数学物理方法作业集

潘逸文[*], 余钊焕[†]
中国广州中山大学物理学院

October 15, 2019

简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 QQ 群文件，或 `https://panyw5.github.io/courses/mmp.html` 以及 `http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html` 找到。

[*]Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn
[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1　第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{e}, \qquad (b)\ 2+\sqrt{2}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \qquad (d)\ \sqrt{3}+i \text{ 的所有 7 次方根} \tag{1.1}$$

2. 定义点集 $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0,R)\}$, 其中 $R>0$, $N=1,2,\ldots \in \mathbb{N}_{>0}$。讨论 S_N 与 S_{N+1} 之间谁是谁的子集，是否真子集，写明推理。

3. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$，其中 $R>0$。求解最大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

4. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|+|z+1|<R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

2　第二周 (9 月 10 日课上交)

0. (若上周没做这道题) 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|+|z+1|<R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域? 是否单连通? 写明推理。

1. 用代数式 (即 $x+iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a,b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a>0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

2. 设 $u(x,y)=e^x \sin y$, $v(x,y)=-e^x \cos y$，并考虑复变函数 $w=u(x,y)+iv(x,y)$。验证 w 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数。

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

4. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=e^x x\cos y - e^x y \sin y$，求其虚部，并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

3　第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算 $I(C_1)=\int_{C_1}\bar{z}dz$ 和 $I(C_2)=\int_{C_2}\bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R>0$，逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R>0$，逆时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1}\frac{\sin(\cos z)}{z}dz\ . \tag{3.1}$$

3. 设复变函数 f 在单连通区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其单连通子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z,\bar{z}) d\bar{z}dz\ , \tag{3.2}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

4 第四周 (9 月 24 日交)

0. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz \ . \tag{4.1}$$

1. 计算围道积分，其中 $n \in \mathbb{N}$，$\lambda \in \mathbb{C}$，

$$\oint_C \left(z + \frac{\lambda}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\ \}. \tag{4.2}$$

2. 计算围道积分, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{z}\ , \qquad C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\ \}\ . \tag{4.3}$$

5 第五周 (10 月 8 日交；作为一次考察)

1. 设函数 $f(z)$ 在 $\overline{N(0, R)}$ 上解析。计算积分

$$\oint_C f(z) \bar{z}^{n+1} dz, \qquad C = \partial N(0, R)\ . \tag{5.1}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$，$R > 0$。

2. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k = (-1)^{k^2}$, $c_k = (-1)^k \frac{e^{ik\theta}}{k}$。分情况 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 讨论级数是否收敛，是否绝对收敛，给出简要说明。

3. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n\ , \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n\ . \tag{5.2}$$

4. 设 $f(z)$ 是 $N(0, 1)$ 内的解析函数。计算 $(1 - z)^{-1} f(z)$ 以原点 $a = 0$ 为中心的泰勒展开（给出泰勒级数通项，用 f 的各阶导数表达）。

5. 考虑 3 个互异复数 $a_i, i = 1, 2, 3$。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)} dz, \tag{5.3}$$

其中 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$。化简最后结果。

6 第七周 (10 月 15 日交)

$$u(x, y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}\ . \tag{6.1}$$

设 $u(x,y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z=x+iy)$ 的实部。

(1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$，并写出函数 $f(z)$ 关于 $z=x+iy$ 的表达式；

(2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类；

(3) 分别以 $z=0$, $z=1$, $z=-1$ 为展开中心，作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1}\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{6.2}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域；

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$ 然后比较)。

7 第八周 (10 月 22 日交)

1. 计算下面函数在 $z=0$ 的留数

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3}\ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^3}\ . \tag{7.1}$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a)\ \frac{1}{\sinh \pi z}, \quad z = ni,\ n \in \mathbb{Z}\ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^2-1}, \quad z = 1\ . \tag{7.2}$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \oint_{|z|=\rho>1} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz\ , \qquad (b) \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n}} dz\ , n = 1, 2, \ldots\ . \tag{7.3}$$

4. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx,\ a > 0\ , \qquad (b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)} dx\ , \quad m \in \mathbb{Z}_+, a > 0 \tag{7.4}$$