电动力学

第五章 电磁波的辐射

电磁波的辐射

- 电磁场的矢势和标势
- 推迟势
- 电偶极辐射
- 磁偶极辐射和电四极辐射
- 天线辐射
- 电磁波的衍射
- 电磁场的动量

√

电磁场的矢势和标势

第一节

电磁场的矢势和标势

√

电磁场的矢势和标势

1. 用势描述电磁场

简单起见，仅考虑真空情形，麦氏方程为

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

由于$\nabla\cdot\vec{B}=0$，则可引入矢势，使

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

代入麦氏方程二式，有

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

√

电磁场的矢势和标势

则可引入标势，使

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

则电磁场可用矢势和标势表示出来

$$\vec{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\boldsymbol{\partial}\vec{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{\partial t}}=-\boldsymbol{\nabla\varphi}$$

此时，电场$\vec{E}$不再是保守力场，标势φ失去作为电场中势能的意义。因此在高频系统中，电压的概念也失去了确切意义。

电磁场的矢势和标势

2. 规范变换和规范不变性

对于给定的电场和磁场，$(\vec{A},\varphi)$显然不唯一，考虑$(\vec{A}',\varphi')$对应于相同的电场和磁场，由于任意函数的梯度都是无旋的则

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$$

描述相同的磁场。又

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}+\frac{\partial(\nabla\psi)}{\partial t}$$

$$=-\nabla\left(\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\nabla\varphi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$$

$$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

规范变换：$\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi \quad \varphi\rightarrow\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}$

规范不变性：规范变换后，电场和磁场保持不变，也就是物理量与物理规律保持不变。（对于量子力学也成立）

电磁场的矢势和标势

在量子力学中，势$\vec{A}$和φ比经典物理中更基本，描述相同$(\vec{E},\vec{B})$的不同$(\vec{A},\varphi)$称为不同的规范，物理等价的规范场之间的变换称为规范变换。所有可观测物理量和物理规律在规范变换下保持不变即为规范不变性原理。

（1）库伦规范条件：$\nabla\cdot\vec{A}=0$

此时$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$中右边第一项为无旋场（纵场），对应于库伦场；第二项为无源场（横场），对应于感应电场。

（2）洛伦兹规范：$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

势的基本方程中$\vec{A}$和φ具有相同地位。

√

电磁场的矢势和标势

3. 达朗贝尔方程

由$\nabla\cdot\vec{E}=0$得

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

由$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$得

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{J}$$

(1) 库伦规范

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{J}$$

标势方程为泊松方程，可解出φ后，再解出$\vec{A}$。

√

电磁场的矢势和标势

(2)洛伦兹规范

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

上式称为达朗贝尔方程，此时$\vec{A}$和φ的方程具有相同形式，电荷产生标势波动，电流产生矢势波动，无电流电荷时，$\vec{A}$和φ满足波动方程。

尽管洛伦兹规范给出了波动形式的方程，但$\vec{E}$和$\vec{B}$的波动性质是场本身的性质，和规范无关。

推迟势

第二节

推迟势

√

推迟势

标势达朗贝尔方程

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

考虑$\vec{x}'$有一随时间变化点电荷$Q(t)$，则

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})$$

其中$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$, 由球对称性，源点之外区域$(\mathrm{r} \neq 0)$有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

考虑$\varphi = \frac{u}{r}$，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

形式上为一维波动方程，通解为

推迟势

$$\mathrm{u} = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g(t + \frac{r}{c})$$

则

$$\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g(t + \frac{r}{c})$$

右边两项分别对应发射球面波和内敛球面波，辐射是发射问题，因此$g = 0$。

对于源点处，可利用傅里叶变换来求解。傅里叶变换：

$$\mathrm{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \qquad \mathrm{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

则

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} d\omega$$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

推迟势

代入达朗贝尔方程, 左边有

$$\lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\omega)\nabla^2\left(\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}\right)-\frac{f(\omega)}{c^2r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}]d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{-i\omega t}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\omega=-4\pi\delta(\vec{r})\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

第一个等号是由于$r\to 0$，只需保留r的最低阶项，第二个等号利用了关系$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(\vec{r})$，右边等于

$$-\frac{\delta(\vec{r})}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

比较可得$f(\omega)=\frac{Q(\omega)}{4\pi\varepsilon_0}$，则有

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(\omega)}{4\pi\varepsilon_0}e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}d\omega=\frac{Q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

√

推迟势

其中$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$，$Q\left(t-\frac{r}{c}\right)$可记为$Q\left(\vec{x}'，t-\frac{r}{c}\right)$。由场的叠加性，则对于一般电荷分布$\rho(\vec{x}',t)$，激发标势为

$$\varphi(\vec{x},t)=\int_V\frac{\rho\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'$$

上面结果也可用无界空间含时格林函数直接得到。由于矢势$\vec{A}$满足方程形式上与标势达朗贝尔方程一致，所以一般变化电流分布$\vec{J}(\vec{x}',t)$所激发矢势为

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'$$

上两式称为推迟势。可以验证$\vec{A}$和φ满足洛伦兹条件。

√

推迟势

由于$t'=t-\frac{r}{c}$，因此

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{r}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int[\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')+\frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')]\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int[-\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')-\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')|_{x'\text{不变}}]\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int[-\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')-\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')|_{t'\text{不变}}]\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int[-\nabla'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{r}+\frac{\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')|_{t'\text{不变}}}{r}]\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}',t')|_{t'\text{不变}}\mathrm{d}V'$$

推迟势

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x},t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\frac{\partial \rho(\vec{x}',t')}{\partial t}\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\frac{\partial \rho(\vec{x}',t')}{\partial t'}\mathrm{d}V'$$

因此

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{\nabla}'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{x}}',\boldsymbol{t}')|_{\boldsymbol{t}'\text{不变}}+\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\vec{\boldsymbol{x}}',\boldsymbol{t}')}{\partial \boldsymbol{t}'}\right]\mathrm{d}V'=0$$

电荷守恒定律

推迟势

推迟势公式反映了电磁作用具有一定的传播速度。

由推迟标势公式$\varphi(\vec{x},t)=\int_V \frac{\rho\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'$可以看出，$t$时刻在场点$\vec{\mathrm{x}}$的电势，是由$t-\frac{r}{c}$时刻$\vec{x}'$的电荷贡献的，即源点电荷产生的电势需要$\frac{r}{\mathrm{c}}$的时间才传到场点。电磁相互作用以有限的传播速度（光速）传播，不存在瞬时的超距作用。

若电荷分布和电流密度分布给定，则可由推迟势公式计算势，来得到$\vec{E}$和$\vec{B}$，但由于电磁场反过来对电荷电流有作用，因此不能任意规定电荷电流分布。

电偶极辐射

第三节

电偶极辐射

√

电偶极辐射

1. 计算辐射场的一般公式

考虑交变电流辐射

$$\vec{j}(\vec{x},t)=\vec{J}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

则

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}'\,)}{r}e^{i(kr-\omega t)}dV'=\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

其中$k=\omega/c$，以及

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}'\,)}{r}e^{ikr}dV'$$

上式表明场点处$\vec{A}$的相位比电流源$\vec{J}$的相位落后kr。

由电流连续性方程有

$$\mathrm{i}\omega\rho(\vec{x},t)=\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x},t)$$

标势推迟势由ρ确定。

电偶极辐射

2. 矢势的展开式

三个线度：电荷分布区域线度l，波长$\lambda = 2\pi/k$，电荷到场点距离r，本节讨论$l \ll \lambda, l \ll r$

（1）近区 $\mathrm{r} \ll \lambda \Rightarrow e^{ikr} = e^{2\pi i\frac{r}{\lambda}} \approx 1$，场保持恒定场特点。

（2）感应区 $\mathrm{r} \sim \lambda$ 过渡区域，情况比较复杂

（3）远区（辐射区） $r \gg \lambda$

考虑远区情形，并选取原点在电流分布区域内，有

$$r \approx \mathrm{R} - \vec{e}_R \cdot \vec{x}'$$

其中R表示原点到场点距离,则

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}'\,)e^{ik(\mathrm{R}-\vec{e}_R\cdot\vec{x}')}}{\mathrm{R} - \vec{e}_R \cdot \vec{x}'} dV'$$

考虑到$R \gg x'$, 并对$e^{-ik\overrightarrow{\mathrm{e_R}}\cdot\vec{x}'}$做展开有

电偶极辐射

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')(1-ik\vec{e}_R\cdot\vec{x}'+\cdots)dV'$$

3. 电偶极辐射

若$x'\ll\lambda$，则上式可保留至第一项

$$\boldsymbol{\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'}$$

$\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$表示电偶极子的时间变化率，证明如下：

$$\dot{p}_i=\int_V x_i'\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}',t)dV'=-\int_V x_i'\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t)dV'$$

$$=-\int_V x_i'\frac{\partial J_j}{\partial x_j'}dV'=-\int_V\left[\frac{\partial\left(x_i'J_j\right)}{\partial x_j'}-\delta_{ij}J_j\right]dV'$$

$$=-\oint_S x_i'\vec{J}\cdot d\vec{S}'+\int_V J_i dV'=\int_V J_i dV'$$

电偶极辐射

则有

$$\dot{\vec{p}} = \int_V \vec{J}(\vec{x}', t) dV' = e^{-i\omega t} \int_V \vec{J}(\vec{x}') dV'$$

则振荡电偶极矩辐射为

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 e^{ik\mathrm{R}}}{4\pi R} \dot{\vec{p}}$$

只保留R最高次项，则

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left(\nabla e^{ik\mathrm{R}} \right) \times \dot{\vec{p}} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ik\mathrm{R}} \vec{e}_R \times \dot{\vec{p}}$$

又$\ddot{\vec{p}} = -i\omega \dot{\vec{p}}$，则

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{ik\mathrm{R}} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R$$

$$\vec{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} = \frac{e^{ik\mathrm{R}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R$$

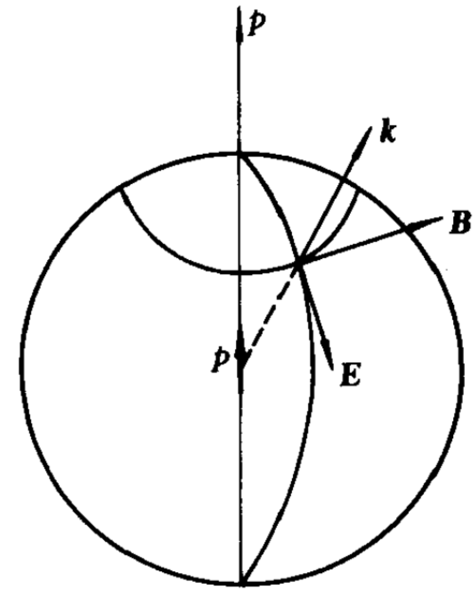
√

电偶极辐射

考虑如下情形，有

$$\vec{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\vec{p}}\sin\theta\vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\ddot{\vec{p}}sin\theta\vec{e}_\theta$$



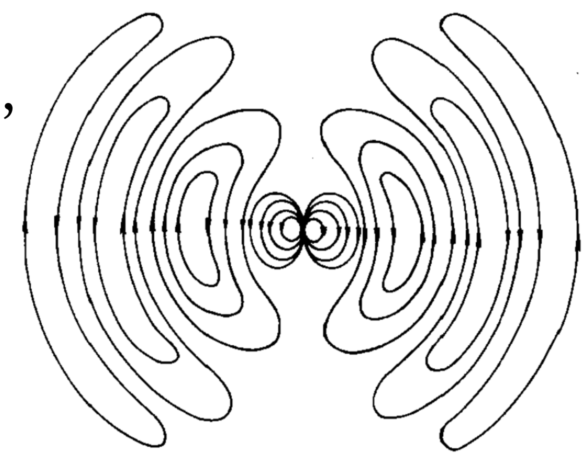
. $\vec{B}$ 沿纬线振荡，$\vec{E}$沿经线振荡

. 磁感应线是围绕极轴的圆周，$\vec{B}$总保持横向。

. 电场线是经面上闭合曲线($\nabla\cdot\vec{E} = 0$)，$\vec{E}$近似为横场。

. 电偶极辐射是空间中TM波。

. R很大时，电偶极辐射场是TEM波。



电偶极辐射

4. 辐射能流 角分布 辐射功率

平均能流密度

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Re\left(\vec{E}^{*}\times\vec{H}\right) = \frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^{2}}{32\pi^{2}\varepsilon_{0}c^{3}R^{2}}\sin^{2}\theta\,\vec{e}_{R}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$平面辐射最强，$\theta = 0, \pi$（极轴方向）没有辐射。

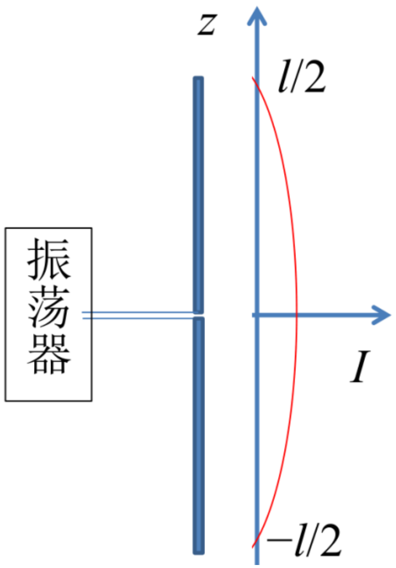
总辐射功率

$$P = \oint_{S}\left|\langle\vec{S}\rangle\right|R^{2}d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^{2}}{3c^{3}}$$

又$\frac{\partial}{\partial t}\sim -i\omega$，则振幅不变时$P\propto\omega^{4}$。

电偶极辐射

5. 短天线的辐射 辐射电阻



若$l \ll \lambda$，天线上电流分布近似为

线性：$I(z) = I_0\left(1 - \frac{2}{l}|z|\right) \; |z| \le \frac{l}{2}$

又$d\dot{\vec{p}} = \frac{dQ}{dt} d\vec{l} = I d\vec{l}$

则$\ddot{p} = -\mathrm{i}\omega\dot{p} = -i\omega\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I dz = -\mathrm{i}\frac{\omega}{2} I_0 l$

短天线辐射功率：$P = \frac{I_0^2\omega^2 l^2}{48\pi c^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} I_0^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2} R_r I_0^2$

辐射电阻：$R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \; (l \ll \lambda)$