光的叠加Ⅱ

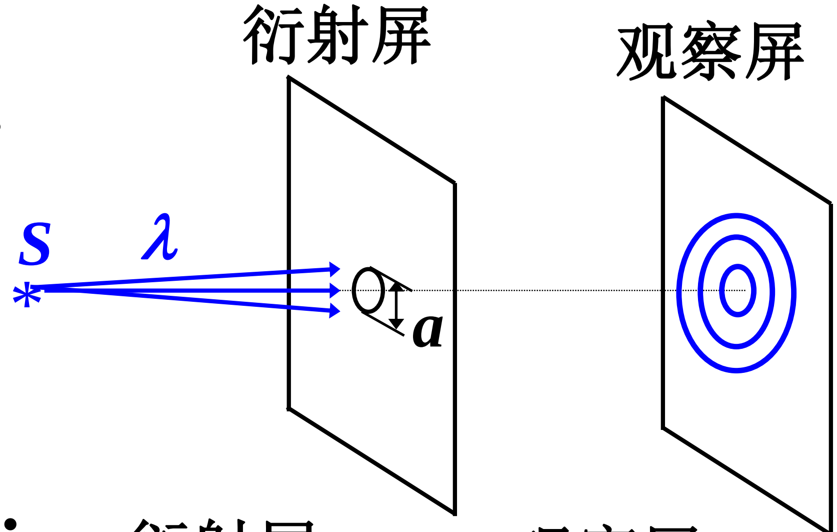
- 衍射现象是波动性的另一重要表现。它也是光相干叠加的结果。

波在传播过程中遇到障碍物，能够绕过障碍物的边缘前进这种偏离直线传播的现象称为衍射现象。

衍射是波的共性。波长较长的波较容易观察到衍射，如无线电波和声波，光波的衍射最早由格利马尔第（Grimaldi）于1665年观察到，1818年菲涅尔解释。

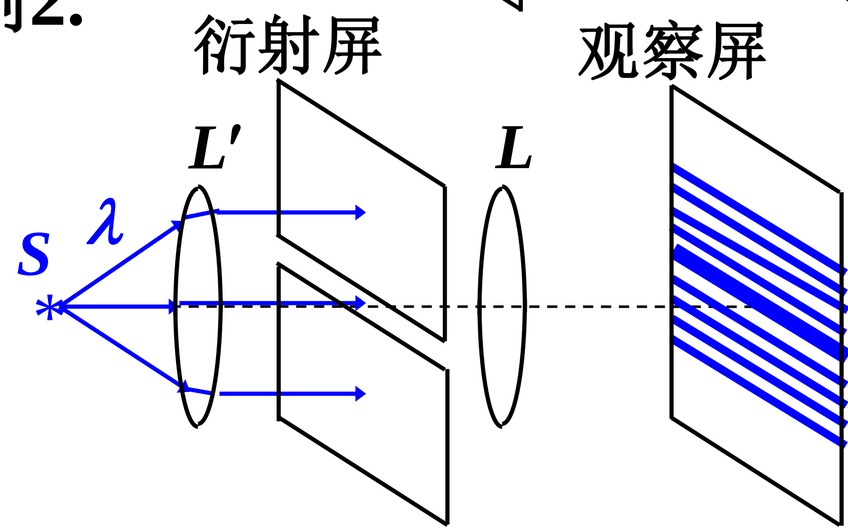
衍射是波动性的重要依据。1924年德布洛意关于物质波的假设，也是由电子衍射实验证实。

例1.

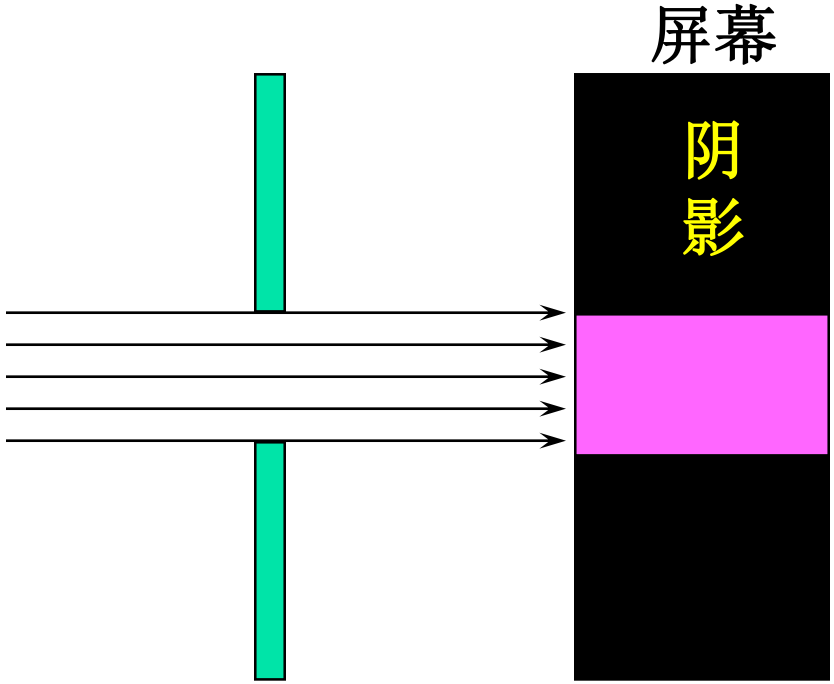


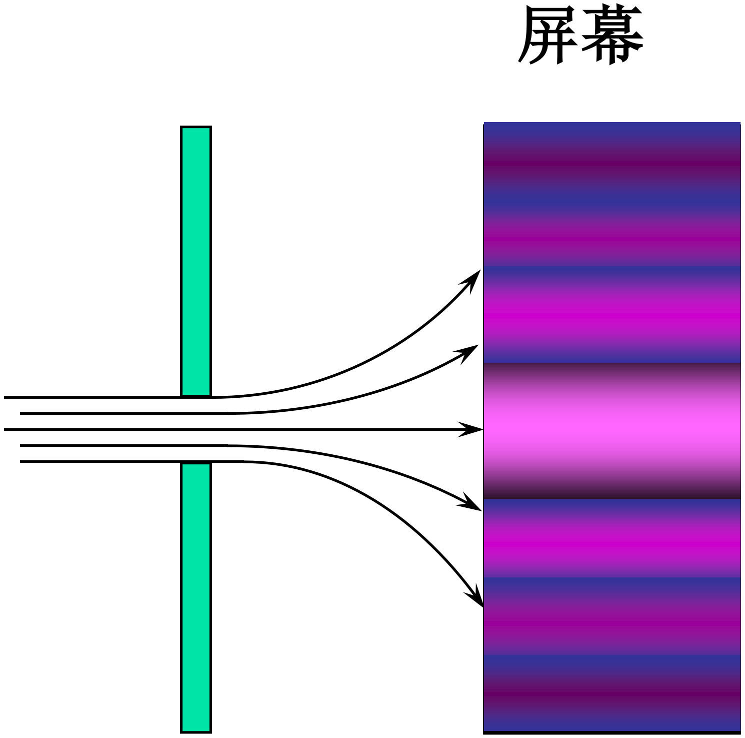
不但光线拐弯，
而且在屏上出现
明暗相间的条纹。

例2.



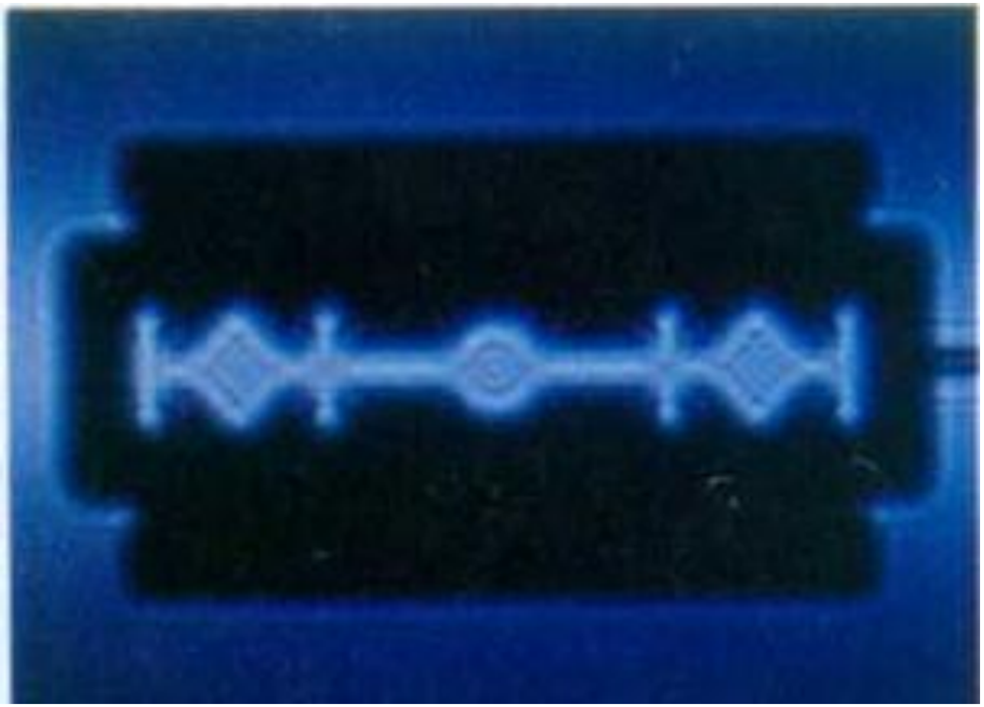
透过手指缝看日光灯，
也能看到衍射条纹。



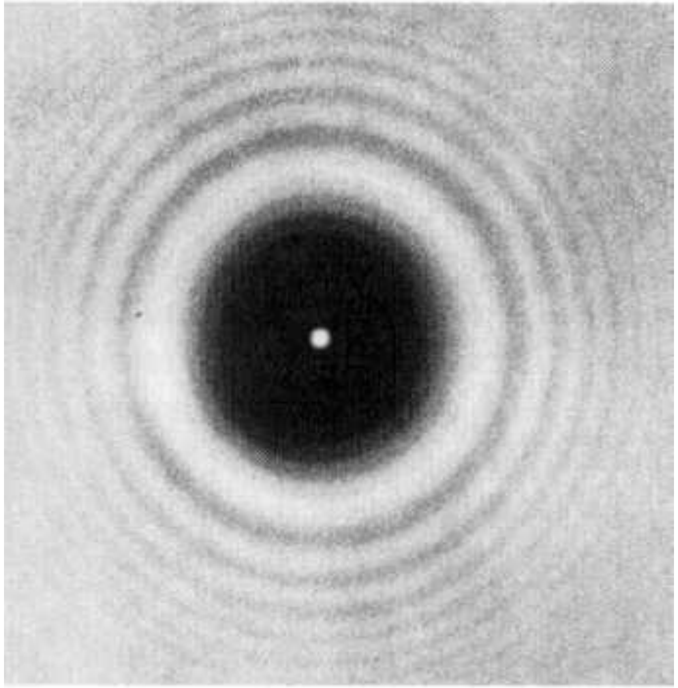


缝较大时，光是直线传播的

缝很小时，衍射现象明显



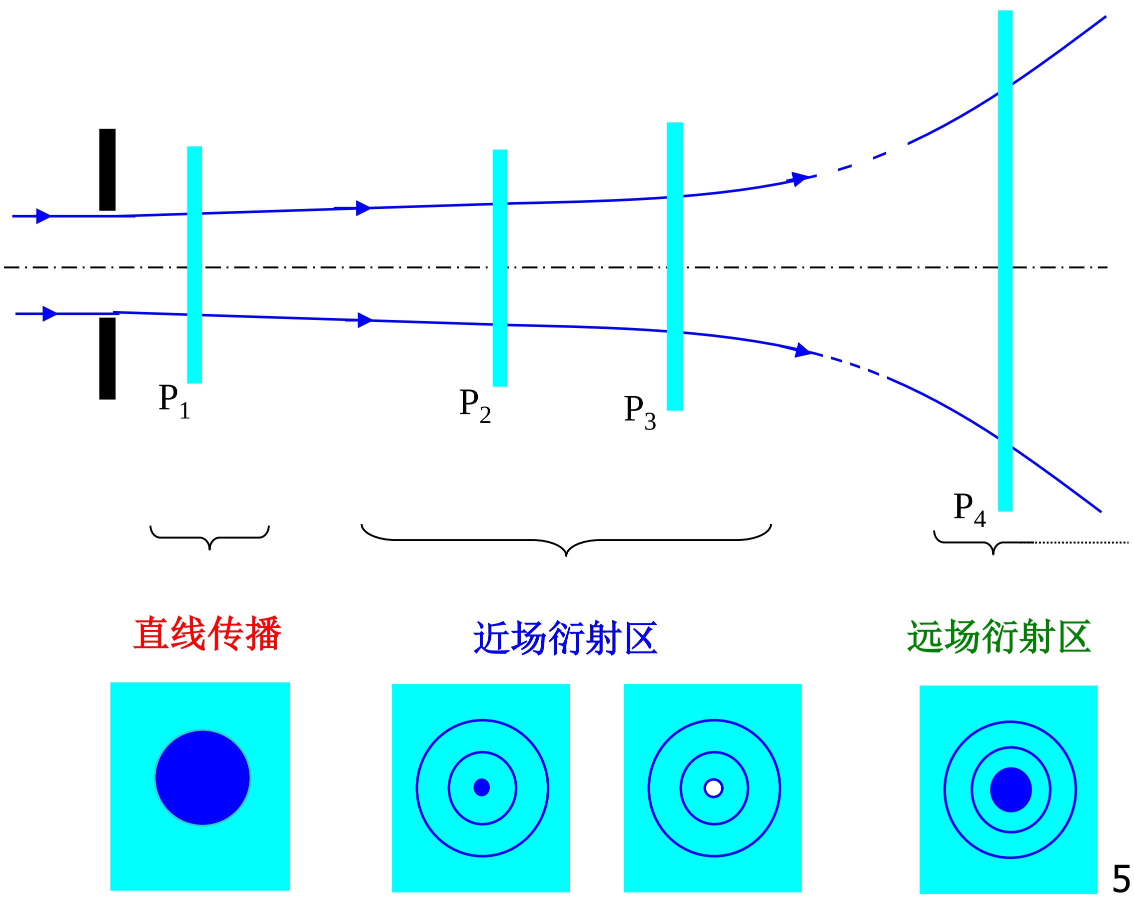
刀片边缘的衍射



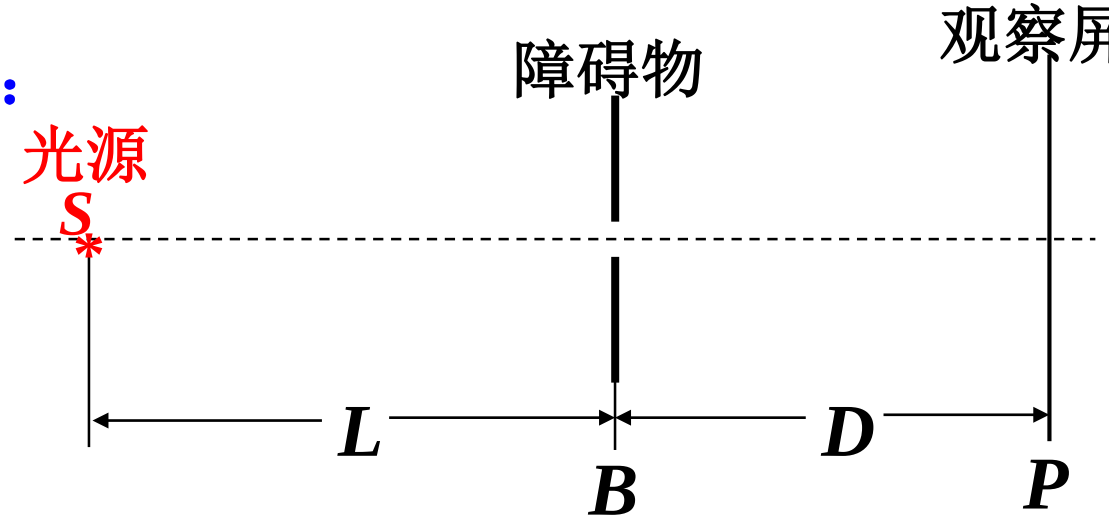
圆屏衍射
（泊松点）

- 不同的观察区域，有不同的观察结果。

例1：平行单色光照到一圆孔上，在孔板后不同处的面上观察光的不同特点



- 衍射的分类：



（1）菲涅耳（**Fresnel**）衍射 — 近场衍射

L 和 *D* 中至少有一个是有限值。

（2）夫琅禾费（**Fraunhofer**）衍射 — 远场衍射

L 和 *D* 皆为无限大（也可用透镜实现）。

- 这种分类是从理论计算上考虑的。菲涅尔衍射是普遍，而夫朗和费衍射仅是它的一个特例。
- 由于夫朗和费衍射的计算要简单的多，因此把它单归一类
- “远”和“近”与衍射孔径D及波长λ的相对大小有关：
  - 对一定的λ，若D越小，衍射现象越明显。
  - 对一定的D，若λ越小，衍射现象越不明显。

    观察衍射现象一般都是在远处，且使λ ～D（衍射现象明显）。
  - 当λ/D→0时，波动光学 → 几何光学

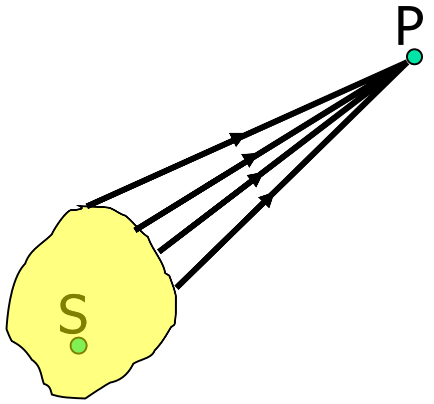
§4.1 惠更斯—菲涅尔原理

- 惠更斯原理（1678年）认为：波前上每一个点都可看做是发出球面子波的波源。
  - 不能说明在不同方向上波的强度分布

菲涅尔1818年将惠更斯的子波概念修正为：

1) 波传到的任意点都是子波的波源；

2) 各子波在空间各点进行相干叠加。



波所到达的任意点都可看作是能发出球面子波的波源，空间中任意点P的振动是包围波源的任意闭合曲面上发出的子波在该点的相干叠加。

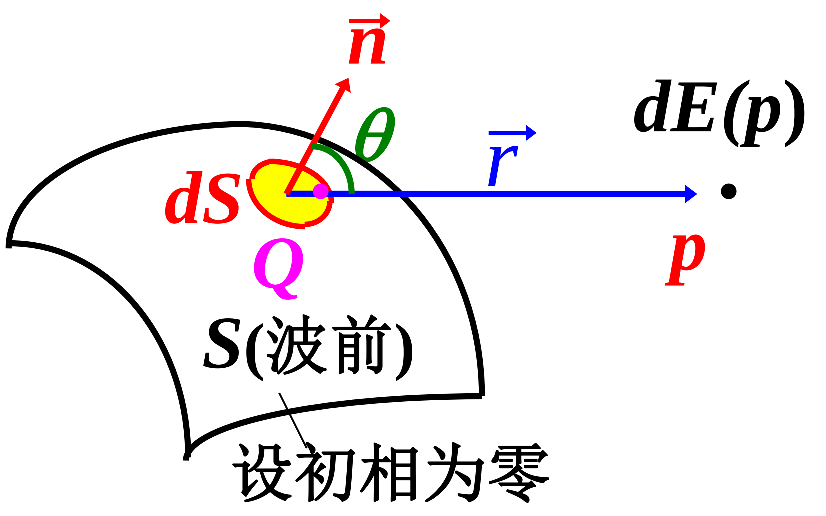
- 衍射问题变成了一个无限多光束的干涉问题。
- 处理问题的关键：计算波源到各面元之间及各面元到场点之间的光程差。

$$dE(p) \propto \underline{F(\theta)}\, E(Q)\, \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

倾斜因子

$$E(p) = \iint_{\Sigma} C \cdot F(\theta) E(Q) \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

菲涅尔衍射公式



- **1882年以后，基尔霍夫（Kirchhoff）解电磁波动方程，也得到了*E*(*p*)的表示式，这使得惠更斯—菲涅耳原理有了波动理论的根据**
- **菲涅尔积分公式给出了定量的结果。不过由于倾斜因子F(θ)的引入是人为的，无具体体的函数形式，使计算复杂化，只能在某些简单情况下有解。**

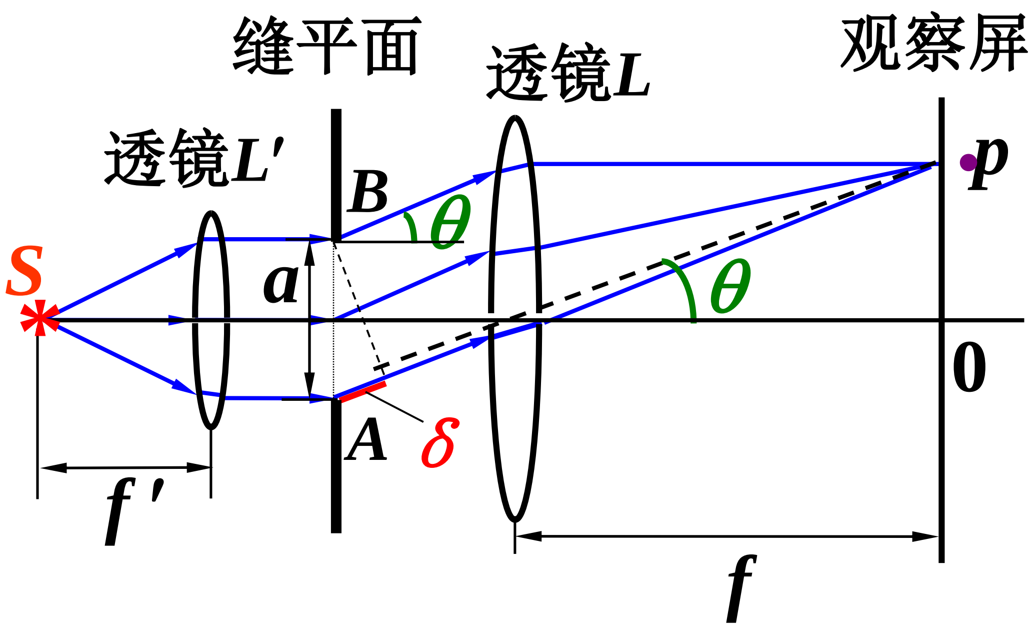
$$F(\theta)\text{：倾斜因子}\begin{cases}\theta=0,\quad F=F_{max}\\ \theta\uparrow\rightarrow F(\theta)\downarrow\\ \theta\geq 90^{o},\quad F=0\end{cases}$$

对于点光源发出的球面波的倾斜因子

$$F(\theta)=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

§4.2 单缝的夫琅禾费衍射

- 装置和光路



S：单色线光源

$\overline{AB} = a$（缝宽）

θ ：衍射角

观察屏上任一点P的振动，可用积分法、半波带法和矢量图法求得

- i° 半波带法

$2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$

▲ $A\to p$和$B\to p$的

光程差为

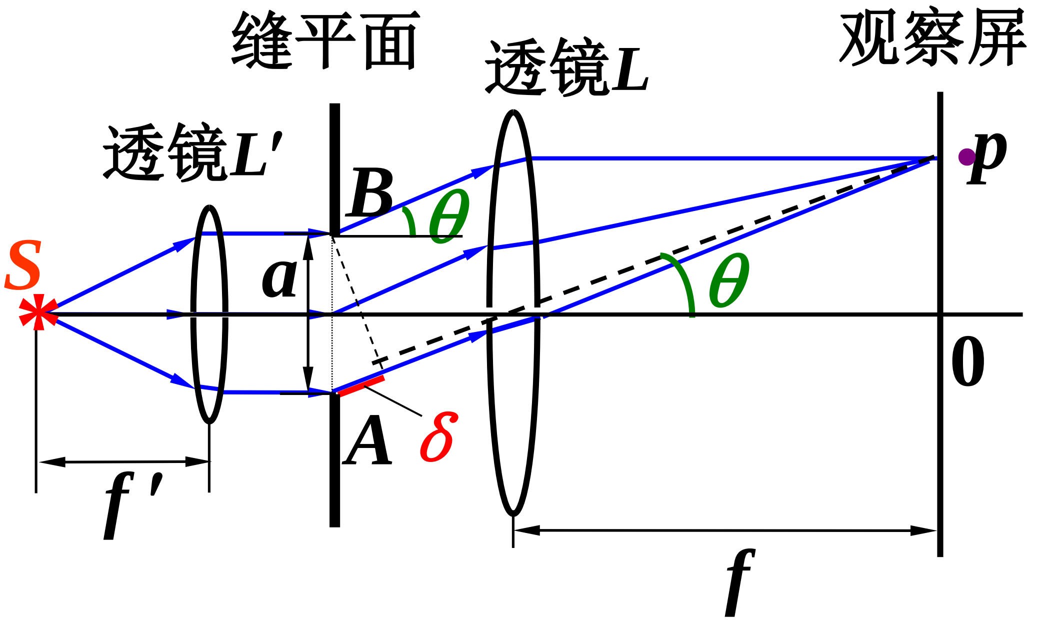
$$\boxed{\delta = a\sin\theta}$$

$\theta = 0,\ \ \delta = 0$

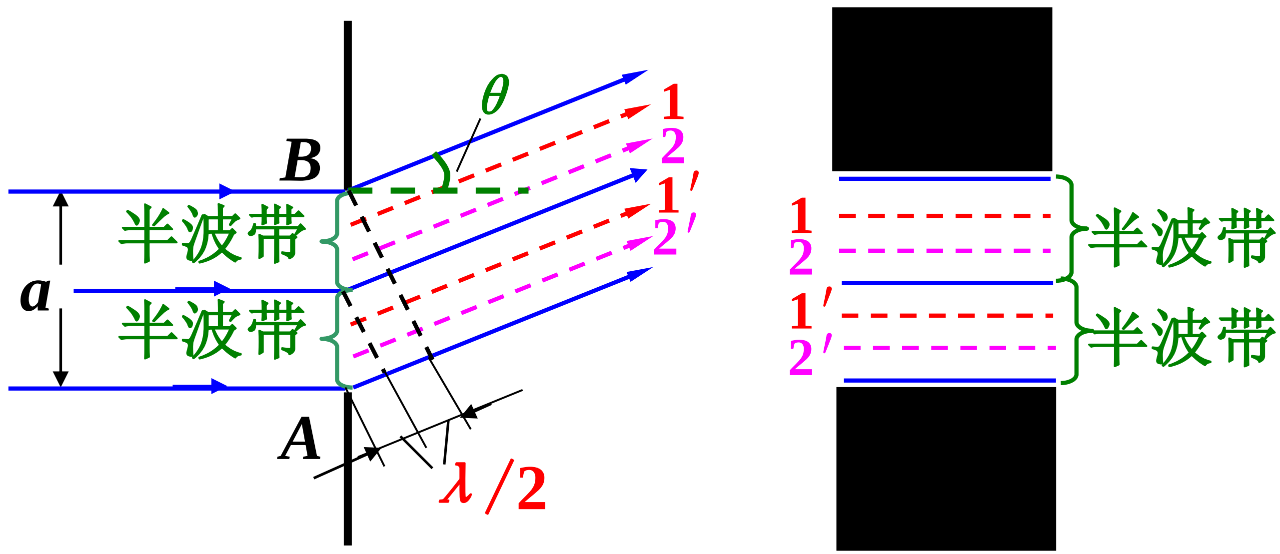
—— 中央明纹（中心）

$\theta\uparrow \to \delta\uparrow \to I_p\downarrow$

（p点明亮程度变差）

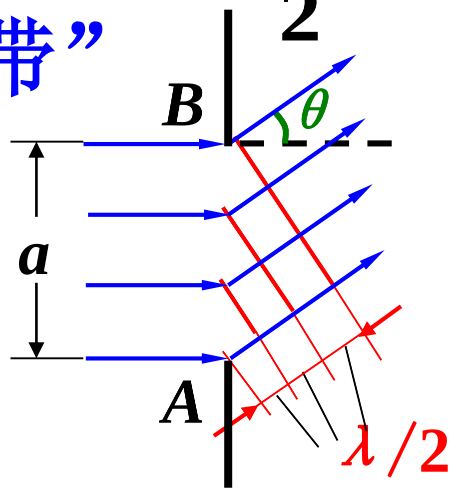


▲ 当 $a\sin\theta=\lambda$ 时，可将缝分为两个“半波带”



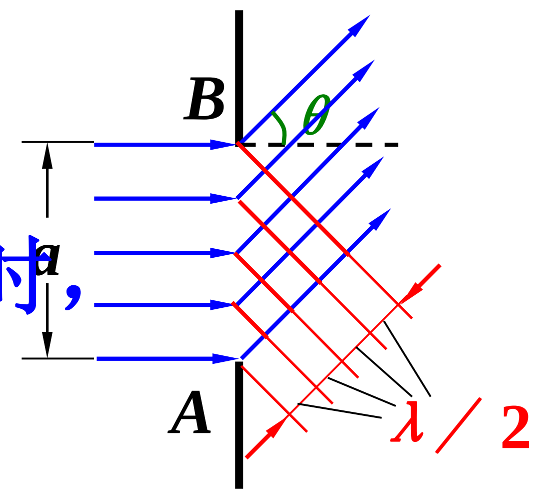
两个“半波带”发的光在*p*处干涉相消形成暗纹。

▲当 $a\sin\theta = \frac{3}{2}\lambda$ 时，可将缝分成三个"半波带"



P处为明纹中心（近似）

▲当$a\sin\theta = 2\lambda$时，可将缝分成四个"半波带"，形成暗纹。



- 一般情况：

$$a\sin\theta=\pm k\lambda,\quad k=1,2,3\cdots$$

——暗纹

$$a\sin\theta=\pm(2k'+1)\frac{\lambda}{2},\qquad k'=1,2,3\cdots$$

——明纹（中心）

$$a\sin\theta=0$$

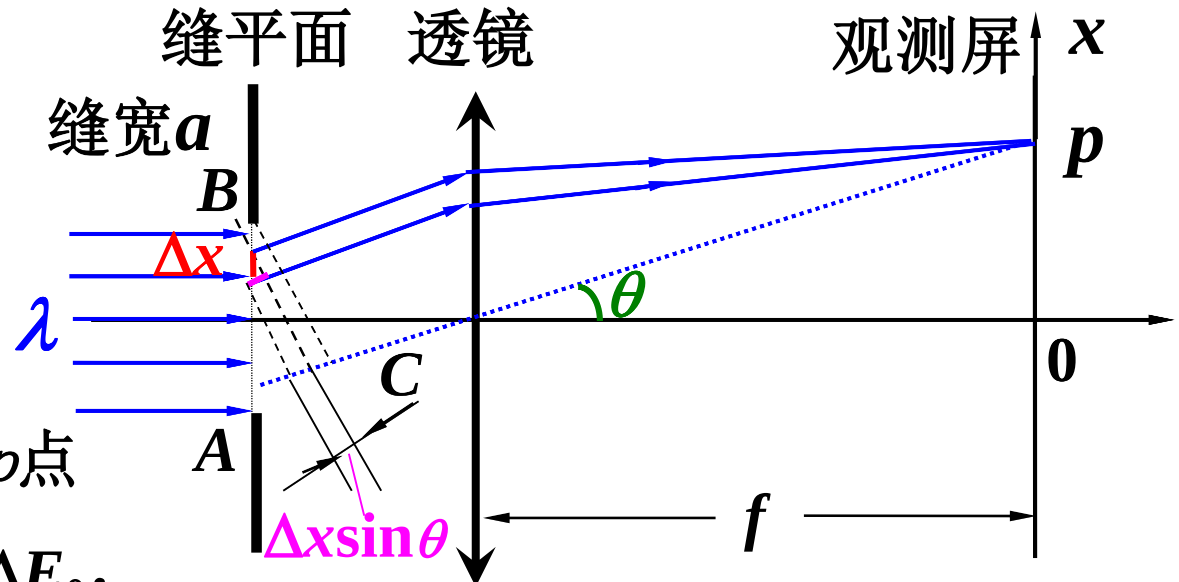
——中央明纹（中心）

上述暗纹和中央明纹（中心）位置是准确的，其余明纹中心的位置较上稍有偏离。

- ii° 矢量图法

将缝等分成 N 个窄带，每个窄带宽为：

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$



各窄带发的子波在 p点振幅近似相等, 设为ΔE_0，

相邻窄带发的子波到 p点的相位差为：

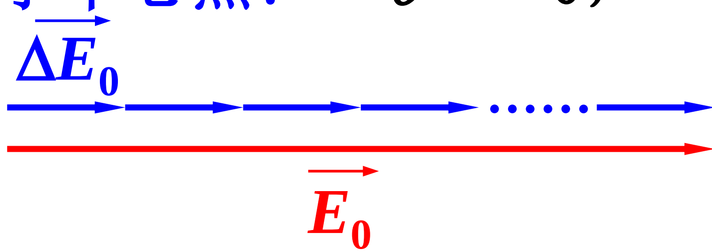
$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x \sin\theta}{\lambda}\cdot 2\pi = \frac{a\cdot\sin\theta}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} \quad （N\text{很大}）$$

p点的合振幅E_p 就是各子波的振幅矢量和的模。

p点处是多个同方向、同频率、同振幅、初相依次差一个恒量$\Delta\varphi$ 的简谐振动的合成，合成的结果仍为简谐振动。

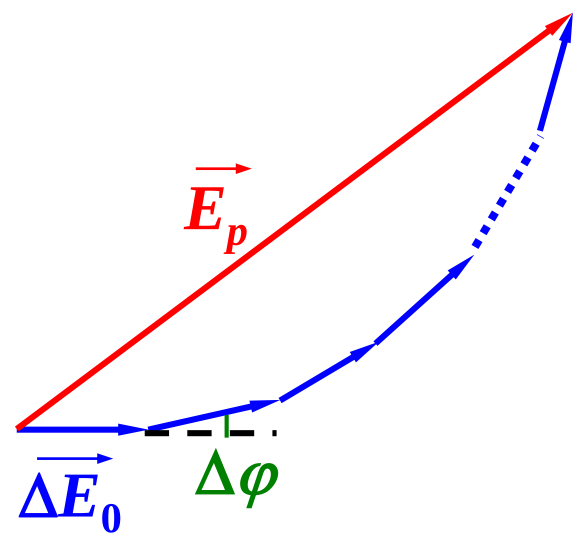
对于中心点：$\theta = 0$，$\Delta\varphi$ $E_0 = N\,\Delta E_0$ 。

0，



对于其他点 p: $\Delta\varphi \neq 0$，$E_p < E_0$ 。

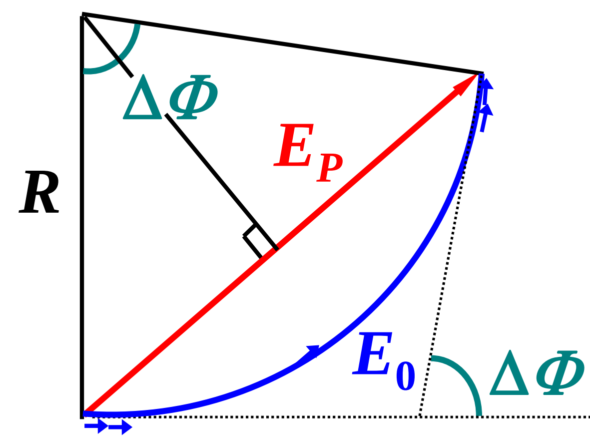
当$N \to \infty$时，N个相接的折线将变为一个圆弧。



$$\Delta\Phi = N\Delta\varphi = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$

$$E_p = 2R\sin\frac{\Delta\Phi}{2}, \qquad E_0 = R\Delta\Phi$$

$$E_p = 2\frac{E_0}{\Delta\Phi}\sin\frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{E_0}{\Delta\Phi/2}\sin\frac{\Delta\Phi}{2}$$



令 $\alpha = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$， 有 $E_p = E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$，

又 $I \propto E_p^2$ ，$I_0 \propto E_0^2$ ，

∴ p点的光强 $\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$

- iii° 积分法

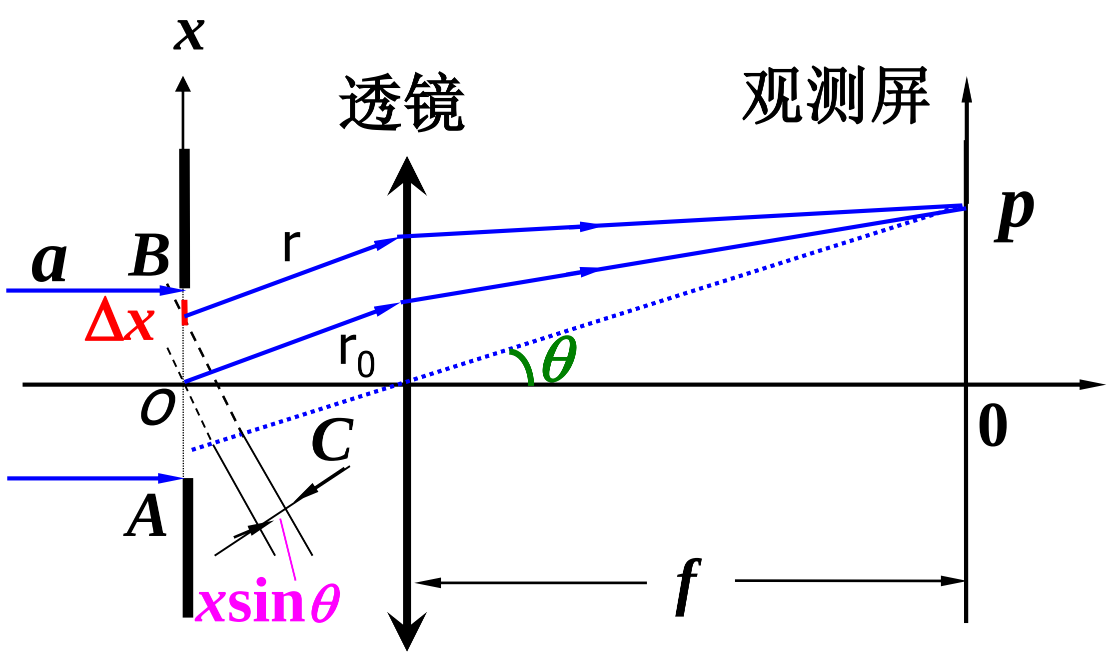
考虑距离O点为x，宽dx的窄条

$ds = l\,dx$

x点与O点的光程差

$r = r_0 + \Delta r$

$\Delta r = x\sin\theta$



$$E(p) = \iint_{\Sigma} C \cdot F(\theta) E(Q) \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

- 考虑近似
  - 对于平行光垂直入射，倾斜因子F(θ) ≈ 1
  - 狭缝a很小，E(Q)处处相等，为常数
  - $r = r_0 + \Delta r \approx r_0$
  - $e^{ikr} = e^{ikr_0} e^{ik\Delta r}$ 其中的 e^{ikr_0} 为常数

$$E(p) = C' \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik\Delta r} dx = C' \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik\sin\theta \cdot x} dx = C \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{I = E^*(p) \cdot E(p) = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2}$$

与矢量图法结果一致。

讨论： 由 $I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，可得到以下结果：

（1）主极大（中央明纹中心）位置：

$$\theta = 0\text{处，}\quad \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \rightarrow I = I_0 = I_{max}$$

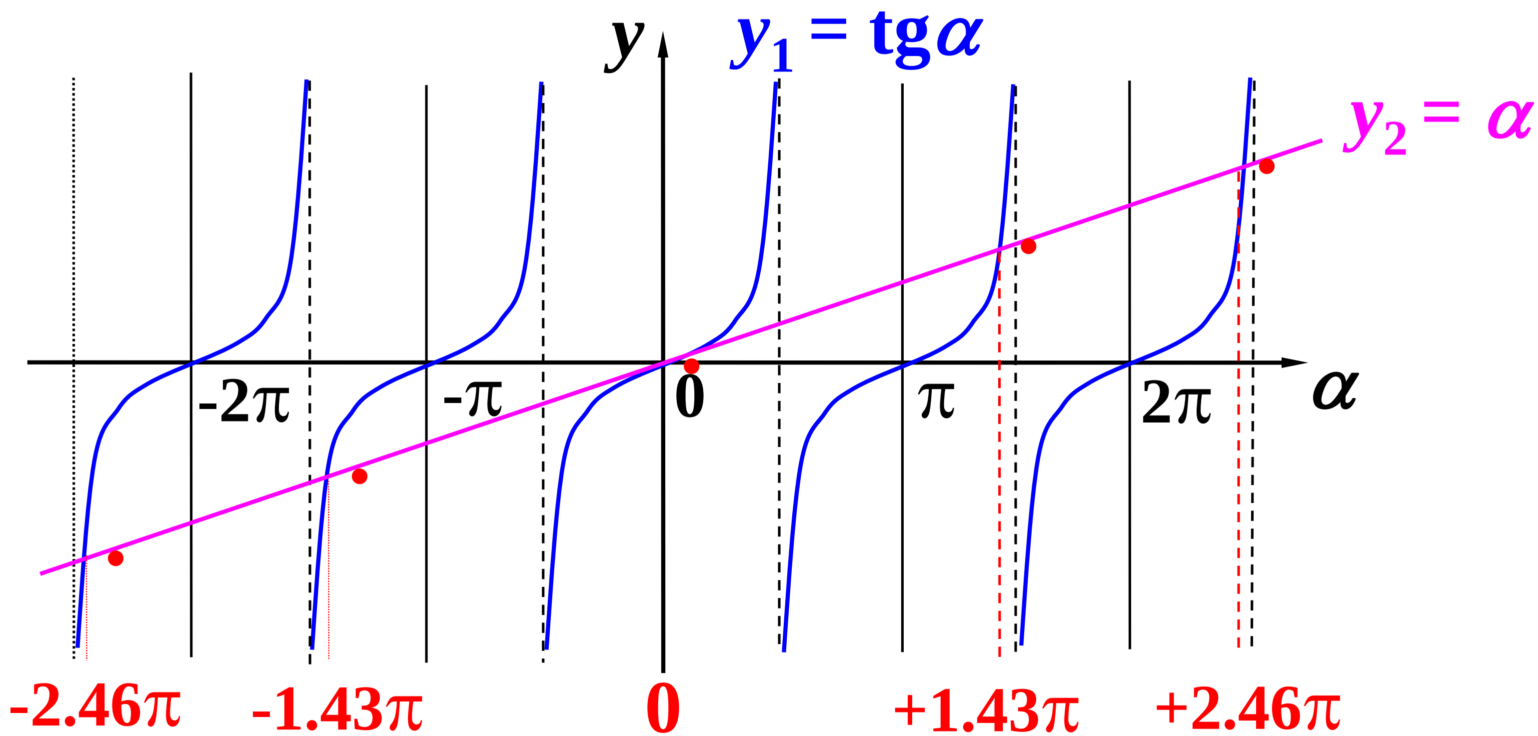
（2）极小（暗纹）位置：

$$\alpha = \pm k\pi,\quad k = 1,2,3\cdots\text{时，}\quad \sin\alpha = 0 \rightarrow I = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{由}\ \alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi & \rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda \\ \text{或由}\quad N\Delta\varphi = \pm 2k\pi & \rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda\end{array}\right\}\ \text{一致}$$

这正是缝宽可以分成偶数个半波带的情形。

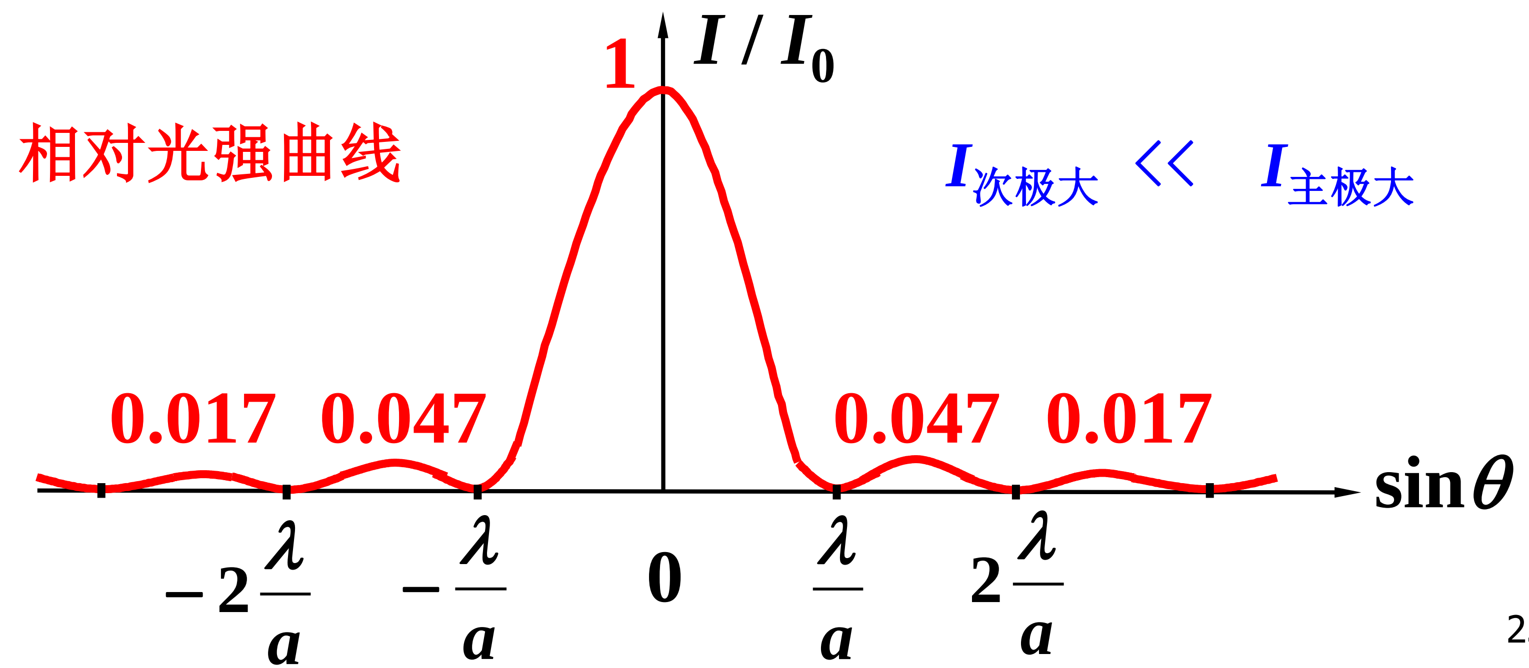
(3) 次极大位置：满足 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=0 \rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=\alpha$



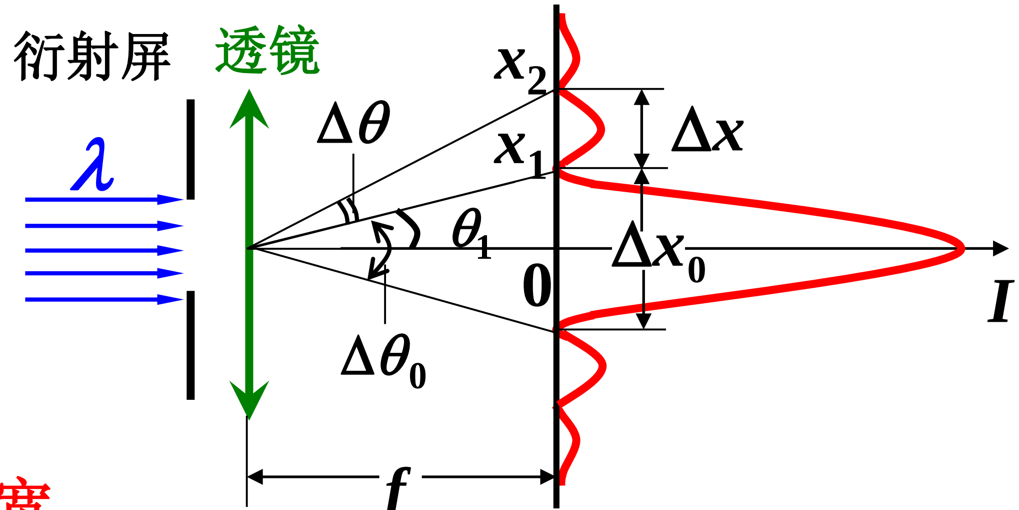
相应 ：

（4）光强： 将 $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

依次带入光强公式 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，得到从中央往外各次极大的光强依次为 $0.0472I_0$， $0.0165I_0$， $0.0083I_0$ $\cdots$



(5) 条纹宽度



① 中央明纹宽度

对于近轴近似，

角宽度 $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\dfrac{\lambda}{a}$

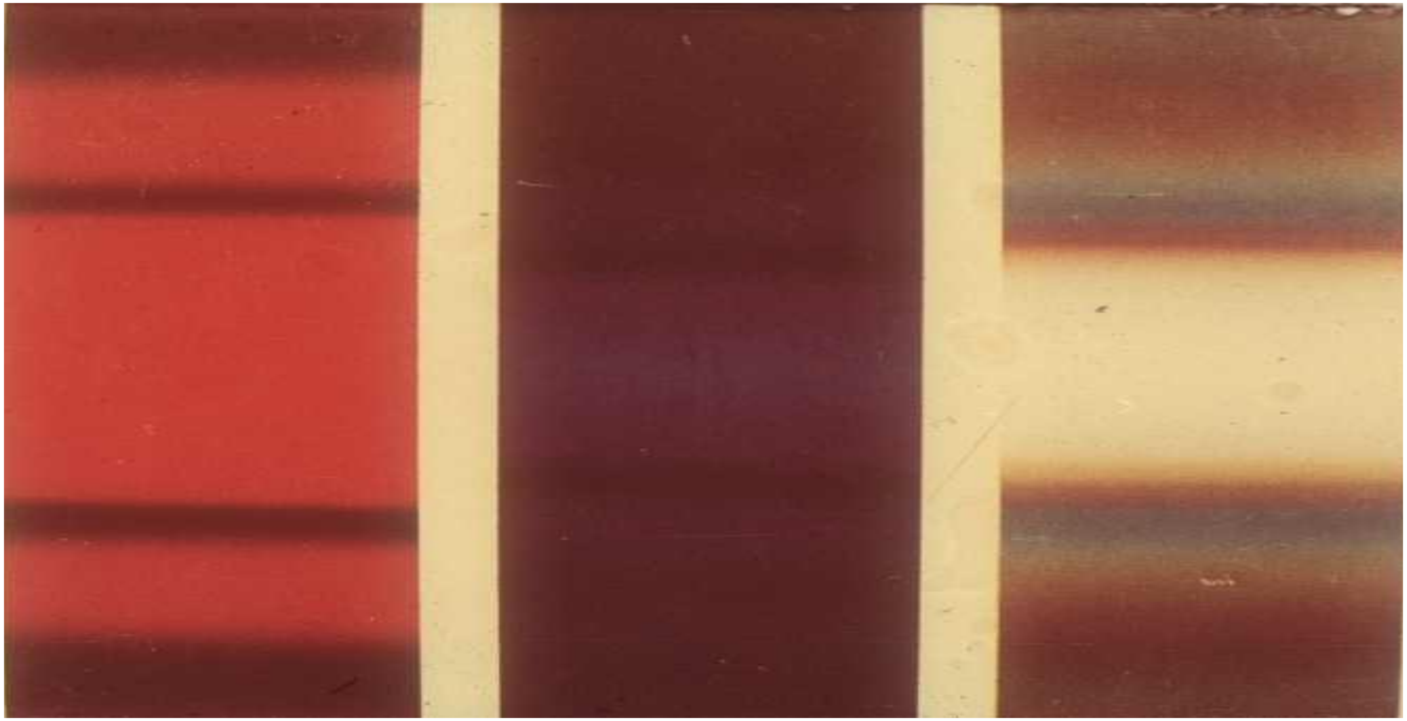
中央亮纹的边缘对应的衍射角θ_1，称为**中央亮纹的半角宽**

线宽度 $\Delta x_0 = 2f\cdot \mathrm{tg}\,\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\dfrac{\lambda}{a} \propto \dfrac{\lambda}{a}$

② 其他明纹（次极大）宽度

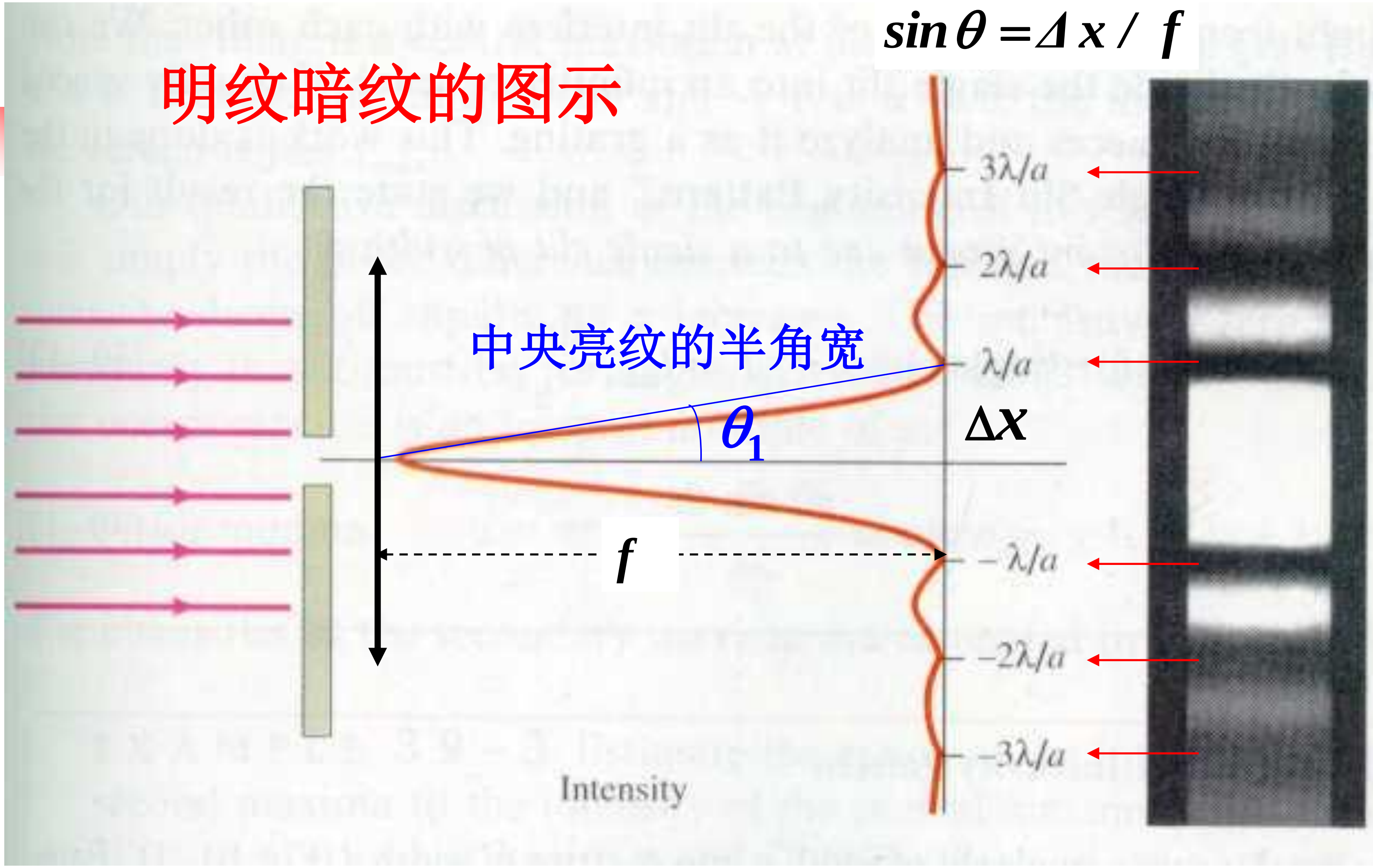
$$x_k \approx f\sin\theta_k = f\frac{k\lambda}{a} \rightarrow \Delta x \approx f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$

单缝衍射明条纹宽度的特征



红光　　紫光　　白光

明纹暗纹的图示



$\sin\theta = \Delta x / f$
中央亮纹的半角宽
θ_1
Δx
f
$3\lambda/a$
$2\lambda/a$
λ/a
$-\lambda/a$
$-2\lambda/a$
$-3\lambda/a$
Intensity

（6）波长对条纹间隔的影响

$\Delta x \propto \lambda$ — 波长越长，条纹间隔越宽。

（7）缝宽变化对条纹的影响

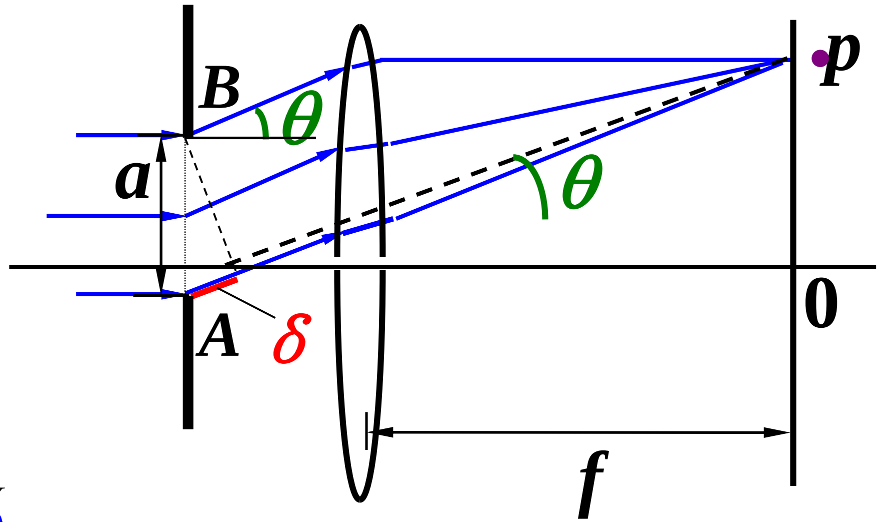
◆当缝极宽 $\frac{\lambda}{a} \to 0$ 时，各级明纹向中央靠拢，密集得无法分辨，只显出单一的亮条纹，这就是单缝的几何光学像。

此时光线遵从直线传播规律。

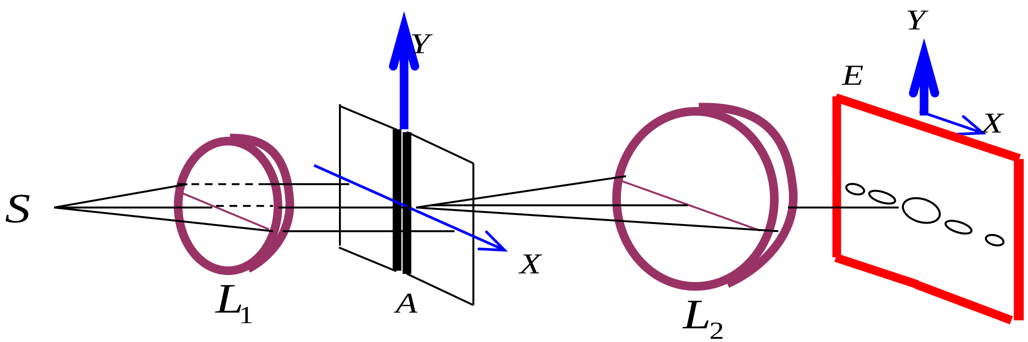
◆当缝极细（$a \approx \lambda$）时， $\sin\theta_1 \approx 1$，$\theta_1 \approx \pi/2$

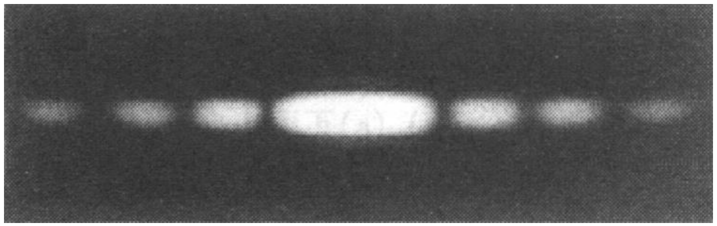
衍射中央亮纹的两端延伸到很远很远的地方，屏上只接到中央亮纹的一小部分(较均匀)，当然就看不到单缝衍射的条纹了。这就是我们前面只考虑干涉，不考虑缝的衍射的缘因

（8）若单缝偏离光轴，由于入射角不变，所以衍射条纹不变。

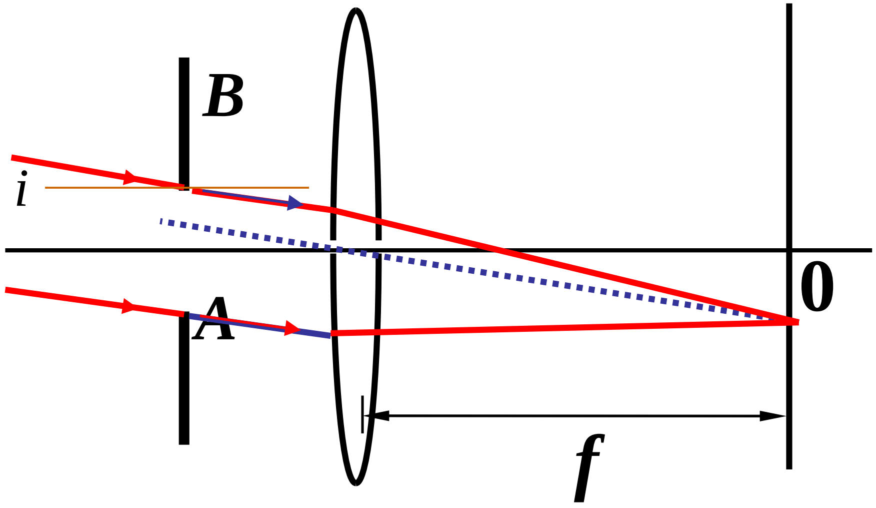


单缝衍射条纹沿与缝长正交方向延伸



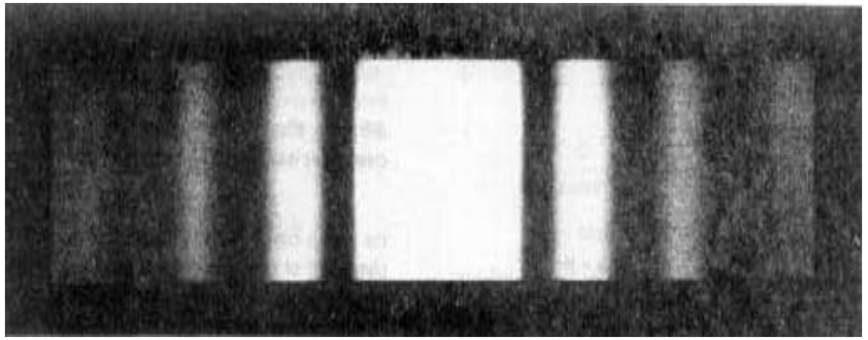


（9）若光源偏离光轴，这时为平行光非垂直入射。在缝前造成的最大光程差为 $a\sin i$，其结果使得衍射条纹偏离光轴。



用缝光源➔点光源后，

衍射条纹➔竖条纹。



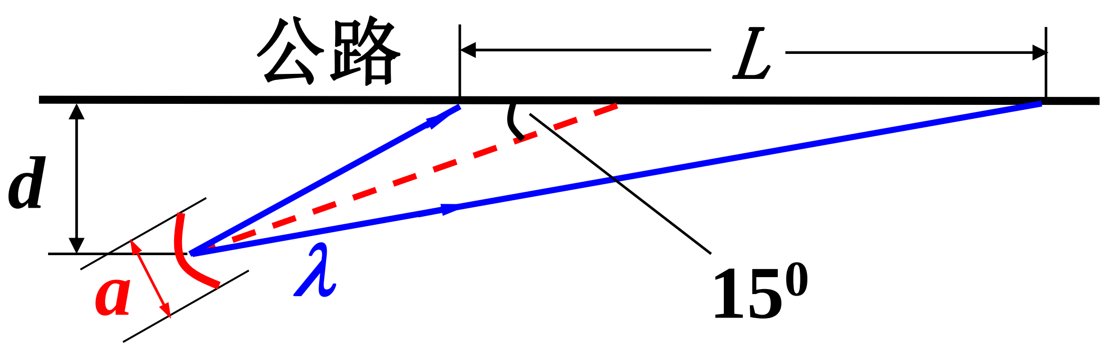
（8）干涉和衍射的联系与区别：

从本质上讲干涉和衍射都是波的相干叠加，没有区别。

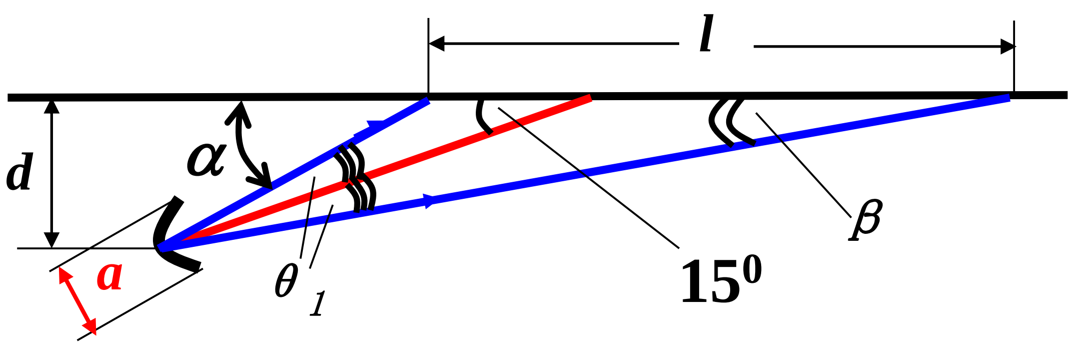
通常：干涉指的是有限多的子波的相干叠加，
衍射指的是无限多的子波的相干叠加，

二者常常同时存在。
例如，不是极细缝情况下的双缝干涉，就应该既考虑双缝的干涉，又考虑每个缝的衍射。

已知：一波长为$\lambda = 30\text{mm}$的雷达在距离路边为 $d = 15\text{m}$处，雷达射束与公路成15°角，天线宽度 $a = 0.20\text{m}$。求雷达监视范围内公路的长度L。



$$\theta_1 \approx 8.63^\circ$$



【解】将雷达波束看成集中在单缝衍射的0级明纹上，

有 $$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{30mm}{0.20m} = 0.15$$

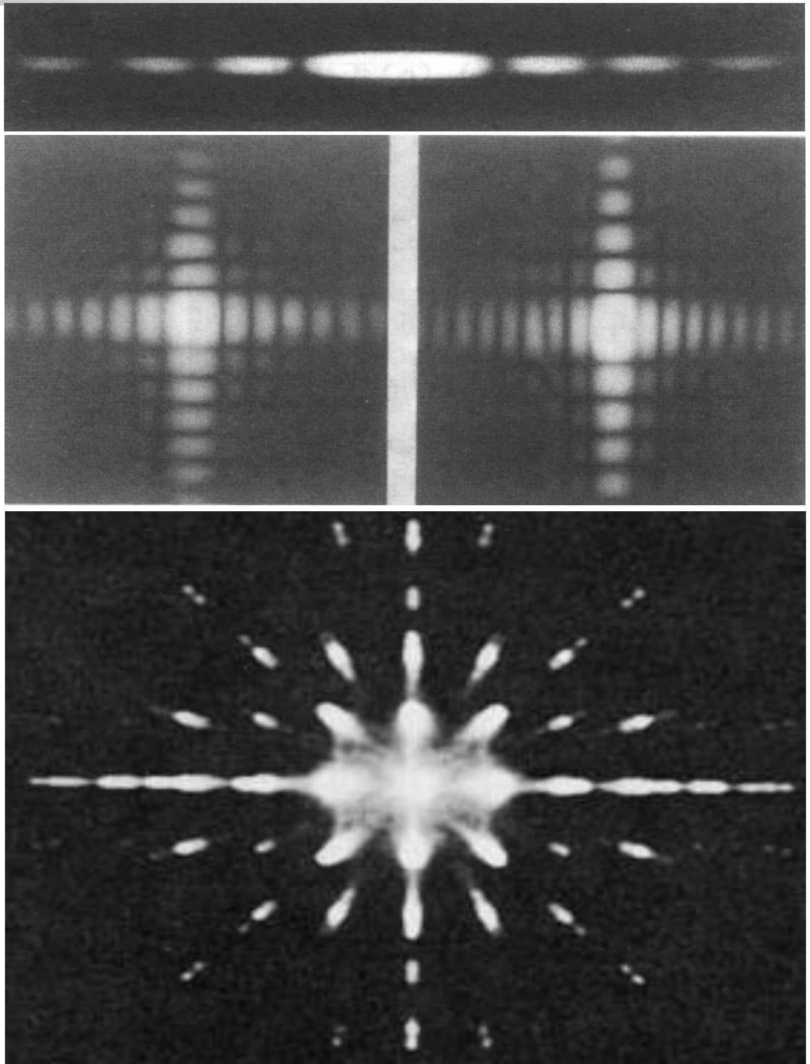
$$\longrightarrow \quad \theta_1 \approx 8.63^\circ$$

$$\therefore\ l = d(ctg\beta - ctg\alpha)$$

$$= 15(ctg6.37^\circ - ctg23.63^\circ) \approx 100m$$

§4.3 光学仪器的分辨本领

1. 夫琅禾费单缝衍射的变化



点光源单缝衍射图象是沿单缝的正交方向展开的。

单缝的长边收缩后，也会出现与之垂直方向的衍射条纹，同时出现交叉相。

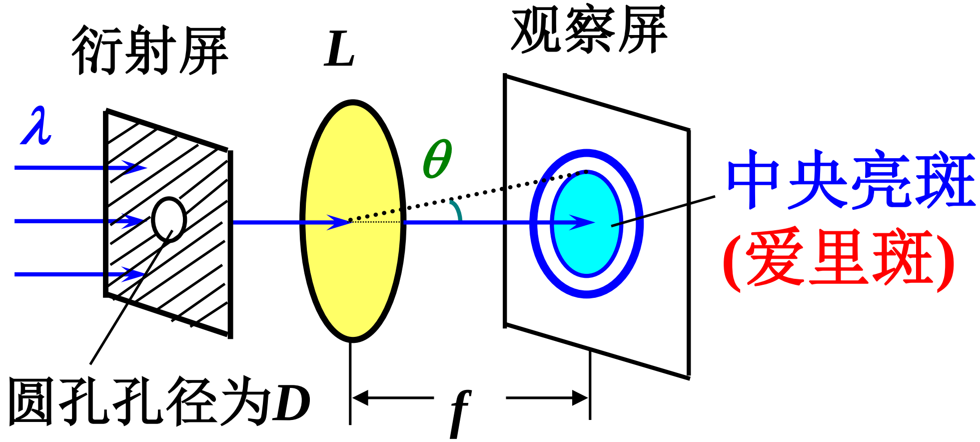
$$\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2}$$

2. 圆孔的夫琅禾费衍射

一阶贝塞尔函数

第一级极小

$$\boxed{\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}}$$

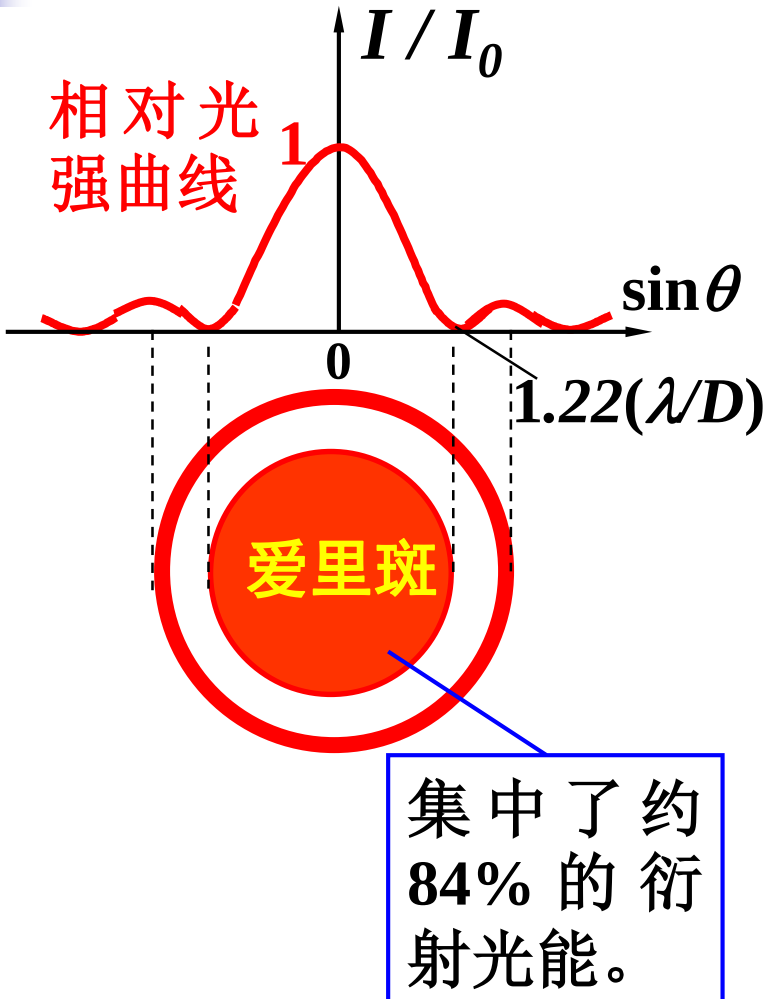


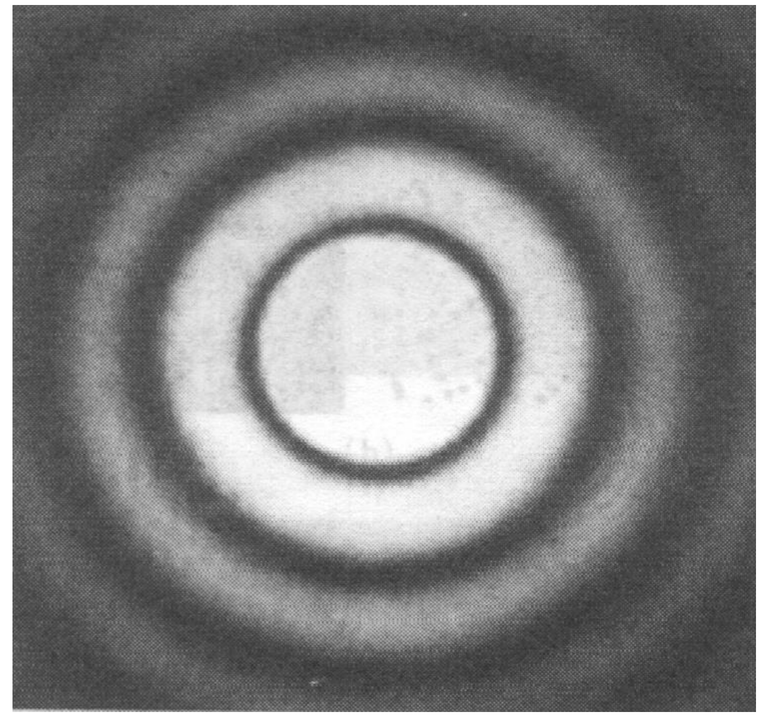
爱里斑的角半径

爱里斑的半径为：

$$r_0 = \theta f = 1.22\lambda f / D$$

$\left.\begin{matrix} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{matrix}\right\}$ 爱里斑变小





圆孔的夫琅禾费衍射

3. 透镜的分辨本领

几何光学：

（经透镜）

物点 ⇒ 象点

物（物点集合）⇒ 象（象点集合）

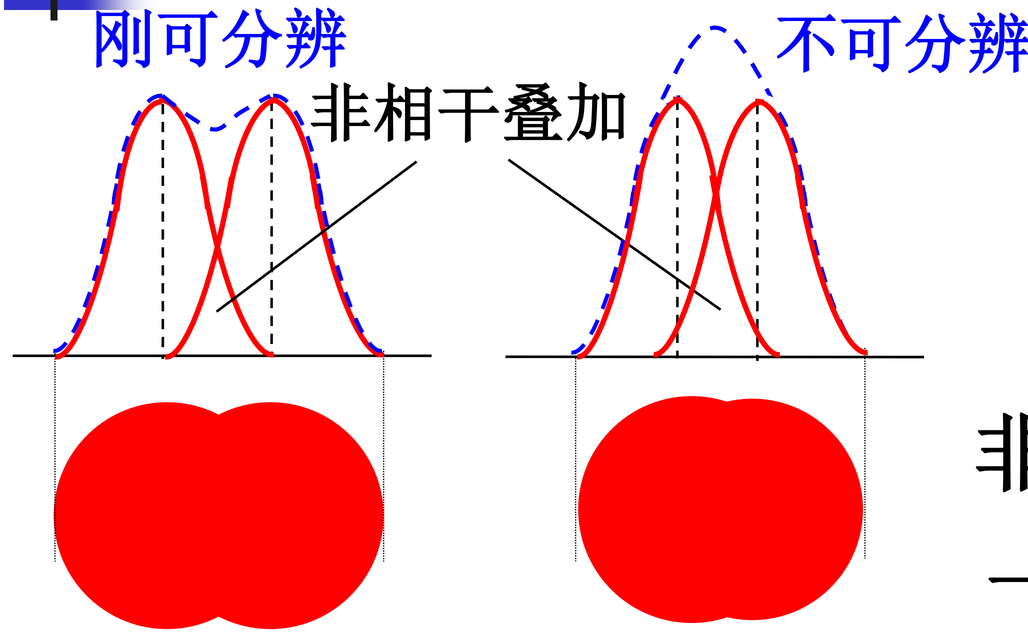
波动光学：

（经透镜）

物点 ⇒ 象斑

物（物点集合）⇒ 象（象斑集合）

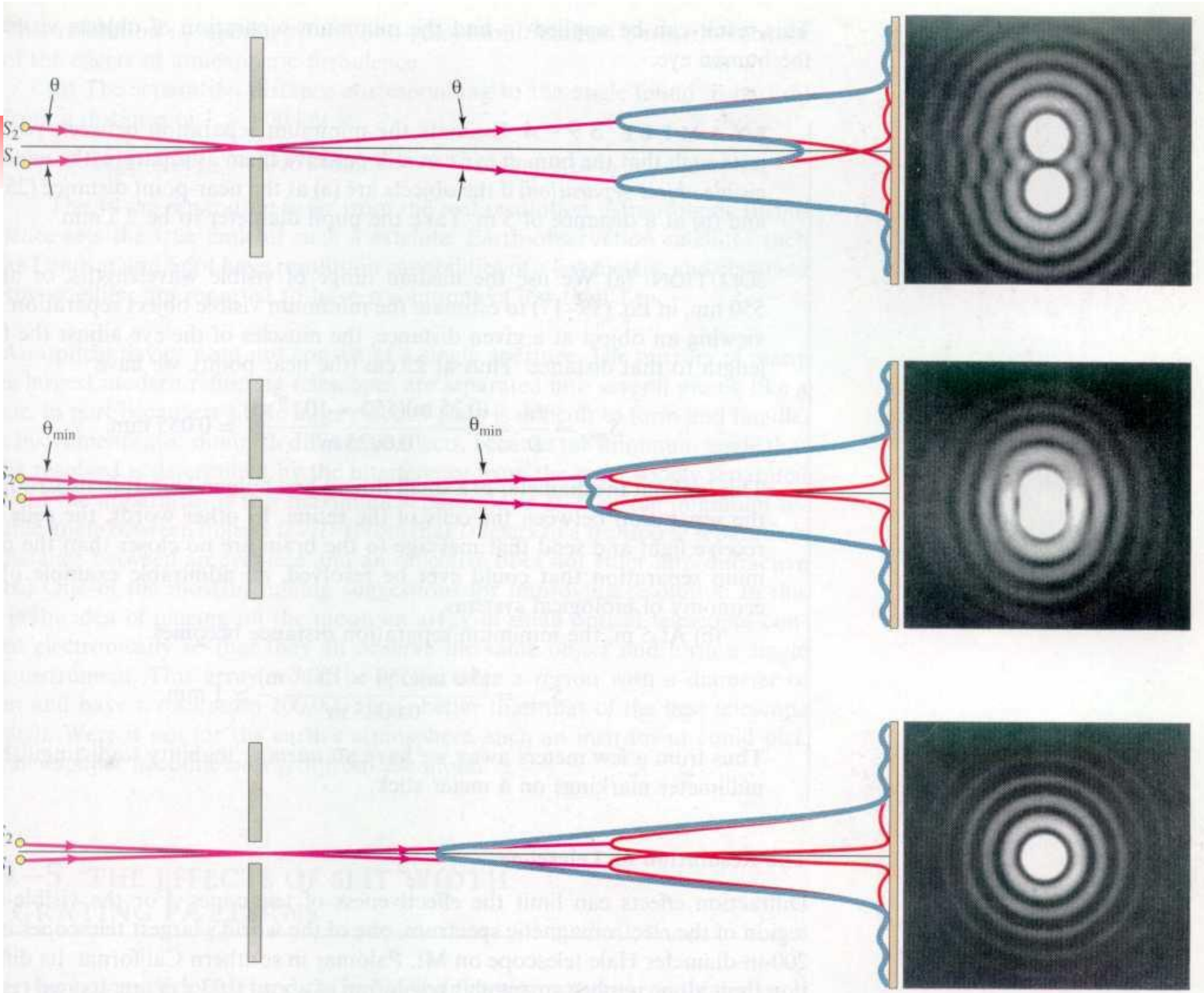
衍射限制了透镜的分辨能力。



瑞利判据：
(Rayleigh criterion)

对于两个等光强的非相干的物点，如果一个象斑的中心恰好落在另一象斑的边缘（第一暗纹处），则此两物点被认为是刚刚可以分辨的。

小孔（直径*D*）对两个靠近的遥远的点光源的分辨



点光源距离较大

可分辨

符合

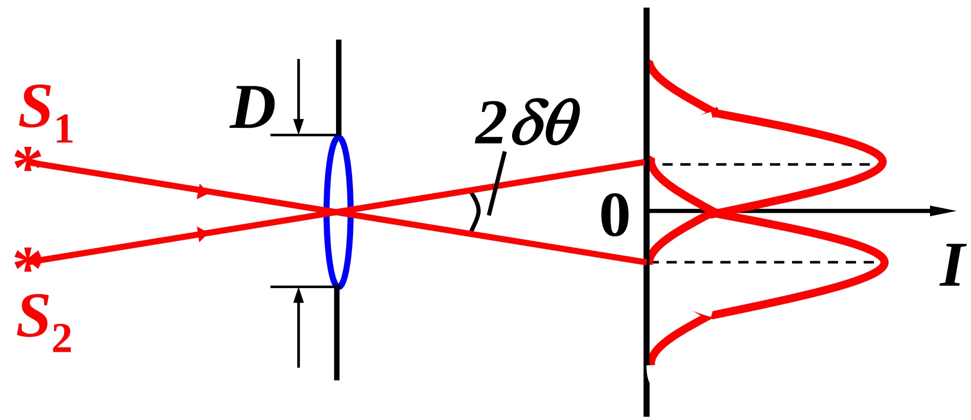
瑞利判据

点光源距离太小

不可分辨

最小分辨角

$$\delta\theta = \theta_1 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$



分辨本领

$$R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{l} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{array}\right\} \rightarrow R\uparrow$$

望远镜： λ 不可选择,可 $\uparrow D \rightarrow \uparrow R$

▲ 世界上最大的光学望远镜： $D = 8$ m建在夏威夷山顶， **1999**年建成

▲世界上最大的射电望远镜： ***D*** **= 305 m**，建在波多黎各岛。能探测射到整个地球表面仅**10** $^{-12}$**W**的功率，也可探测引力波。

显微镜： D不会很大，可$\downarrow\lambda\rightarrow\uparrow R$

电子λ： $0.1\text{Å} \sim 1\text{Å}$ （$10^{-2}\sim10^{-1}$ nm）

∴ 电子显微镜分辨本领很高

▲ 在正常照明下，人眼瞳孔直径约为3mm，

对 $\lambda = 5500\,\text{Å}$ 的光，$\delta\theta \approx 1'$

可分辨约 9m 远处的相距 2mm 的两个点

▲ 夜间观看汽车灯，远看是一个亮点，逐渐移近才看出两个灯。

- 问题：

有人说在航天飞机上，用肉眼能够看见的地球上的唯一的人造建筑物是长城。这一说法对吗？

长城宽度：**L ~ 10 m**

人眼瞳孔直径约为： **3 mm**

航天飞机高度：**h ~ 200 km**

设圆孔半径R_1=0.1mm，L_2的焦距 f =50cm，$\lambda = 500\,nm$ 试求：在接收屏上爱里斑的半径；若圆孔半径改用R_2=1.0mm，其它条件不变，爱里斑半径变为多大？这两个爱里斑的半径上平均光强的比为多少？

解：因为 $r_0 = \theta_0 f = 1.22\lambda f / D$

所以：$r_{01} = 1.22 \times \dfrac{500\times10^{-9}\times50\times10^{-2}}{2\times0.1\times10^{-3}} = 1.5\times10^{-3}\,m$

$$r_{02} = 1.22 \times \frac{500\times10^{-9}\times50\times10^{-2}}{2\times1.0\times10^{-3}} = 1.5\times10^{-4}\,m$$

设入射光的能流密度为 I_0 (即光强)，则穿过半径为 $\mathbf{R_1}$和 $\mathbf{R_2}$ 圆孔的光能流分别为：

$$P_1 = I_0 \cdot \pi R_1^2 \qquad P_2 = I_0 \cdot \pi R_2^2$$

$$P_1 / P_2 = R_1^2 / R_2^2 = 10^{-2}$$

爱里斑上集中了衍射光能的**83.8%**，所以爱里斑上平均光强之比为：

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{P_1 \times 83.8\% / \pi r_{01}^2}{P_2 \times 83.8\% / \pi r_{02}^2} = 10^{-4}$$

可见，爱里斑半径缩小 10^{-1} 倍（$r_{01}/r_{02} = 10$），但爱里斑上平均光强却增大 10^4 倍。

衍射的要点： 衍射角 θ

暗纹中心衍射方向满足 $a\sin\theta = 2k\lambda / 2$

$k = \pm 1, \pm 2 \cdots$

暗纹中心在屏上位置 $x = k\lambda \cdot f / a$

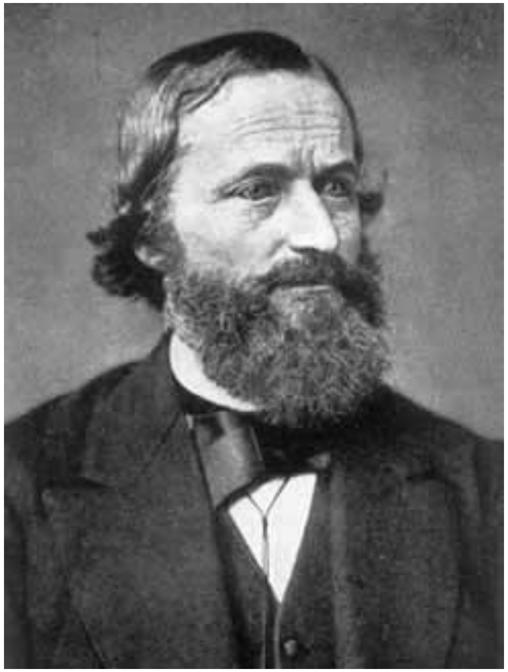
$r_0 = \theta_0 f = 1.22\lambda f / D$ 爱里斑的半径

Joseph von Fraunhofer

Born: 6 March 1787 in Straubing, Bavaria,

Died: 7 June 1826 in Munich

Gustav Robert Kirchhoff



Born: 12 March 1824 in Königsberg, Prussia (now Kaliningrad, Russia)

Died: 17 Oct 1887 in Berlin, Germany

John William Strutt Lord Rayleigh

Born: 12 Nov 1842 in Langford Grove (near Maldon), Essex, England

Died: 30 June 1919 in Terling Place, Witham, Essex,England