第十一讲

上次课

- 本征函数展开法：

  （1）$\nabla^2\varphi=0$ 有一系列正交完备的解 – 本征函数 $\{\varphi_n\}$

  （2）完备性 --- $\varphi=\sum_n c_n\varphi_n$

  （3）展开系数：$c_n=\langle\varphi_n|\varphi\rangle$，根据正交性比较不同本征函数前的系数

- 例子：接地金属球放置于均匀电场中

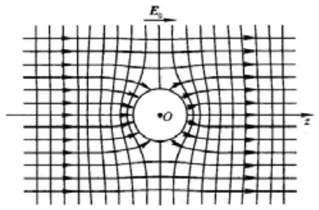


图 4.5

$$\varphi=-\vec{E}_0\cdot\vec{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0$$

进一步做一个更难一些的 例子。

[例 5] 半径为 R、介电常数为 ε_2 的均匀介质球，被置于均匀外场 $\vec{E}_0$ 中，球外空间充满均匀介电常数为 ε_1 的介质。求空间电势的分布。

解： 如图 4.6，取 $\vec{E}_0$ 方向为极轴 z 方向。与上一道例题不同的是，此处介质球内可以存在电场。 为此我们把空间分为球内球外两个区域（I、II），电势分别为 φ_1， φ_2，则它们满足的方程：

$$\nabla^2\varphi_1=0,\quad \nabla^2\varphi_2=0 \qquad （4.4.18）$$

相应的边条为

$$\begin{cases}\varphi_1\to -E_0 r\cos\theta, \quad r\to\infty & (1)\\ \varphi_1=\varphi_2, \quad r=R & (2)\\ \varepsilon_1\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R}=\varepsilon_2\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} & (3)\\ \varphi_2\text{有限}, \quad r=0 & (4)\end{cases}$$

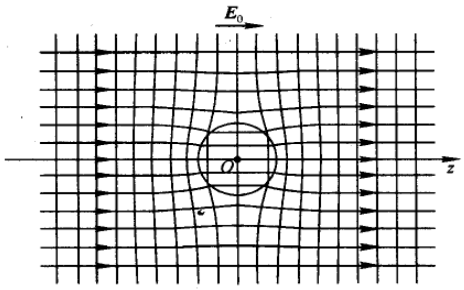


图 4.6

本问题为三维轴对称球坐标系下的问题，因此可选取合适的本征函数将φ_1, φ_2展开。显然应当选择（4.4.5），即

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$$
$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l' r^l + B_l' r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.19)$$

其中$\{A_l, A_l', B_l, B_l'\}$为一系列展开系数，需要由边界条件确定。根据我们上次课对均匀电场中的金属球的问题的求解，我们已有了经验 – 均匀电场的边界条件（1）只包含 l=1 项的贡献，而球这种良好的几何形状保证了它不会将 l=1 的模式散射到其它 l 的模式上去。因此（4.4.19）中只有$l=1$项的系数非 0。故有

$$\varphi_1 = \left(A_1 r + B_1 r^{-2} \right) \cos\theta$$
$$\varphi_2 = \left(A_1' r + B_1' r^{-2} \right) \cos\theta \qquad (4.4.19')$$

****

<u>下面我们利用本征函数的正交性对上述论断做严格证明。</u>

对 I 区来讲，边条（1）决定了除了A_1外所有的$\{A_l\}$均为 0。因$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$，易知：

$$A_1 = -E_0; \qquad A_l = 0, \quad l \neq 1 \qquad (4.4.20)$$

对 II 区来讲，边条（4）决定了

$$B_l' = 0, \quad l = 0, 1, \ldots \infty \qquad (4.4.21)$$

下面考虑边条（2）。代入可知，

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l R^l + B_l R^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l' R^l + B_l' R^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta)$$
$$\varepsilon_1 \sum_{l=0}^{\infty} \left[l A_l R^{l-1} - (l+1) B_l R^{-(l+2)} \right] P_l(\cos\theta) = \varepsilon_2 \sum_{l=0}^{\infty} \left[l A_l' R^{l-1} - (l+1) B_l' R^{-(l+2)} \right] P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.22)$$

根据本征函数的正交性，上面 2 式中每个 l 项的系数必须分别相等，即

$$A_l R^l + B_l R^{-(l+1)} = A_l' R^l + B_l' R^{-(l+1)}$$
$$\varepsilon_1 \left[l A_l R^{l-1} - (l+1) B_l R^{-(l+2)} \right] = \varepsilon_2 \left[l A_l' R^{l-1} - (l+1) B_l' R^{-(l+2)} \right] \qquad (4.4.23)$$

对所有$l \neq 1$的项，我们有

$$\left.\begin{array}{c} B_l R^{-(l+1)} = A_l' R^l \\ \varepsilon_1\left[-(l+1)B_l R^{-(l+2)}\right] = \varepsilon_2\left[l A_l' R^{l-1}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B_l = A_l' R^{(2l+1)} \\ B_l = -A_l' R^{(2l+1)} \dfrac{l\varepsilon_2}{(l+1)\varepsilon_1} \end{array}\right. \quad (4.4.24)$$

显然有：

$$A_l' = B_l = 0, \qquad l \neq 1 \qquad (4.4.25)$$

因此只有 $l=1$ *的项有非零解。*

****

代入边条（1）-（4）分别可得

$$\left\{\begin{array}{c} A_1 = -E_0 \\ A_1 R + B_1 R^{-2} = A_1' R + B_1' R^{-2} \\ \varepsilon_1\left(A_1 - 2B_1 R^{-3}\right) = \varepsilon_2\left(A_1' - 2B_1' R^{-3}\right) \\ B_1' = 0 \end{array}\right. \qquad (4.4.26)$$

解之可得

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = -E_0 \\ B_1 = \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} E_0 R^3 \\ A_1' = -\dfrac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} E_0 \\ B_1' = 0 \end{array}\right. , \qquad (4.4.27)$$

故

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta \\ \varphi_2 &= -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} E_0 r\cos\theta \end{aligned} \qquad (4.4.28)$$

作如下的讨论：

（1）先做极限分析：当 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ 时，介质球与环境的介电常数一样，故其对外场的响应消失。带入发现，$\varphi_1 = \varphi_2 = -Er\cos\theta$，即空间的电场就是均匀电场！

（2） 球面上的束缚电荷就是球对外场的响应来源。其对球外区域的贡献为：$\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} R^3 E_0 \dfrac{1}{r^2}\cos\theta$。回想一个偶极子（偶极矩为 p）的电势为 $\varphi_p = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$，对比发现这些束缚电荷对外场的贡献相当于一个放在原点的偶极子，其大小为

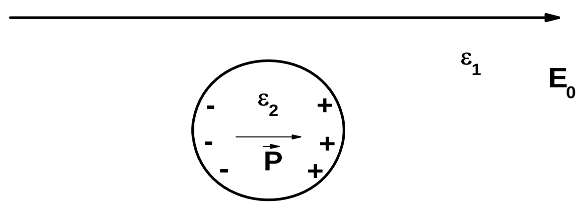
$$\boxed{\vec{p}=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3\vec{E}_0} \qquad (4.4.29)$$

要注意： 这个结论是严格的，并非在远场成立，这一点是否让你感到很意外？

（3）球内的场为外场与束缚电荷所产生的附加电场之和，结果为一均匀电场：

$$\vec{E}_{内}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\hat{e}_z=\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{E}_0 \qquad (4.4.30)$$

（4）当 $\varepsilon_2\to-\infty$ 时，介质球内的场为 $\vec{E}_{内}\to 0$，其效果相当于一个导体球。而此时，$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0$，也回到上堂课我们求解的导体球的解。其实，这样的一个推论（导体相当于 $\varepsilon_2\to-\infty$ 的介质）具有普遍意义，后面我们可以严格证明。



下面我们考虑一个简单的情况，即 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$（背景介质是空气），$\varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_r$，此时的物理图像更加清楚。因介质球内的场为均匀场，故整个介质球被均匀极化，极化强度为

$$\boxed{\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}_{内}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{3}{2+\varepsilon_r}\vec{E}_0} \qquad (4.4.31)$$

而同时，（4.2.29）可化成

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{2+\varepsilon_r}R^3\vec{E}_0=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{3}{2+\varepsilon_r}\vec{E}_0\times\left(4\pi R^3/3\right) \qquad (4.2.29')$$

上面 2 式对比发现，此时极化强度正好就是偶极子的电偶极距/体积：

$$\boxed{\vec{P}=\frac{\vec{p}}{4\pi R^3/3}} \qquad (4.4.32)$$

这当然是合理的，因为极化强度的定义就是 $\vec{P}=\dfrac{\sum\vec{p}_i}{\Omega}$。因 $\varepsilon_2>\varepsilon_0$，我们发现 $\vec{E}_{内}<\vec{E}_0$，这是因为极化电荷在球内产生了电场抵消了部分外电场的贡献。这部分由**极化电荷在球内产生的电场**为

$$\vec{E}_{p内}=\vec{E}_{内}-\vec{E}_0=-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon_2}\vec{E}_0=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \qquad (4.4.33)$$

这个场通常被称为“退极场”- 由于极化产生的极化电荷产生的场，其作用是“退”掉外场的作用。整理后的结果为：

$$\vec{E}_{内}=\vec{E}_0-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \qquad (4.4.34)$$

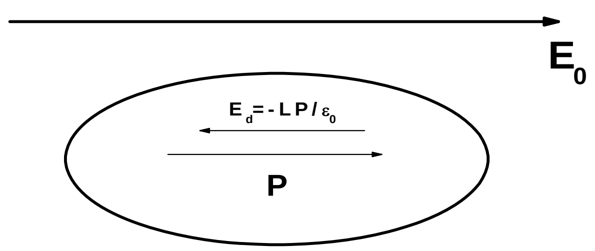
上面 2 式在很多情况下成立的，一般来说，退极场可以写成

$$\vec{E}_{退}=-L\cdot\vec{P}/\varepsilon_0 \qquad (4.4.35)$$

L 称为退极化因子，只依赖于物体的几何形状，其越大，说明退极效应越显著。容易证明：对平板 $L=1$，对球 $L=\frac{1}{3}$，对细针，L=0，对椭球，针对长短轴的不同，L 可以由 0~1 不等。总结下来，介质在外场下的静电行为是

- *被外场极化*
- *极化电荷在球外的贡献为偶极子*
- *极化电荷对球内的贡献为均匀电场*

  － 退极场 （depolarization field）



思考题:

（1）若外部介质不是空气，而是具有介电常数ε_1的某种电介质，极化强度 P 是多少？

（4.4.32）是否仍然成立？若不成立，为什么？

（2）有兴趣的同学请找文献查一查椭球体的“退极因子”的推导

下面研究一个 2 维柱坐标问题。

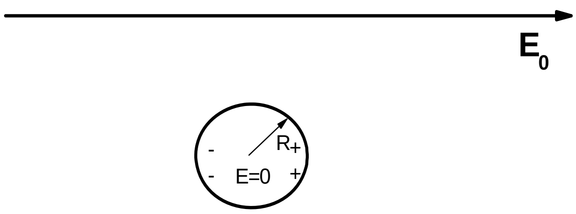
［例 7］ 在均匀外电场$\vec{E}=E_0\hat{e}_x$中有一半径为R、电荷线密度为λ的无限长导体圆柱．柱轴与外场垂直，求空间中的电场分布。

解： 柱内区域的场为零，只需考虑柱外区域的电势，其满足方程

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (4.4.36)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \vec{E}_{\rho\to\infty} = E_0\hat{x}; & (1) \\ \varphi\big|_{\rho=R} = \text{常数}; & (2) \\ \oint \dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R} dS = -\lambda/\varepsilon_0 & (3) \end{cases} \qquad (4.4.37)$$



第一个边条值得讨论一下。处理均匀外场中的散射体的问题时，如果散射体是三维物体（如球），则任何感应（极化）电荷均在空间局域，因此在无穷远处，它们对场或者势的贡献都趋向于0，此时我们可以将边条（1）进一步改写成 $\varphi\big|_{r\to\infty} = -\vec{E}\cdot\vec{r}$ 。然而处理2维问题（如无限长柱子）时，感应（极化）电荷会出现在无穷远处（因为柱子会延伸到无限远处），它们对电势的贡献不趋向于0！幸运的是，此时，它们对电场的贡献 $\sim 1/\rho$，故对电场的贡献仍趋于0。处理无限大平面问题时这个问题更严重 – 感应（极化）电荷沿着2个方向散布到无限远，故电场、电势均不趋向于0！ 不过通常1维问题根本无须这样求解。

此问题为与z无关的柱对称问题，故可以利用（4.4.8）展开

$$\varphi = A_0 + B_0\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})\sin(n\phi)$$

注意到 $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$，电场中 ρ 的阶数比电势中的低一阶。根据边条（1），势函数中所有比 ρ^1 发散快的项都不可以保留，故

$$A_n = C_n = 0, \quad n > 1 \qquad (4.4.38)$$

进一步利用边条（1）比较系数

$$E_\rho\big|_{\rho\to\infty} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = -A_1\cos\varphi - C_1\sin\varphi = E_0\cos\varphi \qquad (4.4.39)$$

因为 $\sin\phi$ 与 $\cos\phi$ 正交，可得

$$A_1 = -E_0, \qquad C_1 = 0 \qquad (4.4.40)$$

考虑边条（2），因 $\varphi|_{\rho=R}$ 应与 θ 无关，故有

$$\left.\begin{array}{l} A_n R^n + B_n R^{-n} = 0 \\ C_n R^n + D_n R^{-n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B_n = 0, n>1; \quad B_1 = E_0 R^2 \\ \qquad D_n = 0 \end{array}\right. \tag{4.4.41}$$

现考虑边条（3）：对角度积分过程中所有 $n>1$ 的项都没有贡献（因为与角度有关），只有 A_0, B_0 两项留下来。最后结果为：

$$B_0 \frac{1}{R} 2\pi R = -\lambda \quad \Rightarrow \quad B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \tag{4.4.42}$$

A_0 为一常数，不能唯一确定。总结下来，最终的电势为

$$\varphi = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho - E_0\rho\cos\phi + \frac{E_0 R^2}{\rho}\cos\phi \qquad \text{（4. 4. 43）}$$

分析（4. 4. 43），我们发现空间电势由三部分贡献叠加而成：外场，无限长带电导体棒，以及一个 2 维偶极子（$\vec{p} = 2\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$，参考补充题）的场：$\varphi_p^{(2)} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\rho}}{\rho}$。柱外电场强度为

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho} + E_0\cos\phi + \frac{E_0 R^2}{\rho^2}\cos\phi\right)\hat{e}_\rho + \left(-E_0\sin\phi + \frac{E_0 R^2}{\rho^2}\sin\phi\right)\hat{e}_\phi \qquad \text{（4. 4. 44）}$$

注：由这个问题的求解我们又一次发现一个规律，即均匀外电场下无限长柱子的静电问题我们只需要考虑 l=1 项的贡献。这里的物理是均匀电场只包含 l=1 项，而同时柱子的良好几何特征保证了不会将不同 l 的项耦合，因此最终的散射场不会激发其他 l 项的贡献。

§4.5 多 极 矩 法

之前对静电边值问题我们已经介绍了 2 种严格的方法---镜像法及本证函数展开法。然而这些方法只能处理一些具有良好对称性的问题。在实际问题中，激发电场的电荷分布不见得具有良好的对称性，此时应如何处理？一般来讲这类问题我们只能数值处理。不过对某一类特定问题，电荷分布全部集中在一个很小的区域内，而我们想要求的又是远离带电体空间的电场，这时我们可采用一种近似的

方法 -- **多极矩展开法**。

如图 4.10，若电荷分布在有限体积V内，电荷密度为$\rho(\vec{r}\,')$，这个体积的线度为l，考查的是P点的电场，而P点和体积V内任一点O的距离为$\vec{r}$。多极矩法是讨论在$|\vec{r}|>>l$情况下的场分布。P点电势的准确解的形式为

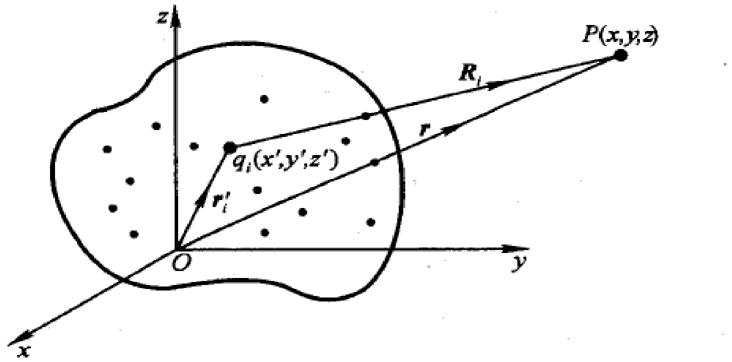


图 4.10

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R} \qquad (4.5.1)$$

这里，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$。由于P点离源较远，有$r'<<r$，因此作为$\vec{r}'$的函数$\dfrac{1}{R}$可以在$\vec{r}'=0$附近作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\frac{1}{r}+\sum_{i=x,y,z}(-r_i')\cdot\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=x,y,z}r_i'r_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\left(\frac{1}{R}\right)_{\vec{r}'=0}+\ldots\\&=\frac{1}{r}-\sum_{i=x,y,z}r_i'\cdot\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}r_i'r_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\left(\frac{1}{r}\right)+\ldots\end{aligned} \qquad (4.5.2)$$

上式可以写成更紧凑的数学上完全等价的矢量（并矢）的形式：

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots \qquad (4.5.2')$$

习题：

P．115， 4.2， 4.5，4.6，4.7

补充题

（1）考虑两个距离为 d 的线电荷密度为$\pm\lambda$的无限长带电棒组成的体系，计算其在远场的电势表达式。