中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

电动力学 第四章
谐振腔与等离子体

谐振腔与波导管———有限空间中的电磁波传播

被（理想）导体面限制在有限空间中传播的电磁波

出发点：

Helmholtz方程

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=0$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$

约束条件 $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0$

$$\vec{B}(\vec{x})=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}(\vec{x})$$

➕ 边界条件

（一）理想导体的边界条件

对定态波： $\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

只需考虑两边界条件：

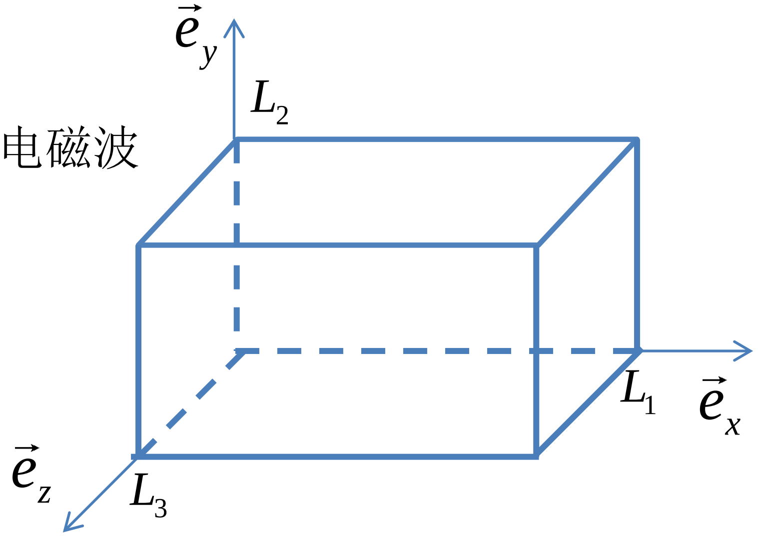
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)&=0\\ \vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)&=\vec{\alpha}_f\end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{n}\times\vec{E}&=0\\ \vec{n}\times\vec{H}&=\vec{\alpha}_f\end{aligned}}$$

电场只有法向分量！

导体内部 $\vec{E}=0$ $\vec{H}=0$

（二）谐振腔

考虑长方型$L_1 \times L_2 \times L_3$理想导体盒子中传播的电磁波



$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$$

$$u = E_i \qquad (i = x, y, z)$$

电场的每一个分量都会振荡

$$u = u(x, y, z)e^{i\omega t}$$

其中 $\omega = kc$

电场的每一个分量都满足Helmholtz方程：

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0$$

把波矢分解为： $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z$ 　即： $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

令： $\boxed{u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)}$ 　分离变量法

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \qquad \frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0$$

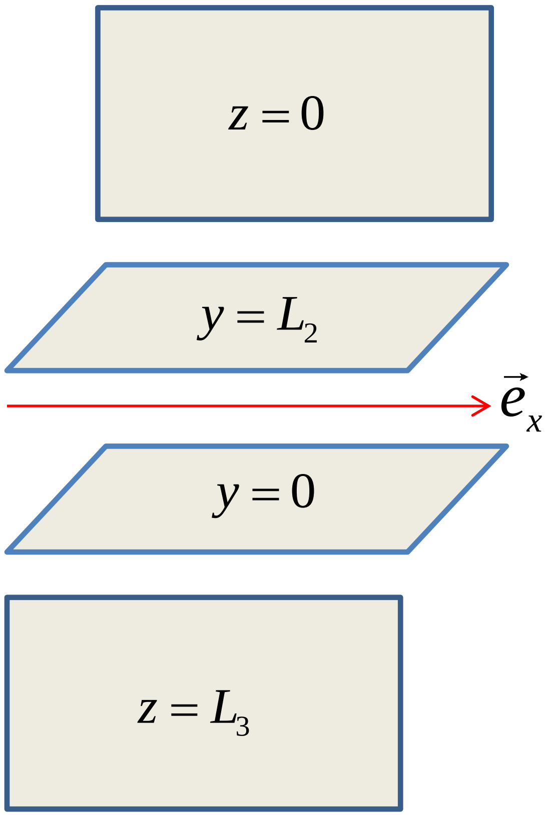
$$C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx \qquad C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy \qquad C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz$$

$$u(x,y,z)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz)$$

当中的六个常数 C_i 和 D_i 就要由约束条件和边界条件来决定

以 $u = E_x$ 为例：

切向边界条件 $\vec{n} \times \vec{E} = 0 \qquad \left(\vec{E}_\tau = 0\right)$



相当于：

$$E_x(y=0, z=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad C_3 = 0$$

$$E_x(y=L_2, z=L_3) = 0 \Rightarrow \sin k_y L_2 = 0 \quad \sin k_z L_3 = 0$$

$$\Rightarrow k_y L_2 = n\pi \qquad k_z L_3 = p\pi$$

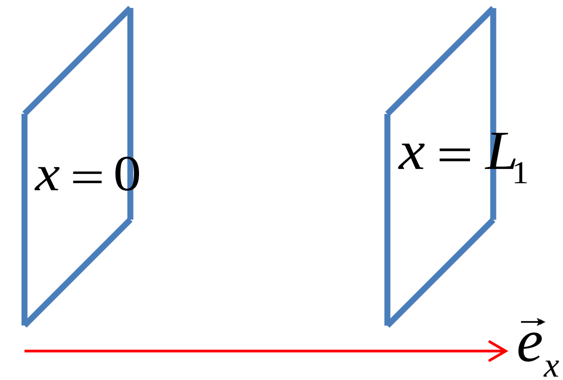
n, p 为整数

$$u(x,y,z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(\cancel{C_2} \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)(\cancel{C_3} \cos k_z z + D_3 \sin k_z z)$$

$$\Downarrow$$

$$E_x = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x) \sin k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

约束条件 $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$



在 $x=0$ 和 $x=L_1$ 面上，已经有 $E_y=0$，$E_z=0$

相当于：$\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ $\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=L_1}=0$

$$D_1=0 \qquad \sin k_x L_1=0$$

$$k_x L_1=m\pi \quad \Rightarrow \quad k_x=\frac{m\pi}{L_1}$$

总结：

$$\boxed{\begin{aligned} E_x&=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z\cdot e^{-i\omega t}\\ E_y&=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z\cdot e^{-i\omega t}\\ E_z&=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z\cdot e^{-i\omega t}\end{aligned}}$$

同理：

不再是横波，
三个方向都有

驻波！

波矢要满足： $k_x = \dfrac{m\pi}{L_1}$ $k_y = \dfrac{n\pi}{L_2}$ $k_z = \dfrac{p\pi}{L_3}$ $(m, n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$

选定了某一组(m, n, p)，称为选定了一种电磁场的振荡模式

本征频率：

$$\omega_{m,n,p} = kc = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L_3}\right)^2}$$

(m, n, p) 不能有两个同时为零（否则会导致三个同时为零）

假设 $L_1 > L_2 > L_3$ ，则最低频率为：

$$\omega_{1,1,0} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2}$$

约束条件

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0$$

电场三分量的振幅 A_1 、A_2 、A_3 当中只有两个是独立的

磁场：

$$\vec{B} = \frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}$$

$$B_x = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \frac{i}{\omega}\left(A_3 k_y - A_2 k_z\right)\sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \frac{i}{\omega}\left(A_1 k_z - A_3 k_x\right)\cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \frac{i}{\omega}\left(A_2 k_x - A_1 k_y\right)\cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

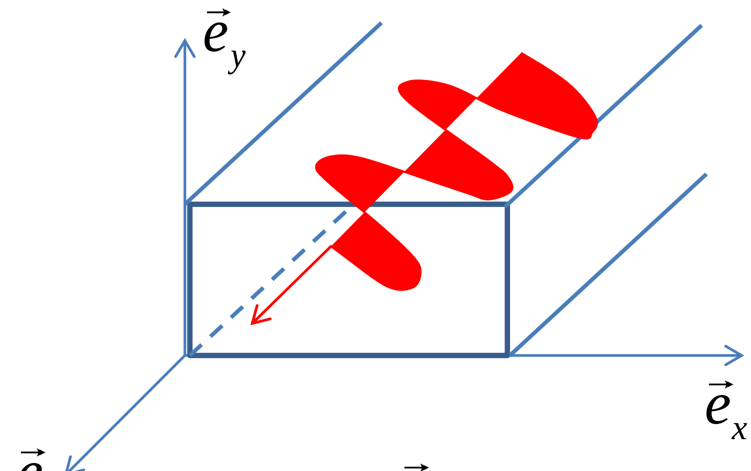
腔内电场能量密度平均值为：

$$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4}\mathrm{Re}\left(\left|\vec{E}_x\right|^2 + \left|\vec{E}_y\right|^2 + \left|\vec{E}_z\right|^2\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4}\left[A_1^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_2^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_3^2 \sin^2 k_x x \sin^2 k_y y \cos^2 k_z z\right]$$

（三）波导

与谐振腔的情况相比，微分方程和约束条件不变，相差的只是边界条件稍有不同，但方程的解的意义就有很大的区别了



电磁波沿 $\vec{e}_z$ 方向跑

出发点仍然不变

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=0$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\omega/c$

约束条件 $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=0$

把波矢分解为：$\vec{k}=k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z$　　即：$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$

电场分解为：$\vec{E}=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z$

令：$u=E_i \quad (i=x,y,z)$　　$\nabla^2u+k^2u=0$

电磁波有行波解：$u=u(x,y,z)=u(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$　　其中 $\omega=kc$

$$-k_x^2u+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)u=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(k_y^2+k_z^2\right)u=0$$

令： $\boxed{u(x,y)=X(x)Y(y)}$ 分离变量法

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0$$

$$u(t,x,y,z)=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

当中的四个常数 C_i 和 D_i 就要由约束条件和边界条件来决定

约束条件和边界条件：

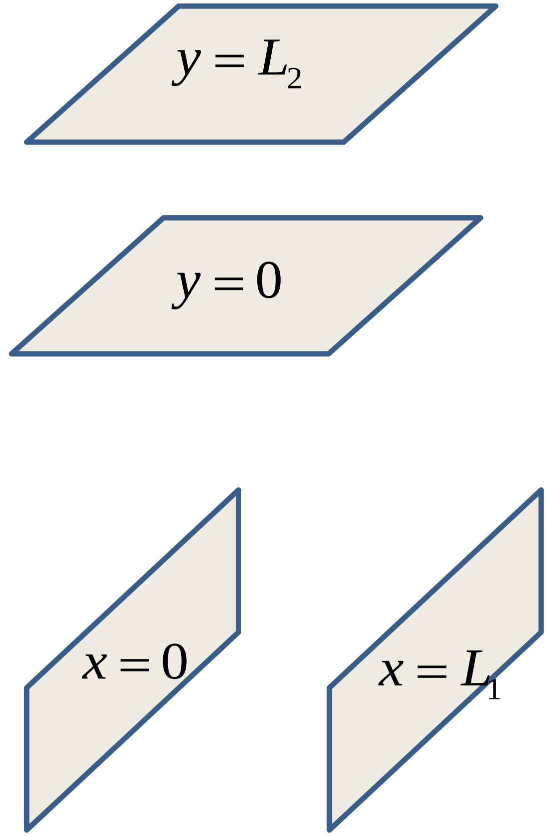
（i）对 $x=0$ 面和 $x=L_1$ 面：

$$\vec{n}\times\vec{E}=0 \Rightarrow E_y=0 \qquad E_z=0$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

（ii）对 $y=0$ 面和 $y=L_2$ 面：

$$E_x=E_z=0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y}=0$$



解出：

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= A_1\cos k_x x\sin k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y &= A_2\sin k_x x\cos k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z &= A_3\sin k_x x\sin k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)} \end{aligned}}$$

不再是横波，
三个方向都有

电磁波不再是横波！

磁场：$\vec{B}=\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$

$$B_x=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=\frac{i}{\omega}\left(A_3k_y-iA_2k_z\right)\sin k_x x\cos k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)}$$

$$B_y=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=\frac{i}{\omega}\left(iA_1k_z-A_3k_x\right)\cos k_x x\sin k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)}$$

$$B_z=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=\frac{i}{\omega}\left(A_2k_x-A_1k_y\right)\cos k_x x\cos k_y y\cdot e^{i(k_z z-\omega t)}$$

特点：

（i） 场的纵向分量E_z 、B_z 决定了整个场的分布

（ii） 不能传播 $E_z=B_z=0$ 的横电磁波（TEM波）

（iii）可以传播 $E_z=0$ 、$B_z\neq 0$ 的横电型电磁波（TE波）

和 $E_z\neq 0$ 、$B_z=0$ 的横磁型电磁波（TM波）

波矢要满足： $k_x = \dfrac{m\pi}{L_1}$ $k_y = \dfrac{n\pi}{L_2}$ $(m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots.)$ k_z 可连续变化

选定了某一组 (m,n) ，称为选定了一种电磁场的振荡模式

(m,n) 不能有两个同时为零

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 + k_z^2$$

若 (m,n) 取某些值，使得：

$$k^2 < k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2$$

则有,$k_z^2 < 0$ ，k_z 为虚数，电磁波不能传播

最低频率（截止频率）： $\omega_{cutoff} = kc = c\sqrt{\left(\dfrac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{L_2}\right)^2}$

只有频率大于截止频率的电磁波才能在波导内通行

例： 用金属（电导率 $\sigma = 1.6\times10^7$ ）制成的矩形波导管，管内横截面边长分别为 1.0cm和2.0cm， 求这管在传播频率为 $f = 10^{10}\,Hz$ 的 TE_{10} 时功率的衰减情况。

解： $m = 1 \quad n = 1 \quad k_x = \pi/L_1 \quad k_y = 0$

最低频率（截止频率）： $\omega_{cutoff} = c\dfrac{\pi}{L_1} \qquad f_{cutoff} = \dfrac{\omega_{cutoff}}{2\pi} = \dfrac{c}{2L_1} = \dfrac{3}{4}\times10^{10} < f$

TE_{10} 波：

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

$$E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} = A_2 \sin\frac{\pi}{L_1}x \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}$$

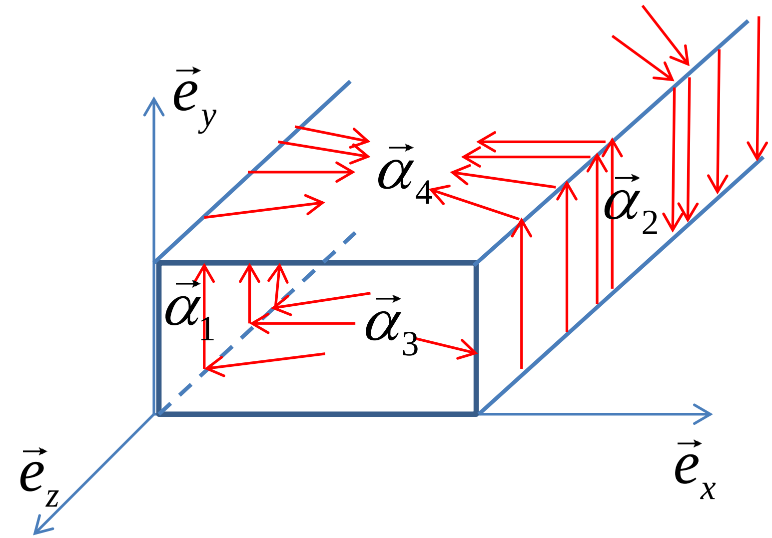
$$E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

$$B_x = \frac{1}{\omega}\left(A_2 k_z\right)\sin\frac{\pi}{L_1}x \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(A_2 k_x\right)\cos\frac{\pi}{L_1}x \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}$$

管壁面电流与磁场的关系： $\vec{n}\times\vec{H}=\vec{\alpha}_f$



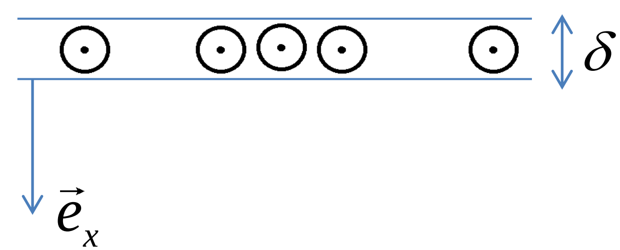
4个管壁上的面电流密度：

$$\vec{\alpha}_1=\vec{\alpha}_2=i\frac{\pi A_2}{\omega\mu_0 L_1}e^{i(k_z z-\omega t)}\vec{e}_y$$

$$\vec{\alpha}_3=-\vec{\alpha}_4=H_z\vec{e}_x-H_x\vec{e}_z=-i\frac{\pi A_2}{\omega\mu_0 L_1}\cos\frac{\pi x}{L_1}e^{i(k_z z-\omega t)}\vec{e}_x+\frac{k_z A_2}{\omega\mu_0}\sin\frac{\pi x}{L_1}e^{i(k_z z-\omega t)}\vec{e}_z$$

面电流密度可看成是管壁上厚度为 δ 的一层内流动

体电流密度： $\vec{J}=\dfrac{\vec{\alpha}}{\delta}$



管壁上单位面积所消耗的平均功率为：

$$P_1=P_2=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{J}_1^*\cdot\vec{E}\right)=\frac{1}{2\sigma\delta}\left|\vec{\alpha}_1\right|^2=\frac{1}{2\sigma\delta}\left(\frac{\pi A_2}{\omega\mu_0 L_1}\right)^2$$

$$P_3=P_4=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{J}_3^*\cdot\vec{E}_3\right)=\frac{1}{2\sigma\delta}\left|\vec{\alpha}_3\right|^2=\frac{1}{2\sigma\delta}\left(\left|H_x\right|^2+\left|H_z\right|^2\right)=\frac{A_2^2}{2\omega^2\mu^2\sigma\delta}\left(k_z^2\sin^2\frac{\pi x}{L_1}+\frac{\pi^2}{L_1^2}\cos^2\frac{\pi x}{L_1}\right)$$

单位长度的一段管壁上所消耗的平均功率：

$$P_d = \int_0^{L_2} \left(P_1 + P_2\right) dy + \int_0^{L_1} \left(P_3 + P_4\right) dx = 2\int_0^{L_2} P_1 dy + 2\int_0^{L_1} P_3 dx$$

$$= \frac{L_2}{\delta\sigma}\left(\frac{\pi A_2}{\omega\mu L_1}\right)^2 + \frac{L_1 A_2^2}{2\omega^2\mu^2\delta\sigma}\left(k_z^2 + \frac{\pi^2}{L_1^2}\right)$$

波导管所传输的平均功率：

$$P = \int \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot \vec{e}_z dA = \iint \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\vec{E}^* \times \vec{H}\right) \cdot \vec{e}_z dA = -\frac{1}{2}\int_0^{L_2}\int_0^{L_1} E_y H_x^* dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k_z A_2^2}{\omega\mu}\int_0^{L_2}\int_0^{L_1} \sin^2\frac{\pi x}{L_1} dxdy = \frac{1}{4}\frac{L_1 L_2 k_z A_2^2}{\omega\mu}$$

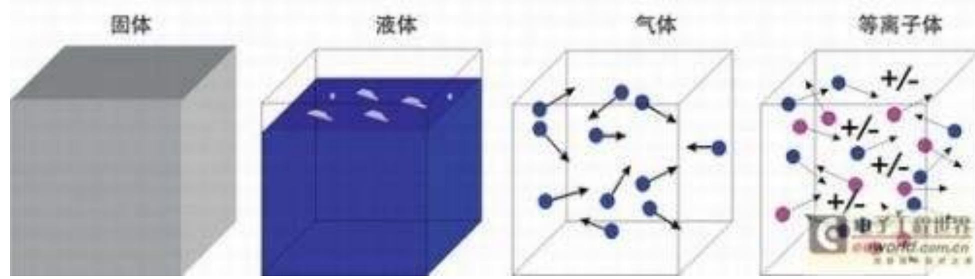
所消耗的平均功率与所传输的平均功率大小关系为：

$$P_d = \frac{4\pi^2}{\omega\mu\sigma\delta L_1^3 L_2 k_z}\left[L_2 + \frac{L_1}{2}\left(\frac{\omega L_1}{\pi c}\right)^2\right] P = \mathrm{K} P \qquad \mathrm{K} = 6\times 10^{-2} m^{-1}$$

微分 关系为：

$$dP_d = -\mathrm{K} P dz \qquad P_d = P_0 e^{-\mathrm{K}z}$$

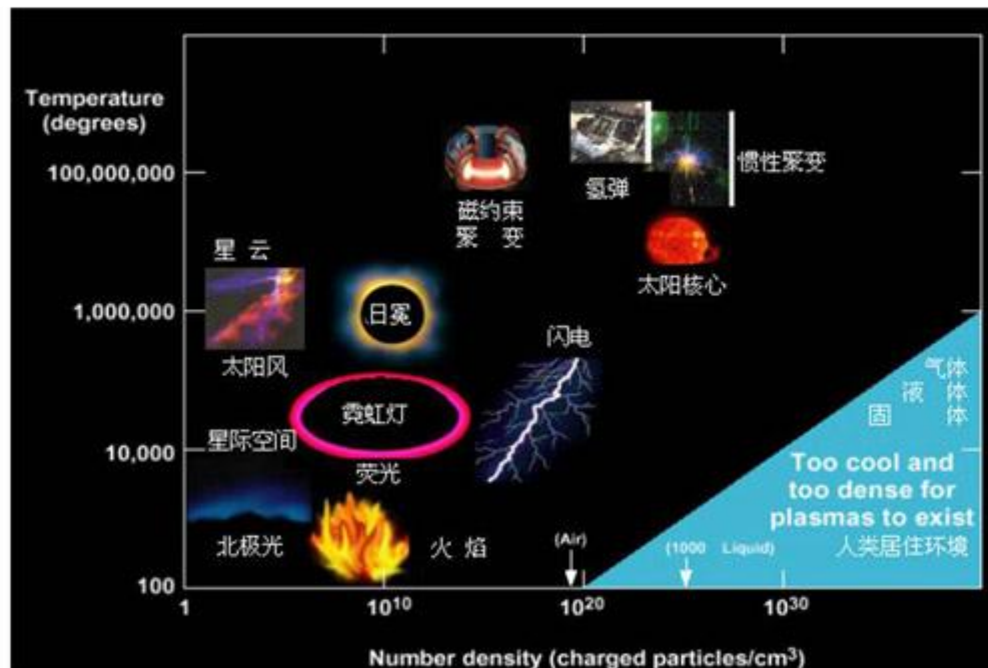
（四）等离子体



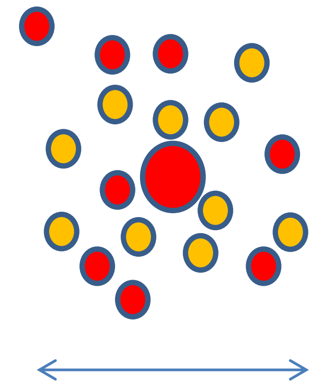
组成物质的原子或分子被分解成电子与正离子，形成由自由电子和正离子混合组成的物质状态，可以把它想象成是电离了的“气体”，

等离子体的尺度

等离子体温度参数分布很广



（a）等离子体　　由大量正负带电粒子组成的准中性粒子系统



粒子动能　$E_k = \frac{3}{2}kT$　　　粒子势能　$E_p = \sum_i \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$

$E_k \gg E_p$　　典型的等离子体

$E_k \ll E_p$　　中性粒子组成的固液气系统

引入特征长度 λ ，使得 $E_k \approx E_p$，

$$\frac{3}{2}kT \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{N}{\lambda}$$

$N = nV = n_e \frac{4}{3}\pi\lambda^3$　离子数目

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{n_e e^2}}}$$

德拜长度

n_e 电子密度，也是离子密度

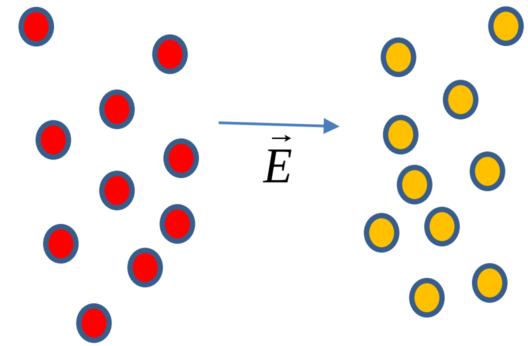
等离子体内电荷Q产生的电势为：$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\lambda}$

$r \to 0$　　$e^{-r/\lambda} \to 1$　　$\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　　与库伦势相同

$r \gg \lambda$　　$e^{-r/\lambda} \to 0$　　$\varphi \to 0$　　电中性

在 $r > \lambda$ 的尺度内，可看成是电中性的

（b）等离子体的振荡频率



由于干扰，局部正负电荷分离，

平衡时的电子密度 n_0

电子密度偏离 $n' = n_e - n_0$

Gauss定理

流体力学的连续性方程（质量守恒定律）

Lorentz力方程

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E} = \frac{(n_e - n_0)e}{\varepsilon_0} = \frac{n'e}{\varepsilon_0} \\ &\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla\cdot(n_e\vec{v}) \approx \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0\nabla\cdot\vec{v} = 0 \\ &m\frac{d\vec{v}}{dt} \approx m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \approx e\vec{E} \end{aligned}}$$

密度振荡

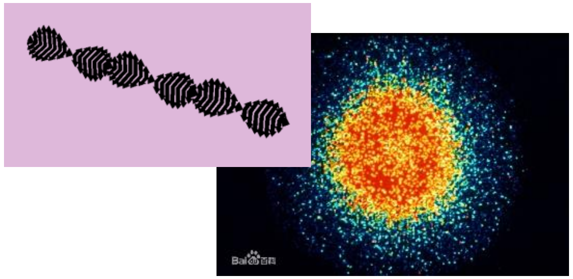
$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0} n' = 0$$

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0}}}$$

等离子体振荡频率

λ 和 ω_p 是等离子体的两个主要特征量

（c）等离子体中的电磁波



等离子体可视为介质

假设导体中的仍然有平面电磁波传播

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \qquad \vec{B}=\vec{n}\times\vec{E}/c=\vec{k}\times\vec{E}/\omega$$

在没有外磁场的情况下，电子所受的力为：$|e\vec{E}|$

$$|e\vec{v}\times\vec{B}|=\left|e\frac{\vec{v}\times(\vec{n}\times\vec{E})}{c}\right|\sim\left|e\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{E}\right|\ll|e\vec{E}|$$

电子运动方程：

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=e\vec{E}=e\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

积分：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{ie\vec{E}_0}{m\omega}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=\frac{ie}{m\omega}\vec{E}$$

电流密度：

$$\vec{J}=\rho\vec{v}=n_0 e\vec{v}=\frac{in_0e^2}{m\omega}\vec{E}$$

对照Ohm定律： $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

电导率：

$$\boxed{\sigma=i\frac{n_0e^2}{m\omega}}$$

纯虚数，相当于 $\vec{J}$ 与 $\vec{E}$ 相位差了 $\pi/2$

当电场达到最大时，电子的速度为零，而当电场为零时，电子的速度达到最大值

当有外磁场的时候，等离子体的电导率为一个张量

Maxwell方程组：

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\sigma\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=i\frac{n_0\mu_0e^2}{m\omega}\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$=i\frac{n_0\mu_0e^2}{m\omega}\left(\frac{i}{\omega}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\left(1-\frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0\omega^2}\right)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\varepsilon'\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad \varepsilon'=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

只有当$\omega>\omega_p$，k才是实数（电磁波可传播）

$\omega<\omega_p$，k是纯虚数（电磁波不可传播，或者说被反射）

ω_p为截止频率

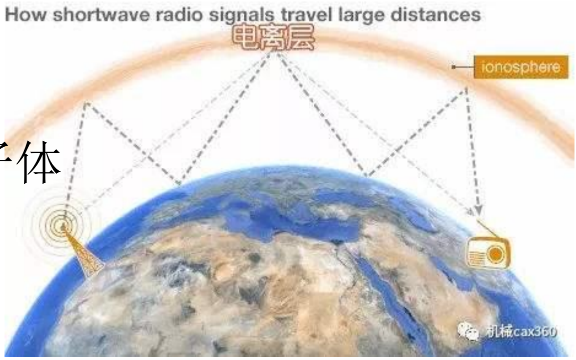
相速度： $v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}}>c$

折射率： $n=\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}<1$

思考题： 太阳表面是一层炽热的等离子体，它的截止频率是多少？

一些应用：

无线电波在电离层的反射



地球表面上方约 $50 \sim 500km$ 的大气电离层可看成是稀薄的等离子体

密度大约为：$10^{10} \sim 10^{12} / m^3$

推算出：$\omega_p \approx 1 \sim 10MHz$

广播频段中的短波通讯可利用大气电离层的等离子体的反射特性，将电波传输到很远的地方；而电视广播的频段大于截止频率，因此可穿过大气电离层并通过卫星来传播，

黑障

航天飞机等航空器的返回舱从太空以超高速进入大气层时，与大气剧烈摩擦在其表面产生高温区，高温区内的材料分子被分解电离，形成一个等离子区，它包裹着返回舱，屏蔽了电磁波，这种现象就称为“黑障”（ionization blackout），此时的通讯会暂时中断。

作业

1。（类似Casimir效应）
一对无限大的平行理想导体板，相距为b，电磁波沿平行于板面的z方向传播，
证明：

$$E_x = D_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \qquad E_y = D_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

$$E_z = D_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

是可能传播的波模，且：

$$k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad \frac{n\pi}{b}D_2 = ik_z D_3$$