

第十三讲

上次课

- 多极矩展开（点电荷、偶极子、四极距）

$$\begin{aligned}
 Q, \quad \vec{p}, \quad \vec{D} \\
 \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \\
 W_{\text{int}} = Q\varphi_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \vec{p} + \dots \\
 \downarrow \\
 \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_{\text{ext}} \\
 \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}
 \end{aligned}$$

- 静磁场: $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$ 泊松方程

为了求解 (5.1.4)，我们还要导出关于 \vec{A} 的边值关系。在介质分区均匀时，对应 (5.1.1) 式我们有

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot [(\nabla \times \vec{A})_1 - (\nabla \times \vec{A})_2] = 0 & (5.1.5) \\ \vec{e}_n \times \left[\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A})_1 - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A})_2 \right] = \vec{\alpha}_f & (5.1.6) \end{cases}$$

(5.1.5) 式可进一步简化为

$$\nabla \cdot [\vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)]_{\text{boundary}} = 0 \quad (5.1.7)$$

上式显示 $\vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{\text{boundary}}$ 为与界面位置无关的常矢量，但其方向和大小并不能从中得到。仿照我们以前在静电学中对电势的边界条件的处理，将关系式

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

应用到交界面的一个闭合回路上，只要 \vec{B} 在交界面上的值是有限的，则有

$$(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_n \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0 \quad (5.1.8)$$

这表示 \vec{A} 在边界的切线方向的分量是连续的，这与静电学中的边界条件 $\varphi_1 = \varphi_2|_{\text{boundary}}$ (4.1.6) 相对应。同样道理，事实上 (5.1.6) 对应于静电学中的另

外一条边界条件 $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$ (4.1.3)，在某一些特定的条件下，完全可以把 (5.1.6) 式化成与 (4.1.3) 类似的形式。

因此，对静磁学问题，边界条件有 2 中设置方法，(1) 或者设置在边界上

的 $\vec{e}_n \times \vec{A}$ 的数值（根据 (5.1.8)），(2) 或者设置在边界上的 $\vec{e}_n \times \vec{H}$ 的数值（对应边条 (5.1.6)）。设置好体系的边界条件，就可以(5.1.8)在边条下求解 Poisson 方程解出 \vec{A} 和 \vec{B} 。

我们一再看到了静磁场问题和静电场问题的类似性，其实这 2 个问题中场能的表达式也完全类似。静电场能量为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varphi \rho d\tau$$

静磁场的能量为

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] d\tau = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau \end{aligned}$$

形式与静电场总能非常类似。

注：

1) 从现有的所有证据来看，你一定以为静磁场中的 \vec{A} 与静电场中的 φ 的地位类似（都是势），而 \vec{j} 与 ρ 的地位一致（都是源）。这是对的，但又不完全对。从满足的方程和相对论协变等许多问题来看这个论断是对的，在有些情况下结论却恰恰相反 —— \vec{A} 与 ρ ， \vec{j} 与 φ 的地位一致（参考 Landau 或者 Jackson 的书）。严格推导需要很大的篇幅，但我们可以从一个简单的 Argument 来理解：在静电学中，当我们将电荷给定时，相当于使导体成为孤立导体，任何外界的变动都不会改变孤立导体上的电荷，这样的体系是“孤立体系”；当我们确定 φ 时，外界的变化会改变导体的电势因此必须有“外源”输出或抽出能量以保持恒定电势，因此这样的体系是个“有源体系”。现在我们看静磁学，给定电流 j 情况下，如果外界发生改变则驱动电场相应发生变化，此时也必须从“电动势”输出或抽出能量以保持恒定电流，因此这个体系不是“孤立体系”，恰恰是一个“有源体系”！。从这个意义上讲，在考虑这类问题是（孤立或者有源）， \vec{j} 与 φ 的地位一致！

2) 静电边界条件的两类设置方法很容易实行 —— 确定电势（接一个大的等势体，对应 φ ）或者确定电荷（孤立导体，对应 $\vec{n} \cdot \vec{D}$ ）。你能否考虑下实际情况下静磁边界条件如何设置（ $\vec{n} \times \vec{A}$ ， $\vec{n} \times \vec{H}$ ）？

§ 5.2 静磁场的唯一性定理

与静电场类似，静磁场也有唯一性定理 --- 对确定的体系，场的解由边界条件唯一确定。对静电问题，边界条件可以是设定边界上标势值 $\varphi|_b$ ，或者是 \vec{D} 场在边界上垂直分量（与导体上的表面电荷有关）；与此相对应，对静磁问题，前者是边界上的矢势 \vec{A} 的切向分量（见边条 (5.1.5)），后者是 \vec{H} 场的切向分量（与导体上的表面电流相关，见 (5.1.1)）。

定理：如果静磁体系 V 内存在着电流和磁介质，且关系式 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 成立，则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及边界条件（边界上 \vec{A} 或 \vec{H} 的切向分量）唯一确定。

证明：设对同一个体系存在两组不同的解 $\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \mu \vec{H}'$ 和 $\vec{B}'' = \nabla \times \vec{A}'' = \mu \vec{H}''$ ，均满足预设的边界条件，则有

$$\nabla \times \vec{H}' = \nabla \times \vec{H}'' = \vec{j} \quad (5.2.1)$$

$$\vec{e}_n \times \vec{H}'|_b = \vec{e}_n \times \vec{H}''|_b \quad \text{or} \quad \vec{e}_n \times \vec{A}'|_b = \vec{e}_n \times \vec{A}''|_b \quad (5.2.2)$$

根据场的线性叠加原理，我们可构造一个新的场，即令

$$\vec{B} = \vec{B}' - \vec{B}'', \quad \vec{H} = \vec{H}' - \vec{H}'', \quad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}'' \quad (5.2.3)$$

对于这样一个场，显然，

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \vec{e}_n \times \vec{A}|_b = 0, \quad \text{or}, \quad \vec{e}_n \times \vec{H}|_b = 0 \quad (5.2.4)$$

我们来计算这个场的能量：

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_S [(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{e}_n] dS \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

根据矢量混合积公式 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ ，(5.2.5) 中右方积分函数可改写为

$$(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{e}_n = (\vec{e}_n \times \vec{A}) \cdot \vec{H} = (\vec{H} \times \vec{e}_n) \cdot \vec{A} \quad (5.2.6)$$

根据 (5.2.4)，我们发现，无论我们设置的边条是对 A 还是对 H ，(5.2.5) 式右端恒为 0。于是，

$$\int \frac{1}{\mu} (\vec{B}' - \vec{B}'') \cdot (\vec{B}' - \vec{B}'') d\tau = 0 \quad (5.2.7)$$

由于体系的磁导率 μ_r 恒正，故要使积分值恒为零，被积函数必须恒为零，即

$$\vec{B}' = \vec{B}'' \text{ 或 } \vec{H}' = \vec{H}''$$

可见，所设的两个解是同一个解，定理得证。显然，类似我们对静电问题唯一性定理的证明，静磁问题中，只要 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系是单调上升的，即使不是线性介质，唯一性定理仍然成立！

简单的讲，静磁场的唯一性定理和静电场的唯一性定理一样，都表述的是：对以一个给定的物理问题，解由边界条件唯一确定。当然，它们的适用条件也是一样的，只对 B-H 关系单调且一一对应的体系成立。对铁磁/铁电等体系，一个给定的 E, B 场对应不同的 D, H 场，则唯一性定理不成立。

§ 5.3 磁场的矢势解法：二维问题

原则上讲，给定边界条件以及电流分布（磁场的源），我们即可以通过解泊松方程（5.1.4）求解矢势从而进一步求解磁场。然而真正利用解析方法解矢势方程非常麻烦而且可解的问题并不太多。下面我们举最简单的一种体系---二维的稳定电流体系---来介绍求解矢势的方法。所谓二维问题，是指不仅体系的边界是二维的，而且体系内的电流只沿着 z 轴方向流动。根据稳定电流的条件 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ 可知， $\frac{\partial}{\partial z} j_z = 0$ ，电流密度与 z 方向的空间坐标无关，即

$$\vec{j} = \vec{e}_z j(x, y) \quad (5.3.1)$$

根据静磁场的矢势的定义 $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R}$ ， \vec{A} 只有 z 方向的分量；进一步根据体系沿 z 方向的平移不变性， \vec{A} 只能是 x, y 的函数。综上，

$$\boxed{\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y)} \quad (5.3.2)$$

于是， \vec{A} 所满足的方程变成一个标量方程：

$$\nabla^2 A = -\mu j_f \quad (5.3.3)$$

下面举一些例题来说明问题的求解。

[例 1] 空间沿 z 方向有一无限长载流直导线（载有电流 I ），求空间的矢势分布。

解：这是个典型的 2 维问题，当然可以通过求解 (5.3.3) 得到。但这里可先求空间的磁场分布，再由 \mathbf{B} 场求 \mathbf{A} 场。由安培定理可得（取柱坐标系）

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\phi$$

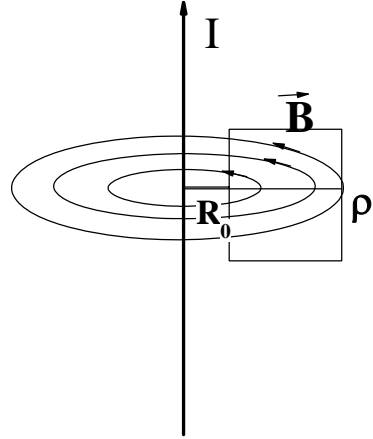
根据 $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ，可利用 Stokes 定理有 $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ，选择如图所示的安培环路，则有

$$[A(\rho) - A(R_0)]h = -h \int_{R_0}^{\rho} B(\rho') \cdot d\rho'$$

积分可得

$$\begin{aligned} A(\rho) &= A(R_0) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{R_0}\right) \\ &= \text{const.} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(\rho) \end{aligned}$$

其中 const. 取决于矢势原点的选取。



注：本例也可以用 $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ 直接求出，不妨试试。

[例 2] 求均匀场 $\vec{B} = B_0 \hat{e}_x$ 对应的矢势分布

解：乍一看，这个未必是各 2 维问题。考虑到均匀磁场可以由放在无限远处的无限大载有 z 方向均匀面电流的金属板（平行于 xz 面）产生，这个问题就很清楚是 2 维问题，因此可设 $\vec{A} = A(x, y) \hat{e}_z$ 。根据 $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ，得

$$\partial_y A \hat{e}_x - \partial_x A \hat{e}_y = B_0 \hat{e}_x$$

因此有

$$A(x, y) = B_0 y = B_0 \rho \sin \theta$$

注：矢势的选取并不唯一，除了可以差一个积分常数外，矢势还可以任意加上一个“规范场”而不影响它们给出相同的磁场。上面这个结果是假设电流沿 z 方向， \mathbf{A} 的方向因此定下来沿 z 方向，这等价于我们取定了一个规范。其实我们不一定非得做这个假设（规范），其它形式的电流也有可能产生同样的均匀磁场。比如 $\vec{A} = (1/2) \vec{B} \times \vec{r}$ 也可以对应同样的磁场，这是所谓 Landau 规范下的结果，你能证明这个结论并讨论一下其对应的电流分布吗？

[例 3] 半径为 R 的圆柱形磁介质（磁导率为 μ_2 ），放置于均匀的外磁场 \vec{B}_0 中，设

柱外面为磁导率为 μ_1 的介质。场的方向与柱轴垂直，求空间的场分布。

解 如图 5.1 所示，空间分成两个区域， $\rho > R$ 的区域矢势为 $\hat{A}_1(x, y)$ ， $\rho < R$ 的区域矢势为 $\hat{A}_2(x, y)$ ，它们均满足 Laplace 方程（没有传导电流）：

$$\nabla^2 A_1 = 0, \nabla^2 A_2 = 0 \quad (5.3.4)$$

考虑边值关系。在 $\rho = R$ 的边界上，显然(5.1.8)式即为

$$A_1(\rho = R) = A_2(\rho = R) \quad (5.3.5)$$

考虑边条（5.1.6）。因为 $\vec{A} = \hat{A}(x, y)$ ，利用柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 中的公式可得

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{n} \times (\nabla \times \vec{A}) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_z$$

我们就可以把(5.1.6)式写成

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=R} = -\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho} \quad (5.3.6)$$

把它们与介质中的静电方程和边值关系比较，立即发现它们的形式完全一样。因此，二维静磁问题完全可以仿照静电问题中的各种解法来求解。

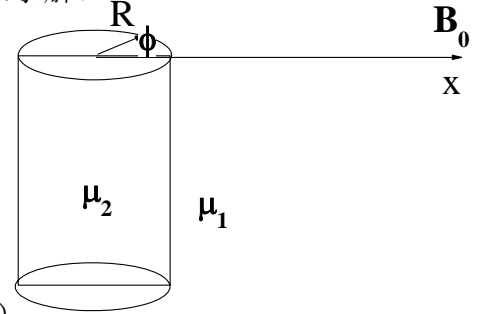
其他边界条件：

$$\rho = 0, A_2 \text{ 有限。} \quad (5.3.7)$$

$$\rho \rightarrow \infty, A_1 \text{ 包括均匀场的贡献。} \quad (5.3.8')$$

即

$$\rho \rightarrow \infty, A_1 = \text{const.} + B_0 y = \text{const.} + B_0 \rho \sin \phi \quad (5.3.8)$$



下面我们根据上述条件利用本征函数展开法找出各区的解。

根据问题的对称性， A_1, A_2 可以展开成相应的本征函数的线性叠加：

$$\begin{aligned} A_1 &= g_0 + h_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \rho^n + h_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \\ A_2 &= g'_0 + h'_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (g'_n \rho^n + h'_n \rho^{-n}) \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \rho^n + d'_n \rho^{-n}) \sin(n\phi) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

根据边条（5.3.7）-（5.3.8），易知：

$$\begin{aligned} g_n &= 0, n = 1, 2, \dots; & c_n &= 0, n > 1, c_1 = B_0; & h_0 &= 0 \\ h'_n &= 0, n = 1, 2, \dots; & d'_n &= 0, n = 1, 2, \dots; & h'_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

由边条 (5.3.5) - (5.3.6), 得到

$$\begin{cases} g_n R^n + h_n R^{-n} = g'_n R^n + h'_n R^{-n} \\ \frac{1}{\mu_1} (n g_n R^{n-1} - n h_n R^{-n-1}) = \frac{1}{\mu_2} (n g'_n R^{n-1} - n h'_n R^{-n-1}) \end{cases} \quad (5.3.11)$$

以及

$$\begin{cases} c_n R^n + d_n R^{-n} = c'_n R^n + d'_n R^{-n} \\ \frac{1}{\mu_1} (n c_n R^{n-1} - n d_n R^{-n-1}) = \frac{1}{\mu_2} (n c'_n R^{n-1} - n d'_n R^{-n-1}) \end{cases} \quad (5.3.12)$$

根据 (5.3.10), 当 $n > 1$ 时, (5.3.11) - (5.3.12) 没有非平凡解, 亦即所有 $n > 1$ 时的参数均为 0。当 $n = 1$ 时, 由 (5.3.12) 可以解得

$$d_1 = R^2 B_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad c'_1 = \frac{2 B_0 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.3.13)$$

除了不重要的常数 $g_0 = g'_0$ 外, 其余的系数均为零。故空间矢势 (取常数为 0) 为

$$\begin{aligned} A_1 &= B_0 \rho \sin \phi + B_0 R^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{\sin \phi}{\rho} \\ A_2 &= \frac{2 B_0 \mu_2}{\mu_2 + \mu_1} \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

根据矢势可以容易地计算出磁场的形式。这里, 柱外的磁场由外磁场和介质磁化后的磁化电流在柱子外产生的磁场, 后者完全等价于放置在原点处的一个 2 维偶极子, 柱内的场为一均匀磁场, 包含了外磁场以及“退磁场”的贡献。

Tips: 从上一章到这一章的这么多例子中, 我们可以清楚地明白, 均匀外场下对柱、球等的影响只是激发 $l=1$ 项 (即偶极项), 其他的项都是 0。这个原因也很简单, 均匀场的势正比于 r 的一次方, 因此它也只作用到 $l=1$ 这个子空间。明白了这个道理, 以后再做相应的题目时可直接仅仅保留 $l=1$ 项 (对均匀外场), 结果的正确性由唯一性定理保证, 以简化计算书写步骤。

§ 5.4 磁场的标量势解法

上节课我们介绍了磁场的矢势解法。尽管这种方法物理图像直接, 但因 \vec{A} 是矢量场, 运算极其繁复, 实用性 (特别是解析计算) 不强。对比静电场, 如果能引入标量势就容易多了。下面我们将仔细讨论引入磁标势的条件, 并用它研究线性磁介质及 (具有复杂的非线性响应) 铁磁介质中的磁场。

1. 磁标势

什么条件下可以引入磁标势？带着这个问题，让我们重新考察静磁场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \end{cases} \quad (5.4.1)$$

如果所考察的空间区域没有传导电流，则有

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (5.4.2)$$

上式提醒我们似乎可以据此引入标势 φ_m （称为磁标势）

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m. \quad (5.4.3)$$

但是，仔细考虑之后发现：只有条件(5.4.2)还不够保证可以引入磁标势。原因是能引入 φ_m 的充分必要条件是 \vec{H} 为保守场，亦即

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5.4.4)$$

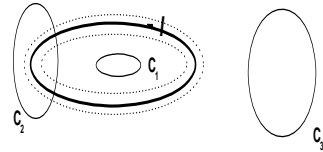
其中 C 为空间中的任意闭合回路。只有 H 场对任意环路的积分都为 0，才能对一个点唯一确定标势，亦即， φ_m 为位置的单值函数。在很多情况下，(5.4.2) 已经可以导致保守场，但有些情况下，即使考虑的空间没有电流，(5.4.4) 仍不成立。比如对一个载流线圈，若我们做一个轮胎状的东西将空间有电流的部分完全清除（如右图所示），选择 C_1 , C_2 ,

C_3 等 3 个环路，对 C_1 , C_3 来说，(5.4.4)

均成立，对 C_2 来讲不成立。 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \Big|_{C_2} = I$,

意味着是空间同一点的标势值不唯一。

因此，仅有“无传导电流”这一条件还不能保证 φ_m 的单值性。



为了解决这个问题，我们引入以电流环为边界的任意曲面，并规定积分路径不允许穿过此曲面。直观地看，这个以电流环为边界的任意曲面对积分路径来说是个刚性的屏障，使得任何闭合积分路径都穿不过去，这样， φ_m 不再是多值的了。为此，从曲面的一侧穿过曲面到另一侧，磁标势 φ_m 是不连续的，存在着大小为 I 的跃变，即

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} \Big|_{C_3} = -\int_+^- \nabla \varphi_m \cdot d\vec{l} = \varphi_m^+ - \varphi_m^- = I \quad (5.4.5)$$

所以有时称此曲面为“磁壳”，而 (5.4.5) 作为磁标势在磁壳上的边界条件。因此，为了引入“磁标势”，我们必须，

- 构造合适的“磁壳”已使得空间变成“无源”且“单连通”；
- 设置合适的边界条件。

习题

P. 141, 5.3, 5.4

选做题：在上面的例 3 中，求束缚在磁介质界面上的磁化电流分布。进一步定义一个 2 维磁偶极子，求出其矢势，然后对比例题 3 的解写出磁介质柱被磁化后的等效（2 维）磁偶极矩。