电动力学

第三章：电流分布与外磁场的相互作用能量

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

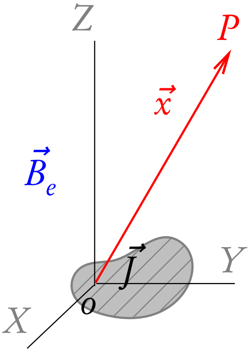
hyang@ustc.edu.cn

April 24, 2019

小区域内的电流分布与外磁场的相互作用:

设外磁场 $\vec{B}_e$ 的矢势为 $\vec{A}_e$, 给定电流分布 $\vec{J}(\vec{x})$ 与此外磁场的相互作用能量是:

$$W_i = \int_V d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_e(\vec{x})$$



以电流分布区域中的适当点为原点建立直角坐标系. 若电流分布于小区域 V 内, V 的线度远小于外磁场矢势 $\vec{A}_e$ 发生显著变化的线度, 则可以把 $\vec{A}_e(\vec{x})$ 在坐标原点邻域上作泰勒展开,

$$\vec{A}_e(\vec{x}) = \vec{A}_e(0) + x_i \partial_i \vec{A}_e(0) + \cdots$$

结合以上两式, 并注意到:

$$\int_V d^3x J_i(\vec{x}) = 0\,, \qquad \int_V d^3x \Big[x_i J_j(\vec{x}) + x_j J_i(\vec{x}) \Big] = 0\,,$$

小区域内的电流分布与外磁场的相互作用 (二):

我们有:

$$
\begin{aligned}
W_i &= \int_V d^3x \left[J_i(\vec{x}) A_i^{(e)}(0) + J_i x_k \partial_k A_i^{(e)}(0) + \cdots \right] \\
&= A_i^{(e)}(0) \int_V d^3x\, J_i(\vec{x}) + \left[\partial_k A_i^{(e)}(0)\right] \int_V d^3x\, J_i(\vec{x}) x_k + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_k A_i^{(e)}(0)\right] \int_V d^3x \left[x_k J_i(\vec{x}) - x_i J_k(\vec{x}) \right] + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_k A_i^{(e)}(0)\right] \int_V d^3x\, \epsilon_{kij} \left[\vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) \right]_j + \cdots \\
&= \epsilon_{kij}\left[\partial_k A_i^{(e)}(0)\right] \left[\frac{1}{2} \int_V d^3x\, \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) \right]_j + \cdots \\
&= \epsilon_{kij}\left[\partial_k A_i^{(e)}(0)\right] m_j + \cdots \\
&= m_j \left[\nabla \times \vec{A}_e(0)\right]_j + \cdots \\
&= \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) + \cdots
\end{aligned}
$$

磁偶极子与外磁场的相互作用能量：

以上结果表明，磁偶极子与外磁场之间的相互作用能量为：

$$W_i^{(1)} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

这里出现的问题是：如何理解 $W_i^{(1)}$？换言之，可否将 $W_i^{(1)}$ 解释为磁偶极子与外磁场之间相互作用的"势能"？

物理小贴士：

$W_i^{(1)}$ 当 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}_e$ 反向时取极小值. 所以，倘若把 $W_i^{(1)}$ 解释为磁偶极子与外磁场体系的势能，则意味着磁偶极子受外磁场作用时其磁矩 $\vec{m}$ 将会倾向于与外磁场反向. 这个结论显然是荒谬的.

所以，不能将

$$W_i^{(1)} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

误解为磁偶极子与外磁场之间的相互作用势能．事实上，由于静磁场施加给电流分布的洛伦茨力

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}, \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \times \vec{f} \neq 0$$

不是保守力场[1]，原则上不能引入“静磁势能”这个概念．

[1] 此结论与 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$ 是否为零无关．

小区域内的电流分布与外磁场的相互作用 (三):

现在从“力”和“力矩”的角度研究电流分布与外磁场之间的相互作用.

回忆 Lorentz 力密度公式，$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$. 所以，在外磁场 $\vec{B}_e$ 中给定电流分布 $\vec{J}(\vec{x})$ 将受到以下静磁力:

$$\vec{F} = \int_V d^3x \, \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}_e(\vec{x})$$

和力矩:

$$\vec{N} = \int_V d^3x \, \vec{x} \times \left[\vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}_e(\vec{x})\right]$$

仍然假设电流分布于小区域 V 中，外磁场在 V 内没有明显变化.在 V 中选择适当点作为原点建立直角坐标系，使得

$$\vec{B}_e(\vec{x}) = \vec{e}_i B_i^{(e)}(\vec{x})$$

把 $\vec{B}_e(\vec{x})$ 在原点邻域上做泰勒展开:

$$\vec{B}_e(\vec{x}) \approx \vec{B}_e(0) + x_i \partial_i \vec{B}_e(0)$$

小区域内的电流分布与外磁场的相互作用(四):

代入到静磁力公式中，得:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_V d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) \times \left[\vec{B}_e(0) + x_i\partial_i\vec{B}_e(0) + \cdots\right] \\
&= \vec{e}_i\,\epsilon_{ijk} \int_V d^3x\, J_j(\vec{x}) \left[B_k^{(e)}(0) + x_l\partial_l B_k^{(e)}(0) + \cdots\right] \\
&= \vec{e}_i\epsilon_{ijk}B_k^{(e)}(0)\left[\int_V d^3x\, J_j(\vec{x})\right] + \vec{e}_i\epsilon_{ijk}\left[\partial_l B_k^{(e)}(0)\right]\left[\int_V d^3x\, x_l J_j(\vec{x})\right] + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\vec{e}_i\epsilon_{ijk}\left[\partial_l B_k^{(e)}(0)\right]\int_V d^3x\left[x_l J_j(\vec{x}) - x_j J_l(\vec{x})\right] + \cdots \\
&= \vec{e}_i\,\epsilon_{ijk}\left[\partial_l B_k^{(e)}(0)\right]\epsilon_{ljn}\left[\frac{1}{2}\int_V d^3x\, \vec{x}\times\vec{J}(\vec{x})\right]_n + \cdots \\
&= \vec{e}_i\left(\delta_{il}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kl}\right)\left[\partial_l B_k^{(e)}(0)\right] m_n + \cdots \\
&= \vec{e}_i\partial_i\left[m_k B_k^{(e)}(0)\right] - \vec{e}_i m_i \partial_k B_k^{(e)}(0) + \cdots \\
&= \nabla\left[\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)\right] - \vec{m}\left[\nabla\cdot\vec{B}_e(0)\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

小区域内的电流分布与外磁场的相互作用 (五):

计入磁荷体密度恒为零的实验事实，我们有:

$$\nabla \cdot \vec{B}_e(0) = 0$$

所以，外磁场 $\vec{B}_e$ 中磁偶极子 $\vec{m}$ 受到如下静磁力作用:

$$\vec{F} = \nabla \left[\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \right]$$

1. 只有在非均匀的外磁场中，磁偶极子才受到非零的静磁力.
2. 可以对磁偶极子与外磁场相互作用体系定义所谓“等效静磁势能”，
$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$$
从而把静磁力写为 U 的负梯度: $\vec{F} = -\nabla U$.
3. U 的极小值对应于 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}_e$ 取向一致，这和介质磁化的物理图像相符.
4. U 只是磁偶极子与外磁场相互作用总能量 $W_i^{(1)}$ 中的一部分，不是全部.

进一步讨论电流分布在外磁场中所受到的力矩.为简单计,假设外磁场是均匀磁场, $\vec{B}_e(\vec{x}) \approx \vec{B}_e(0)$. 以前述直角坐标系为依托,我们有:

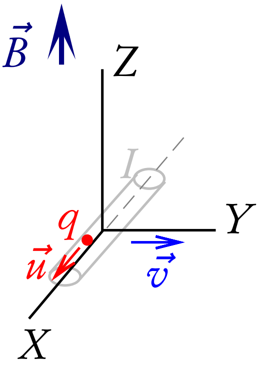
$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \int_V d^3x\, \vec{x} \times \left[\vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}_e(0)\right] \\
&= \vec{e}_i \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) \int_V d^3x\, x_i J_j(\vec{x}) B_k^{(e)}(0) \\
&= (\delta_{ik}\vec{e}_j - \delta_{ij}\vec{e}_k) B_k^{(e)}(0)\, \frac{1}{2} \int_V d^3x \left[x_i J_j(\vec{x}) - x_j J_i(\vec{x})\right] \\
&= (\delta_{ik}\vec{e}_j - \delta_{ij}\vec{e}_k) B_k^{(e)}(0)\, \epsilon_{ijl}\, m_l \\
&= \epsilon_{ijl}\vec{e}_j m_l B_i^{(e)}(0)
\end{aligned}$$

即:

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0)$$

补遗：

让我们再仔细分析一下处于外磁场中的磁偶极子与外磁场的相互作用能 $W^{(1)}$ 与等效相互作用势能 U 之间的联系.



从考虑一段载流导线在外磁场中的运动入手.

导线中某载流子 q 参与两种运动. 一个分运动是沿电流方向的漂移，速度为 $\vec{u}$;

$$Id\vec{l} \propto q\vec{u}$$

另一运动是随导线整体沿 Y 轴作机械运动，速度为 $\vec{v}$.

外磁场作用于此载流子上的洛伦兹力是：

$$\vec{F} = q(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{B}$$

外磁场提供的洛伦兹力在整体上对载流子并不作功.但是:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{F} = q(\vec{u}+\vec{v})\cdot\Big[(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{B}\Big] \\ &= q\Big[(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})\Big]\cdot\vec{B} \\ &= q(\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{B} \\ &= \vec{u}\cdot\Big[q\vec{v}\times\vec{B}\Big] + \vec{v}\cdot\Big[q\vec{u}\times\vec{B}\Big] \end{aligned}$$

1. 第一项是洛伦兹力在载流子漂移方向作功的功率.我们假设导线中的电流强度不随时间变化，如此，洛伦兹力在载流子漂移方向所作的功率将转化为电源电能的时间增加率:

$$\frac{dW_s}{dt} \propto \vec{u}\cdot\Big[q\vec{v}\times\vec{B}\Big]$$

2. 第二项是洛伦兹力在载流子随导线整体机械运动方向作功的功率.显然，这部分功率若与机械运动的路径无关，就有可能表现为载流导线与外磁场相互作用势能的时间增加率:

$$\frac{dU}{dt} \propto \vec{v}\cdot\Big[q\vec{u}\times\vec{B}\Big]$$

洛伦茨力整体上对载流子不作功意味着:

$$\frac{dW_s}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

解之,

$$W_s + U = \text{常数}$$

上式右端的常数意指其不随时间变化.我们假设在初始时刻载流导线与外磁场相距无穷远,彼此并无相互作用.这样,应取此常数为零:

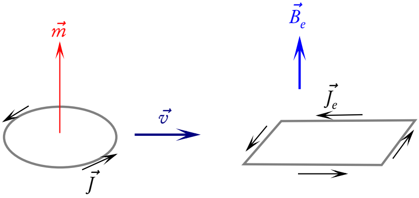
$$W_s + U = 0$$

因此,

> 对于处在外磁场中运动的载流导线而言,外磁场洛伦茨力对导线中电源所作的电功与其对导线整体运动所作的机械功完全抵消.

这就是此情形下洛伦茨力不作功的真相.

现在考虑磁偶极子与外磁场之间的相互作用能:



1. 为方便计，把磁偶极子设想为一个圆形载流线圈.
2. 假设外磁场由另一矩形载流线圈产生.
3. 二载流线圈作相向机械运动，相对运动速度为 $\vec{v}$.

于是，磁偶极子与外磁场之间总的相互作用能量应该是:

$$W^{(1)} = W_{dipole} + W_{coil} + U$$

1. W_{dipole} 是矩形载流线圈磁场的洛伦茨力对磁偶极子线圈中的电源所作的电功.
2. W_{coil} 是磁偶极子磁场的洛伦茨力对矩形载流线圈电路中电源所作的电功.
3. U 是二者因为相向机械运动而具有的相互作用势能.

因为磁场的洛伦兹力在整体上不作功，我们看到：

- 若应用于矩形载流线圈，

$$W_{dipole} + U = 0$$

- 若应用于磁偶极子，

$$W_{coil} + U = 0$$

此二式相加，则有：

$$W_{dipole} + W_{coil} + 2U = 0$$

所以，

$$W^{(1)} = W_{dipole} + W_{coil} + U = \left(W_{dipole} + W_{coil} + 2U\right) - U = -U$$

这正是我们已知的结论. 磁偶极子与外磁场的相互作用总能量是 $W^{(1)} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$，但反映其在外磁场中因为作机械运动而具有

的与外磁场之间的相互作用势能是 $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}_e$. 二者之差

$$W^{(1)} - U = -2U = 2\vec{m}\cdot\vec{B}_e$$

其实是电源提供的以保持两个载流回路中电流强度均不随时间变化所需的电功[2].

作业： 郭硕鸿著《电动力学》(第三版)，第 108-109 页，第 13，14，15 题.

[2]进一步的讨论请参考 Feynman 等人的著作，The Feynman Lectures on Physics, Vol2, Chapter15 and Chapter16.