

一. 填空.

1. 向量空间 $V = \{k(1, 0, 1, 0)^T + t(0, 1, 1, 0)^T \mid k, t \in \mathbb{R}\}$ 的空间维数为 $\underline{\quad}$.
2. 设向量 $\alpha = (1, -2, 3)^T$ 与 $\beta = (5, k, 1)^T$ 正交, 则 $k = \underline{\quad}$.
3. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$, 则 $|A^2 + A + E| = \underline{\quad}$.
4. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2$, 则二次型的正惯性指数为 $\underline{\quad}$.
5. 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & -c \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 则 c 的取值范围是 $\underline{\quad}$.

二. 计算.

1. 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的秩和最大无关组, 并把其余向量用该最大无关组线性表示.
2. 设有向量组 $k: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, 其向量 $b = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$ 问 α, β 为何值时 ① b 不能由 k 线性表示 ② 能且唯一 ③ 能且不唯一

3. 求 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系.

4. 求 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解.

5. 判断 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 能否相似对角化.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (1) 求可逆 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 (2) 计算 A^n .

7. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$
 (1) 化为标准型, 并写出正交矩阵
 (2) 判断该二次型正定型

1. 3 2. 4 3. 21 4. 3 5. $t > 8$

1. $R = 3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = \alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3$

2. ① $\beta \neq 0$ 或 $\alpha = 4$ ② $\beta = 0$ 且 $\alpha \neq 4$ ③ $\beta = 0$ 且 $\alpha = 4$

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

4. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

5. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ~~不可约~~ 不可约.

6. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $A^n = \begin{pmatrix} -(1-2)^n + 2 & 2(1-2)^n - 2 \\ -(1-2)^n + 1 & 2(1-2)^n - 1 \end{pmatrix}$

7. $\lambda_1 = \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1 \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

正交.