东校区 2009 学年度第一学期 09 级《高等数学一》期末考试 B 题答案　B-1

专业______________学号______________姓名____________评分_________

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一．完成下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n-1})^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n-1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}\cdot 2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\dfrac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}}]^2\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\dfrac{2}{n-1})=e^2$

2. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos xy}{\ln(1+xy)}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{\ln(1+xy)}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{\ln(1+u)}=0,$$

3. $y=f(x)$ 由方程 $ye^x+\ln y=y$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

两边对x求导得

$$ye^x+e^x y'+\frac{y'}{y}=y'$$

$$\therefore y'=-\frac{ye^x}{e^x+\dfrac{1}{y}-1}$$

4. 求函数$z=3x+4y$在满足$x^2+y^2=1$的条件下的最值。

令：$L(x,y,\lambda)=3x+4y+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases}L_x=3+2\lambda x=0\\L_y=4+2\lambda y=0\\L_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\\\lambda=-\dfrac{5}{2}\end{cases},\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\y=-\dfrac{4}{5}\\\lambda=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

可得最大值为$z(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=5$;可得最小值为$z(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})=-5$;

5. 计算函数$z=x^y+3y^2$的全微分

$$dz=yx^{y-1}dx+[x^y\ln x+6y]dy$$

6. 求$\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$

原式$=2\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=2\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}d\sin x=\int\frac{1}{1+\sin^4 x}d\sin^2 x=\arctan(\sin^2 x)+C$

7. 求 $I=\int_0^2(x+1)\ e^x dx$

$$I=\int_0^2(x+1)de^x=(x+1)e^x\ \Big|_0^2-\int_0^2 e^x d(x+1)=3e^2-1-e^x\Big|_0^2=2e^2$$

8. 求曲线$y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围成的图形的面积.

$y=x^2$ 与$y^2=x$交点为（0，0），（1，1）

$$\therefore \text{A}=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

9. 求$\boldsymbol{f(x)=x^4-2x^3+1}$的极值,

$$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)=0$$
$$\therefore x=0,x=\frac{3}{2}$$
$$f''(x)=12x^2-12x,$$
$x=0$不是极值点

$f''\left(\frac{3}{2}\right)>0,\therefore$ 极小值为$f(\frac{3}{2})=\frac{-11}{16}$

10 求过点（2,0,－3），且与两平面$2x-2y+4z+7=0,3x+y-2z+5=0$垂直的平面方程.

13-3

平面的方向向量为：(2, -2, 4)×(3, 1, -2)=(0, 16, 8)

$\therefore$ 平面方程为:$2y+z+3=0$

二. 计算题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 求函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 在点 $x_0=0$ 处的 n 阶泰勒公式.

$$y=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\ln(1-x)=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)]$$

$$\therefore 原式=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)]-[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)]$$

$$=-2x-\frac{2x^3}{3}-\cdots\frac{2x^{2n-1}}{n}+o(x^{2n})$$

2. 求函数 $z=x^3y$ 在点 $A(1,2)$ 沿到点 $B\left(1+\sqrt{3},3\right)$ 的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数.

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{3},1\right)$,其方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},$$

方向导数为：$z_x|_A\cos\alpha+z_y|_A\cos\beta=3x^2y|_A\cos\alpha+x^3|_A\cos\beta=3\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}$

3. 求直线方程 $\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y-3z=0\end{cases}$ 的标准方程和参数方程

易得联立方程组有解:$(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},0)$

直线的方向向量为：(1, -1, 1)×(2, 1, -3)=(2, 5, 3)

$$\therefore 直线的标准方程为:\frac{(x-\frac{1}{3})}{2}=\frac{(y+\frac{2}{3})}{5}=\frac{z}{3}$$

$$\therefore 直线的参数方程为:\begin{cases}x=2t+\dfrac{1}{3}\\ y=5t-\dfrac{2}{3}\\ z=3t\end{cases}$$

三. 完成下列各题（每小题 4 分，共 12 分）

B~4

1. $z=f(x^2y,\frac{y}{x})$,其中f为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'x^2+f_2'\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xf_1'+2x^3yf_{11}''-yf_{12}''-\frac{1}{x^2}f_2'+2yf_{21}''-\frac{y}{x^3}f_{22}'',$$

2. 证明$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但在此点不可微

$\because 0\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ $\therefore$由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）连续。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0;\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）偏导数存在。 $\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{(x^2+y^2)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{k}{(1+k^2)}\text{与}k\text{有关},$$

$\therefore f(x,y)$在（0，0）不可微。

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上存在三阶导数，且$f(1)=0$；设函数$F(x)=x^3f(x)$ 证明在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$F'''(\xi)=0$

证：$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$

$\because F(0)=F'(0)=F''(0)=0$，$F(1)=0$

$\therefore F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理，存在$\xi_1\in(0,1)$,使得$F'(\xi_1)=0$。

$F'(x)$在$[0,\xi_1]$上满足罗尔定理，存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$,使得$F''(\xi_2)=0$。

$F''(x)$在$[0,\xi_2]$上满足罗尔定理，存在$\xi\in(0,\xi_2)$,使得$F'''(\xi)=0$

证：由泰勒公式

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3$

$0<\xi<x<1$

由$F(0)=F'(0)=F''(0)=0$, $F(1)=0$

从而 $\frac{F'''(\xi)}{3!}=0$

$F'''(\xi)=0$, $0<\xi<x<1$