

§ 5 n重贝努里概型

一.独立随机试验 设 E_1 与 E_2 是两个随机试验, 如果 E_1 的各个结果与 E_2 的各个结果相互独立, 则称 E_1 与 E_2 是相互独立的随机试验 .

二. n次相互独立试验

如果随机试验 E_1, E_2, \dots, E_n 的各个结果相互独立, 则称 E_1, E_2, \dots, E_n 为相互独立的随机试验.



三. n 次相互独立试验的例子

- 掷 n 次硬币，可看作是 n 次独立试验；
- 某射手对同一目标射击 n 次，可看作是 n 次独立试验；
- 观察 n 个元件的使用寿命，可看作是 n 次独立试验.



例 1

三门火炮向同一目标射击，设三门火炮击中目标的概率分别为0.3，0.6，0.8. 若有一门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为0.2；若两门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为0.6；若三门火炮击中目标，目标被摧毁的概率为0.9. 试求目标被摧毁的概率.

解： 设： $B = \{ \text{目标被摧毁} \}$

$$A_i = \{ \text{有 } i \text{ 门火炮击中目标} \} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$C_i = \{ \text{第 } i \text{ 门火炮击中目标} \} \quad (i = 1, 2, 3)$$



[返回主目录](#)

§ 5 n重贝努里概型

由全概率公式，得

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

而

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(C_1\bar{C}_2\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1C_2\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1\bar{C}_2C_3) \\ &= P(C_1)P(\bar{C}_2)P(\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1)P(C_2)P(\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1)P(\bar{C}_2)P(C_3) \\ &= 0.3 \times 0.4 \times 0.2 + 0.7 \times 0.6 \times 0.2 + 0.7 \times 0.4 \times 0.8 \\ &= 0.332 \end{aligned}$$



[返回主目录](#)

§ 5 n重贝努里概型

$$\begin{aligned}P(A_2) &= P(C_1 C_2 \bar{C}_3) + P(C_1 \bar{C}_2 C_3) + P(\bar{C}_1 C_2 C_3) \\&= P(C_1)P(C_2)P(\bar{C}_3) + P(C_1)P(\bar{C}_2)P(C_3) + P(\bar{C}_1)P(C_2)P(C_3) \\&= 0.3 \times 0.6 \times 0.2 + 0.3 \times 0.4 \times 0.8 + 0.7 \times 0.6 \times 0.8 \\&= 0.468\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_3) &= P(C_1 C_2 C_3) = P(C_1)P(C_2)P(C_3) \\&= 0.3 \times 0.6 \times 0.8 = 0.144\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(B) &= 0.332 \times 0.2 + 0.468 \times 0.6 + 0.144 \times 0.9 \\&= 0.4768\end{aligned}$$



[返回主目录](#)

四. Bernoulli 试验

如果随机试验 E 只有两个结果，则称 E 为Bernoulli试验.

一般地，我们将这两个结果记作 A 与 \bar{A} ，分别称为“成功”与“失败”.

Bernoulli 试验的例子

掷一枚硬币，只有“出现正面”与“出现反面”两种结果，因此“掷一枚硬币”可看作是一次Bernoulli试验.

掷一颗骰子，有六种结果. 但如果我们只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷一颗骰子”也可以看作是Bernoulli试验.



[返回主目录](#)

Bernoulli 试验的例子

- 对同一目标进行一次射击，若只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行一次射击”是Bernoulli试验.
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过100辆车”与“至多通过99辆车”这两种情况，这也是Bernoulli试验.



n 重Bernoulli 试验

- 若独立重复地进行 n 次Bernoulli试验，这里“重复”是指每次试验中事件 A 发生的概率（即每次试验中“成功”的概率）不变，则称该试验为 n 重 Bernoulli 试验.

n 重Bernoulli 试验的例子

- 掷 n 次硬币，可看作是一 n 重 Bernoulli试验.
- 掷 n 颗骰子，如果我们对每颗骰子只关心“出现六点”与“不出现六点”这两种情况，故“掷 n 颗骰子”也可以看作是一 n 重 Bernoulli试验.



n 重Bernoulli 试验的例子

- 对同一目标进行 n 次射击，若每次射击只考虑“击中目标”与“未击中目标”两种情况，则“同一目标进行 n 次射击”是一 n 重Bernoulli试验.
- 在某一时间间隔内观察通过某路口的汽车数，若只考虑“至少通过100辆车”与“至多通过99辆车”这两种情况，这是一次Bernoulli试验. 若独立重复地做该试验 n 次，则它是一 n 重Bernoulli试验.



n 重Bernoulli 试验中的样本点

- n 重Bernoulli 试验中的每一个样本点可记作 $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

其中每一个 ω_i 取 A 或者 \bar{A} , 表示在第 i 次试验中, A 或者 \bar{A} 发生. 这样的样本点共有 2^n 个.



例 2

将一枚硬币掷 5 次，可看作是一 5 重 Bernoulli 试验

令： $A = \{ \text{出现正面} \}$

(A, A, A, A, A) 表示 5 次抛掷全出现正面；

$(A, A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A})$ 表示 5 次抛掷前两次出现正面，
后 3 次出现反面；

$(A, A, \bar{A}, A, \bar{A})$ 表示 5 次抛掷中第 1、2、4 次出现
正面，第 3、5 次出现反面。



n重Bernoulli 试验中基本事件的概率

设在n重Bernoulli 试验
中, $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$,

$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 是一个样本点.

假设在此样本点中, 有 k 个 ω_i 取 A , 其余 $n-k$ 个 ω_i
取 \bar{A} , 则由独立性, 得基本事件

$$\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}$$

的概率为 $p^k q^{n-k}$: $P\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\} = p^k q^{n-k}$.



例 3

将一枚硬币掷 5 次，可看作是一 5 重 Bernoulli 试验

令： $A = \{ \text{出现正面} \}$ 且： $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$

则， $P\{(A, A, A, A, A)\} = p^5$;

$$P\{(A, A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A})\} = p^2 q^3;$$

$$P\{(A, A, \bar{A}, A, \bar{A})\} = p^3 q^2;$$

$$P\{(\bar{A}, A, A, \bar{A}, A)\} = p^3 q^2.$$



n重Bernoulli 试验中恰好成功k次的概率

设在n重Bernoulli 试验中,

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

现考虑事件

$$B_{n, k} = \{n \text{重Bernoulli试验中事件 } A \text{ 恰好发生 } k \text{ 次}\}$$

现求概率 $P(B_{n, k})$:

在 n 次试验中, 指定 k 次出现 A (成功), 其余 $n - k$ 次出现 \bar{A} (失败), 这种指定的方法共有 C_n^k 种.



n重Bernoulli 试验中恰好成功k次的概率

而对于每一种指定好的方法，由前面的讨论可知样本点

$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 的概率都为 $p^k q^{n-k}$. 因此，
(在此样本点中，有 k 个 ω_i 取 A ，其余 $n-k$ 个 ω_i 取 \bar{A})，

$$P(B_{n, k}) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p)$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$$



§ 5 n重贝努里概型

注 意

由二项式定理，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n P(B_{n, k}) &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= (p + q)^n \\ &= 1\end{aligned}$$



[返回主目录](#)

例 4

设在 N 件产品中有 M 件次品，每次从中任意取出一件，有放回地取 n 次．试求取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的概率．

解：

$B = \{ \text{取出的} n \text{件产品中恰有} k \text{件次品} \}$

每取一次只有两种结果：

$A = \{ \text{取出次品} \}, \quad \bar{A} = \{ \text{取出正品} \},$

因此每取一次产品可看作是一次Bernoulli试验



[返回主目录](#)

例 4 (续)

并且,

$$P(A) = \frac{M}{N}, \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{M}{N}$$

因此, 有放回地取 n 件产品可看作是一个 n 重 Bernoulli 试验. 由前面的讨论, 可知

$$P(B) = C_n^k \left(\frac{M}{N} \right)^k \left(1 - \frac{M}{N} \right)^{n-k}$$



例 5

一大批产品的次品率为0.05，现从中取出10件．试求下列事件的概率：

$B = \{ \text{取出的10件产品中恰有4件次品} \}$

$C = \{ \text{取出的10件产品中至少有2件次品} \}$

$D = \{ \text{取出的10件产品中沒有次品} \}$

解：

取10件产品可看作是一10重Bernoulli试验．

$A = \{ \text{取出一件产品为次品} \}$

则 $P(A) = 0.05$



例 5 (续)

所以,

$$P(B) = C_{10}^4 \times 0.05^4 \times 0.95^{10-4} = 9.648 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(\bar{C}) \\ &= 1 - C_{10}^0 \times 0.05^0 \times 0.95^{10} - C_{10}^1 \times 0.05^1 \times 0.95^9 \\ &= 0.08614 \end{aligned}$$

$$P(D) = 0.95^{10} = 0.5987$$



例 6

对同一目标进行射击，设每次射击的命中率均为0.23，问至少需进行多少次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95？

解：

设需进行n次射击，才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95.

$B = \{ n \text{次射击至少命中一次目标} \}$

进行n次射击，可看成是一n重Bernoulli试验.

令： $A = \{ \text{命中目标} \}$ 则， $P(A) = 0.23$



例 6 (续)

则有

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.77^n$$

由题意, 得 $P(B) = 1 - 0.77^n \geq 0.95$

所以, 有 $0.77^n \leq 0.05$

取对数, 得 $n \ln 0.77 \leq \ln 0.05$

所以, 有 $n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.77} = 11.46$

即至少需进行12次射击, 才能使至少命中一次目标的概率不少于0.95.



例 7

某病的自然痊愈率为 0.25，某医生为检验某种新药是否有效，他事先制定了一个决策规则：把这药给 10 个病人服用，如果这 10 病人中至少有 4 个人痊愈，则认为新药有效；反之，则认为新药无效。求：

- (1) 新药有效，并且把痊愈率提高到 0.35，但通过试验却被否定的概率。
- (2) 新药完全无效，但通过试验却被判为有效的概率。



例 7 (续)

解:

给10个病人服药可看作是一10重Bernoulli试验.

$$\text{令: } A = \{\text{某病人痊愈}\} \quad P(A) = 0.35$$

(1) 若新药有效, 则

此时若否定新药, 只有在试验中不到4人痊愈. 因此

$$\begin{aligned} P\{\text{否定新药}\} &= \sum_{i=0}^3 C_{10}^i \times 0.35^i \times 0.65^{10-i} \\ &= 0.5138 \end{aligned}$$



例 7 (续)

(2) 由于新药无效, 则 $P(A) = 0.25$

此时若肯定新药, 只有在试验中至少有4人痊愈. 因此

$$\begin{aligned} P\{\text{肯定新药}\} &= \sum_{i=4}^{10} C_{10}^i \times 0.25^i \times 0.75^{10-i} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^3 C_{10}^i \times 0.25^i \times 0.75^{10-i} \\ &= 0.2241 \end{aligned}$$



说 明

- 在例 7 的第一问中，该医生把有用的药给否定了，这种错误在统计学中称为第 I 类错误（弃真错误），犯这类错误的概率称为 I 类风险；
- 在例 7 的第二问中，该医生把无用的药给肯定了，这种错误在统计学中称为第 II 类错误（取伪错误），犯这类错误的概率称为 II 类风险；



第一章 小 结

- 1 阐述了随机试验的特征以及随机事件之间的关系及运算。
- 2 给出了随机事件的频率及概率的含义和基本性质。
- 3 给出了条件概率的定义及乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。
- 4 给出了随机事件独立性的概念，会利用事件独立性进行概率计算。
- 6 引进贝努里概型及 n 重贝努里试验的概念，要会计算与之相关事件的概率。



[返回主目录](#)