第二十讲

上次课

- 各向异性色散介质

  本构关系：$\vec{D}(\mathrm{r},\omega)=\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r(\omega)\cdot\vec{E}(\mathrm{r},\omega)$

- $k^2\vec{E}_0=k_0^2\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0$

  本征模---色散关系；　本征矢量 --- 偏振态

---

§ 8.6 电磁波在介质面上的反射和折射

至今为止，我们只学习了电磁波在一个**无限大均匀的块体材料**中传输时的行为。电磁波从一个材料进入另一个材料中会如何？此即是本节我们要学习的内容。

0. 电磁波边界条件

光在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知。早期人们是基于牛顿的光粒子的概念用了许多假设推出光的反射和折射定律的。直到后来人们利用 Maxwell 方程以及边界条件，不加任何其他假设，成功推导出光的折射和反射定律时，人们才完全接受光的波动性。这里我们从 Maxwell 方程出发讨论电磁波的反射和折射现象。在界面上电磁场要满足边值条件

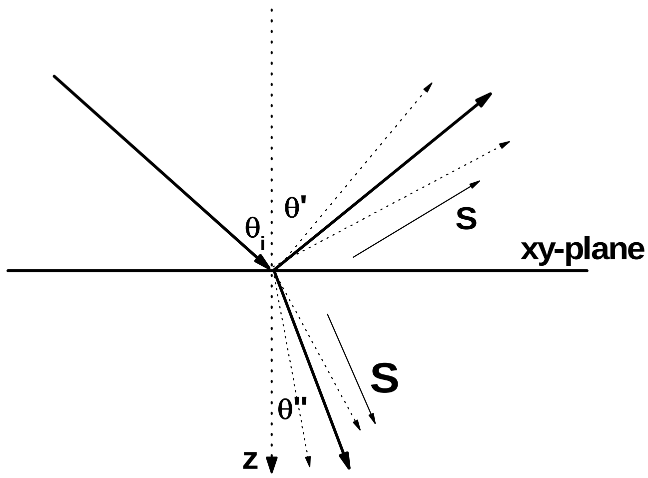
$$\vec{n}\times(\vec{E}_1(\vec{r},t)-\vec{E}_2(\vec{r},t))\Big|_b=0,\quad \vec{n}\times(\vec{H}_1(\vec{r},t)-\vec{H}_2(\vec{r},t))\Big|_b=0 \qquad (8.6.1)$$

由上述边界条件，我们可以推导出决定电磁波的界面上行为的 2 大定律。

1．反射、折射的基本规律 – Snell's Law

首先注意到电场、磁场的切向分量在交界面内$\boxed{\text{（1）时时　（2）处处相等}}$（*我们已经把金属的传导电流在高频下作为束缚电流处理，因此金属也可以作为电介质来处理，无须考虑界面上的面自由电流！*）若交界面为一平面，我们把它取为 OXY 面。如图 8.6 所示，考虑一单色平面波入射到交界面上，其电场为

$$\vec{E}_i=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (8.6.2)$$



则电场切向分量在交界面上$\boxed{时时相等}$要求反射波、折射波也一定携带相同的时间因子$e^{-i\omega t}$ - ***这个可以做如下理解：介质分子在外电磁波的作用下以频率ω做受迫振动，这种受迫振动是反射、折射波的来源，故反射、折射波一定也是以此频率振动，*****这其实是我们所处的世界的时间平移不变性的体现！**假设介质 1 和 2 都是均匀各向同性的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以一般形式地写为所有频率为ω的沿不同方向传播的平面波的叠加

$$\begin{array}{ll} \text{反射波} & \vec{E}_r = \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_0'(\vec{k}')e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \text{折射波} & \vec{E}_d = \sum_{\vec{k}''} \vec{E}_0''(\vec{k}'')e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{array} \qquad (8.6.3)$$

其中波矢应和频率当满足色散关系

$$k' = (\omega/c)\cdot n_1 \text{ , } k'' = (\omega/c)\cdot n_2 \qquad (8.6.4)$$

其中$n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}\cdot\mu_{ri}}$为第 i 个体系的折射率。下面考虑（8.6.1）的第 2 个要求：电磁场在交界面上$\boxed{处处相等}$。这意味着反射波、折射波一定在 xy 平面内具有相同的空间波动行为，亦即带有相同的因子$e^{i\vec{k}_{\parallel}\cdot\vec{r}_{\parallel}} = e^{i(k_x x+k_y y)}$。**这个结论身深层次的物理其实是体系在界面上的平移不变性！考虑界面上的任意 2 点在外场激励下的震动，其唯一的不同就是外场的相位有不同，因此这两点的振动差$e^{ik_{\parallel}\Delta r}$，因此响应的反射/折射波也差同样的相位。**这意味着（8.6.3）式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求，即

$$\vec{k}_{\parallel}' = \vec{k}_{\parallel}'' = \vec{k}_{\parallel} \qquad (8.6.5)$$

由（8.6.4）及（8.6.5）可得 z 方向上的 k 矢量：

$$k_z^{'}=\pm\sqrt{k^{'2}-k_{\parallel}^{2}}\ ,\ k_z^{"}=\pm\sqrt{k^{"2}-k_{\parallel}^{2}} \qquad (8.6.6)$$

如何确定（8.6.6）式应取正号还是负号？这里应当用到因果关系（Causality）！根据因果关系，反射波及折射波的能量都应当离开界面。在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向（即 Ponty 矢量 **S**）同方向 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\parallel\hat{k}$。故（8.6.6）中 $k_z^{'}$ 应取负根，而 $k_z^{"}$ 应取正根。故反射、折射光如上图所示。由三方面的讨论：**时间平移不变性、界面空间平移不变性、因果关系**，我们可总结出反射、折射的基本规律：

(1) 反射波、折射波的频率与入射波频率相等：$\omega'=\omega"=\omega$

(2) 根据 $\vec{k}_{\parallel}^{'}=\vec{k}_{\parallel}^{"}=\vec{k}_{\parallel}$，若 $k_y=0$，则必有 $k_y'=k_y''=0$。这意味着，入射线、反射线和折射线在同一平面内 – *这个由入射波 k 矢量与交界面垂直方向构成的平面定义为入射面*。

(3) $k_z^{'}$, $k_z^{"}$ 的正负号由因果关系确定！

(4) 根据 $k_x=k_x'$,，有 $k\sin\theta=k'\sin\theta'$，同时因为 $k=k'$（入射波与反射波在同一种介质中），由此得出，$\theta=\theta'$，即入射角等于反射角，即“镜面反射”。

(5) 根据 $k_x=k_x''$，必有 $k\sin\theta=k''\sin\theta''$，再根据（8. 6. 4），于是

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{k''}{k}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{n_2}{n_1} \qquad (8.6.7)$$

这就是光学中的折射定律（Snell's Law）。因为折射定律中所涉及的物理量仅仅是 $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}=\sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}$，这正是 n 被称为介质的折射率的原因。

2．振幅关系 – Fresnel's Law （菲涅耳定律）

上面我们根据边值条件中的时空依赖关系推导出电磁波的传播方向所满足的要求，对折射波/反射波的振幅尚未讨论。下面我们根据（8.6.1）来讨论这件事情。对沿 k 方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波，我们总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加。因此，下面我们将分两种情形分别考虑。

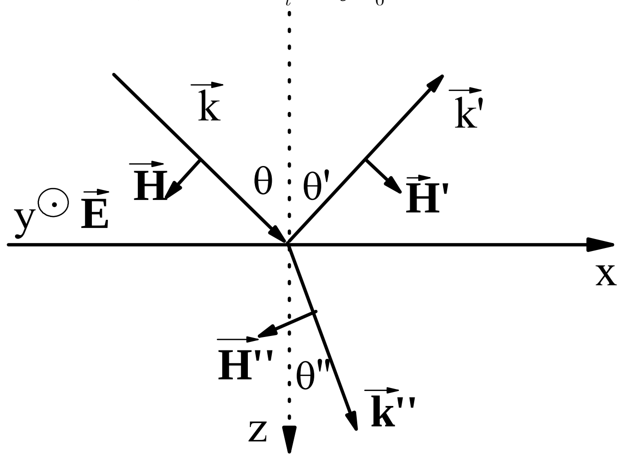
A． S 波/TE（横电）波

在这种情况下，入射波的电场垂直于入射面（躺在交界面上），如图所示。入射、反射、以及折射波的电场可以写成

入射波 $\vec{E}_i = \hat{y}E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$

反射波 $\vec{E}_r = \hat{y}E_0^{'} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}$ （8.6.8）

折射波 $\vec{E}_t = \hat{y}E_0^{''} e^{i(k_x x + k_z^{''} z - \omega t)}$



根据 Maxwell 方程，磁场可写成

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{k} \times \vec{E}\right) \qquad (8.6.9)$$

的形式，其中 $Z = \sqrt{\mu}/\sqrt{\varepsilon}$ 是介质的阻抗。因此，入射、反射以及折射波的磁场为

$$\begin{aligned}
\vec{H}_i &= \frac{E_0}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z} - k_z\hat{x}\right)}{k} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_r &= \frac{E_0^{'}}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z} + k_z\hat{x}\right)}{k} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_t &= \frac{E_0^{''}}{Z_2}\frac{\left(k_x\hat{z} - k_z^{''}\hat{x}\right)}{k^{''}} e^{i(k_x x + k_z^{''} z - \omega t)}
\end{aligned} \qquad (8.6.10)$$

在交界面上（设 z=0）E，H 的切向值相等，则有

$$\begin{aligned}
&E_0 + E_0^{'} = E_0^{''} \\
&\frac{k_z}{Z_1 k}E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k}E_0^{'} = \frac{k_z^{''}}{Z_2 k^{''}}E_0^{''}
\end{aligned} \qquad (8.6.11)$$

注意到

$$k_z = k\cos\theta,\ k_z^{''} = k^{''}\cos\theta^{''} \qquad (8.6.12)$$

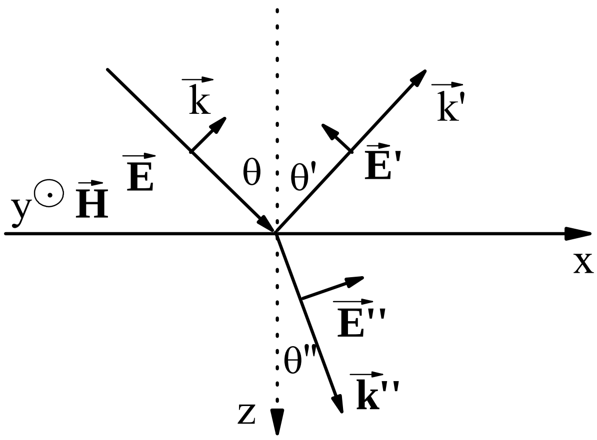
解联立方程可得

$$E_0^{'} = \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta^{''}}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta^{''}} E_0$$
$$E_0^{''} = \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta^{''}} E_0 \qquad (8.6.13)$$

反射、折射波与入射波中的磁场振幅关系可由（8.6.10）求出。

B．<u>P 波/TM 波</u>

下面考虑另一种情况，即磁场垂直于入射面（或者说磁场躺在交界面内），此时先考虑磁场比较方便。如下图所示



入射波 $\vec{H}_i = \hat{y}H_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$

反射波 $\vec{H}_r = \hat{y}H_0^{'} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}$ （8.6.14）

折射波 $\vec{H}_t = \hat{y}H_0^{''} e^{i(k_x x + k_z^{''} z - \omega t)}$

根据 Maxwell 方程，电场可由

$$\vec{E} = -Z\left(\hat{k}\times\vec{H}\right) \qquad （8.6.15）$$

求得。我们再次看到阻抗的重要性。因此可以根据（8.6.14-15）式写出电场 $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$ 的形式，再根据边界条件(8.6.1)得到（可与 S 波对比）

$$H_0^{'} = \frac{Z_1\cos\theta - Z_2\cos\theta^{''}}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta^{''}} H_0$$
$$H_0^{''} = \frac{2Z_1\cos\theta}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta^{''}} H_0 \qquad (8.6.16)$$

(8.6.13)-(8.6.16) 式被称为菲涅耳公式，在特殊情况下（ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ）回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁

波。

讨论：

(1)当ε,μ其中之一为负数甚至为虚数时，θ''失去几何意义，此时不应当做$\cos\theta''=k_z''/k''$的替代，而应当直接写成k_z''/k''，k_z/k的形式；但Z的形式不必改，因为$\vec{E}=Z\left(\hat{k}\times\vec{H}\right)$仍然成立，尽管此处Z为复数。

(2)（8.6.16）可以通过对（8.6.13）进行代换$Z\to 1/Z, E\to H$得到！这反映了电磁场得对称性。电磁理论中有许多这种对称值得好好揣摩。

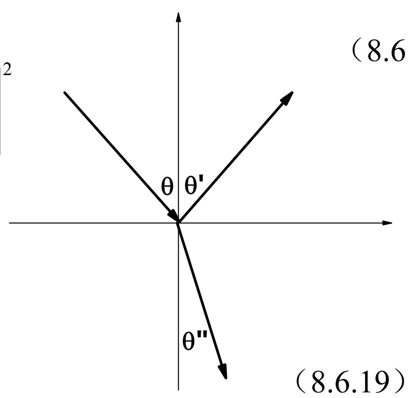
3. 反射率及透射率

反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为反射率（Reflectance），物理意义是多少入射的能量被界面反射回来。无论对S波还是P波，反射波和入射波处于同一媒质中，阻抗值相同，入射角与反射角也相等。因此，反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方：

$$R=\frac{\langle\vec{S}_r\rangle\cdot\hat{z}}{\langle\vec{S}_i\rangle\cdot\hat{z}}=\begin{cases}\dfrac{\left|E_0'\right|^2\cos\theta'/Z_1}{\left|E_0\right|^2\cos\theta/Z_1}=\left|\dfrac{E_0'}{E_0}\right|^2 & S\ \text{wave}\\[2ex] \dfrac{Z_1\left|H_0'\right|^2\cos\theta'}{Z_1\left|H_0\right|^2\cos\theta}=\left|\dfrac{H_0'}{H_0}\right|^2 & P\ \text{wave}\end{cases}\qquad(8.6.17)$$

将（8.6.13），（8.6.16）分别带入（8.6.17）式即得S，P两种偏振情况的反射率：

$$R_S=\left|\frac{Z_2\cos\theta-Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta+Z_1\cos\theta''}\right|^2$$
$$R_P=\left|\frac{Z_2\cos\theta''-Z_1\cos\theta}{Z_2\cos\theta''+Z_1\cos\theta}\right|^2\qquad(8.6.18)$$



同样道理，透射率定义为

$$T=\frac{\langle\vec{S}_t\rangle\cdot\hat{z}}{\langle\vec{S}_i\rangle\cdot\hat{z}}=\begin{cases}\dfrac{\left|E_0''\right|^2\cos\theta''/Z_2}{\left|E_0\right|^2\cos\theta/Z_1} & \text{S wave}\\[2ex] \dfrac{Z_2\left|H_0''\right|^2\cos\theta''}{Z_1\left|H_0\right|^2\cos\theta} & \text{P wave}\end{cases}\qquad(8.6.19)$$

注意：定义反射/透射率的时候，我们都不是直接对入（反、透）射波的能流操作，而是将

其投影到界面的法向方向。这是因为对一个界面来讲，只有投影到其法向方向的能流分量才是“真正通过”这个界面的能流。

问题：你能否考虑一个有限大小的 Beam 在界面上的反射和折射，基于此搞清楚为什么能量守恒要乘以一个投影到法线的$\cos\theta$ 因子？

4．正入射条件下反射的几点讨论

（1）正入射条件下，无论 S 波还是 P 波，反射率均为

$$R=\left|\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}\right|^2$$

在光学中，我们经常利用$R=\left|\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|^2$来计算反射率，其实这不完全正确，只有当介质没有磁性时，因为$Z_r=1/\sqrt{\varepsilon_r}=1/n$，2 者等价。一般情况下正确的表达式应当由阻抗来描述。折射率完全决定了波的传播方向，然而阻抗却是决定波振幅的核心。两个物理量加在一起完全描述了一个电磁介质的所有电磁波行为。

（2）假设$Z_1=Z_0$,则定义相对阻抗为$Z=Z_2/Z_0=\frac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_r}}$对 S 波我们可以定义反射系数 $r_S=\frac{Z-1}{Z+1}=\frac{E_0'}{E_0}$（P 波有同样结果），它刻画了反射波与入射波的振幅（带相位）的比值。我们注意到，无论对$Z\to 0$的介质还是对$Z\to\infty$的介质，都可以对电磁波进行强烈反射，但反射的位相却不相同。$Z\to 0$的介质其实就是理想电导体（因为金属$|\varepsilon_r|\to\infty$，简称 Perfect electric conductor (PEC)），而$Z\to\infty$的介质对应的是$|\mu_r|\to\infty$的理想“磁导体”(PMC))自然界不存在，可以通过 Metamaterial 的概念实现。通过调控电磁波介质的阻抗特性，我们可以实现对电磁波反射位相的有效调控，从而实现一系列难以置信的新的电磁波现象。

5. Brewster 角

对常规介质，在可见光频段磁导率接近于μ_0（光频下磁性介质中的磁矩无法跟上电磁场的变化，宏观上不显现磁性）。令$\mu_1=\mu_2\approx\mu_0$，则此时折射系数与阻抗满足$Z_r=1/\sqrt{\varepsilon_r}=1/n$。利用折射定律

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \tag{8.6.20}$$

针对两种偏振光，带入反射率的表达式（8.6.18）可得：

$$\begin{aligned} R_S &= \frac{\sin^2(\theta-\theta'')}{\sin^2(\theta+\theta'')} \\ R_P &= \frac{\tan^2(\theta-\theta'')}{\tan^2(\theta+\theta'')} \end{aligned} \tag{8.6.21}$$

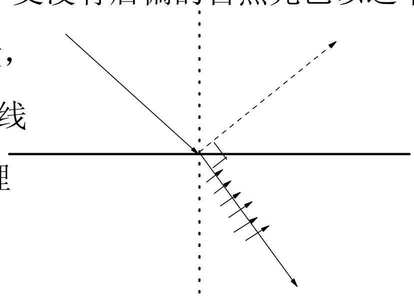
对 P 波反射率，注意到当

$$\theta + \theta'' = \pi/2 \tag{8.6.22}$$

条件满足时，反射率为 0：

$$R_P = 0 \tag{8.6.23}$$

亦即：当反射波与折射波相互垂直时，P 极化电磁波完全不被反射！满足（8.6.22）式条件的入射角称为布鲁斯特角（Brewster Angle），满足 $\theta_B = \tan^{-1}(n_2/n_1)$。其在光学中有着重要的理论和实际的意义 – 如当一支没有启偏的自然光已以这个角度入射到介质表面时，反射波没有 P 偏振分量，只有 S 偏振分量，这样反射波就变成了完全的线偏振波。可以利用下面的 Argument 从物理上理解 Brewster Angle：



当 P 偏振电磁波入射到介质表面上时，在介质内部驱动介质分子来回振荡，这产生了如图所示的电偶极子振荡。它们的重新辐射效应产生了折射波和反射波。当入射角等于 Brewster Angle 时，反射波垂直于折射波，因为要满足横波条件，故在与反射波矢垂直方向运动的介质分子不可能辐射出反射波，故，此时介质对电磁波完全透明。注意，此结论以及几何解释只在非磁性材料中适用！对磁性介质（相对介电常数=1），结论恰恰相反！

习题：

P．　205，8.2，8.4

1）从 Fresnel 公式出发，证明在正入射的条件下，P 波和 S 波的反射率相等，且电场的振幅比（带相位的反射系数）也是一样的。

2) 设有一种介质，其$\varepsilon_r < 0, \mu_r < 0$，证明

（i）在此介质中存在传播模式的电磁波（即 k 为实数）

（ii）这种传播波的能流方向与波传播的方向相反，即$\vec{S} \parallel (-\hat{k})$

（iii）根据这个结论，重新讨论当电磁波由空气入射到这种介质上时所满足的 Snell 定律，画出折射光的方向，并重新推导折射角与入射角之间的关系。

（提示：此处要用到因果律 – 即反射波和折射波的能流一定要离开界面！）

3) 推导 P 波的菲涅耳公式（8.6.16）式。

4) 当电磁波从空气中入射到一个磁性介质（相对磁导率为$\mu_r = 4$，相对介电常数为 1）表面上时，对 S、P 两种偏振情况下计算入射角为θ条件下的反射率的表达式。试问，S、P 哪一种偏振波有 Brewster 角效应？对应的 Brewster 角是多少？发生 Brewster 效应时对应的物理解释是什么？

课后 Project：

1. 根据大课上教授内容，学习如下文献，弄清楚如何拓展 Snell 定律？

“*Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves"*,

Shulin Sun, Qiong He, Shiyi Xiao, Qin Xu, Xin Li & Lei Zhou,

Nature Materials 11, 426-431 (2012).

2.学习如下文献，搞清楚如何利用超薄体系的反射特性调控入射波的偏振？

"Manipulating Electromagnetic wave polarizations by anisotropic metamaterials",

Jiaming Hao, Yu Yuan, Lixin Ran, Tao Jiang, J. A. Kong, C. T. Chan, and L. Zhou,

Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007).