

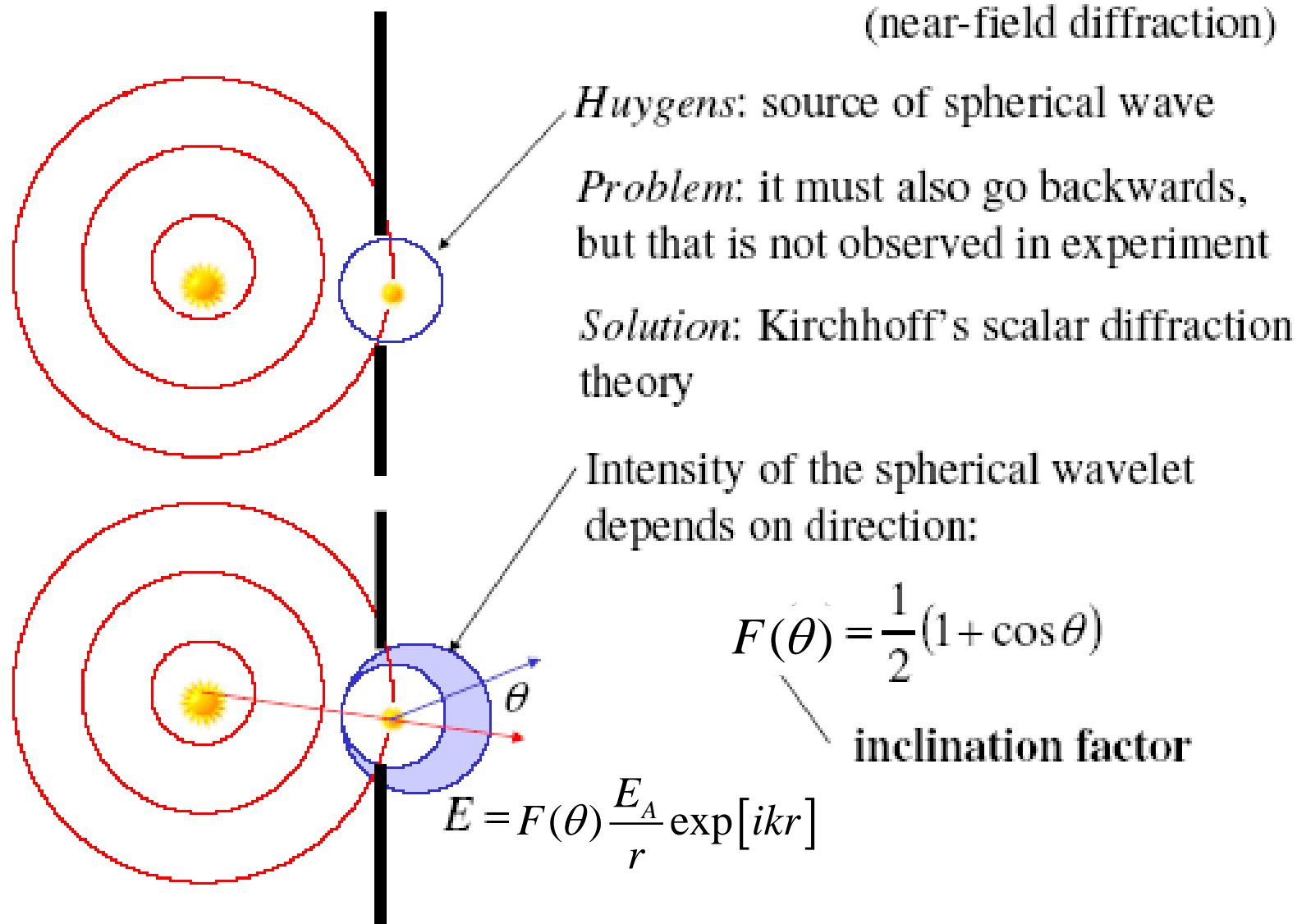


§ 4.3 菲涅耳衍射

- 本节我们将学
- 菲涅耳衍射、波带片
 - 半波带法、矢量法
 - 波带片

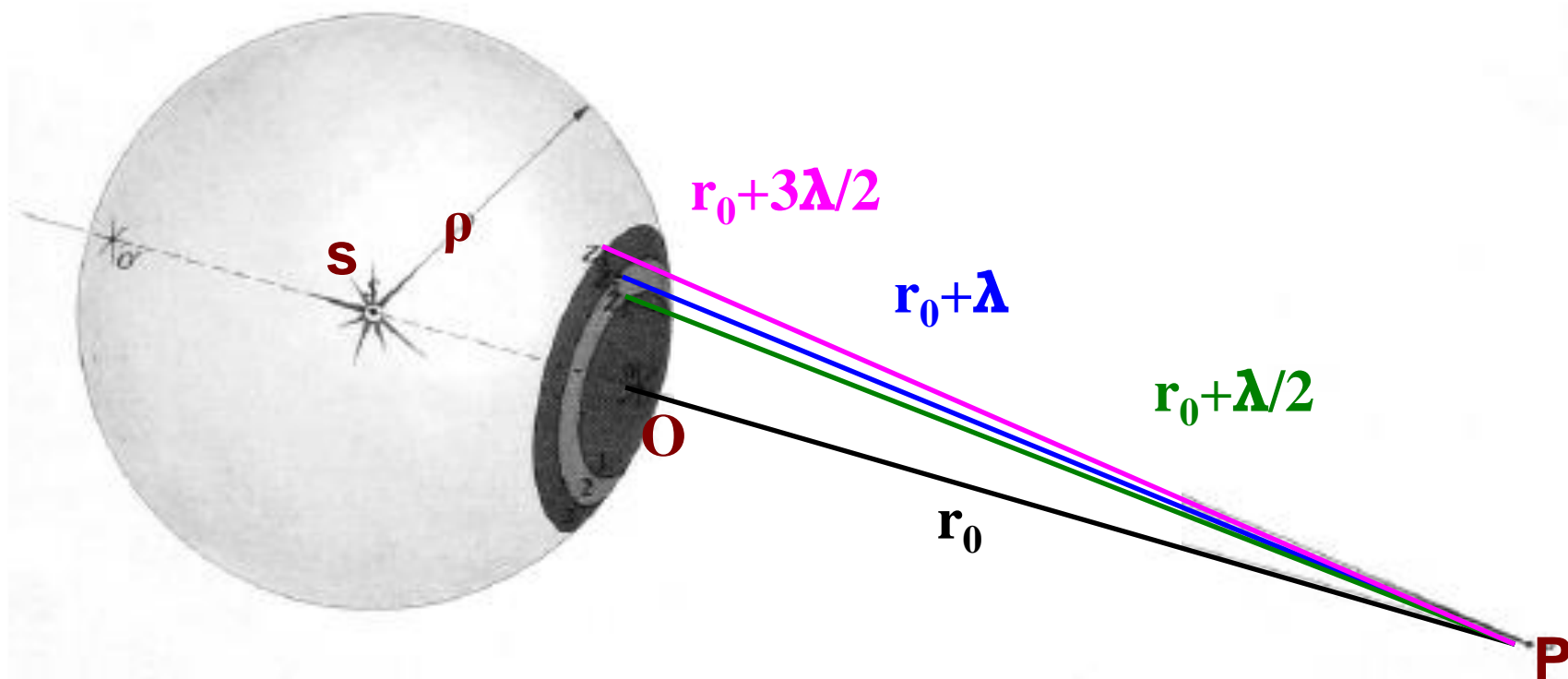
§ 4.3 菲涅耳衍射

(near-field diffraction)





菲涅耳半波带法

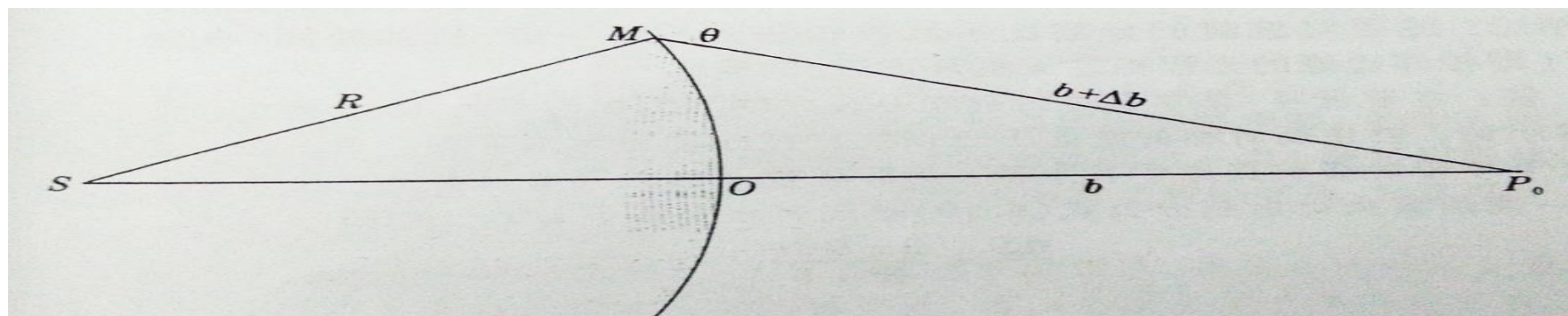


菲涅耳半波带 p171: 由任何相邻两环带的对应部分所发的次波到达点 **P** 时的光程差是 $\lambda/2$ ，即它们以相反的位相同时到达 **P** 点。



倾斜因子的估算（课堂练习）

4 - 7. 试估算菲涅耳圆孔衍射实验中第 10^4 个半波带处的倾斜因子 $f(\theta) = (1 + \cos\theta)/2$ 的数量级, 如果将 $f(\theta)$ 近似取为 1, 误差为多少? (所需的参考数据见 2.1 节。)



$$\cos\theta = \frac{(R+b)^2 - R^2 - (b+\Delta b)^2}{2R(b+\Delta b)}.$$

在第 10^4 个半波带处, $\Delta b = 10^4 \lambda / 2$. 取可见光中心波长 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, 光源到圆孔的距离 $R = 3 \text{ m}$, 圆孔到接收屏幕的距离 $b = 5 \text{ m}$, 代入上式, 得

$$\cos\theta = \frac{8^2 - 3^2 - (5 + 10^4 \times 0.5 \times 10^{-6} / 2)^2}{2 \times 3 \times (5 + 10^4 \times 0.5 \times 10^{-6} / 2)} = 0.9987.$$

$$\text{因子 } f(\theta) = (1 + \cos\theta)/2 = 0.9994.$$

取 $f(\theta) \approx 1$ 的相对误差为 6×10^{-3} .



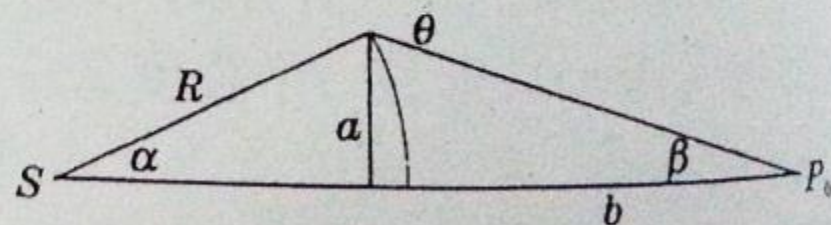
倾斜因子的估算（课堂练习）

4 - 8. 为什么做菲涅耳衍射实验时, 光源和接收屏幕要放得那样远? 为什么放近了不易看到衍射图样?

答: 当衍射孔(衍射屏)边缘的倾斜因子 $f(\theta)$ 接近于 0 时, 接收点 P_0 的光强将自由传播(完全遮挡)时差不多, 衍射效应极不明显。设衍射孔或衍射屏的半径为 a , 如右图所示,

$\theta = \alpha + \beta$, 而 $\alpha \approx \frac{a}{R}$, $\beta \approx \frac{a}{b}$, 故

$$\theta \approx a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{b} \right).$$



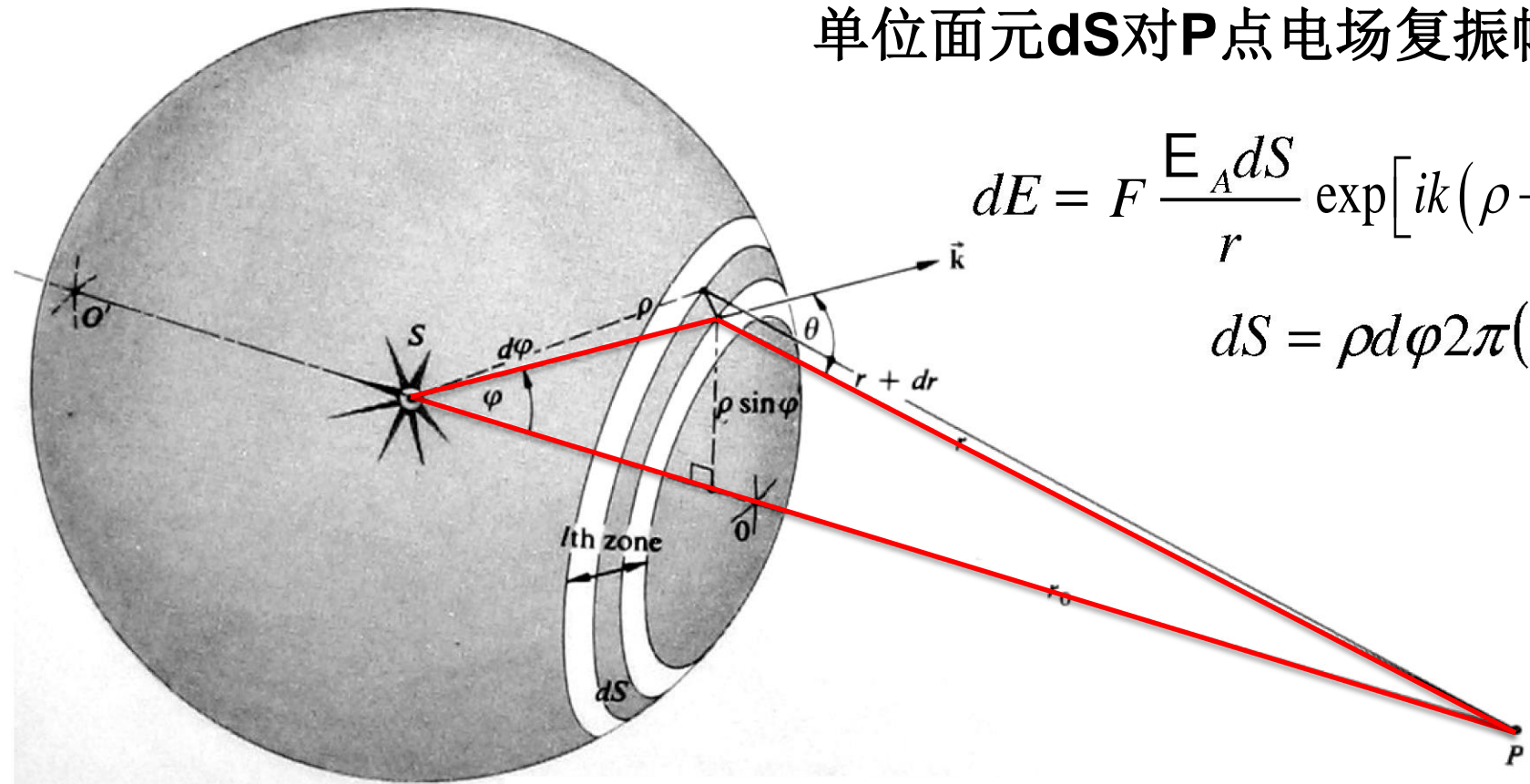
要倾斜因子 $f(\theta)$ 接近于 1, 必须 $\theta \ll 1$, 即 R 和 $b \gg a$, 即光源和接收屏幕要放得足够远。

菲涅耳半波带法（积分法）

单位面元 dS 对 P 点电场复振幅的贡献

$$dE = F \frac{E_A dS}{r} \exp[ik(\rho + r)]$$

$$dS = \rho d\varphi 2\pi(\rho \sin \varphi)$$



第 l 个波带片对 P 点的贡献

$$E_l = \int_{r_{l-1}}^{r_l} dE = (-1)^{l+1} \frac{2iF_l E_A \rho \lambda}{\rho + r_0} \exp[ik(\rho + r_0)]$$

↑
相位相差 π



第 l 个波带片上，单位面元 dS 对 P 点电场复振幅的贡献为：

$$dE = F(\theta) \frac{E_A}{r} dS \exp[ik(\rho + r)] = F_l \frac{E_A}{r} dS \exp[ik(\rho + r)]$$

利用上页中红色三角形可得： $\sin \varphi dr = \frac{r dr}{\rho + r_0}$

面元 dS 可以表示为： $dS = 2\pi(\rho \sin \varphi)(\rho d\varphi) = \frac{2\pi \rho r dr}{\rho + r_0}$

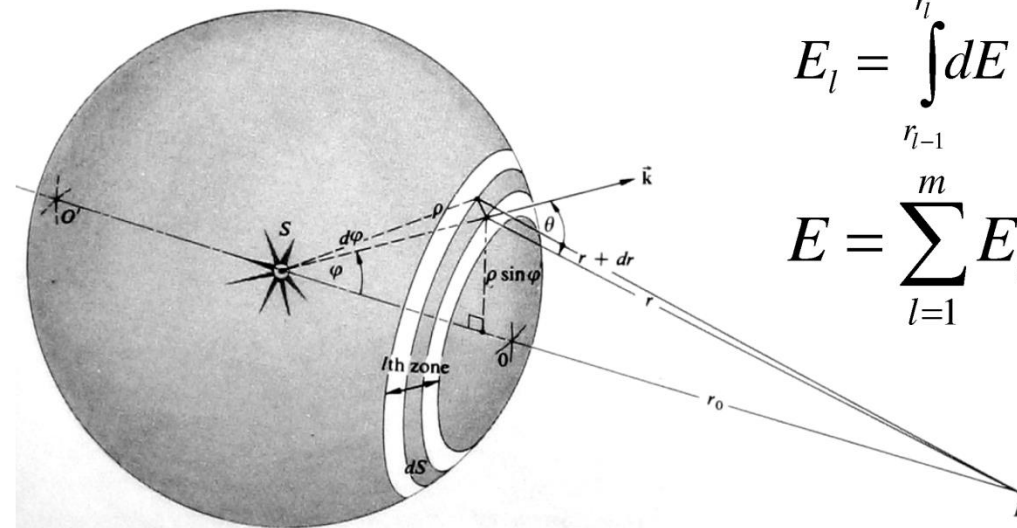
最后得到第 l 个波带片对 P 点的贡献为：

$$E_l = \int_{r_{l-1}}^{r_l} dE = \int_{r_{l-1}}^{r_l} F_l \frac{E_A}{r} \frac{2\pi \rho r dr}{\rho + r_0} \exp[ik(\rho + r)] = F_l \frac{2\pi \rho E_A}{\rho + r_0} \exp[ik\rho] \int_{r_{l-1}}^{r_l} dr \exp[ikr]$$

$$= F_l \frac{2\pi \rho E_A}{ik(\rho + r_0)} \exp[ik\rho] \left(\exp[ikr] \Big|_{r_{l-1}}^{r_l} \right) = F_l \frac{E_A \rho \lambda}{i(\rho + r_0)} e^{ik(\rho + r_0)} \left[e^{ik \frac{l\lambda}{2}} - e^{ik \frac{(l-1)\lambda}{2}} \right]$$

$$= -F_l \frac{iE_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} e^{ik(\rho + r_0)} \left[(-1)^l - (-1)^{l-1} \right] = (-1)^{l+1} \frac{2iF_l E_A \rho \lambda}{\rho + r_0} e^{ik(\rho + r_0)}$$

菲涅耳半波带法 (积分法)



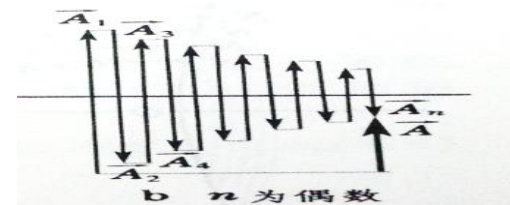
$$E_l = \int_{r_{l-1}}^{r_l} dE = (-1)^{l+1} \frac{2iF_l E_A \rho \lambda}{\rho + r_0} \exp[ik(\rho + r_0)]$$

$$E = \sum_{l=1}^m E_l = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots \pm |E_m|$$

前 l 个波带片对P点的贡献为 \mathbf{E}
(P173 式4.17)

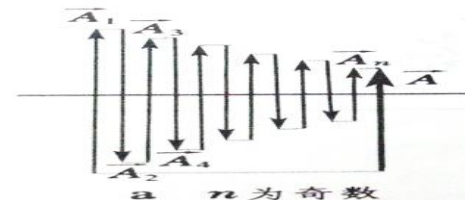
如果到达P点半波带数是偶数

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_m|}{2}$$



如果到达P点半波带数是奇数

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2}$$



自由空间传播

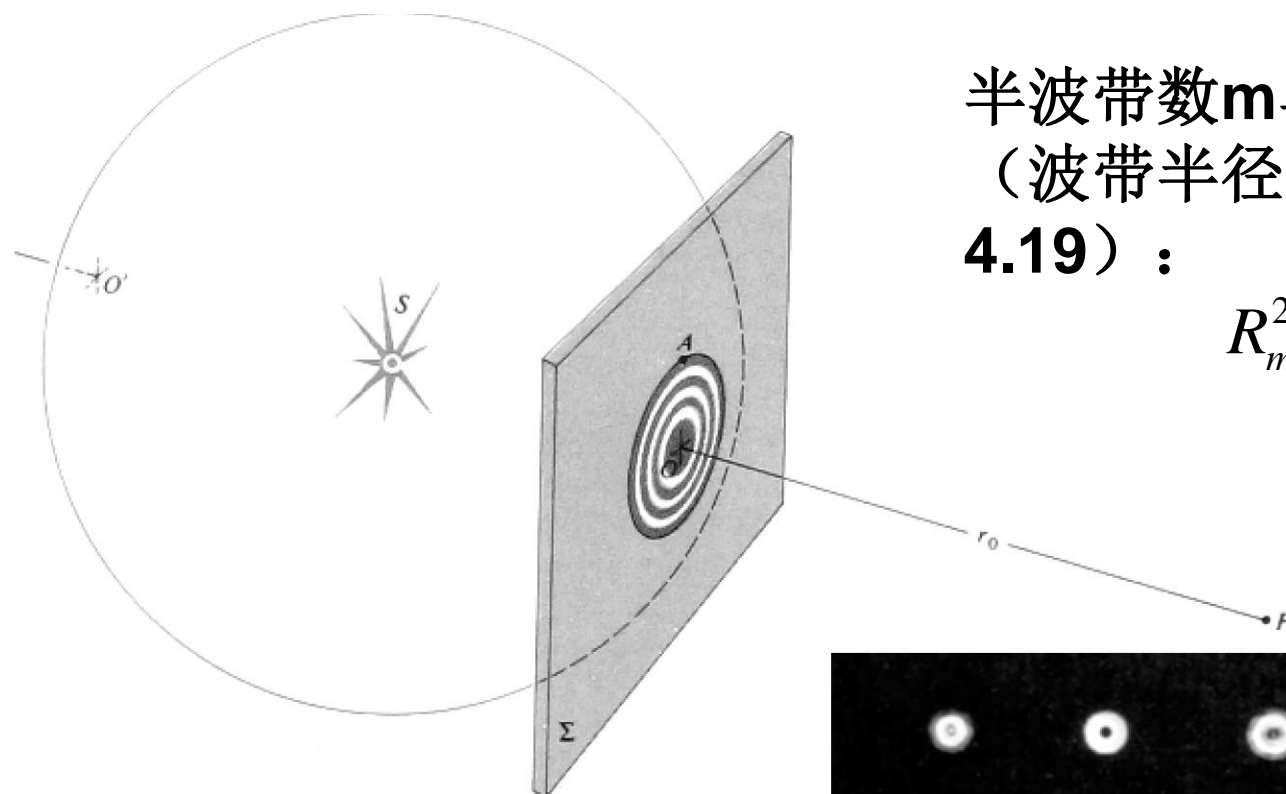
$$E \approx \frac{|E_1|}{2}$$

圆屏衍射

$$E \approx \frac{|E_m|}{2}$$

(泊松亮斑 P173)

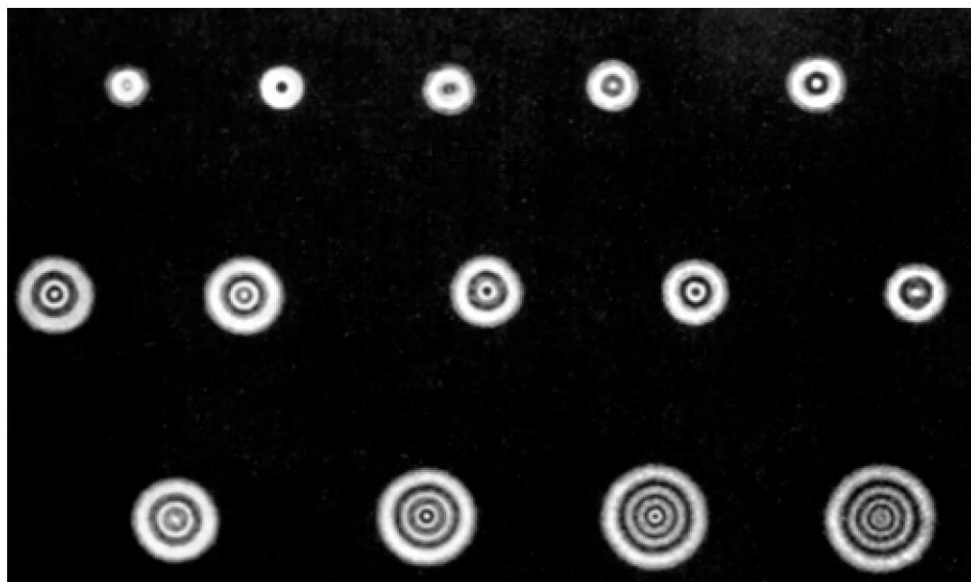
菲涅耳半波带数



半波带数 m 与通光圆孔半径
(波带半径 R_m)的关系 (式
4.19) :

$$R_m^2 = \frac{\rho r_0}{\rho + r_0} m \lambda$$

随着圆孔的增大，
衍射图案的变化





半波带数的讨论（课堂练习）

4 - 11. 设 S 为点光源, D 为孔径固定的衍射环, P_0 为接收屏幕(见图 4 - 10)。讨论下列情况下圆孔中包含半波带数目的增减:

- (1) S 、 D 位置不变, 移动 P_0 ;
- (2) D 、 P_0 位置不变, 移动 S ;
- (3) S 、 P_0 位置不变, 移动 D 。

答: 圆孔所含半波带的个数 k 是和装置各参数的关系为

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{b} \right). \quad (1)$$

(1) 保持 S 、 D 位置不变, 移动 P_0 时 z 只有 b 变化。 b 增大时波带数 k 减小, b 减小时波带数 k 增加。

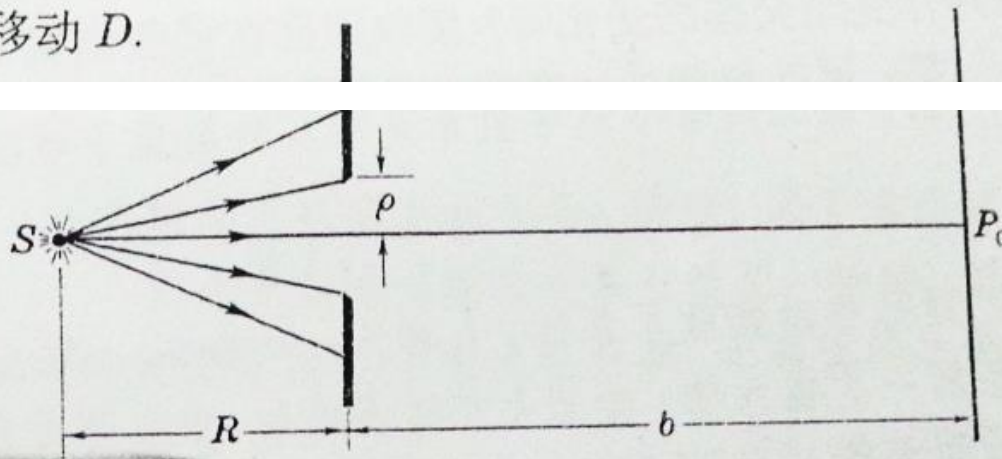
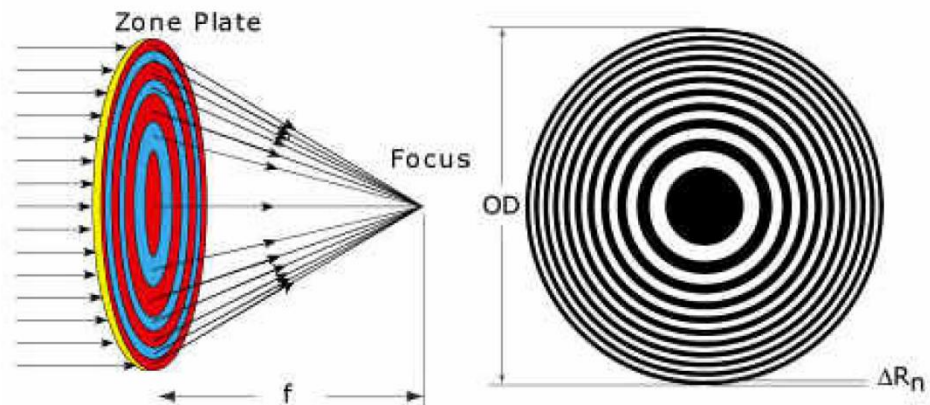
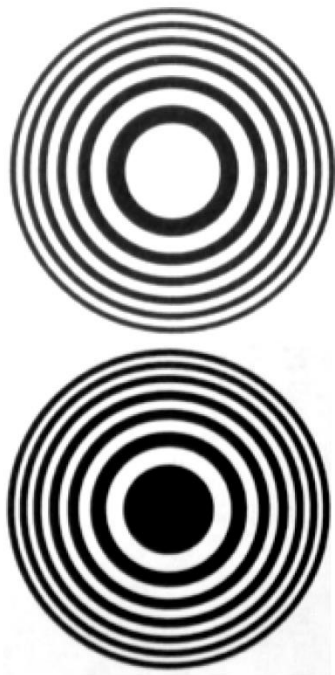


图 4 - 10



菲涅尔波带片

菲涅尔波带片的透镜成像作用 P176-177





例1：波长为 $\lambda_0=5760\text{\AA}$ 的单色光，从远处光源发出，穿过一直径为 $D=2.4\text{mm}$ 的小圆孔，与孔相距 $r_0=1\text{m}$ 处放一屏幕，求：

(1) 屏上正对孔中心的 P_0 点是亮点还是暗点？

(2) 要使它变暗，屏幕至少要移动多远？

解：用半波带法,孔径边缘处对应的半波带数为 k

$$\rho_k^2 = (D/2)^2 = kr_0\lambda$$

$$k = D^2 / 4r_0\lambda = (2.4 \times 10^{-3})^2 / 4 \times 1 \times 5.76 \times 10^{-7} \\ = 2.5$$

即在 P_0 点是亮点



(2) 要 P_0 点为暗处, 令 $k=2$, 则

$$r'_0 = \rho^2 / 2\lambda = D^2 / 8\lambda = (2.4 \times 10^{-3})^2 / 8 \times 5.76 \times 10^{-7} \\ = 1.25 m$$

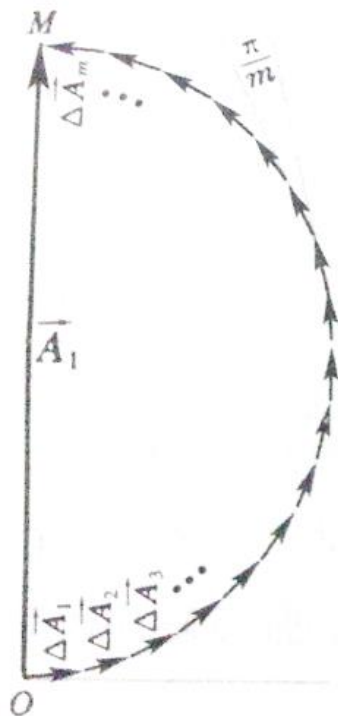
故

$$\Delta r = r'_0 - r_0 = 1.25 - 1 = 0.25 m$$

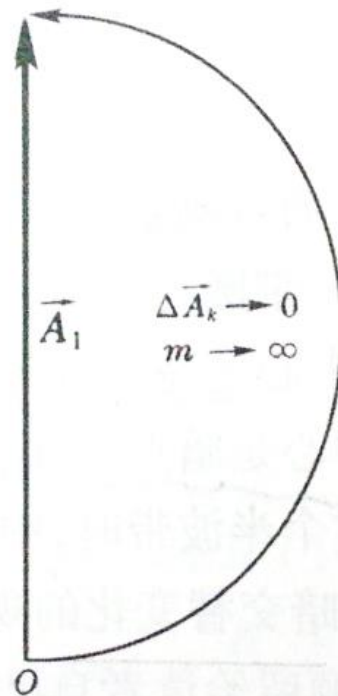
即屏幕要远离孔移动 **0.25 m** 才使 P_0 变暗



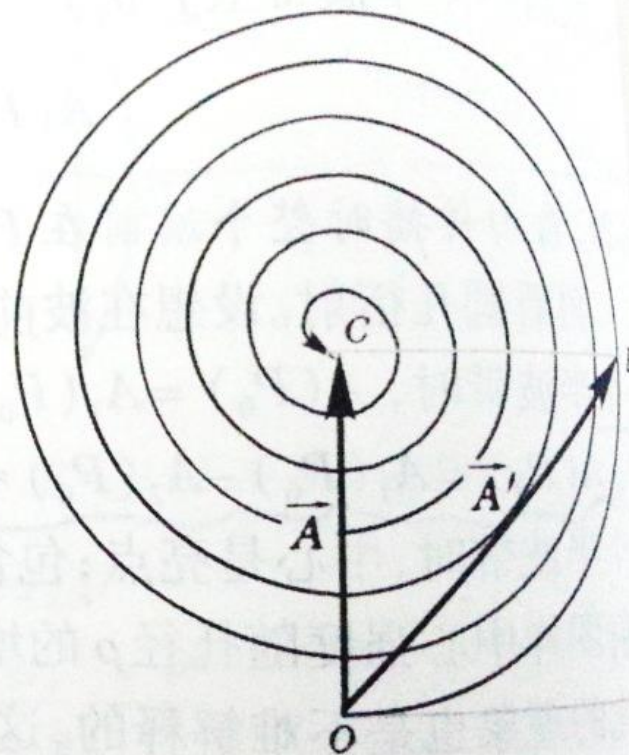
菲涅耳半波带法 P173 （矢量法）



a



b



c

振动矢量图P174



-
- Homework wk12 (submit on May 18)
 - **P221 思考题4-11 (2) (3)**
 - **P224 习题4-1, 4-7**