中山大學 本科生考试草稿纸 2015.5 21/1

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

南校区 2014 学年度第二学期 2014 级《高等数学一》期末考试题 A

学院__________专业__________学号__________姓名__________评分__

阅卷老师签名______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

共 6 页十二大题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。

一、设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$。求一个和 $\boldsymbol{a}$ 垂直，并和由 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 确定的平面平行的**单位**向量。(5 分)

解：设所求向量为 $\vec{d}^0$，$\vec{d}=(x,y,z)$，$\vec{d}^0=\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

由条件有 $\begin{cases}\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0\\ \vec{d}\cdot\vec{a}=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\begin{vmatrix}x&y&z\\1&2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=0\\ (x,y,z)\cdot(2,-1,-1)=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-5x+3y-z=0\\ 2x-y-z=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}7x=4y\\2x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=7\\z=1\end{cases}$，$\vec{d}=(4,7,1)$，$\vec{d}^0=\left(\frac{4}{\sqrt{66}},\frac{7}{\sqrt{66}},\frac{1}{\sqrt{66}}\right)$

二、证明不等式：$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，$(\forall x>0)$。(5 分)

二、设 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x \quad (0<\xi<x) \Rightarrow \dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{x}{1+\xi}<\dfrac{x}{1+0}$

$\Rightarrow\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

三、写出函数 $f(x)=\arctan x$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶泰勒公式，带佩亚诺余项。(6 分)

(三) $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n}+o(x^{2n})$

$\arctan x=\int_0^x\dfrac{dt}{1+t^2}=\int_0^x[1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^{n-1}t^{2n}+o(t^{2n})]dt$

$=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$

2015 21/1

四、求空间曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(t\cos t)\boldsymbol{i}+(t\sin t)\boldsymbol{j}+(\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2})\boldsymbol{k}$,$(0\le t\le \pi)$ 的弧长。(6 分)

解: $\begin{cases} x(t)=t\cos t \\ y(t)=t\sin t \\ z(t)=\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t)=\cos t-t\sin t \\ y'(t)=\sin t+t\cos t \\ z'(t)=\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2t} \end{cases}$ $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

$=\sqrt{1+t^2+(\sqrt{2t})^2}\,dt=\sqrt{(1+t)^2}\,dt$

$$S=\int_0^{\pi}ds=\int_0^{\pi}(1+t)\,dt=\left[t+\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi+\frac{\pi^2}{2}=\pi(1+\frac{\pi}{2}).$$

五、求下列函数的极限,或说明极限不存在。(24 分)

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

$$0\le\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}|x|\le|x|+|x|=2|x|$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2|x|=0$,由夹逼原理: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=0$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2-y}\ \overset{\text{设 } y=-kx^2}{=\!=\!=}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+kx^2}=\dfrac{1}{1+k}$

k不同时极限值不同,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2-y}$ 无极限

(3) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)}\dfrac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}=\dfrac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}}{1}=-\dfrac{1}{8}$

六、求偏导数。(18 分)

(1) $s(x,y)=\arctan(\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial x}$。

$$\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{1}{x})=\frac{x}{x^2+y^2}$$ ✓

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}-x\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

✓

(2) 已知 $w=\ln(x^2+y^2+z^2)$， $x=ue^v\sin u$， $y=ue^v\cos u$， $z=ue^v$， 求在点 $(u,v)=(-2,0)$ 处的偏导数 $\frac{\partial w}{\partial u}$。

$$w=\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln(u^2e^{2v}\sin^2u+u^2e^{2v}\cos^2u+u^2e^{2v})=2\ln ue^v$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}=2\cdot\frac{e^v}{ue^v}=\frac{2}{u}$$

✓

$$\left.\frac{\partial w}{\partial u}\right|_{(-2,0)}=\frac{2}{-2}=-1$$

(3)隐函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(xy+z,\cos(y^2+z^2))=0$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$F_z=F_1'+F_2'\cdot(-\sin(y^2+z^2)\cdot 2z)=F_1'-2z\sin(y^2+z^2)F_2'$$

$$F_y=F_1'\cdot x+F_2'\cdot[-\sin(y^2+z^2)\cdot 2y]=xF_1'-2y\sin(y^2+z^2)\cdot F_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{xF_1'-2y\sin(y^2+z^2)\cdot F_2'}{F_1'-2z\sin(y^2+z^2)F_2'}$$ ✓

2015 21/1

七、设函数 $g(x,y,z)=xe^y+z^2$，求 g 在点 $P_0=(1,\ln 2,\frac{1}{2})$ 处函数值增加最快和减少最快的方向，并求出相应的方向导数。(6 分)

$$\mathrm{grad}\, g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 2z)$$

$$\mathrm{grad}\, g(P_0) = (e^{\ln 2}, 1\cdot e^{\ln 2}, 2\times\frac{1}{2}) = (2,2,1) \text{ 或 } (-2,-2,-1)$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3})$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,\ln 2,\frac{1}{2})} = e^{\ln 2}\cdot(\pm\frac{2}{3}) + 1\cdot e^{\ln 2}(\pm\frac{2}{3}) + 1\cdot(\pm\frac{1}{3}) = \pm\frac{4}{3}\pm\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{最大} \\ -3 & \text{最小} \end{cases}$$

八、求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在原点处的二阶泰勒公式（带拉格朗日余项），并由此给出当 $|x|\le 0.1$ 和 $|y|\le 0.1$ 时的误差的一个上界。(6 分)

$f_x=\cos x\sin y$, $f_{xx}=-\sin x\sin y$, $f_{xy}=\cos x\cos y$, $f_{xxx}=-\cos x\sin y$

$f_y=\sin x\cdot\cos y$, $f_{yy}=-\sin x\sin y$, $f_{yyy}=-\sin x\cos y$, $f_{xxy}=-\sin x\cos y$

$f_{xyy}=-\sin x\cos y$,

$$f(x,y)=\sin x\sin y = f(0,0)+f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)\cdot x^2+2f_{xy}(0,0)\cdot xy+f_{yy}(0,0)y^2\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[-x^3\cos\theta x\sin\theta y-3x^2y\sin\theta x\cos\theta y-3xy^2\sin\theta x\cos\theta y-y^3\sin\theta x\cos\theta y\right]$$

$$= xy + R_3(x), \quad |R_3(x)|\le\frac{1}{6}\left||x|^3+3|x|^2|y|+3|x||y|^2+|y|^3\right|\le\frac{8}{6}\times(0.1)^3$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{1}{1000}=\frac{1}{750}$$

九、求函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值点和极值。(6 分)

$f_x=3x^2-3y$, $f_{xx}=6x$

$f_y=3y^2-3x$, $f_{xy}=-3$, $f_{yy}=6y$

令 $\begin{cases} f_x=3(x^2-y)=0 \\ f_y=3(y^2-x)=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases}$ $\Rightarrow x^4=x$ $x(x^3-1)=0$ $x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, $A=f_{xx}=6x$, $B=f_{xy}=-3$, $C=f_{yy}=6y$

	A	B	C	
(0,0)	0	-3	0	$B^2=9>AC=0$, (0,0) 不是极值点。
(1,1)	6	-3	6	$B^2=9<AC=36$, $A>0$ (1,1) 是极小值点, 极小值 $f(1,1)=-1$

2015 $\frac{21}{1}$

十~~一~~、求函数 $y=\dfrac{x^2-3\ln x}{2x-4}$ 的所有渐近线。(6 分)

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3\ln x}{x(2x-4)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\frac{3}{x}}{4x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{4x^2-4x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{8x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-3\ln x}{2x-4}-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-3\ln x}{2x-4}-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-6\ln x-2x^2+4x}{4x-8}$$

$b=-1$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6\ln x+4x}{4x-8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{6}{x}+4}{4}=\cancel{1},\quad \lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-3\ln x}{2x-4}=+\infty$$

渐近线：$y=ax+b=\frac{x}{2}+1$ (斜)　$x\to+\infty$　$y=\frac{1}{2}x-1$

$x=2$ (~~铅~~直)　$x\to2$

十~~二~~、设 L 是两平面 $y+2z=12$ 和 $x+y=6$ 的交线，用拉格朗日乘数法求直线 L 上到原点距离最短的点。(6 分)

解：求 $d^2=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $y+2z-12=0$ 与 $x+y-6=0$ 下的极值

作函数 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(y+2z-12)+\lambda_2(x+y-6)$

$$\begin{cases}F_x=2x+\lambda_2\triangleq0 & \lambda_2=-2x\\ F_y=2y+\lambda_1+\lambda_2\triangleq0 & \lambda_1=-z\\ F_z=2z+2\lambda_1\triangleq0 & \lambda_1+\lambda_2=-y,\quad \lambda_2=z-2y\\ F_{\lambda_1}=y+2z-12\triangleq0\\ F_{\lambda_2}=x+y-6\triangleq0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2x-2y+z=0\\ y+2z-12=0\\ x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=6\\ y+2(2y-2x)=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=6\\ 4x-5y=-12\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4x+4y=24\\ 4x-5y=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9y=36,\ y=4\\ x=6-y=2,\end{cases}\quad z=2y-2x=8-4=4$$

所求点 $(2,4,4)$

中山大學 本科生考试草稿纸 2015 21/1

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第七条："考试作弊者不授予学士学位。"

(1) $0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |x| \le |x|$，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。

十二、设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$。

（1）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续？

（2）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处哪些方向的方向导数存在？

（3）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求出全微分。(6 分)

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0+t\cos\alpha,\ 0+t\cos\beta)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\frac{t^3\cos^3\alpha}{t^2}}{t} = \lim\limits_{t\to0} \cos^3\alpha = \cos^3\alpha$

$0 \le \alpha \le 2\pi$.

(3) $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to0} \frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2+0} - 0}{\Delta x} = 1$,

$f_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y\to0} \frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$.

$\Delta z - [f_x(0,0)\cdot\Delta x + f_y(0,0)\cdot\Delta y] = \frac{\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2+\Delta y^2} - [1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{(\Delta x)^3 - (\Delta x)^3 - (\Delta x)\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(\Delta x)\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{\text{沿}y=kx} \lim\limits_{x\to0} \frac{-kx^3}{x^3+k^3x^3} = \frac{-k^2}{1+k^3} \neq 0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。