- 考虑近似
  - 对于平行光垂直入射，倾斜因子F(θ) ≈ 1
  - 狭缝a很小，E(Q)处处相等，为常数
  - $r = r_0 + \Delta r \approx r_0$
  - $e^{ikr} = e^{ikr_0} e^{ik\Delta r}$ 其中的 e^{ikr_0} 为常数

$$E(p) = C' \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik\Delta r} dx = C' \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik\sin\theta \cdot x} dx = C \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{I = E^*(p) \cdot E(p) = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2}$$

与矢量图法结果一致。

讨论： 由 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，可得到以下结果：

(1) 主极大（中央明纹中心）位置：

$$\theta = 0\text{处}，\alpha = 0 \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \rightarrow I = I_0 = I_{max}$$

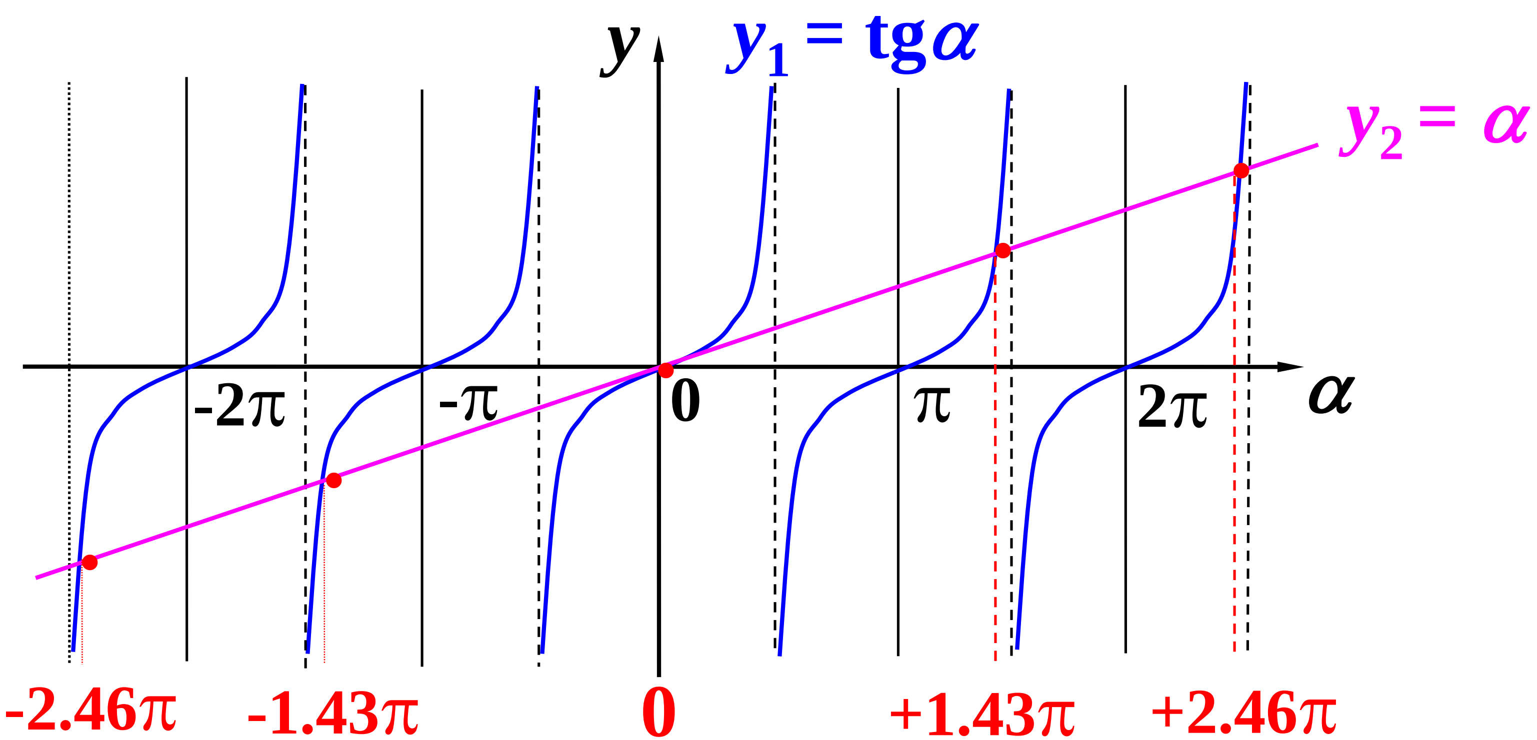
(2) 极小（暗纹）位置：

$$\alpha = \pm k\pi，\ k = 1,2,3\cdots\text{时}，\quad \sin\alpha = 0 \rightarrow I = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{由}\ \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi \rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda \\ &\text{或由}\quad N\Delta\varphi = \pm 2k\pi \rightarrow a\sin\theta = \pm k\lambda \end{aligned}\right\}\ \text{一致}$$

这正是缝宽可以分成偶数个半波带的情形。

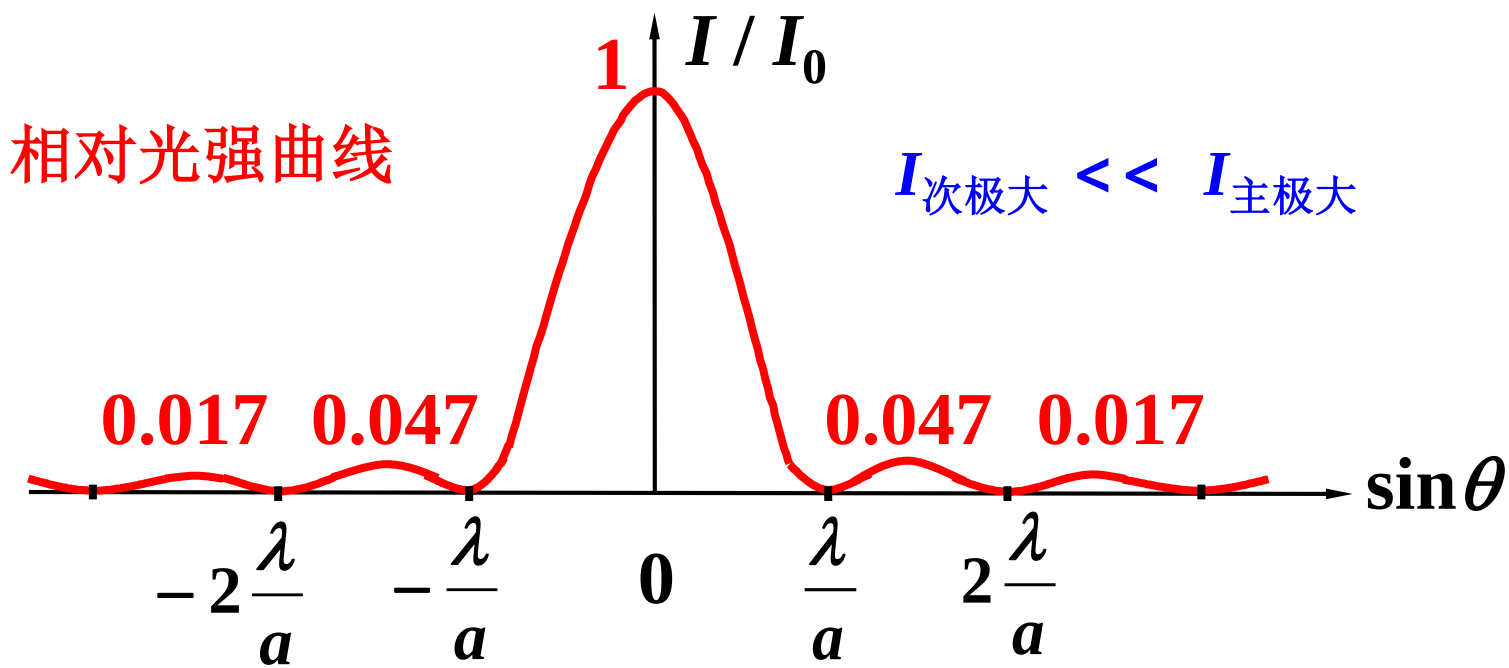
(3) 次极大位置： 满足 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=0 \rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=\alpha$



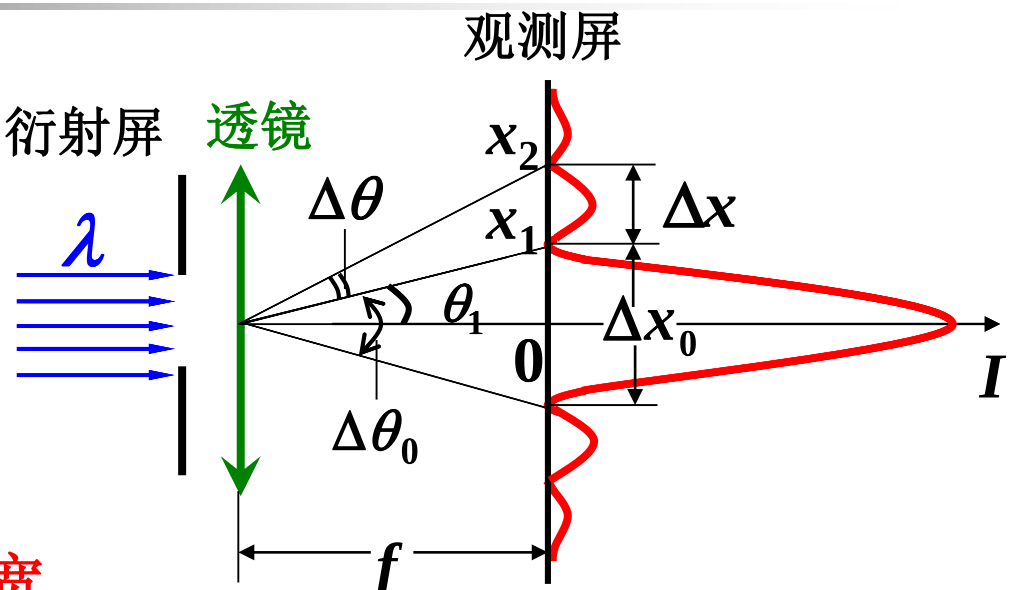
相应： $a\sin\theta=\pm1.43\lambda,\pm2.46\lambda,\pm3.47\lambda,\cdots$

(4) 光强： 将 $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

依次带入光强公式 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，得到从中央往外各次极大的光强依次为 $0.0472I_0$， $0.0165I_0$， $0.0083I_0$ $\cdots$



(5) 条纹宽度



① 中央明纹宽度

对于近轴近似，

角宽度 $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\dfrac{\lambda}{a}$

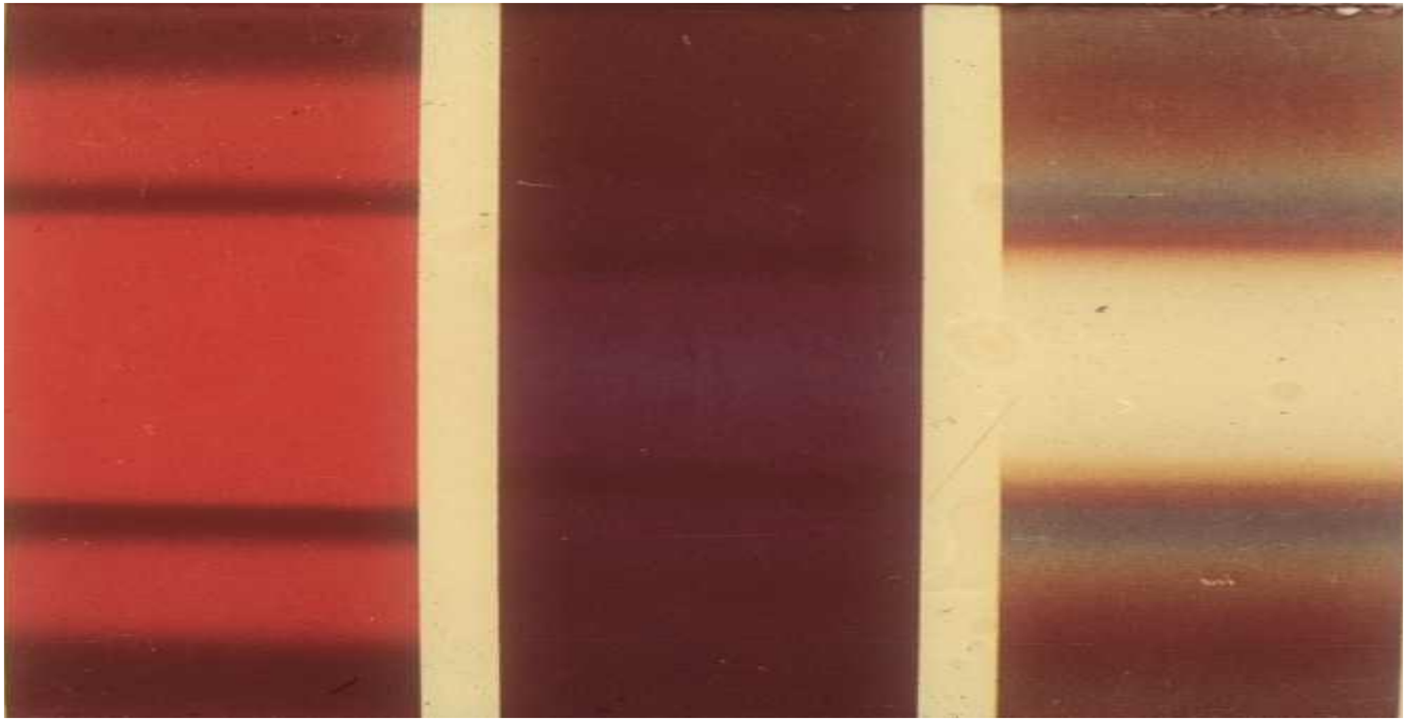
中央亮纹的边缘对应的衍射角 θ_1，称为中央亮纹的半角宽

线宽度 $\Delta x_0 = 2f\cdot \mathrm{tg}\,\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\dfrac{\lambda}{a} \propto \dfrac{\lambda}{a}$

② 其他明纹（次极大）宽度

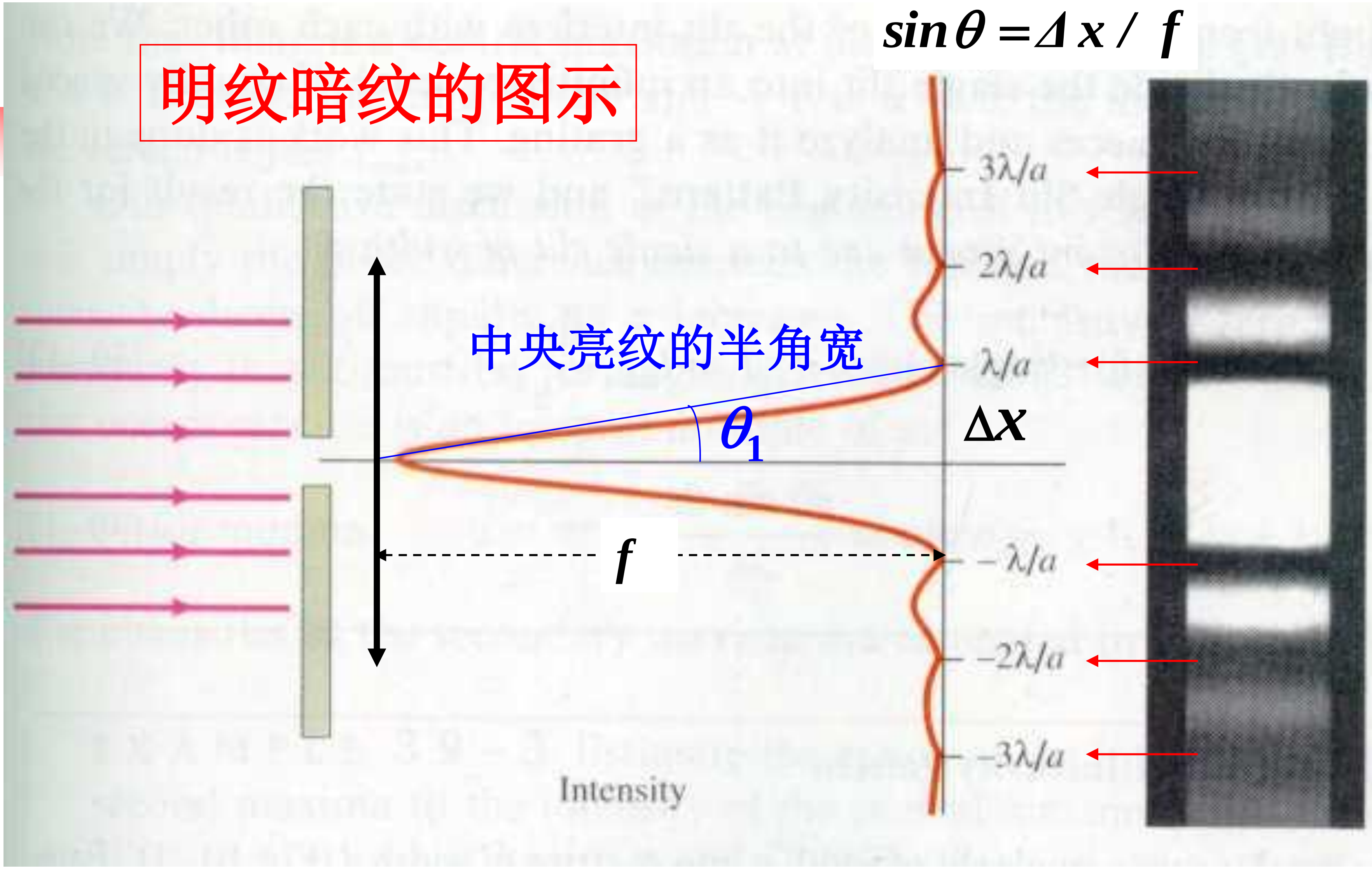
$$x_k \approx f\sin\theta_k = f\frac{k\lambda}{a} \rightarrow \Delta x \approx f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$

单缝衍射明条纹宽度的特征



红光　　紫光　　白光

明纹暗纹的图示



$\sin\theta = \Delta x / f$
中央亮纹的半角宽
θ_1
Δx
f
$3\lambda/a$
$2\lambda/a$
λ/a
$-\lambda/a$
$-2\lambda/a$
$-3\lambda/a$
Intensity

（6）波长对条纹间隔的影响

$\Delta x \propto \lambda$ — 波长越长，条纹间隔越宽。

（7）缝宽变化对条纹的影响

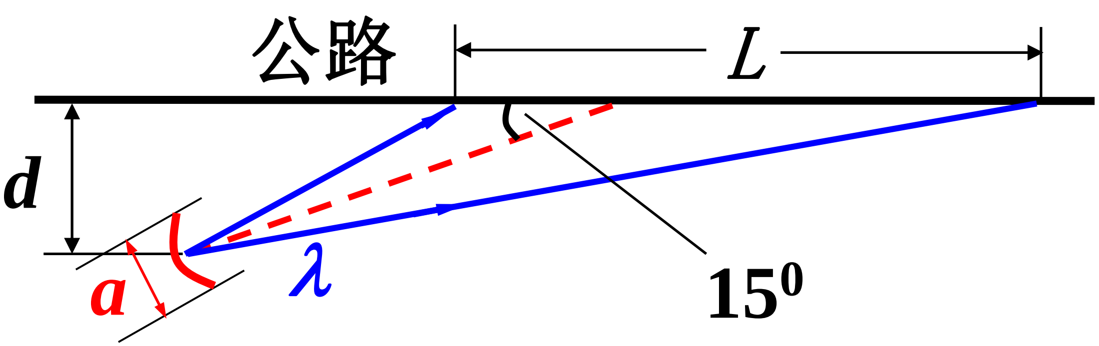
◆当缝极宽 $\frac{\lambda}{a} \to 0$ 时，各级明纹向中央靠拢，密集得无法分辨，只显出单一的亮条纹，这就是单缝的几何光学像。

此时光线遵从直线传播规律。

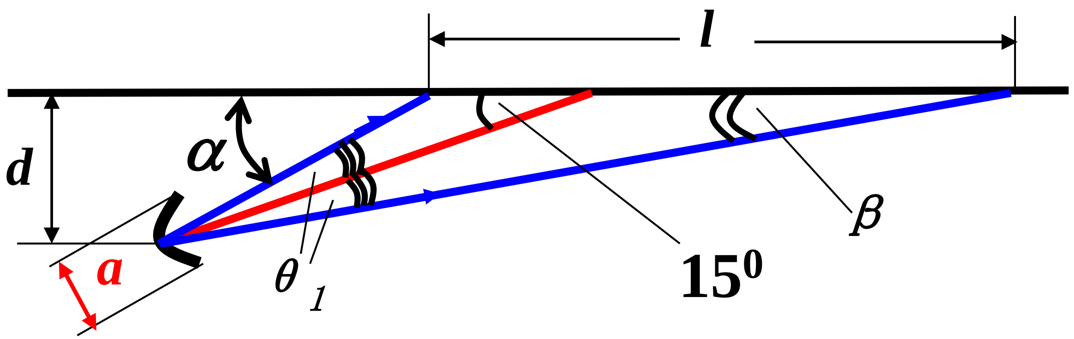
◆当缝极细（$a \approx \lambda$）时， $\sin\theta_1 \approx 1$，$\theta_1 \approx \pi/2$

衍射中央亮纹的两端延伸到很远很远的地方，屏上只接到中央亮纹的一小部分(较均匀)，当然就看不到单缝衍射的条纹了。这就是我们前面只考虑干涉，不考虑缝的衍射的缘因

已知：一波长为λ = 30mm的雷达在距离路边为 d=15m处,雷达射束与公路成15°角,天线宽度 a = 0.20m。求雷达监视范围内公路的长度L。



$$\theta_1 \approx 8.63^\circ$$



【解】将雷达波束看成集中在单缝衍射的0级明纹上，

有 $$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{30mm}{0.20m} = 0.15$$

$$\longrightarrow \quad \theta_1 \approx 8.63^\circ$$

$$\therefore\ l = d(ctg\beta - ctg\alpha)$$

$$= 15(ctg6.37^\circ - ctg23.63^\circ) \approx 100m$$