§1 二维随机变量

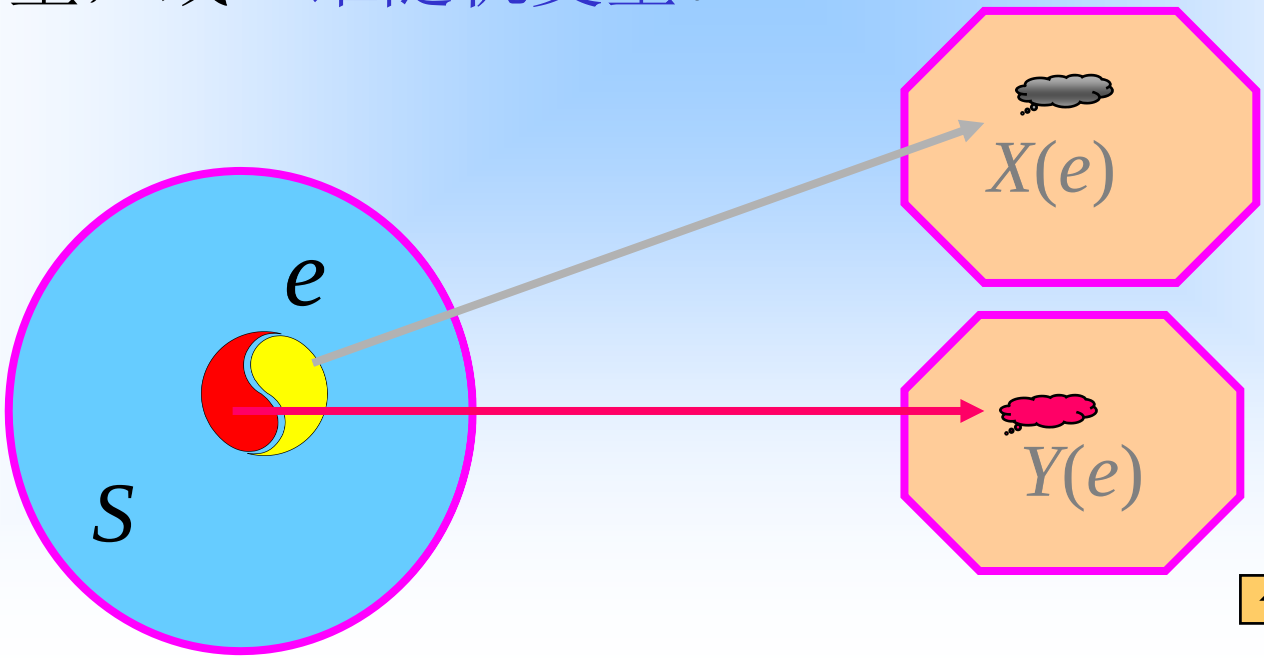
- ♣ 二维随机变量
- ♣ 联合分布函数
- ♣ 联合分布律
- ♣ 联合概率密度

返回主目录

§1 二维随机变量

定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量。由它们构成的一个向量 (X, Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量。



返回主目录

§1 二维随机变量

注 意 事 项

(1) 二维随机变量也称为二维随机向量；

(2) 我们应把二维随机变量

$$(X,\ Y) = (X(e),\ Y(e)) \qquad (e \in S)$$

看作一个整体，因为 X 与 Y 之间是有联系的；

(3) 在几何上，二维随机变量 $(X,\ Y)$ 可看作平面上的随机点.

返回主目录

§1 二维随机变量

二维随机变量的例子

1. 考察某地区成年男子的身体状况，令

X：该地区成年男子的身高；

Y：该地区成年男子的体重.

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

2. 对一目标进行射击，令：

X：弹着点与目标的水平距离；

Y：弹着点与目标的垂直距离；

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

返回主目录

二维随机变量的例子

3. 考察某地区的气候状况，令：

X：该地区的温度；

Y：该地区的湿度.

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

4. 考察某钢厂钢材的质量，令：

X：钢材的含碳量；

Y：钢材的含硫量；

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

返回主目录

§1 二维随机变量

定 义

设$(X, \quad Y)$是一个二维随机变量，则对于任意一对实数$(x, \quad y)$,

$$F(x, \quad y) = P\{X \le x, \quad Y \le y\}$$

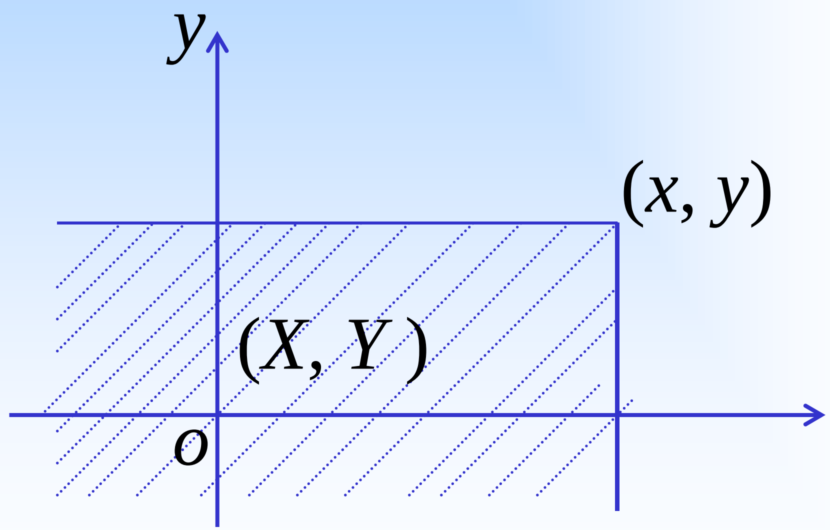
是$(x, \quad y)$的函数．我们称此函数为二维随机变量$(X, \quad Y)$的分布函数.

返回主目录

§1 二维随机变量

二元分布函数的几何意义

二元分布函数的几何意义是：$F(x,\ y)$ 表示平面上的随机点 $(X,\ Y)$ 落在以 $(x,\ y)$ 为右上顶点的无穷矩形中的概率.



返回主目录

§1 二维随机变量

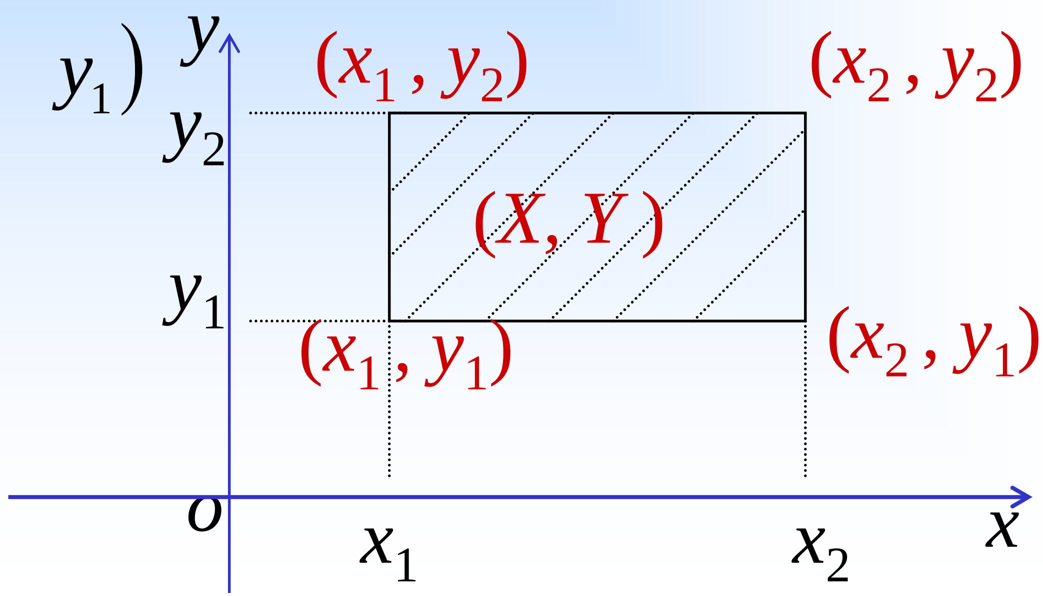
一个重要的公式

设：$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，则

$$P\{x_1 < X \le x_2, \quad y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, \quad y_2) - F(x_2, \quad y_1)$$

$$- F(x_1, \quad y_2) + F(x_1, \quad y_1)$$



§1 二维随机变量

分布函数具有以下的基本性质：

1) $F(x, y)$是变量 x，y 的不减函数，即

对于任意固定的 y，当 $x_1 < x_2$时，$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$;

对于任意固定的 x，当 $y_1 < y_2$时，$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$;

2) $0 \le F(x, y) \le 1$, 且

对于任意固定的 Y，$F(-\infty, y) = 0$;

对于任意固定的 X，$F(x, -\infty) = 0$;

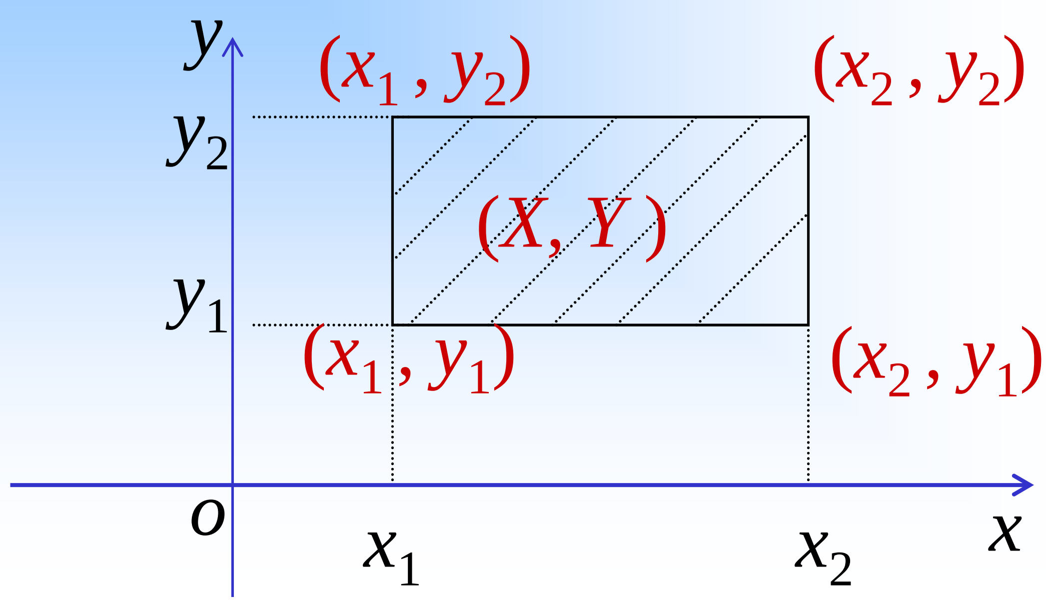
$$F(-\infty, -\infty) = 0; \quad F(+\infty, +\infty) = 1.$$

返回主目录

3) $F(x,y)=F(x+0,y)$, $F(x,y)=F(x,y+0)$, 即

$F(x,y)$关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

4) $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$



说　明

上述四条性质是二维随机变量分布函数的最基本的性质，即任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；

更进一步地，我们还可以证明：如果某一二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某一二维随机变量的分布函数（证明略）.

§1 二维随机变量

n 维随机变量

设 E 是一个随机试验，S是其样本空间，

$$X_i = X_i(e) \qquad (e \in S) \quad (i = 1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n)$$

是该样本空间上的n个随机变量.

则称

$$(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) = (X_1(e), \quad X_2(e), \quad \cdots, \quad X_n(e)) \qquad (e \in S)$$

为样本空间S上的n维随机变量.

§1 二维随机变量

n维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个n维随机变量，则对于任意一n维实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

我们称此函数为n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数.

返回主目录

§1 二维随机变量

二维离散型随机变量

若二维随机变量(X, Y)的取值是有限个或可列无穷个，则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

设(X, Y)二维离散型随机变量，X的取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_i, \quad \cdots$$

Y的取值为

$$y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_j, \quad \cdots$$

则称

$$P_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \quad (i, \ j = 1, \ 2, \ \cdots)$$

为二维离散型随机变量(X, Y)的（联合）分布律.

§1 二维随机变量

二维离散型随机变量的联合分布律

(X, Y)的联合分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

返回主目录

二维离散型随机变量联合分布律的性质

性质 1：

对任意的$(i, \quad j)$，$(i, \; j=1, \quad 2, \quad \cdots)$

有 $$p_{ij}=P\left\{X=x_i, \quad Y=y_j\right\}\geq 0$$

性质 2： $$\sum_{i, \; j} p_{ij}=1$$

返回主目录

例 1

将两个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中.

令：X：放入1号盒中的球数；

Y：放入2号盒中的球数.

试求$(X,\ Y)$的联合分布律.

解：

X的可能取值为0, 1, 2；

Y的可能取值为0, 1, 2.

$$P\{X=0,\quad Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

例 1（续）

$$P\{X=0,\ Y=1\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}\qquad P\{X=1,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{X=0,\ Y=2\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}\qquad P\{X=2,\ Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=1,\ Y=0\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}\qquad P\{X=2,\ Y=1\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}\qquad P\{X=2,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$$

例 1（续）

由此得$(X, \ Y)$的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

例 2

将一枚均匀的硬币掷3次，令：

X： 3次抛掷中正面出现的次数；

Y： 3次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值.

试求$(X,\ Y)$的联合分布律.

解：

X的可能取值为0，1，2，3；

Y的可能取值为1，3.

返回主目录

例 2（续）

$$P\{X=0,\ Y=1\}=0;\qquad P\{X=0,\ Y=3\}=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{3}{8};\qquad P\{X=1,\ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=2,\ Y=1\}=\frac{3}{8};\qquad P\{X=2,\ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=3,\ Y=1\}=0;\qquad P\{X=3,\ Y=3\}=\frac{1}{8}.$$

由此得随机变量$(X,\ Y)$的联合分布律为

例 2（续）

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

例 3

设随机变量 X 在 1,2,3,4四个数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在1~X 中等可能地取一整数值。试求 (X,Y) 的分布律。

解:

由题意知，{X=i，Y=j}的取值情况是：i=1,2,3,4，且是等可能的；然后 j 取不大于 i 的正整数。由乘法公式求得 (X,Y) 的分布律。

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\bullet\frac{1}{4},$$

其中 $i=1,2,3,4,\quad j\le i.$

例 3（续）

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

返回主目录

§1 二维随机变量

二维离散型随机变量的联合分布函数

设$(X, \ Y)$二维离散型随机变量，其(联合)分布律为

$$P_{ij} = P\{X = x_i, \ Y = y_j\} \quad (i, \ j = 1, \ 2, \ \cdots)$$

则$(X, \ Y)$的联合分布函数为，

$$F(x, \ y) = \sum_{x_i \le x, \ y_j \le y} p_{ij}$$

二维连续型随机变量

对于二维随机变量 (X,Y) 分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)$，使得对于任意的 x，y有：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv,$$

则称 (X,Y) 是**连续型的二维随机变量**，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y)**的概率密度**，或称为 X 和 Y 的**联合概率密度**。

§1 二维随机变量

按定义，概率密度 $f(x,y)$ 具有以下性质：

1^0 $f(x,y) \geq 0$；

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$；

3^0 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y)落在 G 内 的概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$

返回主目录

§1 二维随机变量

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，上式即表示 $P\{(X,Y)\in G\}$ 的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体体积

返回主目录

例 4

设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right) & x^2+y^2<R^2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

(1). 求常数c;

(2). 求$(X,\ Y)$落入圆$x^2+y^2\le r^2\ (0<r<R)$内的概率.

解:

(1). 由密度函数的性质，得

例 4（续）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad y)dxdy=\iint_{x^2+y^2<R^2} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，得

$$1=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R c\left(R-\rho\right)\rho\, d\rho=\frac{1}{3}\pi R^3\cdot c$$

所以，$c=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

例 4（续）

$$P\{(X,\quad Y)\in\{x^2+y^2\le r^2\}\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,\quad y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2}\frac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$， 得

$$P\{(X,\quad Y)\in\{x^2+y^2\le r^2\}\}$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r(R-\rho)\rho\,d\rho=\frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

例 5

设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数c;

(2) 求$(X,\ Y)$的联合分布函数;

(3) 求$P\{0<X<1,\ 0<Y<2\}$.

解:

(1) 由密度函数的性质,得

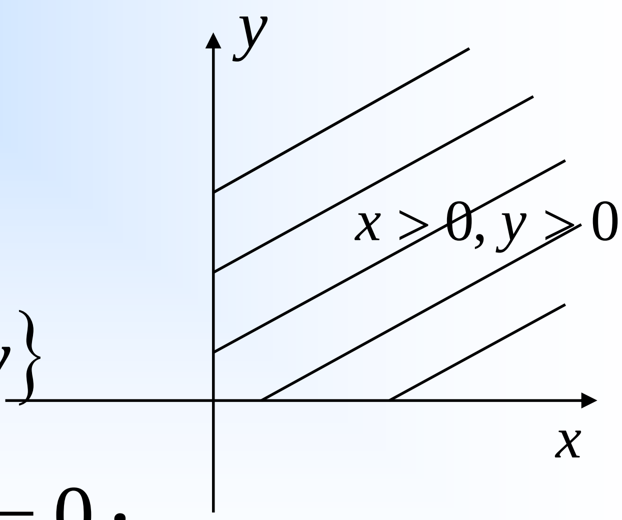
返回主目录

例 5（续）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dxdy \ = c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$= c\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\,dy \ = \frac{c}{12}$$

所以，$c=12.$



(2) $F(x,\ y)=P\{X\le x,\ \ Y\le y\}$

当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,\ y)=0$；

例 5（续）

当$x>0$且$y>0$时，

$$F(x,\quad y)=P\{X\le x,\quad Y\le y\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,\quad v)dudv=12\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}e^{-(3u+4v)}dudv$$

$$=12\int_{0}^{x}e^{-3u}du\cdot\int_{0}^{y}e^{-4v}dv=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x,\quad y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

例 5（续）

(3). $P\{0<X<1,\ 0<Y<2\}$.

$$= \iint\limits_{0<x<1,\ 0<y<2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= 12\int_0^1\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$= 12\int_0^1 e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 e^{-4y}\,dy$$

$$= \left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

例 6

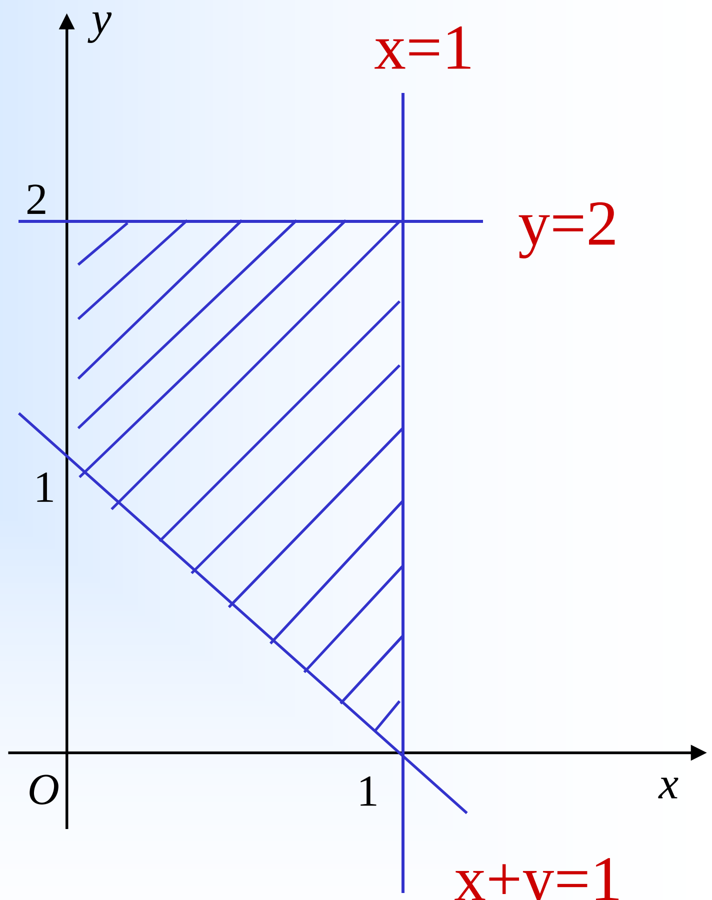
设二维随机变量$(X, \quad Y)$的密度函数为

$$f(x, \quad y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求概率 $P\{X+Y\ge 1\}$.

解：

积分区域如图所示，



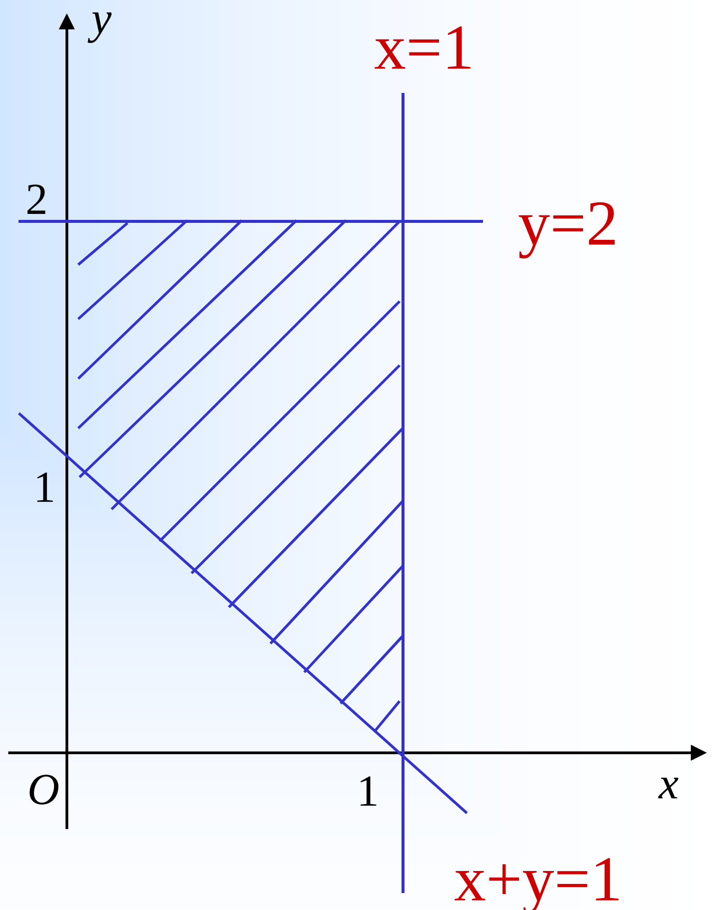
例 6（续）

$$P\{X+Y\geq 1\}.$$

$$=\iint_{x+y\geq 1} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{65}{72}$$



二维均匀分布

设D是平面上的有界区域，其面积为A

如果二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x, y)\in D\\ 0 & (x, y)\notin D\end{cases}$$

则称二维随机变量(X, Y)服从区域D上的均匀分布.

§1 二维随机变量

二维均匀分布几何意义

如果二维随机变量 $(X, \quad Y)$服从区域 D上的均匀分布，我们可以认为随机点$(X, \quad Y)$只落在区域 D内；并且落在 D内任一个子区域 D_1内的概率与该子区域的面积成正比，而与 D_1的形状以及 D_1在 D中的位置无关.

返回主目录

二元正态分布

设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量$(X,\ Y)$服从参数为$(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ r)$的正态分布，记作

$$(X,\ Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ r)$$

$$-\infty<\mu_i<+\infty\ (i=1,\ 2)\quad \sigma_i>0\ (i=1,\ 2)\quad -1<r<1$$

返回主目录