

一、计算下列各题，并写出必要的步骤。(共10 小题，每小题 8 分，共80 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$.

3. 求双曲抛物面 $4x^2 - z^2 = y$ 与平面 $x + y + z = 3$ 的交线在 $P(1, 3, -1)$ 处的切线方程.

4. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性,

偏导数的存在性及可微性.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \arctan x}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = e^3$,

求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

7. 设销售收入 R (单位: 万元) 与花费在两种广告宣传上的费用 x, y (单位: 万元)

之间的关系为 $R = \frac{200x}{x+5} + \frac{100y}{10+y}$, 利润额相当于五分之一的销售收入, 并要扣除

广告费用. 已知广告费用总预算金是 25 万元, 试问如何分配两种广告费用可使利润最大.

8. 设 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, 求该函数(1)的单调区间和极值;(2)所确定曲线的凸凹区间;

(3)所确定曲线的渐近线.

9. 求函数 $f(x) = \frac{x}{x-2}$ 在 $x=4$ 处带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式, 并写出 $f^{(n)}(4)$ 的值.

10. 求过平面 $4x-y+3z=1$ 和 $x+5y-z=-2$ 的交线, 且在 y, z 轴有相同截距的平面方程.

二、按要求解答下列各题, 并写出必要的步骤。(共4 小题, 每小题5 分, 共20 分)

11. 计算积分 $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

12. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

13. 若方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$,

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.