

第七章 带电粒子和电磁场的相互作用

- (1) 已知粒子运动求电磁场
- (2) 粒子激发电磁场对粒子的反作用
- (3) 粒子与外电磁场的相互作用



§ 1 运动带电粒子的势和辐射电磁场

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \times [(\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{c}\mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(1 - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^3} \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \dot{\mathbf{v}}) \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\dot{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{c}[(\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)(\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r) - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)(\dot{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{e}}_r)]}{(1 - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^3} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_{rad} \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \dot{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{e}}_r \quad (21)$$

辐射场的特点：

辐射场强以 $1/r$ 衰减，而非辐射场强以 $1/r^2$ 衰减。

与 $|\dot{\mathbf{v}}|$ 成正比

\mathbf{E}_{rad} 和 \mathbf{B}_{rad} 互相正交并分别与 \mathbf{r} 正交（横场。在自由空间的情形）

可直接验证

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_{rad} \quad (22)$$



§ 2 高速运动带电粒子的辐射

1. 高速运动带电粒子的辐射功率和角分布

辐射场的能流密度

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c E^2 \hat{\mathbf{e}}_r \quad (23)$$

辐射场

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \times [(\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{c} \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(1 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^3} \quad (24)$$



辐射功率

记电荷辐射功率为 $P(t')$.

$$P(t') = \int P(t', \Omega) d\Omega \quad (28)$$

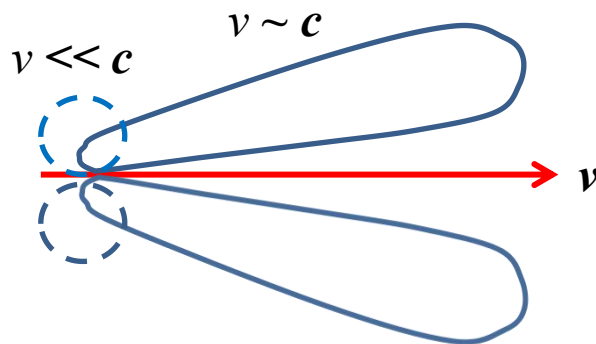
辐射功率角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \equiv P(t', \Omega) = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{|\hat{\mathbf{e}}_r \times [(\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{c} \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}}]|^2}{(1 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^5} \quad (29)$$



2. 加速度平行速度情形

例如直线加速器



辐射功率角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5} \quad (33)$$

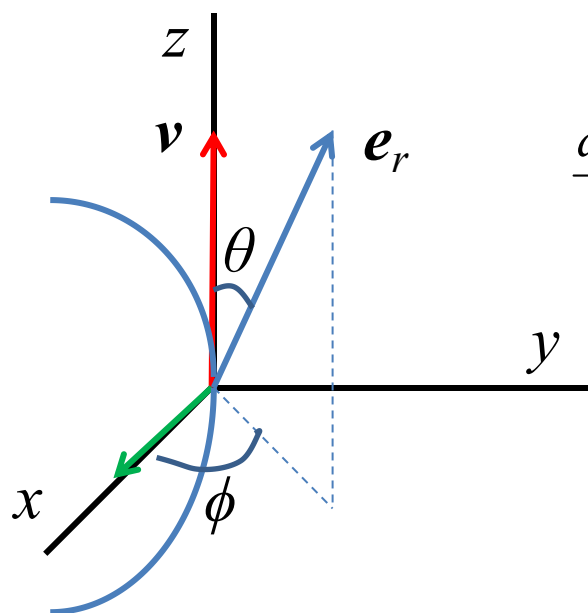
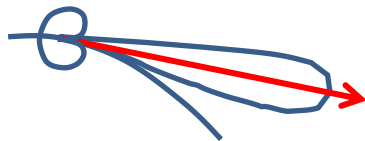
辐射功率

$$P(t') = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \gamma^6 \quad P(t') = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} F^2 \quad (34) \quad (36)$$



3. 加速度垂直速度情形

例如回旋加速器的同步辐射



辐射功率角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^2 - (1 - \frac{v^2}{c^2}) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^5} \quad (37)$$

辐射功率

$$P(t') = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \gamma^4 \quad (38)$$

$$P(t') = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 m^4 c^7} E_q^2 F^2 \quad (40)$$



§ 3 辐射的频谱分析

1. 频谱分析的一般公式

傅里叶变换

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \quad (42)$$

$$f_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (43)$$

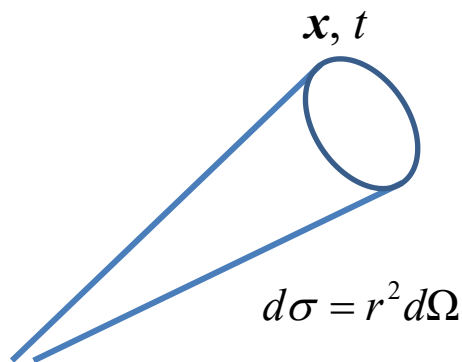
若 $f(t)$ 为实函数,

$$f_{\omega}^* = f_{-\omega} \quad (44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 4\pi \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega \quad (45)$$



辐射能量的角分布



$$\frac{dW}{d\Omega} = \int \frac{dP}{d\Omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r R^2 dt \quad (57)$$

$$\frac{dW}{d\Omega} = \varepsilon_0 c R^2 \int_{-\infty}^{\infty} E^2 dt = 4\pi \varepsilon_0 c R^2 \int_0^{\infty} |E_{\omega}|^2 d\omega \equiv \int_0^{\infty} \frac{dW_{\omega}}{d\Omega} d\omega \quad (58)$$

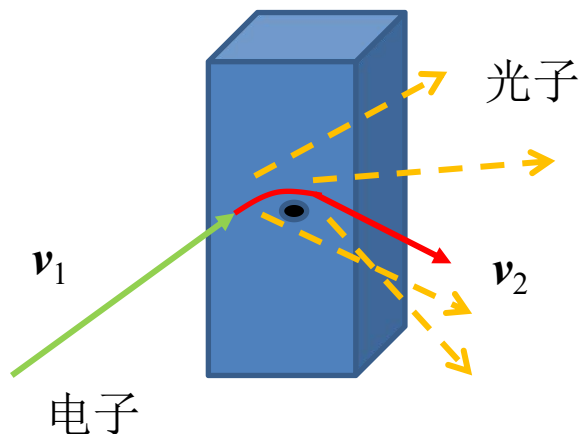
单位频率间隔辐射能量角分布

$$\frac{dW_{\omega}}{d\Omega} = 4\pi \varepsilon_0 c R^2 |E_{\omega}|^2. \quad (59)$$

单位频率间隔辐射能量

$$W_{\omega} = 4\pi \varepsilon_0 c R^2 \oint |E_{\omega}|^2 d\Omega \quad (60)$$

2. 低速运动带电粒子在碰撞过程中的辐射频谱



(1) 若 $\omega\tau \ll 1$, 因为 $e^{i\omega t'} \sim 1$, 所以

$$\mathbf{E}_\omega \approx \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \Delta \mathbf{v}) \quad (65)$$

(2) 若 $\omega\tau \gg 1$, 因为 $e^{i\omega t'}$ 快速振荡, 所以

$$\mathbf{E}_\omega \approx 0 \quad (67)$$

轫致辐射, $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

单位频率间隔辐射能量角分布为

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = 4\pi\epsilon_0 c R^2 |\mathbf{E}_\omega|^2 = \frac{q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2 \sin^2 \Theta \quad (69)$$

单位频率间隔辐射能量

$$W_\omega = \int \frac{dW_\omega}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2 \quad (70)$$



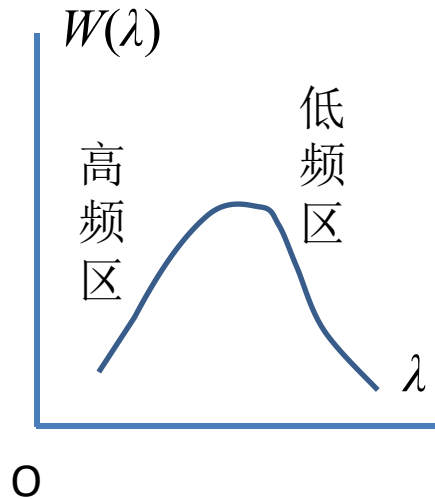
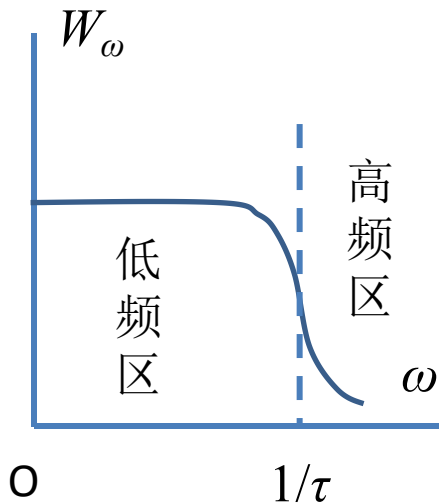
辐射能量按波长的分布

对(1): $\omega\tau \ll 1$, 有 $c\tau/\lambda \ll 1$.

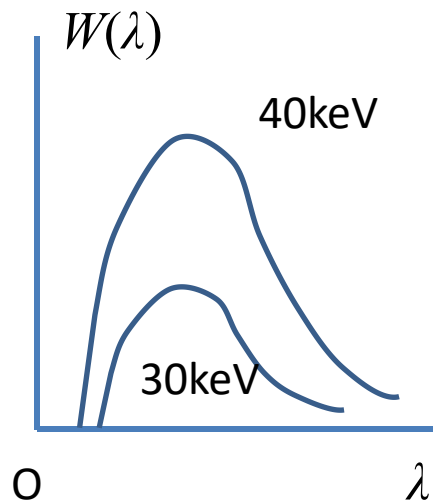
$$W(\lambda) = W_\omega \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0} \left| \frac{\Delta v}{c} \right|^2 \frac{1}{\lambda^2} \quad (71)$$

对(2): $\omega\tau \gg 1$, 有 $c\tau/\lambda \gg 1$

$$W(\lambda) = 0 \quad (72)$$



实验



短波区的截止波长是量子效应

$$E_e = \frac{1}{2} m v_1^2 = \hbar \omega_c \quad (73)$$

记光子数分布为 $N(\omega)$ 。对 $\omega\tau \ll 1$,

$$N(\omega)d\omega = \frac{W_\omega}{\hbar\omega} d\omega = \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (74)$$

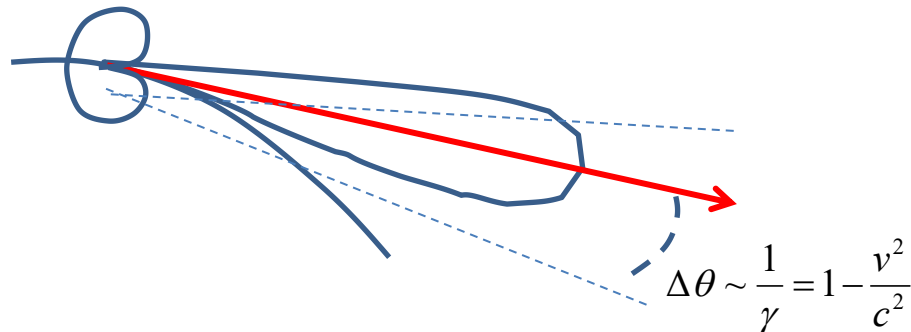
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0359895(61)} \quad (75)$$



3. 高速圆周运动带电粒子的辐射频谱

加速度沿垂直速度方向

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^2 - (1 - \frac{v^2}{c^2}) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^5} \quad (76)$$

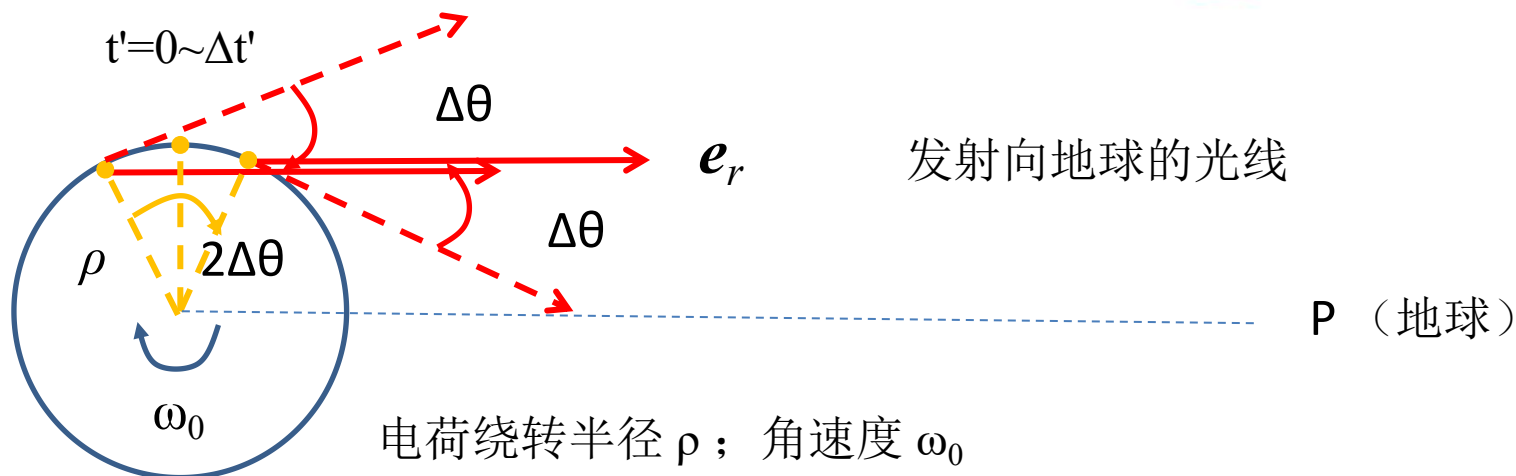


$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^5} \approx \frac{32}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^5} \quad (77)$$

当 $v \sim c$ 时, $\Delta\theta$ 非常小

高速圆周运动的带电粒子产生的辐射像一个旋转的探照灯一样

中子星

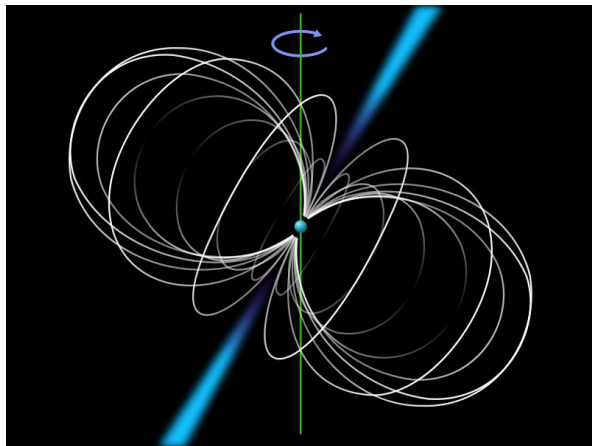
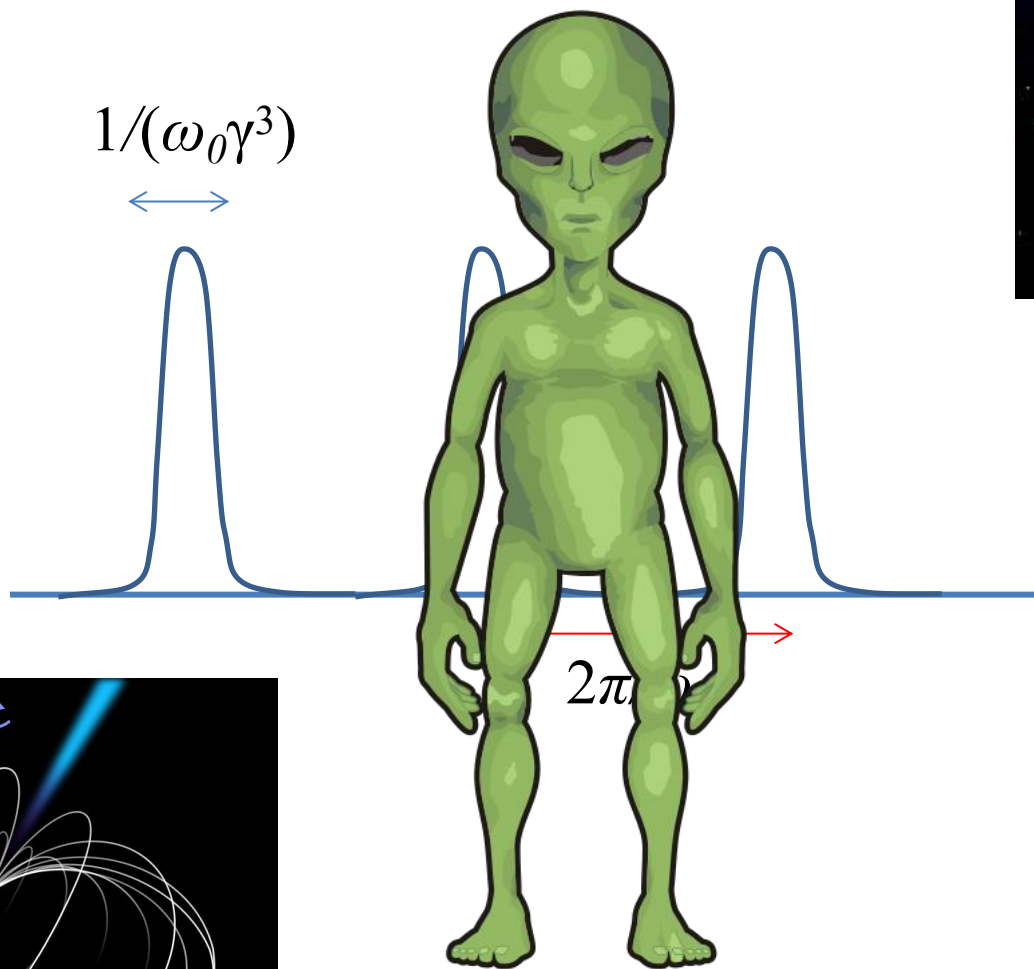


脉冲星转过角度 $\Delta\theta$ 的时间 $\Delta t' = 2\Delta\theta/\omega_0$

收到脉冲星辐射的持续时间 $dt = (dt/dt') dt'$, $\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_0^{\Delta t'} \frac{dt}{dt'} dt' = \int_0^{\Delta t'} \left(1 - \frac{v}{c} \cos(\Delta\theta - \omega_0 t') \right) dt' \\ &= \Delta t' - \frac{2v}{c\omega_0} \sin \frac{\omega_0 \Delta t'}{2} \approx \left(1 - \frac{v}{c} \right) \Delta t' \approx \frac{\Delta t'}{2\gamma^2} = \frac{\Delta\theta}{\omega_0 \gamma^2} = \frac{1}{\omega_0 \gamma^3} \approx \frac{\rho}{c\gamma^3} \end{aligned}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\omega_0 \gamma^3} \approx \frac{\rho}{c \gamma^3} \quad (78)$$



“小绿人”

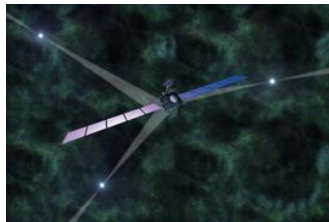
1967.8 Susan Jocelyn Bell Burnell

电动力学 第七章





中国于2016年11月发射首颗脉冲星
导航试验卫星（XPNAV—1）



“中国天眼” 500米口径球面射电望
远镜（FAST）



上海光源是一台高性能的中能第三代同步辐射光源，
它的英文全名为Shanghai Synchrotron Radiation
facility，简称SSRF。



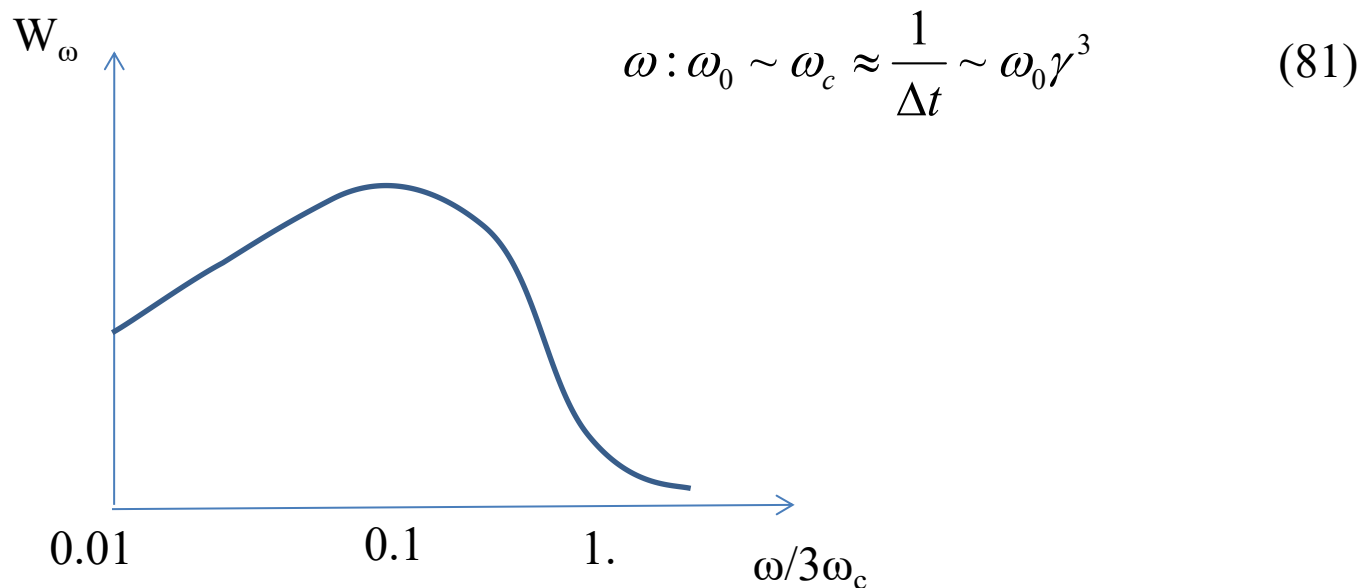
单位立体角内辐射能量

$$\frac{dW}{d\Omega} = \varepsilon_0 c R^2 \int_{-\infty}^{\infty} E^2 dt = 4\pi\varepsilon_0 c R^2 \int_0^{\infty} |E_{\omega}|^2 d\omega \equiv \int_0^{\infty} \frac{dW_{\omega}}{d\Omega} d\omega \quad (79)$$

单位频率间隔辐射能量

$$W_{\omega} = 4\pi\varepsilon_0 c R^2 \oint |E_{\omega}|^2 d\Omega \quad (80)$$

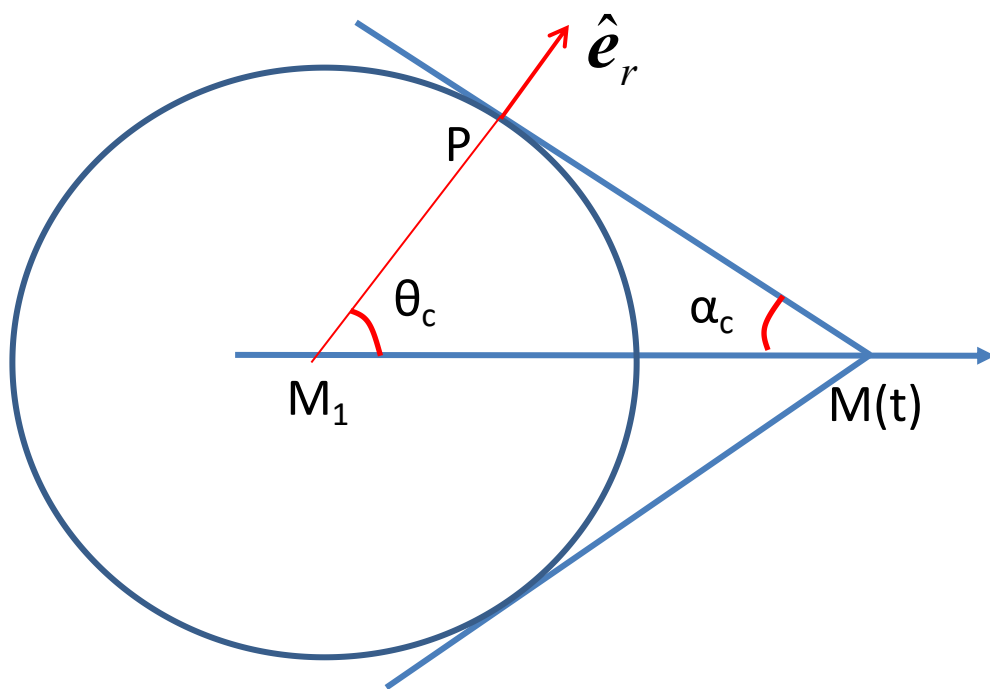
同步辐射: $E_e = 100\text{MeV}$, 轨道半径 $\rho = 0.4\text{m}$, $\omega_0 \sim 8 \times 10^8 \text{s}^{-1}$, $\gamma \sim 200$



§ 4 切连科夫辐射

真空中匀速运动电荷不产生电磁辐射.

但在介质中, 当电荷速度超过介质中的光速时, 匀速电荷感应的电流却可以辐射出电磁场, 称为切连科夫辐射.



介质折射率: n

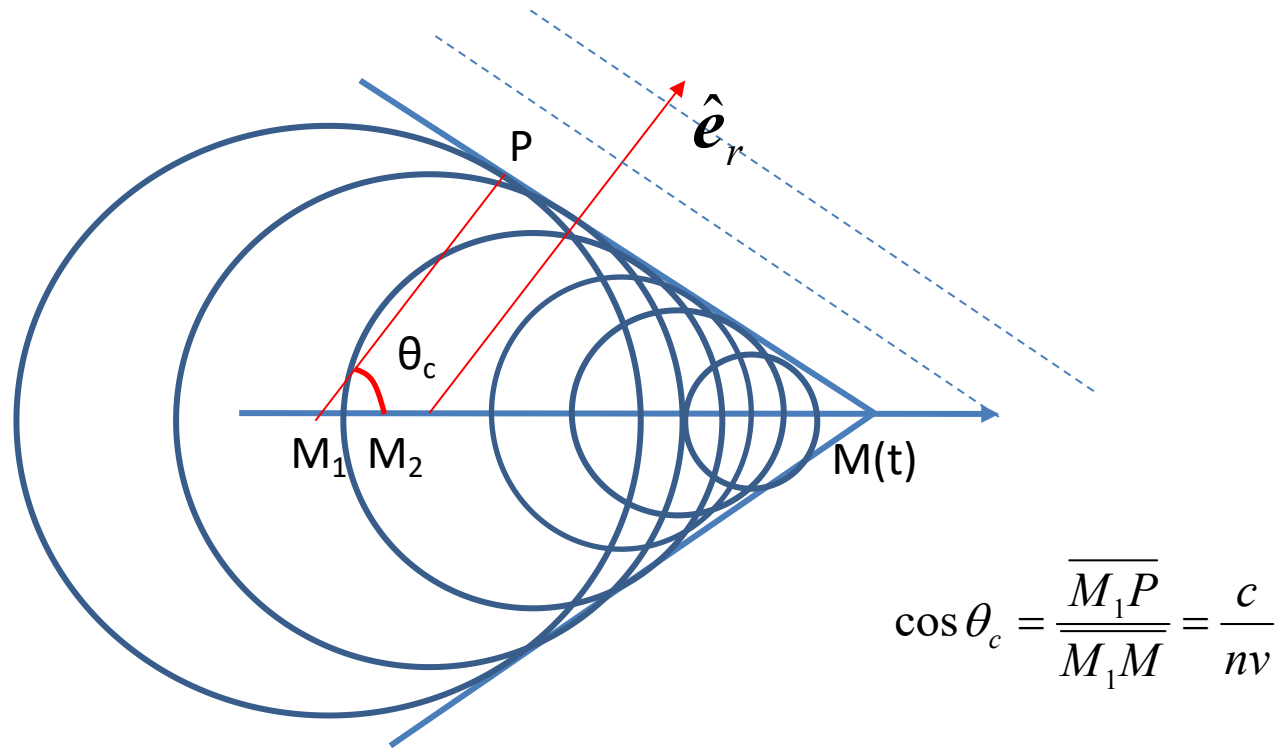
电荷速度: v

$$\overline{M_1P} = \frac{c}{n}t,$$

$$\overline{M_1M} = vt$$

$$\cos \theta_c = \frac{\overline{M_1P}}{\overline{M_1M}} = \frac{c}{nv}$$

α_c 与 t 无关.



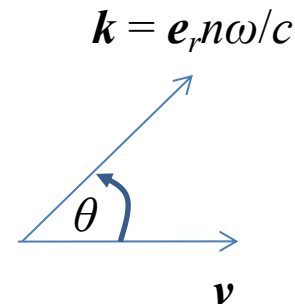
主要电磁场集中在锥面上，沿锥面法线方向传播.

设折射率 n 不依赖于 ω , $k=\omega n/c$

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{8\pi^2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t') e^{i\omega(t' - \frac{n}{c} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}_q)} dt'$$

由 $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{x}_q = x_q \cos \theta$, $\mathbf{v}(t') dt' = d\mathbf{x}_q$, $t' = x_q / v$

得磁场 $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega$



$$B_\omega = \frac{i\omega n q}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{e^{ikR}}{R} \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos \theta) x_q} dx_q$$

利用 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = \delta(k)$

辐射条件:

$$B_\omega = \frac{i\omega n q}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{e^{ikR}}{R} \sin \theta \delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos \theta\right)$$

$$v > \frac{c}{n}$$

$$\cos \theta_c = \frac{c}{nv}$$

实际有色散, 在 $\theta=\theta_c$ 发散修正为集中在 θ_c 附近的有限磁场

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{E} = \frac{c}{n} \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{c}{n\mu} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{e}}_r) \times \mathbf{B} = \frac{c}{n\mu} B^2,$$

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{4\pi\epsilon_0 c^3 R^2}{n} |B_\omega|^2$$

如何处理 δ^2 ? 设电荷从 $-L/2$ 运动到 $L/2$

$$\begin{aligned} \left| \delta \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos \theta \right) \right|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\omega(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos \theta) x_q} dx_q \right|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-L/2}^{L/2} dx'_q \left| \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\omega(\frac{1}{v} - \frac{n}{c} \cos \theta) x_q} dx_q \right| = \frac{L}{2\pi} \delta \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

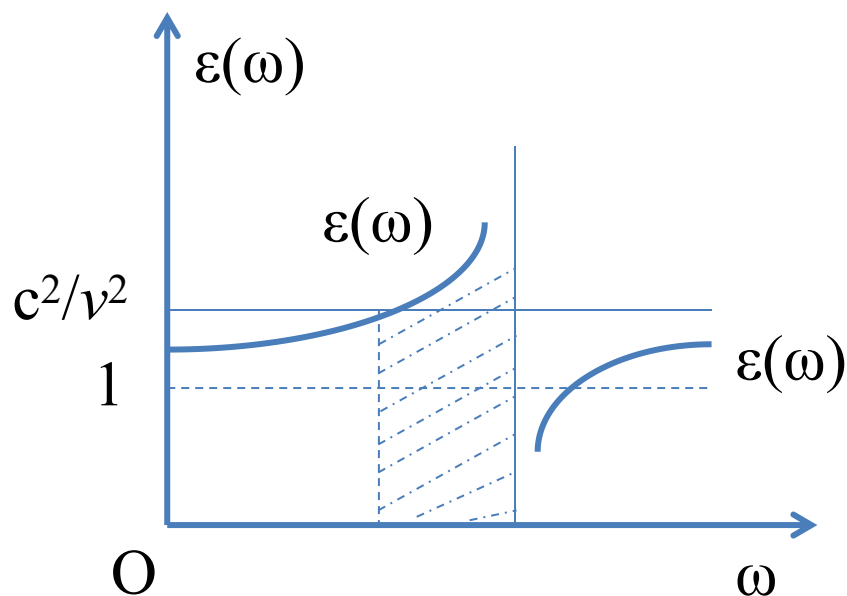
故

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2 \omega^2 n L}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \delta \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega n}{c} \cos \theta \right) = \frac{q^2 \omega L}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right) \delta \left(\frac{c}{nv} - \cos \theta \right)$$

单位路程单位频率的辐射能量为 ($v > c/n$)

$$\frac{dW_\omega}{dL} = \frac{q^2 \omega}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right) \int \delta\left(\frac{c}{nv} - \cos \theta\right) d\Omega = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right) \omega$$

典型的色散关系如图



$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{条件 } (v > c/n) \text{ 即}$$

$$\varepsilon(\omega) > \frac{c^2}{v^2}$$

故切连科夫辐射的频率区为图中阴影区

§ 5 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

1. 电磁质量

电子有多大？

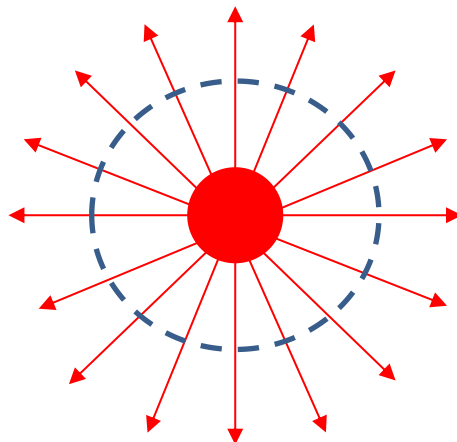
粒子静止

裸电荷



$$W_0 = m_0 c^2$$

与粒子内部结构和相互作用有关



q

$$\begin{aligned} W_q &= m_q c^2 \\ &= W_0 + \text{静电能?} \end{aligned}$$

涉及粒子的微观结构，宏观电动力学不适用。现在还无法测量基本粒子质量的空间分布。

静止电荷的电场不能使 q 加速！

故把静电能计入 W_q ，从而 m_q 分布在空间。

设电荷均匀分布在半径为 r_q 的球面上, 则带电球面的静电能为

$$W_E = \int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_q}$$

$$W_q = W_0 + W_E$$

相应地

$$m_q = m_0 + m_E, \quad m_E = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_q c^2}$$

对于基本粒子（如电子、 μ 子、 τ 子和夸克等），目前无法知道其电荷的空间分布，也没有办法区分 m_0 和 m_E . 带电基本粒子的固有质量就定义为 m_q ，即包括其自身相互作用能量和它的静电能。其实 m_0 和 m_E 都没法计算，他们和 m_q 也没法计算，但后者可测量。

对电子，记其质量测量值为 m_e ，则由下式定义其电磁半径 r_e

$$m_e c^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}$$

即

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} m$$

它是由基本物理常数 m_e ， $e^2/(4\pi\epsilon_0)$ 和 c 构成的一个长度量纲量，通常作为原子物理学的长度单位（费米量级），约为原子核的尺度。

惯性系 Σ ($v = 0$)

电荷静电能 W_E

电荷静电质量 m_E



惯性系 Σ' ($v \neq 0$)

自电磁能 $W_{EM} = \gamma(v)W_E$

自电磁质量 $m_{EM} = W_{EM}/c^2$

自电磁动量 $\mathbf{p}_{EM} = m_{EM}\mathbf{v}$

裸电荷动量 $\mathbf{p}_{0q} = \gamma(v)m_0\mathbf{v}$

电荷动量 $\mathbf{p}_q = \gamma(v)m_q\mathbf{v} = \gamma(v)(m_0 + m_{EM})\mathbf{v}$
 $= m\mathbf{v}$

有内部自由度的静止电荷系统也会有自磁能。统称这部分能量为自电磁能，记为 W_{EM} 。相应的惯性为自电磁质量，记为 m_{EM} 。

虽然我们不能给出基本粒子的自电磁能 W_{EM} ，但可以想象存在电磁质量 m_{EM} 。

2. 辐射阻尼

加速运动的带电粒子会辐射出电磁波。电磁波的能量不包含在匀速带电粒子的电磁能中。电磁波的动量也不应该算入带电粒子以一定速度运动时所具有的动量。此电磁波就像带电粒子抛出去的物质一样，反过来对带电粒子有作用力。

设粒子受到外力 \mathbf{F}_e ，电磁辐射反作用力记为 \mathbf{F}_s ，则

$$\frac{d}{dt}m\mathbf{v} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_s$$

$$m = \gamma m_q$$

其中 m_q 为粒子固有质量，包括其质心静止时所带的电磁能量。

从能量守恒求辐射反作用力 F_s

辐射功率为

$$P(t') = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{|\hat{\mathbf{e}}_r \times [(\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{c} \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}}]|^2}{(1 - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^5} d\Omega$$

低速情形（偶极辐射）

$$\begin{aligned} P(t') &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int |\hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \dot{\mathbf{v}})|^2 d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int |(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \dot{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{e}}_r - \dot{\mathbf{v}}|^2 d\Omega \\ &= \frac{q^2 \dot{v}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \cos \theta$$

裸粒子加速后，其所带的（非辐射）自电磁能 W_{EM} 会发生变化，自场和辐射场的相互作用能 W_{int} 也会变化。

能量守恒定律：

$$\frac{d\mathbf{p}_q}{dt'} = -\frac{dW_{\text{ext}}}{dt'} - \frac{d(W_{\text{rad}} + W_{\text{int}})}{dt'}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}_q}{dt'} = -\frac{dW_{\text{ext}}}{dt'} - \frac{dW_{\text{int}}}{dt'} - P(t')$$

辐射反作用力功率+辐射功率=自电磁能和自场能减少率+辐射场相互作用能减少率

$$\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v} + \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = -\frac{d}{dt'} W_{\text{int}}$$

$$\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v} = -\frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} - \frac{d}{dt'} W_{\text{int}}$$

宏观电动力学最多只能描写对微观空间和时间尺度平均后的现象。在量子电动力学中电荷系统量子态跃迁并辐射出光量子，在微观时间内能量（严格来说无定义）无需守恒。

准周期运动

$$\oint \frac{dW_{\text{int}}}{dt'} dt' \approx 0$$

因此在周期T内，

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v} dt' = - \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} dt' = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt'$$

注意到速度和加速度是两个独立矢量，上式对任意 \mathbf{v} 成立，故对准周期运动的带电粒子，在周期平均意义下，辐射反作用力为

$$\mathbf{F}_s = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

3. 谱线的自然宽度

例：谐振子模型



$$m\ddot{x} = -kx + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{x} \quad \text{即} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = a\ddot{x}$$

$$\text{其中} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad a \equiv \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

设 $a\ddot{x}$ 相较 $\omega_0^2 x$ 为小量，零级近似下 $x = x_0 e^{-i\omega_0 t}$

自洽条件 $a\omega_0 \ll 1$ 把 x 写成 $x = f(t)e^{-i\omega t}$.

$$\ddot{x} = \left(\ddot{f} - 3i\omega\dot{f} - 3\dot{f}\omega^2 + if\omega^3 \right) e^{-i\omega t} \approx -i\omega^3 x$$

$$\text{自洽条件} \quad \left| \frac{d^n f}{\omega^n dt^n} \right| \ll |f|$$

代入运动方程 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a\ddot{x}$ 得

$$\omega^2 + ia\omega^3 - \omega_0^2 = 0$$

代以 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, 分别比较实部和虚部的领头项,

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 - 3a\omega_1^2\omega_2 + a\omega_2^3 - \omega_0^2 = 0$$

$$2\omega_1\omega_2 + a\omega_1^3 - 3a\omega_1\omega_2^2 = 0$$

注意 $\omega_1 \sim \omega_0$ 和 $\omega_2 \sim a(\omega_0)^2$

$$a\omega_0 \ll 1$$

保留领头项得

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} a \omega_0^2 = \frac{1}{2} \gamma. \quad \text{其中} \quad \gamma \equiv \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

因此当 $\gamma \ll \omega_0$ 解为阻尼振子:

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$$

另一方法：由零级近似看出， $a\ddot{x} \approx -a\omega_0^2 x \equiv -\gamma\dot{x}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{阻尼振子方程，解同上}$$

条件 $\gamma \ll \omega_0$ 可写成

$$r_e \omega_0 / c \ll 1 \quad \text{或} \quad r_e \ll \lambda / 2\pi$$

因为 $r_e = 2.82 \times 10^{-15} m$

而原子辐射X光波长 $\lambda \sim 10^{-10} m$

可见光波长 $\lambda \sim 10^{-7} m$

所以 $r_e \ll \lambda / 2\pi$ 对原子辐射是一个好近似。

振子能量 $\sim x^2$.

寿命定义为其能量衰减1/e倍的时间，

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

设原子在 $t=0$ 时刻开始辐射电磁波

则在远处观察到的辐射电场为

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

傅里叶变换得频谱

$$E_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi i} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}}$$

单位频率间隔的辐射能量正比于 $|E_\omega|^2$ ，因此

$$W_\omega = A \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

总辐射能量为

$$W = \int W_{\omega} d\omega$$

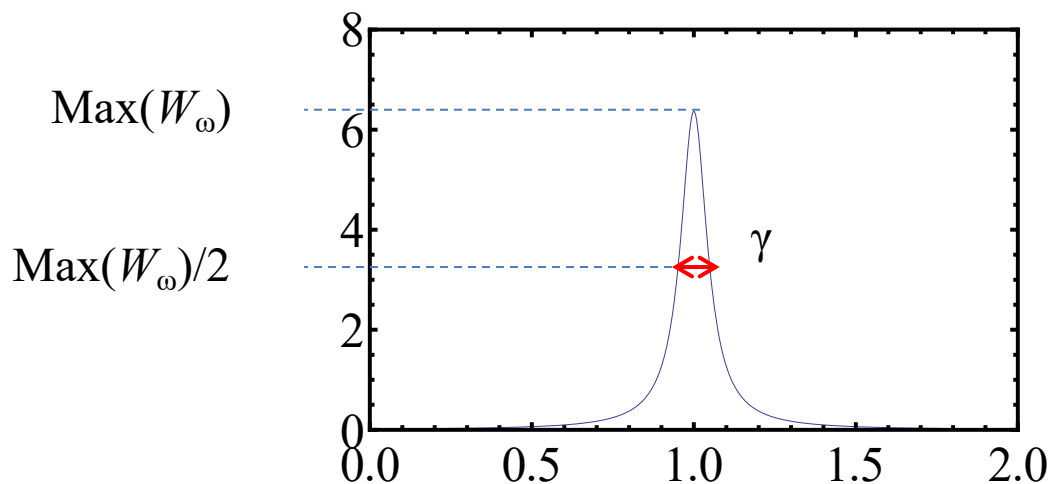
由
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \frac{d\omega}{2\pi} = 1 \quad \text{得}$$

$$W_{\omega} = \frac{W}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

γ : 谱线宽度

洛仑兹线型

寿命: $\tau = \frac{1}{\gamma}$



$$\omega_0 = 1.$$

$$\gamma = 0.1$$

$$W = 1$$

用波长表示

$$\Delta\lambda = \left| \Delta \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right) \right| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \gamma$$

$$\text{取 } \gamma \equiv \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad \text{得} \quad \Delta\lambda = \frac{e^2}{3\epsilon_0 mc^2} \approx 1.2 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

实际上波长宽度与原子有很大的关系。经典结果定量上不准确，原子辐射特性的定量计算需要用量子电动力学。

按照经典理论，处于基态的原子由于电磁辐射也会损失能量，最后半径趋于零。这个结果定性上也是不对的。

普朗克零点能

普朗克早期认为原子可以看作一些谐振子，其能量可取连续值，但原子只能以能量量子 $h\nu$ 的整数倍与光交换能量（辐射和吸收光）。

设原子能量初始具有能量 $W=w+nh\nu$, $0<w<h\nu$

当这个原子把可以辐射的能量全部辐射后，就剩下能量 w . 经典物理上没有什么原因制定 w 值，于是普朗克猜想

$$w_0 = \frac{1}{2} h \nu$$

§ 6 电磁波的散射和吸收，介质的色散

电磁波散射经典图像：在外来电磁波作用下电荷获得加速，从而辐射出另一电磁波。电磁波吸收则是电磁波的能量转化为电荷系统的内部能量。

1. 自由电子对电磁波的散射

考虑低速情形。在电磁波一个振动周期内电子运动的距离远小于电磁波的波长，故可以认为电场不依赖于电子的位置。又因为磁力与电力之比 $\sim v/c \ll 1$ ，因此可以忽略磁力。

设 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ 电子运动方程:

$$\ddot{\mathbf{x}} - a\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

左边第二项为辐射阻尼力，右边是周期策动力。阻尼振子的稳态振荡频率与策动频率一样，因此对稳态振荡有

$$a\ddot{\mathbf{x}} = -a\omega^2 \dot{\mathbf{x}}$$

电子运动方程写成: $\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ 其中 $\gamma \equiv \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$

设 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$, 代入运动方程解出

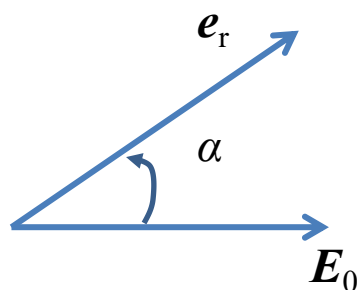
$$\mathbf{x}_0 = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega^2 + i\omega\gamma)}$$

在条件 $r_e \ll \lambda / 2\pi$ 下可忽略阻尼力,

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \quad \mathbf{x} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}$$

电子振动时辐射的电场

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \ddot{\mathbf{x}})$$



$$E = \frac{e\ddot{x}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \alpha = \frac{e^2 E_0}{4\pi\epsilon_0 m c^2 r} \sin \alpha$$

平均散射能流密度

$$\bar{S} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2 r^2} \sin^2 \alpha = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2 \alpha$$

入射流强 $I_0 = \bar{S}_0 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$

因而 $\bar{S} = \frac{r_e^2}{r^2} I_0 \sin^2 \alpha$

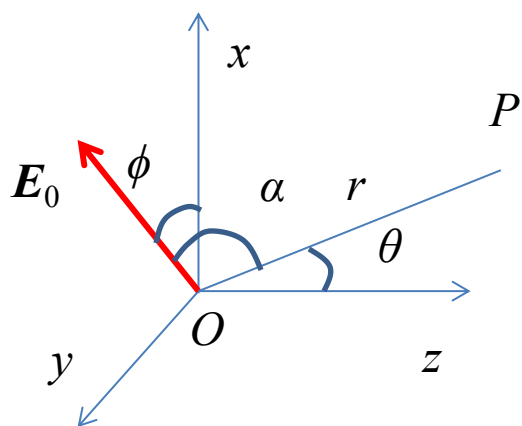
辐射功率的汤姆孙 (Thomson) 散射公式

$$P = \oint \bar{S} r^2 d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0$$

汤姆孙散射截面

$$\sigma = \frac{P}{I_0} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

角分布： 设入射波沿z轴传播，P在xz平面



$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \phi$$

设入射波为非偏振波。对 ϕ 求平均

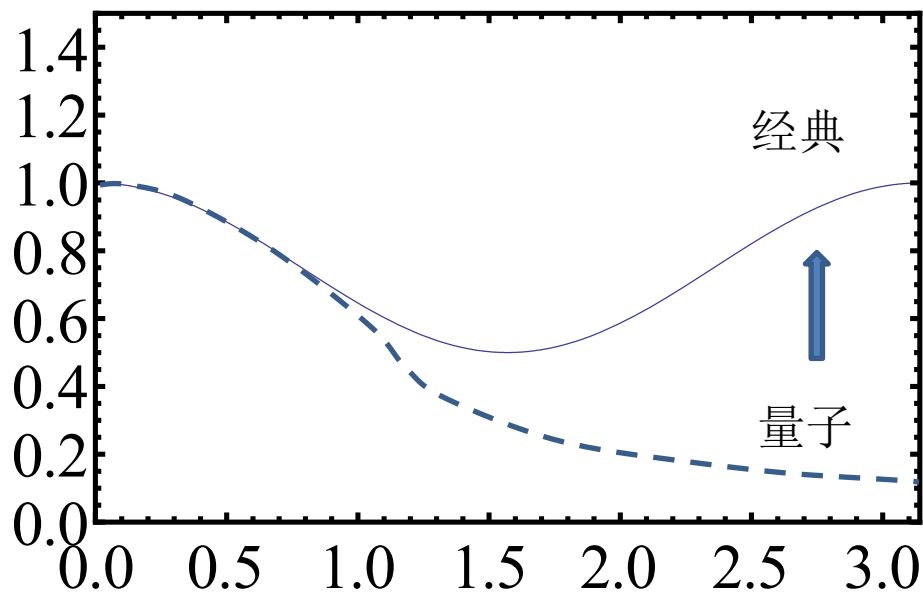
$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{r_e^2}{r^2} I_0 \langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{r_e^2}{r^2} I_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) d\phi$$

结果：平均散射能流密度

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{r_e^2}{r^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) I_0$$

微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$



$\hbar\omega \ll mc^2$

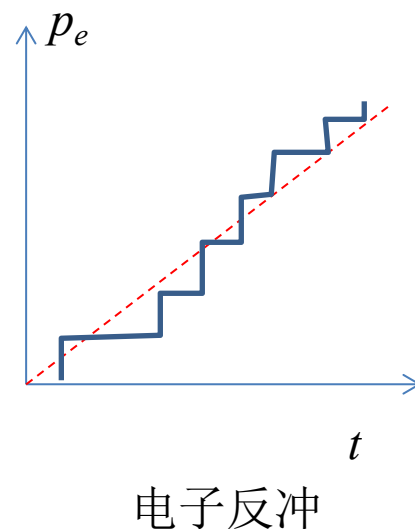
根据经典的图像，在散射过程中光动量连续地转移给电子，电子速度是变化的。在电子静止惯性系电子发射和吸收的光频率相同。当电子有动量 \bar{p}_e 和能量 \bar{w}_e 时，考虑多普勒效应，辐射波长会发生变化。设电子沿入射波方向运动，

$$\Delta\lambda = 2\lambda \frac{\bar{p}_e c}{\bar{w} - \bar{p}_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

康普顿-吴有训效应（1922-1923）：

$$\Delta\lambda = 2\lambda \frac{(p_e + \hbar k)c}{w - p_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

其中 p_e 和 w 是碰撞前的电子动量和能量. 吴有训先生参加了这个实验.



2. 束缚电子的散射

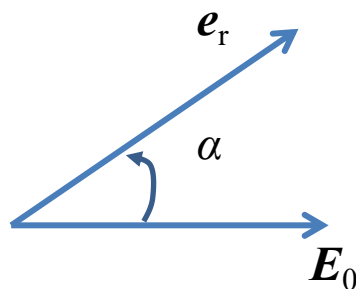
谐振子模型

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

稳态解

$$\mathbf{x} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} = \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \delta)}$$

其中 $\tan \delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$



辐射电场

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\hat{\mathbf{e}}_r \times \ddot{\mathbf{x}})$$

$$E = \frac{e\ddot{x}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \alpha$$

平均散射能流

$$\bar{S} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 m^2 r^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \sin^2 \alpha$$

散射功率

$$P = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} I_0$$

散射截面

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

(1) $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

(2) $\omega \gg \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

(3) $\omega \sim \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\gamma} \right)^2$$

共振散射

3. 电磁波的吸收

对具有连续谱的入射电磁波，频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 之间的入射流强(平均能流)为.

$$I_0(\omega)d\omega = \bar{S}_0(\omega)d\omega$$

能量吸收和再发射主要发生在共振区： $\omega \sim \omega_0$. 单位时间内辐射总能量

$$\begin{aligned} W &= \int P d\omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \int \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} I_0(\omega) d\omega \\ &\approx \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0(\omega_0) \int \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\omega \approx 2\pi_2 r_e c I_0(\omega_0) \end{aligned}$$

上式也等于电子从电磁波吸收的总能量

电子吸收和辐射实际上伴随着电子在两个能级间的跃迁，

$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar} \Delta E$$

4. 介质色散

宏观介质模型归结为极化强度 \mathbf{P} 和磁化强度 \mathbf{M} .

设单位介质中有 N 分子, 每个分子有一个束缚电荷 e 以固有频率 ω_0 振动。在稀薄气体近似下, 忽略分子之间的相互作用, 可以认为作用在电荷上的电场等于外电场 \mathbf{E} 。

设: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\mathbf{x} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

极化强度

$$\mathbf{P} = N e \mathbf{x} = \frac{N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}$$

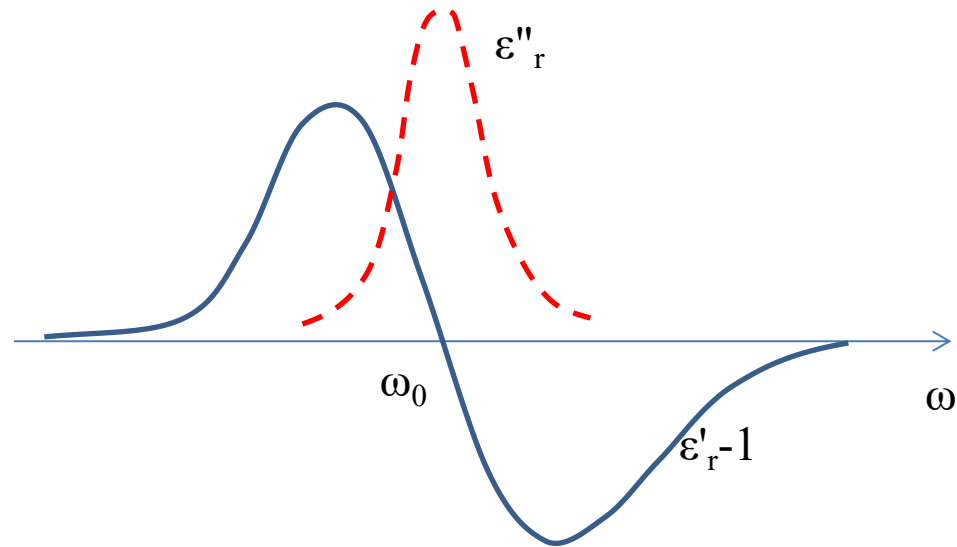
电容率

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{N e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

相对电容率的实部和虚部

$$\varepsilon'_r = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\varepsilon''_r = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$



复折射率

$$n + i\eta = \sqrt{\varepsilon'_r + i\varepsilon''_r}$$

多个共振频率的情形

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_i \frac{Ne^2}{m} \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}$$

其中 f_i 是频率 ω_i 的配分数:

$$\sum_i f_i = 1$$

量子力学可以得到类似形式的公式，其中 f_i 与两个相关量子态之间的跃迁矩阵元有关，没有相加等于1的性质。

5. 原子光陷阱

应用：光镊，冷原子阱（BEC）

具有频率 ω 的激光诱导的原子电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \equiv \alpha(\omega) \mathbf{E}$$

其中 ω_0 是原子一个与 ω 接近的特征频率。

原子在激光作用下增加的能量为

$$U(\mathbf{x}) = -\overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}} = -\alpha(\omega) \overline{E^2(\mathbf{x})}$$

上横线表示在一个周期内平均。

原子受到的光场的梯度力（偶极力）为

$$F = -\nabla U(\mathbf{x}) = \alpha(\omega) \nabla \overline{E^2(\mathbf{x})}$$

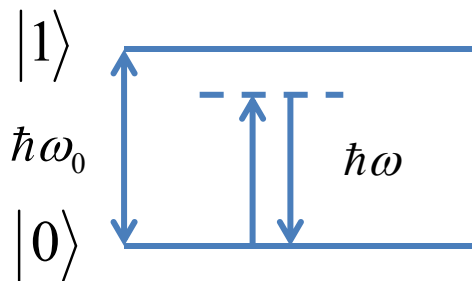
通常选 ω 接近 ω_0 ，以使得偶极力比较显著。但又不能让 ω 太过接近 ω_0 ，否则原子发射强烈的共振跃迁，不能确定在某一能级。此时，

$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2}{2m\omega_0} \frac{1}{\delta}$$

其中 $\delta = \omega - \omega_0$ 称为失谐(detuning)。

$\delta > 0$ ， F 驱原子向弱场处； $\delta < 0$ ， F 驱原子向强场处

量子图像



虚过程

从而

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sim \frac{1}{2}m\omega_0^2|\langle 1|x|0\rangle|^2$$

$$m\omega_0 \sim \frac{\hbar}{|\langle 1|x|0\rangle|^2}$$

$$\Rightarrow \alpha(\omega) = -\frac{e^2}{2\hbar\delta}|\langle 1|x|0\rangle|^2$$

——正确的量子公式

$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2}{2m\omega_0}\frac{1}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \text{量子对应}$$

谐振子平均势能: $\bar{V} = \frac{1}{2}m\omega_0^2\overline{x^2}$

经典量

量子量

$$\bar{V}$$

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

$$\overline{x^2}$$

$$|\langle 1|x|0\rangle|^2$$

第七章 补充

6.5 原子光陷阱

(1) 光镊

1. Crick, F. H. C.; Hughes, A. F. W., The physical properties of cytoplasm. *Experimental Cell Research* **1950**, (1), 37–80.
2. Ashkin, A., Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure. *Phys. Rev. Lett.* 24, 156–159 (1970).
3. Ashkin, A.; Dziedzic, J. M.; Bjorkholm, J. E.; Chu, S., Observation of a Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles. *Optics Letters* **1986**, 11, (5), 288–290.

在典型光镊装置中，功率10-1000mW激光对1 mm直径聚苯乙烯小球施加的力相当于刚性系数 10^{-6} –0.1 pN/nm的弹簧.

Table 1. Comparison of force spectroscopy techniques.

	Magnetic Tweezers	Optical Tweezers	Electrophoresis	AFM	Micropipette	Fluid Flow
Type	Global/ Point	Point	Global	Point	Point	Global
	Non- Contact	Non- Contact	Non-Contact	Contact	Contact	Non- Contact
Force Range (pN)	0.1–200	0.1–200	0.01–50	10– 100000	1–1000	0.1–1000
3D Trap	Yes	Yes	No	Yes	Yes	No
Stiffness (pN nm ⁻¹)	10 ⁻⁶ – 0.1	10 ⁻⁶ – 0.1	-	10–10000	0.01–1000	-
Energy Dissipation	No	Yes	Yes	No	No	No
Surface Considerations	No	No	No	Yes	Yes	No
Low Cost	Yes	Yes	Yes	No	Yes	Yes
Parallel	Yes	Yes	Yes	No	No	Yes
Access inside a cell	Yes	Yes	Yes	No	No	No
Self-assembly	Yes	No	Yes	No	No	No

(2) 光镊超控生物大分子

Life at low Reynolds number, E.M. Purcell (Am. J. of Phys. 45, 3 (1977))

雷诺数

$$R = \frac{aV\rho}{\eta}$$

V velocity

a the linear dimension

ρ density of the fluid

η viscosity of the fluid

Let $a = 10^{-6}\text{cm}$ (the diameter).

For water, $R < 1$ when $V < 10^4 \text{ cm/s}$

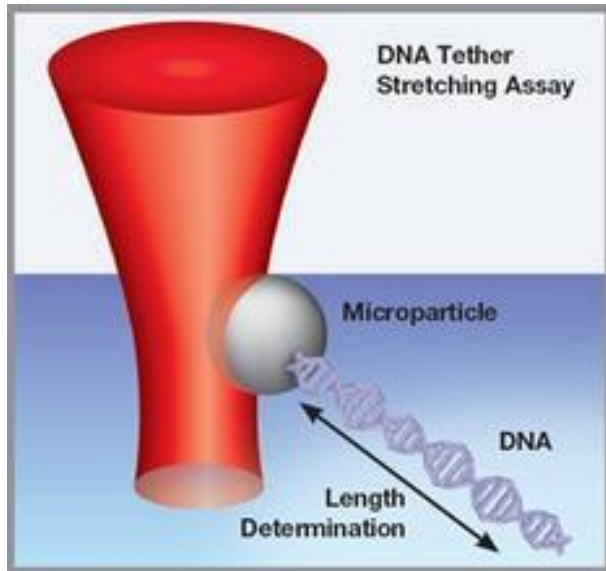
When R is small the viscous forces dominate.

$$F = \frac{\eta^2}{\rho} \sim 10^{-9} N$$

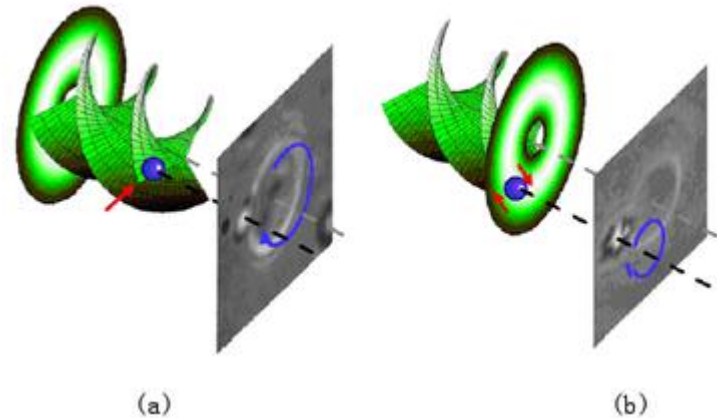
That is a force that will tow anything, large or small, with Reynolds number of order of magnitude 1. 这个力足以在液体中移动雷诺数小于1的任何物体.

How to move microparticles ?

Optical Tweezers 光镊



具有轨道角动量的光能够转动微粒



(3) 梯度力原理

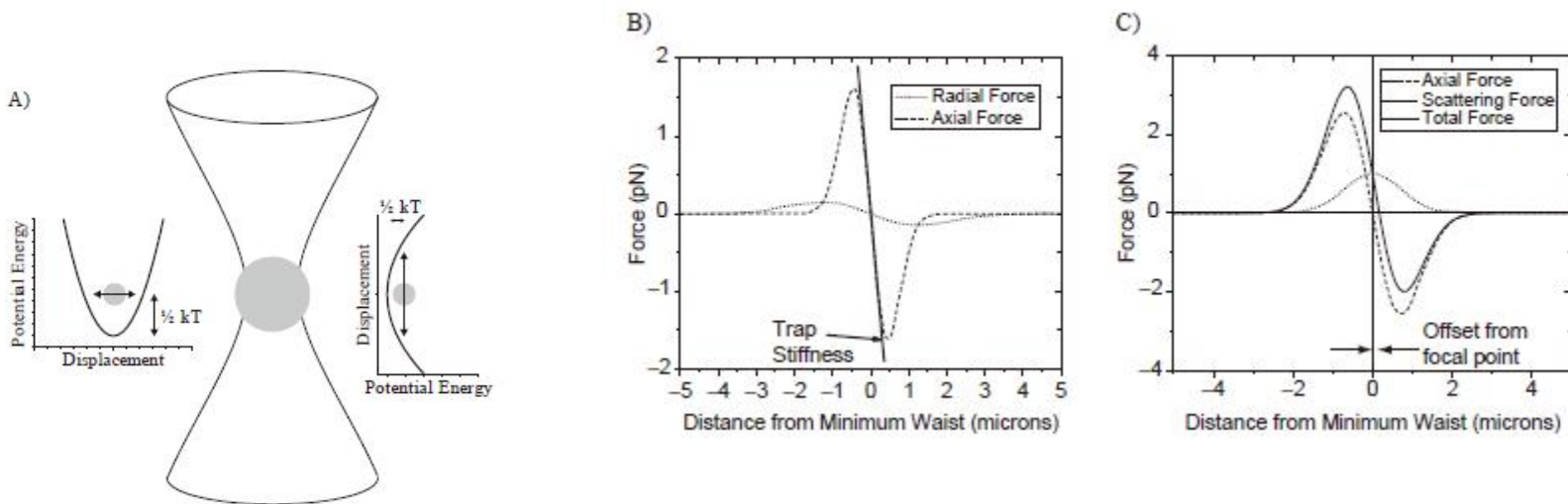
具有频率 ω 的激光诱导的原子电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \equiv \alpha(\omega) \mathbf{E}$$

其中 ω_0 是原子一个与 ω 接近的特征频率。

原子在激光作用下增加的能量为(上横线表示在一个周期内平均)

$$U(\mathbf{x}) = -\overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}} = -\alpha(\omega) \overline{E^2(\mathbf{x})}$$



原子受到的光场的梯度力（偶极力）为

$$F = -\nabla U(\mathbf{x}) = \alpha(\omega) \nabla \overline{E^2(\mathbf{x})}$$

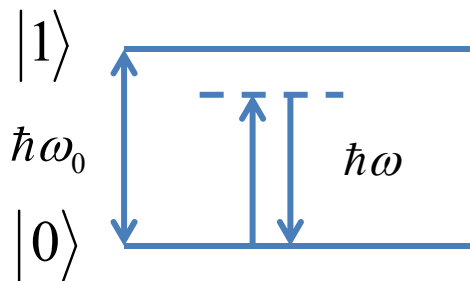
通常选 ω 接近 ω_0 ，以使得偶极力比较显著。但又不能让 ω 太过接近 ω_0 ，否则原子发射强烈的共振跃迁，不能确定在某一能级。此时，

$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2}{2m\omega_0} \frac{1}{\delta}$$

其中 $\delta = \omega - \omega_0$ 称为失谐(detuning)。

$\delta > 0$, F 驱原子向弱场处; $\delta < 0$, F 驱原子向强场处

量子图像



虚过程

从而

$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2}{2m\omega_0} \frac{1}{\delta}$$



量子对应?

经典量

量子量

$$E = m\omega_0^2 \overline{x^2}$$



$$\hbar\omega_0$$

$$\overline{x^2}$$



$$|\langle 1|x|0\rangle|^2$$

$$m\omega_0 \sim \frac{\hbar}{|\langle 1|x|0\rangle|^2}$$



$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2}{2\hbar\delta} |\langle 1|x|0\rangle|^2$$

——正确的量子公式

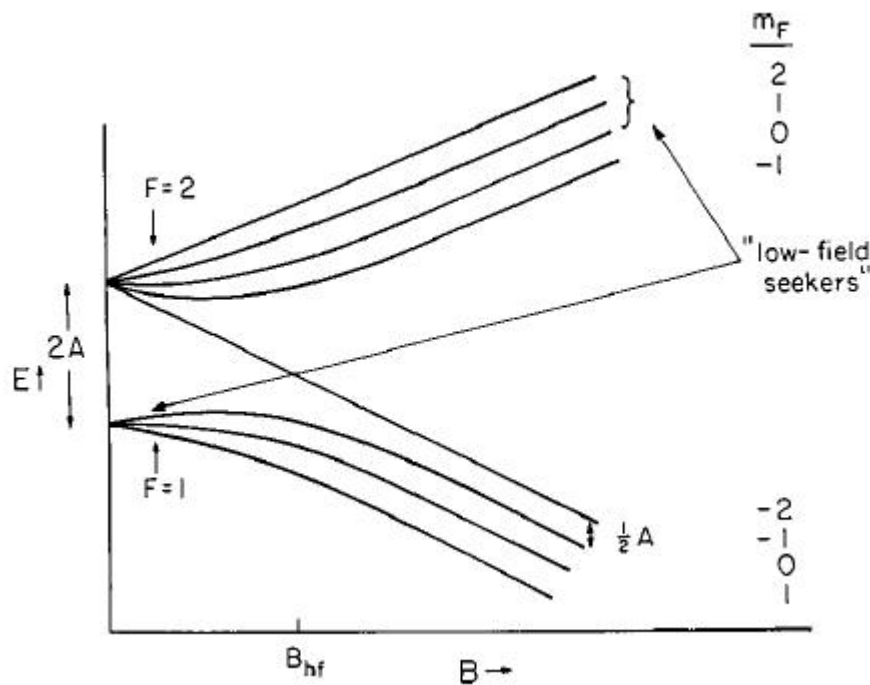
(4) 原子阱

^{23}Na 或 ^{87}Rb

电子自旋 $s=1/2$ ；核自旋 $I=3/2$

原子总自旋 $F=1, 2$

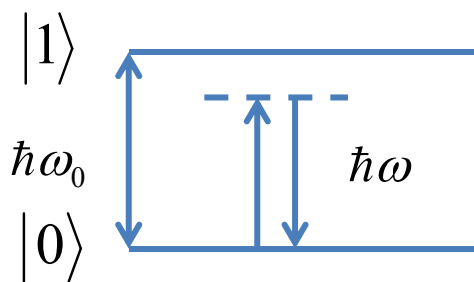
赛曼(Zeeman)能



6.7 激光冷却

(1) 中性原子的冷却

二能级原子气为例



密度矩阵:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix}$$

ρ_{11} 、 ρ_{00} 分别为1态和0态的占据率

ρ_{10} 、 ρ_{01} 分别正比于 $1 \rightarrow 0$ 和 $0 \rightarrow 1$ 的跃迁振幅

$$\rho_{11} + \rho_{00} = 1$$

$$\delta = \omega - \omega_0$$

运动方程（原子静止系）：

$$\dot{\rho}_{10} = -(i\delta + \frac{1}{2}\gamma)\rho_{10} + i\Omega_R\rho_{11} - \frac{i}{2}\Omega_R$$

$$\dot{\rho}_{11} = -\gamma\rho_{11} + \frac{i}{2}\Omega_R(\rho_{10} - \rho_{01})$$

$$\dot{\rho}_{01} = (i\delta - \frac{1}{2}\gamma)\rho_{01} - i\Omega_R\rho_{11} + \frac{i}{2}\Omega_R$$

稳态解

$$\rho_{11} = \frac{\Omega_R^2}{4\delta^2 + \gamma^2 + 2\Omega_R^2}$$

拉比(Rabi)频率:

$$\Omega_R = \frac{e|\langle 1|\mathbf{r}|0\rangle|E_0}{\hbar}$$

光吸收率 $r = \gamma \rho_{11}$

每吸收一个光子获得动量 $\hbar k$

设原子随后通过自发辐射放出光子，辐射的光子动量方向完全不确定，所以平均放出动量为零. 从而原子受力为

$$F = r\hbar k = \hbar k \gamma \frac{\Omega_R^2}{4\delta^2 + \gamma^2 + 2\Omega_R^2}$$

方向沿激光传播方向.

当原子沿光束以速度 v 运动时，需要考虑多普勒效应.

$$F = r\hbar k = \hbar k \gamma \frac{\Omega_R^2}{4(\delta \mp kv)^2 + \gamma^2 + 2\Omega_R^2}$$

负号和正号分别对应原子运动与激光传播方向相反和相同.

在非共振区可忽略分母中的 Ω_R ，近似到 v 的一阶项，

$$F = F_o \pm \beta m v$$

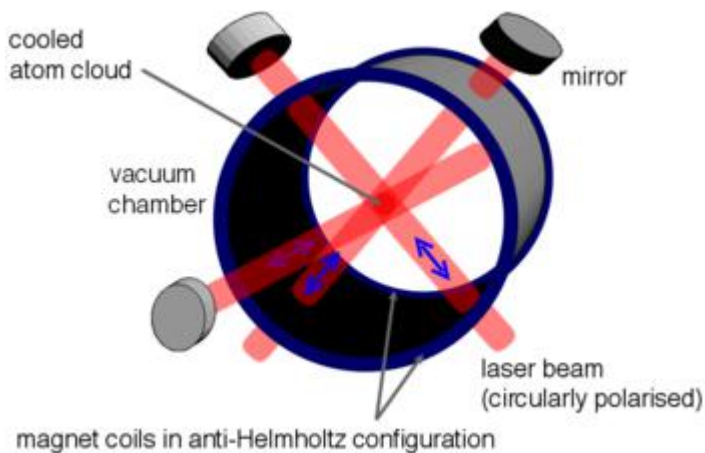
在驻波中，原子如同受到相反方向的两个激光波的作用，

$$F = -2\beta m v$$

这个力像摩擦力一样使原子冷却——激光冷却.

磁光阱 (MOT) 激光冷却

$T=1/10,000\text{K}$



Claude Cohen-Tannoudji, ENS



Steven Chu

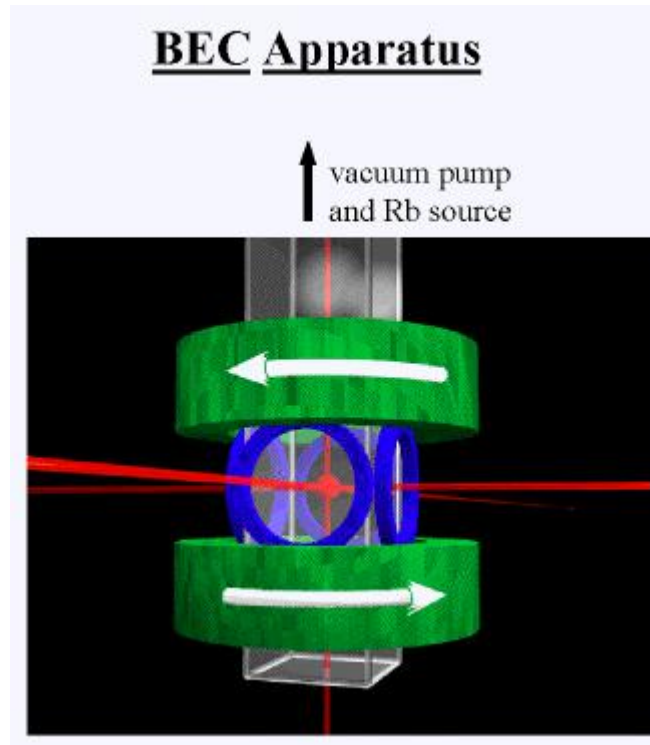


W. D. Phillips, Pennsylvania

6.8 玻色-爱因斯坦凝聚

气化冷却

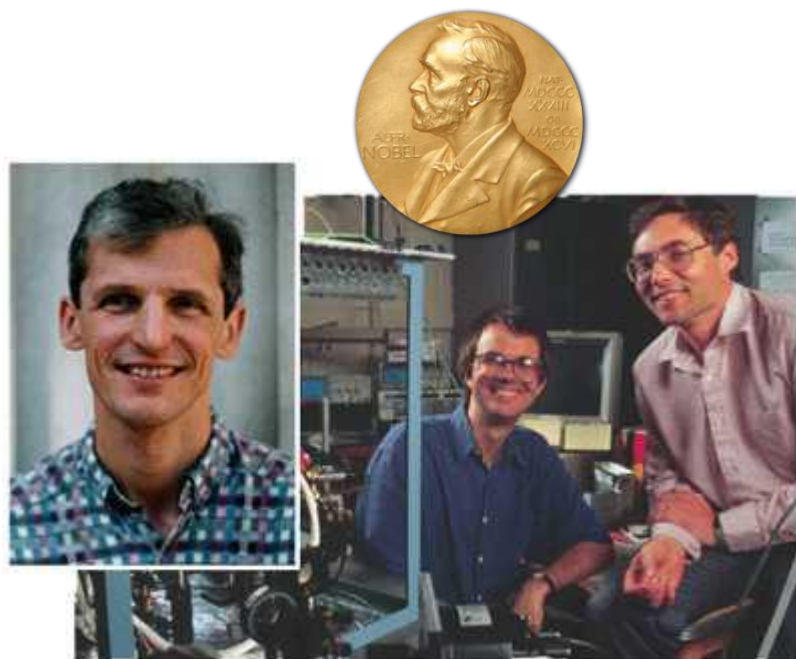
$T < 1/10,000,000\text{K}$



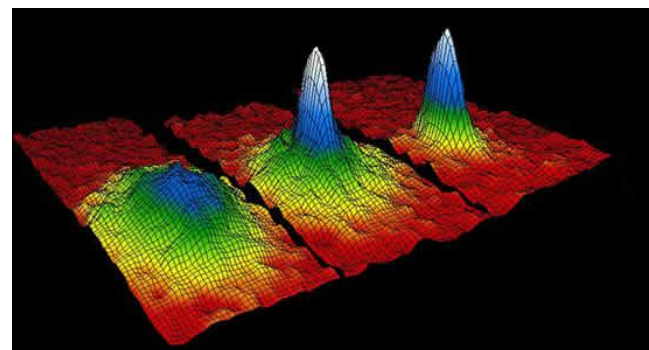
JILA
(Cornell, Wieman)

1995年分别实现了铷原子和钠原子的BEC

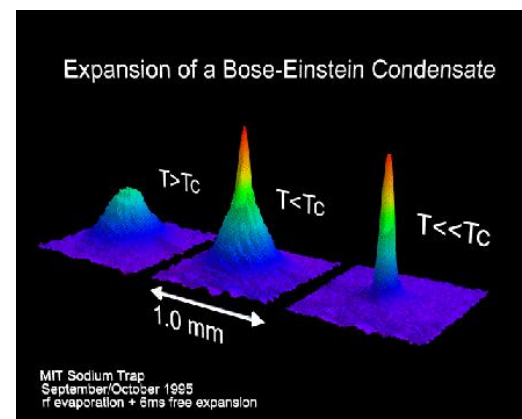
经过70年的努力，1995年，BEC首先被卡罗拉多大学的Cornell, Wieman实现。几乎同时，麻省理工的Ketterle也实现了BEC。



Cornell&Wieman



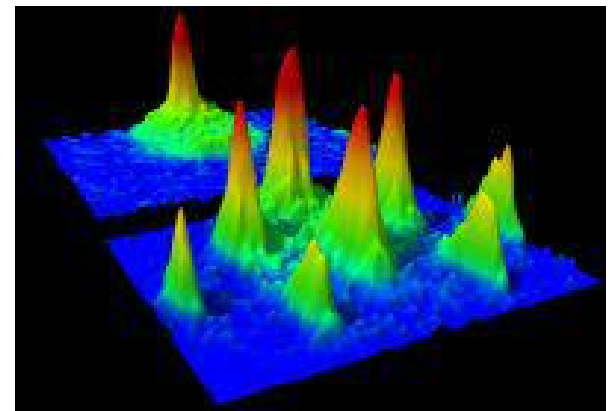
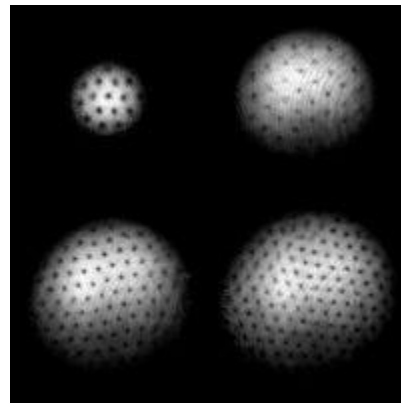
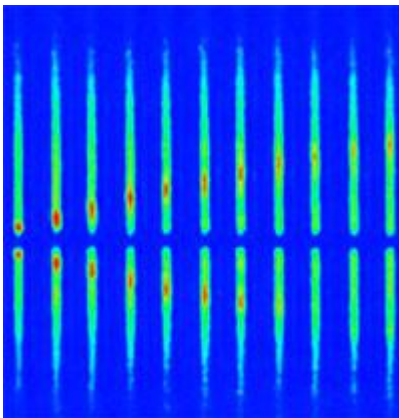
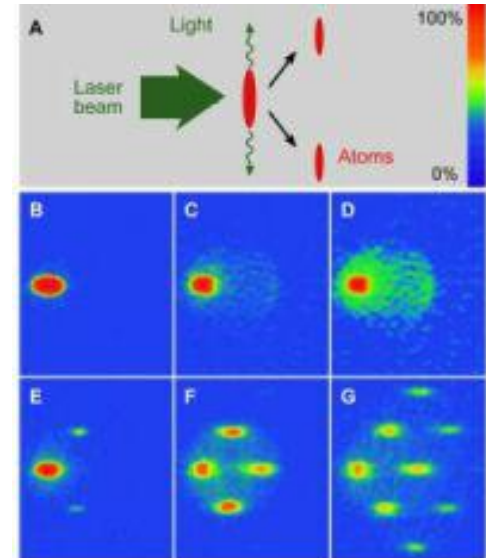
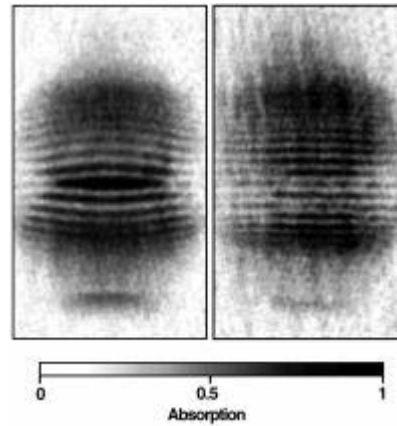
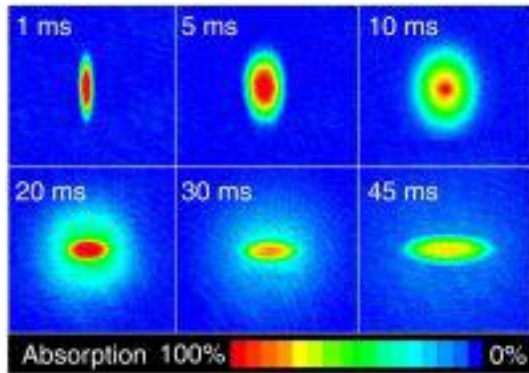
Ketterle



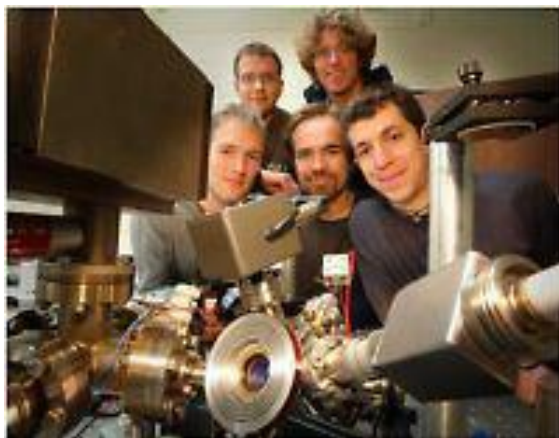
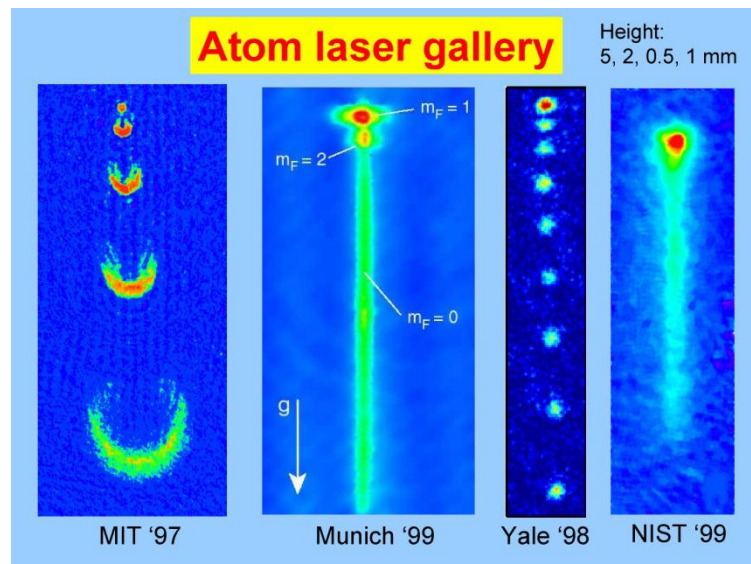
Ketterle; Cornell, Wieman
www.bec.nist.gov/Pubs/bec/

MIT 小组

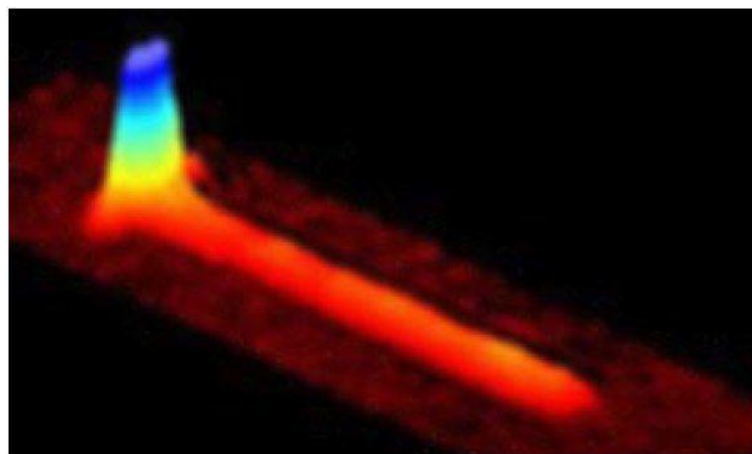
http://cua.mit.edu/ketterle_group/Nice_pics.htm



原子激光

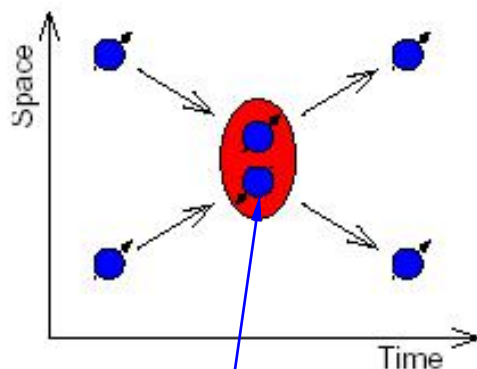
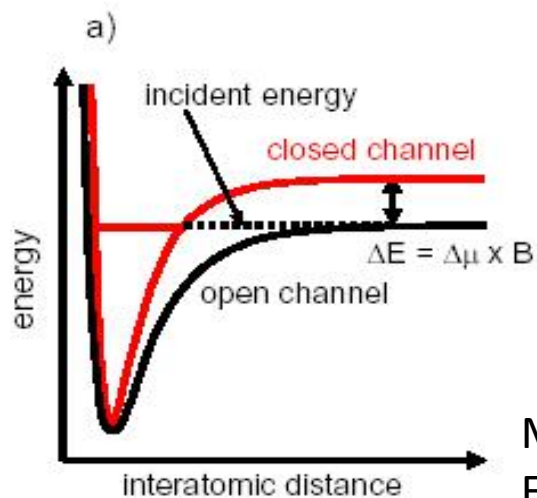


澳大利亚国立大学组

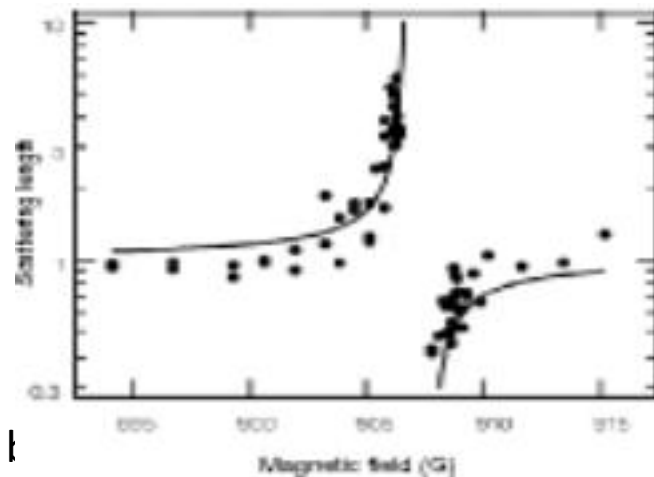


Feshbach resonance

- 磁场因此的共振现象
- 两散射原子的总能量= 准束缚分子 (Feshbach boson)的能量



Metal-stable molecule formed
Feshbach resonance



在低能原子气中以s-波散射为主. 通过Feshbach共振可以从负无穷到正无穷之间调节散射长度, 产生丰富的人工多体系统.

6.9 原子钟

传统的“钟”

手表（机械、石英）

摆钟

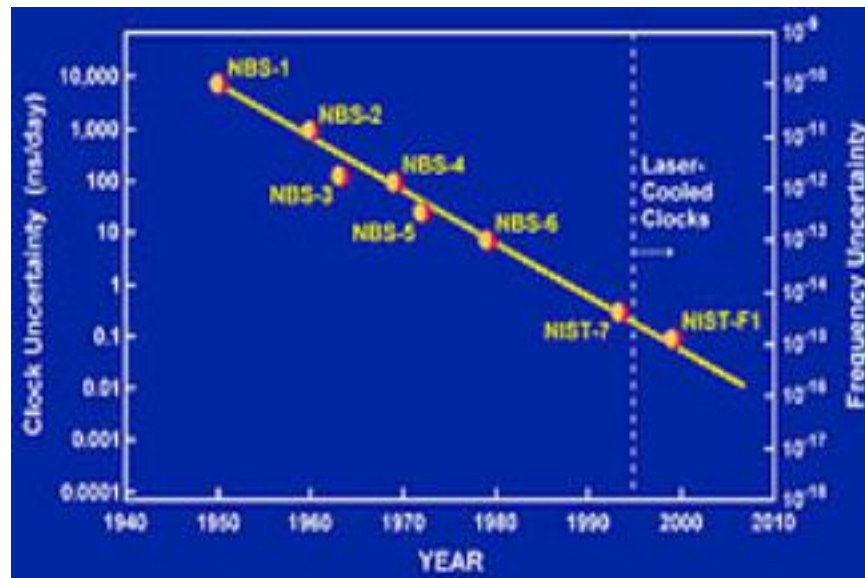
太阳（或行星轨道）

.....

1960, 相对精度 10^{-10}

2000, 相对精度 10^{-15}

差不多每10年提高一个数量级！

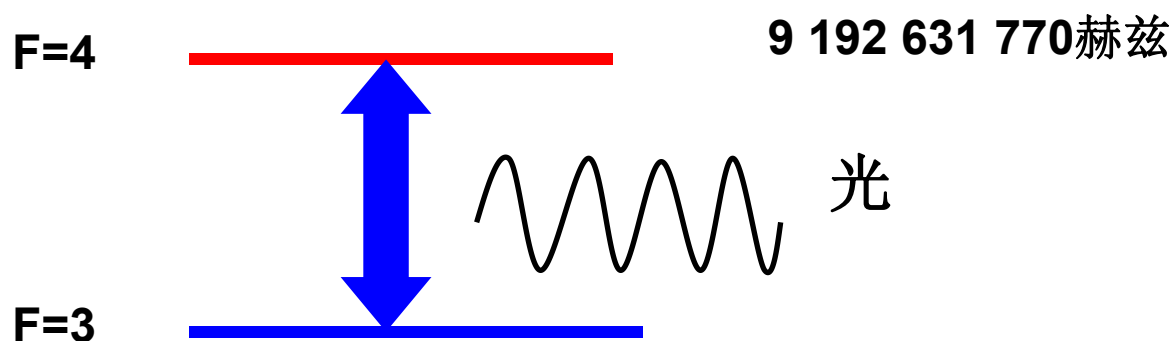


精确的时钟可以提高航空技术、通信技术，如移动电话和光纤通信技术等的应用水平，同时可用于调节卫星的精确轨道、外层空间的航空和联接太空船等。

例如：引力常数的测量精度现在可达

$$\Delta g / g \sim 10^{-10}$$

原子钟：通过铯¹³³原子两个精细能级之间跃迁发射出的光的振动来记时



1秒=9 192 631 770 个Cs¹³³振动周期
(T=0.000001K)

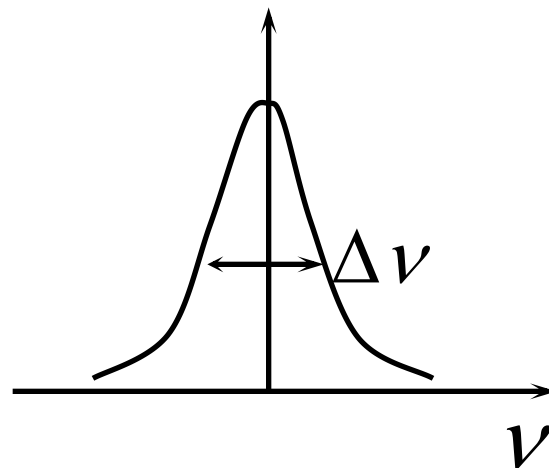


误差原因：

原子运动的多普勒效应

辐射反冲

量子力学的不确定性关系



BEC可以是 10^7 个原子凝聚成的“超级原子”

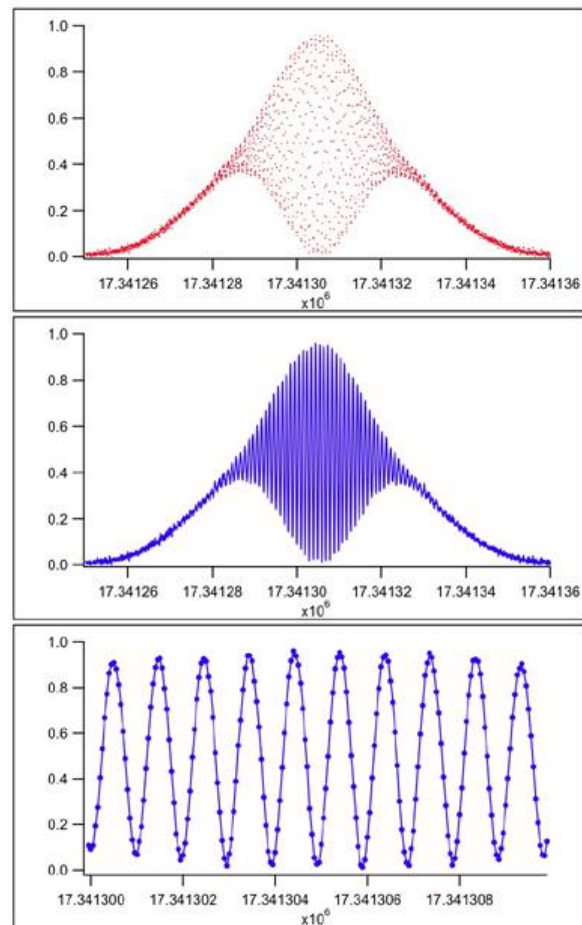
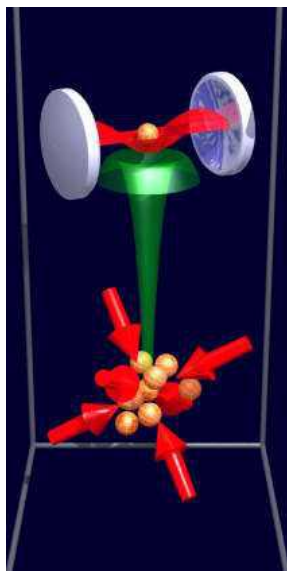
比单个原子容易控制

比单个原子的反冲小得多

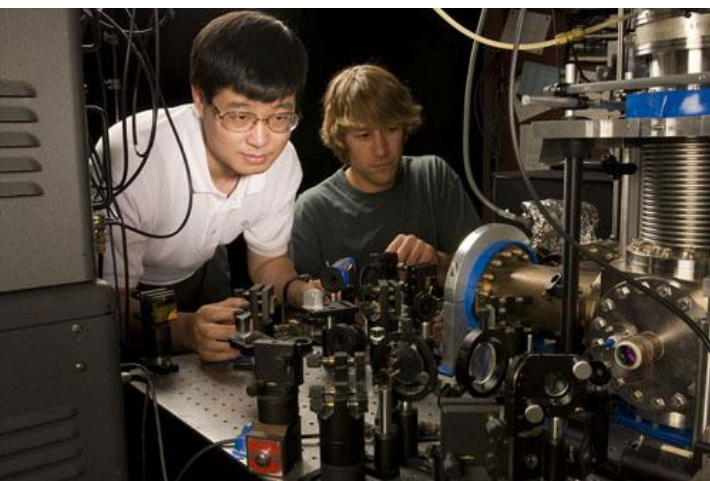
每次测量相当于对大量原子测量，信噪比大很多

——因此是做钟的理想系统

原子喷泉



First Ramsey fringes from the Rb fountain. Vertical axis is relative signal size, horizontal axis is synthesizer frequency setting in Hz.

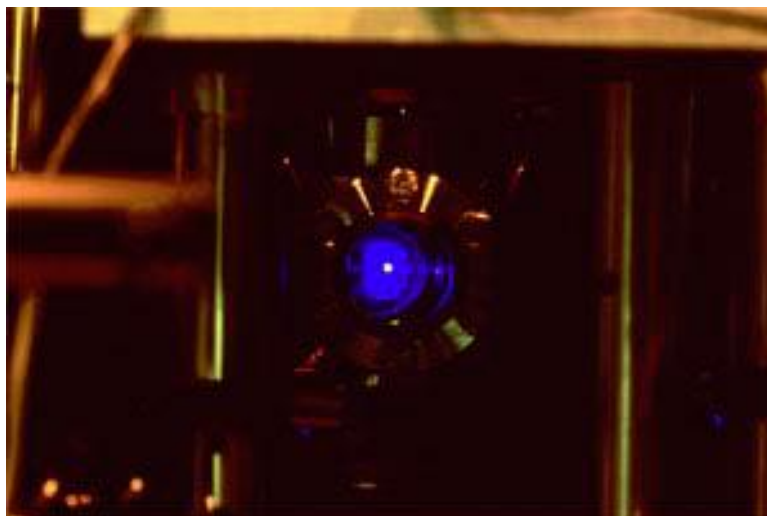


JILA

Sr Optical Atomic Clock

Credit: Jun Ye Group

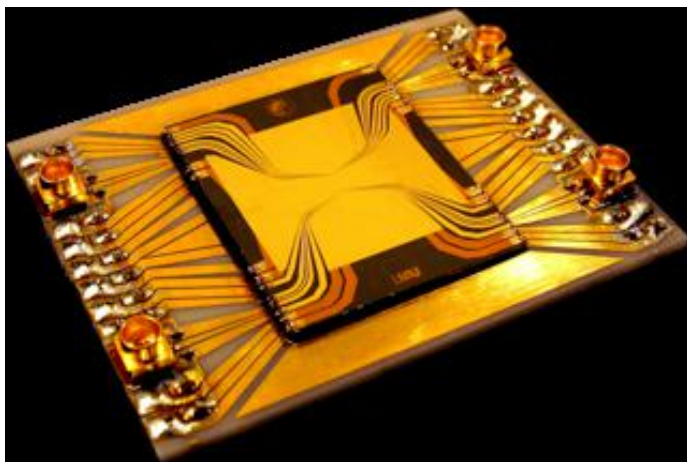
锶光原子钟，相对精度达到 10^{-15}



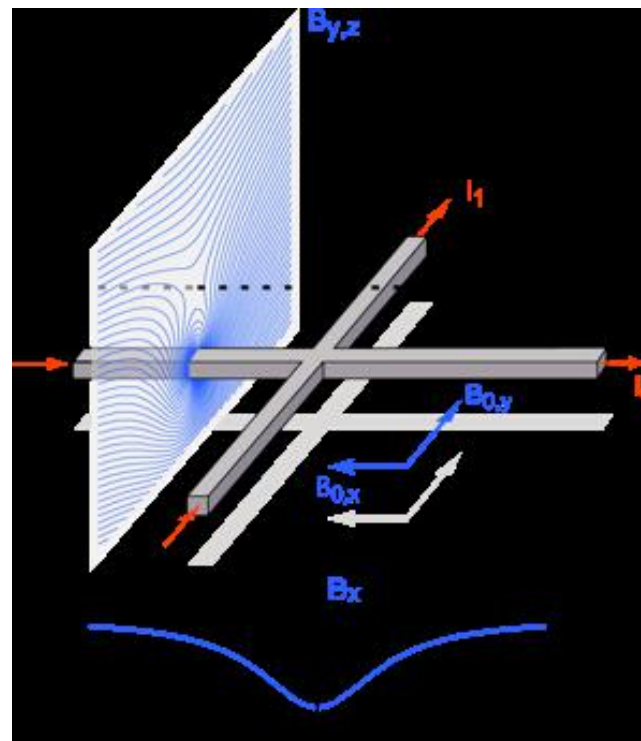
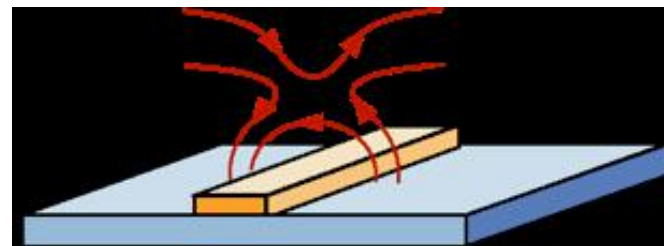
^{87}Sr Lattice Clock with Inaccuracy
below 10^{-15} , *Physical Review
Letters* **98**, 083002/1-4 (2007).

电动力学 第七章 第二课

芯片上的BEC



Treutlein et al., PRL 92, 203005 (2004).
Deutsch et al., PRL 105, 020401 (2010).



引自 Philipp Treutlein的演讲资料
University of Basel • Switzerland

挑战量子极限（不确定性关系） 有望达到更高的精度！

International Symposium on Quantum Dynamics of Ultracold Atoms and Quantum Technologies
8 Dec, 2010, Guangzhou, China





小结

- 运动电荷的李纳-维谢尔势
- 推迟势
- 辐射电磁场强
- 高速运动电荷的辐射功率角分布