§1 随机事件的概率

目录索引

返回主目录

P&S

一、 随 机 事 件

在生活当中，经常接触到事件的概率，

比如： 降水 概率为 30% ，

某强队对弱队 赢球 的概率为 80% ，

某个固定群体中 男女比例 为 54：46 ；

这种在个别实验中其结果呈现出不确定性；

在大量重复实验中其结果又具有统计规律性的现象，

我们称之为随机现象，概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科。

返回主目录

随机试验（*E*xperiment ）

这里试验的含义十分广泛，它包括各种各样的科学实验，也包括对事物的某一特征的观察。其典型的例子有：

E_1：抛一枚硬币，观察正面H（Heads）、反面T（Tails）出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数。

P&S

随机试验

E_5：记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最高温度。

这些实验具有以下特点：

- 可以在相同的条件下重复进行；
- 每次实验的可能结果不止一个，并且能事先明确实验的所有可能结果；
- 进行一次实验之前不能确定哪一个结果会出现。

样本空间(*S*pace)

定义 将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点。

S_1：{ H , T }

S_2：{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT }

S_3：{ 0, 1, 2, 3 }

S_4：{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

返回主目录

P&S

E_5：记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最高温度。

$S_5:\{0,1,2,3\ldots\ldots\}$

$S_6:\{\, t \mid t \geq 0 \,\}$

$S_7:\{\,(x, y) \mid T_0 \leq x, y \leq T_1 \,\}$

返回主目录

随 机 事 件

定义：

- *随机事件*：称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件；
- *基本事件*：由一个样本点组成的单点集；
- *必然事件*：样本空间 S 本身；
- *不可能事件*：空集$\varnothing$。

我们称一个随机事件发生当且仅当它所包含的一个样本点在试验中出现.

返回主目录

例如：S_2 中事件 A={HHH,HHT,HTH,HTT}

表示“第一次出现的是正面”

S_6 中事件 $B_1=\{t|t<1000\}$

表示“灯泡是次品”

事件 $B_2=\{t|t \geq 1000\}$

表示“灯泡是合格品”

事件 $B_3=\{t|t\geq 1500\}$

表示“灯泡是一级品”

二、 事件间的关系与运算

1^0 包含关系 $A \subset B$

2^0 和事件 $A \bigcup B$

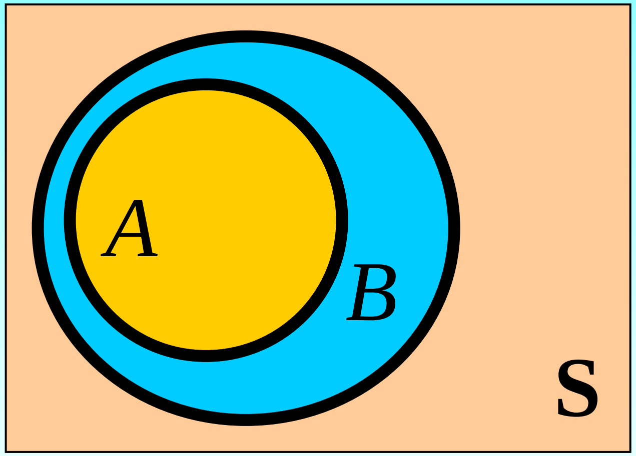
3^0 积事件 $A \bigcap B$

4^0 差事件 $A - B$

5^0 互不相容 $A \bigcap B = \varnothing$

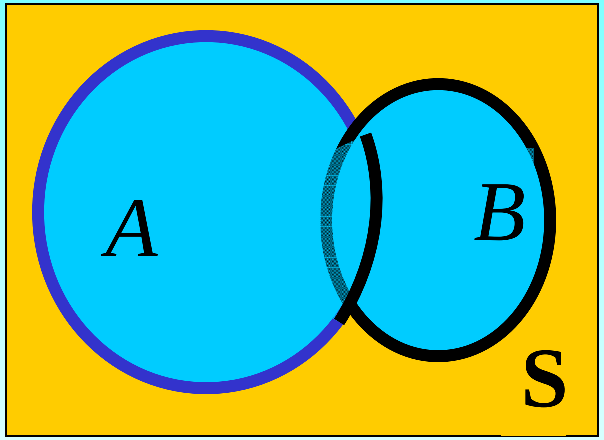
6^0 对立事件 $A \bigcap B = \varnothing$

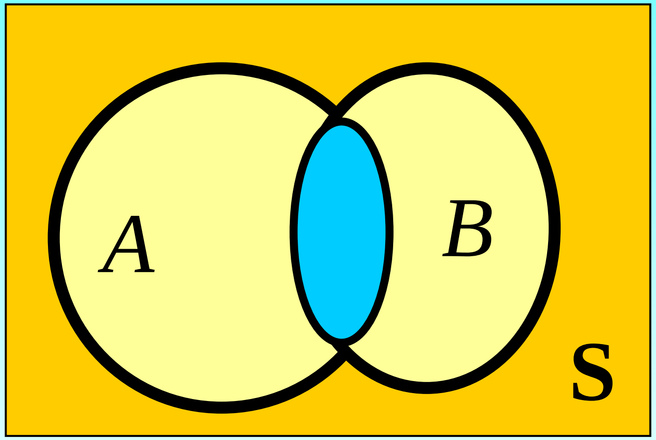
$A \bigcup B = S$



返回主目录

2^0 和事件 $A\bigcup B$ 3^0 积事件 $A\bigcap B$





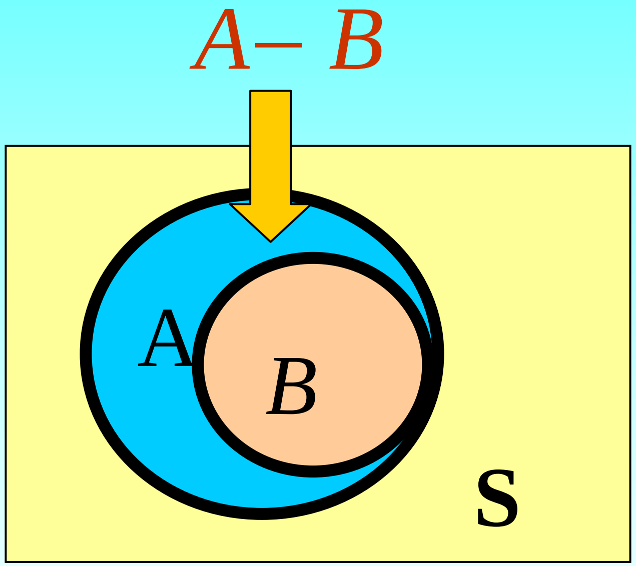
S_2 中事件

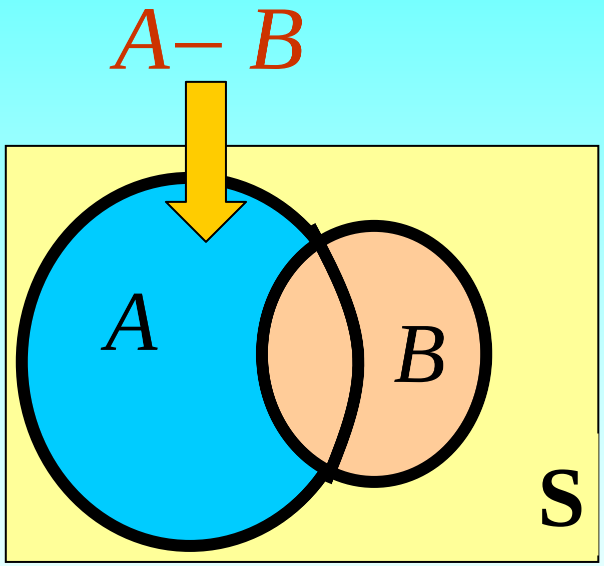
A={HHH,HHT,HTH,HTT}, B={HHH,TTT}

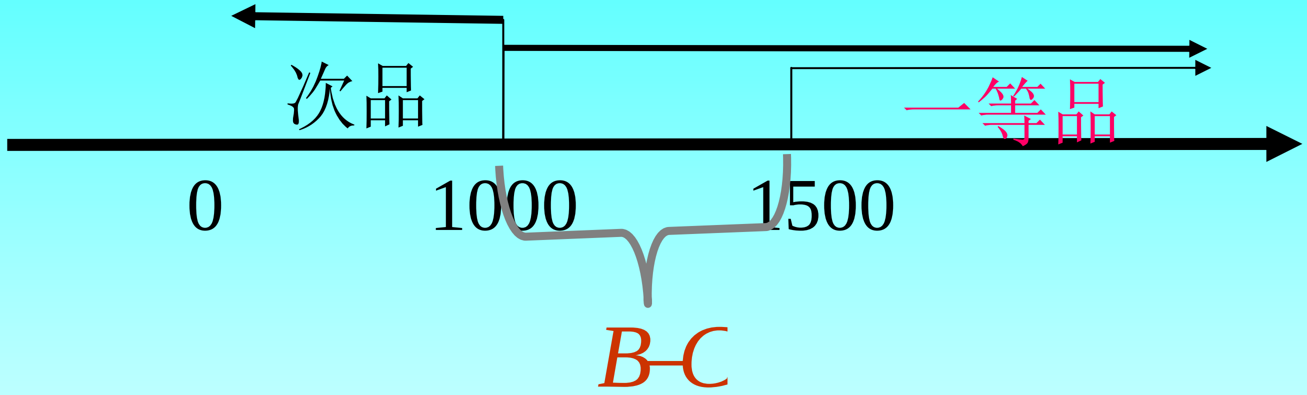
$A\bigcup B$=? $A\bigcap B$=?

返回主目录

4^0　差事件　$A-B$







$S_6: \{\, t \mid t \geq 0 \,\}$中

事件$A = \{\, t \mid t < 1000 \}$ “次品”

事件$B = \{\, t \mid t \geq 1000 \}$ “合格品”

事件$C = \{\, t \mid t \geq 1500 \}$ “一等品”

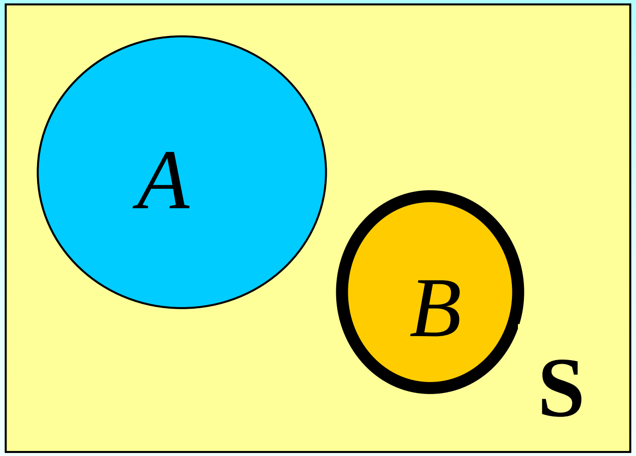
P&S

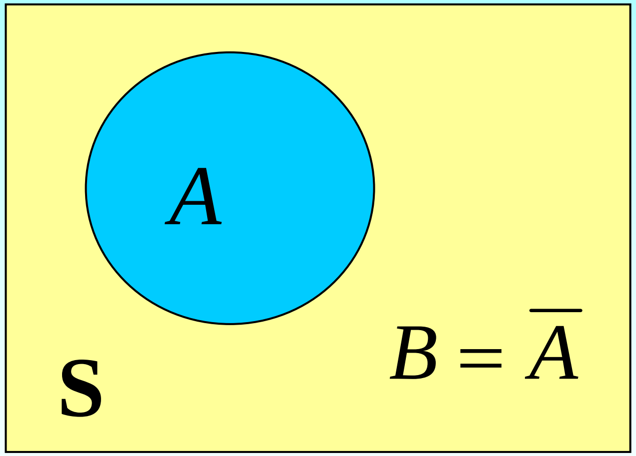
5^0　互不相容

$A \cap B = \varnothing$

6^0　对立事件　$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = S$





随机事件的运算规律

幂等律: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

交换律: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan定律:

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A}_{\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A}_{\alpha}$$

返回主目录

P&S

三、频率与概率

1）　频率的定义和性质

定义 在相同的条件下，进行了n次试验，在这n次试验中，事件A发生的次数n_A称为事件A发生的频数。比值n_A/n称为事件A发生的频率，并记成$f_n(A)$。

它具有下述性质:

$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1$ ；

$2^\circ \quad f_n(S) = 1;$

3°　若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是两两互不相容事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

2） 频率的稳定性

n=500时

n_A	251	249	256	253	251	246	244
$f_n(A)$	0.502	0.498	0.512	0.506	0.502	0.492	0.488
	0.002	-0.002	0.012	0.006	0.002	-0.008	-0.012

实 验 者	n	n_H	$f_n(H)$
德•摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5096
K•皮尔逊	12000	6019	0.5016
K•皮尔逊	24000	12012	0.5005

返回主目录

P&S

事件发生的频繁程度

事件发生的可能性的大小

频　率 → 稳 定 值 → 概率

频率的性质 → 概率的公理化定义

返回主目录

P&S

3） 概率的定义

定义 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，要求集合函数 $P(\bullet)$ 满足下列条件：

1^0 $0 \le P(A)$;

2^0 $P(S)=1$;

3^0 若 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

返回主目录

P&S

4）概率的性质与推广

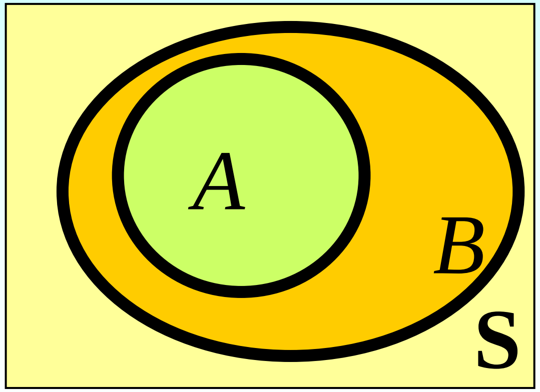
性质 1　$P(\varnothing)=0$;

性质 2　若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质 3　$A \subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$P(B) \geq P(A)$$

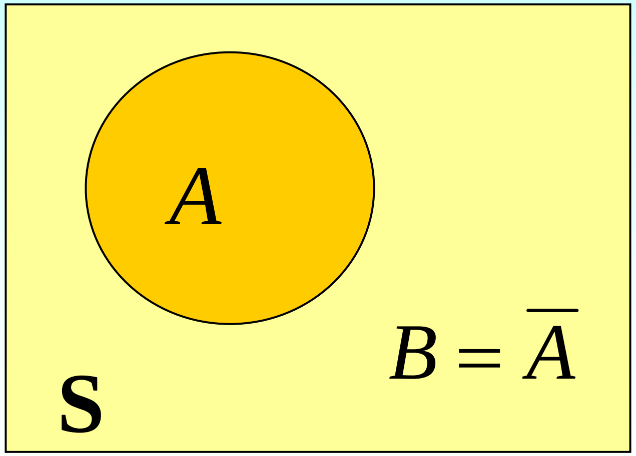


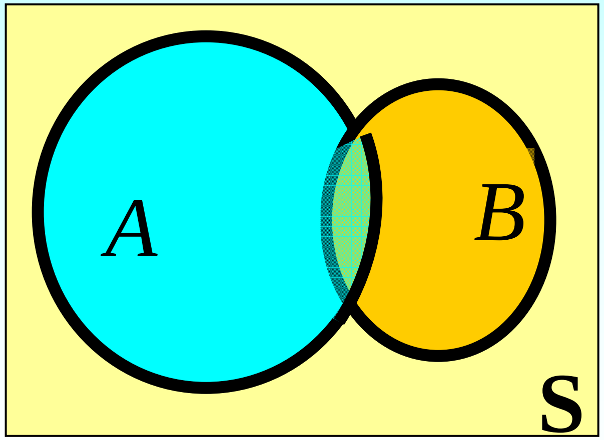
P&S

性质 4　$P(A)\le 1$;

性质 5　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

性质 6　$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。



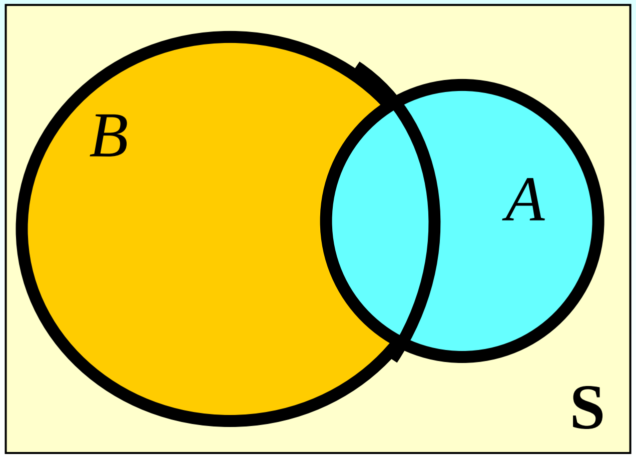


P&S

重 要 推 广

1) $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

2) $$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$



加法公式的推广

对任意 n 个事件 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n$ ，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$- \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$