

第5节 超导体电磁性质

超导是一种宏观量子现象. 相干长度.

5.1 概述

主要宏观特性： 超导电性（1911）、抗磁性（1933）

目前的基本图像：

1) 自由电荷因为某种吸引作用形成电荷对； 2) 温度低于临界温度时，宏观数目的电荷对凝聚于单一量子态.

金属超导唯象理论： **伦敦理论**（1935）、**金兹堡-朗道理论**（1950）.

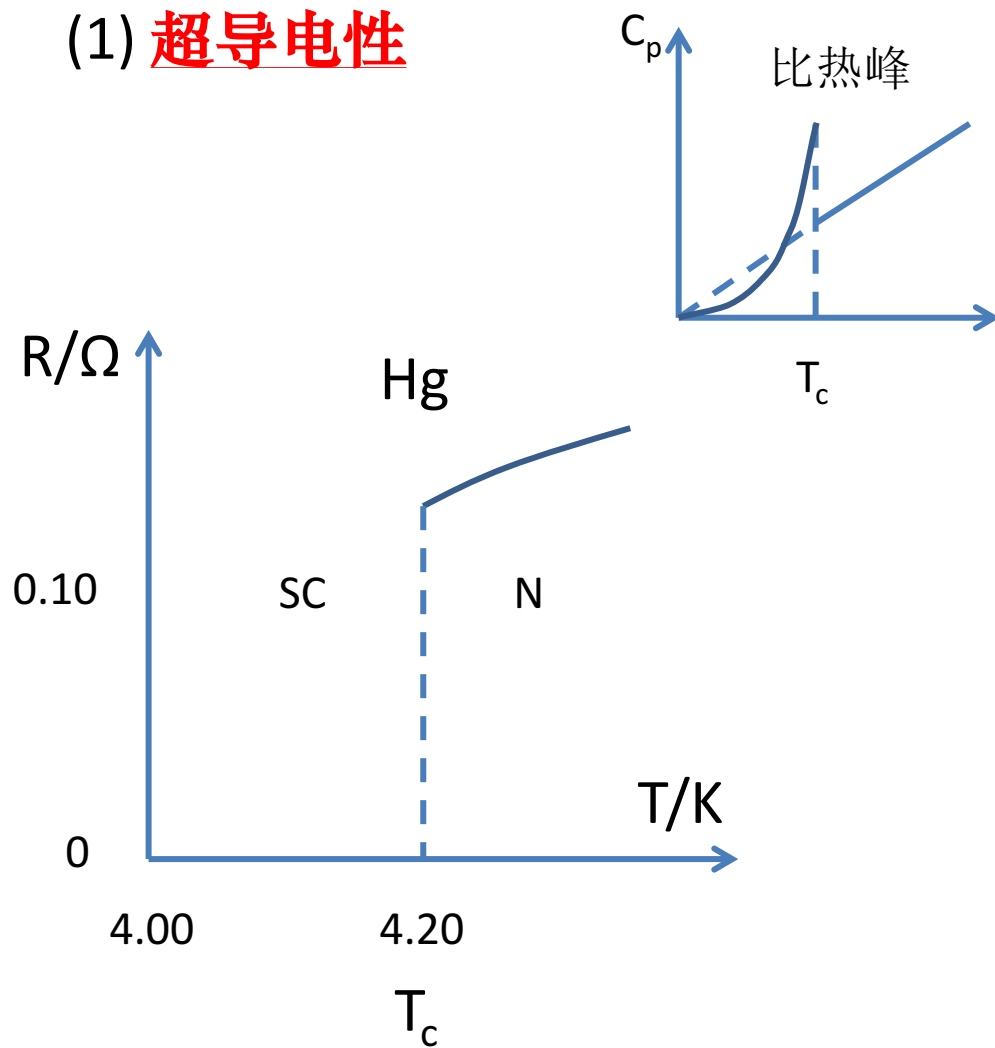
金属超导微观理论： **BCS理论**（1957），电声子作用.

高温超导：铜氧化合物超导（1986），铁基超导（2008）

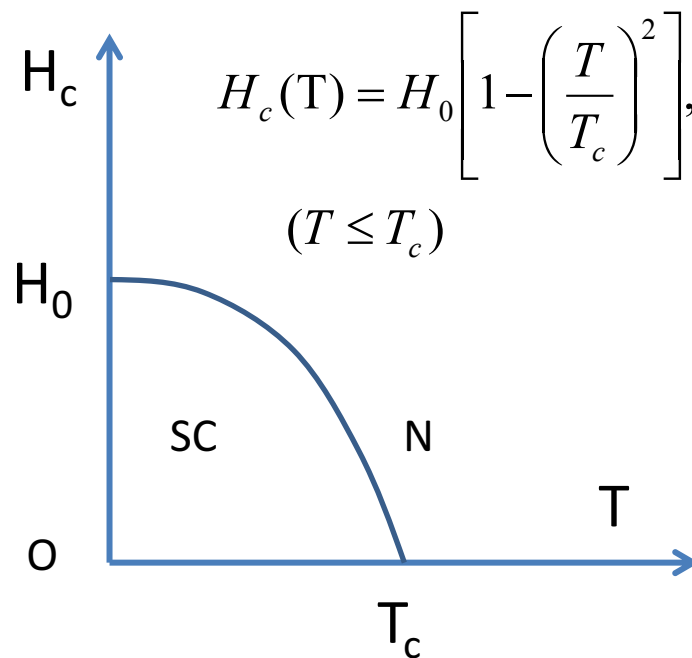
机制？

5.2 基本现象

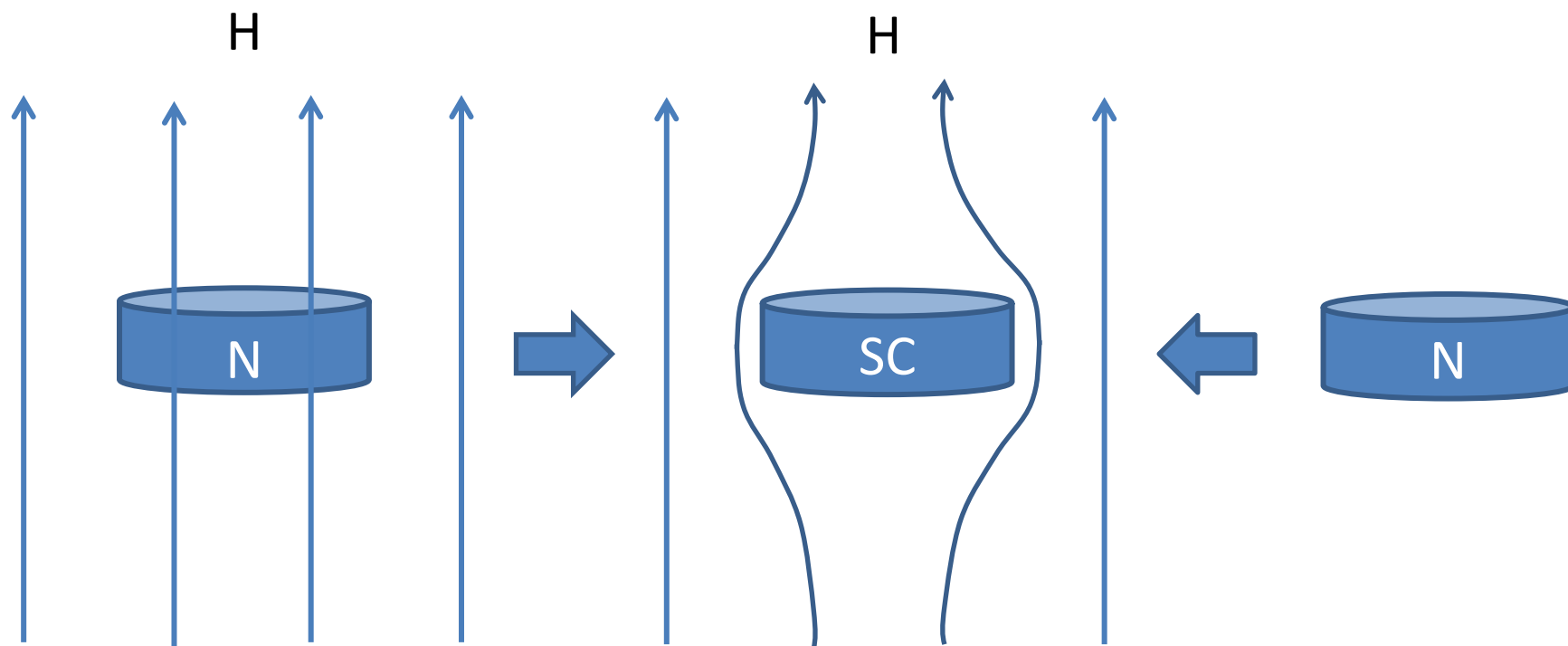
(1) 超导电性



(2) 临界磁场



(3) 迈斯纳效应



磁场只能存在于表面一定厚度. 磁场分布与过程无关.

理想迈斯纳态：超导体内部完全抗磁， $B=0$

(4) 临界电流

电流也只能存在于表面一定厚度.

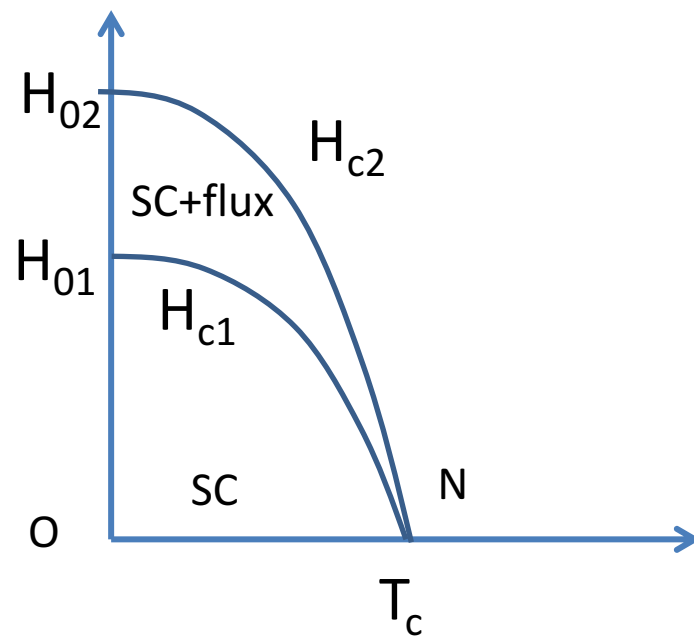
电流超过临界电流值，磁场同时会超过临界磁场，材料转变为普通态.

(5) 第一类和第二类超导体

单元素超导：第一类

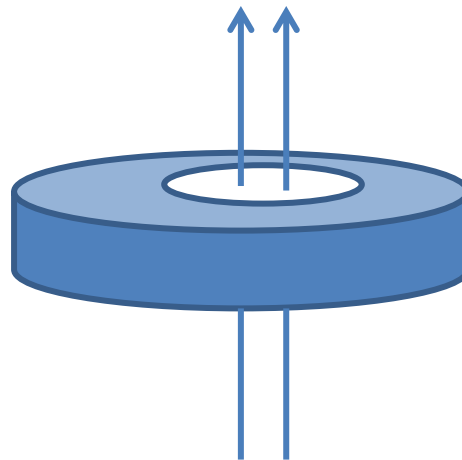
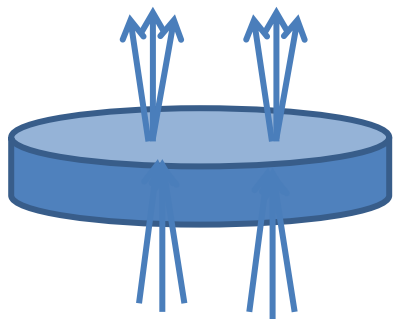
合金和化合物：第二类

能经受更高电流和磁场



第二类超导体相图

(6) 磁通量子化



穿过超导体的磁通（ h 为普朗克常数）

$$\Phi = n\Phi_0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ 伏特秒 (韦伯)}$$

$$= 2.07 \times 10^{-5} \text{ 高斯} \cdot \text{毫米平方}$$

（地表磁场 0.5高斯）

5.3 伦敦唯象理论和皮帕德修正

(1) 伦敦第一方程

想象超导中有两种载流子：

正常传导电荷，密度为 n ，对应正常电流 $\mathbf{J}_n = q_n n \mathbf{v}$ (normal current)

超导电荷，密度为 n_s ，对应超导电流 $\mathbf{J}_s = q n_s \mathbf{v}_s$ (supercurrent)

$$\text{总电流} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$$

欧姆定律： $\mathbf{J}_n = \sigma \mathbf{E}$

忽略磁力，作用在超导电荷的力为 $q\mathbf{E} = m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = q n_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \frac{n_s q^2}{m} \mathbf{E}$$

伦敦第一方程:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \alpha \mathbf{E}$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{n_s q^2}{m}$$

推论1: 稳恒电流, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{J}_n = 0$, 故 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$

无耗散 (电阻) — 预设 在超导电荷的动力学方程中.

推论2: 交变电流 (拟稳恒), $\mathbf{J}_s(t) = \mathbf{J}_s^o \cos(\omega t + \varphi_0)$

由伦敦第一方程得

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega}{\alpha} \mathbf{J}_s^o \sin(\omega t + \varphi_0)$$

代入欧姆定律得

$$\mathbf{J}_n(t) = -\frac{\omega \sigma}{\alpha} \mathbf{J}_s^o \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$n_s \sim 3 \times 10^{27} \quad \text{m}^{-3}$$

$$\sigma \sim 10^6 \quad \text{S/m}$$

(典型导体)

$$\left| \frac{J_n^o}{J_s^o} \right| = \frac{\omega \sigma}{\alpha} = \frac{\omega m \sigma}{n_s q^2} \sim 10^{-12} \omega s$$

射频(MHz~GHz) 以下可忽略电阻损耗.

(2) 伦敦第二方程

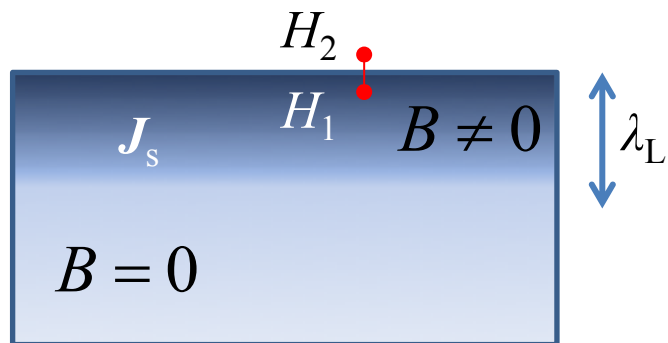
(描写迈斯纳效应)

在超导体内, $\mathbf{E} = 0$, 从而 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, \mathbf{B} 和 \mathbf{J}_s 不随时间变化.

事实上, $\mathbf{B} = 0$ (迈斯纳态——是和超导电性独立的不同效应).

——因为表面超导电流在体内产生的磁场刚好抵消了外磁场.

但在超导体表面, $\mathbf{E} \neq 0$, 可以存在交变的超导电流.



表面层可能比较厚, 达微米.

边值关系:

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f = 0, \quad B_{2n} - B_{1n} = 0$$

表面超导电流由加磁场过程感生的电动势产生

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{而} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{B}) = 0$$

伦敦第二方程（猜想）

$$\nabla \times \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{B} = 0$$

由此可给出迈斯纳效应。

伦敦两条方程和麦克斯韦方程组完整描写了完全超导态的电磁性质。

在稳恒情形有 $\mathbf{J}_n = 0$ 和 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$

稳恒情形的麦克斯韦-伦敦方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$$

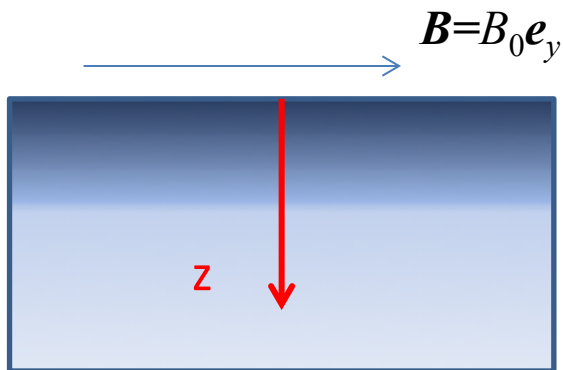
$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\alpha \mathbf{B}$$

【根据伦敦第一方程，对稳恒情形有 $\mathbf{E} = 0$ 。从而 $\mathbf{J}_n = 0$ 。

根据连续性方程可得左下式。】

伦敦穿透深度



设 $\mu \approx \mu_0$ 和 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$.

$$\text{由 } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s \quad \nabla \times \mathbf{J}_s = -\alpha \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_s = -\mu_0 \alpha \mathbf{B}$$

$$\text{又由 } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \alpha \mathbf{B}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \lambda_L^{-2} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad B_y(z) = B_0 e^{-z/\lambda_L}$$

伦敦穿透深度:

$$\lambda_L = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \alpha}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s q^2}}$$

若取 $n_s \sim 3 \times 10^{27} \text{ m}^{-3}$

$$\lambda_L \sim 10^{-7} \text{ m}$$

(3) 超导电流与矢势的局域关系

只考虑稳恒情形. 因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{J}_s = -\alpha \nabla \times \mathbf{A} \quad \xRightarrow{?} \quad \mathbf{J}_s = -\alpha \mathbf{A}$$

首先要消除 \mathbf{A} 的任意性.

伦敦规范: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{A}|_S = 0$, S 为超导体表面.

若超导体是单连通的, 则在伦敦规范下 \mathbf{A} 唯一确定.

因为 $\nabla \times (\mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{A}) = 0$, 在单连通区域存在标量场 χ 使得 $\mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{A} = \nabla \chi$
在伦敦规范下可证 χ 为常数.

【证】

在单连通区域中，任意环路都是一个完全在区域中的曲面的边界， $C = \partial S$

$$\oint_C d\chi = \oint_C \nabla \chi \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times (\mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{又因为 } \nabla \times (\mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{J}_s + \alpha \nabla \times \mathbf{A} = -\alpha \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} = 0$$

从而 $\oint_C d\chi = 0$ ，所以 χ 是一个单值函数.

$$\text{易见, } \nabla \cdot (\mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{A}) = \nabla^2 \chi$$

根据电流守恒条件和伦敦规范条件，

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \alpha \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

和边值条件: $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{J}_s|_S = 0$, $\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \mathbf{A}|_S = 0$ 得知 χ 满足

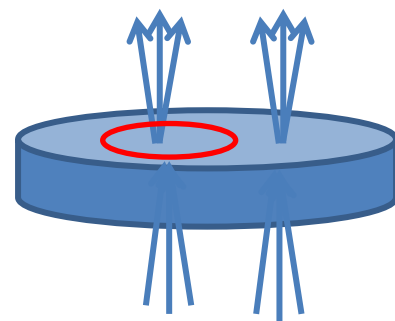
$$\nabla^2 \chi = 0 \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|_S = 0$$

根据拉普拉斯方程解的唯一性定理， χ 唯一解的是常数.

【证毕】

因此在伦敦规范下，

$$\mathbf{J}_s = -\alpha \mathbf{A}$$



反例：非单连通区域

(4) 皮帕德非局域修正

伦敦理论是局域理论，某点的超导电流只与该点邻域的电磁场直接发生作用. 它预言穿透深度 λ_L 仅与超导电荷密度有关，后者只依赖于温度.

不能解释下列实验现象：1) λ_L 明显依赖于外磁场；2) 样品杂质浓度对 λ_L 影响很大；3) 对非单元金属超导体， λ_L 比实验值普遍偏小很多；4) 有些材料，特别是高温超导体， λ_L 显示出各向异性.

局域关系： $\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = -\alpha \mathbf{A}(\mathbf{x})$

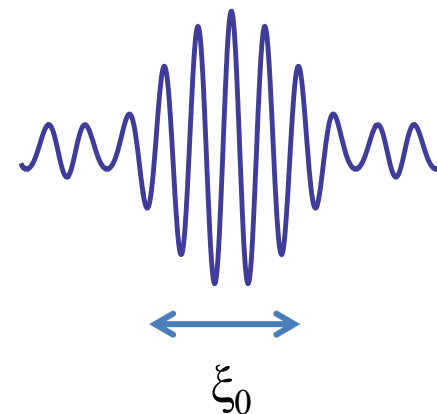
$$\longrightarrow \quad J_s^j(\mathbf{x}) = - \int \sum_k M^{jk}(\mathbf{r}) \underline{A_k(\mathbf{x}') e^{-r/\xi_P}} dV' \quad (\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

ξ_P 称为**皮帕德有效相干长度**. M^{jk} 是一个以 r^{-2} 衰减的张量.

在 $r < \xi_P$ 范围的 $A(\mathbf{x}')$ 对 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 有贡献. 但 ξ_P 有什么物理意义?

已知与普通电导相关有一个特征长度：**平均自由程** l （载流子在两次相继散射之间运动的平均距离）。

超导电荷可视为尺度为 ξ_0 的波包, 这是另一个反映量子态特性的特征长度, 称为**相干长度**。



皮帕德有效相干长度猜想

$$\frac{1}{\xi_P} = \frac{1}{ld} + \frac{1}{\xi_0} \quad (d \text{ 为与材料有关的参数, } d \leq 1)$$

理想金属： l 趋于无穷长， $\xi_P \rightarrow \xi_0$ ；合金： $ld \ll \xi_0$ ， $\xi_P \rightarrow ld$

用 \mathbf{r} 构造以 r^{-2} 衰减的张量 M^{jk} : $M^{jk}(\mathbf{r}) = c \frac{r_j r_k}{r^4}$

皮帕德非局域修正（1953）

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = -\frac{3\alpha}{4\pi\xi_0} \int \frac{\mathbf{r}[\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')] }{r^4} e^{-r/\xi_P} dV'$$

系数使得当 $ld \rightarrow \infty$ 和 $\xi_0 < \lambda$ （穿透深度）时，回到定域关系（见下页）。

设一般超导材料的有效穿透深度为 λ_p .

尺度 λ_p 可以认为是 \mathbf{A} 有明显变化的特征尺度.

若 $\xi_p \ll \lambda_p$, 皮修正中积分只需在很小的范围 ($r < \xi_p$ 处)内进行, 其中可近似把 \mathbf{A} 看着常矢量. 积分得

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{\xi_0} \xi_p \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (\text{局域近似})$$

对之求旋度, 利用稳恒情形的麦克斯韦-伦敦方程组可得

$$\lambda_p = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\xi_p} \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_L \left(\frac{\xi_0 + ld}{ld} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_L = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \alpha}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s q^2}}$$

纯金属, $l \rightarrow \infty$, $\lambda_P \rightarrow \lambda_L$ 回到伦敦理论.

$$\lambda_P = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\xi_P} \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_L \left(\frac{\xi_0 + ld}{ld} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{\xi_P} = \frac{1}{ld} + \frac{1}{\xi_0}$$

1) 第二类超导: 满足 $ld \ll \xi_0$ 和 $\xi_P \ll \lambda_P$

有 $\xi_P \sim ld$ 和 $\lambda_P \gg \lambda_L$

2) 满足 $ld \gg \xi_0$ 和 $\xi_P \ll \lambda_P$

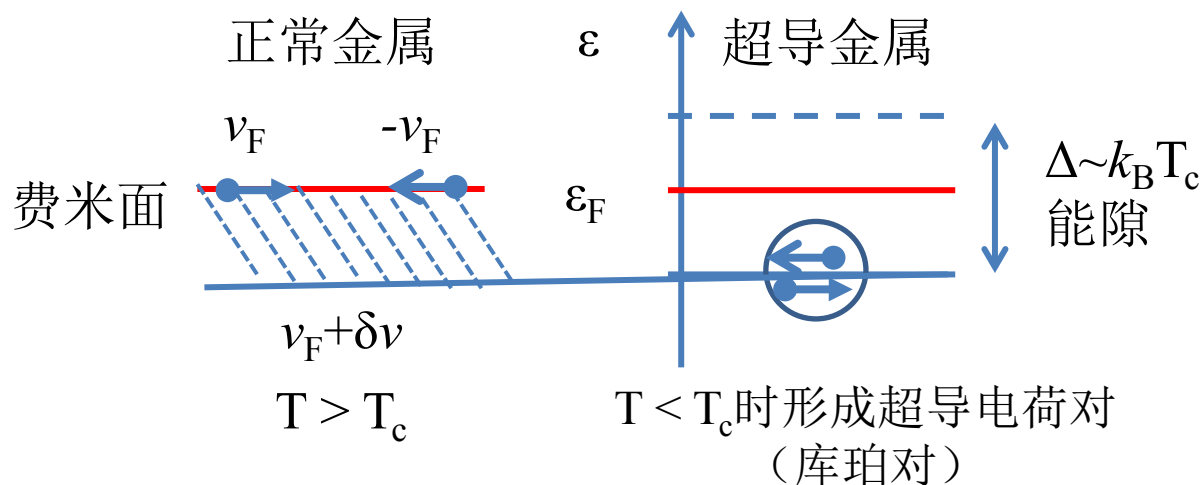
有 $\xi_P \sim \xi_0$ 和 $\lambda_P = \lambda_L$, 回到伦敦局域理论

3) 第一类超导: 满足 $ld \gg \xi_0$ 和 $\xi_P \gg \lambda_P$

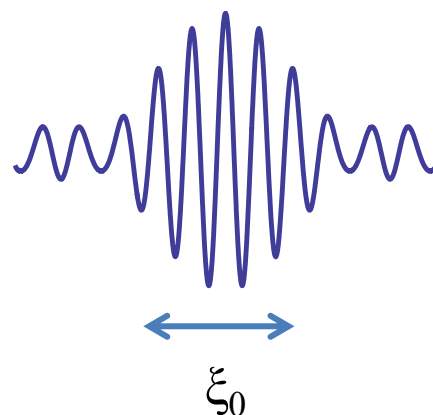
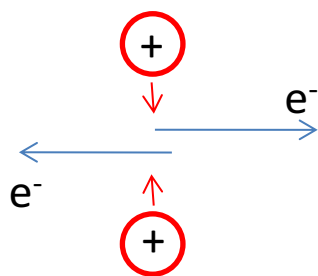
有 $\xi_P \sim \xi_0$

局域化近似不成立, 要用皮帕德非局域理论处理.

金属超导BCS理论概念



费米面附近电子通过吸引金属离子产生电子之间的有效吸引作用



ξ_0 与 Δ 有关

涉及特征物理量: v_F 和 Δ ; 量子现象的基本常数 h . 相干长度 ξ_0 大致是由它们构造出一个长度量纲的量:

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}$$

迈斯纳效应的唯像理论

$$\nabla \times \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{迈斯纳效应, 超导体内部无磁场}$$

另一视角：超导中光子具有质量（规范对称性自发破缺）

在伦敦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 下, $\mathbf{J}_s = -\alpha \mathbf{A}$

$$\text{利用 } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \alpha \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{c^2 \partial t^2} - \frac{\mu_0}{\alpha} \mathbf{A} = 0$$

平面波解

$$\mathbf{A} = A_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = c^2 \left(k^2 + \frac{\mu_0}{\alpha} \right)$$

光子色散关系

$$\begin{array}{ccccc} \omega^2 = c^2 k^2 & \Rightarrow & \omega^2 = c^2 k^2 + \frac{c^4}{\hbar^2} m^2 & \Rightarrow & m^2 = \frac{\mu_0 \hbar^2}{\alpha c^2} \\ \text{(真空)} & & \text{(超导)} & & \text{“光子质量平方”} \end{array}$$

作业

1. 阅读第5节例题1、2、3、4。
2. 证明超导体表面磁场总是与界面相切。
3. 自学p103磁介质、p105磁通量子化。

小课题四:

纳米超导网络是在宏观材料超导临界温度下由直径小于穿透深度的导线构成的网络。讨论具有轴对称性的中空超导圆柱管，讨论管壁厚度小于穿透深度的情形（参考例题2）。