中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY

第9课 介质的电磁性质

学习建立物理模型的思想方法，把一大类物质的电磁性质归结为若干参数。

介质的概念

宏观物质主要模型：介质、导体、超导体、等离子体.

介质模型适用范围非常广，不局限于稳恒电荷电流分布，对准静态过程也适用。

<u>介质</u>：电荷束缚在分子（泛指一个**中性**的微观元）中，不能作宏观距离的运动.

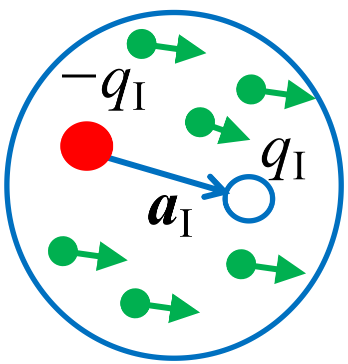
一般假设在没有外场情形，处于热平衡的介质没有宏观电荷和电流，因此也没有宏观电磁场.

施加外场（包括不均匀介质的温度和应力场）、引入额外的电荷或电流后，介质会被极化或/和磁化，出现宏观电荷和电流分布，分别称为<u>束缚电荷</u>和<u>磁化电流</u>.

第1节 介质的极化

1.极化的经典图像

- 在外场下，束缚在分子中的正负电荷平衡位置不重合
- 具有极性的分子原来取向无序，平均后没有极性，而在外场下呈现一定的平均取向

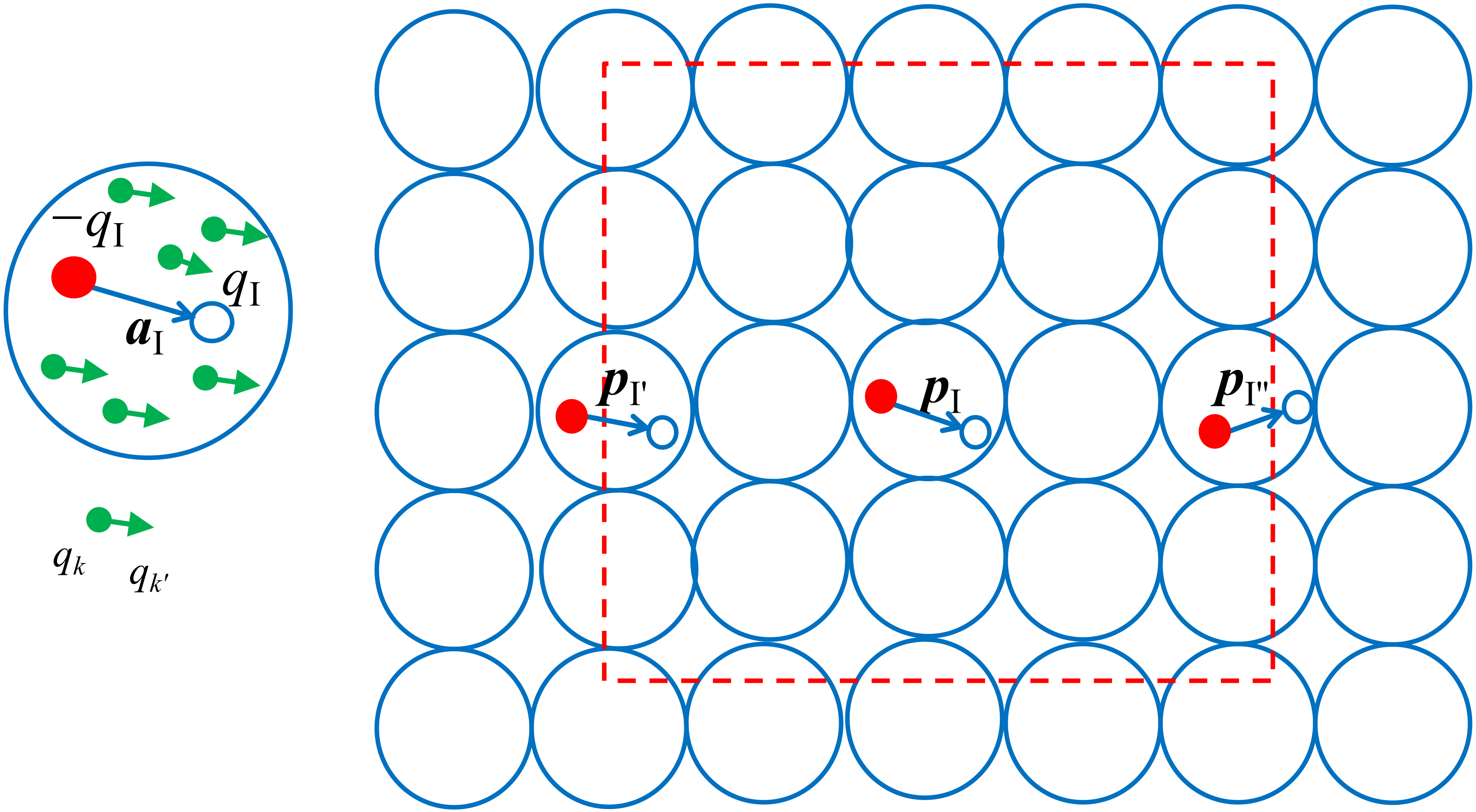


“分子”等效为$+q_I$和$-q_I$两个电荷: 电偶极子

$$\boldsymbol{p}_I=q_I\boldsymbol{a}_I$$

q_I: 分子的平均极化电荷（束缚电荷）

$\boldsymbol{a}_I$: 分子的平均正负束缚电荷相对位移.



在宏观小微观大区域(红虚框ΔV)定义束缚电荷密度:

$$\rho_P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\boldsymbol{x}_k \in \Delta V} q_k \tag{1}$$

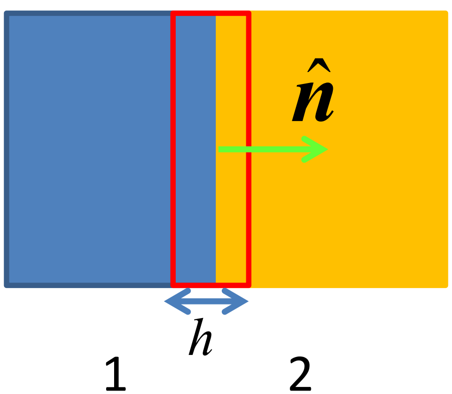
2. 极化强度

引入辅助矢量场：极化强度 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$，使之在介质内满足

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_P} \qquad (2)$$

并规定在介质外 $\boldsymbol{P}=0$.

3. 表面和界面极化



$$\iiint_{\Delta V}\nabla\cdot\boldsymbol{P}dV=-\iiint_{\Delta V}\rho_P dV=-\Delta Q_P$$

$$\Delta S\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1\right)+O(h)=-\Delta Q_P$$

让h趋于零（物理上不等于零）

得束缚电荷面密度

跨两种介质界面作一个高度为h截面积为S的圆柱ΔV，轴线垂直界面.

$$\boxed{\sigma_P\equiv\frac{\Delta Q_P}{\Delta S}=-\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1\right)} \qquad (3)$$

4. 极化电流

考虑极化的整个过程：加上外电场后，介质发生极化；经过一段宏观短微观长的时间（弛豫时间τ）后，在外电场和极化电场的共同作用下，介质达到稳定的平衡状态。束缚电荷和束缚电流密度满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}_P \tag{4}$$

$$\rho_P(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla \cdot \int_0^t \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{x}, t')dt' \tag{5}$$

和(2)式比较，得含时极化强度（由微观理论计算$\boldsymbol{P}$的实用公式）

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^t \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{x}, t')dt' \tag{6}$$

当$t > \tau$，上式与t无关。

对(6)式微分得极化电流

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{x},t) \tag{7}$$

为了进一步明确$\boldsymbol{P}$的物理意义，把极化电流表示为

$$\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{x},t)=\sum_j q_j\dot{\boldsymbol{x}}_j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j) \tag{8}$$

代入(6)式并在介质的任意体域ΔV积分

$$\int_{\Delta V}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t)dV=\sum_j q_j\int_0^t\int_{\Delta V}\frac{d\boldsymbol{x}_j(t')}{dt'}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j(t'))dVdt'$$

$$=\sum_{j\in\Delta V}q_j\int_0^t\frac{d\boldsymbol{x}_j(t')}{dt'}dt'=\sum_{j\in\Delta V}q_j\boldsymbol{x}_j(t)$$

上式利用了$\boldsymbol{x}_j(0)=0$. 因此可以赋予$\boldsymbol{P}$_<u>电偶极矩密度</u>的物理意义，

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_{\boldsymbol{x}_i\in\Delta V}\boldsymbol{x}_iq_i=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V}\boldsymbol{x}'\rho_P(\boldsymbol{x}')dV' \tag{9}$$

5. 电位移矢量和介质中的高斯定理

高斯定理的电荷密度是总电荷密度，包括束缚电荷密度ρ_P和额外电荷（自由电荷）密度ρ_f.

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_P + \rho_f = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_f \tag{10}$$

引入**电位移矢量**

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{11}$$

则有介质中的**高斯定理**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \tag{12}$$

对线性各向同性介质 $\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ 其中χ_e称为极化率

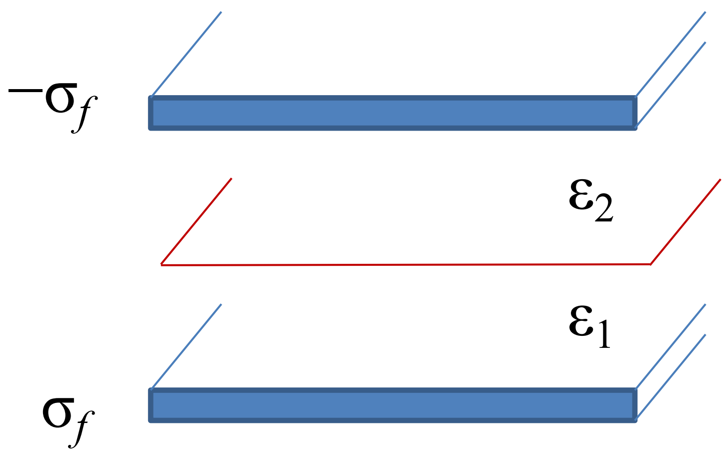
则有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{13}$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$，$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$. 称ε为电容率, ε_r为相对电容率.

第1节作业

无穷大平行板电容器内有两层介质（如图），两极板上面电荷密度分别为正负σ_f，求电场和束缚电荷分布。

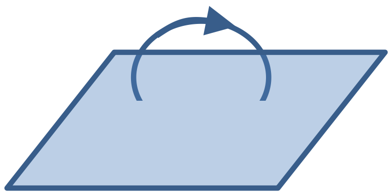


第2节 介质的磁化

1. 磁化的经典图像

- 外电场产生的极化电荷随时间变化产生**极化电流** $\boldsymbol{J}_P$.
- 分子内原有杂乱的微观分子电流，平均为零. 在外磁场作用下微观电流有序化，呈现宏观的**磁化电流** $\boldsymbol{J}_M$.

分子磁化电流 I_J 局限在分子内部的微观区域，所以穿过宏观封闭曲面的平均分子磁化电流总通量为零.



$$\oiint \boldsymbol{J}_M \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

故

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_M = 0 \tag{14}$$

2. 磁化强度

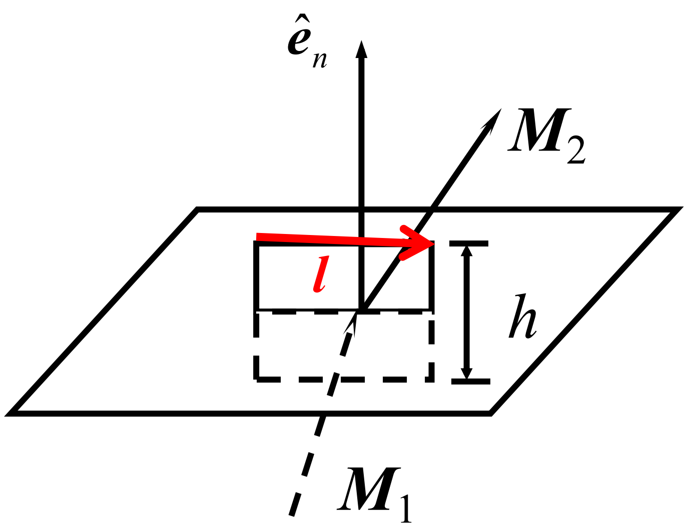
零散度的矢量场一定可以写成另一个矢量场的旋度.

磁化强度：引入$\boldsymbol{M}$，使之在介质内满足

$$\nabla\times\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}_M \tag{15}$$

并要求在介质外$\boldsymbol{M}=0$.

3. 表面和界面面电流



考察垂直跨于界面的矩形回路。

$$\oint_{L=\partial S} M\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \nabla\times M\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_S \boldsymbol{J}_M\cdot d\boldsymbol{s}$$

取 $h<<l$，忽略垂直方向的路径积分得

$$\hat{\boldsymbol{e}}_n\times(M_2-M_1)=\boldsymbol{\alpha}_M \tag{16}$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_M$为界面束缚电流线密度。

4. 磁偶极矩（第三章第3节）

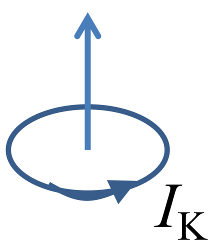
体域V内磁化电流形成的总磁偶极矩

$$\boldsymbol{m}_V = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}')dV' \tag{17}$$

利用 $\nabla\times\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_M$

$$\boldsymbol{m}_V = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{x}'\times(\nabla\times\boldsymbol{M})dV' = \iiint_V \boldsymbol{M}dV' - \frac{1}{2}\oint\!\!\oint_{\partial V} \boldsymbol{x}'\times(\boldsymbol{M}\times d\boldsymbol{s}) \tag{18}$$

右边两边两项分别为V内的贡献的磁偶极矩和V边界的贡献的磁偶极矩。故可赋予$\boldsymbol{M}$ 感应<u>磁偶极矩密度</u>的物理意义，即



$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta\bar{V}\to 0}\frac{1}{\Delta\bar{V}}\sum_{K\in\Delta\bar{V}}\boldsymbol{m}_K \tag{19}$$

分子磁矩 $\boldsymbol{m}_K = I_K\, d\boldsymbol{s}$

5.磁场强度和介质中的安培定律

记自由电流: $\boldsymbol{J}_f$，极化电流: $\boldsymbol{J}_P=\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$，磁化电流: $\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}$

总电流

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_P+\boldsymbol{J}_M \tag{20}$$

据安培定律，稳恒磁场（可忽略电磁辐射）的磁感应强度旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_P+\boldsymbol{J}_M\right) \qquad \text{（稳恒）}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)=\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_P$$

引入<u>磁场强度</u>

$$\boxed{\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}} \tag{21}$$

则得介质中的<u>安培定律</u>

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_P} \qquad \text{（稳恒）} \tag{22}$$

对(22)式求散度，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_f + \nabla \cdot \boldsymbol{J}_P = 0$$

应用(7)和(2)式，并考虑到自由电荷和束缚电荷分别定域守恒，从上式得到

$$\frac{\partial(\rho_f + \rho_P)}{\partial t} = 0$$

对非稳恒情形，上式不成立。

为了把安培定律推广到非稳恒电流和随时间快速变化的电磁场情形，麦克斯韦引入位移电流(第一项实质不是电流)

$$\boldsymbol{J}_D \equiv \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \qquad (23)$$

用$\boldsymbol{J}_D$取代(22)式的$\boldsymbol{J}_P$，得到普遍成立的麦克斯韦方程

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}} \qquad (24)$$

6. 各向同性非铁磁介质模型

$$\boldsymbol{M} = \chi_M \boldsymbol{H} \tag{22}$$

称χ_M为磁化率. 定义

$$\mu = \mu_r \mu_0, \qquad \mu_r = 1 + \chi_M \tag{23}$$

则

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{24}$$

$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$是电磁场的基本物理量，$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$是两个辅助场.

介质的电磁物性由ε (ε_r 或 χ_e)和μ (μ_r 或 χ_M) 描述.

第2节作业

1. 描述束缚电荷面密度的物理意义。根据(15)式推导(16)式。

2. 从(17)式证明(18)式。

第3节 电磁场的能量和能流

电磁场是物质，所以有能量.

1. 场和电荷系统的能量守恒定律

在电磁介质系统中包含有自由电荷、介质和电磁场.

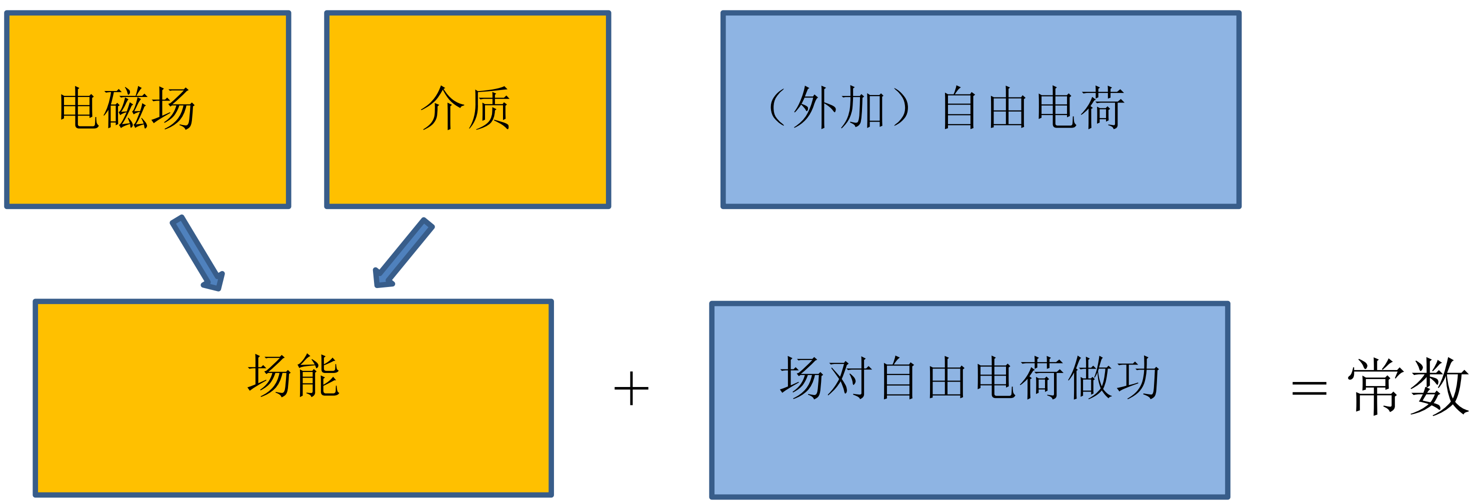
电磁场对自由电荷所做的功转变成自由电荷的动能。对稳恒系统，电子增加的动能通过对系统外其他物质做功或转化为焦耳热消耗掉。

电磁场对介质（束缚电荷）作所的功则变成极化能或磁化能储存在介质中, 部分也可能转化为热功. 以下假设介质没有耗散（即介质能量没有转化为热功），也不对外做功。

电磁场能、极化和磁化能、以及场对自由电荷做的功加起来守恒.

场和电荷系统

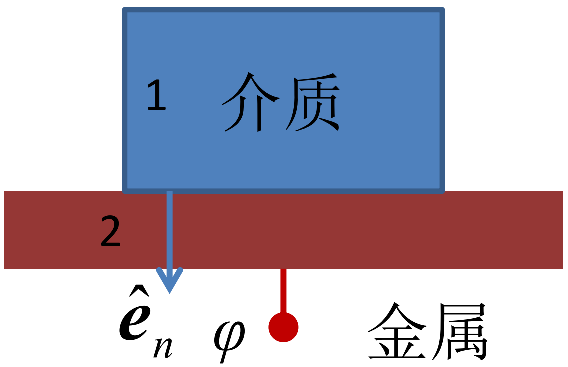
只考虑准静态过程，即假设每一时刻介质都处于平衡态.因此$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$分别是$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的单值函数，即极化和磁化能完全由场决定，从而可以把极化和磁化能归入场能.



即，场能的增量等于场对自由电荷做的负功。

2. 介质准静态电场能

考虑介质中电场的一个无穷小变化$\delta\boldsymbol{D}$. 不妨认为它是通过从无穷远处引入一个无穷小电荷δq到一块电势为φ的金属上产生的.



设无穷远处电势为零

从无穷远处引入这个电荷，电场力做的负功为

$$\delta W_e = \varphi \delta q \qquad (24)$$

利用金属表面S的边值条件，

$$\delta q = -\oint\!\!\oint_S \delta\boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s}$$

从而

$$\delta W_e = -\oint\!\!\oint_S \varphi \delta\boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = -\iiint \nabla \cdot (\varphi \delta\boldsymbol{D}) dV \qquad (26)$$

在介质内无自由电荷，$\nabla\cdot\delta\boldsymbol{D}=0$， 因而(26)式成为

$$\delta W_e=-\iiint(\nabla\varphi)\cdot\delta\boldsymbol{D}dV=\iiint\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV \tag{27}$$

可以认为与静电荷δq相伴的电磁能量分布在它周围的电磁场中. 因此上式也是介质中电磁能量的增量.

介质中静电场能密度

$$\boxed{\delta w_e=\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}} \tag{28}$$

介质内单位体积电磁能量（包括极化和磁化能）与$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$的建立方式无关，所以上式具有普遍意义.

本节中$\delta\boldsymbol{D}$和$d\boldsymbol{D}$的区别: $\delta\boldsymbol{D}$是任意无穷小矢量场；而$d\boldsymbol{D}$是由物理规律给出的电位移矢量的无穷小变化，一个特殊的$\delta\boldsymbol{D}$.

3. 准静态介质的磁场能

磁场并不对电荷直接做功. 介质磁场改变时感生出电场，而感生电场反过来对产生磁场的电流做功. 维持产生磁场的电流需要外界对电流做功，以抵消感受电场做的功。正是外界维持电流做的功最后转化为包括磁化能在内的磁场能.

在δt内因为磁场变化，感生电场对电流做的功为

$$\delta A=\delta t\iiint \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}dV \tag{29}$$

仅考虑磁化能，故$\boldsymbol{D}$不变。 据(24)式有 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$.

$$\delta A=\delta t\iiint(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}dV$$

$$=-\delta t\iiint\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})dV+\delta t\iiint\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})dV \tag{30}$$

后面将会介绍法拉第电磁感应定律

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{31}$$

利用(31)式并通过高斯公式(30)式第一项写成面积分，得

$$\delta A=-\delta t\oiint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{s}-\delta t\iiint\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}dV \tag{32}$$

外界通过维持电流提供给系统的能量为δA的负值，

$$\delta W_{ext}=-\delta A=\delta t\oiint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{s}+\delta t\iiint\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}dV \tag{33}$$

把第一项解释为流出系统的电磁能量。

电磁场能流密度（玻印亭矢量）：方向沿能量传输方向，

数值为单位时间内流过单位横截面的场能.

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{34}$$

（猜想它普遍成立）

把(33)式第二项解释为介质中的磁能（场能和磁化能）增量

$$\delta W_m = \delta t \iiint \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} dV = \iiint \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B} dV \qquad (35)$$

磁场能密度变化

$$\delta w_m = \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B} \qquad (36)$$

外界对抗磁场变化$\delta \boldsymbol{B}$给系统提供的能量，一部分通过电磁能的形式流出系统，另一部分转化为介质的磁能。因为磁能变化完全由磁场变化$\delta \boldsymbol{B}$决定，与磁场变化的原因无关，因此(34)式和(36)式应该是普遍成立的公式。

当电磁场有微小变化$\delta \boldsymbol{D}$和$\delta \boldsymbol{B}$，总电磁能量密度的变化

$$\delta w = \delta w_e + \delta w_m = \boldsymbol{E} \cdot \delta \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B} \qquad (37)$$

4. 电磁场中介质的热力学基本关系（平衡态性质）

无电磁场时介质的内能的无穷小变化为,

$$dU = TdS_{entr} - pdV + \mu_{chem}dN$$

S_{entr}: 熵， μ_{chem}: 化学势，N： 分子数

自由能 $F= U-TS_{entr}$:

$$dF = -S_{entr}dT - pdV + \mu_{chem}dN$$

有电磁场时，热力学基本关系推广为

$$\begin{aligned} dU &= TdS_{entr} - pdV + \mu_{chem}dN + \delta W_e + \delta W_m \\ &= TdS_{entr} - pdV + \mu_{chem}dN + \int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV + \int \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}dV \end{aligned}$$

$$dF = -S_{entr}dT - pdV + \mu_{chem}dN + \int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV + \int \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}dV$$

第3节作业

同轴传输线内导体半径为a，外导体半径为b，两导线间为均匀绝缘介质（如图）。带线载有电流I，两导线间的电压为U.

(1)忽略导线的电阻，计算介质中的能流密度$\boldsymbol{S}$和传输功率；

(2)计及内导线的有限电阻率，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率。