi_1)$$

因为  $\chi_1$  很小, 故

$$K_1 = -\frac{i}{\lambda}$$

$$dS = \frac{r_0}{r_0 + b} s ds d\phi \quad (4)$$

把 (4) 式代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} U_1(P) &= K_1 \frac{Ae^{ikr_1}}{r_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{b+(l-1)\frac{\lambda}{2}}^{b+l\frac{\lambda}{2}} \frac{e^{iks}}{s} \frac{r_0}{(r_0 + b)} s ds \\ &= 2\pi K_1 \frac{Ae^{ikr_1}}{r_0 + b} \int_{b+(l-1)\frac{\lambda}{2}}^{b+l\frac{\lambda}{2}} e^{iks} ds \\ &= -i\lambda K_1 \frac{Ae^{ikr_1}}{r_0 + b} e^{ik(b+l)\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) \\ &= -i\lambda K_1 \frac{Ae^{ik(r_1+b)}}{r_0 + b} e^{ikl\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) \end{aligned}$$

$$\because e^{ikl\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) = e^{i\pi l} (1 - e^{-i\pi}) = (-1)^{l+1} \cdot 2$$

$$\therefore U_1(P) = 2i\lambda(-1)^{l+1} K_1 \frac{Ae^{ik(r_1+b)}}{r_0 + b} \quad (5)$$

(2) 由 (5) 式得第一个波带在  $P$  点产生的复振幅

$$U_1(P) = 2i\lambda K_1 \frac{Ae^{ik(r_1+b)}}{r_0 + b}$$

对于第一个波带

$$K_1 = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos\chi_1)$$

因为  $\chi_1$  很小, 故

$$K_1 = -\frac{i}{\lambda}$$

所以

$$U_1(P) \approx 2 \frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}$$

在自由传播情况下， $P_0$ 在 $P$ 产生的复振幅为

$$U_1(P) = \frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}$$

可见，自由传播时 $P$ 点的振幅是第一个波带在 $P$ 点产生的振幅之半。

**5—5 解** 这些公式都是衍射积分，但它们的适用条件不同。

(1) 是基尔霍夫定理的普遍形式，可用于多色场，只要求媒质是均匀的，此外没有任何其它限制条件。

$V(P, t)$  表示 $P$ 点在 $t$ 时刻的复扰动，方括号代表“推迟值”，即取 $\left(t - \frac{S}{c}\right)$ 时刻的函数值，积分范围 $S$ 是包含 $P$ 点在内的任意闭曲面。

(2) 是基尔霍夫积分定理，只适用于在均匀媒质中的单色场。

$U(P)$  表示 $P$ 点的复振幅，积分范围和(1)中相同。

(3) 是惠更斯-菲涅耳原理的数学表述，它是当单色点光源 $P_0$ ，在均匀媒质中发出的球面波，在传播中受到通光孔的限制时的衍射结果，可由(2)中的积分在满足基尔霍夫边界条件（要求孔的线度比波长大得多）下导出。积分范围 $W$ 是在 $P_0$ 所发出的与光孔相切的球形波阵面上被孔所截出的那部分。

(4) 是 (3) 中的积分在远距离条件下 (即点源  $P_0$  和观察点  $P$  至孔上任一点的距离都比孔的线度大得多) 的结果。积分范围  $\mathcal{A}$  即屏上的开孔范围。

(5) 是当射到孔上的光波不一定直接来自点光源, 但孔面上各点的复振幅  $U(S)$  已知时的衍射积分。  $K(\chi) = -\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos\chi)$  是倾斜因子, 积分范围和 (4) 中相同。

(6) 是夫琅和费衍射积分

$$c = -\frac{i \cos \delta}{\lambda} \frac{A e^{ik(r'+s')}}{r' s'}$$

是个常数, 积分范围和 (4) 中相同。

(7) 是当孔面的透射函数为  $F(\xi, \eta)$  时的夫琅和费衍射积分。系数  $c$  和 (6) 中相同, 积分范围和 (4) 中相同。

**5—11 解** 当点源和观察点到孔的距离比孔的线度大得多时, 衍射积分

$$\begin{aligned} U(P) &\approx -\frac{iA}{\lambda} \frac{\cos \delta}{r' s'} \iint_{\mathcal{A}} e^{ik(r+s)} ds \\ &= -\frac{iA}{\lambda} \frac{\cos \delta e^{ik(r'+s')}}{r' s'} \iint_{\mathcal{A}} e^{ikf(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (1) \end{aligned}$$

$\xi, \eta$  是孔面上的坐标。

由

$$r = r' \left[ 1 - \frac{2(x_0 \xi + y_0 \eta)}{r'^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{r'^2} \right]^{1/2}$$

$$s = s' \left[ 1 - \frac{2(x\xi + y\eta)}{s'^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{s'^2} \right]^{1/2}$$

易证得

$$f(\xi, \eta) = (r + s) - (r' + s')$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} \\ &\quad - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3} \\ &\quad + \frac{(x_0\xi + y_0\eta)(\xi^2 + \eta^2)}{2r'^3} + \frac{(x\xi + y\eta)(\xi^2 + \eta^2)}{2s'^3} \\ &\quad - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^3}{2r'^5} - \frac{(x\xi + y\eta)^3}{2s'^5} + \dots \\ &= f^{(1)}(\xi, \eta) + f^{(2)}(\xi, \eta) + f^{(3)}(\xi, \eta) + \dots \end{aligned}$$

$$f^{(1)}(\xi, \eta) = -\frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} - \frac{x\xi + y\eta}{s'}$$

是  $\xi$  或  $\eta$  的一次方的函数。

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} \\ &\quad - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3} \end{aligned}$$

是  $\xi$  或  $\eta$  的二次方的函数。

$$f^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{(x_0\xi + y_0\eta)(\xi^2 + \eta^2)}{2r'^3} + \frac{(x\xi + y\eta)(\xi^2 + \eta^2)}{2s'^3}$$

$$-\frac{(x_0\xi + y_0\eta)^3}{2r'^3} - \frac{(x\xi + y\eta)^3}{2s'^3} \quad (2)$$

是  $\xi$  或  $\eta$  三次方的函数。

对菲涅耳衍射在 (1) 式的积分中应保留到  $f^{(2)}(\xi, \eta)$  项。要忽略  $f^{(3)}(\xi, \eta)$  以上的项，必须有

$$k |f^{(3)}(\xi, \eta)| \ll 2\pi$$

即

$$|f^{(3)}(\xi, \eta)| \ll \lambda \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \because \quad x_0 &= -l_0 r', & y_0 &= -m_0 r' \\ x &= l s', & y &= m s' \end{aligned}$$

这  $l_0, m_0, l, m$  均小于或等于 1。

$$\begin{aligned} \because \quad x_0\xi + y_0\eta &= -r'(l_0\xi + m_0\eta) \\ x\xi + y\eta &= s'(l\xi + m\eta) \end{aligned} \quad (4)$$

把 (2)、(4) 代入 (3)，得

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(\xi, \eta)| = & \left| -\frac{(l_0\xi + m_0\eta)(\xi^2 + \eta^2)}{2r'^2} - \frac{(l\xi + m\eta)(\xi^2 + \eta^2)}{2s'^2} \right. \\ & \left. + \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^3}{2r'^3} - \frac{(l\xi + m\eta)^3}{2s'^3} \right| \ll \lambda \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \because (l_0\eta - m_0\xi)^2 \geq 0$$

$$\therefore l_0^2\eta^2 + m_0^2\xi^2 \geq 2l_0m_0\xi\eta$$

故

$$(l_0\xi + m_0\eta)^2 \leq (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2) \leq 2(\xi^2 + \eta^2)$$

$$(l\xi + m\eta)^2 \leq (l^2 + m^2)(\xi^2 + \eta^2) \leq 2(\xi^2 + \eta^2)$$



所以

$$\begin{aligned} & |-(l_0\xi + m_0\eta)(\xi^2 + \eta^2) + (l_0\xi + m_0\eta)^3| \\ &= |(l_0\xi + m_0\eta)[(l_0\xi + m_0\eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2)]| \\ &\leq |(l_0\xi + m_0\eta)(\xi^2 + \eta^2)| \leq \sqrt{2} (\xi^2 + \eta^2)^{3/2} \quad (6.1) \end{aligned}$$

同理

$$|(l\xi + m\eta)(\xi^2 + \eta^2) - (l\xi + m\eta)^3| \leq \sqrt{2} (\xi^2 + \eta^2)^{3/2} \quad (6.2)$$

把 (6.1) 、 (6.2) 代入 (5) 得

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(\xi, \eta)| &\leq \frac{1}{2r'^2} |-(l_0\xi + m_0\eta)(\xi^2 + \eta^2) + (l_0\xi + m_0\eta)^3| \\ &\quad + \frac{1}{2s'^2} |(l\xi + m\eta)(\xi^2 + \eta^2) - (l\xi + m\eta)^3| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{s'^2} \right) (\xi^2 + \eta^2)^{3/2} \ll \lambda \quad (7) \end{aligned}$$

若

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}{r'^2} &\ll \frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}{s'^2} &\ll \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} r'^2 &\gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}^{3/2}}{\lambda} \\ s'^2 &\gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}^{3/2}}{\lambda} \end{aligned}$$

上两个不等式同时满足，则 (7) 式成立。由此得出产生菲涅耳衍射的条件是

$$r'^2 \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}^{3/2}}{\lambda}$$

且 
$$s'^2 \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}^{5/2}}{\lambda}$$

同时还须满足  $|r'|$  不远远大于  $\frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda}$  和  $|s'|$  不远远大于  $\frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda}$ ，否则将出现夫琅和费衍射。

**5—16 解** 光源上各点在屏上产生衍射主极大的位置由光源上各点到狭缝中点连线的方向余弦  $l_0$  决定。当光源中心（在光轴上）点产生的衍射一级极小与光源边缘一点产生的衍射主极大重合时，衍射现象就看不见了。

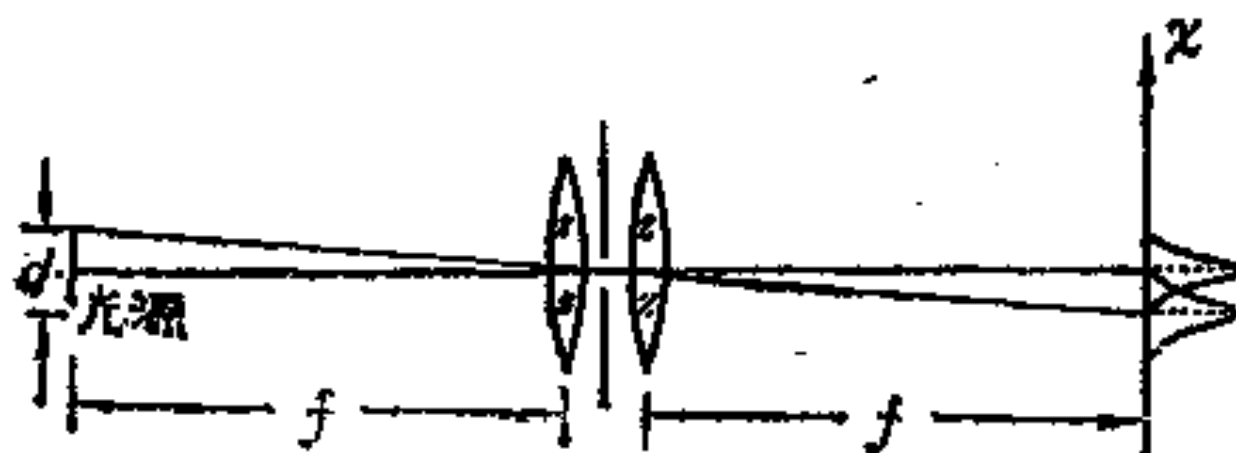


图 88

由

$$I(P) = \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 I_0$$

式中  $p = l - l_0$ ，对光源中心  $l_0 = 0$

中心点产生的一级极小应满足

$$kla = \pi$$

衍射光线的方向余弦

$$l \approx \frac{\pi}{ak} = \frac{\lambda}{2a} \quad (1)$$

光源边缘点产生衍射时主极大应满足

$$kpa = 0$$

即满足

$$p = l - l_0 = 0$$

如图88对光源边缘点

$$l_0 \approx \frac{d}{2f}$$

故

$$l = l_0 = \frac{d}{2f} \quad (2)$$

由 (1)、(2) 两式得

$$\frac{d}{2f} = \frac{\lambda}{2a}$$

$$d = \frac{f\lambda}{a} = \frac{300 \times 5000 \times 10^{-7}}{0.4} = 0.37 \text{ mm}$$

所以光源宽度不得超过0.37毫米。

5—25 解 (1) 圆孔衍射图样中心处的振幅

$$U_0 \approx CD$$

式中,  $D = \frac{\pi d^2}{4}$  是圆孔面积,

$$C = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{D}}, \quad E = \frac{E'}{f^2}$$

$E'$  是通过光阑的功率。

故

$$U_0 = \frac{1}{\lambda} \sqrt{ED} = \frac{d}{2\lambda f} \sqrt{\pi E'}$$

光阑处的振幅为

$$U' = \sqrt{\frac{E'}{D}} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{E'}{\pi}}$$

故有

$$\frac{U_0}{U'} = \frac{\pi d^2}{4\lambda f}$$

由题意  $d = 4\text{cm}$ ,  $f = 16\text{cm}$ ,  $\lambda = 488\text{nm} = 4.88 \times 10^{-5}\text{cm}$

$$\frac{U_0}{U'} = 1.61 \times 10^4$$

即, 透镜焦点处的场强是光阑处场强的  $1.61 \times 10^4$  倍。

(2) 圆孔衍射图样中心处光强

$$I_0 = C^2 D^2 = \frac{\pi d^2 E'}{4\lambda^2 f^2}$$

$$E' = \frac{\pi \frac{d^2}{4}}{\pi \frac{d_0^2}{4}} E_0 = \frac{d^2}{d_0^2} E_0$$

式中,  $E_0$  是光束的功率,  $d_0$  是光束直径。

$$\because E_0 = 1 \text{ W}, \quad d_0 = 6 \text{ cm}$$

$$\therefore I_0 = \frac{\pi d_0^4 E_0}{4 \lambda^2 d_0^2 f^2} \approx 9.16 \times 10^{10} \text{ W m}^{-2}$$

5—27 解 (1) 设圆屏半径为  $r$ , 透镜半径为  $R$

$$r = \varepsilon R$$

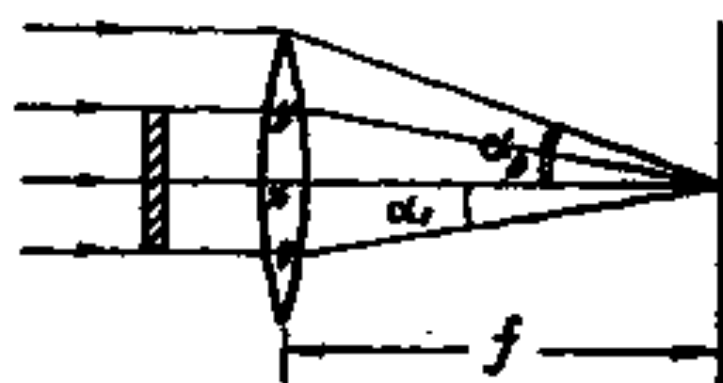


图 89

则

$$\alpha_1 = \varepsilon \alpha_0$$

因为圆孔衍射的振幅分布

$$U(p) = CD \left[ \frac{2J_1(ka w)}{ka w} \right]$$

式中,  $a$  为孔半径,  $D = \pi a^2$ ,  $C$  为常数。

所以半径为  $R$  的圆孔衍射振幅分布

$$\begin{aligned} U_1(P) &= CD_1 \left[ \frac{2J_1(kRw)}{kRw} \right] \\ &= C\pi R^2 \left[ \frac{2J_1(kRw)}{kRw} \right] \end{aligned}$$

半径为  $r$  的圆孔衍射振幅分布

$$U_2(p) = CD_2 \left[ \frac{2J_1(krw)}{krw} \right]$$

$$\because r = \varepsilon R$$

$$\therefore D_2 = \pi r^2 = \pi \varepsilon^2 R^2 = \varepsilon^2 D_1$$

得

$$U_2(p) = CD_1 \varepsilon^2 \left[ \frac{2J_1(krw)}{krw} \right]$$

加屏时衍射光的复振幅  $U(p)$  应是  $U_1(p)$  和  $U_2(p)$  之差。

即

$$\begin{aligned} U(p) &= U_1(p) - U_2(p) \\ &= CD_1 \left[ \frac{2J_1(kRw)}{kRw} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(krw)}{krw} \right] \end{aligned}$$

光强分布

$$I(p) = U^2(p) = I_0(0) \left\{ \frac{2J_1(kRw)}{kRw} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(krw)}{krw} \right\}^2$$

式中  $I_0(0) = C^2 D_1^2$  为无屏时中心点强度。中心点的  $w = 0$ ，加屏时中心强度

$$I(0) = I_0(0)(1 - \varepsilon^2)^2$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{I(0)}{I_0(0)} &= (1 - \varepsilon^2)^2 = \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^2 \right]^2 \end{aligned}$$

(2) 当  $\alpha_0 = 2\alpha_1$  时  $\varepsilon = 0.5$

加屏时的衍射暗环光强满足

$$\left[ \frac{2J_1(kRw)}{kRw} - \frac{0.5 \times 2J_1(0.5kRw)}{kRw} \right]^2 = 0$$

即

$$J_1(kRw) = 0.5J_1(0.5kRw)$$

查贝塞耳函数表可求得上式的解为

$$kRw = 3.144$$

$$w = \frac{3.144}{kR}$$

$$\therefore w = \sqrt{p^2 + q^2}$$

对于光线垂直入射情况  $l_0 = m_0 = 0$ , 故有

$$p^2 = l^2 = \frac{x^2}{s'^2} \approx \frac{x^2}{f^2}$$

$$q^2 = m^2 \approx \frac{y^2}{f^2}$$

$$\therefore w = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{f} = \frac{\rho}{f}$$

第一暗环半径  $\rho_1$  满足

$$\rho_1 = \frac{3.144}{\frac{2\pi}{\lambda} R} f = \frac{3.144 f \lambda}{2\pi R}$$

$$= \frac{3.144 \times 25 \times 5 \times 10^{-5}}{2\pi R} = \frac{6.25 \times 10^{-4}}{R} \text{ cm}$$

5—33 解 双缝的衍射光强分布公式为

$$I(p) = 4\cos^2\left(\frac{kdp}{2}\right) I^{(0)}(p)$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{kdp}{2}\right) \left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right) I_0$$

式中,  $I^{(0)}(p)$  是单缝衍射光强,  $I_0$  是单缝衍射图样中心点的光强。

在瑞利干涉仪中, 两缝间距  $d$  比缝宽  $a$  大得多, 故当  $p$  取值不大时

$$\frac{\sin(kpa)}{kpa} \approx 1$$

即可不考虑单缝衍射的影响。

$kdp$  表示发生干涉的两条光线之相位差, 以  $\delta$  代替。

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)l$$

式中,  $n$  是待测气体的折射率,  $l$  是气室长。

获得亮纹条件为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)l = 2m\pi$$

对上式两边取微分

$$\frac{(\Delta n)l}{\lambda} = \Delta m$$

$$\Delta n = \frac{(\Delta m)\lambda}{l}$$



$$\therefore \Delta m = \frac{1}{10}, \quad \lambda = 5500 \text{ \AA}, \quad l = 0.5m$$

$$\therefore \Delta n \approx 10^{-7}$$

5--38 解  $N$ 个全同孔在一直线上等间隔地排列，其夫琅和费衍射光强在与孔心连线相平行的直线上分布为

$$I(p) = \left[ \frac{\sin(Nkdp/2)}{\sin(kdp/2)} \right]^2 I^{(0)}(p) \quad (1)$$

式中， $d$ 为孔心间距， $I^{(0)}(p)$ 是单孔的衍射光强。

长轴为  $a$ ，短轴为  $b$  的椭圆孔可视为由半径为  $b$  的圆孔沿长轴方向均匀拉伸  $\mu = \frac{a}{b}$  倍而成。在过衍射图样中心，且与椭圆长轴平行的直线上，衍射复振幅分布为

$$U^{(0)}(p) = \mu \left[ \frac{2J_1(kb\mu p)}{kb\mu p} \right] U_0$$

$$= \frac{a}{b} \left[ \frac{2J_1(kap)}{kap} \right] U_0$$

$$I^{(0)}(p) = |U^{(0)}(p)|^2 = \left( \frac{a}{b} \right)^2 \left[ \frac{2J_1(kap)}{kap} \right]^2 I_0 \quad (2)$$

式中  $I_0$  是单孔衍射图样中心的光强。

把 (2) 代入 (1)，得

$$I(p) = \left( \frac{a}{b} \right)^2 \left[ \frac{\sin(Nkdp/2)}{\sin(kdp/2)} \right]^2 \left[ \frac{2J_1(kap)}{kap} \right]^2 I_0$$

5--44 解 设当所有的缝都不挡时，光栅夫琅和费衍射的复振幅分布为  $U_1$ ；当只有第  $3n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) 缝可通光

时，光栅衍射的复振幅分布为  $U_2$ 。

则有

$$U_1 = U^{(0)} \frac{1 - e^{-i3Nkpd}}{1 - e^{-ikpd}}$$

$$U_2 = U^{(0)} \frac{1 - e^{-iNkpd}}{1 - e^{-ikpd}}$$

$$= U^{(0)} \frac{1 - e^{-i3Nkpd}}{1 - e^{-i3kpd}}$$

式中  $U^{(0)}$  是光栅中每个缝衍射的复振幅分布。

显然，只挡住第  $3n$  缝时光栅的衍射复振幅分布为

$$U = U_1 - U_2 = U^{(0)} \left\{ \frac{1 - e^{-i3Nkpd}}{1 - e^{-ikpd}} - \frac{1 - e^{-i3Nkpd}}{1 - e^{-i3kpd}} \right\}$$

$$= U^{(0)} (1 - e^{-i3Nkpd}) \frac{(e^{-ikpd} - e^{-i3kpd})}{(1 - e^{-ikpd})(1 - e^{-i3kpd})}$$

光强分布为

$$I = UU^*$$

$$= (U^{(0)})^2 \frac{(1 - e^{-i3Nkpd})(1 - e^{i3Nkpd})(e^{-ikpd} - e^{-i3kpd})}{(1 - e^{-ikpd})(1 - e^{ikpd})(1 - e^{-i3kpd})}$$

$$\times \frac{(e^{ikpd} - e^{i3kpd})}{(1 - e^{i3kpd})}$$

$$= I^{(0)} \frac{\sin^2\left(\frac{3Nkpd}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{kpd}{2}\right)} \cdot \frac{\sin^2(kpd)}{\sin^2\left(\frac{3kpd}{2}\right)}$$

$$\text{当 } \frac{3kpd}{2} = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

时,  $I$  有极大值

$$\because k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ 且光垂直入射到光栅上, 入射角 } \theta_0 = 0,$$

$$\text{即 } p = \sin\theta$$

$$\therefore 3d\sin\theta = m\lambda$$

这就是光栅方程。

由光强表示式可见, 光强分布比一般透射光栅的光强分布多一因子

$$(1 + 2\cos\Delta)^2$$

$$\text{当 } \Delta = 2M\pi \text{ 时} \quad (M = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

$$(1 + 2\cos\Delta)^2 = 9$$

光强最大。每一处光强都是栅距为  $3d$  的一般透射光栅的相应处光强的九倍。

$$\text{当 } \Delta = 2M\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ 时} \quad (M = 0, \pm 1 \cdots)$$

光强为零。光栅只能起一挡光板的作用。

5—52 解 由 5—5 题知, 这时的衍射积分为

$$U(p, q) = c \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta$$

$$\text{已知 } F(\xi) = A \sin\left(\frac{2\pi\xi}{d}\right)$$

这是个一维问题, 可把衍射积分简化为

主极大的条件可化为

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda \quad (1)$$

这就是本题情况下的光栅方程，它与一般光栅方程相同。

$$(2) \text{ 当 } \frac{kpd}{2} = \frac{3m+1}{3}\pi \text{ 或 } \frac{kpd}{2} = \frac{3m+2}{3}\pi \text{ 时}$$

$$\cos^2\left(\frac{kpd}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{3Nkpd}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{3kpd}{2}\right)} = N^2$$

$$I = N^2 I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{kpa}{2}\right)}{\left(\frac{kpa}{2}\right)^2}$$

$I$ 是光强的强次极大，它与光栅第  $3n$  缝未被遮时的光强相同。

获得强次极大的条件可化为

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = \frac{3m+1}{3}\lambda \left( \text{或 } \frac{3m+2}{3}\lambda \right) \quad (2)$$

若  $N \rightarrow \infty$ ，则出现满足 (1) 的主极大和满足 (2) 的强次极大。即这时衍射光强分布的特点是在每两个相邻主极大间，等间隔地分布着两个光强为主极大四分之一的次极大。

**5—46 解** 本题中光栅上各处的振幅透射率都是1，又因透射光相位周期性地变化，故称为相位光栅。

将光栅按媒质厚度分为三组，如图39所示，每组可视为一个光栅，以  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  分别表示透过第一、第二、第三组的衍射光的复振幅分布。（设最厚的是第一组）

$$U_2 = U_0 \frac{1 - e^{-iNkpd}}{1 - e^{-ikpd}} = U_0 \frac{1 - e^{-iNkpd}}{1 - e^{-ikpd}}$$

式中  $U_0$  是通过第二组中每一个台（相当于一个狭缝）的衍射光的复振幅分布。

$$U_1 = U_2 e^{i\Delta}$$

$$U_3 = U_2 e^{-i\Delta}$$

式中  $\Delta$  表示由于第一和第二（或第二和第三）组中每条光线穿透的媒质厚度不同而引进的相位差。

$$\Delta \equiv \frac{t(n-1)}{\lambda} - 2\pi$$

所以，衍射光总的复振幅分布为

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$= U_0 (1 + e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}) \frac{1 - e^{-iNkpd}}{1 - e^{-ikpd}}$$

衍射光的光强分布为

$$I = UU^* = I_0 (1 + e^{i\Delta} + e^{-i\Delta})^2 \frac{\sin^2\left(\frac{3Nkpd}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{3kpd}{2}\right)}$$

$$= I_0 (1 + 2\cos\Delta)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{3Nkpd}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{3kpd}{2}\right)}$$

$$\text{当 } \frac{3kpd}{2} = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

时,  $I$  有极大值

$$\because k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ 且光垂直入射到光栅上, 入射角 } \theta_0 = 0,$$

$$\text{即 } p = \sin\theta$$

$$\therefore 3d\sin\theta = m\lambda$$

这就是光栅方程。

由光强表示式可见, 光强分布比一般透射光栅的光强分布多一因子

$$(1 + 2\cos\Delta)^2$$

$$\text{当 } \Delta = 2M\pi \text{ 时} \quad (M = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

$$(1 + 2\cos\Delta)^2 = 9$$

光强最大。每一处光强都是栅距为  $3d$  的一般透射光栅的相应处光强的九倍。

$$\text{当 } \Delta = 2M\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ 时} \quad (M = 0, \pm 1 \cdots)$$

光强为零。光栅只能起一挡光板的作用。

5—52 解 由 5—5 题知, 这时的衍射积分为

$$U(p, q) = c \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta$$

$$\text{已知 } F(\xi) = A \sin\left(\frac{2\pi\xi}{d}\right)$$

这是个一维问题, 可把衍射积分简化为

$$U(p) = cA \int \sin \frac{2\pi\xi}{d} e^{-ikp\xi} d\xi$$

式中， $d$  是光栅的周期。

利用

$$\sin \frac{2\pi\xi}{d} = \frac{1}{2i} \left( e^{i\frac{2\pi\xi}{d}} - e^{-i\frac{2\pi\xi}{d}} \right)$$

可得一个周期的衍射复振幅分布为

$$\begin{aligned} U^{(0)}(p) &= \frac{cA}{2i} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left[ e^{-ik(p-\frac{\lambda}{d})\xi} - e^{-ik(p+\frac{\lambda}{d})\xi} \right] d\xi \\ &= \frac{icA}{k} \left\{ \frac{\sin \left[ k \left( p + \frac{\lambda}{d} \right) \frac{d}{2} \right]}{p + \frac{\lambda}{d}} - \frac{\sin \left[ k \left( p - \frac{\lambda}{d} \right) \frac{d}{2} \right]}{p - \frac{\lambda}{d}} \right\} \\ &= U_0 \left[ \operatorname{sinc} \left( \frac{kpd}{2} + \pi \right) - \operatorname{sinc} \left( \frac{kpd}{2} - \pi \right) \right] \end{aligned}$$

式中， $U_0 = \frac{icAd}{2}$  是在一个周期的衍射图样中心的复振幅。

一个周期的衍射光强分布为

$$I^{(0)}(p) = I_0 \left[ \operatorname{sinc} \left( \frac{kpd}{2} + \pi \right) - \operatorname{sinc} \left( \frac{kpd}{2} - \pi \right) \right]^2$$

式中， $I_0$  是在一个周期的衍射图样中心点光强。

设光栅有  $N$  个周期，则总光强分布为

$$I(p) = \left( \frac{\sin \frac{Nkpd}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right)^2 I^{(0)}(p)$$

$$= \left( \frac{\sin \frac{Nkpd}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right)^2 \left[ \operatorname{sinc} \left( \frac{kpd}{2} + \pi \right) - \operatorname{sinc} \left( \frac{kpd}{2} - \pi \right) \right]^2$$

**5—55 解** 被照明的光缝可视为线光源，它经柱透镜后在象面上形成夫琅和费单缝衍射图样，其振幅为

$$U = C \frac{\sin \frac{kpd}{2}}{\frac{kpd}{2}}$$

式中， $d$  是柱透镜的宽度。

如果存在两个相靠近的被照明光缝，则在象面上所观察到的是两组单缝衍射图样的迭加。

若为完全非相干照明，应取光强迭加；若为完全相干照明，则应取复振幅迭加。

一、完全非相干照明

∴ 单缝衍射的光强分布为

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{kpd}{2}}{\frac{kpd}{2}} \right)^2$$

∴ 二个光缝的衍射光强分布分别为

$$I_1 = I_0 \left( \frac{\sin \frac{kp_1 d}{2}}{\frac{kp_1 d}{2}} \right)^2$$



$$I_2 \approx I_0 \left( \frac{\sin \frac{kp_2 d}{2}}{\frac{kp_2 d}{2}} \right)^2$$

### (1) 瑞利判据

若 $I_2$ 的中央极大恰好落在 $I_1$ 的第一极小上, 则两光缝刚可被分辨。

$I_2$ 中央极大的条件为

$$\frac{kp_2 d}{2} = 0$$

即  $p_2 = 0$

$I_1$ 第一极小的条件为

$$\frac{kp_1 d}{2} = \pi$$

即  $p_1 = \frac{2\pi}{kd} = \frac{\lambda}{d}$

故有

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 = \sin \theta_1 \approx \Delta \theta = \frac{\lambda}{d}$$

$\Delta \theta$ 即两缝刚可分辨的角距。

分辨本领

$$\frac{1}{\Delta \theta} \approx \frac{d}{\lambda}$$

### (2) 史派劳判据

当合成光强曲线中点鞍峰刚刚消失时 (即合强度对  $p$  的

二阶导数在中点处为0)，两光缝刚不可被分辨。

$$\text{令} \quad p_1 = p, \quad p_2 = p - \Delta p$$

则

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= I_0 \left\{ \left( \operatorname{sinc} \frac{k p d}{2} \right)^2 + \left[ \operatorname{sinc} \frac{k (p - \Delta p) d}{2} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad x = \frac{k p d}{2} \quad \Delta x = \frac{k \Delta p d}{2}$$

则

$$\begin{aligned} I &= I_0 \{ (\operatorname{sinc} x)^2 + [\operatorname{sinc}(x - \Delta x)]^2 \} \\ &= I_0 \left\{ \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 + \left[ \frac{\sin(x - \Delta x)}{(x - \Delta x)} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dx^2} &= 2I_0 \left\{ \frac{4x \sin x \cos x - (3 - x^2) \sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} \right. \\ &\quad + \frac{4(x - \Delta x) \sin(x - \Delta x) \cos(x - \Delta x) - [3 - (x - \Delta x)^2]}{(x - \Delta x)^4} \rightarrow \\ &\quad \left. \leftarrow \frac{\sin^2(x - \Delta x) - (x - \Delta x)^2 \cos^2(x - \Delta x)}{(x - \Delta x)^4} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{中点处 即 } p = \frac{\Delta p}{2} \text{ 处 亦即 } x = \frac{\Delta x}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dx^2} \Big|_{x = \frac{\Delta x}{2}} &= -\frac{16I_0}{(\Delta x)^4} \left\{ 8\Delta x \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{\Delta x}{2} - 12 \sin^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\Delta x)^2 \left[ \sin^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right) - \cos^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{16I_0}{(\Delta x)^4} \left[ 4\Delta x \sin \Delta x - 12 \sin^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right) - (\Delta x)^2 \cos \Delta x \right]$$

所以，刚可分辨的条件是

$$4\Delta x \sin \Delta x - 12 \sin^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right) - (\Delta x)^2 \cos \Delta x = 0$$

此方程的近似解为

$$\Delta x \approx 2.606$$

即 
$$\Delta p = \frac{2\Delta x}{kd} \approx 0.83 \frac{\lambda}{d}$$

得分辨本领

$$\frac{1}{\Delta \theta} \approx \frac{1}{\Delta p} \approx 1.206 \frac{d}{\lambda}$$

比用瑞利判据得到的分辨本领大。

## 二、完全相干照明

$$\because U_1 = U_0 \left( \text{sinc} \frac{kp_1 d}{2} \right)$$

$$U_2 = U_0 \left( \text{sinc} \frac{kp_2 d}{2} \right)$$

令  $p_1 = p$                       则  $p_2 = p - \Delta p$

$$\therefore U = U_1 + U_2 = U_0 \left\{ \left[ \text{sinc} \frac{kp d}{2} \right] + \left[ \text{sinc} \frac{k(p - \Delta p) d}{2} \right] \right\}$$

### (1) 用瑞利判据

对于完全相干的情况，因谈论两衍射图样的各自光强分布已无意义，故原来瑞利判据的表述不能直接用，应改用较

峰比，即

$$I_{\text{中}} = 0.811 I_{\text{max}}$$

$$I = |U|^2 = I_0 \left\{ \text{sinc} \frac{k p d}{2} + \text{sinc} \frac{k(p - \Delta p)d}{2} \right\}^2 \quad (1)$$

由  $\frac{dI}{dp} = 0$  很容易得出  $I_{\text{max}}$  出现在  $p \approx \Delta p$  处。用  $p = \Delta p$

代入 (1) 式，得

$$I_{\text{max}} = I_0 \left[ \text{sinc} \frac{k \Delta p d}{2} + 1 \right]^2$$

而中点在  $p = \frac{\Delta p}{2}$  处。把  $p = \frac{\Delta p}{2}$  代入 (1) 式，得

$$I_{\text{中}} = 4I_0 \left( \text{sinc} \frac{k \Delta p d}{4} \right)^2$$

令 
$$\Delta x = \frac{k \Delta p d}{4}$$

由瑞利判据

$$I_{\text{中}} = 0.811 I_{\text{max}}$$

时，二光缝刚可被分辨，则

$$4I_0 (\text{sinc} \Delta x)^2 = 0.811 [\text{sinc}(2\Delta x) + 1]^2$$

整理得

$$4\sin^2 \Delta x - 0.811 \sin^2 \Delta x \cos^2 \Delta x - 1.622 \Delta x \sin \Delta x \cos \Delta x - 0.811 (\Delta x)^2 = 0$$

此方程的近似解为

$$\Delta x = 2.23$$

所以

$$\Delta p = \frac{4\Delta x}{kd} = \frac{4 \times 2.33}{2\pi d} \lambda = 1.42 \frac{\lambda}{d}$$

分辨本领

$$\frac{1}{\Delta\theta} \approx \frac{1}{\Delta p} = 0.704 \frac{d}{\lambda}$$

(2) 用史派劳判据

令  $x = \frac{kpd}{2}, \quad \Delta x = \frac{k\Delta p d}{2}$

(1) 式可化为

$$I = I_0 [\sin x + \sin(x - \Delta x)]^2$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 I}{dx^2} \right|_{x=\frac{\Delta x}{2}} &= \frac{32I_0 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^4} \left( \Delta x^2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - 4\Delta x \cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + 8\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

因为可分辨的极限条件是

$$\left. \frac{d^2 I}{dx^2} \right|_{x=\frac{\Delta x}{2}} = 0$$

所以有

$$\Delta x^2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - 4\Delta x \cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + 8\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

此方程近似解为

$$\Delta x = 4.14$$

即 
$$\Delta p = \frac{2\Delta x}{kd} = \frac{2 \times 4.14}{2\pi d} \lambda = 1.32 \frac{\lambda}{d}$$

分辨本领

$$\frac{1}{\Delta\theta} \approx \frac{1}{\Delta p} = 0.76 \frac{d}{\lambda}$$

5—63 证: (1)

$$\begin{aligned} \text{由 } \mathcal{C}(v) &= \int_0^v \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \\ &= \int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv - \int_v^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \\ &= \frac{1}{2} - \int_v^\infty \frac{1}{\pi v} \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \pi v dv \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi v} \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \Big|_v^\infty + \int_v^\infty \frac{1}{\pi v^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \end{aligned}$$

式中最后一步用了分部积分, 继续对

$$\int_v^\infty \frac{1}{\pi v^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv$$

用分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_v^\infty \frac{1}{\pi v^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv &= -\frac{1}{\pi^2 v^3} \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \Big|_v^\infty \\ &\quad - \int_v^\infty \frac{3}{\pi^2 v^4} \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \end{aligned}$$

因为  $\nu$  很大, 忽略  $\frac{1}{\nu^2}$  量级的项, 故

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \nu^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu^2\right) d\nu$$

可忽略。

最后得

$$\mathcal{C}(\nu) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi \nu} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu^2\right)$$

同理可证

$$\mathcal{S}(\nu) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi \nu} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu^2\right)$$

$$(2) \quad I = \frac{1}{2} I_0 \{ [\mathcal{C}(\nu_2 + \nu_1) - \mathcal{C}(\nu_2 - \nu_1)]^2 + [\mathcal{S}(\nu_2 + \nu_1) - \mathcal{S}(\nu_2 - \nu_1)]^2 \}$$

由 5—62 题知

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} \frac{b}{2}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} x$$

当  $d$  很大时, 显然  $\nu_1$  很小, 而

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} x = \sqrt{\frac{2d}{\lambda}} \frac{x}{d} = \sqrt{\frac{2d}{\lambda}} \theta$$

式中,  $\theta$  是衍射角, 因此当  $d$  很大时,  $\nu_2$  却很大。从而  $\nu_2 + \nu_1$  及  $\nu_2 - \nu_1$  也都很大。

由 (1) 中结果可得

$$\mathcal{C}(\nu_2 + \nu_1) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi(\nu_2 + \nu_1)} \sin\left[\frac{\pi}{2} (\nu_2 + \nu_1)^2\right]$$

$$\mathcal{C}(\nu_2 - \nu_1) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi(\nu_2 - \nu_1)} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (\nu_2 - \nu_1)^2 \right]$$

$$\mathcal{C}(\nu_2 + \nu_1) - \mathcal{C}(\nu_2 - \nu_1)$$

$$\approx \frac{1}{\pi \nu_2} \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{2} (\nu_2 + \nu_1)^2 \right] - \sin \left[ \frac{\pi}{2} (\nu_2 - \nu_1)^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi \nu_2} \cos \left[ \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_1^2) \right] \sin (\pi \nu_1 \nu_2)$$

同理可得

$$\mathcal{S}(\nu_2 + \nu_1) - \mathcal{S}(\nu_2 - \nu_1)$$

$$\approx \frac{2}{\pi \nu_2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (\nu_2^2 + \nu_1^2) \right] \sin (\pi \nu_1 \nu_2)$$

把这些结果代入光强表示式，得

$$I = \frac{I_0}{2} \frac{4}{\pi^2 \nu_2^2} \sin^2 (\pi \nu_1 \nu_2) = 2I_0 \nu_1^2 \left[ \frac{\sin (\pi \nu_1 \nu_2)}{\pi \nu_1 \nu_2} \right]^2$$

$$\text{令} \quad I'_0 = 2I_0 \nu_1^2 = \frac{b^2}{\lambda d} I_0$$

$I'_0$ 表示衍射图样中心处的光强。

$$\because \quad \pi \nu_1 \nu_2 = \frac{2\pi}{\lambda d} \cdot \frac{bx}{2} = k\theta \quad \frac{b}{2} = kp \frac{b}{2}$$

$$\therefore \quad I = \left( \frac{\sin kp \frac{b}{2}}{kp \frac{b}{2}} \right)^2 I'_0$$

此结果与夫琅和费单缝衍射光强分布公式完全一致。



5—68 解 在透镜焦点附近的衍射光强三维分布为

$$I(p) = I_0 [C^2(u, v) + S^2(u, v)] \quad (1)$$

(1) 在几何阴影区

$$\left| \frac{u}{v} \right| < 1$$

$$C(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 J_0(v\rho) \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \rho d\rho$$

用  $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$

则

$$C(u, v) = \frac{2}{v} \int_0^1 \frac{d}{d\rho} [\rho J_1(v\rho)] \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho$$

用分部积分法, 令

$$U = \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right), \quad dU = -u\rho \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho$$

$$V = \rho J_1(v\rho), \quad dV = d[\rho J_1(v\rho)]$$

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \frac{2}{v} \left[ \rho J_1(v\rho) \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \right] \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{2}{v} \int_0^1 [\rho J_1(v\rho)] \left[ u\rho \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \right] d\rho \\ &= \frac{2}{v} \left[ J_1(v) \cos \frac{u}{2} + u \int_0^1 \rho^2 J_1(v\rho) \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho \right] \end{aligned}$$

由  $\frac{d}{dx}[x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= u \int_0^1 \rho^2 J_1(v\rho) \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho \\ &= \frac{u}{v} \int_0^1 \frac{d}{d\rho} [\rho^2 J_2(v\rho)] \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho \end{aligned}$$

再用分部积分法，令

$$U = \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right), \quad dU = u\rho \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho$$

$$V = \rho^2 J_2(v\rho); \quad dV = d[\rho^2 J_2(v\rho)]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{u}{v} \left[ \rho^2 J_2(v\rho) \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \right] \Big|_0^1 \\ &\quad - u \int_0^1 \rho^3 J_2(v\rho) \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho \\ &= \frac{u}{v} \left[ J_2(v\rho) \sin \frac{u}{2} \right] - u \int_0^1 \rho^3 J_2(v\rho) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho \end{aligned}$$

这样不断地用公式

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x)$$

和分部积分法，可得

$$C(u, v) = -\frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \left[ \left( \frac{u}{v} \right) J_1(v) - \left( \frac{u}{v} \right)^3 J_3(v) + \cdots \right]$$

$$+ \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \left[ \left( \frac{u}{v} \right)^2 J_2(v) - \left( \frac{u}{v} \right)^4 J_4(v) + \dots \right]$$

由洛梅耳函数

$$U_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left( \frac{u}{v} \right)^{n+2s} J_{n+2s}(v)$$

最后得  $C(u, v) = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} U_1(u, v) + \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} U_2(u, v)$

同理可得

$$S(u, v) = 2 \int_0^1 J_0(v\rho) \sin \left( \frac{1}{2} u \rho^2 \right) \rho d\rho$$

$$= \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} U_1(u, v) - \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} U_2(u, v)$$

代入 (1) 式, 得

$$I(p) = \left( \frac{2}{u} \right)^{\frac{1}{2}} [U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v)] I_0$$

(2) 在照明区,  $\left| \frac{u}{v} \right| > 1$

$$C(u, v) = 2 \int_0^1 J_0(v\rho) \cos \left( \frac{1}{2} u \rho^2 \right) \rho d\rho$$

用分部积分法, 令

$$U = J_0(v\rho) \quad dV = \cos\left(-\frac{1}{2}u\rho^2\right) \rho d\rho$$

$$dU = d[J_0(v\rho)] \quad V = \frac{1}{u} \sin\left(-\frac{1}{2}u\rho^2\right)$$

用

$$\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x)$$

$$dU = -vJ_1(v\rho)d\rho$$

得

$$C(u, v) = \frac{2}{u} \left[ J_0(v\rho) \sin\left(-\frac{1}{2}u\rho^2\right) \right] \Big|_0^1 \\ + \frac{2v}{u} \int_0^1 J_1(v\rho) \sin\left(-\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho$$

再用分部积分法，令

$$U = \frac{J_1(v\rho)}{\rho}, \quad dV = \sin\left(-\frac{1}{2}u\rho^2\right) \rho d\rho$$

$$dU = v d\left[\frac{J_1(v\rho)}{v\rho}\right], \quad V = -\frac{1}{u} \cos\left(-\frac{1}{2}u\rho^2\right)$$

用  $\frac{d}{dx}[x^{-1}J_1(x)] = -x^{-1}J_2(x)$

$$dU = -vJ_2(v\rho) \frac{1}{\rho} d\rho$$

得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= v \int_0^1 J_1(v\rho) \sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) d\rho \\ &= -\frac{v^2}{u} \left[ \frac{J_1(v\rho)}{v\rho} \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \right] \Big|_0^1 - \frac{v^2}{u} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 J_2(v\rho) \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathcal{J}_2 = \frac{v^2}{2u} - \frac{v}{u} J_1(v) \cos \frac{u}{2}$$

$$- \frac{v^2}{u} \int_0^1 J_2(v\rho) \cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right) \frac{1}{\rho} d\rho$$

反复用分部积分法和

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n n!}$$

可得

$$C(u, v) = \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \left[ J_0(v) - \left(\frac{v}{u}\right)^2 J_2(v) + \dots \right]$$

$$- \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \left[ \left(\frac{v}{u}\right) J_1(v) - \left(\frac{v}{u}\right)^3 J_3(v) + \dots \right]$$

$$+ \frac{2}{u} \left[ \frac{v^2}{2u} - \frac{1}{3!} \left( \frac{v^2}{2u} \right)^3 + \dots \right]$$

由洛梅耳函数

$$V_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left( \frac{v}{u} \right)^{n+2s} J_{n+2s}(v)$$

并考虑到

$$\frac{v^2}{2u} - \frac{1}{3!} \left( \frac{v^2}{2u} \right)^3 + \dots = \sin \left( \frac{v^2}{2u} \right)$$

最后得

$$C(u, v) = \frac{2}{u} \sin \left( \frac{v^2}{2u} \right) + \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_0(u, v)$$

$$- \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_1(u, v)$$

同理可得

$$S(u, v) = \frac{2}{u} \cos \left( \frac{v^2}{2u} \right) - \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_0(u, v)$$

$$+ \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_1(u, v)$$

代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned}
I(p) &= \left\{ \left[ \frac{2}{u} \sin \left( \frac{v^2}{2u} \right) + \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_0(u, v) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_1(u, v) \right]^2 + \left[ \frac{2}{u} \cos \left( \frac{v^2}{2u} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\cos \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_0(u, v) - \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} V_1(u, v) \right]^2 \right\} I_0 \\
&= \left( \frac{2}{u} \right)^2 \left[ 1 + V_0^2(u, v) + V_1^2(u, v) - 2V_0(u, v) \right. \\
&\quad \times \cos \frac{1}{2} \left( u + \frac{v^2}{u} \right) - 2V_1(u, v) \\
&\quad \times \sin \frac{1}{2} \left( u + \frac{v^2}{u} \right) \left. \right] I_0
\end{aligned}$$

5—73 解 (1) 点物发出球面波，其复扰动可表示为

$$V_0(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

取底板法线方向为  $z$  轴，则正入射的平面参考波之复扰动可表示为

$$V_R(z, t) = B e^{i(kz - \omega t)}$$

式中， $z = r$ 。

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \approx r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2r_0}$$

全息底板上的合扰动为

$$\begin{aligned} V(x, y, t) &= V_0(x, y, t) + V_R(x, y, t) \\ &\approx \frac{A}{r_0} e^{i[k(r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2r_0}) - \omega t]} + B e^{i(kr_0 - \omega t)} \\ &= e^{i(kr_0 - \omega t)} \left[ \frac{A}{r_0} e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2r_0}} + B \right] \end{aligned}$$

光强分布为

$$I(x, y) = \frac{A^2}{r_0^2} + B^2 + 2 \frac{AB}{r_0} \cos k \frac{(x^2 + y^2)}{2r_0}$$

当  $k \frac{(x^2 + y^2)}{2r_0} = 2m\pi$  时, 即当  $x^2 + y^2 = 2m\lambda r_0$  时,

得  $I$  的极大值。

故干涉条纹是一些同心圆, 其亮环半径

$$R \approx \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2m\lambda r_0}$$

(2) 一般全息底板均在其乳剂特性曲线 (赫特—德里菲耳德曲线) 的直线部分使用, 为简单起见, 设乳剂特性曲线直线段的斜率为 1, 则全息底板的光强透射率与曝光时的光强成反比。因此 (1) 中摄得的全息底板之透射率随  $R$  的变化和  $I$  随  $R$  的变化相反。底板上透射率的极大值对应于  $I$  的极小值, 其半径与奇数的平方根成正比, 而底板上透射率极小值则对应  $I$  之极大值, 其半径与偶数的平方根成正比, 这和非涅耳波带片很相似。然而全息底板上透射率随半径  $R$  是正弦型变化, 波带片之透射率随  $R$  是矩形变化, 这就是二者不同之处。



## 第六章 象差的几何理论和 象差的衍射理论

### 6-5 证由象差曲线方程

$$\Delta x^{(s)} = D \rho y_0^2 \sin \theta$$

$$\Delta y^{(s)} = (2C + D) \rho y_0^2 \cos \theta$$

把  $\Delta x^{(s)} = x_1 - x_0$  及  $\Delta y^{(s)} = y_1 - y_0$  代入上式, 并消去  $\theta$ , 得

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{(D \rho y_0^2)^2} + \frac{(y_1 - y_0)^2}{[(2C + D) \rho y_0^2]^2} = 1 \quad (1)$$

(1) 式中的  $x, y$  是赛德耳坐标, 把它变换到普通坐标  $X, Y$ 。

$$\text{由 } x_1 = \frac{n_1 \lambda_1}{D_1} X_1, \quad x_0 = x_1^* = \frac{n_1 \lambda_1}{D_1} X_1^*$$

$$y_1 = \frac{n_1 \lambda_1}{D_1} Y_1, \quad y_0 = \frac{n_1 \lambda_1}{D_1} Y_1^* = \frac{n_0 \lambda_0}{D_0} Y_0$$

$$\frac{n_0 \lambda_0 D_1}{n_1 \lambda_1 D_0} = M \quad \text{为横向放大率。}$$

代入 (1) 式, 得

$$\frac{(X_1 - X_1^*)^2}{(D \rho M^2 Y_0^2)^2} + \frac{(Y_1 - Y_1^*)^2}{[(2C + D) \rho M^2 Y_0^2]^2} = 1 \quad (2)$$

从 (2) 式可见当  $C \neq 0, D \neq 0$  时, 在高斯象平面上对

应某一  $\rho$  值的象差曲线是个中心在高斯象点, 半轴分别为  $D\rho M^2 Y_0^2$  和  $(2C + D)\rho M Y_0^2$  的椭圆。当  $\rho$  取从 0 到  $\rho_0$  ( $\rho_0$  对应于出瞳半径) 的各值时, 所得象差曲线的总合即形成一个椭圆形光斑。

证毕

6—7 证 如图 90, 物平面上一正方形  $P_1 P_2 P_3 P_4$ , 其中心在光轴上。设  $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$  是  $P_1 P_2 P_3 P_4$  的理想象, 可以证明由于存在畸变, 放大率不再是常数。

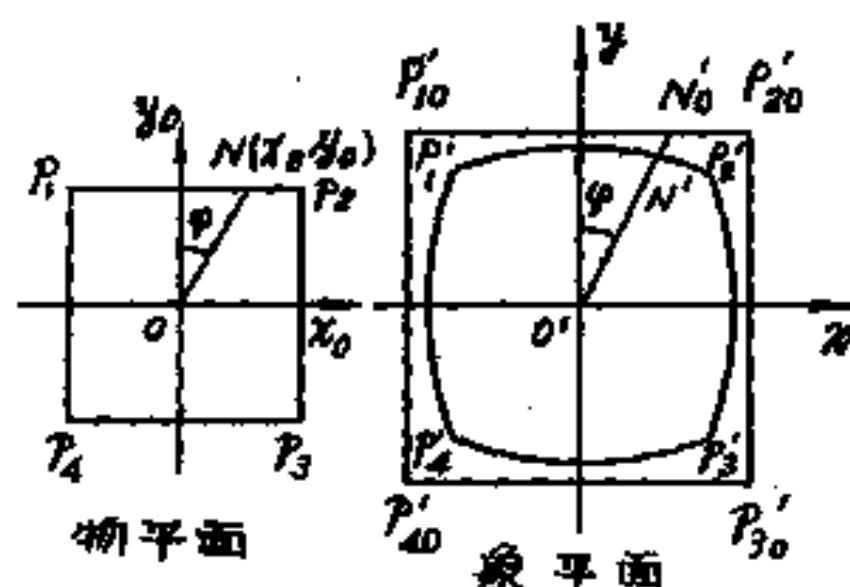


图 90

由  $\Delta y^{(2)} = -E y_0^2$

即  $y_1 - y_0 = -E y_0^2$

变换到普通坐标系, 得

$$Y_1 = M Y_0 (1 - E M^2 Y_0^2)$$

式中  $M$  是无畸变时的横向放大率。对于轴对称系统可以写成

$$r_1 = M r_0 (1 - E M^2 r_0^2)$$

可见有畸变时横向放大率

$$M'(\tau_0) = \frac{r_1}{r_0} = M(1 - EM^2\tau_0^2)$$

$$\text{由 } \frac{dM'(\tau_0)}{d\tau_0} = -2EM^3\tau_0$$

可见放大率及其变化率都是随物点的离轴距离  $\tau_0$  而变的。

当  $E > 0$  时

$$M'(\tau_0) \leq M$$

$$\frac{dM'(\tau_0)}{d\tau_0} < 0$$

即离轴越远放大率越小，同时放大率减小得也越快。在图90中， $N'_0$  是  $N$  的高斯象点。

$$ON = \tau_0, \quad O'N'_0 = M\tau_0$$

由于存在畸变，实际成象在  $N'$  点

$$O'N' = \tau_1$$

所以有

$$N'_0N' = O'N' - O'N'_0 = \tau_1 - M\tau_0 = -EM^3\tau_0^3$$

当  $E > 0$  时  $N'_0N' < 0$  即  $O'N' < O'N'_0$  且  $N'_0N'$  随  $\tau_0$  之增大而迅速增大， $P_1P_2P_3P_4$  产生  $P'_1P'_2P'_3P'_4$  这样的象。即造成桶形畸变。

当  $E < 0$  时

$$M'(\tau_0) \geq M$$

$$\frac{dM'(\tau_0)}{d\tau_0} > 0$$

即离轴越远放大率越大，同时放大率增加得也越快，造成枕形畸变。

证毕

**6—14 解** (1) 不晕点应同时消除球差和彗差。即球差系数  $B$  和彗差系数  $F$  应满足

$$B = 0, \quad F = 0$$

又因为是薄透镜，且入瞳与透镜重合，所以

$$l_1 = 0, \quad k = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{s_1} = 0$$

$$\text{由} \quad B = h^4 U$$

$$F = h^4 k U + h^2 V$$

$$\text{得} \quad U = 0, \quad V = 0$$

即

$$U = \frac{1}{2} \beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2} \mathcal{P}^3 - \frac{n}{2(n+2)} \mathcal{K}^2 \mathcal{P} + \frac{1}{2n(n+2)} \mathcal{P} \left[ \frac{n+2}{2(n-1)} \sigma + 2(n+1) \mathcal{K} \right]^2 = 0 \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2n} \mathcal{P} \left[ \frac{n+1}{2(n-1)} \sigma + (2n+1) \mathcal{K} \right] = 0 \quad (2)$$

因为透镜的焦距  $f$  为有限值，故光焦度

$$\mathcal{P} \neq 0$$

由 (2) 式得

$$\frac{n+1}{2(n-1)} \sigma + (2n+1) \mathcal{K} = 0 \quad (3)$$

根据定义

$$\sigma = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{s_1} - \frac{\mathcal{P}}{2} \quad (4)$$

代入 (3) 式得

$$\frac{n+1}{2(n-1)} (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - (2n+1) \left( \frac{1}{s_1} + \frac{\mathcal{P}}{2} \right) = 0 \quad (5)$$

又因

$$\mathcal{P} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6)$$

由 (5)、(6) 二式解得

$$\frac{1}{r_1} = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{\mathcal{P}}{2} \right) + \frac{\mathcal{P}}{2(n-1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{\mathcal{P}}{2} \right) - \frac{\mathcal{P}}{2(n-1)} \quad (8)$$

由 (3) 式得

$$\sigma = -\frac{2(2n+1)(n-1)}{n+1} \mathcal{K} \quad (9)$$

把 (4) 式, (9) 式代入 (1) 式中, 整理得

$$\beta = -\frac{n^3}{(n^2-1)^2} \mathcal{P} + \frac{n^2}{(n+1)^2 s_1} \mathcal{P}^2$$

$$+ \frac{n^2}{(n+1)^2 s_1^2} \mathcal{P} \quad (10)$$

(7)、(8)、(10) 式即为所求结果。

6—20 解 设透镜无变形, 则

$$b_1 = b_2 = 0$$

已知  $i = 2$ ,  $n_0 = n_2 = 1$ ,  $n_1 = 1.5$

$$r_1 = 30\text{cm}, r_2 \rightarrow \infty, s_1 = 30\text{cm}$$

因为孔径光阑就是透镜边缘, 而凸面是朝来光方向, 所以入瞳应是透镜边缘经凸面折射在其前边所成的象。

由成象公式

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

其中  $r = 30\text{cm}$ ,  $s = 2\text{cm}$ ,  $n = 1.5$ ,  $n' = 1$

可算得  $s' = +1.36\text{cm}$

即入瞳位置在凸顶点右边1.36厘米处。

亦即  $t_1 = 1.36\text{cm}$

显然出瞳到透镜平表面的距离

$$t_2 = 0$$

由高斯光学的成象公式求透镜左边30厘米处的物点经各折射面后的成象位置 (见3—17 (2) 题) 为

$$s'_1 = -90\text{cm}$$

$$s_2 = s'_1 - d = -90 - 2 = -92\text{cm}$$

$$s'_2 = \frac{n_2}{n_1} s_2 = -61.3\text{cm}$$

由

$$K_i = n_i \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{s_i} \right)$$

可求得

$$K_1 = 0.0667, \quad K_2 = 0.0163$$

又

$$\therefore h_1 = \frac{s_1}{t_1 - s_1} = \frac{-30}{1.36 - (-30)} = -0.9566$$

$$h_2 = \frac{s_2}{s_1} h_1 = \frac{-92}{-90} \times (-0.9566) = -0.9779$$

$$H_1 = \frac{t_1}{n_0 \lambda_0} = t_1 = 1.36$$

$$\therefore k_1 = \frac{H_1}{h_1} = \frac{1.36}{-0.9566} = -1.422$$

$$k_2 = k_1 + \frac{d}{n_1 h_1 h_2} = 0.0033$$

列表如下

i	1	2
$b_i$	0	0
$r_i$	30 (cm)	$\infty$
$s_i$	-30 (cm)	-92 (cm)
$s_i$	-90 (cm)	-61.3 (cm)
$k_i$	0.0667	0.0163
$t_i$	1.36	0
$h_i$	-0.9566	-0.9779
$h_i^4$	0.8374	0.9145
$k_i$	-1.422	0.0033
$\frac{1}{n_i s_i} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}$	0.02593	-0.009067

计算象差系数

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{1}{2} \sum_i \left[ h_i^4 \frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + h_i^4 K_i^2 \left( \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ h_1^4 K_1^2 \left( \frac{1}{n_1 s_1'} - \frac{1}{n_0 s_1} \right) + h_2^4 K_2^2 \left( \frac{1}{n_2 s_2'} - \frac{1}{n_1 s_2} \right) \right] \\
 &= 4.72 \times 10^{-5} \text{cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= -\frac{1}{2} \sum_i \left[ h_i^4 k_i^2 \frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + (1 + h_i^2 k_i K_i)^2 \right. \\
 &\quad \times \left. \left( \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ (1 + h_1^2 k_1 K_1)^2 \left( \frac{1}{n_1 s_1'} - \frac{1}{n_0 s_1} \right) + (1 + h_2^2 k_2 K_2)^2 \right. \\
 &\quad \times \left. \left( \frac{1}{n_2 s_2'} - \frac{1}{n_1 s_2} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} [0.02162 - 0.0090679] \\
 &= 6.28 \times 10^{-3} \text{cm}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \sum_i \left[ h_i^4 k_i^2 \frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + h_i^2 k_i K_i (2 + h_i^2 k_i K_i) \right. \\
 &\quad \times \left. \left( \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} \right) - K_i \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ h_1^2 k_1 K_1 (2 + h_1^2 k_1 K_1) \left( \frac{1}{n_1 s_1'} - \frac{1}{n_0 s_1} \right) \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= K_1 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) + h_2^2 k_2 K_2 (2 + h_2^2 k_2 K_2) \\
&\quad \times \left( \frac{1}{n_2 s_2'} - \frac{1}{n_1 s_2} \right) - K_2 \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \Big] \\
&= \frac{1}{2} (0.004306 + 0.03706 - 9.32 \times 10^{-7} - 0.00906) \\
&= 1.19 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \sum_i \left[ h_i^4 k_i^3 \frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + k_i (1 + h_i^2 k_i K_i) (2 + h_i^2 k_i K_i) \right. \\
&\quad \times \left. \left( \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} \right) - \frac{1 + h_i^2 k_i K_i}{h_i^2} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ k_1 (1 + h_1^2 k_1 K_1) (2 + h_1^2 k_1 K_1) \left( \frac{1}{n_1 s_1'} - \frac{1}{n_0 s_1} \right) \right. \\
&\quad - \frac{1 + h_1^2 k_1 K_1}{h_1^2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) + k_2 (1 + h_2^2 k_2 K_2) \\
&\quad \times (2 + h_2^2 k_2 K_2) \left( \frac{1}{n_2 s_2'} - \frac{1}{n_1 s_1} \right) - \frac{1 + h_2^2 k_2 K_2}{h_2^2} \\
&\quad \times \left. \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} (-0.064422 + 0.55446 - 5.98 \times 10^{-6} \\
&\quad - 0.581026) \\
&= 0.0455
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{2} \sum_i \left[ h_i^2 k_i \frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + h_i^2 K_i (1 + h_i^2 k_i K_i) \right. \\
&\quad \left. \times \left( \frac{1}{n_i s'_i} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[ h_1^2 K_1 (1 + h_1^2 k_1 K_1) \left( \frac{1}{n_1 s'_1} - \frac{1}{n_0 s_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + h_2^2 k_2 (1 + h_2^2 k_2 K_2) \left( \frac{1}{n_2 s'_2} - \frac{1}{n_1 s_2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2} (1.4453 \times 10^{-3} - 1.41339 \times 10^{-4}) \\
&= 6.52 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}
\end{aligned}$$

(2)  $\because B \neq 0$  即球差存在

$F \neq 0$  即彗差存在

$\therefore$  不满足正弦条件。

又  $\because C - D = 6.28 \times 10^{-3} - 1.19 \times 10^{-2} \neq 0$

$\therefore$  不满足珀兹伐条件，即象面不平直。

(3) 欲求各种象差应先把坐标变成赛德耳坐标，算出结果再换算回普通坐标系。

由 3—17 题的结果可知，相应于该物点的横向放大率

$$M = \frac{f}{Z} = \frac{60}{30} = 2$$

物点到轴的垂足距离入瞳中心为

$$D_0 = 30 + 1.36 = 31.36 \text{ cm}$$

取  $l_0 = 1$  则  $l_1 = M l_0 = 2$

选取坐标系，使  $y$  轴与物点到轴的垂线重合。则

$$x_0 = x_1 = 0$$

$$c = \frac{n_0 l_0 \lambda_0}{D_0} = \frac{1}{31.36} \text{ cm}^{-1}$$

已知物点到光轴的垂直距离

$$Y_0 = 15 \text{ cm}$$

所以

$$y_0 = c \frac{Y_0}{l_0} = \frac{15}{31.36} = 0.478$$

出瞳半径为  $\rho$ ，换为普通坐标

$$a = \frac{\rho}{\lambda_1}$$

$$\text{即 } \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \left| \frac{1}{\lambda_1} \right| \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = \frac{n_1 l_1}{CD_1} a$$

式中  $a$  是以普通坐标表示的出瞳半径

$$\text{已知 } a = 3 \text{ cm}, D_1 = -s_1' = 61.3 \text{ cm}$$

$$\text{故 } \rho = 3.07 \text{ cm}$$

(a) 球差

亮斑半径

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\Delta x^{(0)})^2 + (\Delta y^{(0)})^2} = B\rho^3 \\ &= 4.72 \times 10^{-5} \times (3.07)^3 = 1.36 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

化为普通坐标

$$R = \frac{l_1 r}{c} = 2 \times 1.36 \times 10^{-3} \times 31.36 = 8.57 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

(b) 彗差

最大圆中心距离高斯象点为

$$\Delta y = 2F\rho^2 y_0 = 2 \times 6.52 \times 10^{-4} \times (3.07)^2 \times 0.478 \\ \approx 5.87 \times 10^{-3}$$

最大圆半径

$$r = F\rho^2 y_0 = 2.94 \times 10^{-3}$$

化为普通坐标

$$\Delta Y = 0.368 \text{ cm}$$

$$R = 0.184 \text{ cm}$$

(c) 象散焦差

高斯象点坐标

$$Y_1^* = MY_0 = 2 \times 15 = 30 \text{ cm}$$

$$\Delta Z = Z_s - Z_1 = 2Cn_2 y_1^{*2} \\ = 2 \times 6.28 \times 10^{-3} \times (30)^2 = 11.3 \text{ cm}$$

(d) 场曲

$$\text{子午场曲 } \frac{1}{R_1} = 2n_2(2C + D) \\ = 2 \times (2 \times 6.28 \times 10^{-3} + 0.0119) = 0.0489 \text{ cm}^{-1}$$

$$\text{弧矢场曲 } \frac{1}{R_s} = 2n_2 D = 2 \times 0.0119 = 0.0238 \text{ cm}^{-1}$$

平均场曲

$$\frac{1}{R} = 2n_2(C + D) \\ = 2 \times (6.28 \times 10^{-3} + 0.0119) = 3.61 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

(e) 畸变

$$\Delta y^{(s)} = -Ey_0^3 = 0.0455 \times (0.478)^3 = 4.97 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \frac{l_1}{c} \Delta y^{(s)} = 2 \times 31.36 \times 4.97 \times 10^{-8} \\ &= 0.312 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6-24 \quad \text{解} \quad \mathcal{P} &= (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= (1.5-1) \left( \frac{1}{0.2} - \frac{1}{(-0.2)} \right) = 5 \text{ m}^{-1} \\ \beta &= (n-1) \left( \frac{b_1}{r_1^3} - \frac{b_2}{r_2^3} \right) \\ &= 0.5 \times \frac{b_1}{(0.2)^3} = 62.5 b_1 \text{ m}^{-3} \\ \delta &= (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0 \\ \mathcal{K} &= -\frac{1}{s_1} - \frac{\mathcal{P}}{2} = -\frac{1}{s_1} - 2.5 \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

设入瞳与第一折射面重合, 则

$$\begin{aligned}t_1 &= 0 \\ h_1 &= \frac{s_1}{t_1 - s_1} = -1 \\ k_1 &= \frac{t_1(t_1 - s_1)}{s_1} = 0\end{aligned}$$

欲得不晕成象, 必须满足

$$B=0, \quad F=0$$

則有  $U=0, V=0$

即

$$\frac{1}{2} \beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2} \mathcal{P}^3 - \frac{n}{2(n+2)} \mathcal{K}^2 \mathcal{P} + \frac{\mathcal{P}}{2n(n+2)} \left[ \frac{(n+2)\sigma}{2(n-1)} + 2(n+1)\mathcal{K} \right]^2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2n} \mathcal{P} \left[ \frac{(n+1)\sigma}{2(n-1)} + (2n+1)\mathcal{K} \right] = 0 \quad (2)$$

把算得的  $\mathcal{P}$ 、 $\beta$ 、 $\sigma$ 、 $\mathcal{K}$  值代入 (2) 式，得

$$\frac{5}{3} \times 4 \times \left( -\frac{1}{s_1} - 2.5 \right) = 0$$

解得  $s_1 = -0.4\text{m}$

$$\text{則 } \mathcal{K} = -\frac{1}{s_1} - 2.5 = 0$$

代入 (1) 式，得

$$-\frac{62.5}{2} b_1 + \frac{(1.5)^2}{8 \times (0.5)^2} \times (5)^3 = 0$$

解得  $b_1 = -4.5$

$$C = \frac{\mathcal{P}}{2} = 2.5\text{m}^{-1}$$

$$D = \frac{n+1}{2n} \mathcal{P} = 4.17\text{m}^{-1}$$

$$E = 0$$

(2) 入瞳随意放置 即  $t_1$  取任意值

已知  $s_1 = -\frac{2}{3}m$

则  $h_1 = \frac{s_1}{t_1 + s_1} = \frac{-\frac{2}{3}}{t_1 + \frac{2}{3}}$

$$k_1 = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{s_1} = \frac{t_1\left(t_1 + \frac{2}{3}\right)}{-\frac{2}{3}}$$

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{s_1} - \frac{\mathcal{P}}{2} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} - 2.5 = -1$$

$$\beta = 62.5 \times (-4.5) = -281$$

$$\sigma = 0$$

根据上述数据可算得

$$U = 10.96, V = -6.67$$

所以

$$C = h^4 k^2 U + 2kh^2 KV + \frac{1}{2} \mathcal{P}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 t_1^2}{\left(t_1 + \frac{2}{3}\right)^2} \times 10.96 + \frac{\frac{4}{3} t_1}{\left(t_1 + \frac{2}{3}\right)} \times 6.67 + 2.5$$

当  $t_1$  取任意值时, 上式不一定等于零, 所以不能消除象散。

欲消除象散必须使  $C = 0$ ，即取满足下式的  $t_1$  值

$$16.3t_1^2 + 9.26t_1 + 1.11 = 0$$

解得

$$t_{11} \approx 0.172\text{m}$$

$$t_{12} \approx -0.396\text{m}$$

只有当入瞳置于透镜前方  $0.396\text{m}$  处，或透镜后方  $0.172\text{m}$  处，才能使对所给的透镜当物放在  $-\frac{2}{3}$  米处时消除象散。

6-26 解 (1) 一般共轴系统的位置色差

$$\delta s'_a = -\frac{1}{n_a} \left( \frac{s'_a}{h_a} \right)^2 \sum_{i=1}^n h_i K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right)$$

放大率色差

$$\frac{\delta M}{M} = \left( \frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_n}{n_n} \right) + \frac{\delta s'_a}{s'_a - t'_0} - \sum_{i=1}^n h_i^2 k_i K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right)$$

对于单个薄透镜

$$a = 2, \quad n_0 = n_2 = 1, \quad n_1 = n, \quad \delta n_0 = \delta n_2 = 0$$

$$h_1 = h_2 = \frac{s_1}{t_1 - s_1}$$

若入瞳与透镜重合，则

$$t_1 = 0, \quad h_1 = h_2 = -1$$

$$K_1 = n_0 \left( -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s_1} \right) = n_1 \left( -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s'_1} \right)$$

$$K_2 = n_1 \left( -\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s_2} \right) = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s'_2}$$



$$k_1 = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{s_1}$$

$$k_2 = k_1 + \frac{d}{nh_1h_2}$$

$$\therefore t_1 = 0, d \approx 0$$

$$\therefore k_1 = k_2 = 0$$

由薄透镜成像公式

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f} = \mathcal{P} = (n-1) \left( -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

得

$$\begin{aligned} \delta s'_2 &= -(s'_2)^2 \left\{ h_1 K_1 \left( \frac{\delta n_1}{n_1} - \frac{\delta n_0}{n_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + h_2 K_2 \left( \frac{\delta n_2}{n_2} - \frac{\delta n_1}{n_1} \right) \right\} \\ &= -(s'_2)^2 \left\{ - \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{\delta n}{n} \right. \\ &\quad \left. + (-1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s'_2} \right) \left( -\frac{\delta n}{n} \right) \right\} \\ &= -(s'_2)^2 \frac{\delta n}{n} \left[ -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s'_2} \right] \\ &= -(s'_2)^2 \frac{\delta n}{n} \left[ - \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} \right) \right] \\ &= (s'_2)^2 \frac{\delta n}{n} \left( \frac{\mathcal{P}}{n-1} + \mathcal{P} \right) \\ &= (s'_2)^2 \frac{\delta n}{(\delta-1)} \mathcal{P} \end{aligned}$$

要消除位置色差 (即  $\delta s'_2 = 0$ )，除非  $s'_2$ 、 $\mathcal{P}$ 、 $\delta n$  三者之一为零，而此三者均不能为零，所以单个透镜不能消除位置色差。

又

$$\begin{aligned}\frac{\delta M}{M} &= \left( \frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_2}{n_2} \right) + \frac{\delta s'_2}{s'_2 - t'_2} \\ &\quad - \left( h_1^2 k_1 K_1 \frac{\delta n_1}{n_1} - h_2^2 k_2 K_2 \frac{\delta n_1}{n_1} \right) \\ &= \frac{\delta s'_2}{s'_2}\end{aligned}$$

已证得  $\delta s'_2 \neq 0$

所以  $\delta M \neq 0$

即单个薄透镜不可能消除放大率色差。

## (2) 两个薄透镜组合

设二透镜间距离为  $l$ ，并设  $t_1 = 0$ 。

则  $\alpha = 4$ ,  $n_0 = n_2 = n_4 = 1$ ,  $n_1 = n$ ,  $n_3 = n'$

$$d_1 = d_3 = 0, \quad d_2 = l$$

由  $s_{i+1} = s'_i - d_i$

得  $s_2 = s'_1$ ,  $s_4 = s'_3$ ,  $s_3 = s'_2 - l$

$$\text{由 } \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\text{得 } \frac{1}{s'_2} = \frac{s_1 + f_1}{s_1 f_1}$$

$$\because t_1 = 0$$

$$\therefore h_1 = h_2 = -1$$

$$h_3 = h_4 = h_1 \frac{s_3}{s'_2} = - \left( 1 - \frac{l}{s'_2} \right) \\ = \frac{-(s_1 f_1 - s_1 l - f_1 l)}{s_1 f_1} = \frac{-B}{s_1 f_1}$$

式中  $B = s_1 f_1 - s_1 l - f_1 l$

又

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_3 = k_4 = \frac{l}{h_2 h_3} = \frac{l}{h_1^2 \left( 1 - \frac{l}{s'_2} \right)} = \frac{l s_1 f_1}{B}$$

由

$$K_1 = \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{s_1} \right) = n_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{s'_1} \right)$$

$$K_2 = n_1 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s_2} \right) = \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s'_2} \right)$$

得

$$K_1 - K_2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \mathcal{P}_1 = \frac{n}{n - 1} \mathcal{P}_1$$

由

$$K_3 = \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{s_3} \right) = n_3 \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{s'_3} \right)$$

$$K_4 = n_3 \left( \frac{1}{r_4} - \frac{1}{s_4} \right) = \left( \frac{1}{r_4} - \frac{1}{s'_4} \right)$$

得

$$K_3 - K_4 = \frac{n_3}{n_3 - 1} \mathcal{P}_2 = \frac{n'}{n' - 1} \mathcal{P}_2$$

$$\begin{aligned}
\delta s'_4 &= -\frac{1}{n_4} \left( \frac{s'_4}{h_4} \right)^2 \sum_{i=1}^4 h_i^2 K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right) \\
\therefore \quad &\sum_{i=1}^4 h_i^2 K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right) \\
&= h_1^2 K_1 \frac{\delta n_1}{n_1} - h_2^2 K_2 \frac{\delta n_1}{n_1} + h_3^2 K_3 \frac{\delta n_3}{n_3} \\
&\quad - h_4^2 K_4 \frac{\delta n_3}{n_3} \\
&= \frac{\delta n}{n} (K_1 - K_2) + \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2} \frac{\delta n'}{n'} (K_3 - K_4) \\
&= \frac{\delta n}{n-1} \mathcal{P}_1 + \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2} \frac{\delta n'}{(n'-1)} \mathcal{P}_2 \\
&= \frac{\delta n}{n-1} \frac{1}{f_1} + \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2} \frac{1}{f_2} \frac{\delta n'}{(n'-1)}
\end{aligned}$$

欲消除位置色差必须有

$$\delta s'_4 = 0$$

$\therefore$  必须有

$$\frac{\delta n}{n-1} \frac{1}{f_1} + \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2} \frac{1}{f_2} \frac{\delta n'}{(n'-1)} = 0 \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{\delta M}{M} &= \frac{\delta s'_4}{s'_4 - t'_4} = \sum_{i=1}^4 h_i^2 k_i K_i \left( \frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \right) \\
&= \frac{\delta s'_4}{s'_4 - t'_4} = \left( h_3^2 k_3 K_3 \frac{\delta n_3}{n_3} - h_4^2 k_4 K_4 \frac{\delta n_3}{n_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta s'_4}{s'_4 - t'_4} - h_2^2 k_2 (K_3 - K_4) \frac{\delta n_3}{n_3} \\
&= \frac{\delta s'_4}{s'_4 - t'_4} - \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2} \frac{l s_1 f_1}{B} \frac{\delta n_3}{(n_3 - 1)} \mathcal{P}_2 \\
&= \frac{\delta s'_4}{s'_4 - t'_4} - \frac{Bl}{s_1 f_1 f_2} \frac{\delta n'}{(n' - 1)}
\end{aligned}$$

∴ 消除放大率色差的条件为

$$\frac{\delta s'_4}{s'_4 - t'_4} - \frac{Bl}{s_1 f_1 f_2} \frac{\delta n'}{(n' - 1)} = 0 \quad (2)$$

讨论

(一) 接触透镜组 ( $l=0$ )

$$\text{则 } \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2} = \left( \frac{s_1 f_1 - s_1 l - f_1 l}{s_1 f_1} \right) = 1$$

消除位置色差的条件 (1) 式变为

$$\frac{\delta n}{n-1} \frac{1}{f_1} + \frac{\delta n'}{n'-1} \frac{1}{f_2} = 0 \quad (3)$$

当满足了消位置色差, 即

$$\delta s'_4 = 0$$

消放大率色差的条件 (2) 式化为

$$\frac{Bl}{s_1 f_1 f_2} \frac{\delta n'}{(n' - 1)} = 0 \quad (4)$$

$$\because l=0$$

∴ (4) 式恒成立。

这表明位置色差和放大率色差可以同时消除。

(二) 非接触、但材料相同的透镜组合  
材料相同，即

$$\frac{\delta n}{n-1} = \frac{\delta n'}{n'-1}$$

则 (1) 式化为

$$\left( \frac{1}{f_1} + \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2 f_2} \right) \frac{\delta n}{n-1} = 0$$

$$\because \frac{\delta n}{n-1} \neq 0$$

$$\therefore \frac{1}{f_1} + \frac{B^2}{s_1^2 f_1^2 f_2} = 0$$

即

$$\frac{1}{f_1} + \left( \frac{s_1 f_1 - s_1 l - f_1 l}{s_1 f_1} \right)^2 \frac{1}{f_2} = 0$$

解得

$$l = \frac{s_1 (f_1 \pm \sqrt{-f_1 f_2})}{s_1 + f_1}$$

当两透镜间距  $l$  满足上式时，可消除位置色差。当满足了消除位置色差条件，则 (2) 式化为

$$\begin{aligned} \frac{\delta M}{M} &= -\frac{Bl}{s_1 f_1 f_2} - \frac{\delta n}{(n-1)} \\ &= -\frac{(s_1 f_1 - s_1 l - f_1 l)l}{s_1 f_1 f_2} - \frac{\delta n}{n-1} \end{aligned}$$

$$\because s_1 \neq 0, f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \therefore s_1 f_1 - s_1 l - f_1 l &= s_1 f_1 - (s_1 + f_1) \frac{s_1 (f_1 \pm \sqrt{-f_1 f_2})}{s_1 + f_1} \\ &= s_1 f_1 - s_1 (f_1 \pm \sqrt{-f_1 f_2}) \\ &= s_1 (\pm \sqrt{-f_1 f_2}) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{又} \because l \neq 0, \quad \frac{\delta n}{n-1} \neq 0$$

$$\therefore \frac{\delta M}{M} \neq 0$$

可见位置色差和放大率色差不能同时消除。

$$\begin{aligned} \text{6-33 证 (1)} \quad \bar{\Phi} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} R_0^0 \Phi \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$\text{式中 } R_0^0 = 1$$

$$\text{根据 } \int_0^1 R_n^m R_{n'}^m \rho d\rho = \frac{\delta_{nn'}}{2(n+1)}$$

$$\text{其中 } \delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{当 } n = n' \\ 0 & \text{当 } n \neq n' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi &= A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n0} R_n^0(\rho) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} R_n^m(\rho) \cos m\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \bar{\Phi} &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} A_{00} \rho d\rho d\theta \right. \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \int_0^{2\pi} A_{n0} R_0^n R_n^0 \rho d\rho d\theta + \\
&\quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^{2\pi} A_{nm} R_0^n R_n^m \cos m\theta \rho d\rho d\theta \right) \\
&= \frac{1}{\pi} (\pi A_{00} + 0 + 0) = A_{00}
\end{aligned}$$

(2) 同理

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi^2 \rho d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi^2 R_0^0 \rho d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} A_{n0} R_0^n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} R_n^m \cos m\theta \right)^2 R_0^0 \rho d\rho d\theta
\end{aligned}$$

考虑到函数的正交性

$$\int_0^1 R_n^l R_{n'}^{l'} \rho d\rho = \frac{\delta_{nn'}}{2(n+1)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos m'\theta d\theta = \pi \delta_{mm'}$$

得



$$\begin{aligned}\overline{\Phi^2} &= A_{00}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n0}^2}{(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{A_{nm}^2}{2(n+1)} \\ &= A_{00}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{nm}^2}{(n+1)}\end{aligned}$$

证毕

6—38 解 由 6—20 题的结果知

$$B = 4.72 \times 10^{-5} \text{cm}^{-3}$$

$$C = 6.28 \times 10^{-3} \text{cm}^{-1}$$

$$D = 1.19 \times 10^{-2} \text{cm}^{-1}$$

$$E = -4.55 \times 10^{-2}$$

$$F = 6.52 \times 10^{-4} \text{cm}^{-2}$$

已知物象平面间的横向放大率

$$M = 2$$

高斯象点的坐标

$$Y^* = MY = 2 \times 15 = 30 \text{cm}$$

出瞳半径

$$a = 3 \text{cm}$$

象平面到出瞳平面的距离

$$R = D_1 = 61.3 \text{cm}$$

$$\lambda_1 = \frac{CD_1}{n_1 l_1} = \frac{61.3}{31.36 \times 1 \times 2} \approx 0.978$$

$$A'_{040} = -\frac{1}{4} B \left( \frac{a}{\lambda_1} \right)^4 = -\frac{1}{4} \times 4.72 \times 10^{-5} \times \left( \frac{3}{0.978} \right)^4$$

$$= -1.05 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$A'_{021} = -F \frac{\lambda_1 Y_1^*}{R} \left( \frac{a}{\lambda_1} \right)^3$$

$$= \frac{-6.52 \times 10^{-4} \times 0.978 \times 30}{61.3} \times \left( \frac{3}{0.978} \right)^3$$

$$= -9.01 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$A'_{022} = -C \left( \frac{\lambda_1 Y_1^*}{R} \right)^2 \left( \frac{a}{\lambda_1} \right)^2$$

$$= -6.28 \times 10^{-3} \times \left( \frac{3 \times 30}{61.3} \right)^2 = -1.35 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$A'_{120} = -\frac{1}{2} D \left( \frac{\lambda_1 Y_1^*}{R} \right) \left( \frac{a}{\lambda_1} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} \times 0.0119 \times \left( \frac{3 \times 30}{61.3} \right)^2 = 1.29 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$A'_{111} = -E \left( \frac{Y_1^* \lambda_1}{R} \right)^3 \frac{a}{\lambda_1} = 0.0455 \times \left( \frac{0.978 \times 30}{61.3} \right)^3$$

$$\times \frac{3}{0.978} = 1.53 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

衍射焦点位移:

球差

$$z'_F = 2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 A'_{040} = -0.877 \text{ cm}$$

彗差

$$y'_F = \frac{2}{3} \frac{R}{a} A'_{021} = -0.123 \text{ cm}$$

象散

$$z'_F = \left( \frac{R}{a} \right)^2 A'_{022} = -5.64 \text{ cm}$$

场曲

$$z'_F = 2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 A'_{120} = 10.77 \text{ cm}$$

畸变

$$y'_F = \frac{R}{a} A'_{111} = 0.313 \text{ cm}$$

容限条件:

球差

$$|A'_{040}| \leq 0.949\lambda = 4.75 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

彗差

$$|A'_{031}| \leq 0.6\lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

象散

$$|A'_{022}| \leq \frac{\sqrt{3}}{5} \lambda = 1.73 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

比较本题条件下的计算结果, 这三种象差都超过容限了。

6--41 证 由

$$U_2(u, v, \phi) = \frac{1}{2!} \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{1}{2} i u \rho^2} [R_n^m(\rho)]^2 J_0(v\rho) \rho d\rho \right. \\ \left. + i^{2m} \cos 2m\phi \int_0^1 e^{-\frac{1}{2} i u \rho^2} [R_n^m(\rho)]^2 J_{2m}(v\rho) \rho d\rho \right\}$$

对初级球差  $n=4, m=0$  故有

$$U_2(u, v) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2} i u \rho^2} [R_4^0(\rho)]^2 J_0(v\rho) \rho d\rho \quad (1)$$

积分中的指数项可展开成级数，即

$$e^{-\frac{1}{2} i u \rho^2} = e^{-\frac{1}{4} i u} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{4}\right) \times \left(\frac{u}{4}\right) R_{2s}^0(\rho) \quad (2)$$

(2) 代入 (1)，并改变求和与积分的顺序，得

$$U_2(u, v) = e^{-\frac{1}{4} i u} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{4}\right) \times \int R_{2s}^0(\rho) [R_4^0(\rho)]^2 J_0(v\rho) \rho d\rho \quad (3)$$

为求得  $U_2$ ，必须先解决 (3) 式的积分问题，先看被积函数中  $R_{2s}^0(\rho) [R_4^0(\rho)]^2$  等于什么？

根据  $m=0$  时，泽尼克圆多项式的性质

$$R_{2s}^0(\rho) [R_4^0(\rho)]^2 = P_s(2\rho^2 - 1) [P_2(2\rho^2 - 1)]^2 \quad (4)$$

式中  $P$  是勒让德多项式。

已知

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

所以

$$[P_2(t)]^2 = \frac{1}{4}(9t^4 - 6t^2 + 1)$$

故

$$P_s(t) [P_2(t)]^2 = \frac{9}{4} t^4 P_s(t) - \frac{3}{2} t^2 P_s(t)$$

$$+ \frac{1}{4} P_s(t) \quad (5)$$

由勒让德多项式的递推公式

$$tP_s(t) = \frac{1}{2s+1} [(s+1)P_{s+1}(t) + sP_{s-1}(t)]$$

可得

$$\begin{aligned} t^4 P_s(t) &= \frac{1}{(2s+1)} [(s+1)t^3 P_{s+1}(t) + st^3 P_{s-1}(t)] \\ &= \frac{1}{(2s+1)} \left\{ (s+1) \frac{1}{2s+3} [(s+2)t^2 P_{s+2}(t) \right. \\ &\quad \left. + (s+1)t^2 P_s(t)] + s \frac{1}{(2s-2)} [st^2 P_s(t) \right. \\ &\quad \left. + (s-1)t^2 P_{s-2}(t)] \right\} \\ &= \frac{(s+2)(s+1)}{(2s+3)(2s+1)} t^2 P_{s+2}(t) + \frac{4s^3 + 6s^2 - 1}{(2s+3)(2s+1)(2s-1)} \\ &\quad \times t^2 P_s(t) + \frac{s(s-1)}{(2s+1)(2s-1)} t^2 P_{s-2}(t) \quad (6) \end{aligned}$$

仍由递推公式, 可得

$$\begin{aligned} t^2 P_{s+2}(t) &= \frac{1}{(2s+5)} [(s+3)tP_{s+3}(t) + (s+2)tP_{s+1}(t)] \\ &= \frac{1}{(2s+5)} \left\{ (s+3) \frac{1}{(2s+7)} [(s+4)P_{s+4}(t) \right. \\ &\quad \left. + (s+3)P_{s+2}(t)] + (s+2) \frac{1}{(2s+3)} \right. \\ &\quad \left. \times [(s+2)P_{s+2}(t) + (s+1)P_s(t)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(s+4)(s+3)}{(2s+7)(2s+5)} P_{s+4}(t) \\
&\quad + \frac{(s+3)^2(2s+3) + (s+2)^2(2s+7)}{(2s+7)(2s+5)(2s+3)} P_{s+2}(t) \\
&\quad + \frac{(s+2)(s+1)}{(2s+5)(2s+3)} P_s(t) \quad (7)
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
t^2 P_s(t) &= \frac{(s+2)(s+1)}{(2s+3)(2s+1)} P_{s+2}(t) \\
&\quad + \frac{(s+1)^2(2s-1) + s^2(2s+3)}{(2s+3)(2s+1)(2s-1)} P_s(t) \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^2 P_{s-2}(t) &= \frac{s(s-1)}{(2s-1)(2s-3)} P_s(t) \\
&\quad + \frac{(s-1)^2(2s-5) + (s-2)^2(2s-1)}{(2s-1)(2s-3)(2s-5)} P_{s-2}(t) \\
&\quad + \frac{(s-2)(s-3)}{(2s-3)(2s-5)} P_{s-4}(t) \quad (9)
\end{aligned}$$

把 (7)、(8)、(9) 式代入 (6) 式, 然后再代入 (5) 式, 得

$$\begin{aligned}
P_s(t)[P_2(t)]^2 &= a_s P_{s+4}(t) + b_s P_{s+2}(t) + c_s P_s(t) \\
&\quad + d_s P_{s-2}(t) + e_s P_{s-4}(t) \quad (10)
\end{aligned}$$

式中 
$$a_s = \frac{9}{4} \frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{(2s+1)(2s+3)(2s+5)(2s+7)}$$

$$b_s = 3 \frac{(s+1)(s+2)(8s^5 + 60s^4 + 146s^3 + 69s^2 - s - 15)}{(2s-1)(2s+1)^2(2s+3)^2(2s+5)(2s+7)}$$

$$c_s = \frac{3}{2} \frac{144s^8 + 768s^7 + 536s^6 - 136s^5 - 2515s^4}{(2s-3)(2s-1)^2(2s+1)^2} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{+1646s^8 + 1477s^2 + 146s - 143}{(2s+3)^2(2s+5)}$$

$$d_s = \frac{3}{2} \frac{s(s-1)(16s^5 - 40s^4 - 40s^3 + 46s^2 + 45s - 63)}{(2s-5)(2s-3)(2s-1)^2(2s+1)^2(2s+3)}$$

$$e_s = \frac{9}{4} \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{(2s-5)(2s-3)(2s-1)(2s+1)}$$

把 (10) 式代入 (4) 式, 同时注意到

$$R_{2s}^0(\rho) = P_s(2\rho^2 - 1)$$

得

$$R_{2s}^0(\rho)[R_4^0(\rho)]^2 = a_s R_{2s+8}^0(\rho) + b_s R_{2s+4}^0(\rho) + c_s R_{2s}^0(\rho) + d_s R_{2s-4}^0(\rho) + e_s R_{2s-8}^0(\rho)$$

由此得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 R_{2s}^0(\rho)[R_4^0(\rho)]^2 J_0(v\rho) \rho d\rho \\ &= \int_0^1 a_s R_{2s+8}^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho + \int_0^1 b_s R_{2s+4}^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho \\ &+ \int_0^1 c_s R_{2s}^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho + \int_0^1 d_s R_{2s-4}^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho \\ &+ \int_0^1 e_s R_{2s-8}^0(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho \end{aligned} \quad (11)$$

利用

$$\int_0^1 R_n^0 J_0(v\rho) \rho d\rho = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{J_{n+1}(v)}{v}$$

(11) 式化为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 R_{2s}^0(\rho) [R_4^0(\rho)]^2 J_0(v\rho) \rho d\rho \\ &= (-1)^{s+4} a_s \frac{J_{2s+9}(v)}{v} + (-1)^{s+2} b_s \frac{J_{2s+5}(v)}{v} \\ &+ (-1)^s c_s \frac{J_{2s+1}(v)}{v} + (-1)^{s-2} d_s \frac{J_{2s-3}(v)}{v} \\ &+ (-1)^{s-4} e_s \frac{J_{2s-7}(v)}{v} \end{aligned} \quad (12)$$

把 (12) 式代入 (3) 式中, 得

$$\begin{aligned} U_2(u, v) &= e^{-i\frac{u}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \frac{1}{v} \sum_{s=0}^{\infty} (i)^s (2s+1) J_{s+\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \frac{u}{4} \right) [a_s J_{2s+9}(v) + b_s J_{2s+5}(v) \\ &+ c_s J_{2s+1}(v) + d_s J_{2s-3}(v) + e_s J_{2s-7}(v)] \end{aligned}$$

**8-46 解** 若把坐标原点取在孔的中心, 则光瞳函数  $G(\xi, \eta)$  为

$$\text{方孔 } G_1(\xi, \eta) = C \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{l}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{l}\right)$$

$$\text{圆孔 } G_2(\xi, \eta) = C \operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{l/2}\right)$$

式中,  $C$  是常数,  $\operatorname{rect}$  表示矩形函数,  $\operatorname{circ}$  表示圆域函数, 其定义分别为



$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{circ } \sqrt{x^2 + y^2} = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

### 一、相干传递函数

$$\mathcal{H}(f, g) = G(\lambda R f, \lambda R g)$$

式中  $R$  是高斯参考球半径，也就是从孔中心到观察点的距离。因此

(1) 方孔的相干传递函数为

$$\mathcal{H}(f, g) = C \text{rect} \left( \frac{\lambda R f}{l} \right) \text{rect} \left( \frac{\lambda R g}{l} \right)$$

(2) 圆孔的相干传递函数为

$$\mathcal{H}(f, g) = C \text{circ} \left( \frac{2\lambda R}{l} \sqrt{f^2 + g^2} \right)$$

方孔的截止频率

$$|f_1| = |g_1| = \frac{l}{2\lambda R}$$

圆孔的截止频率

$$\sqrt{f^2 + g^2} = \frac{l}{2\lambda R}$$

空间频率高于截止频率的成份不通过孔。

### 二、光学传递函数

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f, g) &= \frac{1}{(\lambda R)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi + \xi', \eta + \eta') G^*(\xi', \eta') \\
&\quad \times d\xi' d\eta' \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} G[\lambda R(f + f'), \lambda R(g + g')] G^*[\lambda Rf', \\
&\quad \lambda Rg'] df' dg' \quad (1)
\end{aligned}$$

当光瞳函数  $G$  在孔面上是常数的情况下，求光学传递函数有两种方法：一种是根据  $G$  和  $G^*$  同时不为零的面积来确定，另一种是直接求 (1) 式的积分。

### (1) 方孔的光学传递函数

方法一 当  $|f| < \frac{l}{\lambda R}$  和  $|g| < \frac{l}{\lambda R}$  时，由图 91，对一组确定的  $(f, g)$  值， $G$  和  $G^*$  同不为零的面积为

$$\left(\frac{l}{\lambda R} - |f|\right) \left(\frac{l}{\lambda R} - |g|\right)$$

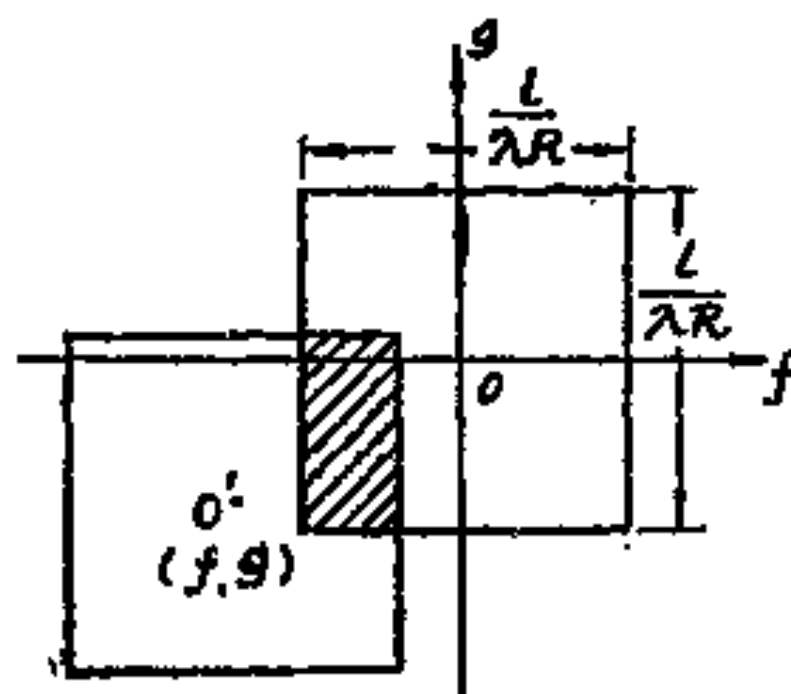


图 91

故光学传递函数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f, g) &= C^2 \left( \frac{l}{\lambda R} - |f| \right) \left( \frac{l}{\lambda R} - |g| \right) \\ &= C^2 \left( \frac{l}{\lambda R} \right)^2 \Lambda \left( \frac{\lambda R f}{l} \right) \Lambda \left( \frac{\lambda R g}{l} \right)\end{aligned}$$

式中 $\Lambda$ 表示三角状函数, 其定义为

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

不难看出, 当  $|f| \geq \frac{l}{\lambda R}$  或  $|g| \geq \frac{l}{\lambda R}$  时, 不存在  $G$  和  $G^*$  同时不为零的区域, 因此截止频率

$$|f_c| = |g_c| = \frac{l}{\lambda R}$$

方法二 (1)式的积分

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} G(\xi + \xi', \eta + \eta') G^*(\xi', \eta') d\xi' d\eta'$$

是光瞳函数  $G$  的自相关函数, 以

$$G(\xi, \eta) \otimes G(\xi, \eta)$$

表之。由傅里叶变换的自相关定理可知

$$\mathcal{F}[G(\xi, \eta) \otimes G(\xi, \eta)] = \{\mathcal{F}[G(\xi, \eta)]\}^2$$

式中 $\mathcal{F}$ 表傅里叶变换。

对方孔情况

$$\because G(\xi, \eta) = C \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{l}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{l}\right)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathcal{F}[G(\xi, \eta)] &= C \iint_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{\xi}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{l}\right) \\
&\quad \times e^{-i2\pi(f\xi + g\eta)} d\xi d\eta \\
&= C \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{-i2\pi f\xi} d\xi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{-i2\pi g\eta} d\eta \\
&= Cl^2 [\text{sinc}(\pi lf)] [\text{sinc}(\pi lg)]
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[G(\xi, \eta) \times G(\xi, \eta)] &= \{\mathcal{F}[G(\xi, \eta)]\}^2 \\
&= C^2 l^4 [\text{sinc}(\pi lf)]^2 [\text{sinc}(\pi lg)]^2
\end{aligned}$$

容易证明

$$\begin{aligned}
G(\xi, \eta) \times G(\xi, \eta) &= \mathcal{F}^{-1} \{C^2 l^4 [\text{sinc}(\pi lf)]^2 [\text{sinc}(\pi lg)]^2\} \\
&= C^2 l^2 \Lambda\left(\frac{\lambda R f}{l}\right) \Lambda\left(\frac{\lambda R g}{l}\right) \quad (2)
\end{aligned}$$

式中 $\mathcal{F}^{-1}$ 表傅里叶反变换。

把(2)式代入(1)式, 得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f, g) &= \frac{1}{(\lambda R)^2} [G(\xi, \eta) \times G(\xi, \eta)] \\
&= C^2 \left(\frac{l}{\lambda R}\right)^2 \Lambda\left(\frac{\lambda R f}{l}\right) \Lambda\left(\frac{\lambda R g}{l}\right)
\end{aligned}$$

与方法一结果一致。

(2) 圆孔的光学传递函数

当 $\sqrt{f^2 + g^2} < \frac{l}{\lambda R}$ 时, 对一组确定的 $(f, g)$ 值,  $G$

和 $G^*$ 同不为零的区域为图92中划斜线部分。

这部分面积可如下求之

$$S = 2 (\text{扇形 } OAB \text{ 面积} - \text{三角形 } OAB \text{ 面积})$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2} r^2 (2\theta) - \frac{1}{2} (2r \sin \theta) r \cos \theta \right]$$

$$= 2r^2 [\theta - \sin \theta \cos \theta]$$

式中  $r$  为圆的半径。

$$r = \frac{l}{2\lambda R}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{OO'}}{r} = \frac{\lambda R \sqrt{f^2 + g^2}}{l}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - (\lambda R)^2 (f^2 + g^2)}$$

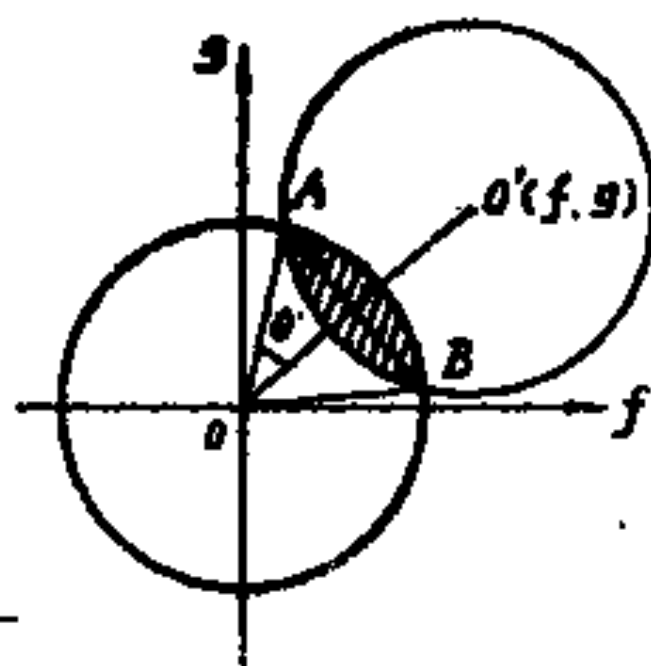


图 92

故光学传递函数为

$$\mathcal{L}(f, g) = S$$

$$= \frac{l}{2\lambda R} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{\lambda R \sqrt{f^2 + g^2}}{l} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda R}{l^2} \sqrt{(f^2 + g^2) [l^2 - (\lambda R)^2 (f^2 + g^2)]} \right\}$$

不难看出, 当  $\sqrt{f^2 + g^2} \geq \frac{l}{\lambda R}$  时, 两圆心间的距离大于圆的直径, 不存在两圆交迭部分, 因此截止频率为

$$\sqrt{f_z^2 + g_z^2} = \frac{l}{\lambda R}$$

综上所述, 可见无论在相干照明或非相干照明情况下,

方孔的截止频率都不同于其内切圆孔的截止频率，且对这两种孔，非相干照明的截止频率都比相干照明的截止频率提高一倍。

## 第七章 部分相干光的干涉和衍射

$$\begin{aligned}
 7-3 \quad \text{证} \quad & \because |\Gamma_{12}(\tau)|^2 = |\langle V_1(t+\tau)V_2^*(t) \rangle|^2 \\
 &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_T(P_1, t+\tau) V_T^*(P_2, t) dt \right|^2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \left| \int_{-T}^T V_T(P_1, t+\tau) V_T^*(P_2, t) dt \right|^2
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_T(P_1, t) V_T^*(P_1, t) dt$$

因为是平稳场，平均值不受时间原点选取的影响，所以

$$\Gamma_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_T(P_1, t+\tau) V_T^*(P_1, t+\tau) dt$$

$$\Gamma_{22}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_T(P_2, t) V_T^*(P_2, t) dt$$

由薛华兹不等式得

$$|\Gamma_{12}(\tau)|^2 \leq \Gamma_{11}(0) \Gamma_{22}(0)$$

即

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \frac{|\Gamma_{12}(\tau)|}{\sqrt{\Gamma_{11}(0) \Gamma_{22}(0)}} \leq 1$$

证毕

7-10 解 设入射光为二振幅相同的单色光, 则其解析信号为

$$V(t) = c(e^{-i2\pi\nu_1 t} + e^{-i2\pi\nu_2 t})$$

迈克耳孙干涉仪的两相干光束的自相干函数为  $\Gamma_{11}(\tau)$ 。

由定义

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}(\tau) &= \langle V(t+\tau)V^*(t) \rangle \\ &= c^2 \langle (e^{-i2\pi\nu_1(t+\tau)} + e^{-i2\pi\nu_2(t+\tau)}) \\ &\quad \times (e^{i2\pi\nu_1 t} + e^{i2\pi\nu_2 t}) \rangle \\ &= c^2 \langle e^{-i2\pi\nu_1 \tau} + e^{-i2\pi\nu_2 \tau} + e^{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \cdot e^{-i2\pi\nu_1 \tau} \\ &\quad + e^{i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \cdot e^{-i2\pi\nu_2 \tau} \rangle \\ &= c^2 \{ e^{-i2\pi\nu_1 \tau} + e^{-i2\pi\nu_2 \tau} + \langle e^{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \rangle e^{-i2\pi\nu_1 \tau} \\ &\quad + \langle e^{i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \rangle e^{-i2\pi\nu_2 \tau} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \langle e^{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)} e^{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \Big|_{-T}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{\pi(\nu_1 - \nu_2)} \frac{e^{i2\pi(\nu_1 - \nu_2)T} - e^{-i2\pi(\nu_1 - \nu_2)T}}{2i} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin[2\pi T(\nu_1 - \nu_2)]}{2\pi T(\nu_1 - \nu_2)} \approx 0\end{aligned}$$

同理

$$\langle e^{i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \rangle \approx 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \Gamma_{11}(\tau) &= c^2 (e^{-i2\pi\nu_1 \tau} + e^{-i2\pi\nu_2 \tau}) \\ &= c^2 e^{-i\pi(\nu_1 + \nu_2)\tau} [e^{-i\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau} + e^{i\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau}]\end{aligned}$$

$$= c^2 e^{-i\pi(\nu_1 + \nu_2)\tau} 2\cos[\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau]$$

$$\Gamma_{11}(0) = 2c^2$$

由此得

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\Gamma_{11}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)} = e^{i\pi(\nu_1 + \nu_2)\tau} \cos[\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau]$$

设分束器分开的二光束强度相同，则可见度为

$$\mathcal{U}(\tau) = |\gamma_{11}(\tau)| = |\cos[\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau]|$$

当  $\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau_m = (2m+1)\frac{\pi}{2}$  时  $\mathcal{U} = 0$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

所以，相邻两次可见度为零的条件为

$$\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau_{k+1} = (2k+3)\frac{\pi}{2}$$

$$\delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}$$

如果对应相邻两次可见度为零，反射镜移动距离为  $\Delta d$ ，则

$$\delta\tau = \frac{2\Delta d}{c}$$

$$\therefore \nu_1 - \nu_2 = \frac{1}{\delta\tau} = \frac{c}{2\Delta d}$$



$$\therefore \nu_2 = \nu_1 - \frac{1}{\delta\tau} = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{2\Delta d}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{c}{\nu_2} = \frac{c}{\frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{2\Delta d}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{2\Delta d}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{5890} - \frac{1}{2 \times 0.289 \times 10^7}} \approx 5896 \text{ \AA} \end{aligned}$$

7-14 解 (1) 由复相干度定义

$$\gamma(\tau) = \gamma_{11}(\tau) = \frac{\Gamma_{11}(\tau)}{I_1} \quad (1)$$

而

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(\tau) &= 4 \int_0^\infty G_{11}(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu \\ &= 4 \int_0^\infty G(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu \end{aligned} \quad (2)$$

故

$$I_1 = \Gamma_{11}(0) = 4 \int_0^\infty G(\nu) d\nu \quad (3)$$

把 (2), (3) 代入 (1), 得

$$\gamma(\tau) = \frac{\int_0^\infty G(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu}{\int_0^\infty G(\nu) d\nu} \quad (4)$$

(2) 把  $G(\nu) = I_1 \delta(\nu - \nu_1) + I_2 \delta(\nu - \nu_2)$  代入 (4), 得

$$\begin{aligned}
\gamma(\tau) &= \frac{\int_0^{\infty} [I_1 \delta(\nu - \nu_1) + I_2 \delta(\nu - \nu_2)] e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu}{\int_0^{\infty} [I_1 \delta(\nu - \nu_1) + I_2 \delta(\nu - \nu_2)] d\nu} \\
&= \frac{I_1 e^{-i2\pi\nu_1\tau} + I_2 e^{-i2\pi\nu_2\tau}}{I_1 + I_2} \\
&= \frac{e^{-i2\pi\nu_2\tau} [1 + r e^{-i2\pi\Delta\nu\tau}]}{1 + r} \quad (5)
\end{aligned}$$

式中,  $r = \frac{I_1}{I_2}$ ,  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$

由 (5) 式得

$$|\gamma(\tau)| = \frac{1}{1+r} [1 + r^2 + 2r \cos(2\pi\Delta\nu\tau)]^{1/2}$$

可见,  $|\gamma(\tau)|$  不仅决定于  $\Delta\nu$ , 而且还决定于  $r$ 。对  $r=1$ , 即两个振荡的振幅相等的特殊情况, 则

$$\begin{aligned}
|\gamma(\tau)| &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + \cos(2\pi\Delta\nu\tau)]^{1/2} \\
&= |\cos(\pi\Delta\nu\tau)|
\end{aligned}$$

因此,  $|\gamma(\tau)|$  随  $\tau$  周期性地变化, 当  $\tau = \frac{1}{2\Delta\nu}$  时, 复相干度为零。如果要求一定的相干度, 则对  $\tau$  将有相应的限制。比如, 要求  $|\gamma(\tau)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  则  $\tau$  应满足  $\tau \leq \frac{1}{4\Delta\nu}$ 。这时相干长度将不再是  $\frac{c}{\Delta\nu}$ , 而是  $c\tau = \frac{c}{4\Delta\nu}$ 。当  $\Delta\nu \approx 10^8 \text{ Hz}$

时, 相干长度减少到约75厘米。

7-17 证 (1) 由

$$|r_{11}(\tau)| = \frac{|\Gamma_{11}(\tau)|}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{11}(0)}} = \frac{|\Gamma_{11}(\tau)|}{\Gamma_{11}(0)}$$

用  $\Delta t$  代替上式中的  $\tau$ , 得

$$|r_{11}(\Delta t)| = \frac{|\Gamma_{11}(\Delta t)|}{\Gamma_{11}(0)}$$

据定义

$$\Gamma_{11}(\Delta t) = \langle V_1(t+\Delta t)V_1^*(t) \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi\nu\Delta t} e^{i(\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t))} dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \int_0^T e^{i\Delta\varphi} dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \sum_{j=0}^n \int_{j\theta}^{(j+1)\theta} e^{i\Delta\varphi} dt \quad (1)$$

式中  $\Delta\varphi \equiv \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$

当  $\Delta t > \theta$  时,  $\Delta\varphi$  是两不同波列的随机常数之差, 所以仍是一个随机常数, 用  $c_k$  表示, 则

$$\Gamma_{11}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \theta \sum_{k=1}^n e^{ic_k}$$

$$\because T \rightarrow \infty$$

$$\therefore \frac{1}{T} \rightarrow 0$$

由所给条件  $T \gg \theta$  得

$$n = \frac{T}{\theta} \gg 1$$

由此得  $\sum_{k=1}^n e^{ic_k} \approx 0$

所以  $\Gamma_{11}(\Delta t) = 0$

即  $\gamma_{11}(\Delta t) = 0$

(2) 当  $0 < \Delta t < \theta$  时 (1) 式仍成立, 但  $\Delta\varphi$  的变化规律不同。

由图 93 可见, 在  $j\theta < t < [(j+1)\theta - \Delta t]$  内,  $V(t)$ 、 $V(t+\Delta t)$  来自同一波列, 具有同一初位相, 即

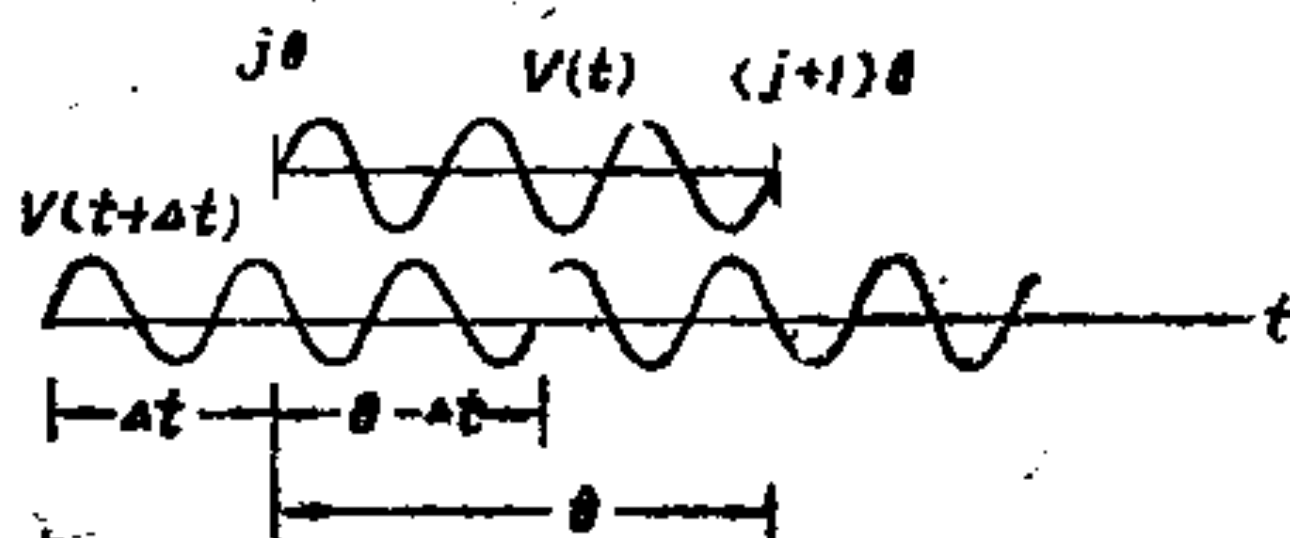


图 93

$$\Delta\varphi = 0$$

在  $(j+1)\theta - \Delta t < t < (j+1)\theta$  内,  $V(t)$ 、 $V(t+\Delta t)$  是二不同波列, 此时  $\Delta\varphi$  是随机常数, 用  $c_k$  表示。所以

$$\Gamma_{11}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \sum_{j=0}^n \int_{j\theta}^{(j+1)\theta} e^{ic_k} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \sum_{j=0}^n \left[ \int_{j\theta}^{(j+1)\theta-\Delta t} e^{i2\pi\nu t} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{(j+1)\theta-\Delta t}^{(j+1)\theta} e^{i2\pi\nu t} dt \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[ (j+1)\theta - \Delta t - j\theta \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \Delta t e^{i2\pi\nu k\theta} \right\}
\end{aligned}$$

由 (1) 已证得上式中后一项为零, 故

$$\Gamma_{11}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} \sum_{j=0}^n (\theta - \Delta t)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-i2\pi\nu\Delta t} n(\theta - \Delta t)$$

$$\because n = \frac{T}{\theta}$$

$$\therefore \Gamma_{11}(\Delta t) = \frac{1}{\theta} (\theta - \Delta t) e^{-i2\pi\nu\Delta t}$$

$$= \left( 1 - \frac{\Delta t}{\theta} \right) e^{-i2\pi\nu\Delta t}$$

证毕

7-23 证 (1) 由定义

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V(P_1, t+\tau) V^*(P_2, t) \rangle$$

$$\because V(P_1, t+\tau) = V^{(r)}(P_1, t+\tau) + iV^{(i)}(P_1, t+\tau)$$

$$V(P_2, t) = V^{(r)}(P_2, t) + iV^{(i)}(P_2, t)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \Gamma_{12}(\tau) &= \langle [V^{(r)}(P_1, t+\tau) + iV^{(i)}(P_1, t+\tau)] \\
&\quad [V^{(r)}(P_2, t) - iV^{(i)}(P_2, t)] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t) + V^{(l)}(P_1, t+\tau) \\
&\quad \times V^{(l)}(P_2, t) \rangle + i \langle V^{(l)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t) \\
&\quad - V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(l)}(P_2, t) \rangle \\
P_{12}^{(r)}(\tau) &= \langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t) \rangle \\
&\quad + \langle V^{(l)}(P_1, t+\tau)V^{(l)}(P_2, t) \rangle
\end{aligned}$$

$$\therefore V^{(l)}\left(t + \frac{1}{4\nu}\right) = V^{(r)}(t)$$

且研究平稳场的时间平均值，与时间原点的选择无关。

$$\begin{aligned}
\therefore \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= \langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t) \rangle + \langle V^{(l)} \\
&\quad \times \left(P_1, t+\tau + \frac{1}{4\nu}\right)V^{(l)}\left(P_2, t + \frac{1}{4\nu}\right) \\
&= 2 \langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t) \rangle
\end{aligned}$$

$$\therefore \langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_1, \nu)v(P_2, \nu')e^{-i2\pi(\nu+\nu')t} e^{-i2\pi\nu\tau} \\
&\quad \times d\nu d\nu' dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_1, \nu)v(P_2, \nu')e^{-i2\pi\nu\tau} \\
&\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(\nu+\nu')t} dt \right] d\nu d\nu' \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_1, \nu)v(P_2, \nu')e^{-i2\pi\nu\tau} \delta(\nu + \nu') d\nu d\nu' \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_1, \nu)e^{-i2\pi\nu\tau} \\
&\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_2, \nu')\delta(\nu + \nu')d\nu' \right] d\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_1, v) v(P_2, -v) e^{-i2\pi v \tau} dv \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} v(P_1, v) v^*(P_2, v) e^{-i2\pi v \tau} dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v(P_1, v) v^*(P_2, v)}{2T} \right] e^{-i2\pi v \tau} dv \quad (1)
\end{aligned}$$

上式的极限值不一定存在，需要修匀。

设修匀后的极限值为  $G_{12}(v)$ ，即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v(P_1, v) v^*(P_2, v)}{2T} = G_{12}(v)$$

则 (1) 式化为

$$\begin{aligned}
\langle V^{(1)}(P_1, t+\tau) V^{(1)*}(P_2, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(v) e^{-i2\pi v \tau} dv \\
\therefore \Gamma_{12}^{(1)}(\tau) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(v) e^{-i2\pi v \tau} dv
\end{aligned}$$

(2) 由定义

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}$$

所以

$$\gamma_{12}^{(1)}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}^{(1)}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}$$

由 (1) 已证得

$$\Gamma_{12}^{(1)}(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(v) e^{-i2\pi v \tau} dv$$

注意到  $\gamma_{12}(\tau)$  的分母是实量，所以得

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(0) &= \Gamma_{11}^{(r)}(0) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{11}(\nu) e^0 d\nu \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\nu) d\nu \end{aligned}$$

同理可得

$$\Gamma_{22}(0) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\nu) d\nu$$

$$\therefore \gamma_{12}^{(r)}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\nu) d\nu} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\nu) d\nu}}$$

证毕

7—28 解 (1) 如图 94, 设光源  $\sigma$  的宽度为  $e$ , 长度为  $h$ , 强度为  $I_0$ ,  $\mathcal{A}$  是开有双缝  $P_1$ 、 $P_2$  的遮光屏,  $\mathcal{B}$  是观察屏。

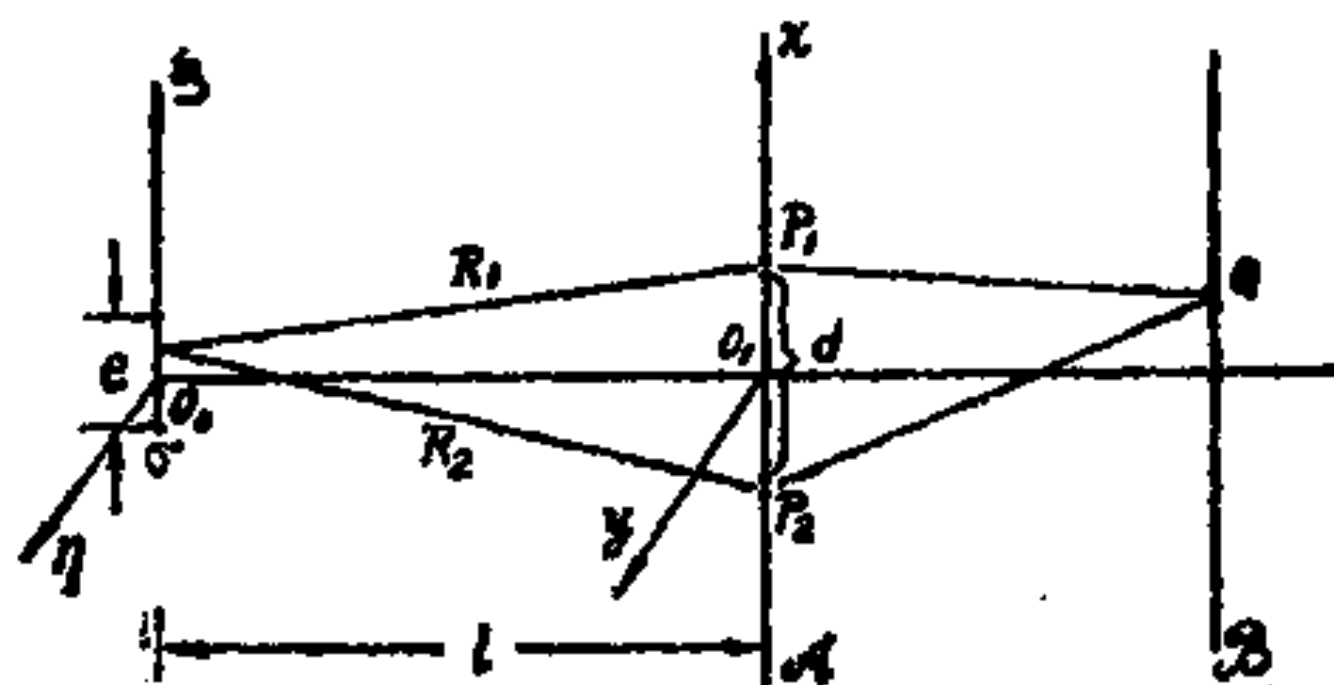


图 94

已知  $l = 1\text{m}$ ,  $d = 2\text{mm}$

根据范西特-泽尼克定理



$$\begin{aligned}
 I(P_1, P_2) &= \int_{\sigma} I(s) \frac{e^{i\bar{k}(R_1 - R_2)}}{R_1 R_2} ds \\
 &= I_0 \int_{\sigma} \frac{e^{i\bar{k}(R_1 - R_2)}}{R_1 R_2} ds
 \end{aligned}$$

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{I(P_1, P_2)}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}}$$

$$I(P_1) = \int_{\sigma} \frac{I_0}{R_1^2} ds$$

$$I(P_2) = \int_{\sigma} \frac{I_0}{R_2^2} ds$$

$$\because e \ll l, h \ll l, d \ll l$$

$$\therefore I(P_1) \approx \frac{I_0}{l^2} \int_{\sigma} ds \approx \frac{I_0}{l^2} he$$

同理

$$I(P_2) \approx \frac{I_0}{l^2} he$$

再在光源面和 $\Sigma$ 面上分别选取坐标系 $o_s \xi \eta$ 和 $o_1 xy$  (如图 94)。

$$R_1 = [(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + l^2]^{1/2}$$

$$\approx l + \frac{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}{2l}$$

$$R_2 \approx l + \frac{(x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2}{2l}$$

$$\therefore y_1 = y_2, \quad x_1 = -x_2$$

$$\begin{aligned} \therefore R_1 - R_2 &= \frac{(x_1 - \xi)^2 - (x_2 - \xi)^2}{2l} \\ &= \frac{1}{2l} [(x_1 - \xi)^2 - (x_1 + \xi)^2] \\ &= -\frac{4x_1\xi}{2l} = -\frac{\xi d}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I(P_1, P_2) &= \frac{I_0}{l^2} h \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} e^{-i\bar{k} \frac{d}{l} \xi} d\xi \\ &= -\frac{I_0 h}{l^2} \frac{l}{i\bar{k}d} e^{-i\bar{k} \frac{d}{l} \xi} \Big|_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \\ &= \frac{I_0 h e}{l^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\bar{k} d e}{2l}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \mu(P_1, P_2) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\bar{k} d e}{2l}\right)$$

$$(2) \quad \therefore \text{可见度 } \mathcal{U} = \frac{2\sqrt{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)}}{I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q)} |\mu(P_1, P_2)|$$

已知  $I(P_1) = I(P_2)$

$\therefore$  当  $Q$  点离  $\mathscr{S}$  上中点  $O$  不太远时,

$$I^{(1)}(Q) \approx I^{(2)}(Q)$$

$$\therefore \mathcal{U} = |\mu(P_1, P_2)| = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\bar{k} d e}{2l}\right) \right|$$

$$= \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi d e}{\lambda l}\right) \right|$$

欲使

$$\left| \frac{\pi de}{\lambda l} \right| \geq 0.9$$

必须有

$$\frac{\pi de}{\lambda l} \leq \frac{\pi}{4}$$

即

$$e \leq 68.75 \mu\text{m}$$

7—34 证 (1) 记积分式

$$\frac{\iint_{\sigma} e^{[-ik(p\xi + q\eta)]} d\xi d\eta}{\iint_{\sigma} d\xi d\eta} \equiv U$$

实际上这就是圆孔夫琅和费衍射积分。  
把孔面上坐标改为极坐标 (如图95)。

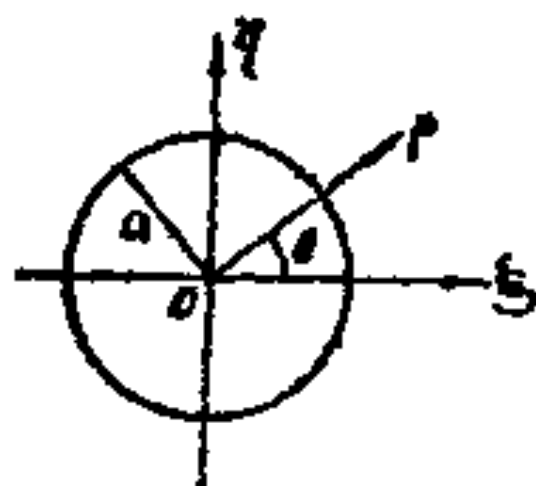


图 95

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad d\xi d\eta = \rho d\rho d\theta$$

设  $r, \varphi$  是衍射图样上以中点为原点时任一点  $P(x, y)$  的极坐标, 则

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

因此

$$p = \frac{x}{D} = \frac{r}{D} \cos \varphi$$

$$q = \frac{y}{D} = \frac{r}{D} \sin \varphi$$

式中  $D$  是孔面到观察面的距离。

以  $\phi$  表示衍射角，则

$$\frac{r}{D} \approx \sin \phi = w$$

所以

$$p = w \cos \varphi, \quad q = w \sin \varphi,$$

$$w = \sqrt{p^2 + q^2}$$

由此得

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho w(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho w \cos(\theta-\varphi)} d\theta \rho d\rho \\ &= \frac{2}{a^2} \int_0^a \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(-k\rho w)\cos(\theta-\varphi)} d\theta \right\} \rho d\rho \end{aligned} \quad (1)$$

由贝塞耳函数

$$J_n(x) = \frac{i^{(-n)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\alpha} e^{in\alpha} d\alpha$$

与 (1) 式中大括弧内式子比较，发现只要令

$$n=0, \quad x=-k\rho w, \quad \alpha=\theta$$

二式就完全一样。所以

$$U = -\frac{2}{a^2} \int_0^a J_0(-k\rho w) \rho d\rho$$

根据贝塞耳函数的性质

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

取  $n=0$ , 得

$$J_0(-k\rho w) = J_0(k\rho w)$$

由贝塞耳函数的递推公式

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x)$$

$$x^{n+1} J_{n+1}(x) = \int x^{n+1} J_n(x) dx$$

取  $n=0$ , 得

$$\int J_0 x dx = x J_1(x)$$

因此

$$\begin{aligned} U &= -\frac{2}{a^2} \int_0^a J_0(k\rho w) \rho d\rho \\ &= -\frac{2}{a^2 k^2 w^2} (kaw) J_1(kaw) \\ &= -\frac{2J_1(u)}{u} \end{aligned}$$

$$\text{式中 } u \equiv kaw = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{p^2 + q^2}$$

(2) 记积分式

$$\frac{\iint_{\Omega} e^{ik[p(x_1-x_2)+q(y_1-y_2)]} dpdq}{\iint_{\Omega} dpdq} \equiv V$$

为了使这里的积分具有和 (1) 中积分  $U$  相似的形式，  
令

$$x_1 - x_2 = w \cos \varphi, \quad y_1 - y_2 = w \sin \varphi$$

$$\therefore p = \frac{\rho}{D} \cos \theta, \quad q = \frac{\rho}{D} \sin \theta,$$

$$dpdq = \frac{1}{D^2} \rho d\rho d\theta$$

$$\therefore w = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

再令  $\frac{a}{D} = \operatorname{tg} \theta_c \approx \sin \theta_c$ ，并限定  $0 \leq \rho \leq a$  则必有

$$\sqrt{p^2 + q^2} \leq \sin \theta_c$$

即题中给定的积分域。因此

$$\iint_{\Omega} dpdq = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{D^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi a^2}{D^2}$$

而

$$V = \frac{\pi a^2}{D^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ikw \frac{\rho}{D} \cos(\theta - \varphi)} \frac{1}{D^2} \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikw \frac{\rho}{D} \cos(\theta - \varphi)} d\theta \right\} \rho d\rho$$

$$= \frac{2}{a^2} \int_0^a J_0\left(\frac{k w \rho}{D}\right) \rho d\rho$$

$$= \frac{2J_1\left(\frac{kwa}{D}\right)}{\frac{kwa}{D}} = \frac{2J_1(u)}{u}$$

$$\text{式中 } u = kw \frac{a}{D} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \sin \theta_c$$

证毕

7-40 证  $P_1$  点的复扰动可表示为

$$V_1(t) = K_1 \int_0^\infty dv \int_{-\infty}^\infty A(v, \theta_0) e^{i[\phi(v) - 2\pi v t]} d\theta$$

$P_2$  点复扰动为

$$V_2(t) = K_2 \int_0^\infty dv' \int_{-\infty}^\infty A(v', \theta'_0) e^{i[\phi(v') - 2\pi v' t]} d\theta'_0$$

式中,  $A(v, \theta_0)$  是光源上  $S$  处对应于单位角间隔的窄带在频率  $v$  附近的单位频宽中的辐射振幅,  $K_1$ 、 $K_2$  是振幅传输系数, 当光源不十分大, 且两缝间距  $d$  很小时,  $K_1$  和  $K_2$  可视为相等的复常数, 以  $K$  表之。

由复相干度定义

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \because \Gamma_{12}(\tau) &= \langle V_1(t+\tau)V_2^*(t) \rangle \\ &= |K|^2 \left\langle \left\{ \int_0^\infty dv \int_{-\infty}^\infty A(v, \theta_0) e^{i[\phi(v) - 2\pi v(t+\tau)]} d\theta_0 \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \int_0^\infty dv' \int_{-\infty}^\infty A(v', \theta'_0) e^{-i[\phi(v') - 2\pi v' t]} d\theta'_0 \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

又因光源是扩展的初级光源, 光源上各不同部分发的光彼此不相干, 同样, 不同频率成分的光也互不相干, 因而上

式中只有当积分变量  $\theta'_0 = \theta_0$ ,  $\nu' = \nu$  时, 乘积的平均值才不为零。

$$\begin{aligned}\therefore \Gamma_{12}(\tau) &= |K|^2 \left\langle \int_0^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\nu, \theta) e^{-i2\pi\nu\tau} d\theta_0 \right\rangle \\ &= |K|^2 \int_0^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\nu, \theta) e^{-i2\pi\nu\tau} d\theta_0\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}(0) &= \langle V_1(t) V_1^*(t) \rangle \\ &= |K|^2 \int_0^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\nu, \theta) d\theta_0 = |K|^2 I_0\end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}(0) = \langle V_2(t) V_2^*(t) \rangle = |K|^2 I_0$$

式中  $I_0$  是整个光源发出的各种频率光的总强度。

把以上求得的  $\Gamma_{12}(\tau)$ ,  $\Gamma_{11}(0)$ ,  $\Gamma_{22}(0)$  代入 (1) 式, 得

$$\gamma_{12}(\tau) = \int_0^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2(\nu, \theta_0)}{I_0} e^{-i2\pi\nu\tau} d\theta_0 \quad (2)$$

由 7—25 题

$$\tau = \frac{(\overline{SP_2} + \overline{P_2Q}) - (\overline{SP_1} + \overline{P_1Q})}{c} \approx \frac{d(\theta - \theta_0)}{c}$$

由 7—6 及 7—35 题中对  $P(\nu)$  及  $i(\theta)$  的定义可知

$$\frac{A^2(\nu, \theta_0)}{I_0} = P(\nu) i(\theta_0)$$

代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}\gamma_{12}(\theta) &= \int_0^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu) i(\theta_0) e^{-i2\pi\nu \left[ \frac{d(\theta - \theta_0)}{c} \right]} d\theta_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta_0) \left\{ \int_0^{+\infty} P(\nu) e^{-i2\pi\nu \left[ \frac{d(\theta - \theta_0)}{c} \right]} d\nu \right\} d\theta_0\end{aligned}$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta_0) \gamma \left[ \frac{d(\theta - \theta_0)}{c} \right] d\theta_0$$

式中

$$\gamma \left[ \frac{d(\theta - \theta_0)}{c} \right] = \int_0^\infty P(v) e^{-12\pi v \left[ \frac{d(\theta - \theta_0)}{c} \right]} dv$$

证毕

**7—45 解** 一、分析：欲求象面上的复相干因子，先得考察出射光瞳上任意两点间的复相干度。

(1) 如果出射光瞳的相干照明面积比出瞳面积小得多，则可以把出瞳当作初级光源，用范西特-泽尼克定理来求象面上的复相干因子。用  $d_{\text{相干}}$  表示出瞳上相干圆直径， $a'$  表示出瞳半径， $\rho'$  表示天体象半径， $r'_A$  表示象面上爱里斑的半径。则此时要求： $d_{\text{相干}} \ll 2a'$ ，即  $\rho' \gg 0.13r'_A$ 。

(2) 如果出瞳上相干圆比出瞳大，即  $d_{\text{相干}} \geq 2a'$  或  $\rho' \leq 0.13r'_A$ ，则出瞳和象面都是相干照明，复相干因子等于 1。

(3) 介于上述二者之间的情况，必须用互强度传播式计算。

## 二、计算

### (1) 出瞳半径 ( $a'$ )

如图96，物镜边缘是孔径光阑，则物镜边缘经目镜所成的象就是出瞳。由成象公式

$$\frac{1}{s'_{\text{出}}} + \frac{1}{s_{\text{入}}} = \frac{1}{f'_{\text{目}}}$$

$$s'_{\text{出}} = \frac{s_{\text{入}} |f_{\text{目}}|}{s_{\text{入}} - |f_{\text{目}}|} \quad (1)$$

根据望远镜的构造，由图96可见

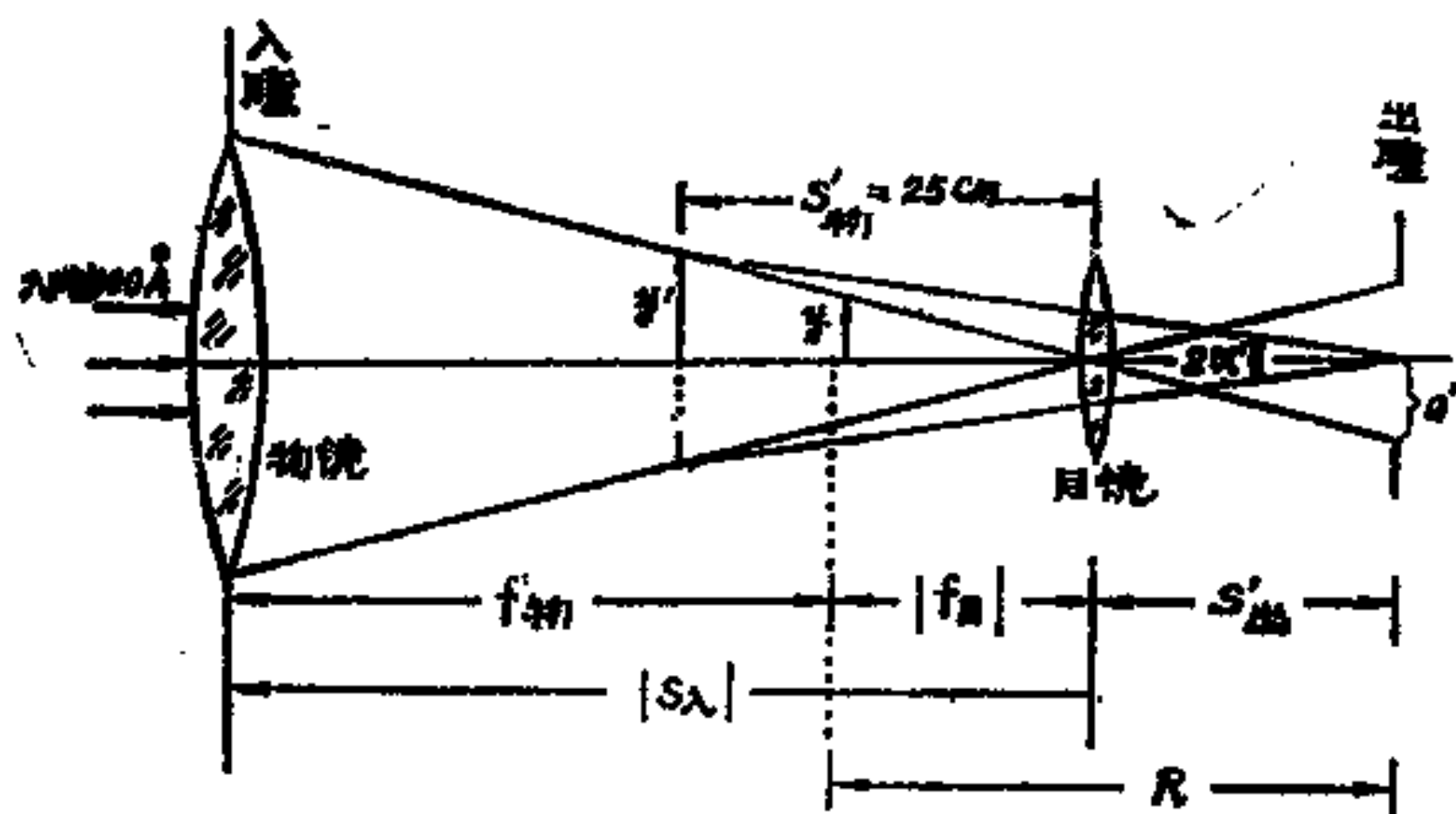


图 96

$$|s_{入}| = f_{物} + |f_{目}| = 17 + |f_{目}|$$

$$\therefore \frac{|f_{目}|}{s'_{物}} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{M}$$

式中， $y$  是天体经物镜成的象的半径， $y'$  是天体最后成的象的半径， $s'_{物}$  是最后成象位置到目镜的距离，一般为 25 厘米，即明视距离， $M$  是放大率，本题中  $M = 10$ 。

$$\therefore |f_{目}| = \frac{25}{10} = 2.5\text{cm} = 25\text{mm}$$

$$|s_{入}| = 17 + 0.025 \approx 17\text{m}$$

目镜在物镜后边，所以  $s_{入} = -17\text{m}$

代入 (1) 式，得

$$s'_{\text{出}} = \frac{-17 \times 0.025}{-17 - 0.025} \approx 0.025\text{m} = 25\text{mm}$$

即出瞳在目镜后边25毫米处。

已设出瞳半径为 $a'$ ，故

$$\frac{a'}{D/2} = \frac{s'_{\text{出}}}{f_{\text{物}} + |f_{\text{目}}|} \approx \frac{s'_{\text{出}}}{f_{\text{物}}}$$

式中  $D = 5\text{m}$  是物镜直径。

$$a' = \frac{s'_{\text{出}} D}{2 f_{\text{物}}} = \frac{25 \times 5000}{2 \times 17000} = 3.68\text{mm}$$

(2) 天体最后成象的直径 $d''$

以  $\theta = 2''$  表示天体角直径，则天体经物镜成象之直径

$$d' = f_{\text{物}} \theta = \frac{17000 \times 2'' \pi}{3600 \times 180} = 0.165\text{mm}$$

$\therefore$  经目镜后又放大了10倍

$$\therefore d'' = 1.65\text{mm}$$

(3) 最后象对出瞳中心所张的角 $2\alpha'$

由图可见

$$2\alpha' = d' \frac{d''}{|s'_{\text{出}}| + |s'_{\text{物}}|} = \frac{1.65}{25 + 250} \approx 0.006 \text{ 弧度}$$

$$\alpha' = 0.003 \text{ 弧度} = 0.17^\circ$$

出瞳上相干圆直径

$$d_{\text{相干}} = \frac{0.16 \lambda}{n' \sin \alpha'} = \frac{0.16 \times 5500 \times 10^{-7}}{\sin(0.17^\circ)} \approx 0.029\text{mm}$$

出瞳直径

$$2a' \approx 7.36\text{mm} \gg 0.029\text{mm}$$

根据“一”中的分析，出瞳可看成一个初级光源。

(4) 根据范西特—泽尼克定理，在傍轴近似条件下计算象面上复相干因子

$$\mu_{12} = \frac{2J_1(\nu)}{\nu} e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a'd}{R} = \frac{2\pi a'd}{\lambda (|s'_{\text{物}}| + (s'_{\text{出}}))} \\ &= \frac{2\pi \times 3.68 \times d}{5500 \times 10^{-7} \times (250 + 25)} = 152.9d \end{aligned}$$

$d$  是象面上要计算其复相干因子的两点的间距，以毫米为单位。

$\varphi = 0$  或  $\pi$ ，由  $J_1(\nu) > 0$  或  $J_1(\nu) < 0$  而定。

7-47 解 如图 97， $S_1$ 、 $S_2$  为垂直图面的两无限细透光缝。由准单色部分相干光照明，其复相干因子设为

$$\mu_{12} \approx |\mu_{12}| e^{i\phi_{12}}$$

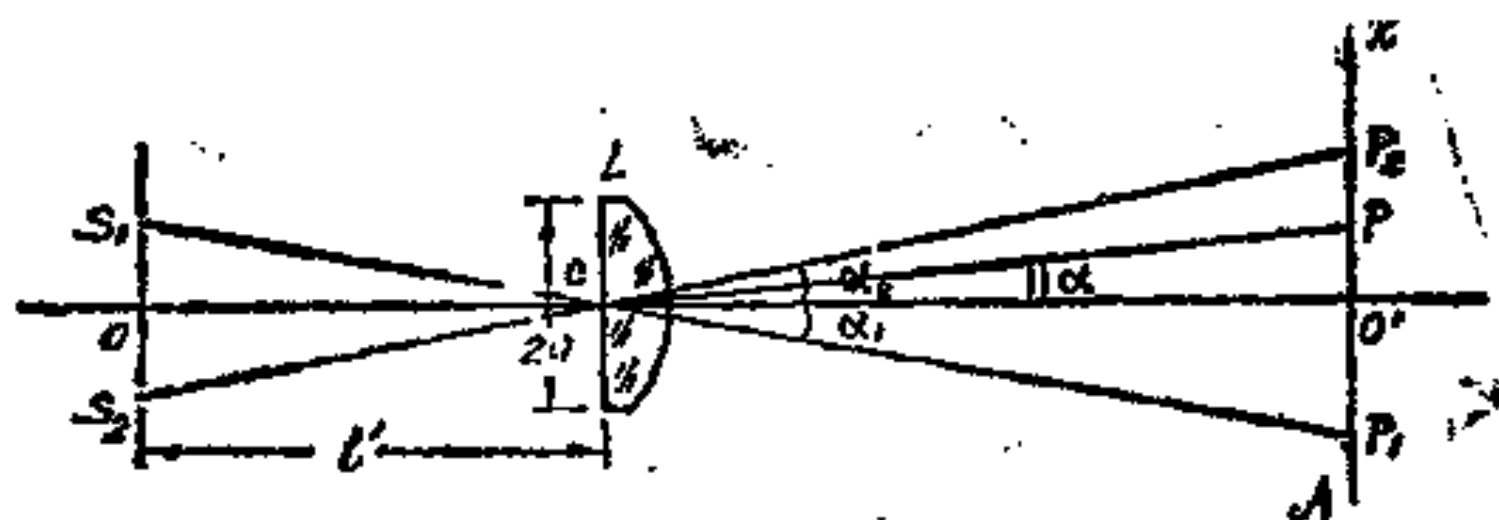


图 97

$L$ 是母线与图面垂直的柱透镜，其宽度为 $2a$ ，焦距为 $f$ 。  
 $\mathscr{A}$ 是放在透镜焦面上的观察屏。 $P_1$ 、 $P_2$ 分别为 $S_1$ 、 $S_2$ 经透镜衍射在 $\mathscr{A}$ 上所成衍射象的中心。

设  $\overline{OC} = l'$

屏上  $P$  点的光强可由部分相干光的一般干涉定律得到，  
 即

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \cos(\beta_{12} - \delta) |\mu_{12}|$$

当透镜宽度  $2a$  比  $l'$  小得多时， $I_1(P)$ ， $I_2(P)$  可近似由单缝夫琅和费衍射公式给出（视透镜为单缝），则

$$I_1(P) = [\text{sinc}(\overline{k} p_1 a)]^2 I_0$$

$$I_2(P) = [\text{sinc}(\overline{k} p_2 a)]^2 I_0$$

$$\begin{aligned} \because p &= l - l_0 = \sin\alpha - \sin\alpha_0 \\ &\approx \text{tg}\alpha - \text{tg}\alpha_0 \end{aligned}$$

$$\text{设 } \overline{O'P} = x, \quad \overline{O'P_1} = x_1 \quad (x_1 < 0)$$

$$\overline{O'P_2} = x_2$$

则

$$p_1 = \frac{x}{f} - \frac{x_1}{f} = \frac{x - x_1}{f}$$

$$p_2 = \frac{x - x_2}{f}$$

因为所讨论的是分辨本领问题，故  $s_1$ 、 $s_2$  非常靠近，位相差

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \{ [S_2P] - [S_1R] \} \ll 2\pi$$

可以近似取为零。故

$$I(P) = \left\{ \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x-x_1}{f} a \right) \right]^2 + \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x-x_2}{f} a \right) \right]^2 \right. \\ \left. + 2 \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x-x_1}{f} a \right) \right] \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x-x_2}{f} a \right) \right] \right. \\ \left. \times |\mu_{12}| \cos \beta_{12} \right\} I_0 \quad (1)$$

(1) 用瑞利判据要求  $I_{\text{中}} = 0.811 I_{\text{max}}$ , 则  $s_1, s_2$  刚可被分开。当  $x = x_1$  或  $x = x_2$  时得  $I_{\text{max}}$ , 所以

$$I_{\text{max}} = \left\{ 1 + \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_1-x_2}{f} a \right) \right]^2 \right. \\ \left. + 2 \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_1-x_2}{f} a \right) \right] \right. \\ \left. \times |\mu_{12}| \cos \beta_{12} \right\} I_0 \quad (2)$$

$\because x=0$  是  $P_1, P_2$  之中点, 此时有

$$p_1 = -\frac{x_1}{f}, \quad p_2 = -\frac{x_2}{f}$$

又  $x_1 = -x_2$

$$\therefore I_{\text{中}} = \left\{ \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_1}{f} a \right) \right]^2 + \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_2}{f} a \right) \right]^2 \right. \\ \left. + 2 \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_1}{f} a \right) \right] \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_2}{f} a \right) \right] \right. \\ \left. \times |\mu_{12}| \cos \beta_{12} \right\} I_0$$

$$= 2 \left[ \operatorname{sinc} \left( \overline{k} \frac{x_2}{f} a \right) \right]^2 (1 + |\mu_{12}| \cos \beta_{12}) I_0 \quad (3)$$

由  $I_{\text{中}} = 0.811 I_{\text{max}}$ ,

$$\text{令 } X = \overline{k} \frac{x_2}{f} a$$

通过 (2)、(3) 式可以整理得

$$\begin{aligned} & [\operatorname{sinc}(2X)]^2 + 2|\mu_{12}| \cos \beta_{12} [\operatorname{sinc}(2X)] \\ & - 2 \frac{1 + |\mu_{12}| \cos \beta_{12}}{0.811} [\operatorname{sinc} X]^2 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

若已知  $|\mu_{12}|$  和  $\beta_{12}$ , 代入 (4) 式, 解此超越方程, 求得  $X$  后, 再由已知的  $\overline{\lambda}$ 、 $f$ 、 $a$  可解出  $x_2$ 。由  $\Delta = \overline{S_1 S_2} = \frac{2x_2}{f} l'$  即可求得可分辨的最小距离。

(2) 用史派劳判据

当  $\left| \frac{d^2 I}{dx^2} \right|_{\text{中}} = 0$  时, 可解得可分辨的最小距离。

对 (1) 式求导

$$\begin{aligned} \frac{dI(p)}{dx} = 2I_0 \frac{\overline{k} a}{f} & \left\{ \operatorname{sinc} X_1 \frac{X_1 \cos X_1 - \sin X_1}{X_1^2} \right. \\ & + \sin X_2 \frac{X_2 \cos X_2 - \sin X_2}{X_2^2} \\ & + \left[ \sin X_2 \frac{X_1 \cos X_1 - \sin X_1}{X_1^2} \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{sinc} X_1 \frac{X_2 \cos X_2 - \sin X_2}{X_2^2} \right] |\mu_{12}| \cos \beta_{12} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 I(p)}{dx^2} = & 2I_0 \left( \frac{\overline{k} a}{f} \right)^2 \left\{ \frac{X_1^2 \cos 2X_1 - 2X_1 \sin 2X_1 + 3\sin^2 X_1}{X_1^4} \right. \\
& + \frac{X_2^2 \cos 2X_2 - 2X_2 \sin 2X_2 + 3\sin^2 X_2}{X_2^4} \\
& + \left[ 2 \frac{X_2 \cos X_2 - \sin X_2}{X_2^3} \frac{X_1 \cos X_1 - \sin X_1}{X_1^3} \right. \\
& + \frac{\sin X_2}{X_2} \frac{(2 - X_1^2) \sin X_1 - 2X_1 \cos X_1}{X_1^3} \\
& + \left. \left. \frac{\sin X_1}{X_1} \frac{(2 - X_2^2) \sin X_2 - 2X_2 \cos X_2}{X_2^3} \right] \right\} \\
& \times |\mu_{12}| \cos \beta_{12} \}
\end{aligned}$$

式中,  $X_1 = \overline{k} \frac{x - x_1}{f} a$ ,  $X_2 = \overline{k} \frac{x - x_2}{f} a$

对于中心处  $x = 0$ , 即

$$X_1 = -\overline{k} \frac{x_1}{f} a, \quad X_2 = -\overline{k} \frac{x_2}{f} a$$

$$\because x_1 = -x_2$$

$$\therefore X_1 = -X_2$$

即

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d^2 I}{dx^2} \right)_{\text{中}} = & 2I_0 \left( \frac{\overline{k} a}{f} \right)^2 \left\{ \frac{2}{X_2^4} (X_2^2 \cos 2X_2 + 3\sin^2 X_2 \right. \\
& - 2X_2 \sin 2X_2) + \frac{2}{X_2^4} (\sin^2 X_2 - X_2^2) \\
& \left. \times |\mu_{12}| \cos \beta_{12} \right\} = 0
\end{aligned}$$



整理得

$$(3 + |\mu_{12}| \cos \beta_{12}) \sin^2 X_2 - 2X_2 \sin 2X_2 + (\cos 2X_2 - |\mu_{12}| \cos \beta_{12}) X_2^2 = 0$$

若已知  $|\mu_{12}|$ 、 $\beta_{12}$ ，代入上式中，解出此超越方程，得  $X_2$ ，即可得  $x_2$ ，从而解出  $\Delta$ 。

## 7-52 解 (1) 完全相干

互强度可写成

$$J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = U_0(x_0, y_0) U_0^*(x'_0, y'_0)$$

$$J_1(x_1, y_1; x'_1, y'_1) = U_1(x_1, y_1) U_1^*(x'_1, y'_1)$$

由互强度传播公式

$$\begin{aligned} \therefore J_1(x_1, y_1; x'_1, y'_1) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) \\ &\quad \times K^*(x'_0, y'_0; x'_1, y'_1) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 \\ \therefore U_1(x_1, y_1) U_1^*(x'_1, y'_1) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) U_0^*(x'_0, y'_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) \\ &\quad \times K^*(x'_0, y'_0; x'_1, y'_1) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 \\ &= \left[ \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) dx_0 dy_0 \right] \\ &\quad \times \left[ \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0^*(x'_0, y'_0) K^*(x'_0, y'_0; x'_1, y'_1) dx'_0 dy'_0 \right]^* \end{aligned}$$

从上式可见，前一中括号中积分变量是  $x_0$ 、 $y_0$ ，积分后只与  $x_1$ 、 $y_1$  有关，而  $U_1(x_1, y_1)$  也只与  $x_1$ 、 $y_1$  有关。后一中括号中积分变量是  $x'_0$ 、 $y'_0$ ，积分后只与  $x'_1$ 、 $y'_1$  有关，而  $U_1^*(x'_1, y'_1)$  也只与  $x'_1$ 、 $y'_1$  有关。所以，可写成

$$U_1(x_1, y_1) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) dx_0 dy_0$$

$$U_1(x'_1, y'_1) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x'_0, y'_0) K(x'_0, y'_0; x'_1, y'_1) \\ \times dx'_0 dy'_0$$

在等晕条件下可写成

$$U_1(x_1, y_1) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \\ \times dx_0 dy_0 \\ = U_0(x_1, y_1) * K(x_1, y_1)$$

对上式作傅里叶变换

左边  $\mathcal{F}\{U_1(x_1, y_1)\}$  记为  $\mathcal{U}_1(f, g)$ 。

右边  $\mathcal{F}\{U_0(x_1, y_1) * K(x_1, y_1)\}$ ，根据卷积定理等于  $\mathcal{F}\{U_0(x_1, y_1)\} \mathcal{F}\{K(x_1, y_1)\}$ ，记为  $\mathcal{U}_0(f, g) \mathcal{K}(f, g)$ 。

$$\therefore \mathcal{U}_1(f, g) = \mathcal{U}_0(f, g) \mathcal{K}(f, g)$$

这是频域的成象公式。频率响应函数

$$\mathcal{K}(f, g) = \frac{\mathcal{U}_1(f, g)}{\mathcal{U}_0(f, g)}$$

## (2) 完全非相干光

$$I_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) = I_0(x_0, y_0) \delta(x'_0 - x_0) \delta(y'_0 - y_0)$$

$$I_1(x_1, y_1) = I_1(x_1, y_1; x_1, y_1)$$

$$= \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0; x'_0, y'_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) \\ \times K^*(x'_0, y'_0; x_1, y_1) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0$$

$$= \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) \delta(x'_0 - x_0) \delta(y'_0 - y_0)$$

$$\begin{aligned}
& \times K(x_0, y_0; x_1, y_1) K^*(x'_0, y'_0; x_1, y_1) dx_0 dy_0 dx'_0 dy'_0 \\
& = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) \left[ \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x'_0 - x_0) \right. \\
& \quad \left. \times \delta(y'_0 - y_0) K^*(x'_0, y'_0; x_1, y_1) dx'_0 dy'_0 \right] dx_0 dy_0 \\
& = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) K(x_0, y_0; x_1, y_1) K^*(x_0, y_0; x_1, y_1) dx_0 dy_0
\end{aligned}$$

在等量条件下

$$\begin{aligned}
I_1(x_1, y_1) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) |K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|^2 \\
&\quad \times dx_0 dy_0 \\
&= I_0(x_1, y_1) * |K(x_1, y_1)|^2
\end{aligned}$$

对上式作傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{I_1(x_1, y_1)\} &= \mathcal{F}\{I_0(x_1, y_1) * |K(x_1, y_1)|^2\} \\
&= \mathcal{F}\{I_0(x_1, y_1)\} \mathcal{F}\{|K(x_1, y_1)|^2\}
\end{aligned}$$

$$\text{记 } \mathcal{S}_0(f, g) \equiv \mathcal{F}\{I_0(x_1, y_1)\}$$

$$\mathcal{S}_1(f, g) \equiv \mathcal{F}\{I_1(x_1, y_1)\}$$

$$\mathcal{L}(f, g) \equiv \mathcal{F}\{|K(x_1, y_1)|^2\}$$

则频域的成象公式为

$$\mathcal{S}_1(f, g) = \mathcal{L}(f, g) \mathcal{S}_0(f, g)$$

由

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f, g) &= \mathcal{F}\{|K(x_1, y_1)|^2\} = \mathcal{F}\{K(x_1, y_1) K^*(x_1, y_1)\} \\
&= \int \int_{-\infty}^{+\infty} K(x_1, y_1) K^*(x_1, y_1) e^{-2\pi i(fx_1 + gy_1)} dx_1 dy_1 \\
&= \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f'', g'') e^{-2\pi i(f''x_1 + g''y_1)} df'' dg'' \right] \\
&\quad \left[ \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f', g') e^{2\pi i(f'x_1 + g'y_1)} df' dg' \right]^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-2\pi i(fx_1 + gy_1)} dx_1 dy_1 \\
& = \iiint \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f'', g'') \mathcal{K}^*(f', g') \\
& \quad \times e^{-2\pi i[(f+f'-f'')x_1 + (g+g'-g'')y_1]} df' dg' df'' dg'' dx_1 dy_1 \\
& = \int \int \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f'', g'') \mathcal{K}^*(f', g') \\
& \quad \times \delta(f+f'-f'') \delta(g+g'-g'') df' dg' df'' dg'' \\
& = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f+g', g+g') \mathcal{K}^*(f', g') df' dg'
\end{aligned}$$

7—57 证 设入射光沿 $z$ 轴传播, 其 $\vec{E}$ 在 $oxy$ 平面中可分解成相互垂直的分量 $E_x$ 、 $E_y$ 。其相干矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}$$

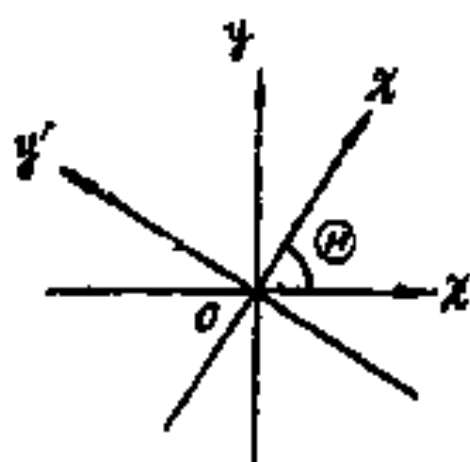


图 98

其中  $J_{xx} = \langle E_x E_x^* \rangle$ ,  $J_{xy} = \langle E_x E_y^* \rangle$   
 $J_{yx} = \langle E_y^* E_x \rangle$ ,  $J_{yy} = \langle E_y E_y^* \rangle$

则

$$T_r J = J_{xx} + J_{yy}$$

$$|J| = J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx}$$

当坐标系在 $xy$ 平面中绕原点转过 $\theta$ 角, 在新坐标系

在  $ox'y'$  中, 入射光的  $\vec{E}$  可分解成  $E'_x$ 、 $E'_y$ 。则相干矩阵  $J'$  可表为

$$J' = \begin{bmatrix} J'_{xx} & J'_{xy} \\ J'_{yx} & J'_{yy} \end{bmatrix}$$

其中  $J'_{xx} = \langle E'_x E'^*_x \rangle$ ,  $J'_{xy} = \langle E'_x E'^*_y \rangle$

$J'_{yx} = \langle E'^*_x E'_y \rangle$ ,  $J'_{yy} = \langle E'_y E'^*_y \rangle$

$\therefore E'_x = E_x \cos \Theta + E_y \sin \Theta$

$E'_y = -E_x \sin \Theta + E_y \cos \Theta$

$$\begin{aligned} \therefore J'_{xx} &= \langle (E_x \cos \Theta + E_y \sin \Theta) (E_x^* \cos \Theta + E_y^* \sin \Theta) \rangle \\ &= \langle E_x E_x^* \rangle \cos^2 \Theta + \langle E_y E_y^* \rangle \sin^2 \Theta \\ &\quad + \langle E_x E_y^* \rangle \sin \Theta \cos \Theta + \langle E_x^* E_y \rangle \sin \Theta \cos \Theta \\ &= J_{xx} \cos^2 \Theta + J_{yy} \sin^2 \Theta + (J_{xy} + J_{yx}) \sin \Theta \cos \Theta \end{aligned} \quad (1)$$

同理

$$J'_{yy} = J_{xx} \sin^2 \Theta + J_{yy} \cos^2 \Theta - (J_{xy} + J_{yx}) \sin \Theta \cos \Theta \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J'_{xy} &= -J_{xx} \sin \Theta \cos \Theta + J_{yy} \sin \Theta \cos \Theta + J_{xy} \cos^2 \Theta - J_{yx} \sin^2 \Theta \\ &= (J_{yy} - J_{xx}) \sin \Theta \cos \Theta + J_{xy} \cos^2 \Theta - J_{yx} \sin^2 \Theta \end{aligned} \quad (3)$$

$$J'_{yx} = (J_{yy} - J_{xx}) \sin \Theta \cos \Theta - J_{xy} \sin^2 \Theta + J_{yx} \cos^2 \Theta \quad (4)$$

由此得

$$T_r J' = J'_{xx} + J'_{yy} = J_{xx} + J_{yy} = T_r J$$

$$\begin{aligned} |J'| &= J'_{xx} J'_{yy} - J'_{xy} J'_{yx} \\ &= J_{xx} J_{yy} (\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta)^2 - J_{xy} J_{yx} (\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta) \\ &= J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx} = |J| \end{aligned}$$

证毕

7-83 解 (1) 自然光的相干矩阵

$$J_0 = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过二向色性晶片后的相干矩阵

$$J_1 = G_1 J_0 G_1^+$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-\frac{\alpha_x}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha_y}{2}} \end{bmatrix} \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{\alpha_x}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha_y}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} e^{-\alpha_x} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_y} \end{bmatrix}$$

$$J_{1xx} = \frac{I_0}{2} e^{-\alpha_x}, \quad J_{1yy} = \frac{I_0}{2} e^{-\alpha_y}, \quad J_{1xy} = J_{1yx} = 0$$

$$P_1 = \sqrt{1 - \frac{4(J_{1xx}J_{1yy} - J_{1xy}J_{1yx})}{(J_{1xx} + J_{1yy})^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4e^{-(\alpha_x + \alpha_y)}}{(e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y})^2}}$$

$$= \left| \frac{e^{-\alpha_x} - e^{-\alpha_y}}{e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}} \right|$$

$$\mu_{1xy} = \frac{J_{1xy}}{\sqrt{J_{1xx}J_{1yy}}} = 0$$

(2) 由 1—14 题知, 透光轴与  $x$  轴夹角为  $30^\circ$  的起偏器的特性矩阵为

$$G_2(30^\circ) = \begin{pmatrix} \cos^2 30^\circ & \frac{1}{2} \sin 60^\circ \\ \frac{1}{2} \sin 60^\circ & \sin^2 30^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = G_2 J_1 G_2^+$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I_0}{32} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\alpha_x} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{I_0}{32} \begin{bmatrix} 9e^{-\alpha_x} + 3e^{-\alpha_y} & 3\sqrt{3}e^{-\alpha_x} + \sqrt{3}e^{-\alpha_y} \\ 3\sqrt{3}e^{-\alpha_x} + \sqrt{3}e^{-\alpha_y} & 3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

光强

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{I_0}{32} (9e^{-\alpha_x} + 3e^{-\alpha_y} + 3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) \\
&= \frac{I_0}{8} (3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y})
\end{aligned}$$

(3) 由1—14题知, 快轴与 $x$ 轴成 $45^\circ$ 角的 $\frac{1}{2}$ 波片的特性矩阵为

$$G_3(45^\circ) = \frac{(1+i)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = G_3 I_2 G_3^+$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I_0}{64} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9e^{-\alpha_x} + 3e^{-\alpha_y} & 3\sqrt{3}e^{-\alpha_x} + \sqrt{3}e^{-\alpha_y} \\ 3\sqrt{3}e^{-\alpha_x} + \sqrt{3}e^{-\alpha_y} & 3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{I_0}{32} \begin{bmatrix} 2(3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) & \sqrt{3}(3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) - i(3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) \\ \sqrt{3}(3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) + i(3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) & 2(3e^{-\alpha_x} + e^{-\alpha_y}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由所得的出射光相干矩阵  $J_s$ ，不难求出与其对应的斯托克斯参量

$$s_0 = J_{sxx} + J_{syy} = 4(3e^{-\alpha x} + e^{-\alpha y})$$

$$s_1 = J_{sxx} - J_{syy} = 0$$

$$s_2 = J_{sxy} + J_{syx} = 2\sqrt{3}(3e^{-\alpha x} + e^{-\alpha y})$$

$$s_3 = i(J_{syx} - J_{sxy}) = 2(3e^{-\alpha x} + e^{-\alpha y})$$

出射光偏振度

$$P_s = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0} = 1$$

所以出射是完全偏振光。

因  $s_1 \neq 0$ ， $s_3 \neq 0$ ，故它既不是圆偏振光，也不是线偏振光，只能是椭圆偏振光。

$$\text{由 } \sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \approx \frac{1}{2}$$

$$\text{得 } 2\chi \approx 30^\circ, \quad \chi \approx 15^\circ$$

因此偏振椭圆短轴和长轴之比

$$\frac{b}{a} = \tan \chi = 0.268$$

$$\text{再由 } \tan 2\Psi = \frac{s_2}{s_1} \rightarrow \infty$$

$$\text{得 } 2\Psi \approx 90^\circ, \quad \Psi \approx 45^\circ$$

即偏振椭圆的长轴与  $x$  轴之夹角为  $45^\circ$ 。

## 第八章 电磁势 电磁极化 金属光学

8-4 解 以  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A$  分别表示氧、氮和空气的克分子



折射度，以 $N_1$ 、 $N_2$ 分别表示单位体积空气中氧和氮的分子数，则

$$A = \frac{N_1 A_1 + N_2 A_2}{N_1 + N_2}$$

$$A_2 = \frac{1}{N_2} [(N_1 + N_2) A - N_1 A_1]$$

$$= \left( \frac{N_1}{N_2} + 1 \right) A - \frac{N_1}{N_2} A_1 \quad (1)$$

已知氧的原子折射度为2.01，因一个氧分子由二个氧原子组成，故氧的克分子折射度

$$A_1 = 2 \times 2.01 \approx 4.02$$

氧和氮的分子数比

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{M_2}{M_1} P \quad (2)$$

式中， $M_1$ 和 $M_2$ 分别是 $O_2$ 和 $N_2$ 的分子量， $P$ 是其重量比。

$$\because M_1 = 32, \quad M_2 = 28, \quad P = \frac{25\%}{75\%} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{N_1}{N_2} = \frac{28}{32} \times \frac{1}{3} = 0.292$$

空气的克分子折射度  $A$  与其折射率  $n$  的关系为

$$A = \frac{RT}{P} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (3)$$

已知在常温常压下之折射率

$$n = 1.0002929$$

取  $p = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 288 \text{ K}$ ,  $R = 8.21 \text{ atm} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$   
代入 (3) 式, 得  $A = 4.62$

把  $A$ ,  $A_1$  和  $\frac{N_1}{N_2}$  代入 (1) 式, 得

$$A_2 = (0.292 + 1) \times 4.62 - 0.292 \times 4.02 = 4.80$$

这是  $N_2$  的克分子折射度。氮的原子折射度

$$A_N = \frac{A_2}{2} = 2.40$$

8-10 解 已知  $n = \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \right]^{1/2}$  (1)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dn}{d\omega} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \right]^{-1/2} \\ &\quad \times \left\{ \omega_p^2 \frac{-2\omega[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2] - 2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-2\omega) - \beta^2(\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega)}{[\beta^2 \omega^2]^2} \right\} \\ &= \omega_p^2 \left[ 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \right]^{-1/2} \\ &\quad \times \left\{ \frac{-2\omega[\omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^2(\omega_0^2 - \beta^2)]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

$n$  的极值条件应满足  $\frac{dn}{d\omega} = 0$ 。由大括弧中的分子为零  
可得

$$\omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^2(\omega_0^2 - \beta^2) = 0$$

解得

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \omega_0 \beta$$

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_0 \beta}$$

因为  $\omega < 0$  无意义, 故根号前 “-” 号应舍弃。

所以得

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_0 \beta}, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0 \beta}$$

显然  $\omega_1 > \omega_0$ ,  $\omega_2 < \omega_0$

即  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分布在共振圆频率  $\omega_0$  的两侧。

把  $\omega_1$  代入 (1) 式, 并化简得

$$n_1 = \left[ \frac{2\beta\omega_0 + \beta^2 - \omega_0^2}{\beta(2\omega_0 + \beta)} \right]^{1/2}$$

把  $\omega_2$  代入 (1) 式, 得

$$n_2 = \left[ \frac{2\beta\omega_0 - \beta^2 + \omega_0^2}{\beta(2\omega_0 - \beta)} \right]^{1/2}$$

因我们讨论的是弱吸收媒质,  $\beta$  很小, 比较  $n_1$ 、 $n_2$  易见,  $n_1$  应为  $n$  的极小值,  $n_2$  是  $n$  的极大值。所以  $n$  的极小值在  $\omega > \omega_0$  的一侧, 而  $n$  的极大值在  $\omega < \omega_0$  的一侧, 若把  $\omega$  换为波长  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ , 则  $n$  的极大值在  $\lambda > \lambda_0$ 。 ( $\lambda_0$  为共振波长) 一侧, 极小值在  $\lambda < \lambda_0$  一侧, 这与色散曲线符合。

—16 证 (1) 由群速  $v^{(g)} = \frac{d\omega}{dk}$  得

$$\frac{c}{v^{(g)}} = c \frac{dk}{d\omega} \quad (1)$$

波数

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c} \quad \text{代入 (1) 得}$$

$$\frac{c}{v^{(9)}} = \frac{d(\omega n)}{d\omega} = n + \omega \frac{dn}{d\omega}$$

$$(2) \quad \because v^{(9)} < c$$

$$\therefore \frac{c}{v^{(9)}} = n + \omega \frac{dn}{d\omega} > 1 \quad (2)$$

以  $n$  乘 (2) 式两侧, 得

$$n^2 + n\omega \frac{dn}{d\omega} > n \quad (3)$$

在不靠近吸收带处  $n > 1$

$$n\omega \frac{dn}{d\omega} = \omega^2 \frac{dn^2}{d\omega^2} = \omega^2 \frac{d(n^2 - 1)}{d\omega^2}$$

因此 (3) 式变为

$$n^2 + \omega^2 \frac{d(n^2 - 1)}{d\omega^2} > 1$$

也可写成

$$(n^2 - 1) + \omega^2 \frac{d(n^2 - 1)}{d\omega^2} > 0 \quad (4)$$

$$(3) \quad \because n^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (5)$$

$$\therefore n^2 - 1 = \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

$$\therefore \frac{d(n^2 - 1)}{d\omega^2} = \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} > 0$$

$$\therefore (n^2 - 1) + \omega^2 \frac{d(n^2 - 1)}{d\omega^2} > 0$$

满足 (4) 式。

(4) 式是在  $v^{(0)} < c$  的条件下导出的，因此，(4) 式被满足意味着对有多个吸收带的色散媒质，即对满足 (5) 式的色散媒质，只要不靠近吸收带，群速  $v^{(0)}$  总是小于真空中光速  $c$ 。

证毕

**8-18** 解因书中公式是在高斯制下导出的，故应把  $\epsilon$ 、 $\epsilon_0$  和  $\sigma$  换为高斯单位。

$\therefore$  非磁性

$$\therefore \mu = 1, \quad \sigma = 4.3 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} = 4.3 \times 9 \times 10^9 \quad \text{高斯单位}$$

$$\epsilon_0 = 1, \quad \epsilon = 80$$

(1) 穿透深度

$$d = \frac{\lambda_0}{4\pi n\kappa} = \frac{c}{4\pi\nu n\kappa} = 10 \text{ cm}$$

$$\therefore d^2 = \frac{c^2}{(4\pi\nu)^2 (n\kappa)^2} = 100$$

$$\begin{aligned} \therefore (n\kappa)^2 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\mu^2 \epsilon^2 + \frac{4\mu^2 \sigma^2}{\nu}} - \mu\epsilon \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon^2 + \frac{4\sigma^2}{\nu^2}} - \epsilon \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{c^2}{(4\pi\nu)^2} = 100(n\kappa)^2 = 50\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\sigma^2}{\nu^2}} - \varepsilon\right)$$

$$\therefore \left[\frac{c^2}{(4\pi\nu)^2} + 50\varepsilon\right]^2 = 50^2\left(\varepsilon^2 + \frac{4\sigma^2}{\nu^2}\right)$$

$$\frac{c^4}{16^2\pi^4\nu^4} + \left(\frac{100\varepsilon c^2}{16\pi^2} - 10^4\sigma^2\right)\frac{1}{\nu^2} = 0$$

由上式解 $\nu$ 。一组解为 $\nu \rightarrow \infty$ ，无物理意义，舍去。另一组解

$$\nu^2 = \frac{c^4}{16^2\pi^4\left(10^4\sigma^2 - \frac{100\varepsilon c^2}{16\pi^2}\right)}$$

舍去 $\nu < 0$ 的一个解，得

$$\nu = \frac{c^2}{16\pi^2\sqrt{10^4\sigma^2 - \frac{100\varepsilon c^2}{16\pi^2}}} = 1.48 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$(2) \quad \because \text{复介电常数 } \hat{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

当 $\varepsilon \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ 时复介电常数中的虚部相对于实部可以忽略，故媒质表现出电介质性质，相反当 $\varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ 时，则媒

质表现出良导体的性质。

$$\therefore \text{所谓良导体，即 } \omega \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$$

$$\therefore \frac{4\pi}{\omega} = \frac{2}{\nu}$$

$$\therefore \frac{2\sigma}{\epsilon\nu} \gg 1$$

本题中  $\sigma = 4.3 \times 9 \times 10^9 = 3.87 \times 10^{10}$  高斯单位

$\epsilon = 80$ , 当  $\nu < 10^8 \text{ Hz}$  时

$$\frac{2\sigma}{\epsilon\nu} > \frac{2 \times 3.87 \times 10^{10}}{80 \times 10^8} = 967 \gg 1$$

所以这时海水可视为良导体。

证毕

### 8—23 解 光在金属中的折射角

$$\theta'_i = \arcsin \left( \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\sin^2 \theta_i + n^2 q^2 (\cos \gamma - \kappa \sin \gamma)^2}} \right) \quad (1)$$

已知  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $n = 1.44$ ,  $n\kappa = 5.23$

$$\therefore \kappa = \frac{n\kappa}{n} = 3.63$$

(1) 式中的  $q$ ,  $\gamma$  应由下两式解出

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - \frac{1 - \kappa^2}{n^2 (1 + \kappa^2)^2} \sin^2 \theta_i = 1.0146$$

$$q^2 \sin 2\gamma = \frac{2\kappa}{n^2 (1 + \kappa^2)^2} \sin^2 \theta_i = 0.00874$$

解得  $q = 1.007$ ,  $\gamma = 0.247^\circ$ , 代入 (1) 式得

$$\theta'_i \approx 26.4^\circ$$

$$8-29 \text{ 证明 } \because r_{//} = \frac{R_{//}}{A_{//}} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} = \rho_{//} e^{i\phi_{//}}$$

$$r_{\perp} = \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_{\perp} e^{i\phi_{\perp}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} &= - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} = - \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}} e^{i(\phi_{\perp} - \phi_{\parallel})} \\ &= \operatorname{tg} \psi e^{-i\Delta} = P e^{-i\Delta} \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{n} \sin \theta_1 = \sin \theta_2, \text{ 即 } \sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\hat{n}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1 - P e^{-i\Delta}}{1 + P e^{-i\Delta}} &= \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_1 - \theta_2}{\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= - \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} = - \frac{\cos \theta_2}{\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \sin \theta_2} \\ &= - \frac{\cos \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 \frac{\sin \theta_1}{\hat{n}}} = - \frac{\hat{n} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}}{\operatorname{tg} \theta_1 \sin \theta_1} \\ &= - \frac{\sqrt{\hat{n}^2 - \sin^2 \theta_1}}{\operatorname{tg} \theta_1 \sin \theta_1} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \therefore \frac{1 - P e^{-i\Delta}}{1 + P e^{-i\Delta}} &= \frac{(1 - P e^{-i\Delta})(1 + P e^{i\Delta})}{(1 + P e^{-i\Delta})(1 + P e^{i\Delta})} \\ &= \frac{1 - P^2 + i2P \sin \Delta}{1 + P^2 + 2P \cos \Delta} \end{aligned}$$

令  $P = \operatorname{tg} \psi$ , 则

$$\frac{1 - P e^{-i\Delta}}{1 + P e^{-i\Delta}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \psi + i2 \operatorname{tg} \psi \sin \Delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi + 2 \operatorname{tg} \psi \cos \Delta}$$



注意到  $\sin 2\psi = 2\sin\psi\cos\psi$

$$\cos 2\psi = \cos^2\psi - \sin^2\psi$$

$$\begin{aligned}\therefore 1 - \operatorname{tg}^2\psi &= 1 - \frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{\cos^2\psi} \\ &= \frac{\cos 2\psi}{\cos^2\psi}\end{aligned}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\psi = \frac{1}{\cos^2\psi}$$

$$2\operatorname{tg}\psi = \frac{2\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\sin 2\psi}{\cos^2\psi}$$

$$\therefore \frac{1 - Pe^{-\Delta}}{1 + Pe^{-\Delta}} = \frac{\cos 2\psi + i\sin 2\psi \sin \Delta}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta} \quad (2)$$

比较 (1)、(2) 二式, 得

$$\frac{\sqrt{\hat{n}^2 - \sin^2\theta_1}}{\operatorname{tg}\theta_1 \sin\theta_1} = - \frac{\cos 2\psi + i\sin 2\psi \sin \Delta}{1 + \sin 2\psi \cos \Delta}$$

证毕

8—33 解 已知钠的临界波长  $\lambda_c = 2100 \text{ \AA}$ , 临界圆频

$$\text{率 } \omega_c = \frac{2\pi c}{\lambda_c} = 8.976 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\therefore \beta^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} - \omega_c^2 \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(\beta - i\omega)} = \frac{Ne^2(\beta + i\omega)}{m(\beta^2 + \omega^2)} \quad (2)$$

电子电量  $e = 4.8 \times 10^{-10}$  高斯单位

电子质量  $m = 9.1 \times 10^{-28} \text{g}$

钠的密度  $\rho = 0.971 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$

钠的摩尔原子量  $M = 23 \text{g}$

$$\therefore N = \frac{N_0 \rho}{M} = \frac{6.023 \times 10^{23} \times 0.971}{23} = 2.54 \times 10^{22} \text{个/厘米}^3$$

由 (1) 式得

$$\beta^2 = \frac{4\pi \times 2.54 \times 10^{22} \times (4.8 \times 10^{-10})^2}{9.1 \times 10^{-28}}$$

$$= (8.976 \times 10^{15})^2 = 0.245 \times 10^{30}$$

$\beta = 0.495 \times 10^{15}$  代入 (2) 式并考虑到

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.77 \times 10^{15}$$

得  $\sigma = 2.2 \times 10^{14} + i(1.68 \times 10^{15})$

由电流密度与电场强度的关系

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3)$$

式中  $\sigma$  为复量。这表明金属中的电流并不是与外电场同步变化的，而是有一定的位相延迟。根据经典电子论的结果，此相位延迟不仅仅与金属的电阻有关。因为由 (2)、(3) 式可见，即使忽略电阻（即  $\beta = 0$ ），则

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{iNe^2}{m\omega} \vec{E} = \frac{Ne^2}{m\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} \vec{E}$$

这时电流相对于电场仍有  $\frac{\pi}{2}$  的相位延迟，只有用量子力学的理论才能给予满意的解释。

8-87 解 首先把所给各量化为高斯制单位, 因银是非磁性物质, 所以

$$\mu = 1, \sigma = 6.8 \times 10^7 \times 9 \times 10^9 = 6.12 \times 10^{17} \text{Gs}$$

$$N = 1.5 \times 10^{22} \text{个/厘米}^3, e = 4.8 \times 10^{-10} \text{Gs}$$

$$m = 9.1 \times 10^{-28} \text{g}$$

(1) 电导率静态值

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m\beta}$$

弛豫时间

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{m\sigma}{Ne^2} = 1.61 \times 10^{-13} \text{s}$$

(2) 临界频率

$$\omega_c^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} - \beta^2 \approx 4.77 \times 10^{31} \text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\omega_c = 6.91 \times 10^{15} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 已知  $\lambda = 10^{-6} \text{m}$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 1.89 \times 10^{15} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{由 } R_e \hat{\epsilon} = n^2 (1 - \kappa^2)$$

$$= 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + \beta^2)} \approx -12.3$$

$$\frac{1}{2} \text{Im } \hat{\epsilon} = n^2 \kappa = \frac{2\pi Ne^2 \beta}{m\omega(\omega^2 + \beta^2)} \approx 0.0219$$

$$\therefore \frac{1 - \kappa^2}{\kappa} = -\frac{12.3}{0.0219} = -561.6$$

$$\kappa^2 - 561.6\kappa - 1 = 0$$

上方程的解为

$$\kappa = 561.6 \quad \text{及} \quad \kappa = -0.002$$

$\kappa < 0$  不合理, 舍弃。把  $\kappa = 561.6$  代入

$$n^2 \kappa = 0.0219$$

得

$$n = 0.00624$$

$\therefore$  复折射率

$$\hat{n} = n(1 + i\kappa) = 0.00624 + i3.5$$

(4) 正入射时的反射率

$$\mathcal{R} = \frac{n^2(1 + \kappa^2) + 1 - 2n}{n^2(1 + \kappa^2) + 1 + 2n} \approx 0.998$$

### 8—42 解 镀膜时反射率

$$\mathcal{R} = \frac{\gamma_{12}^2 + \rho_{23}^2 + 2\gamma_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} + 2\beta)}{1 + \gamma_{12}^2\rho_{23}^2 + 2\gamma_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} + 2\beta)} \quad (1)$$

正入射不镀膜时反射率

$$\mathcal{R}' = \frac{n_2^2(1 + \kappa_2^2) + 1 - 2n_3}{n_2^2(1 + \kappa_2^2) + 1 + 2n_3} \quad (2)$$

(1) 由题意

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 1.5, \quad n_3 = 0.2$$

$$n_3\kappa = 3.44, \quad \kappa_3 = 17.2$$

把上面的量值代入 (2) 式, 得

$$\mathcal{R}' = 0.94$$

欲求  $\mathcal{R}$ , 应先求出  $\gamma_{12}$ ,  $\rho_{23}$ ,  $\phi_{23}$  和  $\beta$ 。

在正入射时

$$\gamma_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - 1.5}{1 + 1.5} = -0.2$$

$$\gamma_{13}^2 = 0.04$$

$$\rho_{23}^2 = \frac{(n_2 \cos \theta_2 - u_3)^2 + v_3^2}{(n_2 \cos \theta_2 + u_3)^2 + v_3^2} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \therefore u_3^2 - v_3^2 &= n_2^2 (1 - \kappa_3^2) - n_2^2 \sin^2 \theta_2 \\ &= n_2^2 - n_2^2 \kappa_3^2 = -11.80 \end{aligned}$$

$$u_3 v_3 = n_2^2 \kappa_3 = 0.2 \times 3.44 = 0.688$$

由以上二式解得

$$u_3 = 0.2, \quad v_3 = 3.44$$

代入 (3) 式得

$$\rho_{23}^2 = 0.918, \quad \rho_{23} = 0.958$$

$$\begin{aligned} \phi_{23} &= \arctg \left\{ \frac{2v_3 n_2 \cos \theta_2}{u_3^2 + v_3^2 - n_2^2 \cos^2 \theta_2} \right\} \\ &= \arctg \left\{ \frac{2 \times 3.44 \times 1.5}{0.2^2 + 3.44^2 - 1.5^2} \right\} = 47^\circ \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} h_2 n_2 \cos \theta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \quad n_2 = 135^\circ$$

$$2\beta + \phi_{23} = 270^\circ + 47^\circ = 317^\circ$$

$$\cos(2\beta + \phi_{23}) = 0.731$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{R} &= \frac{0.04 + 0.918 + 2 \times (-0.2) \times 0.958 \times 0.731}{1 + 0.04 \times 0.918 + 2 \times (-0.2) \times 0.958 \times 0.731} \\ &= 0.896 < \mathcal{R}' \end{aligned}$$

镀膜后反射率降低。

$$(2) \quad n_2 = 2.8$$

与(1)中解法相似, 可求得

$$\gamma_{12} = -0.474, \quad \gamma_{12}^2 = 0.224$$

$$\rho_{23}^2 = 0.892, \quad \rho_{23} = 0.945$$

$$\phi_{23} = 78^\circ, \quad \beta = 90^\circ \cdot n_2 = 252^\circ$$

$$\cos(2\beta + \phi_{23}) = \cos(582^\circ) = -0.743$$

$$\text{得 } \mathcal{R} = 0.955 > \mathcal{R}'$$

可见镀上高折射率的膜后, 反射率比不镀膜时增加了。

8-44 解 先求铝膜的反射率

如图99, 以(1)表示 $\text{MgF}_2$ , (2)表示铝膜, (3)表示空气。

$$(2) \text{ Al } \frac{\text{(3) 空气}}{\text{(1) MgF}_2}$$

图 99

$$\text{已知 } n_1 = 1.38, \quad n_2 = 1.44, \quad n_2 \kappa_2 = 5.23$$

$$n_3 = 1, \quad \theta_1 = 0, \quad h = \frac{\lambda}{10\pi}$$

$$\therefore \kappa_2 = \frac{n_2 \kappa_2}{n_2} = 3.63$$

$$\therefore n_3 \sin \theta_3 = \hat{n}_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

$$\therefore \sin \theta_3 = \frac{n_1}{n_3} \sin \theta_1 = 0$$

$$\text{即 } \theta_3 = 0$$

$$\text{而 } \eta = \frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{10\pi} = 0.2$$

$$\begin{aligned}\text{根据 } u_2^2 - v_2^2 &= n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2 \theta_1 \\ &= (1.44)^2 [1 - (3.63)^2] = -25.25\end{aligned}$$

$$u_2 v_2 = n_2^2 \kappa_2 = 1.44 \times 5.23 = 7.53$$

由上二式解出

$$u_2 \approx 1.44, \quad v_2 \approx 5.23$$

$$\therefore u_2 \eta = 1.44 \times 0.2 = 0.288$$

$$v_2 \eta = 5.23 \times 0.2 = 1.046$$

把以上结果代入  $\rho_{12}$ ,  $\phi_{12}$ ,  $\rho_{23}$ ,  $\phi_{23}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  表示式中, 可得

$$\rho_{12} = \left[ \frac{(n_1 \cos \theta_1 - u_2)^2 + v_2^2}{(n_1 \cos \theta_1 + u_2)^2 + v_2^2} \right]^{1/2} = \sqrt{0.775} \approx 0.88$$

$$\phi_{12} = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2v_2 n_1 \cos \theta_1}{u_2^2 + v_2^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_1} \right] = \operatorname{tg}^{-1} (0.525) \approx 27.7^\circ$$

$$\rho_{23} = \left[ \frac{(n_3 \cos \theta_3 - u_2)^2 + v_2^2}{(n_3 \cos \theta_3 + u_2)^2 + v_2^2} \right]^{1/2} \approx \sqrt{0.827} \approx 0.909$$

$$\phi_{23} = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2v_2 n_3 \cos \theta_3}{u_2^2 + v_2^2 - n_3^2 \cos^2 \theta_3} \right] \approx \operatorname{tg}^{-1} (0.368) \approx 20.2$$

$$\tau_{12} = \left[ \frac{(2n_1 \cos \theta_1)^2}{(n_1 \cos \theta_1 + u_2)^2 + v_2^2} \right]^{1/2} = \sqrt{0.216} = 0.465$$

$$\tau_{23} = \left[ \frac{4(u_2^2 + v_2^2)}{(n_3 \cos \theta_3 + u_2)^2 + v_2^2} \right]^{1/2} = \sqrt{3.53} = 1.88$$

把以上求得的  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $n$ ,  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{23}$ ,  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{23}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  代入反射率  $\mathcal{R}$  和透射率  $\mathcal{T}$  的公式得

$$\mathcal{R} = \frac{\rho_{12}^2 e^{2v_1\eta} + \rho_{23}^2 e^{-2v_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} - \phi_{12} + 2u_2\eta)}{e^{2v_1\eta} + \rho_{12}^2\rho_{23}^2 e^{-2v_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} + \phi_{12} + 2u_2\eta)}$$

$$= 0.928$$

$$\mathcal{T} = n_3 \cos\theta_3 \tau_{12}^2 \tau_{23}^2 e^{-2v_1\eta} / \{n_1 \cos\theta_1 [1 + \rho_{12}^2 \rho_{23}^2 e^{-4v_1\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23} e^{-2v_1\eta} \cos(\phi_{12} + \phi_{23} + 2u_2\eta)]\}$$

$$= 0.0288$$

把以上求得的  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{T}$  代入峰值透射率  $\tau$  和波长半宽度  $(\Delta\lambda)_{H.W}$  公式, 并考虑到

$$\frac{d(\phi\lambda)}{d\lambda} = 0$$

即可得

$$\tau = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{T}}{1 - \mathcal{R}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{0.0288}{1 - 0.928}\right)^2 = 16\%$$

$$(\Delta\lambda)_{H.W} = \frac{2\lambda^{(m)}}{\pi\sqrt{F} \left| m - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{d}{d\lambda}(\phi\lambda) \right] \right|} = \frac{2\lambda^{(m)}}{\pi\sqrt{F} m}$$

本题中  $\text{MgF}_2$  的光学厚度为  $\frac{\lambda}{2}$ , 故对波长为  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$

的光

$$m = 1$$

$$F = \frac{4\mathcal{R}}{(1 - \mathcal{R})^2} = \frac{4 \times 0.928}{(1 - 0.928)^2} = 716$$

$$\therefore (\Delta\lambda)_{H.W} = \frac{2 \times 5893}{\pi\sqrt{716}} = 140 \text{ \AA}$$



## 第九章 晶体光学

9-4 解 (1) 由

$$\nu_p^2(\nu_r^2 - \nu_p^2) = \frac{1}{\left(\frac{s_x}{\nu_p^2 - \nu_x^2}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\nu_p^2 - \nu_y^2}\right)^2 + \left(\frac{s_z}{\nu_p^2 - \nu_z^2}\right)^2}$$

把  $\nu_r = \frac{\nu_p}{\cos \alpha}$  代入上式, 整理得

$$\nu_p^2(\nu_r^2 - \nu_p^2) = \nu_p^4 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \nu_p^4 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\nu_p^4 \left[ \left( \frac{s_x}{\nu_p^2 - \nu_x^2} \right)^2 + \left( \frac{s_y}{\nu_p^2 - \nu_y^2} \right)^2 + \left( \frac{s_z}{\nu_p^2 - \nu_z^2} \right)^2 \right]} \quad (1)$$

这就是求离散角  $\alpha$  的一般公式。

(2) 对于单轴晶体, 设光轴沿  $z$  轴, 则

$$\nu_x = \nu_y = \nu_o, \quad \nu_z = \nu_e$$

设  $\vec{s}$  与  $z$  轴正向夹角为  $\theta$ , 则

$$s_x^2 + s_y^2 = \sin^2 \theta$$

$$s_z = \cos \theta$$

代入 (1) 式, 得

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\nu_p^4 \left[ \left( \frac{1}{\nu_p^2 - \nu_o^2} \right)^2 (s_x^2 + s_y^2) + \left( \frac{s_z}{\nu_p^2 - \nu_e^2} \right)^2 \right]}$$

$$= \frac{(\nu_p^2 - \nu_o^2)^2 (\nu_p^2 - \nu_o^2)^2}{\nu_o^4 [\sin^2 \theta (\nu_p^2 - \nu_o^2) + \cos^2 \theta (\nu_p^2 - \nu_o^2)^2]}$$

对于寻常光

$$\nu_p = \nu_o, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \alpha = 0$$

对于非常光

$$\nu_p^2 = \nu_o^2 \sin^2 \theta + \nu_e^2 \cos^2 \theta$$

$$\therefore \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{(\nu_e^2 \sin^2 \theta + \nu_o^2 \cos^2 \theta - \nu_o^2)^2 (\nu_e^2 \sin^2 \theta}{(\nu_e^2 \sin^2 \theta + \nu_o^2 \cos^2 \theta)^2 [\sin^2 \theta (\nu_e^2 \sin^2 \theta$$

$$+ \nu_o^2 \cos^2 \theta - \nu_o^2)^2 + \cos^2 \theta (\nu_e^2 \sin^2 \theta + \nu_o^2 \cos^2 \theta - \nu_o^2)^2]}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\nu_e^2 - \nu_o^2)^2}{(\nu_e^2 \sin^2 \theta + \nu_o^2 \cos^2 \theta)^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta \cos \theta (\nu_e^2 - \nu_o^2)}{\nu_e^2 \sin^2 \theta + \nu_o^2 \cos^2 \theta}$$

解出的  $\alpha > 0$ , 表示  $\vec{t}$  与  $z$  轴夹角大于  $\theta$ ,  $\alpha < 0$  则相反, 如图 100 所示。

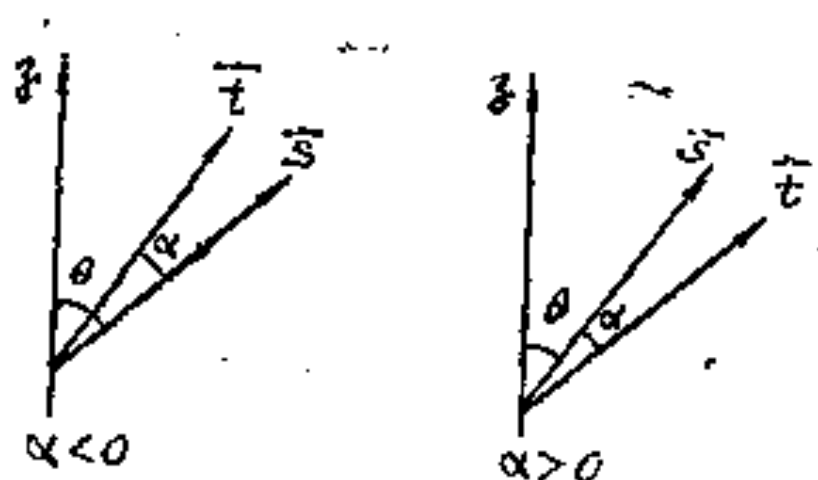


图 100

9—6 证 取  $oxyz$  坐标系为晶体主轴坐标系。不失一般性，

可设波法线矢量  $\vec{s}$  沿  $z$  轴正方向，即

$$s_x = s_y = 0, \quad s_z = 1$$

或

$$\vec{s} (0, 0, 1)$$

上式小括号内三个量分别表示  $\vec{s}$  沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的三个分量。

$$\text{由 } t_k = \frac{s_k}{v_p v_r} \left( v_p^2 + \frac{g^2}{v_p^2 - v_k^2} \right)$$

式中

$$g^2 \equiv v_p^2 (v_r^2 - v_p^2)$$

$$k = x, y, z$$

把  $s_x = 0, s_y = 0$  代入上式得

$$t_x = 0, \quad t_y = 0$$

所以只有  $t_z \neq 0$  考虑到  $\vec{t}$  是单位矢量，必有  $t_z = 1$  即

$$\vec{t} (0, 0, 1)$$

与波法线方向一致。

$$\text{又 } \because \vec{t} \cdot \vec{s} = \cos \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = 1$$

$$v_p = v_r \cos \alpha = v_r$$

波法线速度  $v_p$  与光线速度  $v_r$  相等。

同理可证当光线矢量为  $\vec{t} (0, 0, 1)$  时，波法线矢量为  $\vec{s} (0, 0, 1)$ ，则  $\cos \alpha = 1$  得

$$v_p = v_r$$

9—14 解 由菲涅耳方程可解得在单轴晶体中，寻常光的波速

$$v_p'^2 = v_o^2$$

非常光的波速

$$v_p'^2 = v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta$$

式中  $\theta$  是波矢  $\vec{s}$  与光轴之间的夹角。

由折射率的定义

$$n_o = \frac{c}{v_p'} = \frac{c}{v_o} = n_o$$

$$\begin{aligned} n_{\text{非}} &= \frac{c}{v_p'} = \frac{c}{\sqrt{v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{v_o^2}{c^2} \cos^2 \theta + \frac{v_e^2}{c^2} \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_o^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \end{aligned}$$

9-18 解 (1) 当光正入射时, 入射角  $\theta_1 = 0$ , 由

$$\sin \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{n}$$

得  $\theta_1 = 0$ , 即波法线  $\vec{s}$  不发生折射, 因此  $\vec{s}$  和光轴夹角

$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 。用 9-4 题结果得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta \cos \theta (\nu_e^2 - \nu_o^2)}{\nu_e^2 \sin^2 \theta + \nu_o^2 \cos^2 \theta}$$

用  $\frac{c^2}{\nu_o^2 \nu_e^2 \cos^2 \theta}$  乘上式, 并考虑到

$$\frac{c}{\nu_o} = n_o, \quad \frac{c}{\nu_e} = n_e, \quad \varphi = 45^\circ$$

得 
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \varphi (n_o^2 - n_e^2)}{n_o^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + n_e^2} = \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o^2 + n_e^2}$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o^2 + n_e^2} \right) \approx 1.731^\circ = 1^\circ 44'$$

为了明显起见, 图 101 小所画的  $\alpha$  比真实值有所夸大。

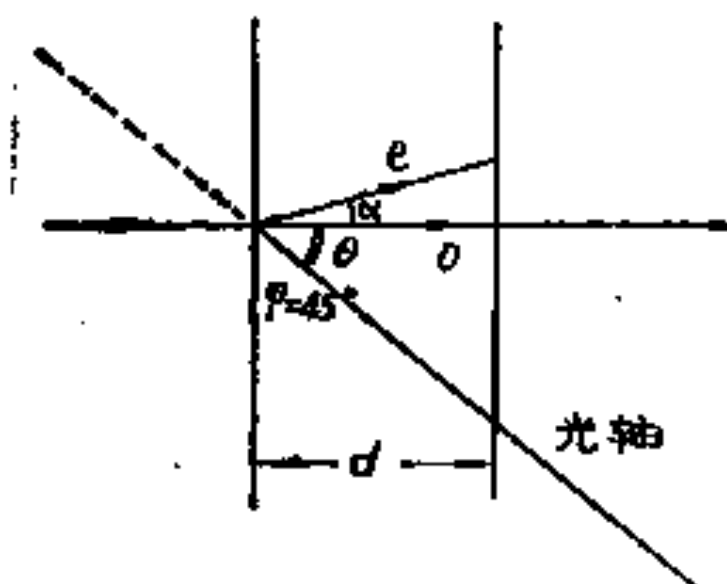


图 101

## (2) 光线速度

对 o 光

$$\nu_{ro} = \frac{c}{n_o} \approx \frac{3 \times 10^8}{1.5246} = 1.968 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

对 e 光

$$v_{pe} = \sqrt{v_o^2 \sin^2 \theta + v_e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\therefore v_e = \frac{c}{n_e}, \quad v_o = \frac{c}{n_o}, \quad \theta = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore v_{pe} &= c \sin 45^\circ \sqrt{\frac{1}{n_e^2} + \frac{1}{n_o^2}} \\ &= 3 \times 10^8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{1}{1.4792^2} + \frac{1}{1.5246^2}} \\ &= 1.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

光线速度

$$v_{re} = \frac{v_{pe}}{\cos \alpha} = 1.999 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 位相差

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d[n_o - n_e(\theta)]$$

$$\text{由 } \frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

$$\text{解得 } n_e(\theta) = 1.5014$$

$$\therefore \Delta \varphi = \frac{2\pi \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-7}} \times (1.5246 - 1.5014)$$

$$\approx 92.8\pi$$

9—23 解 图 102 中  $MM'$  表示界面,  $\vec{n}$  表示界面法线,  $OO'$  为晶体光轴。

波矢  $\vec{s}$  的折射角  $\theta$ , 可由下式确定

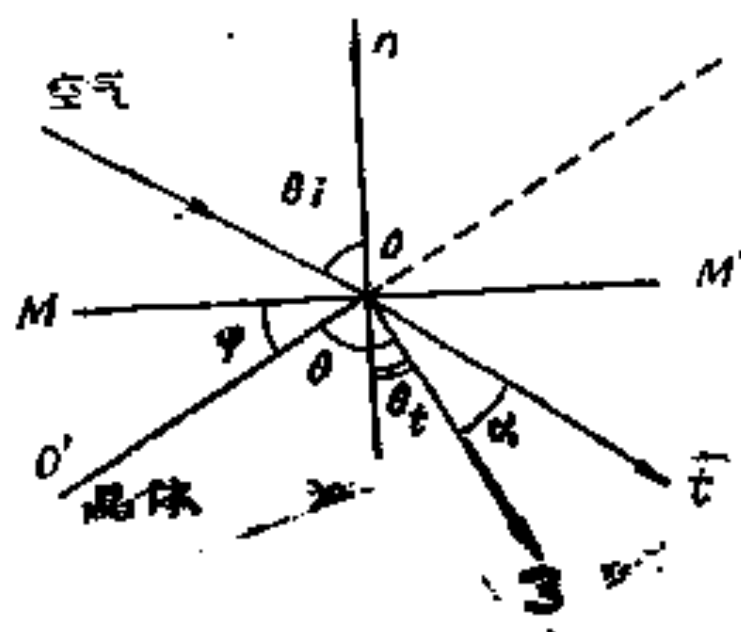


图 102

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_t \quad (1)$$

由习题 9—14 的结果

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (2)$$

从图上可见

$$\theta_t = \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sin \theta_t = \sin \left( \theta + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos(\theta + \varphi)$$

代入 (1) 式得

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = -\frac{\cos(\theta + \varphi)}{\sin \theta_i}$$

代入 (2) 式得

$$\frac{\cos^2(\theta + \varphi)}{\sin^2 \theta_i} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

$$\frac{(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)}{\sin^2\theta_1} - \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} - \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} = 0$$

整理得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\theta \left( \sin^2\varphi - \frac{\sin^2\theta_1}{n_e^2} \right) - 2\operatorname{tg}\theta\cos\varphi\sin\varphi \\ + \left( \cos^2\varphi - \frac{\sin^2\theta_1}{n_o^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n_e[n_o n_e \sin\varphi\cos\varphi \pm \sin\theta_1 \sqrt{n_o^2 \sin^2\varphi + n_e^2 \cos^2\varphi - \sin^2\theta_1}]}{n_o(n_o^2 \sin^2\varphi - \sin^2\theta_1)}$$

上式中正负号根据  $\theta_1 = \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}$  的合理性取其中之一（比如参见 9—40 题之解答）。

由习题 9—4 结果

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\theta\cos\theta(v_e^2 - v_o^2)}{v_e^2 \sin^2\theta + v_o^2 \cos^2\theta} \\ &= \frac{\operatorname{tg}\theta(n_o^2 - n_e^2)}{n_o^2 \operatorname{tg}^2\theta + n_e^2} \end{aligned}$$

把前面求得的  $\operatorname{tg}\theta$  代入上式，可得离散角  $\alpha$ ，从而求得  $\vec{t}$  的方向。按我们的规定，若求得  $\alpha < 0$ ，则  $\vec{t}$  与光轴之夹角为  $(\theta - \alpha)$ ，即  $\vec{t}$  与界面法线之夹角  $\beta = \theta_1 - \alpha$ 。反之，若  $\alpha > 0$ ，则  $\beta = \theta_1 + \alpha$ 。本题的图是按  $\alpha > 0$  画的。

根据以上结果，讨论几种特例：

(1)  $\varphi = 0$ （光轴在界面内）

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n_e \sqrt{n_o^2 - \sin^2\theta_1}}{n_o \sin\theta_1}$$



$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \theta (n_o^2 - n_e^2)}{n_o^2 \operatorname{tg}^2 \theta + n_e^2} \\ &= \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \theta_1 \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_o^2 n_e}\end{aligned}$$

(2)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (光轴垂直于界面)

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{n_e \sin \theta_1}{n_o \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_1}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \theta_1 \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_o n_e^2}\end{aligned}$$

(3)  $\theta_1 = 0$  (光线垂直于界面入射)

$$\because \operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \varphi$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (\vec{s} \text{ 沿界面法线})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi (n_o^2 - n_e^2)}{n_o^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + n_e^2} \\ &= \frac{(n_o^2 - n_e^2) \sin \varphi \cos \varphi}{n_o^2 \sin^2 \varphi + n_e^2 \cos^2 \varphi}\end{aligned}$$

当  $\varphi = 0$ , 或  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时  $\alpha = 0$ , 即不发生双折射。但应注意,  $\varphi = 0$  时虽然在晶体中  $o$  光和  $e$  光的传播方向相同, 但二者的传播速度却不同。

9—28 解 (1) 当  $\varepsilon_x < \varepsilon_y < \varepsilon_z$  时,  $xoz$  平面中光轴分布如图

103。设  $\vec{s}$  与光轴  $N_1$ 、 $N_2$  之夹角分别为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 。光轴与  $z$  轴之夹角  $\beta$  由下式确定

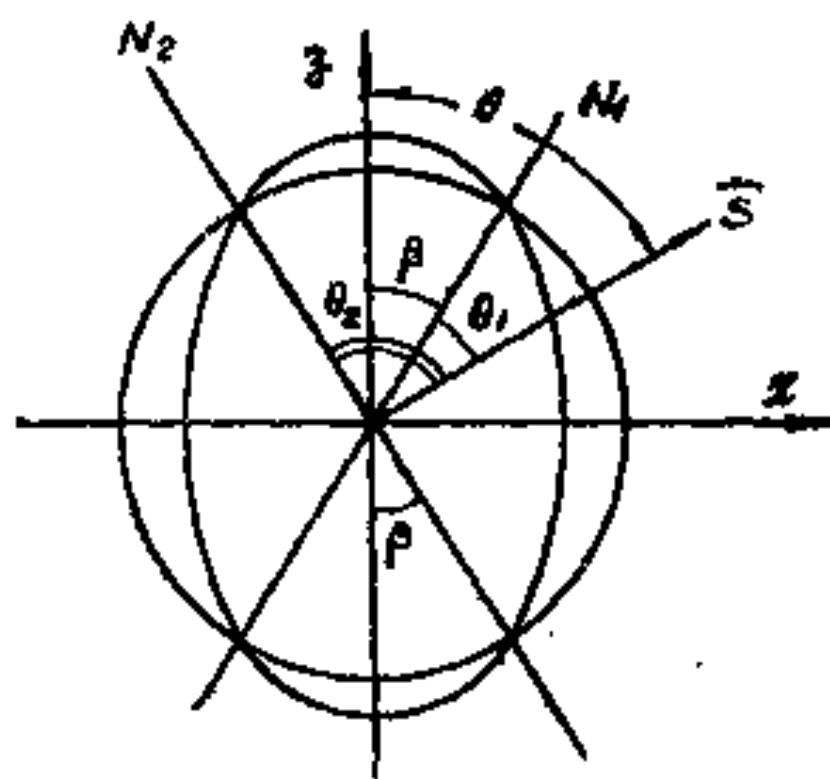


图 103

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}}$$

法 I 由图 103

$$\because \theta_1 = \theta - |\beta|, \quad \theta_2 = \theta + |\beta|$$

$$\therefore \theta_1 - \theta_2 = -2|\beta|, \quad \theta_1 + \theta_2 = 2\theta$$

沿  $\vec{s}$  方向的波速  $v_p$  可由下式确定

$$v_p^2 = \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \cos(\theta_1 \pm \theta_2)]$$

只要解出  $v_p$  的二个解  $v'_p$ 、 $v''_p$ ，就可求得沿  $\vec{s}$  方向的折射

$$\text{率 } n'_p = \frac{c}{v'_p}, \quad n''_p = \frac{c}{v''_p}。$$

解方程

$$v_p'^2 = \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \cos 2|\beta|]$$

$$\therefore \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta + 1} = \frac{1}{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2} + 1} \\ &= \frac{v_y^2 - v_z^2}{v_x^2 + v_z^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)$$

$$= \frac{2v_y^2 - v_x^2 - v_z^2}{v_x^2 - v_z^2}$$

$$\therefore v_p'^2 = \frac{1}{2} \left[ v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \frac{2v_y^2 - v_x^2 - v_z^2}{v_x^2 - v_z^2} \right] = v_y^2$$

$$v_p' = v_y$$

$$n_p' = \frac{c}{v_p'} = \frac{c}{v_y} = n_y$$

解方程

$$v_p'^2 = \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2) \cos 2\theta]$$

$$= -\frac{1}{2} [\nu_x^2 + \nu_z^2 + (\nu_x^2 - \nu_z^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]$$

$$= \nu_x^2 \cos^2\theta + \nu_z^2 \sin^2\theta$$

$$\therefore \nu_p' = \sqrt{\nu_x^2 \cos^2\theta + \nu_z^2 \sin^2\theta}$$

$$= c \sqrt{\frac{1}{n_x^2} \cos^2\theta + \frac{1}{n_z^2} \sin^2\theta}$$

$$\therefore n_p' = \frac{c}{\nu_p'} = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 \sin^2\theta + n_z^2 \cos^2\theta}}$$

法 II 由菲涅耳方程

$$\frac{s_x^2}{\nu_p^2 - \nu_x^2} + \frac{s_y^2}{\nu_p^2 - \nu_y^2} + \frac{s_z^2}{\nu_p^2 - \nu_z^2} = 0$$

可得

$$s_x^2(\nu_p^2 - \nu_y^2)(\nu_p^2 - \nu_z^2) + s_y^2(\nu_p^2 - \nu_z^2)(\nu_p^2 - \nu_x^2) \\ + s_z^2(\nu_p^2 - \nu_x^2)(\nu_p^2 - \nu_y^2) = 0$$

$\therefore \vec{s}$  在  $xoz$  平面内

$$\therefore s_y = 0, s_x = \sin\theta, s_z = \cos\theta$$

上式化为

$$\sin^2\theta(\nu_p^2 - \nu_y^2)(\nu_p^2 - \nu_z^2) + \cos^2\theta(\nu_p^2 - \nu_x^2)(\nu_p^2 - \nu_y^2) = 0$$

整理得

$$(\nu_p^2 - \nu_y^2)(\nu_p^2 - \nu_z^2 \sin^2\theta - \nu_x^2 \cos^2\theta) = 0$$

解得

$$\nu_p' = \nu_y, \quad \nu_p'' = \sqrt{\nu_z^2 \sin^2\theta + \nu_x^2 \cos^2\theta}$$

$$\therefore n_p' = n_y, \quad n_p'' = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 \sin^2\theta + n_z^2 \cos^2\theta}}$$

(2) 第一种情况

如图 104 已知  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $d = 1\text{cm}$

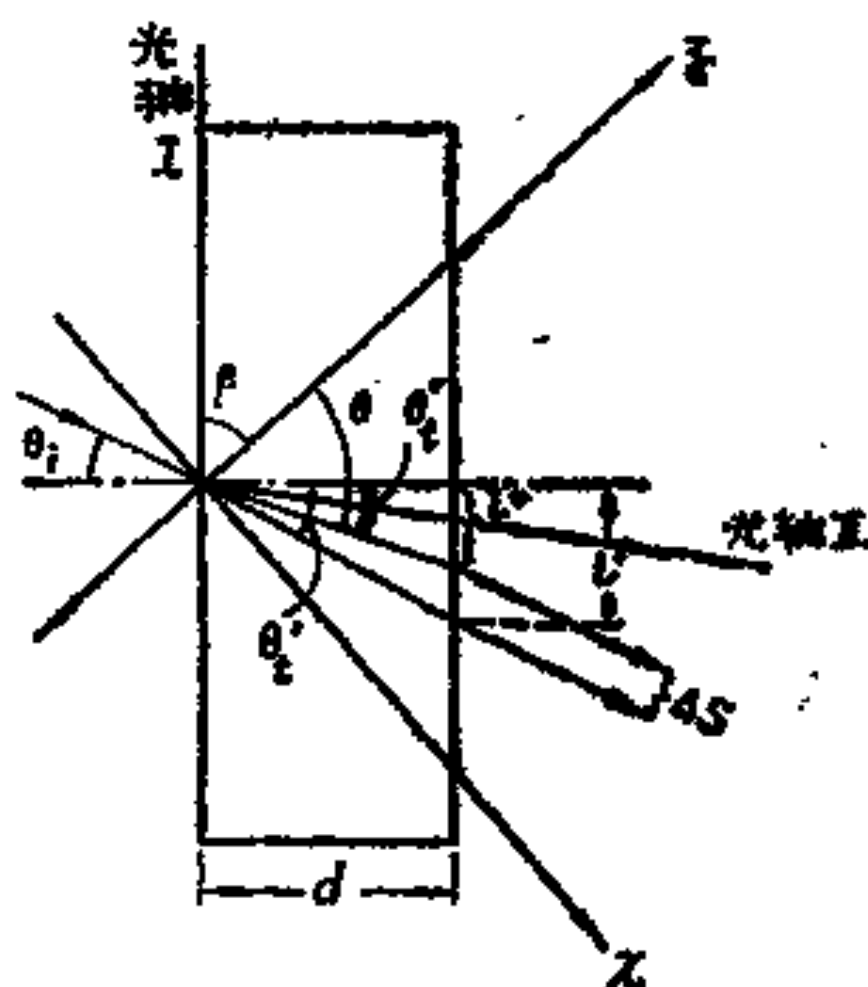


图 104

欲求  $\Delta l = l' - l''$

$$\because \quad \text{tg} \beta = \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}} = \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_y^2 - n_x^2}{n_z^2 - n_y^2}}$$

$$= 1.3122$$

$$\therefore \quad \beta = 52.69^\circ$$

由本题 (1) 之结果

$$n' = n_y$$

$$\therefore \quad \sin \theta_i = n' \sin \theta'_i = n_y \sin \theta'_i$$

$$\theta'_i = \sin^{-1} \left[ \frac{1}{n_y} \sin 30^\circ \right] = 14.17^\circ$$

$$\text{又 } \because n'' = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 \sin^2 \theta + n_z^2 \cos^2 \theta}}$$

$$\text{及 } n'' = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_1'}$$

比较二式得

$$\frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 \sin^2 \theta + n_z^2 \cos^2 \theta}} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_1'} \quad (1)$$

• 由图可见

$$\frac{\pi}{2} + \theta_1' = \theta + \beta$$

$$\text{即 } \theta = \frac{\pi}{2} - \beta + \theta_1' = 37.31^\circ + \theta_1'$$

$$\text{令 } \alpha = 37.31^\circ \text{ 则 } \theta = \alpha + \theta_1'$$

代入 (1) 式, 并把 (1) 式两边平方, 得

$$\frac{n_x^2 n_z^2}{n_x^2 \sin^2 (\alpha + \theta_1') + n_z^2 \cos^2 (\alpha + \theta_1')} = \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_1'}$$

整理得

$$(n_x^2 \cos^2 \alpha + n_z^2 \sin^2 \alpha - 4n_x^2 n_z^2) \operatorname{tg}^2 \theta_1' + 2 \cos \alpha \sin \alpha (n_x^2 - n_z^2) \operatorname{tg} \theta_1' + (n_x^2 \sin^2 \alpha + n_z^2 \cos^2 \alpha) = 0 \quad (2)$$

$$71.75 \operatorname{tg}^2 \theta_1' - 1.17 \operatorname{tg} \theta_1' - 4.25 = 0$$

$$\operatorname{tg} \theta_1' = \frac{1.17 \pm 34.95}{143.5}$$

取 “+” 号, 解得  $\theta_1' = 14.13^\circ$

取 “-” 号, 解得  $\theta_1' = -13.25^\circ$

显然负值不合理。

所以两出射点相距

$$\begin{aligned}\Delta l &= l' - l'' = d(\operatorname{tg}\theta'_i - \operatorname{tg}\theta''_i) \\ &= 1 \times (\operatorname{tg}14.17^\circ - \operatorname{tg}14.13^\circ) = 7.43 \times 10^{-4} \text{ cm}\end{aligned}$$

两光出射后相距

$$\Delta s = \Delta l \cos\theta_i = 6.44 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

第二种情况

如图105, 仍有  $\theta_i = 30^\circ$ , 但从下往上入射, 这时的  $\theta'_i$  与第一种情况相同。由图可见

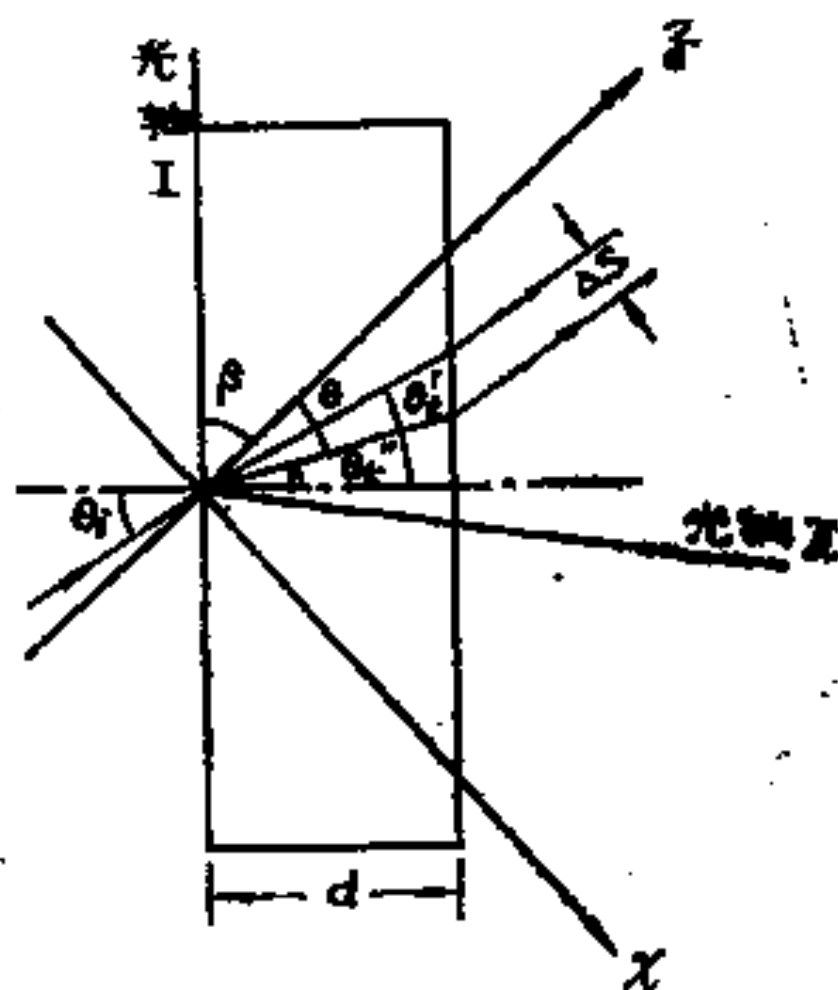


图 105

$$\beta + \theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta - \theta'' = 37.31^\circ - \theta'' = \alpha - \theta''$$

代入 (1) 式得

$$\frac{n_x^2 n_z^2}{n_x^2 \sin^2(\alpha - \theta_1') + n_z^2 \cos^2(\alpha - \theta_1')} = \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_1'}$$

整理得

$$\begin{aligned} & (n_x^2 \cos^2 \alpha + n_z^2 \sin^2 \alpha - 4n_x^2 n_z^2) \operatorname{tg}^2 \theta_1' \\ & - 2 \cos \alpha \sin \alpha (n_x^2 - n_z^2) \operatorname{tg} \theta_1' + (n_x^2 \sin^2 \alpha + n_z^2 \cos^2 \alpha) = 0 \\ & 71.75 \operatorname{tg}^2 \theta_1' + 1.17 \operatorname{tg} \theta_1' - 4.25 = 0 \\ & \operatorname{tg} \theta_1' = \frac{-1.17 \pm 34.95}{143.5} \end{aligned}$$

显然取负号所得解不合理

$$\therefore \theta_1' = \operatorname{arctg} \left( \frac{-1.17 + 34.95}{143.5} \right) = 13.25^\circ$$

两出射点相距

$$\Delta l = d(\operatorname{tg} \theta_1' - \operatorname{tg} \theta_1'') = \operatorname{tg} 14.17^\circ - \operatorname{tg} 13.25^\circ = 0.017 \text{ cm}$$

两光出射后相距

$$\Delta s = \Delta l \cos \theta_1 = 0.0147 \text{ cm}$$

结论：第二种情况入射时，出射光分开的距离比较大。

### 9—32 解 (1) 光轴平行于棱边 A

分析：如图 106， $\phi = 0$ ， $\theta_1 = 0$

由 9—23 题结果可知不发生双折射。在 BC 面上的入射角、反射角均为  $60^\circ$ 。

$\therefore$  在 BC 面 O 光的全反射临界角

$$\theta_o = \operatorname{arcsin} \left( \frac{1}{n_o} \right) = \operatorname{arcsin} \left( \frac{1}{1.658} \right) = 37.1^\circ$$



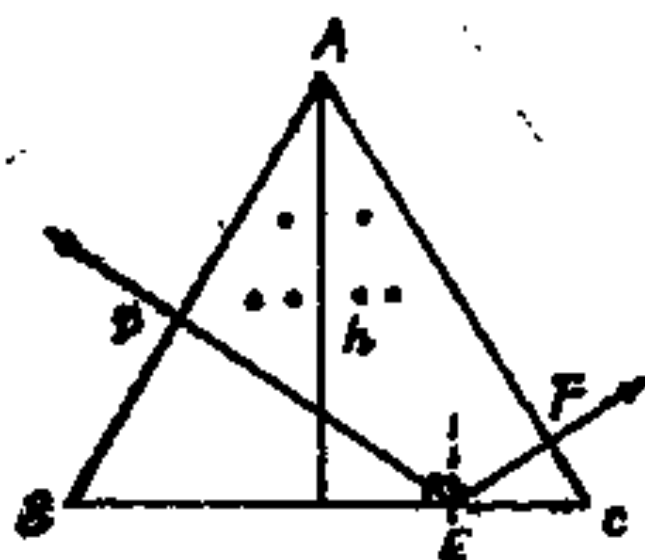


图 106

$e$  光的全反射临界角

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n_e}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.486}\right) = 42.3^\circ$$

$\therefore$   $o$  光、 $e$  光在  $BC$  面都将发生全反射。反射后传播方向仍垂直于光轴，即仍不发生双折射，保持为一细束光垂直射到  $AC$  面上。但是，因  $o$  光、 $e$  光的折射率不同，故二者的光程  $[DEF]$  是不同的。因  $\triangle ABC$  是等边三角形，从几何关系不难证明

$$DE + EF = h$$

故从  $AC$  面出射时  $o$  光和  $e$  光的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n_o - n_e) = \frac{1.0807}{\lambda} h$$

由于入射光振动面与图面成  $45^\circ$  角，所以在  $AB$  面入射后分解成的二光是振幅相同、振动方向互相垂直、频率相同，具有恒定相位差的光振动，其合成一般是椭圆偏振光，当  $h$  使  $\delta = \frac{2m+1}{2}\pi$  时是圆偏振光  $\delta = m\pi$  时是线偏振光。

下面求椭圆形状与 $\delta$ 的关系（即椭圆形状与 $h$ 、 $n_o$ 、 $n_e$ 的关系）

$\because$   $o$  光、 $e$  光振幅相同

$\therefore \operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ$

设椭圆长轴与入射面的夹角为 $\psi$

则  $\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta \rightarrow \infty$

$$\psi = 45^\circ$$

由  $\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta = \sin \delta$   $\chi$  的符号决定椭圆转向， $\chi > 0$  为右旋， $\chi < 0$  为左旋，而椭圆的短轴和长轴之比

$$\frac{b}{a} = |\operatorname{tg} \chi|$$

$$\text{即 } \frac{b}{a} = \left| \frac{\sin \chi}{\cos \chi} \right| = \left| \frac{\sin 2\chi}{1 + \cos \chi} \right| = \left| \frac{\sin \delta}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \delta}} \right|$$

(2) 光轴垂直  $AB$  面

分析：如图107，从  $D$  到  $E$ ，任何振动方向的光都以同

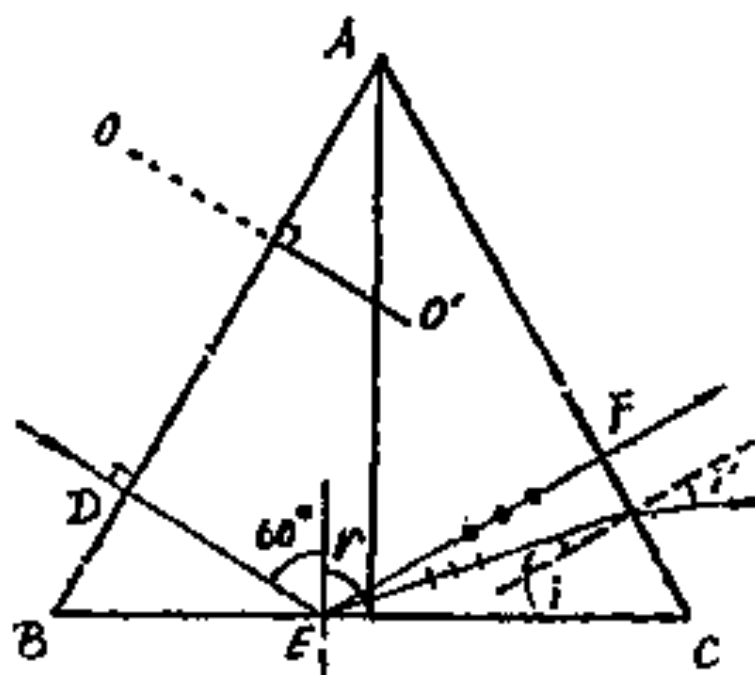


图 107

一速度，沿同一方向（光轴方向）传播。从E到F，o、e二光分开。o光（垂直纸面振动）垂直AC出射。

下面计算e光

在E点反射时满足

$$n_o \sin 60^\circ = n_e(\theta) \sin r \quad (1)$$

由图可知e光传播方向与光轴oo'的夹角θ为

$$\theta = 120^\circ - r \quad \text{即} \quad r = 120^\circ - \theta$$

$$\therefore \sin r = \sin(120^\circ - \theta) = \sin 60^\circ \cos \theta + \cos 60^\circ \sin \theta$$

代入(1)得

$$n_e(\theta) = \frac{n_o}{\cos \theta + \operatorname{ctg} 60^\circ \sin \theta}$$

$$\text{又} \because n_e(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta + \operatorname{ctg} 60^\circ \sin \theta} = \frac{n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}$$

$$\text{解得} \quad \operatorname{tg} \theta = 1.2667, \quad \theta = 51.7^\circ$$

$$n_e(\theta) = 1.545, \quad r = 120^\circ - 51.7^\circ = 68.3^\circ$$

入射到AC面的入射角

$$i = r - 60^\circ = 8.3^\circ$$

出射角

$$\begin{aligned} i' &= \arcsin[n_e(\theta) \sin i] = \arcsin[1.545 \sin(8.3^\circ)] \\ &= 12.9^\circ \end{aligned}$$

e光振动方向在纸面内并垂直其传播方向。

9—35 解 (1) 洛勾棱镜

图 108 为洛匈棱镜，当天然光垂直入射到  $AB$  面上时，在  $ABC$  中是寻常光，不发生双折射，在  $ACD$  中“1”仍是寻常光，在  $AC$  界面不发生折射。

“2”变为非常光，在  $AC$  面发生折射，入射角  $\theta_1 = \alpha$ ，折射角  $\theta'$  由下式确定

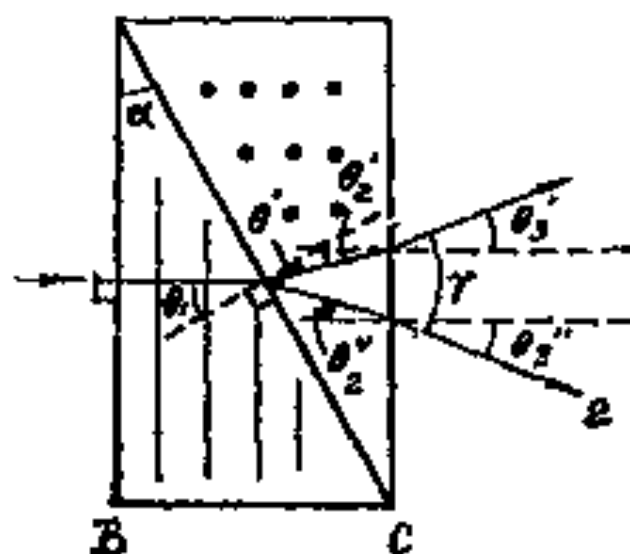


图 108

$$n_e \sin \theta' = n_o \sin \theta_1$$

$$\theta' = \arcsin \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right)$$

在  $DC$  面上的入射角

$$\theta_2 = \theta' - \alpha = \arcsin \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right) - \alpha$$

$$\therefore \sin \theta_3 = n_e \sin \theta_2 = n_e \sin \left[ \arcsin \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right) - \alpha \right]$$

$$\gamma = \theta_3 = \arcsin \left\{ n_e \sin \left[ \arcsin \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right) - \alpha \right] \right\} \quad (1)$$

当  $\alpha$  比较小时, (1) 式可简化

$$\therefore \sin \theta' = \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha, \quad \cos \theta' = \frac{\sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \alpha}}{n_e}$$

$$\therefore \sin \theta_2 = \sin(\theta' - \alpha) = \sin \theta' \cos \alpha - \cos \theta' \sin \alpha$$

$$= \frac{\sin \alpha}{n_e} [n_o \cos \alpha - \sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \alpha}]$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{n_e} [n_o \cos^2 \alpha - \cos \alpha \sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \alpha}]$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{n_e} [n_o(1 - \sin^2 \alpha) - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}]$$

$$\times \sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \alpha}]$$

当  $\alpha$  较小时,  $\sin^2 \alpha \ll 1$ 。忽略上式之  $\sin^2 \alpha$  项, 可得

$$\sin \theta_2 \approx \frac{(n_o - n_e)}{n_e} \operatorname{tg} \alpha$$

代入 (1) 得

$$\gamma \approx \sin^{-1} [(n_o - n_e) \operatorname{tg} \alpha] \quad (2)$$

对方解石  $n_o = 1.658$ ,  $n_e = 1.486$ , 当  $\alpha = 30^\circ$  时, 由 (1) 求得

$$\gamma \approx 5^\circ 49'$$

由 (2) 求得

$$\gamma \approx 5^\circ 42'$$

(2) 渥拉斯顿棱镜 (如图109)

当天然光垂直入射到  $AB$  面上时, 在  $ABC$  中, 1 是非常光, 到  $ACD$  中则变为寻常光, 在  $AC$  界面上要发生折射, 入

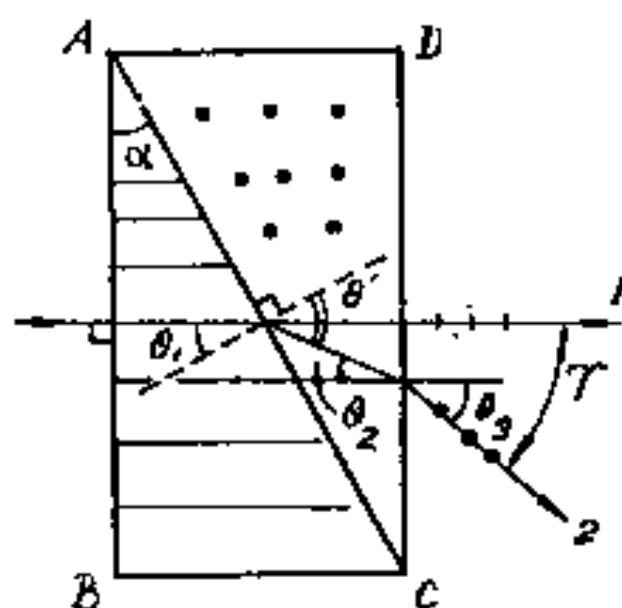


图 109

射角  $\theta_1 = \alpha$ , 折射角  $\theta'$  由下式确定

$$n_o \sin \theta = n_e \sin \theta_1$$

$$\theta' = \arcsin \left( \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha \right)$$

在  $CD$  面上入射角

$$\theta'_2 = \alpha - \theta' = \alpha - \arcsin \left( \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha \right)$$

$$\therefore \sin \theta'_3 = n_o \sin \theta'_2 = n_o \sin \left[ \alpha - \arcsin \left( \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha \right) \right]$$

$$\therefore \theta'_3 = \arcsin \left\{ n_o \sin \left[ \alpha - \arcsin \left( \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha \right) \right] \right\}$$

对光线 2 同样可得

$$\theta'_1 = \arcsin \left\{ n_e \sin \left[ \arcsin \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right) - \alpha \right] \right\}$$

$$\gamma = \theta'_1 + \theta'_3 = \arcsin \left\{ n_o \sin \left[ \alpha - \arcsin \left( \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha \right) \right] \right\}$$

$$+ \arcsin \left\{ n_e \sin \left[ \arcsin \left( \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha \right) - \alpha \right] \right\} \quad (3)$$

当  $\alpha$  很小时, 取近似可得

$$\gamma \approx 2 \arcsin [(n_o - n_e) \operatorname{tg} \alpha] \quad (4)$$

对方解石, 当  $\alpha = 30^\circ$  时, 由 (3) 式得

$$\gamma \approx 11^\circ 25'$$

由 (4) 式得

$$\gamma = 11^\circ 24'$$

9—40 解 已知制造尼科耳棱镜的方解石主折射率

$$n_o = 1.658, \quad n_e = 1.486$$

如图110, 入射光平行于  $AB$ 。

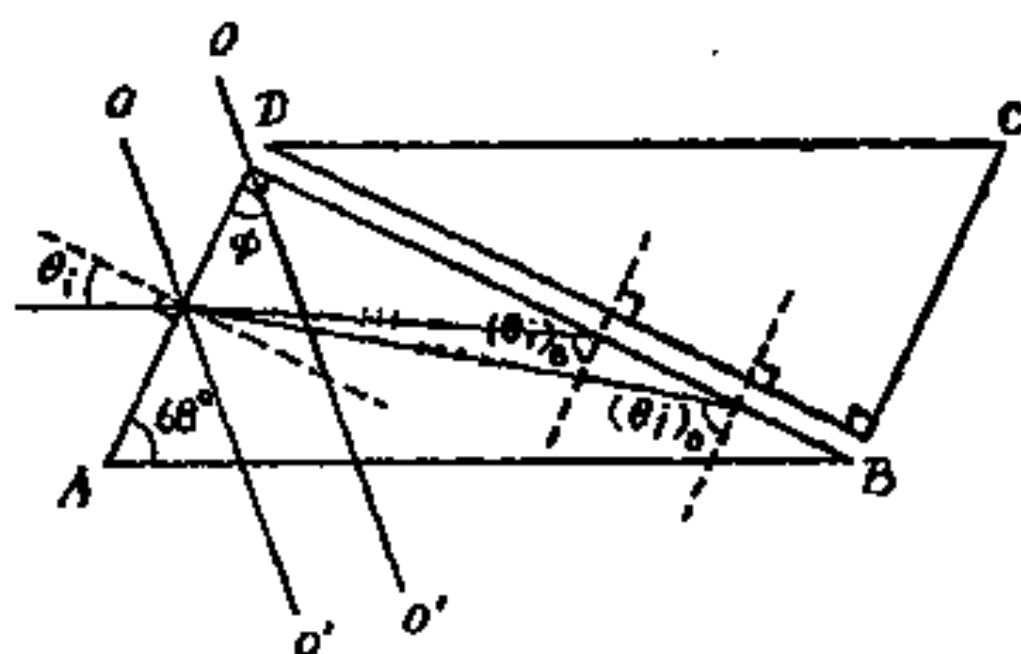


图 110

$$\because \angle A = 68^\circ$$

$$\therefore \theta_i = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

光轴  $OO'$  就在纸面内 (纸面是主平面)

已知  $\phi = 48^\circ$ , 光经  $AD$  面折射后分为  $o$  光 (垂直纸面振

动)、 $e$ 光(平行纸面振动)

设 $e$ 、 $o$ 二光的折射角分别为 $\theta'_1$ 、 $\theta'_0$ ，由折射定律

$$\sin\theta_1 = n_o \sin\theta'_0$$

所以 $o$ 光的折射角

$$\theta'_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n_o} \sin 22^\circ\right) = 13.06^\circ$$

$$\text{又 } \sin\theta_1 = n_e(\theta) \sin\theta'_0 \quad (1)$$

要求得 $\theta'_0$ ，必须先求得 $n_e(\theta)$ ，由9—23题结果知

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n_o(n_o n_o \sin\varphi \cos\varphi \pm \sin\theta_1 \sqrt{n_o^2 \sin^2\varphi + n_o^2 \cos^2\varphi - \sin^2\theta_1})}{n_o(n_o^2 \sin^2\varphi - \sin^2\theta_1)}$$

取“+”号时

$$\operatorname{tg}\theta = 1.4954, \quad \theta = 56.23^\circ$$

取“-”号时

$$\operatorname{tg}\theta = 0.5496, \quad \theta = 28.79^\circ$$

其中 $\theta$ 是 $e$ 光传播方向与光轴 $OO'$ 之夹角，显然、 $\theta = 28.79^\circ$ 是不合理的，舍去。

$$\therefore n_e(\theta) = \frac{n_o n_o}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_o^2 \cos^2\theta}} = 1.5333 \quad (2)$$

把(2)式结果代入(1)式，得

$$\theta'_0 = \sin^{-1}\left[\frac{1}{n_e(\theta)} \sin 22^\circ\right] = 14.14^\circ$$

由图110可见在 $BD$ 面的入射角

$$(\theta_1)_o = 90^\circ - \theta'_0 = 90^\circ - 13.06^\circ = 76.94^\circ$$

$$(\theta_1)_e = 90^\circ - \theta'_0 = 90^\circ - 14.14^\circ = 75.86^\circ$$

在加拿大树胶层表面 $o$ 光全反射临界角



$$(\theta_c)_o = \arcsin\left(\frac{1.55}{1.658}\right) = 69.2^\circ < (\theta_i)_o$$

故 $o$ 光将发生全反射。对于 $e$ 光，因加拿大树胶折射率大于 $n_o(\theta)$ ，故不发生全反射。

**9—48 解** 先求出与各偏振器件相对应的矩阵。

(1) 与晶片 $C$ 对应的矩阵 $M_C$

设入射光之琼斯矢量为

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

晶片的快轴沿 $\xi$ 方向，慢轴沿 $\eta$ 方向， $\xi$ 轴与 $x$ 轴夹角为 $\alpha$ （如图111）

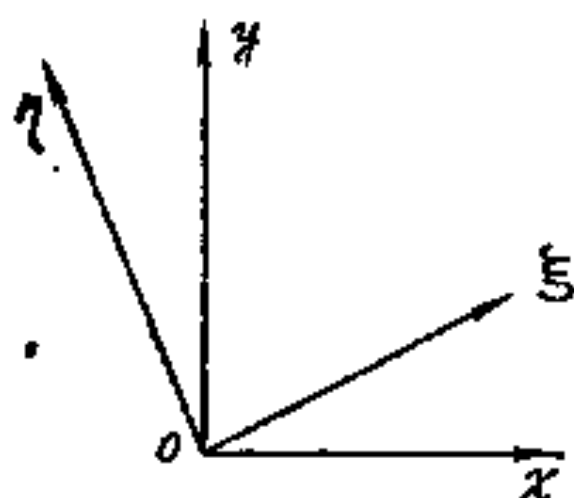


图 111

$$\therefore E_\xi = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha$$

$$E_\eta = (-E_x \sin \alpha + E_y \cos \alpha)e^{i\delta}$$

通过晶片后的琼斯矢量 $\vec{E}'$ 应为

$$\vec{E}' = \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_\xi \cos \alpha - E_\eta \sin \alpha \\ E_\xi \sin \alpha + E_\eta \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha e^{i\delta}) E_x + \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\delta}) E_y \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\delta}) E_x + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha e^{i\delta}) E_y \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_C = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha e^{i\delta} & \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\delta}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\delta}) & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

在本题中，取  $\alpha = 0$  即晶片快轴在  $xoz$  平面中，则

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

(2) 和起偏器对应的矩阵  $M_P$  及和检偏器  $A$  对应的矩阵  $M_A$

设  $P$  的透光方向与  $x$  轴之夹角为  $\phi$  (如图112)，用与上面类似的方法，很容易求得

$$M_P = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

同理可得

$$M_A = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

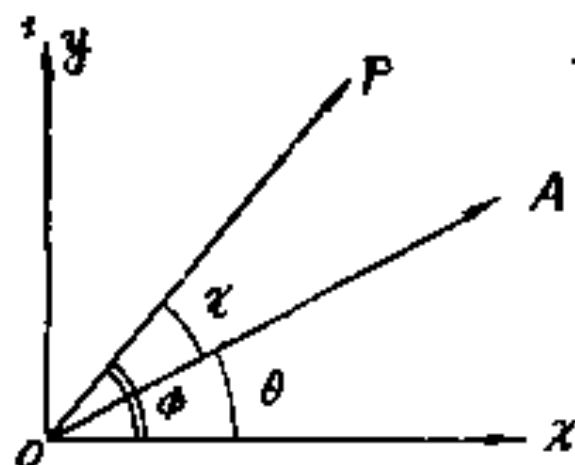


图 112

故和  $PCA$  系统相对应的总作用矩阵为

$$M = M_A M_C M_P$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + e^{i\delta} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi & \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi + e^{i\delta} \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi \\ \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi + e^{i\delta} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi & \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi + e^{i\delta} \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

(3) 求相干矩阵

因为入射光是自然光，其相干矩阵

$$J = \frac{1}{2} I_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以，出射光相干矩阵

$$J' = MJM^+$$

式中  $M^+$  表示  $M$  的共轭矩阵。关于此式之证明见本题的附注。

出射光强

$$I = T_r J' = J'_{11} + J'_{22}$$

算得

$$J'_{11} = \frac{I_0}{2} \{ \cos^4 \theta \cos^4 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^4 \phi + \cos^3 \theta \sin \theta \cos \phi \\ \times \sin \phi (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \}$$

$$J'_{22} = \frac{I_0}{2} \{ \sin^4 \theta (\sin^4 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^4 \phi + \cos \theta \sin^3 \theta \cos \phi \\ \times \sin \phi (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \}$$

$$\begin{aligned} J'_{11} + J'_{22} &= \frac{I_0}{2} \{ \sin^4 \phi \sin^2 \theta + \cos^4 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ &\quad + 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \cos \delta \} \\ &= \frac{I_0}{2} \{ \sin^4 \phi \sin^2 \theta + (1 - \sin^2 \phi)^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + \cos^2 \phi \sin^2 \phi + 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \cos \delta \} \\ &= \frac{I_0}{2} \{ \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^4 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \phi + 2 \cos \theta \sin \theta \\
& \times \cos \phi \sin \phi \cos \delta \} \\
& = \frac{I_0}{2} \{ \sin^4 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \\
& \quad - 2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \cos \delta \} \\
& = \frac{I_0}{2} \{ \sin^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \\
& \quad - \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \cos \delta \} \\
& = \frac{I_0}{2} \{ \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \phi + 2 \cos \theta \sin \theta \\
& \quad \times \cos \phi \sin \phi \cos \delta + 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \\
& \quad - 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \} \\
& = \frac{I_0}{2} \{ (\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta)^2 \\
& \quad - 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi (1 - \cos \delta) \} \\
& = \frac{I_0}{2} \{ \cos^2 (\phi - \theta) - \sin 2\theta \sin 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \}
\end{aligned}$$

用同样的方法不难证明，当取本题 (1) 中之  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，即晶片快轴在  $yoz$  平面中时，虽然  $M_c$  与  $\alpha = 0$  时不同，但最后得到的  $(J'_{11} + J'_{22})$  与这里的结果一致。

由图 112 可见

$$\theta = \phi - \alpha$$

$$\text{故 } I = \frac{I_0}{2} \left\{ \cos^2 \alpha - \sin 2(\phi - \alpha) \sin 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}$$

证毕

附注

以  $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$  表通过偏振器件前之琼斯矢量，则其相干矩阵

$$J = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^* & E_y^* \end{bmatrix} = \vec{E} \vec{E}^+$$

以  $\vec{E}'$  表示通过偏振器件后之琼斯矢量，则

$$\vec{E}' = M \cdot \vec{E}$$

对应之相干矩阵

$$\begin{aligned} J' &= \vec{E}' \vec{E}'^+ = (M \vec{E}) (\vec{E}^+ M^+) \\ &= M (\vec{E} \cdot \vec{E}^+) M^+ = M J M^+ \end{aligned}$$

9—51 证 由 9—48 题的结果，透射光强

$$\begin{aligned} I &= J'_{11} + J'_{22} \\ &= \frac{I_0}{2} \{ (\sin\phi \sin\theta + \cos\phi \cos\theta)^2 \\ &\quad - 2\cos\theta \sin\theta \cos\phi \sin\phi (1 - \cos\delta) \} \\ &= \frac{I_0}{2} \left\{ \cos^2(\theta - \phi) - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\phi (1 - \cos\delta) \right\} \end{aligned}$$

在本题中，由题意知

$$\phi = \alpha, \quad \theta = \beta$$

$$\therefore I = \frac{I_0}{2} \left\{ \cos^2(\beta - \alpha) - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta (1 - \cos\delta) \right\}$$

$I$  取极值的条件是  $\frac{dI}{d\beta} = 0$

$$\therefore \frac{dI}{d\beta} = \frac{I_0}{2} \{-\sin 2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \cos 2\beta (1 - \cos \delta)\}$$

$$= \frac{I_0}{2} \{-\sin 2\beta \cos 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha \\ - \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cos 2\beta \cos \delta\}$$

$$= \frac{I_0}{2} \{-\sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\beta \cos \delta\} = 0$$

$$\therefore \sin 2\beta \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 2\beta \cos \delta$$

以  $\cos 2\alpha \cos 2\beta$  除以上式两侧，得

$$\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta$$

因此，当  $\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta)$  时，透射光强  $I$  取极值，这个极值可能是极大，也可能是极小，欲判定究竟是极大还是极小，须求  $\frac{d^2 I}{d\beta^2}$ 。

不难证明

$$\frac{d^2 I}{d\beta^2} = - \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta)^2}} \cdot \frac{\cos^2 \delta}{\cos 2\alpha}$$

可见， $\frac{d^2 I}{d\beta^2}$  之正负仅取决于  $\cos 2\alpha$ 。

当  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  时  $\cos 2\alpha > 0$ ，则  $\frac{d^2 I}{d\beta^2} < 0$  所以  $I$  为极大值。

当  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  时  $\cos 2\alpha < 0$ ，则  $\frac{d^2 I}{d\beta^2} > 0$  所以  $I$  为极小值。

9—57 解 (1) 如图 113,  $N_1$ 、 $N_2$  是正交的尼科耳棱镜，

$C$  是厚度为  $e$  的晶片,  $G$  是光栅,  $L$  是会聚透镜,  $P$  是观察屏。

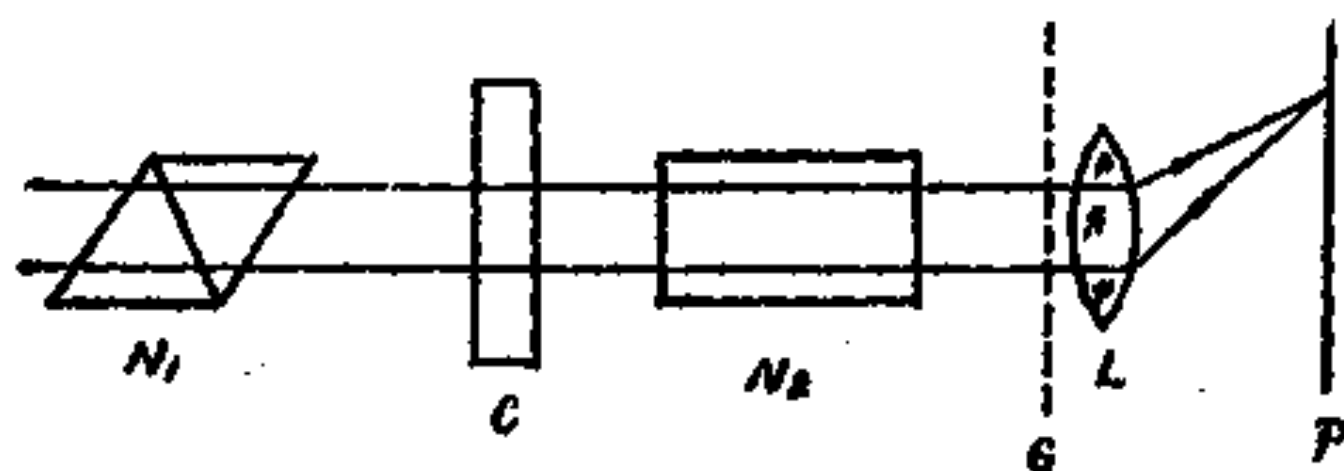


图 113

由 9—48 题结果,

$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ \cos^2 x - \sin 2(\phi - x) \sin^2 \phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}$$

$\because N_1, N_2$  分别是起偏器和检偏器

已知  $x = 90^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$

$$\therefore I = \frac{I_0}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

式中  $\delta$  是通过晶片  $C$  后, 二线偏振分量间的位相差, 即

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$$

入射的白光中, 满足  $\delta = 2m\pi$  的那些波长的光, 干涉结果得暗纹。即

$$\frac{(n_o - n_e) d}{\lambda_m} = m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

是暗纹条件。

在经过光栅展成的光谱上，各 $\lambda_m$ 处应得暗纹。所以在观察屏上观察到的是在明亮的连续光谱上呈现出不等距排列的暗线，

(2)  $m$  序和  $n$  序暗线分别满足

$$\frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_m} = m, \quad \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_n} = n$$

以上二式相减得

$$(n_o - n_e) \left( \frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_n} \right) d = m - n$$

$$d = \frac{m - n}{n_o - n_e} \cdot \frac{\lambda_m \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_m}$$

已知： $\lambda_m = \lambda_1 = 5000 \text{ \AA}$ ， $\lambda_n = \lambda_2 = 6000 \text{ \AA}$

$m - n = 400$ ， $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$

代入得

$$d = \frac{400}{(1.658 - 1.486)} \times \frac{5000 \times 6000}{(6000 - 5000)} = 6.98 \times 10^7 \text{ \AA}$$

$$= 6.98 \text{ mm}$$

9—65 解 (1) 如图 62， $o$  光垂直其主平面（纸面）振动，始终遵守在各向同性媒质中的折射、反射定律，所以在出射界面处 $o'$ 光垂直界面出射。对于 $e$ 光，在 $B$ 点反射时不遵守一般反射定律。设其反射角为 $\theta_r$ ，已知入射角 $\theta_i = 45^\circ$ ，则有

$$n_o \sin \theta_i = n_e(\theta) \sin \theta_r$$

因为从 $B$ 到 $C$ 的 $o$ 光和从 $B$ 到 $C$ 的 $e$ 光夹角很小，由提示



$$n_o(\theta) \approx n_o = 2.233$$

$$\because \theta_i = 45^\circ$$

$$\therefore \theta_r = \arcsin\left[\frac{n_e}{n_o} \sin 45^\circ\right] \approx 43^\circ$$

在  $D$  处  $e$  光反射时有

$$n_o \sin \theta_r = n'_e(\theta) \sin \theta'_r$$

$$\text{即 } n'_e(\theta) = \frac{n_o \sin \theta_r}{\sin \theta'_r} \quad (1)$$

$$\because n'_e(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \quad (2)$$

式中  $\theta$  是在  $D$  点的反射线  $DF$  与光轴之夹角。

$$\theta \approx \theta_r + \theta'_r = 43^\circ + \theta'_r \quad (3)$$

由 (1)、(2) 两式消去  $n'_e(\theta)$ ，并将 (3) 式代入，得

$$\frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 (43^\circ + \theta'_r) + n_e^2 \cos^2 (43^\circ + \theta'_r)}} = \frac{n_o \sin 43^\circ}{\sin \theta'_r}$$

然后整理得

$$\begin{aligned} & \text{tg}^2 \theta'_r (n_o^2 \sin^2 43^\circ \cos^2 43^\circ + n_e^2 \sin^4 43^\circ - n_o^2) \\ & + \text{tg} \theta'_r 2 \sin^3 43^\circ \cos 43^\circ (n_o^2 - n_e^2) + (n_o^2 \sin^4 43^\circ \\ & + n_e^2 \sin^2 43^\circ \cos^2 43^\circ) = 0 \end{aligned}$$

代入所给的  $n_o$ 、 $n_e$  值得

$$2.4 \text{tg}^2 \theta'_r - 0.16 \text{tg} \theta'_r - 2.2 = 0$$

解得

$$(\theta'_r)_1 = 44.76^\circ, (\theta'_r)_2 = -42.77^\circ$$

显然负值不合题意，略去。

$$\therefore \theta'_r = 44^\circ 46'$$

$\therefore$  o 光在 C 点的反射角是  $45^\circ$

$\therefore$  o 光、e 光近似平行。

(2) 加半波电压后不影响 B 点的反射情况，但是从 B 点出发的 o 光到 C 点反射时变成 e 光了，用 I 表示，而从 B 点出发的 e 光到 D 点反射时变成 o 光了，用 II 表示。（见图 114）

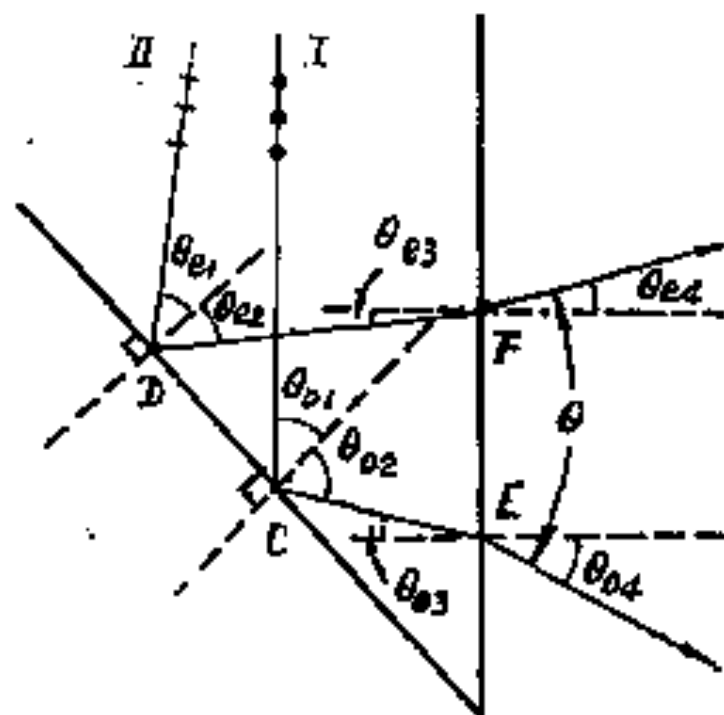


图 114

具体计算

I：在 C 点由

$$n_o \sin \theta_{o1} = n_e(\theta) \sin \theta_{o2}$$

已知  $\theta_{o1} = 45^\circ$ ,  $n_o = 2.233$ , CE 近似垂直于光轴，由提示

$$n_e(\theta) \approx n_e = 2.154$$

得

$$\theta_{o2} = \arcsin \left[ \frac{n_o}{n_e} \sin 45^\circ \right] = \arcsin(0.733) = 47.14^\circ$$

$$\theta_{03} = \theta_{02} - 45^\circ = 47.14^\circ - 45^\circ \approx 2.14^\circ$$

$$\theta_{04} = \arcsin(n_0 \sin \theta_{03}) = 4.61^\circ$$

II: 根据 (1) 中结果, 在 B 点的反射角

$$\theta_r \approx 43^\circ$$

在 D 点的入射角

$$\theta_{01} = \theta_r = 43.01^\circ$$

此时 e 光变成 o 光, 遵守一般反射定律,

$$\therefore \theta_{02} = \theta_{01} = 43.01^\circ$$

$$\theta_{03} = 45^\circ - 43.01^\circ \approx 1.99^\circ$$

在 F 点由折射定律

$$n_0 \sin \theta_{03} = \sin \theta_{04}$$

$$\theta_{04} = \arcsin(n_0 \sin 1.99^\circ) \approx 4.45^\circ$$

二光分开角为

$$\theta = \theta_{04} + \theta_{03} = 4.61^\circ + 4.45^\circ = 9.06^\circ$$

### 备 注

关于书中计量单位的说明:

$$1. \quad 1 \text{ atm} \approx 101325 \text{ Pa},$$

$$2. \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}.$$

## 参 考 书

- [ 1 ] M·玻恩、E·沃耳夫:《光学原理》,上册,科学出版社(1985)。
- [ 2 ] M·玻恩、E·沃耳夫:《光学原理》,下册,科学出版社(1981)。
- [ 3 ] 赵凯华、钟锡华:《光学》,上、下册北京大学出版社(1984)。
- [ 4 ] A·加塔克:《光学》,机械工业出版社,(1984)。
- [ 5 ] E·赫克特、A·赞斯:《光学》,上册,人民教育出版社(1979)。
- [ 6 ] E·赫克特、A·赞斯:《光学》,下册,人民教育出版社(1980)。
- [ 7 ] 张以谟:《应用光学》,上、下册,机械工业出版社(1982)。
- [ 8 ] 梁铨廷:《物理光学》,机械工业出版社(1980)。
- [ 9 ] G·R·福尔斯:《现代光学导论》,上海科学技术出版社(1980)。
- [ 10 ] J·W·顾得门:《傅里叶光学导论》,科学出版社(1979)。
- [ 11 ] 饭塚启吾:《光学工程学》,机械工业出版社(1982)。
- [ 12 ] 王其祥:《工程光学原理》,江苏科学技术出版

社 (1983)。

[13] Б.Б. 费菲洛夫:《应用光学习题集》, 机械工业出版社 (1959)。

[14] 梁铨廷:《物理光学理论与习题》, 机械工业出版社 (1985)。

[15] M. 鲁索、J.P. 马蒂厄:《物理光学习题集》, 科学出版社 (1981)。

[16] T. 塔米尔:《集成光学》, 科学出版社, (1982)。

[17] G.B. 派仑脱、B.J. 汤普森:《物理光学札记》, 科学出版社 (1980)。

[18] 蓝信钜等:《激光技术》, 湖南科学技术出版社 (1981)。

[19] Jenkins, F. A. and Whit, H. E.,  
Fundamentals of Optics, New York,  
McGraw-Hill (1976) .

[20] Smith, E. G. and Thomson, J. H., Optics,  
Printed by J. W. Arrowsmith Ltd, Bristol,  
England.

[21] Ghatak, A. K. and Thyagarajaw, K.,  
Contemporary Optics, New York,  
Plenum Press (1978) .

[22] Miles V. Klein, Optics, New York,  
Wiley (1970) .

[23] Eugene Hecht, Theory and Problems of  
Optics, New York, McGraw-Hill (1975) .