数学物理方法作业参考答案

潘逸文[*], 余钊焕[†]

中国广州中山大学物理学院

December 27, 2018

简介

2018 年秋季数学物理方法 (面向 17 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布，本文件也会每周更新，可在 **余钊焕教学主页** **`http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html`** 找到。

[*]Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

[†]Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 11 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{\pi}, \qquad (b)\ 1+\sqrt{3}i\ , \qquad (c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \tag{1.1}$$

答 (辐角可任意添加 $2\pi n$ 都对)

$$(a)\ \frac{i}{\pi} = \frac{e^{\pi i/2}}{\pi} = \Big(\frac{1}{\pi}\Big)e^{\pi i/2} \tag{1.2}$$

$$(b)\ 1+\sqrt{3}i = 2\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) = 2(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)) = 2e^{\frac{\pi i}{3}} \tag{1.3}$$

$$(c)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}} = 1+e^{\frac{9\pi i}{14}+\frac{-\pi i}{7}} = 1+e^{\frac{\pi i}{2}} = 1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{\pi i/4} \tag{1.4}$$

2. 设点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$，其中 $R > 0$。求解最大的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

(1) 当 $0 < R \le 1$，z 作为任意内点，有 $|z| < R \le 1$。因此对于任何 $N > 1$, $|z^N| = |z|^N < |z|$，从而 z^N 也还是内点。因此，$0 < R \le 1$ 时 N 可以任意大，没有最大值 (或说最大的 N 是正无穷)。

(2) 当 $R > 1$，则 z 作为任意内点，可能有 $|z| > 1$，尤其是极为靠近边界的内点。对于这些点，$|z^2| = |z|^2$ 已经大于 R 了，但是 $z^1 = z$ 自然还是内点。因此 $N_{\max} = 1$。

3. 考虑点集 $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$，其中 $R > 0$。S 是否区域？是否单连通？

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R > 2$ 时，点集恰为以 ± 1 为焦点的椭圆内部，因此是区域，且单连通。

当 $R \le 2$ 时，点集为空集，不是区域，说连不连通都可以。

2 第二周 (9 月 18 日课上交)

1. 用代数式 (即 $x + iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，i 是虚数单位，

$$(a)\ a^i, \text{其中 } a > 0, \qquad (b)\ i^{a+bi}, \qquad (c)\ \sin(a+ib)\ . \tag{2.1}$$

答：

$$(a)\ a^i = e^{i\ln a} = \cos(\ln a) + i\sin(\ln a) \tag{2.2}$$

$$(b)\ i^{a+bi} = e^{\frac{\pi i}{2}(a+bi)} = e^{\frac{\pi i}{2}a - \frac{\pi}{2}b} = e^{-\frac{\pi b}{2}}\cos(\frac{\pi a}{2}) + ie^{-\frac{\pi b}{2}}\sin(\frac{\pi a}{2}) \tag{2.3}$$

$$(c)\ \sin(a+ib) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+ib)} - e^{-i(a+ib)}) = \frac{1}{2i}(e^{-b}e^{ia} - e^{b}e^{-ia}) \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{2i}((\cos a + i\sin a)e^{-b} - (\cos a - i\sin a)e^{b}) = \frac{1}{2}\Big((e^{b}+e^{-b})\sin a + i(e^{b}-e^{-b})\cos a\Big)\ . \tag{2.5}$$

2. 设 $u(x,y) = e^x \sin y$，而且令 $w = u(x,y) + iv(x,y)$ 为一个解析函数。求 w 关于 $z = x+iy$ 的表达式。

答：由 CR 条件得到

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = -e^x\cos y dx + e^x \sin y dy = -d(e^x\cos y)\ , \tag{2.6}$$

因此 $v(x,y) = -e^x\cos y + \text{const}$，$w = u + iv$ 为

$$w = e^x\sin y - ie^x\cos y = -ie^x(\cos y + i\sin y) = -ie^{x+iy} = -ie^z\ . \tag{2.7}$$

3. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

答：由于 f 的值域是 $\mathbb{R}$ 的子集，因此 $f = u + iv$ 中 $v = 0$。因此由 CR 条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \tag{2.8}$$

即 u 与 x, y 都无关，是常数。因此 $f = u =$ 常数。

3 第三周 (9 月 25 日课上交)

1. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1}\bar{z}dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2}\bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半单位圆 (逆时针方向) 和下半单位圆 (顺时针方向)。

答：利用参数积分计算积分。令 $z = re^{i\theta}$, 于是沿着积分曲线有 $dz = rie^{i\theta}d\theta$，

$$I(C) = \int_C \bar{z}dz = \int_C re^{-i\theta}rie^{i\theta}d\theta = (r^2)\big|_{r=1} i\int d\theta\ . \tag{3.1}$$

于是有

$$I(C_1) = i\int_0^{\pi} d\theta = \pi i, \qquad I(C_2) = i\int_0^{-\pi} d\theta = -i\pi\ . \tag{3.2}$$

2. 计算

$$\int_{|z|=1}\frac{\sin(\cos z)}{z}dz\ . \tag{3.3}$$

答：由于 $\sin(\cos z)$ 在全平面解析，我们可以利用 Cauchy 积分公式

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz = 2\pi i \sin(\cos z)|_{z=0} = 2\pi i \sin(1) \ . \tag{3.4}$$

3. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z,\bar{z}) d\bar{z} dz \ , \tag{3.5}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

答：对于题目所述的复变函数，我们可以先对 f 复积分作实部虚部分解，并分别利用格林公式，

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z}) dz = \int_{\partial G} (udx - vdy) + i \int_{\partial G} (vdx + udy) \tag{3.6}$$

$$= -\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big) dxdy + i \int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dxdy \ . \tag{3.7}$$

又注意到

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) \ , \tag{3.8}$$

因此代入 $d\bar{z}dz = 2idxdy$，有

$$\partial_{\bar{z}} f d\bar{z} dz = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) 2idxdy + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) 2idxdy \tag{3.9}$$

$$= i\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dxdy - \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) dxdy \ . \tag{3.10}$$

比较 $\int_G \partial_{\bar{z}} f d\bar{z} dz$ 与上面结果可得目标结果。

4 第五周 (10 月 9 日交)

1. 计算围道积分

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\ \}. \tag{4.1}$$

答:

$$\Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k \frac{1}{z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{z^{n-2k}} \ . \tag{4.2}$$

因此

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{n} \oint_C C_n^k \frac{1}{z^{n-2k+1}} dz \ . \tag{4.3}$$

只有当 $n-2k+1=1$ 才有非零积分值，即此时 $n=2k$，即 n 是偶数。积分值为

$$2\pi i C_n^k = 2\pi i C_{2k}^k \ . \tag{4.4}$$

2. 计算围道积分, $n=1,2,3,\ldots$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n}\frac{dz}{z} \ , \qquad C=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\ \} \ . \tag{4.5}$$

答：由高阶导数公式，可以得到

$$= \frac{2\pi i}{n!}\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}[(e^z)^{(n)}]_{z=0} = \frac{2\pi i}{n!} \ . \tag{4.6}$$

3. 考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k c_k$, 其中 $r_k=(-1)^{k^2}$, $c_k=(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{k}$。分情况 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 讨论级数是否收敛，是否绝对收敛，给出简要说明。

答：级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k^2}(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k} \ . \tag{4.7}$$

当 $\theta=0$, 级数为

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \tag{4.8}$$

是个发散级数。

当 $\theta=\pi$，级数为

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = \ln 2 \tag{4.9}$$

是收敛级数，但不是绝对收敛。

4. 讨论下面幂级数是否收敛，若收敛，给出收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}z^n \ , \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n \ . \tag{4.10}$$

答：

$$\ell \equiv \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \infty \ . \tag{4.11}$$

因此第一个级数收敛，收敛半径是无穷大。

$$\ell \equiv \lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n})^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = 1 \ . \tag{4.12}$$

第二个级数收敛，收敛半径是 1.

5 第六周 (10 月 16 日交)

1. 考虑二元实函数 $u(x, y)$

$$u(x, y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \ . \tag{5.1}$$

设 $u(x, y)$ 是在某区域内解析的复变函数 $f(z = x + iy)$ 的实部。

(1) 用共轭调和函数方法求 $f(z)$ 的虚部 $v(x, y)$，并写出函数 $f(z)$ 关于 $z = x + iy$ 的表达式；

(2) 指出 $f(z)$ 的奇点以及所属分类；

(3) 分别以 $z = 0,\ z = 1,\ z = -1$ 为展开中心，作 Laurent 或 Taylor 展开。指出所得级数的收敛区域或收敛半径。

答：

(1) 对 $u(x, y)$ 求偏导得到

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \ , \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = +\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \ . \tag{5.2}$$

虚部函数 $v(x, y)$ 必然满足

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \ , \qquad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \ . \tag{5.3}$$

于是 (也可以直接观察到 $v(x, y)$ 是什么，然后验证满足 Cauchy-Riemann 条件)

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} dx - \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} dy \ . \tag{5.4}$$

路径可以选为先沿 x 轴 $(y = 0)$ 然后沿线段 $(x, 0) \to (x, y)$。于是有 (dx 积分不贡献)

$$= \int_{(x,0)}^{(x,y)} -\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} dy = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + C \ . \tag{5.5}$$

于是，(积分常数不能漏)

$$u + iv = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} + iC = \frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{1}{z^2} + iC \ . \tag{5.6}$$

(2) 奇点为 $z = 0$，是二阶极点。

(3) $z = \pm 1$ 为解析点，可以以它们为中心作 Taylor 展开。又知导数

$$\frac{d^k}{dz^k} z^{-2} = (-2)(-2-1)\ldots(-2-k+1)z^{-2-k} = (-1)^k 2 \cdot 3 \cdot \ldots (k+1) z^{-k-2} = (-1)^k (k+1)! z^{-k-2} \ , \tag{5.7}$$

因此

$$\frac{d^k}{dz^k}\bigg|_{z=1} z^{-2} = (-1)^k(k+1)!, \qquad \frac{d^k}{dz^k}\bigg|_{z=-1} z^{-2} = (-1)^k(k+1)!(-1)^{-k-2} = (k+1)!\ . \tag{5.8}$$

因此以 1 为中心的 Taylor 展开为 (积分常数不能漏)

$$f(z) = iC + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(z-1)^k\ , \tag{5.9}$$

因此以 -1 为中心的 Taylor 展开为

$$f(z) = iC + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(z+1)^k\ . \tag{5.10}$$

在环形区域 $0 < |z| < \infty$ 内函数可以作 Laurent 展开，就是函数本身

$$\frac{1}{z^2} + iC = \frac{1}{z^2} + iC\ . \tag{5.11}$$

2. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1}\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ . \tag{5.12}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域；

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$)。

答：

(1) 有圆盘状解析区域 $|z| < 1$ 和环状解析区域 $1 < |z| < \infty$。

(2) 在 $|z| < 1$ 区域内可以作 Taylor 展开，

$$-\frac{z^n}{1-z} = -z^n\sum_{k=0}^{\infty}z^k = -\sum_{k=0}^{\infty}z^{n+k} = -z^n - z^{n+1} - z^{n+2} - \ldots\ . \tag{5.13}$$

的确每个系数都与 $f^{(n)}(0)/n!$ 相等，

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}f(z)_{n=2} = 0, 1, 1, \qquad \text{当 } k = 1, 2, 3\ . \tag{5.14}$$

在环状区域 $0 < |z| < \infty$ 可以作 Laurent 展开,

$$-\frac{z^n}{1-z} = +\frac{1}{z}\frac{z^n}{1-z^{-1}} = +\frac{1}{z}z^n\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k} = +\sum_{k=0}^{\infty}z^{n-k-1} = +z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \ldots\ . \tag{5.15}$$

当 $n=2$,

$$-\frac{z^2}{1-z} = +z + 1 + z^{-1} + \ldots\ , \tag{5.16}$$

与 $f^{(k)}(0)/k!$ 不相等。

6 第七周 (10 月 23 日交)

1. 计算下面函数在 $z=0$ 的留数

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3}\ ,\qquad (b)\ \frac{e^z}{z^3}\ . \tag{6.1}$$

答：(a) 中 0 为 3-阶极点，可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 0}\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=0}\left[(z)^3\frac{\cos z}{z^3}\right] = -\frac{1}{2}\ . \tag{6.2}$$

(b) 中 0 为 3-阶极点，可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 0}\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=0}\left[(z)^3\frac{e^z}{z^3}\right] = +\frac{1}{2}\ . \tag{6.3}$$

2. 计算下面函数在指定奇点的留数

$$(a)\ \frac{1}{\sinh \pi z},\quad z=ni,\ n\in\mathbb{Z}\ ,\qquad (b)\ \frac{e^z}{z^2-1},\quad z=1\ . \tag{6.4}$$

答：(a) 中 $z=ni$, $n\in\mathbb{Z}$ 是 $\sinh(\pi z)$ 的单极点，因此可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z=ni}\frac{1}{\sinh \pi z} = \frac{1}{(\sinh \pi z)'_{z=ni}} = \frac{1}{\pi\cosh n\pi i} = (-1)^n\frac{1}{\pi}\ . \tag{6.5}$$

(b) 中 $z=1$ 为单极点，因此可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 1}\frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e^1}{(z^2-1)'_{z=1}} = \frac{e}{2}\ . \tag{6.6}$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \oint_{|z|=\rho>1}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz\ ,\qquad (b)\ \oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n}}dz\ , n=1,2,\ldots\ . \tag{6.7}$$

答：(a) 由于围道的半径大于一，所以包含在围道内部的奇点有 $z=0$ 和 $z=1$。积分等于 $2\pi i$ 乘以留数之和，而两个奇点分别为单极点，因此可以简单计算留数

$$\mathrm{Res}_{z=0} = \frac{-2}{-1} = 2\ ,\qquad \mathrm{Res}_{z=1} = \frac{3}{1} = 3\ . \tag{6.8}$$

因此积分为 $2\pi i(2+3)=10\pi i$。

(b) 由于围道包围 $(2n)$-阶极点 $z=0$，因此只需要收集该处留数。又由于 $\cos z$ 在 z 处的泰勒展开只有偶数次幂项，因此分式的 Laurent 展开只有偶数次幂项。因此 z^{-1} 次幂项为零，留数为零。因此积分为零。

4. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ a>0\ ,\qquad (b)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2}dx\ . \tag{6.9}$$

(a) 见林老师讲义中第 7 小节例 1 $m=1$ 的计算

(b) 实轴上有 2 阶极点，积分值为无穷大。

7 第八周 (10 月 30 日交)

1. 弦在阻尼介质中振动，t 时刻 x 处单位长度所受阻力为

$$F(x,t) = -R\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{7.1}$$

其中 R 称为阻力系数。试推导弦在该阻尼介质中的波动方程。

答：考虑弦上平衡时位于区间 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段，记该小段的平均阻力密度为 $\bar{F}$，则该小段在 u 方向的运动方程为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 + \bar{F}\Delta x = T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) - R\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\Delta x, \tag{7.2}$$

即

$$\rho\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = T\frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) - R\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}. \tag{7.3}$$

令 $\Delta x \to 0$，则 $\bar{u} \to u(x,t)$，上式成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{R}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{7.4}$$

（写到这里可以认为已经完成。）记 $a = \sqrt{T/\rho}$，$b = R/\rho$，则上式可以表达为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{7.5}$$

2. 弹性均匀细杆，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端被拉长至 $x=l+d$ 并保持静止（d 不超过弹性限度），$t=0$ 时突然放开 $x=l$ 端，写出杆作纵振动的定解问题。

答：由于细杆是均匀的，拉长之后杆上各点位移 u 正比于平衡时的坐标 x，比例系数为 d/l，故初始时刻 x 点处的位移为 $u|_{t=0} = \dfrac{d}{l}x$。杆在放开前保持静止，因而初始时刻杆上各点均没有速度，有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$。$x=0$ 端固定，满足齐次的第一类边界条件 $u|_{x=0} = 0$；$x=l$ 端自由，满足齐次的第二类边界条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$。综合起来，定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{7.6}$$

$$u|_{t=0} = \frac{d}{l}x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{7.7}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{7.8}$$

3. 混凝土浇灌后逐渐放出水化热，放热速率正比于当时尚储存着的水化热密度 Q，即

$$\frac{dQ}{dt} = -\beta Q. \tag{7.9}$$

假设混凝土的热导率 k 是常数，试推导浇灌后混凝土内的热传导方程。

答：设 Q_0 是 $t=0$ 时储存着的水化热密度，则 $t>0$ 时刻转换到单位体积介质里的热量为 Q_0-Q，因而水化热对应的热源强度是 $F=d(Q_0-Q)/dt=-dQ/dt=\beta Q$ 。于是，热传导方程为

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\nabla^2u=F=\beta Q. \tag{7.10}$$

（写到这里可以认为已经完成。）

求解方程 (7.9)，可得 $Q=Q_0e^{-\beta t}$，因此，热传导方程可以写成

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\nabla^2u=\beta Q_0e^{-\beta t}. \tag{7.11}$$

令

$$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}},\quad f=\frac{\beta Q_0e^{-\beta t}}{c\rho}, \tag{7.12}$$

则热传导方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\nabla^2u=f. \tag{7.13}$$

8 第九周（11 月 6 日交）

1. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<5,\quad t>0 \tag{8.1}$$

$$u(0,t)=0,\qquad u(5,t)=0,\qquad t\geq 0 \tag{8.2}$$

$$u\Big|_{t=0}=4\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)-3\sin(5\pi x)\ ,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\qquad 0\leq x\leq 5\ . \tag{8.3}$$

(1a) 考虑变量分离的特殊解 $u=X(x)T(t)$，写出相应 X，T 的本征问题，并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(1b) 求解 T，并写下一般解。

(1c) 利用初始条件确定一般解的系数。

答：(1a) 代入 $u=XT$，得到

$$\frac{d^2T}{dt^2}X-9T\frac{d^2X}{dx^2}=0\Rightarrow\frac{1}{3^2T}\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\lambda\ . \tag{8.4}$$

约化边界条件

$$X(0)=X(5)=0\ . \tag{8.5}$$

X 的本征问题

$$\frac{d^2X}{dx^2}X = -\lambda X, \qquad X(0) = X(5) = 0 \ . \tag{8.6}$$

当 $\lambda = \lambda_n \equiv \frac{n^2\pi^2}{5^2}$ 时，得到非平凡解

$$X_n = \sin\frac{n\pi x}{5} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.7}$$

(1b) 于是 T 满足方程

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{n^2\pi^2}{5^2}3^2 T \ . \tag{8.8}$$

于是解为

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{3n\pi}{5}t + B_n\sin\frac{3n\pi}{5}t \ . \tag{8.9}$$

一般解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{3n\pi}{5}t + B_n\sin\frac{3n\pi}{5}t)\sin\frac{n\pi}{5}x \ . \tag{8.10}$$

(1c) 由于 $\partial u/\partial t(t=0) = 0$，有

$$B_n = 0 \Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{3n\pi}{5}t\sin\frac{n\pi x}{5} \ . \tag{8.11}$$

最后，

$$u(t=0) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{5} = 4\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) - 3\sin(5\pi x) \ , \tag{8.12}$$

从中可以读出

$$A_5 = 4, \qquad A_{10} = -1, \qquad A_{25} = -3, \qquad \text{其余 } A_n = 0 \ . \tag{8.13}$$

于是

$$u = 4\cos(3\pi t)\sin(\pi x) - \cos(6\pi t)\sin(2\pi x) - 3\cos(15\pi t)\sin(5\pi x) \ . \tag{8.14}$$

2. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{8.15}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, \qquad t \geq 0 \tag{8.16}$$

$$u\Big|_{t=0} = \frac{u_0 x}{\ell} \ , \qquad 0 \le x \le \ell \ . \tag{8.17}$$

(2a) 考虑变量分离的特殊解 $u = X(x)T(t)$，写出相应 X，T 的本征问题，并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(2b) 求解 T，并写下一般解。

(2c) 利用初始条件确定一般解的系数。（可利用公式 $(\sin x - x\cos x)' = x\sin x$）

答：

(2a) 代入 $u = XT$ 后，得到

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X, \qquad X(0) = \frac{dX}{dx}\Big|_{x=\ell} = 0 \ , \qquad\qquad \frac{dT}{dt} = -\lambda a^2 T \ . \tag{8.18}$$

结合边界条件，得到 X 为

$$X_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8.19}$$

并且

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2} \ , n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8.20}$$

(2b) 于是 T 满足

$$\frac{dT}{dt} + \frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4\ell^2}T = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n \exp\Big(- \frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4\ell^2}t\Big) \ , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8.21}$$

于是一般解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\Big(- \frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4\ell^2}t\Big)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x \ . \tag{8.22}$$

(2c) 初始条件要求

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x = \frac{u_0 x}{\ell} \ . \tag{8.23}$$

可以反解系数 A_n，利用正交关系

$$\int_0^{\pi} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2\ell} = \frac{\ell}{2}\delta_{mn} \ . \tag{8.24}$$

于是，

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\frac{u_0 x}{\ell}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}dx = (-1)^n\frac{8u_0}{(2n+1)^2\pi^2} \ , \tag{8.25}$$

即

$$u(x,t) = \frac{8u_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\exp\Big(- \frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4\ell^2}t\Big)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x \ . \tag{8.26}$$

9 第十周（11 月 13 日交)

1. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{9.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{u_0}{a}\ , \quad u(a,y) = u_1 + u_2 \cos\frac{\pi}{b}y \tag{9.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0\ . \tag{9.3}$$

答：利用分解变量法设 $u(x,y) = X(x)Y(y)$，可以分解出

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = +\lambda\ . \tag{9.4}$$

由于 y 方向的边界是齐次的，我们先求解 $Y(y)$。

当 $\lambda = 0$，$Y = Ay + B$，而边界条件要求 $A = 0$，因此有本征函数 $Y_0 = 1$。

当 $\lambda > 0$，$Y = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\sin(\sqrt{\lambda}y)$，边界条件要求 $B = 0$，以及 $-\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$。因此

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}\ , \qquad Y_n(y) = \cos\frac{n\pi}{b}y\ , \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9.5}$$

当 $\lambda < 0$，无解。

于是 X 满足

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} = \lambda_n X_n\ , \tag{9.6}$$

当 $n = 0$，$\lambda_0 = 0$，$X_0 = Cx + D$。当 $n > 0$，有

$$X_n = C_n\cosh(\frac{\pi n}{b}x) + D_n\sinh(\frac{\pi n}{b}x)\ . \tag{9.7}$$

于是一般解为

$$u = C_0x + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_n\cosh(\frac{\pi n}{b}x) + D_n\sinh(\frac{\pi n}{b}x)\Big)\cos\frac{n\pi}{b}y \tag{9.8}$$

x 方向的边界条件要求

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{\pi n}{b}\cos\frac{n\pi}{b}y = \frac{u_0}{a} \Rightarrow C_0 = \frac{u_0}{a}, \qquad D_n = 0\ , \tag{9.9}$$

以及

$$u(a,y) = \frac{u_0}{a}a + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cosh(\frac{n\pi a}{b})\cos\frac{n\pi}{b}y = u_1 + u_2\cos\frac{\pi}{b}y\ , \tag{9.10}$$

因此

$$D_0 = u_1 - u_0 \ , \qquad C_1 = u_2\Big(\cosh(\frac{\pi a}{b})\Big)^{-1} \qquad C_{n>1} = 0 \ . \tag{9.11}$$

最后，

$$u(x,y) = \frac{u_0}{a}x + (u_1 - u_0) + \frac{u_2}{\cosh(\pi a/b)}\cos\frac{\pi}{b}y \tag{9.12}$$

2. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\Big)_{x=\ell} = 0 \tag{9.14}$$

$$u(x, t=0) = u_0 \ . \tag{9.15}$$

答：令 $u = X(x)T(t)$，则有本征问题

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0 \ , \qquad \frac{dX}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{dX}{dx}\Big|_{x=\ell} + hX(\ell) = 0 \ . \tag{9.16}$$

若 $\lambda = 0$，则 $X = Ax + B$，边界条件要求 $A = 0$，$A + h(A\ell + B) = 0$，从而只能 $B = 0$。(题目暗含 $h > 0$ 条件)

$\lambda > 0$，有 $X = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$，边界条件要求

$$B = 0, \qquad -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ell) + hA\cos(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \cot(\sqrt{\lambda}\ell) = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \ . \tag{9.17}$$

方程的解即为所有本征值 λ_n。

$\lambda < 0$ 时同样没有非平凡解（除非 $h < 0$ 时有一个解，但不足以构成本征函数集，故不考虑）。

所以本征函数为 $\cos(\sqrt{\lambda_n}x)$，其中 $\lambda_n = h\cot(\sqrt{\lambda_n}\ell)$，$n = 1, 2, \ldots$ (n 的取值范围比较任意，只是一个标号而已)。

于是 T 有解

$$T_n(t) = e^{-\kappa\lambda_n t} \tag{9.18}$$

一般解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa\lambda_n t}\cos(\sqrt{\lambda_n}x) \ . \tag{9.19}$$

代入初始条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x) = u_0 \ . \tag{9.20}$$

可以得到

$$\sum_n \int_0^\ell A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x)\cos(\sqrt{\lambda_m}x)dx = \int_0^\ell u_0 \cos(\sqrt{\lambda_m}x)dx \ , \tag{9.21}$$

于是利用本征函数的正交性（不必证明）

$$\sum_n A_n ||\cos(\sqrt{\lambda_n}x)||^2\delta_{mn} = A_m ||\cos(\sqrt{\lambda_m}x)||^2 = \int_0^\ell u_0 \cos(\sqrt{\lambda_m}x)dx \ , \tag{9.22}$$

即

$$A_n = \frac{1}{||\cos\sqrt{\lambda_n}x||^2}\int_0^\ell u_0 \cos(\sqrt{\lambda_n}x)dx \ , \tag{9.23}$$

其中

$$||\cos\sqrt{\lambda_n}x||^2 = \int_0^\ell \cos(\sqrt{\lambda_n}x)\cos(\sqrt{\lambda_n}x)dx \ . \tag{9.24}$$

10 第十一周（11 月 20 日交)

1. 扇形薄板，半径为 a，圆心角为 β，用坐标描述即 $\rho \le a,\ 0 \le \phi \le \beta$。板面绝热，两条直边保持温度为 0 度，弧边温度为 $f(\phi) = u_0\phi(\beta-\phi)$，其中 u_0 为常数，求板面上的温度分布。

答：记板面上的温度分布为 $u(\rho,\phi)$，则定解问题为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \quad (\rho < a,\ 0 < \phi < \beta), \tag{10.1}$$

$$u|_{\phi=0} = 0, \quad u|_{\phi=\beta} = 0, \tag{10.2}$$

$$u|_{\rho=a} = u_0\phi(\beta-\phi). \tag{10.3}$$

尝试寻找如下形式的特解

$$u(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi). \tag{10.4}$$

代入 (10.1) 式，得到两个方程

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \tag{10.5}$$

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0, \tag{10.6}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。由边界条件 (10.2) 得

$$R(\rho)\Phi(0) = R(\rho)\Phi(\beta) = 0, \tag{10.7}$$

即

$$\Phi(0) = \Phi(\beta) = 0. \tag{10.8}$$

(1) 如果 $\lambda < 0$，令 $\lambda = -\mu^2$ （其中 $\mu > 0$），则本征方程 (10.6) 的解为

$$\Phi(\phi) = Ce^{\mu\phi} + De^{-\mu\phi}. \tag{10.9}$$

从而，由 $0 = \Phi(0) = C + D$ 得 $D = -C$；再由 $0 = \Phi(\beta) = Ce^{\mu\beta} - Ce^{-\mu\beta} = 2C\sinh\mu\beta$ 得 $C = 0$。于是 $\Phi(\phi) \equiv 0$，这是平庸解。故 $\lambda < 0$ 不是本征值。

(2) 如果 $\lambda = 0$，则本征方程 (10.6) 的解为

$$\Phi(\phi) = C + D\phi. \tag{10.10}$$

由于 $0 = \Phi(0) = C$，故 $C = 0$；再由 $0 = \Phi(\beta) = D\beta$ 得 $D = 0$。于是 $\Phi(\phi) \equiv 0$，这是平庸解。故 $\lambda = 0$ 也不是本征值。

(3) 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$ （其中 $\mu > 0$），则本征方程 (10.6) 的解为

$$\Phi(\phi) = C\sin\mu\phi + D\cos\mu\phi. \tag{10.11}$$

由于 $0 = \Phi(0) = D$，故 $D = 0$；再由 $0 = \Phi(\beta) = C\sin\mu\beta$，可知仅当 $\sin\mu\beta = 0$ 时存在非平庸解，此时有 $\mu\beta = m\pi$，即 $\mu = m\pi/\beta$ $(m \in \mathbb{N}^+)$。于是，本征值和本征函数是

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{\beta^2}, \quad \Phi_m(\phi) = \sin\frac{m\pi\phi}{\beta}, \quad m \in \mathbb{N}^+. \tag{10.12}$$

这个本征函数族在区间 $[0, \beta]$ 上是正交完备的，满足

$$\int_0^\beta \sin\frac{m\pi\phi}{\beta}\sin\frac{n\pi\phi}{\beta}\,d\phi = \frac{\beta}{2}\delta_{mn}. \tag{10.13}$$

将本征值 λ_m 代入方程 (10.5)，得

$$\rho^2 R_m''(\rho) + \rho R_m'(\rho) - \frac{m^2\pi^2}{\beta^2}R_m(\rho) = 0. \tag{10.14}$$

这是 Euler 方程，解为

$$R_m(\rho) = \{\rho^{m\pi/\beta}, \rho^{-m\pi/\beta}\}, \quad m \in \mathbb{N}^+. \tag{10.15}$$

在 $\rho = 0$ 处，温度应该取有限值，而解 $\rho^{-m\pi/\beta}$ 在 $\rho = 0$ 处有奇性，应该舍弃。

从而，方程 (10.1) 的一般解可以写成

$$u(\rho, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{\rho}{a}\right)^{m\pi/\beta} \sin\frac{m\pi\phi}{\beta}. \tag{10.16}$$

代入边界条件 (10.3)，可得

$$u_0\phi(\beta-\phi)=u(a,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi\phi}{\beta}. \tag{10.17}$$

根据 (10.13) 式，有

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{2}{\beta}\int_0^{\beta}u_0\phi(\beta-\phi)\sin\frac{m\pi\phi}{\beta}\,d\phi=-\frac{2u_0}{m\pi}\int_0^{\beta}(\beta\phi-\phi^2)\,d\cos\frac{m\pi\phi}{\beta}\\
&=-\frac{2u_0}{m\pi}(\beta\phi-\phi^2)\cos\frac{m\pi\phi}{\beta}\bigg|_0^{\beta}+\frac{2u_0}{m\pi}\int_0^{\beta}(\beta-2\phi)\cos\frac{m\pi\phi}{\beta}\,d\phi=\frac{2u_0\beta}{m^2\pi^2}\int_0^{\beta}(\beta-2\phi)\,d\sin\frac{m\pi\phi}{\beta}\\
&=\frac{2u_0\beta}{m^2\pi^2}(\beta-2\phi)\sin\frac{m\pi\phi}{\beta}\bigg|_0^{\beta}+\frac{4u_0\beta}{m^2\pi^2}\int_0^{\beta}\sin\frac{m\pi\phi}{\beta}\,d\phi=-\frac{4u_0\beta^2}{m^3\pi^3}\cos\frac{m\pi\phi}{\beta}\bigg|_0^{\beta}\\
&=-\frac{4u_0\beta^2}{m^3\pi^3}(\cos m\pi-1)=\frac{4u_0\beta^2}{m^3\pi^3}[1-(-1)^m].
\end{aligned} \tag{10.18}$$

于是，板面上的温度分布为

$$u(\rho,\phi)=\frac{4u_0\beta^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{m\pi/\beta}\sin\frac{m\pi\phi}{\beta}. \tag{10.19}$$

2. 用 Fourier 变换法求解下列定解问题，

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\quad(-\infty<x<+\infty,\quad y>0), \tag{10.20}$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x),\qquad u|_{y=+\infty}=0, \tag{10.21}$$

$$u|_{x=\pm\infty}=0. \tag{10.22}$$

提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^{\infty}e^{-bx}\cos ax\,dx=\frac{b}{a^2+b^2},\qquad b>0. \tag{10.23}$$

答：由于 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$，可以对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x,y)\leftrightarrow U(k,y),\qquad \varphi(x)\leftrightarrow\Phi(k). \tag{10.24}$$

利用微分定理，对定解问题中各式作 Fourier 变换，可得

$$\frac{d^2U}{dy^2}-k^2U=0, \tag{10.25}$$

$$U|_{y=0}=\Phi(k), \tag{10.26}$$

$$U|_{y=+\infty}=0. \tag{10.27}$$

方程 (10.25) 的解为

$$U(k,y)=C(k)e^{ky}+D(k)e^{-ky}. \tag{10.28}$$

代入 (10.26) 式，得

$$\Phi(k)=U|_{y=0}=C(k)+D(k). \tag{10.29}$$

当 $k>0$ 时，由 (10.27) 式得

$$0=U|_{y=+\infty}=\lim_{y\to\infty}C(k)e^{ky}, \tag{10.30}$$

故

$$C(k)=0,\quad U(k,y)=D(k)e^{-ky}=\Phi(k)e^{-|k|y}. \tag{10.31}$$

当 $k<0$ 时，由 (10.27) 式得

$$0=U|_{y=+\infty}=\lim_{y\to\infty}D(k)e^{-ky}, \tag{10.32}$$

故

$$D(k)=0,\quad U(k,y)=C(k)e^{ky}=\Phi(k)e^{-|k|y}. \tag{10.33}$$

因此，$k>0$ 和 $k<0$ 两种情况的解可以归纳为

$$U(k,y)=\Phi(k)e^{-|k|y}. \tag{10.34}$$

利用积分项关于 k 的奇偶性，根据积分公式 (10.23)，可得 $e^{-|k|y}$ 的原函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(e^{-|k|y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|k|y}e^{ikx}dk=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|k|y}\cos kx\,dk\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ky}\cos kx\,dk=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}.\end{aligned} \tag{10.35}$$

由卷积定理得最后结果为

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(k)e^{-|k|y}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi.\end{aligned} \tag{10.36}$$

11 第十二周（11 月 27 日交)

1. 阶跃函数 $\theta(x)$ 定义为

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{11.1}$$

求证

$$\theta'(x) = \delta(x). \tag{11.2}$$

证明：对于任意连续函数 $f(x)$，利用分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\theta'(x)dx &= f(x)\theta(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\theta(x)dx = f(+\infty) - \int_0^{+\infty} f'(x)dx \\ &= f(+\infty) - f(x)|_0^{+\infty} = f(0).\end{aligned} \tag{11.3}$$

可见，$\theta'(x)$ 满足 $\delta(x)$ 的定义二，故 $\theta'(x) = \delta(x)$。

2. 用 Fourier 变换法求解下列定解问题，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0), \tag{11.4}$$

$$u|_{t=0} = e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{11.5}$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0. \tag{11.6}$$

并尝试画出求得的解 $u(x,t)$ 在 $t = 0, 1, 2$ 三个时刻随 x 变化的函数图象草图。

答：由于 x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$，可以对 x 作 Fourier 变换。设

$$u(x,y) \leftrightarrow U(k,y), \tag{11.7}$$

则由微分定理可得

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) = \frac{d}{dt}\mathscr{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = ik\frac{dU}{dt}, \quad \mathscr{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = (ik)^2 U = -k^2 U. \tag{11.8}$$

因此，作 Fourier 变换之后，从方程 (11.4) 得到

$$ik\frac{dU}{dt} + k^2 U = 0, \tag{11.9}$$

即

$$\frac{dU}{dt} - ikU = 0. \tag{11.10}$$

上述方程的解是

$$U = Ce^{ikt}, \tag{11.11}$$

其中 C 为常数。

另一方面，根据积分公式 (10.23)，有

$$\mathscr{F}(e^{-|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos kx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}. \tag{11.12}$$

从而，作 Fourier 变换之后，从初始条件 (11.5) 得到

$$U\big|_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}. \tag{11.13}$$

由此可以确定 (11.11) 式中的常数 C，从而导出

$$U(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{ikt}}{k^2+1}. \tag{11.14}$$

(11.12) 式相应的 Fourier 反变换形式为

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}\right) = e^{-|x|}. \tag{11.15}$$

于是，根据延迟定理，有

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{ikt}}{k^2+1}\right) = e^{-|x+t|}. \tag{11.16}$$

这个解 $u(x,t)$ 在 $t=0,1,2$ 三个时刻随 x 变化的函数图象如图 1 所示。

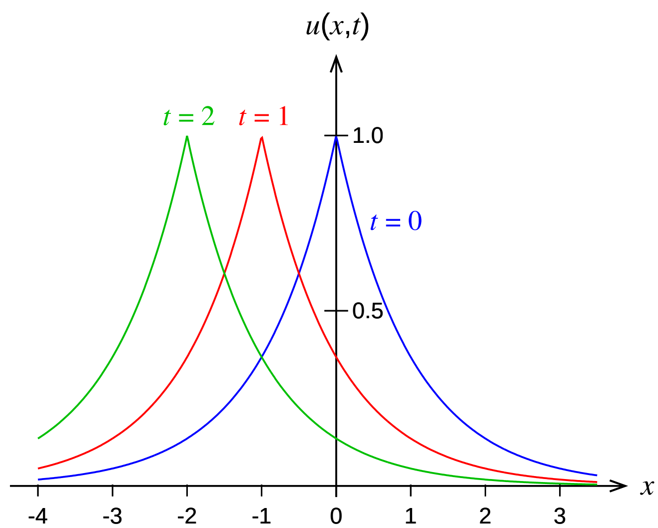

图 1: 解 $u(x,t)$ 在 $t=0,1,2$ 三个时刻随 x 变化的函数图象。

3. 微观粒子在中心力场 $V(r)$ 中的定态 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 u + V(r)u = Eu, \tag{11.17}$$

其中 $u(r,\theta,\phi)$ 是波函数，μ 是粒子质量，E 是能量，$\hbar$ 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对该方程分离变量。

答：在球坐标系中，可以将方程 (11.17) 表达为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right]+V(r)u=Eu. \tag{11.18}$$

令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$，代入上式得

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]+V(r)RY=ERY, \tag{11.19}$$

整理一下，有

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\right]+[V(r)-E]r^2=\frac{\hbar^2}{2\mu Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]. \tag{11.20}$$

上式左边与 θ、ϕ 无关，右边与 r 无关，因而与 r、θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 λ。从而得到径向方程

$$r^2R''+2rR'-\frac{2\mu}{\hbar^2}[(V-E)r^2-\lambda]R=0, \tag{11.21}$$

和角向方程

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]-\lambda Y=0. \tag{11.22}$$

对角向方程可以进一步分离变量。令 $Y(\theta,\phi)=H(\theta)\Phi(\phi)$，代入角向方程，有

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)+\frac{H}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]-\lambda H\Phi=0. \tag{11.23}$$

整理，得

$$\frac{1}{H}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)\right]-\frac{2\mu\lambda}{\hbar^2}\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}. \tag{11.24}$$

上式左边与 ϕ 无关，右边与 θ 无关，因而与 θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 ν。从而导出两个方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)-\left(\frac{2\mu\lambda}{\hbar^2}+\frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)H=0 \tag{11.25}$$

和

$$\Phi''+\nu\Phi=0. \tag{11.26}$$

12 第十三周（12 月 4 日交)

1. 根据 Legendre 多项式的级数表达式

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-)^k(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k},\quad l\in\mathbb{N}, \tag{12.1}$$

写出 $\mathrm{P}_0(x)$、$\mathrm{P}_1(x)$、$\mathrm{P}_2(x)$、$\mathrm{P}_3(x)$、$\mathrm{P}_4(x)$ 的具体形式。

答：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(x) &= \frac{(-)^0 0!}{2^0 0!0!0!}x^0 = 1, &(12.2)\\
\mathrm{P}_1(x) &= \frac{(-)^0 (2)!}{2^1 0!1!1!}x^1 = x, &(12.3)\\
\mathrm{P}_2(x) &= \frac{(-)^0 4!}{2^2 0!2!2!}x^2 + \frac{(-)^1 (4-2)!}{2^2 1!(2-1)!(2-2)!}x^{2-2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, &(12.4)\\
\mathrm{P}_3(x) &= \frac{(-)^0 6!}{2^3 0!3!3!}x^3 + \frac{(-)^1 (6-2)!}{2^3 1!(3-1)!(3-2)!}x^{3-2} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, &(12.5)\\
\mathrm{P}_4(x) &= \frac{(-)^0 8!}{2^4 0!4!4!}x^4 + \frac{(-)^1 (8-2)!}{2^4 1!(4-1)!(4-2)!}x^{4-2} + \frac{(-)^2 (8-4)!}{2^4 2!(4-2)!(4-4)!}x^{4-4}\\
&= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. &(12.6)
\end{aligned}$$

2. 设 ν 不等于整数或半整数，从头推导 Bessel 方程的第二解 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$。

答：第二解对应于 $s_2 = -\nu$，此时可以得到 $a_1 = 0$ 和递推关系

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k-\nu+2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_k}{(k-2\nu+2)(k+2)}. \tag{12.7}$$

由此递推关系和 $a_1 = 0$ 可以推出

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{12.8}$$

反复利用递推关系又可推出

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= -\frac{a_{2k-2}}{(2k-2\nu)2k} = \frac{(-)^2 a_{2k-4}}{(2k-2\nu)(2k-2\nu-2)\cdot 2k(2k-2)} = \cdots\\
&= \frac{(-)^k a_0}{(2k-2\nu)(2k-2\nu-2)\cdots(-2\nu+2)\cdot 2k(2k-2)\cdots 2}\\
&= \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(-\nu+1)\cdot k!}. &(12.9)
\end{aligned}$$

利用 Γ 函数的性质 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$，有

$$\begin{aligned}
\Gamma(k-\nu+1) &= (k-\nu)\Gamma(k-\nu) = (k-\nu)(k-\nu-1)\Gamma(k-\nu-1) = \cdots\\
&= (k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(-\nu+1)\Gamma(-\nu+1), &(12.10)
\end{aligned}$$

故

$$(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(-\nu+1) = \frac{\Gamma(k-\nu+1)}{\Gamma(-\nu+1)}. \tag{12.11}$$

从而可得

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0 \Gamma(-\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(k-\nu+1)}. \tag{12.12}$$

取

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}, \tag{12.13}$$

则有

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(\nu+1)} \frac{(-)^k\Gamma(-\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k-\nu+1)} = \frac{(-)^k}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(k-\nu+1)}, \tag{12.14}$$

于是得到第二解为

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k+s_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(k-\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} = \mathrm{J}_{-\nu}(x). \tag{12.15}$$

3. 根据递推关系

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2k}, \quad k \in \mathbb{N}^+, \tag{12.16}$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k} = \frac{(-)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2} - \frac{(-)^k\beta}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}, \quad k \in \mathbb{N}^+. \tag{12.17}$$

证明：由递推关系可得

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} - \frac{-\beta}{2^2} = \frac{(-)^1 a_0}{2^2(1!)^2} - \frac{(-)^1\beta}{2^2(1!)^2}\sum_{r=1}^{1}\frac{1}{r}, \tag{12.18}$$

故 (12.17) 式对 $k=1$ 成立。

假设当 $k=n$ 时，(12.17) 式成立，即

$$a_{2n} = \frac{(-)^n a_0}{2^{2n}(n!)^2} - \frac{(-)^n\beta}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}. \tag{12.19}$$

那么，根据递推关系可以推出

$$\begin{aligned}
a_{2n+2} &= -\frac{a_{2n}}{(2n+2)^2} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2(n+1)} \\
&= -\frac{1}{(2n+2)^2}\left[\frac{(-)^n a_0}{2^{2n}(n!)^2} - \frac{(-)^n\beta}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\right] - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2(n+1)} \\
&= \frac{(-)^{n+1}a_0}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2(n+1)} \\
&= \frac{(-)^{n+1}a_0}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} - \frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\sum_{r=1}^{n+1}\frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{12.20}$$

可见，(12.17) 式对 $k=n+1$ 也成立。

因此，(12.17) 式对任意 $k \in \mathbb{N}^+$ 成立。

13 第十四周（12 月 11 日交)

1. 设 $m \in \mathbb{N}^+$，根据递推关系

$$a_{2k+2m} = -\frac{a_{2k+2m-2}}{2^2 k(k+m)} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k+m+1} k!(k+m)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+m}\right), \quad k \in \mathbb{N}^+, \tag{13.1}$$

用数学归纳法证明

$$a_{2k+2m} = \frac{(-)^k m! a_{2m}}{2^{2k} k!(k+m)!} - \frac{(-)^k \beta}{2^{2k+m+1} k!(k+m)!}[\psi(k+m+1) + \psi(k+1) - \psi(m+1) - \psi(1)], \quad k \in \mathbb{N}^+, \tag{13.2}$$

其中 ψ 函数满足

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}. \tag{13.3}$$

证明：根据 (13.3) 式，有

$$\psi(1+1) = \psi(1) + \frac{1}{1}, \quad \psi(1+m+1) = \psi(1+m) + \frac{1}{1+m}, \tag{13.4}$$

即

$$1 = \psi(1+1) - \psi(1), \quad \frac{1}{1+m} = \psi(1+m+1) - \psi(1+m). \tag{13.5}$$

再利用递推关系，可得

$$\begin{aligned} a_{2+2m} &= -\frac{a_{2m}}{2^2(1+m)} - \frac{(-)^1 \beta}{2^{2+m+1} 1!(1+m)!}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+m}\right) \\ &= \frac{(-)^1 m! a_{2m}}{2^2 1!(1+m)!} - \frac{(-)^1 \beta}{2^{2+m+1} 1!(1+m)!}[\psi(1+m+1) + \psi(1+1) - \psi(m+1) - \psi(1)]. \end{aligned} \tag{13.6}$$

故 (13.2) 式对 $k = 1$ 成立。

假设当 $k = n$ 时，(13.2) 式成立，即

$$a_{2n+2m} = \frac{(-)^n m! a_{2m}}{2^{2n} n!(n+m)!} - \frac{(-)^n \beta}{2^{2n+m+1} n!(n+m)!}[\psi(n+m+1) + \psi(n+1) - \psi(m+1) - \psi(1)]. \tag{13.7}$$

那么，根据递推关系可以推出

$$\begin{aligned} & a_{2n+2+2m} \\ = & -\frac{a_{2n+2m}}{2^2(n+1)(n+1+m)} - \frac{(-)^{n+1} \beta}{2^{2n+2+m+1} (n+1)!(n+1+m)!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+m}\right) \\ = & -\frac{1}{2^2(n+1)(n+1+m)} \frac{(-)^n m! a_{2m}}{2^{2n} n!(n+m)!} \\ & + \frac{1}{2^2(n+1)(n+1+m)} \frac{(-)^n \beta}{2^{2n+m+1} n!(n+m)!}[\psi(n+m+1) + \psi(n+1) - \psi(m+1) - \psi(1)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2+m+1}(n+1)!(n+1+m)!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1+m}\right)\\
=&\ \frac{(-)^{n+1}m!a_{2m}}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1+m)!}\\
&-\frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2+m+1}(n+1)!(n+1+m)!}[\psi(n+m+1)+\psi(n+1)-\psi(m+1)-\psi(1)]\\
&-\frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2+m+1}(n+1)!(n+1+m)!}[\psi(n+1+1)-\psi(n+1)+\psi(n+1+m+1)-\psi(n+1+m)]\\
=&\ \frac{(-)^{n+1}m!a_{2m}}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1+m)!}\\
&-\frac{(-)^{n+1}\beta}{2^{2n+2+m+1}(n+1)!(n+1+m)!}[\psi(n+1+m+1)+\psi(n+1+1)-\psi(m+1)-\psi(1)]. \qquad (13.8)
\end{aligned}
$$

可见，(13.2) 式对 $k=n+1$ 也成立。

因此，(13.2) 式对任意 $k\in\mathbb{N}^+$ 成立。

2. 合流超几何方程的标准形式是

$$
xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0, \tag{13.9}
$$

求出将它化为 Sturm-Liouville 型方程

$$
\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]-q(x)y(x)+\alpha\rho(x)y(x)=0 \tag{13.10}
$$

时 $k(x)$、$q(x)$ 和 $\rho(x)$ 的具体形式。

答：方程 (13.9) 两边除以 x，得

$$
y''+\left(\frac{\gamma}{x}-1\right)y'-\frac{\alpha}{x}y=0. \tag{13.11}
$$

将上式与

$$
y''(x)+P(x)y'(x)-\tilde{Q}(x)y(x)+\alpha\tilde{\rho}(x)y(x)=0 \tag{13.12}
$$

比较，可知

$$
P(x)=\frac{\gamma}{x}-1, \quad \tilde{Q}(x)=0, \quad \tilde{\rho}(x)=-\frac{1}{x}. \tag{13.13}
$$

从而，有

$$
\int_{x_0}^{x}P(\xi)d\xi=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\gamma}{\xi}-1\right)d\xi=\gamma\ln\xi|_{x_0}^{x}-(x-x_0)=\gamma\ln\frac{x}{x_0}-x+x_0 \tag{13.14}
$$

简便起见，取 $x_0=1$（也可以保留 x_0 记号，或者取其它值），则上式化为

$$
\int_{1}^{x}P(\xi)d\xi=\gamma\ln x-x+1. \tag{13.15}
$$

于是，可得

$$
\begin{aligned}
k(x) &= \exp\left(\int_1^x P(\xi)d\xi\right) = \exp(\gamma\ln x - x + 1), && (13.16)\\
q(x) &= k(x)\tilde{Q}(x) = 0, && (13.17)\\
\rho(x) &= k(x)\tilde{\rho}(x) = -\frac{1}{x}\exp(\gamma\ln x - x + 1). && (13.18)
\end{aligned}
$$

3. 长为 l 的均匀细杆，侧面绝热，左端保持恒定温度零度，右端按 Newton 冷却定律与温度为零度的介质交换热量，即右端边界条件为

$$
\left.\left(u + h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0, \quad h > 0. \tag{13.19}
$$

已知 $u|_{t=0} = \varphi(x)$，求杆上温度的变化规律。

答：记细杆上各时刻的温度分布为 $u(x,t)$，定解问题为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < l, \quad t > 0), && (13.20)\\
&u|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(u + h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0, && (13.21)\\
&u|_{t=0} = \varphi(x). && (13.22)
\end{aligned}
$$

分离变量，设

$$
u(x,t) = X(x)T(t), \tag{13.23}
$$

代入方程 (13.20)，得

$$
XT' - a^2X''T = 0, \tag{13.24}
$$

即

$$
\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T}. \tag{13.25}
$$

上式左边与 t 无关，右边与 x 无关，因而与 t、x 均无关，是常数，记作 $-\lambda$。从而得到两个方程

$$
\begin{aligned}
T' + \lambda a^2 T &= 0, && (13.26)\\
X'' + \lambda X &= 0. && (13.27)
\end{aligned}
$$

另一方面，边界条件 (13.21) 化为

$$
X(0)T(t) = 0, \quad [X(l) + hX'(l)]T(t) = 0. \tag{13.28}
$$

$T(t)$ 不恒为零，故

$$
X(0) = 0, \quad X(l) + hX'(l) = 0. \tag{13.29}
$$

上式与方程 (13.27) 构成 Sturm-Liouville 本征值问题，权函数 $\rho(x) = 1$，因此本征值非负，即 $\lambda \geq 0$。

(1) 如果 $\lambda = 0$，则方程 (13.27) 的解为

$$X(x) = Cx + D. \tag{13.30}$$

代入 (13.29) 式，得 $X(0) = D = 0$，$X(l) + hX'(l) = Cl + Ch = 0$。由于 $l > 0$，$h > 0$，必有 $C = 0$。这是平庸解，故 $\lambda = 0$ 不是本征值。

(2) 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$（其中 $\mu > 0$），则方程 (13.27) 的解为

$$X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x. \tag{13.31}$$

代入 (13.29) 式，得 $X(0) = C = 0$，$X(l) + hX'(l) = D(\sin\mu l + \mu h\cos\mu l) = 0$，故非平庸解的存在要求

$$\tan\mu l = -\mu h. \tag{13.32}$$

这个方程有无穷多个分立的解，记为 μ_n，其中 $n \in \mathbb{N}^+$。它们对应于无穷多个分立的本征值 $\lambda_n = \mu_n^2$，相应的本征函数族是 $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$。

将本征值 λ_n 代入方程 (13.26)，得到的解为

$$T_n(t) = A_n\exp(-\lambda_n a^2 t). \tag{13.33}$$

于是，$u(x,t)$ 的一般解可以写成

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\exp(-\lambda_n a^2 t)\sin\mu_n x. \tag{13.34}$$

代入初始条件 (13.22)，得

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\mu_n x. \tag{13.35}$$

另一方面，根据 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论，本征函数族 $\{\sin\mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,l]$ 上是正交完备的，而上式实际上就是 $\varphi(x)$ 的广义 Fourier 级数展开式，因此展开系数可通过下式计算：

$$A_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_n x\,dx}{\int_0^l \sin^2\mu_n x\,dx}. \tag{13.36}$$

将展开系数代入 (13.34) 式，就得到杆上温度的变化规律。

14 第十五周（12 月 18 日交)

1. 记

$$I_{2l+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2l+1}\theta\,d\theta, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{14.1}$$

利用分部积分，证明递推关系

$$I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+1}I_{2l-1},\quad l\geq 1. \tag{14.2}$$

再根据这个递推关系和

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta=1, \tag{14.3}$$

证明

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta\,d\theta=\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}. \tag{14.4}$$

证明：对于 $l\geq 1$，利用分部积分，有

$$\begin{aligned}I_{2l+1}&=\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta\,dx=-\int_0^{\pi/2}\sin^{2l}\theta\,d\cos\theta=-\sin^{2l}\theta\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}+2l\int_0^{\pi/2}\sin^{2l-1}\theta\cos^2\theta\,d\theta\\&=2l\int_0^{\pi/2}\sin^{2l-1}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta=2l\left[\int_0^{\pi/2}\sin^{2l-1}\theta\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta\,d\theta\right]\\&=2l[I_{2l-1}-I_{2l+1}],\end{aligned} \tag{14.5}$$

故

$$I_{2l-1}=\frac{I_{2l+1}}{2l}+I_{2l+1}=\frac{2l+1}{2l}I_{2l+1}. \tag{14.6}$$

上式可改写为

$$I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+1}I_{2l-1},\quad l\geq 1. \tag{14.7}$$

这就是要证明的递推关系。

重复利用递推关系，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta\,dx&=I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+1}I_{2l-1}=\frac{2l(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)}I_{2l-3}=\cdots=\frac{2l(2l-2)\cdots 2}{(2l+1)(2l-1)\cdots 3}I_1\\&=\frac{(2l)^2(2l-2)^2\cdots 2^2}{(2l+1)2l(2l-1)(2l-2)\cdots 3\cdot 2}=\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}.\end{aligned} \tag{14.8}$$

2. 两个同心的球面，内球面半径为 r_1，具有电势 u_0，外球面半径为 r_2，具有电势 $u_1\cos^2\theta$，其中 u_0 和 u_1 均为常数，区域 $r_1<r<r_2$ 之中无电荷，求该区域中的电势分布。

答：这是一个轴对称问题，因而电势与 ϕ 无关，可以设区域 $r_1<r<r_2$ 中的电势分布为 $u(r,\theta)$。定解问题为

$$\nabla^2 u=0\quad(r_1<r<r_2), \tag{14.9}$$

$$u|_{r=r_1}=u_0,\quad u|_{r=r_2}=u_1\cos^2\theta. \tag{14.10}$$

将一般解写作

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{14.11}$$

代入边界条件 (14.10)，利用

$$\mathrm{P}_0(x) = 1, \quad \mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{2}[3x^2 - \mathrm{P}_0(x)], \quad x^2 = \frac{1}{3}\mathrm{P}_0(x) + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x), \tag{14.12}$$

可以导出

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r_1^l + \frac{B_l}{r_1^{l+1}}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta) = u_0 = u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta), \tag{14.13}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r_2^l + \frac{B_l}{r_2^{l+1}}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta) = u_1\cos^2\theta = \frac{1}{3}u_1\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{2}{3}u_1\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{14.14}$$

比较这两个等式最左边和最右边，可得

$$A_0 + \frac{B_0}{r_1} = u_0, \tag{14.15}$$

$$A_l r_1^l + \frac{B_l}{r_1^{l+1}} = 0 \quad (l = 1, 2, \cdots), \tag{14.16}$$

$$A_0 + \frac{B_0}{r_2} = \frac{1}{3}u_1, \tag{14.17}$$

$$A_2 r_2^2 + \frac{B_2}{r_2^3} = \frac{2}{3}u_1, \tag{14.18}$$

$$A_l r_2^l + \frac{B_l}{r_2^{l+1}} = 0 \quad (l \neq 0, 2). \tag{14.19}$$

(14.15) 与 (14.17) 两边分别相减，得

$$\frac{B_0}{r_1} - \frac{B_0}{r_2} = u_0 - \frac{u_1}{3}, \quad \text{故 } B_0 = \left(u_0 - \frac{u_1}{3}\right)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \tag{14.20}$$

从而，由 (14.15) 式有

$$A_0 = u_0 - \frac{B_0}{r_1} = u_0 - \left(u_0 - \frac{u_1}{3}\right)\frac{r_2}{r_2 - r_1} = \frac{u_1 r_2 - 3u_0 r_1}{3(r_2 - r_1)}. \tag{14.21}$$

当 $l = 2$ 时，(14.16) 式变成

$$A_2 r_1^2 + \frac{B_2}{r_1^3} = 0, \quad \text{即 } A_2 = -\frac{B_2}{r_1^5}, \tag{14.22}$$

代入 (14.18) 式，得

$$-\frac{B_2}{r_1^5}r_2^2 + \frac{B_2}{r_2^3} = \frac{2}{3}u_1, \quad \text{故 } B_2 = -\frac{2u_1 r_1^5 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}. \tag{14.23}$$

于是，

$$A_2 = -\frac{B_2}{r_1^5} = \frac{2u_1 r_2^3}{3(r_2^5 - r_1^5)}. \tag{14.24}$$

当 $l \neq 0, 2$ 时，由 (14.16) 式有

$$A_l = -\frac{B_l}{r_1^{2l+1}}, \tag{14.25}$$

代入 (14.19) 式，得

$$-\frac{B_l}{r_1^{2l+1}}r_2^l+\frac{B_l}{r_2^{l+1}}=\frac{r_1^{2l+1}-r_2^{2l+1}}{r_1^{2l+1}r_2^{l+1}}B_l=0. \tag{14.26}$$

由于 $r_1\neq r_2$，可以推出

$$B_l=0,\quad A_l=-\frac{B_l}{r_1^{2l+1}}=0\ \ (l\neq 0,2). \tag{14.27}$$

将这些系数的表达式代回一般解，就得到区域 $r_1<r<r_2$ 中的电势分布

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\left[\frac{u_1r_2-3u_0r_1}{3(r_2-r_1)}+\left(u_0-\frac{u_1}{3}\right)\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\frac{1}{r}\right]\mathrm{P}_0(\cos\theta)+\left[\frac{2u_1r_2^3}{3(r_2^5-r_1^5)}r^2-\frac{2u_1r_1^5r_2^3}{3(r_2^5-r_1^5)}\frac{1}{r^3}\right]\mathrm{P}_2(\cos\theta)\\&=\frac{u_1r_2-3u_0r_1}{3(r_2-r_1)}+\left(u_0-\frac{u_1}{3}\right)\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\frac{1}{r}+\frac{2u_1r_1^2r_2^3}{3(r_2^5-r_1^5)}\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^2-\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]\mathrm{P}_2(\cos\theta).\end{aligned} \tag{14.28}$$

15 第十六周（12 月 25 日交)

1. 根据连带 Legendre 函数的定义

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x), \tag{15.1}$$

以及

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x), \tag{15.2}$$

和

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\quad \mathrm{P}_1(x)=x,\quad \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \tag{15.3}$$

写出 $\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_1^{-1}(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^{-1}(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)$、$\mathrm{P}_2^{-2}(\cos\theta)$ 的具体形式，请用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示出来，其中 $0\leq\theta\leq\pi$。

答：由 $0\leq\theta\leq\pi$ 可得 $\sin\theta\geq 0$，因此，对于 $x=\cos\theta$，有

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sin\theta. \tag{15.4}$$

从而，由 $\mathrm{P}_1'(x)=1$ 得

$$\mathrm{P}_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}\mathrm{P}_1'(x)=\sqrt{1-x^2},\quad \mathrm{P}_1^1(\cos\theta)=\sin\theta. \tag{15.5}$$

于是，

$$\mathrm{P}_1^{-1}(\cos\theta)=(-)^1\frac{(1-1)!}{(1+1)!}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)=-\frac{1}{2}\sin\theta. \tag{15.6}$$

根据 $\mathrm{P}_2'(x)=3x$，有

$$\mathrm{P}_2^1(x)=(1-x^2)^{1/2}\mathrm{P}_2'(x)=3x\sqrt{1-x^2},\quad \mathrm{P}_2^1(\cos\theta)=3\sin\theta\cos\theta. \tag{15.7}$$

故

$$\mathrm{P}_2^{-1}(\cos\theta) = (-)^1\frac{(2-1)!}{(2+1)!}\,\mathrm{P}_2^1(\cos\theta) = -\frac{1}{3!}3\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta. \tag{15.8}$$

另一方面，$\mathrm{P}_2''(x) = (3x)' = 3$，因而

$$\mathrm{P}_2^2(x) = (1-x^2)\mathrm{P}_2''(x) = 3(1-x^2), \quad \mathrm{P}_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta. \tag{15.9}$$

于是，

$$\mathrm{P}_2^{-2}(\cos\theta) = (-)^2\frac{(2-2)!}{(2+2)!}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta) = \frac{1}{4!}\,3\sin^2\theta = \frac{1}{8}\sin^2\theta. \tag{15.10}$$

2. 根据球谐函数的定义

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) = (-)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{15.11}$$

写出 $\mathrm{Y}_{0,0}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{1,0}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{1,1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{1,-1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,0}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,-1}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,2}(\theta,\phi)$、$\mathrm{Y}_{2,-2}(\theta,\phi)$ 的具体形式。

答：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}_{0,0}(\theta,\phi) &= (-)^0\sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{0!}{0!}}\,\mathrm{P}_0(\cos\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \\
\mathrm{Y}_{1,0}(\theta,\phi) &= (-)^0\sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{1!}{1!}}\,\mathrm{P}_1(\cos\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\cos\theta, \\
\mathrm{Y}_{1,1}(\theta,\phi) &= (-)^1\sqrt{\frac{2+1}{4\pi}\frac{(1-1)!}{(1+1)!}}\,\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)e^{i\phi} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\sin\theta e^{i\phi}, \\
\mathrm{Y}_{1,-1}(\theta,\phi) &= (-)^{-1}\sqrt{\frac{2+1}{4\pi}\frac{(1+1)!}{(1-1)!}}\,\mathrm{P}_1^{-1}(\cos\theta)e^{-i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right)e^{-i\phi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\sin\theta e^{-i\phi}, \\
\mathrm{Y}_{2,0}(\theta,\phi) &= (-)^0\sqrt{\frac{4+1}{4\pi}\frac{2!}{2!}}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\,(3\cos^2\theta-1), \\
\mathrm{Y}_{2,1}(\theta,\phi) &= (-)^1\sqrt{\frac{4+1}{4\pi}\frac{(2-1)!}{(2+1)!}}\,\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}\frac{1}{6}}\,3\sin\theta\cos\theta e^{i\phi} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}, \\
\mathrm{Y}_{2,-1}(\theta,\phi) &= (-)^{-1}\sqrt{\frac{4+1}{4\pi}\frac{(2+1)!}{(2-1)!}}\,\mathrm{P}_2^{-1}(\cos\theta)e^{-i\phi} = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}6}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)e^{-i\phi} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}, \\
\mathrm{Y}_{2,2}(\theta,\phi) &= (-)^2\sqrt{\frac{4+1}{4\pi}\frac{(2-2)!}{(2+2)!}}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)e^{2i\phi} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}\frac{1}{4!}}\,3\sin^2\theta e^{2i\phi} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin^2\theta e^{2i\phi}, \\
\mathrm{Y}_{2,-2}(\theta,\phi) &= (-)^{-2}\sqrt{\frac{4+1}{4\pi}\frac{(2+2)!}{(2-2)!}}\,\mathrm{P}_2^{-2}(\cos\theta)e^{-2i\phi} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}4!}\,\frac{1}{8}\sin^2\theta e^{-2i\phi} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin^2\theta e^{-2i\phi}.
\end{aligned}$$

3. 在 $r>a$ 的球外区域求解以下定解问题：

$$\nabla^2 u = 0 \quad (r>a),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{u_0}{a}\left(\sin^2\theta\sin^2\phi - \frac{1}{3}\right), \quad u|_{r=\infty} = 0. \tag{15.12}$$

答：这是球坐标系下 Laplace 方程的定解问题，一般解可以写作

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left[r^l(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi) + \frac{1}{r^{l+1}}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\right]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{15.13}$$

由无穷远处的边界条件 $u|_{r=\infty}=0$ 可知，对所有 l 和 m 均有 $A_{lm}=B_{lm}=0$。从而，解化为

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{15.14}$$

根据

$$\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) = \mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{2}[3(1-\sin^2\theta)-1] = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{15.15}$$

和

$$\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) = \mathrm{P}_0(\cos\theta) = 1, \tag{15.16}$$

可得

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) = \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta). \tag{15.17}$$

结合 $\mathrm{P}_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$，推出

$$\begin{aligned}\sin^2\theta\sin^2\phi - \frac{1}{3} &= \sin^2\theta\,\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\phi - \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta)\right] - \frac{1}{6}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi - \frac{1}{3}\mathrm{P}_0^0(\cos\theta)\\ &= -\frac{1}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) - \frac{1}{6}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi.\end{aligned} \tag{15.18}$$

于是，$r=a$ 处的边界条件可以改写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{u_0}{a}\left(\sin^2\theta\sin^2\phi - \frac{1}{3}\right) = -\frac{u_0}{3a}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) - \frac{u_0}{6a}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \tag{15.19}$$

将解代入上式，得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\frac{l+1}{a^{l+2}}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) = -\frac{u_0}{3a}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) - \frac{u_0}{6a}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \tag{15.20}$$

可见，非零系数只有 $C_{2,0}$ 和 $C_{2,2}$，满足

$$-\frac{2+1}{a^{2+2}}C_{2,0}=-\frac{u_0}{3a},\quad -\frac{2+1}{a^{2+2}}C_{2,2}=-\frac{u_0}{6a}, \tag{15.21}$$

故

$$C_{2,0}=\frac{u_0}{9}a^3,\quad C_{2,2}=\frac{u_0}{18}a^3. \tag{15.22}$$

其它系数均为零。于是，此定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\phi) &= \frac{u_0}{9}a^3\frac{1}{r^{2+1}}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta)+\frac{u_0}{18}a^3\frac{1}{r^{2+1}}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi \\ &= \frac{u_0}{18}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta)+\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi\right]. \end{aligned} \tag{15.23}$$

16 第十七周（1 月 3 日交)

1. 考虑 Poisson 方程第三边值问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r})=-f(\mathbf{r}),\quad \mathbf{r}\in D, \tag{16.1}$$

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\mathbf{r}\in S}=\varphi(\mathbf{r}),\quad \alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0. \tag{16.2}$$

其中 S 是区域 D 的边界面。定义相应的 Green 函数，并给出解的积分公式。

答：定义相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 满足下列定解问题

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\quad \mathbf{r},\mathbf{r}_0\in D, \tag{16.3}$$

$$\left.\left[\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]\right|_{\mathbf{r}\in S}=0. \tag{16.4}$$

(16.1) 式两边乘以 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$，(16.3) 式两边乘以 $u(\mathbf{r})$，得

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}), \tag{16.5}$$

$$u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \tag{16.6}$$

两式相减，有

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r})-u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}). \tag{16.7}$$

根据第二 Green 公式，可得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_0) &= \int_D u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)d\mathbf{r}=\int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\int_D\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\nabla^2 u(\mathbf{r})-u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right]d\mathbf{r} \\ &= \int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\int_S\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma. \end{aligned} \tag{16.8}$$

现在有两种解法求出两个等价结果（求出任何一个结果都是对的）。

(1) 由 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的边界条件 (16.4) 有

$$\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}\in S} = -\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\bigg|_{\mathbf{r}\in S}. \tag{16.9}$$

从而可以推出

$$\begin{aligned}&\int_S\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma=\frac{1}{\alpha}\int_S\left[\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-\alpha u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma\\ =&\frac{1}{\alpha}\int_S\left[-\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-\alpha u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma=-\frac{1}{\alpha}\int_S\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\left[\beta\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}+\alpha u(\mathbf{r})\right]d\sigma\\ =&-\frac{1}{\alpha}\int_S\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\varphi(\mathbf{r})d\sigma.\end{aligned} \tag{16.10}$$

最后一步用到 $u(\mathbf{r})$ 的边界条件 (16.2)。于是，解的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0)=\int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{\alpha}\int_S\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\varphi(\mathbf{r})d\sigma. \tag{16.11}$$

(2) 由 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的边界条件 (16.4) 有

$$\beta\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\bigg|_{\mathbf{r}\in S} = -\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r}\in S}. \tag{16.12}$$

从而可以推出

$$\begin{aligned}&\int_S\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma=\frac{1}{\beta}\int_S\left[\beta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}-\beta u(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right]d\sigma\\ =&\frac{1}{\beta}\int_S\left[\beta G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}+\alpha G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)u(\mathbf{r})\right]d\sigma=\frac{1}{\beta}\int_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\left[\beta\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n}+\alpha u(\mathbf{r})\right]d\sigma\\ =&\frac{1}{\beta}\int_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r})d\sigma.\end{aligned} \tag{16.13}$$

最后一步用到 $u(\mathbf{r})$ 的边界条件 (16.2)。于是，解的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0)=\int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{\beta}\int_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\varphi(\mathbf{r})d\sigma. \tag{16.14}$$

2. 考虑三维半无界空间的定解问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r})=0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad 0<z<+\infty, \tag{16.15}$$

$$u(\mathbf{r})|_{z=0}=\varphi(x,y). \tag{16.16}$$

(1) 写出相应的 Green 函数的定解问题。

(2) 求出这一 Green 函数。

(3) 求出 $u(\mathbf{r})$ 的积分公式，即用 Green 函数和定解条件表示出 $u(\mathbf{r})$。

答：(1) 相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的定解问题为

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad -\infty < x, x_0, y, y_0 < +\infty, \quad 0 < z, z_0 < +\infty, \tag{16.17}$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\big|_{z=0} = 0. \tag{16.18}$$

(2) 用镜像法求解，将 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的定解问题看作静电场问题，表述为：$z>0$ 空间中某点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处有一个点电荷，电量为 ϵ_0，而 $z=0$ 平面上的电势为零，求解 $z>0$ 空间的电势分布。为了保持 $z=0$ 平面上的电势为零，应该在 $z>0$ 空间中的点 $\mathbf{r}_0' = (x_0, y_0, -z_0)$ 处放置一个点电荷，电量为 $-\epsilon_0$。它们在 $z>0$ 空间中产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]. \end{aligned} \tag{16.19}$$

上式已满足边界条件 (16.18)，不需要常数项。

(3) $z>0$ 空间的边界面 S（即 $z=0$ 平面）的外法线方向是 $-z$ 方向，故

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\bigg|_S = -\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\bigg|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{2(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{2(z+z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2]^{3/2}}\right]\Bigg|_{z=0} \\ &= -\frac{z_0}{2\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{16.20}$$

于是，$u(\mathbf{r})$ 的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0) = -\int_S \varphi(x,y)\,\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\,d\sigma = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\frac{\varphi(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}, \tag{16.21}$$

也可以写成

$$u(\mathbf{r}) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0\,\frac{\varphi(x_0,y_0)}{[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z^2]^{3/2}}. \tag{16.22}$$