第5节 电动力学的相对论不变性

根据相对性原理，我们可以认为Maxwell方程组适用于任意惯性参考系，其形式满足协变性要求，不随参考系的改变而改变。

相对论理论中的四维协变矢量：

四维空间矢量：　$x_\mu = (\vec{x}, ict)$

四维速度矢量：　$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_u(\vec{u}, ic)$

四维波矢量：　$k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$

寻找麦氏方程的四维协变形式，需要先统一电荷密度ρ和电流密度$\vec{J}$、电场强度$\vec{E}$和磁感应强度$\vec{B}$。

5.1 四维电流密度矢量

电荷Q是一个Lorentz标量：（J. G. King等人的实验）

$$Q = \int \rho_0 \mathrm{d}V_0 = \int \rho \mathrm{dV}$$

其中ρ_0和$\mathrm{d}V_0$是电荷静止系中的电荷密度和体元，ρ和dV是当它以速度$\vec{u}$运动时的量。其中**体元的Lorentz收缩**为

$$\mathrm{dV} = \frac{\mathrm{d}V_0}{\gamma_u} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V_0$$

因此**电荷密度**相应地变为

$$\rho = \gamma_u \rho_0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

当粒子以 $\vec{u}$ 运动时，其电流密度为：

$$\vec{J} = \rho\vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u} = \rho_0 \gamma_u \vec{u}$$

$\gamma_u \vec{u}$是四维速度矢量的三维分量，因此根据四维速度可引入四维电流的第四分量

$$J_4 = \rho_0 U_4 = \mathrm{i}c\gamma_u \rho_0 = ic\rho$$

我们得到**四维电流密度矢量：**

$$\boldsymbol{J_\mu = \rho_0 U_\mu = (\vec{J}, ic\rho)}$$

因此电荷密度ρ和电流密度$\vec{\mathbf{J}}$是一个统一的物理量的不同分量，在参考系变换下按一定方式互相变换。

电荷守恒定律的四维形式

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\mu J_\mu = 0$$

5.2 四维势矢量

d’Alembert方程：

$$\Box\varphi = \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\mu_0 c^2\rho$$

$$\Box\vec{A} = \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

Lorentz规范条件：

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

既然电荷密度ρ和电流密度$\vec{J}$统一成了一个四维矢量，那么**标势φ和矢势$\vec{A}$也可以统一成一个四维矢量**

$$A_\mu = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$$

d’Alembert方程的四维形式

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

Lorentz条件的四维形式

$$\partial_\mu A_\mu = 0$$

它们都具有明显的协变性。在Lorentz变换下，A_μ按矢量性质变换

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$$

若Σ'相对Σ沿x方向以速度$\vec{v}$运动，则A_μ各分量的变换关系为

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \\ \frac{i}{c}\varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\varphi\right) \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \\ \varphi' = \gamma(\varphi - vA_x) \end{cases}$$

5.3 电磁场张量

引入反对称四维张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

用势表示电磁场$\vec{B}$和$\vec{E}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} B_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k \\ E_i = -\,\partial_i\varphi - \dfrac{\partial A_i}{\partial t} = ic(\,\partial_i A_4 - \,\partial_4 A_i) \end{cases}$$

即

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = F_{23}, \ldots \\ E_1 &= ic(\,\partial_1 A_4 - \,\partial_4 A_1) = icF_{14}, \ldots \end{aligned}\right\} \Longrightarrow F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_{\mu\nu}$称为电磁场张量

用电磁场张量和四位电流密度矢量，可以把Maxwell方程写成协变形式

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}&=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\vec{B}&=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\quad \partial_\nu F_{\mu\nu}=\mu_0 J_\mu$$

验证：

✓ 第4分量 $\partial_\nu F_{4\nu}=\mu_0 J_4$

$$\partial_\nu F_{4\nu}=\partial_i F_{4i}+\partial_4 F_{44}=\frac{i}{c}\,\partial_i E_i=\frac{i}{c}\nabla\cdot\vec{E}=\mu_0 J_4=\mu_0 ic\rho$$

$$\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$$

✓ 第i分量 $\partial_\nu F_{i\nu}=\mu_0 J_i$

$$\partial_\nu F_{i\nu}=\partial_\nu\left(\partial_i A_\nu-\partial_\nu A_i\right)=\partial_j\left(\partial_i A_j-\partial_j A_i\right)+\partial_4\left(\partial_i A_4-\partial_4 A_i\right)$$

$$=\partial_i\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2 A_i+\partial_4 F_{i4}=\left[\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]_i-\frac{1}{ic}\frac{i}{c}\frac{\partial E_i}{\partial t}=\mu_0 J_i$$

$$\Longrightarrow\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$$

另外一对方程：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{B}&=0\\ \nabla\times\vec{E}&=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\ \partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}=0$$

作业1：验证此式.

由张量变换关系

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$$

导出电磁场的变换关系

$$\begin{cases}E'_1=E_1, \quad B'_1=B_1\\ E'_2=\gamma(E_2-vB_3),\ B'_2=\gamma(B_2+\dfrac{v}{c^2}E_3)\\ E'_3=\gamma(E_3+vB_2),\ B'_3=\gamma(B_3-\dfrac{v}{c^2}E_2)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\vec{E}'_{//}=\vec{E}_{//},\vec{B}'_{//}=\vec{B}_{//}\\ \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_{\perp}\\ \vec{B}'_{\perp}=\gamma(\vec{B}-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp}\end{cases}$$

作业2：验证此变换关系.

电流密度和电荷密度统一为四维电流密度矢量J_μ，矢势和标势统一为四维势矢量A_μ，电场和磁场统一为电磁场张量$F_{\mu\nu}$，这反映出电磁场的统一性和相对性，电场和磁场是同一种物质的两个方面。这些四维矢量和张量，再加上协变形式的波动方程（d’Alembert方程）或者协变形式的Maxwell方程，一起构成了电动力学方程的协变性。

学习P221页例题：匀速运动带电粒子的电磁场。

5.4 电磁场的不变量

用电磁场张量$F_{\mu\nu}$构造Lorentz不变量

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=B^2-\frac{1}{c^2}E^2$$

定义全反对称四阶张量构$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}=\begin{cases}+1，\text{若}\mu\nu\lambda\tau\text{为1234的任意偶排列；}\\-1，\text{若}\mu\nu\lambda\tau\text{为1234的任意偶排列；}\\\ \ 0，\text{若}\mu\nu\lambda\tau\text{有任意两个指标相同。}\end{cases}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$是一个空间反演下的赝张量，可以用它来定义对偶场强张量

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\lambda\tau}$$

$\mathcal{F}_{\mu\nu}$和$F_{\mu\nu}$的宇称相反，用它们可以构造另外一个Lorentz不变量

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\vec{E}$$

在任意惯性系中，平面电磁波都有$B=E/c$, 且$\vec{B}$和$\vec{E}$正交。