

第三讲

上次课:

- \vec{j} - 磁场的来源, 磁场的受体
- $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} d\tau' \times \vec{R}}{R^3}$ - B-S 定律, 磁感应场
- $\vec{F} = \vec{j} d\tau \times \vec{B}$, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ - 电流在磁场中的受力, Lorentz 力
- $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$; $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau'$ - 磁场的矢势
- $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) \equiv 0$ - 磁场为无源场

5. $\vec{B}(\vec{r})$ 的旋度

下面来求 $\vec{B}(\vec{r})$ 的旋度。由(1.2.12)式得

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.2.14)$$

【上面这个公式可以通过将向量叉积公式 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (这个公式非常

有用, 应当牢记) 作代换 $\nabla \leftrightarrow \vec{a}, \nabla \leftrightarrow \vec{b}, \vec{c} \leftrightarrow \vec{A}$ 得到】

先看第一项:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla \cdot \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \quad (1.2.15)$$

利用恒等式

$$\left. \begin{aligned} \nabla f(R) &= \frac{\partial f}{\partial R} \nabla R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{R} \\ \nabla' f(R) &= \frac{\partial f}{\partial R} \nabla' R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla f(R) = -\nabla' f(R)$$

(注意 ∇ 和 ∇' 的不同, 前者作用在变量 \vec{r} - 观察点坐标, 后者作用于变量 \vec{r}' - 源所在坐标)。

可将 (1.2.15) 式改写成全微分的形式

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla' \cdot \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \right] d\tau' \quad (1.2.16)$$

注意到在稳恒电流条件下, 有 $\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = -\dot{\rho} = 0$, 故

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \cdot d\vec{S}' \Big|_{r' \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.2.17)$$

这里考虑电流分布在有限区域, 无穷远处边界处的电流密度一定为零。第二项为:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla^2 \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \left(\nabla^2 \frac{1}{R} \right) d\tau' \quad (1.2.18)$$

将第一讲中的恒等式略加修改可得

$$\boxed{4\pi\delta(\vec{R}) = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = -\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) = -\nabla^2 \frac{1}{R}}$$

将其带入 (1.2.18) 得到

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{R}) d\tau' = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (1.2.18')$$

整理两项贡献可得 \vec{B} 的旋度为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (1.2.18)$$

(1.2.18) 式称为安培环路定理的微分形式, 对应的积分形式为 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ 。

Tips:

(1) 从推导过程中可以看出, (1.2.18) 式显然只在稳恒电流条件下成立, 一般情况下的形式必须重新考虑! 另外, 旋度不为 0, 意味着场在打转, 一圈积分下来比不为 0, 因此磁场是有旋场, 不是保守场。

(2) 有同学会害怕使用 Delta 函数。其实 Delta 函数是由物理学家 Dirac 引入的物理工具, 目的是用来方便地描述点电荷等问题, 其数学的严谨性是建立了泛函分析才被证明。

在本课程中, 只需知道其积分表达式 $\int \delta(x-x') dx = 1$; $\int \delta(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r} = 1$; 以及如下性质

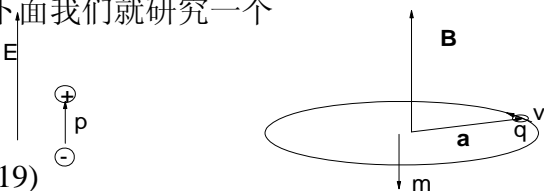
$$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}') f(\vec{r}) d\vec{r} = f(\vec{r}'); \quad \delta(x-x') = \delta(x'-x), \text{ 就可以了。}$$

7. 磁偶极子

当外加电场时, 物质中的正电荷受到沿电场的作用力而负电荷受到反向于电场的作用力, 因此正负电荷被拉开形成电偶极子。与此相对应, 对一个物质施加磁场, 电子在磁场 Lorentz 力的作用下做回旋运动, 形成一个分子环流。因此, 一个环形稳恒电流在静磁学中起到与电偶极子在静电学中完全一样的作用, 我们叫它磁偶极子, 都是物质对外场的基本响应形式。下面我们就研究一个磁偶极子 (电流 I , 线圈半径 a) 的磁场, 与 \vec{p} 类似, 我们先计算 \vec{m} 产生的势。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{R} d\vec{l} \quad (1.2.19)$$

在远场条件下 $r \gg r'$, 利用 Taylor 展开到第一阶可得

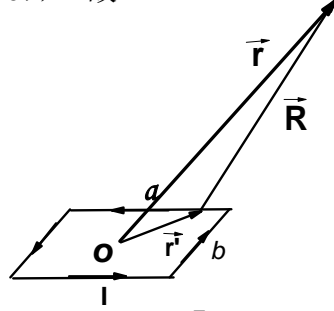


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}。代入上式后，第一项贡献 \sim \frac{1}{r} \oint d\vec{l} \equiv 0$$

(闭合回路，稳恒电流，绕一圈当然为 0)，故

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l} \quad (1.2.20)$$

为了便于计算，考虑一个大小为 $a \times b$ 的矩形线圈。计算 x 分量可得



$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\int_{-a/2}^{a/2} (xx' - yb/2) dx' + \int_{a/2}^{-a/2} (xx' + yb/2) dx' \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} yba \quad (1.2.21)$$

同理可以得到 y 分量的表达式： $A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} xba$ 。综合可得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Iba}{4\pi r^3} (-y\hat{x} + x\hat{y}) \quad (1.2.22)$$

注意到 $\vec{m} = I\vec{S} = Iab\hat{z}$ ，类似电偶极子的标势，我们可以将磁偶极子的矢势写成更紧凑的形式

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.2.23)$$

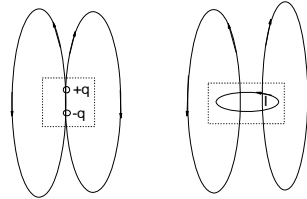
由此可进一步求出空间的磁场

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} \right] \quad (1.2.24)$$

(推导上式时考虑了远场条件，则 $r \neq 0$)。我们发现磁偶极子的磁场与电偶极子的电场的形式完全一致！

这并不奇怪，在远场看，p 与 m 的场是完全一样，尽管近场结构很不一样。这事实上蕴含着很深的物理：

在无源区，电场的磁场满足一样的方程。



对比静电场与静磁场，发现它们之间有着惊人的对称性

	电	磁
源	ρ	\vec{j}
场	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R^3} \vec{R}$	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} d\tau' \times \vec{R}}{R^3}$
力	$\vec{F} = \rho d\tau \vec{E}$	$\vec{F} = \vec{j} d\tau \times \vec{B}$

散度	$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) / \epsilon_0$	$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$
旋度	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$
势	$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R}$	$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} d\tau'}{R}$
偶极子的势	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$
偶极子的场	$\vec{E}_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{p} - 3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} \right]$	$\vec{B}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} \right]$

以后我们还会发现电、磁之间更多的对称性，这在学习电动力学中（特别是与磁场相关的问题是特别需要注意的）

§ 1.3 电磁感应定律

自从奥斯特发现了电流产生磁场之后，人们一直在研究是否存在相反的效应，即磁场能不能产生电流。Faraday 总结大量实验建立了描述磁产生电的电磁感应定律。对于一个闭合的线圈，Faraday 的实验表明，

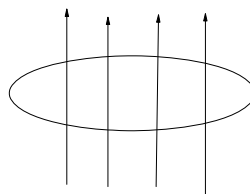
- (1) 仅当通过这个线圈的磁通量产生变化时，线圈之中才会产生感应电流；
- (2) 电流的大小与线圈材料的电导成正比（同样形状的线圈，线圈材料的导电性越好，电流越大）

这第二个性质预示着电磁感应效应中更基本的物理量应当是电动势，而不是电流。总结了大量的实验，Faraday 给出了感应电动势的定量表达式

$$\epsilon_{\text{感}} = \left| \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right| \quad (1.3.1)$$

感生电动势（电流）的方向是由楞次给出的，用物理的语言表示，即“感生电流的产生是用来抵消磁通量的改变的”。这条规律其实正是能量守恒的必然要求（**思考一下假如感生电流的产生是增强磁通量的改变，则世界会变成什么样子？**）！总结法拉弟和楞次的贡献，完整的电磁感应定律是

$$\epsilon_{\text{感}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.3.2)$$



显然，磁通量的改变可以由两种机制产生：

- (1) 磁场本身发生变化（ \vec{B} 变，称之感生电动势）；
- (2) 回路相对磁场发生变化（ $d\vec{S}$ 变，称之为动生）。

注意到电动势的定义为外力将单位电量的电荷在环路上驱动一周所提供的能量，

即 $\epsilon = \frac{\Delta W}{q} = \oint \vec{F}_K \cdot d\vec{l} / q$ （其中 \vec{F}_K 为电荷受到的力），则可以将电动势改写成

$$\varepsilon_{\text{感}} = \oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} \quad (1.3.3)$$

其中 $\vec{E}_K = \vec{F}_K / q$ 与静电场同样量纲。对电荷来讲，它既能感受到静电场的静电力，也能感受到非静电起源的这个场的作用力，因此后者也称为一种电场，尽管其为“非静电来源的电场”。

对第一种情况，(1.3.2)式可改写成

$$\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.3.4)$$

利用斯托克斯定理： $\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}_K) \cdot d\vec{S}$ ，得 $\int_S (\nabla \times \vec{E}_K + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$ 。因为线圈回路是任意的故积分曲面是任意的，所以得到

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}_K = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (1.3.5)$$

此即是电磁感应定律的微分形式，式中的 \vec{E}_K 和 \vec{B} 是相对于同一参考系定义的。

第二种情况要复杂许多，因为此时线圈在运动，此时线圈内的电荷受到的驱动电场是在一个相对于实验室运动的坐标系中的电场，用 \vec{E}'_K 表示。 \vec{E}'_K 与 \vec{B} 的关系是两个相对运动的坐标系中场的关系。对这个问题的深入理解，我们将推迟到学习相对论时进行。

(1.3.5) 式显示：当磁场发生变化时，

- 1) 空间中会激发出类似静磁场的（这里 $-\dot{\vec{B}}/\mu_0$ 等价于电流密度）涡旋电场；
- 2) 这种电场不是由电荷激发的，而是由变化的磁场产生的；
- 3) 它们的存在并不依赖于有没有线圈，线圈中产生电流只是一个探测手段；
- 4) \vec{E}_K 和静电场一样对电荷产生驱动力 $\vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{E}_K)$ ，因此对电荷来讲，它感知到的就是空间的总场 $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_K$ ，无论来源。

§ 1.4 麦克斯韦方程组

前面几节中，我们讲述了电磁现象的基本实验定律，现总结如下：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_s &= \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E}_s &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(静止电荷)}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B}_s &= 0 \\ \nabla \times \vec{B}_s &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned} \right\} \text{(稳定电流)}$$

$$\nabla \times \vec{E}_K = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{(变化磁场)}$$

它们分别都有自己的适用条件和范围。在一般的情况下，所有的场量及激发它们的源（ ρ, \vec{j} ）都可能随时间变化，此时描述它们行为的电磁规律是什么呢？

Maxwell 仔细研究了这个问题，总结出了 Maxwell 方程组。让我们假设自己就是当年的 Maxwell，面对已经建立的实验定律思考一下一般的规律应当是怎样的。

第一条方程

$\nabla \cdot \vec{E}_s = \rho / \epsilon_0$ 是由库仑定律导出的，它的直观物理图像是单位电荷激发 $1/\epsilon_0$

根电场线。在普遍情况下，电场可以随时间变化，电场的变化有两种可能的起源：

1) 源电荷运动；

2) 总电场中含有感应电场 \vec{E}_k

对第一个可能，电荷运动是其发出的电力线将跟随它运动，因此在 t 时刻在 \vec{r} 位置处做一无限小的闭合区间，可以预期此时刻电场线通过表面的总数仍然与其中的电量成正比。对第二个可能，注意到 \vec{E}_k 与静磁场非常类似，是围绕着磁场变化产生的涡旋场，而这种电场场线显然是连续无源的，可以预期 $\nabla \cdot \vec{E}_k = 0$ 。综合这两个考虑，对空间的总电场来说，

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{E}_s + \nabla \cdot \vec{E}_k = \rho(\vec{r}, t) / \epsilon_0} \quad (1.4.1)$$

注：直接从电磁感应定律的原始形式不能推出感应电场为无源场 $\nabla \cdot \vec{E}_k = 0$ 的结论的。这应当是 Maxwell 做的合理推广，正确与否被后来的无数实验所验证。有机会查查历史上 Maxwell 当时是怎样得到这个结论的。

第二条方程

在普遍情况下电场应当是总场，故其旋度为

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_s + \nabla \times \vec{E}_k = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (1.4.2)$$

第三条方程

虽然 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 是对静磁场推出的，我们注意到在推导的过程中并没有利用到

电流必须稳恒的条件（即 $\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$ ）。从物理上讲，散度刻画的是场线是否有奇点（源），自然界不存在磁荷，可以想象即使在物理量随时间变化时磁场线仍然连续。综合以上考虑，在一般情况下的一个大胆而合理的推论是磁场的高斯定理仍成立：

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0} \quad (1.4.3)$$

但这个推广必须与其他定律（注意这里我们已经推广了 2 条方程！）不互相矛盾，

不妨对与磁场关联的法拉第定律两边取散度，

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

因为 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) \equiv 0$ ，所以

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

即 $\nabla \cdot \vec{B} = \text{常数}$ （与时间无关），此常数决定于初始时刻的值。假设变化的电磁场是由初始静态的电磁场演化而来的，上式意味着此常数=0（因为静态磁场满足高斯定理），因此随时间变化的条件下 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 仍然正确！

第四条公式

与推导高斯定理不同，推导环路定理 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ 时我们用到了稳恒电流的条件 $\nabla \cdot \vec{j}_s = 0$ 。然而 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ 在一般情况下不成立，根据电荷守恒定律，有

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad (1.4.4)$$

因此在一般情况下 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ 不再成立。为了证明这一点，对 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ 两边同时取散度，得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} \quad (1.4.5)$$

等式左边 $\equiv 0$ ，但等式右边一般情况下不为 0（只在静态时=0）。可见静态的环路定理与电荷守恒定律是有矛盾的。两者之间我们应当做何取舍？显然电荷守恒定律更基本，故安培环路定理必须作相应修改。

如果在一般情况下我们仍然想将环路定理写成

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{G} \quad (1.4.6)$$

的形式，则有如下要求

- 1) 矢量 \vec{G} 在静态时回到 \vec{j} ；
- 2) 上式应与电荷守恒定律协调。

为了寻找 \vec{G} 的形式，我们将（1.4.6）式两边求散度，得到对 \vec{G} 的限制条件为

$$\nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.4.7)$$

习题

1) 推导 (1.2.24)。

选作题

- 1) 证明放置于原点的一个半径为 a 的载流为 I 的圆形线圈在远处产生的矢势仍然为 (1.2.23)。
- 2) 编写一段小程序 (Fortran 或 C++)，计算电 (磁) 偶极子的标 (矢) 势及电 (磁) 场在任意一点的值，选取合适的高对称平面，用图形处理程序 (Origin, 等) 将这些量的分布表示出来。比较真实计算结果和利用电 (磁) 偶极子的公式计算出来的结果的不同，并从数值结果分析在什么条件下我们可以用电 (磁) 偶极子的公式代表这些真实结构的电 (磁) 场。