第八章　假设检验

第一节　假设检验

一、假设检验的基本原理

二、假设检验的相关概念

三、假设检验的一般步骤

四、典型例题

五、小结

一、假设检验的基本原理

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下，为了推断总体的某些性质，提出某些关于总体的假设。

例如， 提出总体服从泊松分布的假设；

又如，对于正态总体提出数学期望等于 μ_0 的假设等。

假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断：是接受，还是拒绝。

假设检验问题是统计推断的另一类重要问题.

如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

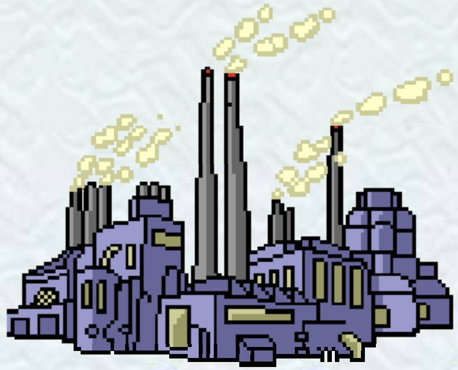
通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法,其基本原理就是人们在实际问题中经常采用的所谓实际推断原理:"**一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的**".

下面结合实例来说明假设检验的基本思想.

实例　某车间用一台包装机包装葡萄糖, 包得的袋装糖重是一个随机变量, 它服从正态分布. 当机器正常时, 其均值为0.5千克, 标准差为0.015千克. 某日开工后为检验包装机是否正常, 随机地抽取它所包装的糖9袋, 称得净重为(千克):

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511
0.520　0.515　0.512,　问机器是否正常?

分析: 用 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖重总体 X 的均值和标准差,



由长期实践可知, 标准差较稳定, 设 $\sigma = 0.015$,

则 $X \sim N(\mu,\ 0.015^2)$, 其中 μ 未知.

问题: 根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$.

提出两个对立假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ 和 $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

再利用已知样本作出判断是接受假设 H_0 (拒绝假设 H_1), 还是拒绝假设 H_0 (接受假设 H_1).

如果作出的判断是接受 H_0, 则 $\mu = \mu_0$,

即认为机器工作是正常的, 否则, 认为是不正常的.

由于要检验的假设设计总体均值, 故可借助于样本均值来判断.

因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量,

所以若 H_0 为真, 则 $|\,\overline{x}-\mu_0\,|$ 不应太大,

当 H_0 为真时, $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

衡量 $|\,\overline{x}-\mu_0\,|$ 的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\,\overline{x}-\mu_0\,|}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小,

于是可以选定一个适当的正数 k,

当观察值 $\bar{x}$ 满足 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$ 时，拒绝假设 H_0，

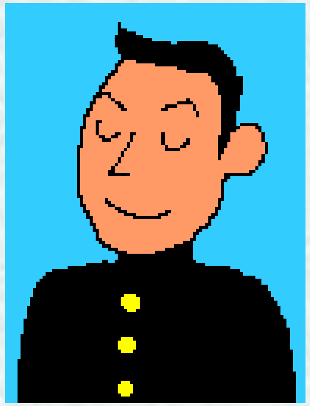
反之，当观察值 $\bar{x}$ 满足 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$ 时，接受假设 H_0。

因为当 H_0 为真时 $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

由标准正态分布分位点的定义得 $k = z_{\alpha/2}$，

当 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0，$\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$ 时，接受 H_0。

假设检验过程如下:



在实例中若取定 $\alpha = 0.05,$

则 $k = z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$

又已知 $n = 9,\ \sigma = 0.015,$

由样本算得 $\bar{x} = 0.511,$ 即有 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.2 > 1.96,$

于是拒绝假设H_0, 认为包装机工作不正常.

以上所采取的检验法是符合实际推断原理的.

由于通常α总是取得很小,一般取$\alpha=0.01,\alpha=0.05,$

因而当H_0为真,即$\mu=\mu_0$时,$\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_{\alpha/2}\right\}$是一个小概率事件,根据实际推断原理,就可以认为如果H_0为真,由一次试验得到满足不等式$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}$的观察值$\overline{x}$,几乎是不会发生的.

在一次试验中,得到了满足不等式 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \ge z_{\alpha/2}$ 的观察值 $\bar{x}$,则我们有理由怀疑原来的假设H_0的正确性,因而拒绝H_0.

若出现观察值 $\bar{x}$ 满足不等式 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}$,则没有理由拒绝假设$H_0$, 因而只能接受$H_0$.

二、假设检验的相关概念

1. 显著性水平

当样本容量固定时，选定α后，数 k 就可以确定，然后按照统计量 $Z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的观察值的绝对值大于等于 k 还是小于 k 来作决定.

如果$|z|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq k$，则称 $\bar{x}$ 与μ_0的差异是显著的，则我们拒绝 H_0，

反之,如果$|z| = \left|\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < k$,则称$\overline{x}$与$\mu_0$的差异是不显著的,则我们接受$H_0$,

数α称为显著性水平.

上述关于$\overline{x}$与μ_0有无显著差异的判断是在显著性水平α之下作出的.

2. 检验统计量

统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 称为检验统计量.

3. 原假设与备择假设

假设检验问题通常叙述为：在显著性水平 α 下,

检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0.$

或称为“在显著性水平 α 下,针对 H_1 检验 H_0”.

H_0 称为原假设或零假设, H_1 称为备择假设.

4. 拒绝域与临界点

当检验统计量取某个区域C中的值时，我们拒绝原假设H_0，则称区域C为**拒绝域**，拒绝域的边界点称为**临界点**.

如在前面实例中，

拒绝域为 $|z| \geq z_{\alpha/2}$，

临界点为 $z = -z_{\alpha/2}$，$z = z_{\alpha/2}$.

5. 两类错误及记号

假设检验的依据是: 小概率事件在一次试验中很难发生, 但很难发生不等于不发生, 因而假设检验所作出的结论有可能是错误的. 这种错误有两类:

(1) 当原假设H_0为真, 观察值却落入拒绝域, 而作出了拒绝H_0的判断, 称做**第一类错误**, 又叫**弃真错误**, 这类错误是“把真说成假”. 犯第一类错误的概率是显著性水平 α.

(2) 当原假设 H_0 不真, 而观察值却落入接受域, 而作出了接受 H_0 的判断, 称做**第二类错误**, 又叫**取伪错误**, 这类错误是“把假说成真”.

犯第二类错误的概率记为

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 不真接受 } H_0\} \text{ 或 } P_{\mu \in H_1}\{\text{接受 } H_0\}.$$

当样本容量 n 一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小, 除非增加样本容量.

6. 显著性检验

只对犯第一类错误的概率加以控制, 而不考虑犯第二类错误的概率的检验, 称为**显著性检验**.

7. 双边备择假设与双边假设检验

在 $H_0: \mu = \mu_0$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$ 中, 备择假设 H_1 表示 μ 可能大于 μ_0, 也可能小于 μ_0, 称为双边备择假设, 形如 $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为双边假设检验.

8. 右边检验与左边检验

形如 $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为右边检验.

形如 $H_0: \mu \ge \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为左边检验.

右边检验与左边检验统称为**单边检验**.

9. 单边检验的拒绝域

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ为已知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,给定显著性水平 α,

则 右边检验的拒绝域为 $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha$,

左边检验的拒绝域为 $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$.

证明 (1)右边检验 $H_0 : \mu \leq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$,

取检验统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$,

因 H_0 中的全部 μ 都比 H_1 中的 μ 要小,

当 H_1 为真时,观察值 $\overline{x}$ 往往偏大,

因此拒绝域的形式为 $\overline{x} \geq k$, k 为待定正常数,

由 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} = P_{\mu \in H_0}\{\overline{X} \geq k\}$

$$= P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

$$\le P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

上式不等号成立的原因:

因为 $\mu \le \mu_0$, 所以 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$,

事件 $\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \subset \left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$.

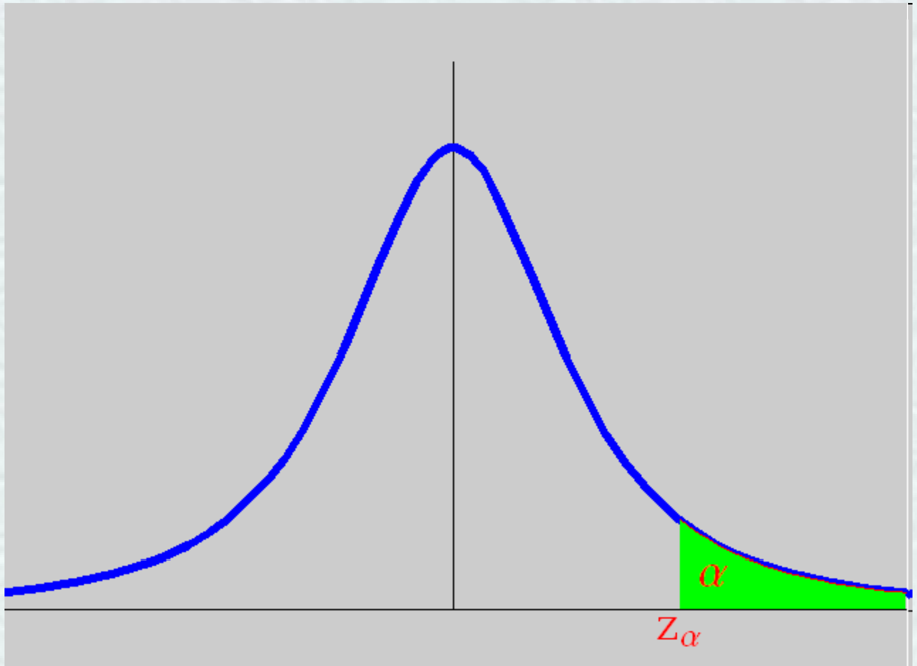
要控制 $P\{H_0$ 为真拒绝 $H_0\} \le \alpha$,

只需令 $P_{\mu \le \mu_0}\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha$.

因为 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

所以 $\dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha$,

$$k = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha,$$



故右边检验的拒绝域为 $\overline{x} \geq \mu_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$,

即 $z = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$. 该检验法称为Z检验法。

证明 (2)左边检验 $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$,

拒绝域的形式为 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq k$, k 待定,

由 $P\{H_0 \text{ 为真拒绝 } H_0\} = P_{\mu \geq \mu_0}\left\{\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq k\right\} = \alpha$,

得 $k = -z_\alpha$,

故左边检验的拒绝域为 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$.

三、假设检验的一般步骤

1. 根据实际问题的要求,提出原假设 H_0 及备择假设 H_1;

2. 给定显著性水平 α 以及样本容量 n;

3. 确定检验统计量以及拒绝域形式;

4. 按 $P\{H_0 \text{为真拒绝} H_0\} = \alpha$ 求出拒绝域;

5. 取样,根据样本观察值确定接受还是拒绝H_0.

四、典型例题

例1 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu = 40\text{cm}/\text{s}$, $\sigma = 2\text{cm}/\text{s}$. 现用新方法生产了一批推进器, 随机取 $n = 25$只, 测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x} = 41.25\text{cm}/\text{s}$. 设在新方法下总体均方差仍为 $2\text{cm}/\text{s}$,问用新方法生产的推进器的燃烧率是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著的提高？取显著水平 $\alpha = 0.05$.

解 根据题意需要检验假设

$H_0: \mu \le \mu_0 = 40$ (即假设新方法没有提高燃烧率),

$H_1: \mu > \mu_0$ (即假设新方法提高了燃烧率),

这是右边检验问题,

拒绝域为 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_{0.05} = 1.645$.

因为 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 3.125 > 1.645$, z值落在拒绝域中,

故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0.

即认为这批推进器的燃烧率较以往有显著提高.

例2 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, 100)$ 的一个样本，要检验 $H_0: \mu = 0\ (H_1: \mu \neq 0)$，在下列两种情况下，分别确定常数 d，使得以 W_1 为拒绝域的检验犯第一类错误的概率为0.05 .

(1) $n = 1, W_1 = \{x_1 \,\big|\, |x_1| > d\}$;

(2) $n = 25, W_1 = \{(x_1, \cdots, x_{25}) \,\big|\, |\bar{x}| > d\}$，其中 $\bar{x} = \dfrac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i$.

解 (1) $n = 1$ 时，若 H_0 成立， 则 $\dfrac{X_1}{10} \sim N(0,1)$,

$$P(X_1 \in W_1) = P(|X_1| > d)$$

$$= P\left(\left|\frac{X_1}{10}\right| > \frac{d}{10}\right) = \Phi\left(-\frac{d}{10}\right) - \Phi\left(\frac{d}{10}\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{d}{10}\right)\right) = 0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{d}{10}\right) = 0.975, \qquad \frac{d}{10} = 1.96, \qquad d = 19.6;$$

(2) $n=25$时，若H_0成立，则 $\sqrt{25}\dfrac{\overline{X}}{10}\sim N(0,1)$,

$$P\left(\left(X_1,\cdots X_{25}\right)\in W_1\right)=P\left(\left|\overline{X}\right|>d\right)$$

$$=P\left(\left|\frac{\overline{X}}{2}\right|>\frac{d}{2}\right)=\Phi\left(-\frac{d}{2}\right)-\Phi\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$=2\left(1-\Phi\left(\frac{d}{2}\right)\right)=0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{d}{2}\right)=0.975,\qquad \frac{d}{2}=1.96,\qquad d=3.92\,.$$

例3 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, 9)$ 的一个样本,其中 μ 为未知参数,检验 $H_0: \mu = \mu_0$ $(H_1: \mu \neq \mu_0)$,拒绝域 $W_1 = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid |\bar{x} - \mu_0| \geq C\}$,

(1) 确定常数 C,使显著性水平为 0.05;

(2) 在固定样本容量 $n = 25$ 的情况下,分析犯两类错误的概率 α 和 β 之间的关系.

解 (1) 若 H_0 成立,则 $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{3} \sim N(0,1)$,

$$P((X_1, \cdots X_n) \in W_1) = P(|\bar{X} - \mu_0| \geq C)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}\left| \overline{X} - \mu_0 \right|}{3} \geq \frac{\sqrt{n}C}{3} \right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3} \right) \right) = 0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3} \right) = 0.975, \qquad \frac{\sqrt{n}C}{3} = 1.96, \qquad C = \frac{5.88}{\sqrt{n}};$$

(2) $n = 25$时, 若H_0成立,

$$\alpha = P((X_1, \cdots X_n) \in W_1)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3} \right) \right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{5C}{3} \right) \right).$$

若H_0不成立，不妨假设 $\mu=\mu_1\neq\mu_0$，

$$\beta=P((X_1,\cdots X_n)\overline{\in}W_1)=P(|\overline{X}-\mu_0|<C)$$

$$=P(-C+\mu_0<\overline{X}<C+\mu_0)$$

$$=P\left(\frac{5}{3}(-C+\mu_0-\mu)<\frac{5}{3}(\overline{X}-\mu)<\frac{5}{3}(C+\mu_0-\mu)\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{5}{3}(C+\mu_0-\mu_1)\right)-\Phi\left(\frac{5}{3}(-C+\mu_0-\mu_1)\right),$$

当C 较小时，α 较大，β 较小；

当C 较大时，α 较小，β 较大.

由于 μ 是任取的，所以对所有 $\mu\neq\mu_0$ 上面的关系成立.

五、小结

假设检验的基本原理、相关概念和一般步骤.

假设检验的两类错误

真实情况(未知)	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第I类错误
H_0 不真	犯第II类错误	正确

第二节 正态总体均值的假设检验

一、单个总体均值 μ 的检验

二、两个总体均值差的检验(t 检验)

三、基于成对数据的检验(t 检验)

四、小结

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值 μ 的检验

1. σ^2 为已知, 关于μ的检验(Z 检验)

在上节中讨论过正态总 体 $N(\mu,\sigma^2)$ 当σ^2为已知时, 关于$\mu=\mu_0$的检验问题:

(1) 假设检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$;

(2) 假设检验 $H_0:\mu\leq\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$;

(3) 假设检验 $H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$.

讨论中都是利用 H_0 为真时服从 $N(0,1)$ 分布的统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域的,这种检验法称为 **Z 检验法.**

一个有用的结论

当显著性水平均为 α 时,

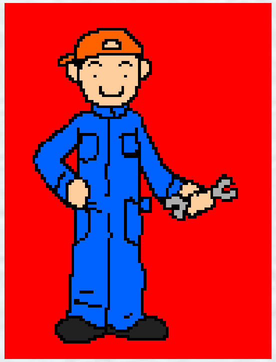
检验问题 $H_0:\mu\le\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$ 和检验问题 $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$ 有相同的拒绝域.

例1 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为10.5cm, 标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

10.4	10.6	10.1	10.4	10.5	10.3	10.3	10.2
10.9	10.6	10.8	10.5	10.7	10.2	10.7	

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.15$,



要检验假设

$H_0: \mu = 10.5$, $\quad H_1: \mu \neq 10.5$,

$$n = 15, \quad \overline{x} = 10.48, \quad \alpha = 0.05,$$

则 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{10.48-10.5}{0.15/\sqrt{15}} = -0.516,$

查表得 $z_{0.05} = 1.645,$

于是 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -0.516 < z_{0.05} = 1.645,$

故接受 H_0, 认为该机工作正常.

2. σ^2为未知，关于μ的检验(t检验)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2未知，显著性水平为α.

求检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的拒绝域.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，

因为σ^2未知，不能利用 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域.

因为S^2是σ^2的无偏估计，故用S来取代σ，

即采用 $t = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 来作为检验统计量.

当观察值 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0,

拒绝域的形式为 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq k$.

根据第六章§2定理三知,

定理三

当H_0为真时, $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\}=P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq k\right\}=\alpha,$$

得 $k = t_{\alpha/2}(n-1)$,

拒绝域为 $|t| = \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

上述利用 t 统计量得出的检验法称为t 检验法.

对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$, 当σ^2未知时, 关于μ的单边检验的拒绝域在表 8.1 中给出.

在实际中, 正态总体的方差常为未知, 所以我们常用 t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题.

例2 如果在例1中只假定切割的长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒的平均长度有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 依题意 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0 : \mu = 10.5$, $H_1 : \mu \neq 10.5$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s = 0.237$,

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{10.48 - 10.5}{0.237/\sqrt{15}}\right| = 0.327,$$

t分布表

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448 > |t| = 0.327$,

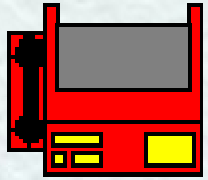
故接受 H_0, 认为金属棒的平均长度无显著变化.

例3 某种电子元件的寿命X(以小时计)服从正态分布, μ,σ^2均为未知. 现测得16只元件的寿命如下:

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)?

解 依题意需检验假设



$$H_0: \mu \le \mu_0 = 225, \quad H_1: \mu > 225,$$

取 $\alpha = 0.05, \quad n = 16, \quad \bar{x} = 241.5, \quad s = 98.7259,$

t分布表

查表得

$$t_{0.05}(15) = 1.7531 > \quad |t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| = 0.6685$$

故接受 H_0, 认为元件的平均寿命不大于225小时.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

利用t检验法检验具有相同方差的两正态总体均值差的假设.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$的样本,且设两样本独立. 注意两总体的方差相等.

又设 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别是总体的样本均值, S_1^2,S_2^2是样本方差, μ_1,μ_2,σ^2均为未知,

求检验问题 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta,\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$
(δ 为已知常数)的拒绝域.

取显著性水平为 α.

引入 t 统计量作为检验统计量：

$$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}},\ \text{其中}\ S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

当 H_0 为真时, 根据第六章§2定理四知, 定理四

$$t \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

其拒绝域的形式为 $\left|\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| \geq k,$

$$P\{H_0 \text{为真}, \text{拒绝} H_0\} = P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left\{\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \geq k\right\} = \alpha$$

得 $k = t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$

故拒绝域为 $t=\dfrac{\left|(\bar{x}-\bar{y})-\delta\right|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$

关于均值差的其它两个检验问题的拒绝域见表8.1, 常用 $\delta=0$ 的情况.

当两个正态总体的方差均为已知(不一定相等)时,我们可用 Z 检验法来检验两正态总体均值差的假设问题, 见表8.1 .

例4 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其它条件都尽可能做到相同.先采用标准方法炼一炉, 然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了**10**炉, 其得率分别为**(1)**标准方法: **78.1, 72.4, 76.2, 74.3, 77.4, 78.4, 76.0, 75.5, 76.7, 77.3; (2)**新方法: **79.1, 81.0, 77.3, 79.1, 80.0, 78.1, 79.1, 77.3, 80.2, 82.1;** 设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2均为未知, 问建议的新操作方法能否提高得率?(取$\alpha=0.05$)

解 需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 > 0,\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0.$

分别求出标准方法和新方法下的样本均值和样本方差:

$$n_1 = 10, \quad \bar{x} = 76.23, \quad s_1^2 = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \quad \bar{y} = 79.43, \quad s_2^2 = 2.225,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(10-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2}{10+10-2} = 2.775,$

查表可知 $t_{0.05}(18) = 1.7341,$

查表8.1知其拒绝域为 $t \le -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$.

因为 $t = \dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}} = -4.295,$

$\le -t_{0.05}(18) = -1.7341,$

所以拒绝 H_0,

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优.

附表8.1

例5 有甲、乙两台机床加工相同的产品, 从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件, 测得产品直径(单位:*mm*)为

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2,

试比较甲、乙两台机床加工的产品直径有无显著差异? 假定两台机床加工的产品直径都服从正态分布, 且总体方差相等. $(\alpha = 0.05)$

解 依题意, 两总体 X 和 Y 分别服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

需要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 19.925, \quad s_1^2 = 0.216,$$

$$n_2 = 7, \quad \bar{y} = 20.000, \quad s_2^2 = 0.397,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(8-1)s_1^2 + (7-1)s_2^2}{8+7-2} = 0.547,$

查表可知 $t_{0.05}(13) = 2.160,$

$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{7}}} = -0.265 < 2.160,$ 所以接受 H_0,

即甲、乙两台机床加工的产品直径无显著差异.

三、基于成对数据的检验（ t 检验 ）

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同的条件下作对比试验, 得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为逐对比较法.

例6 有两台光谱仪I_x , I_y ,用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y(\%)$	0.10	0.09	−0.12	0.18	−0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异? $(\alpha = 0.01)$

解 本题中的数据是成对的, 即对同一试块测出一对数据, 我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素, 如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的. [这也表明不能将光谱仪I_x 对9个试块的测量结果(即表中第一行)看成是一个样本, 同样也不能将表中第二行看成一个样本, 因此不能用表8-1中第4栏(190页)的检验法作检验].

而同一对中两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的. 这样, 局限于各对中两个数据来比较就能排除种种其他因素, 而只考虑单独由仪器的性能所产生的影响.

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$,

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 来自正态总体 $N(\mu_d, \sigma^2)$,

这里 μ_d, σ^2 均为未知. 若两台机器的性能一样,

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布, 其均值为零.

要检验假设 $H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 样本方差 s^2,

按表8.1中第二栏中关于单个正态分布均值的 t 检验, 知拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\bar{d}-0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

由 $n = 9,\ \ t_{\alpha/2}(8) = t_{0.005}(8) = 3.3554,\ \ \bar{d} = 0.06,$

$s = 0.1227,$ 可知 $|t| = 1.467 < 3.3554,$ 所以接受 H_0,

认为这两台仪器的测量结果无显著的差异.

四、小结

本节学习的正态总体均值的假设检验有:

1. 单个总体均值 μ 的检验 — —Z 检验;

2. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验 — — t 检验;

3. 基于成对数据的检验 — — t 检验;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$t\ge t_\alpha(n-1)$ $t\le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-2)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$t\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

第三节 正态总体方差的假设检验

一、单个总体的情况

二、两个总体的情况

三、小结

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

$X_1, X_2,\cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,

(1) 要求检验假设: $H_0:\sigma^2=\sigma_0{}^2$, $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0{}^2$,

其中σ_0为已知常数. 设显著水平为α,

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 当 H_0 为真时,

比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0{}^2}$ 在1附近摆动, 不应过分大于1或过分小于1,

根据第六章§2, 当 H_0 为真时, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \sim \chi^2(n-1)$,

取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}}$ 作为统计量,

拒绝域的形式 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \le k_1$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \ge k_2$,

此处 k_1 和 k_2 的值由下式确定:

$P\{H_0$ 为真, 拒绝 $H_0\}$

$$= P_{\sigma_0^{\ 2}}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}} \ge k_2\right)\right\} = \alpha.$$

为了计算方便, 习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\right\}=\frac{\alpha}{2},$$

故得 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\quad k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1).$

拒绝域为:

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\ \text{或}\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1).}$$

指它们的和集

(2)单边检验问题的拒绝域 (设显著水平为α)

右边假设检验: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$,

因为H_0中的全部σ^2都比H_1中的σ^2要小,

当H_1为真时, S^2的观察值s^2往往偏大,

拒绝域的形式为: $s^2 \ge k$.

此处k的值由下式确定:

$$P\{H_0\text{为真}, \text{拒绝}H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\{S^2 \ge k\}$$

$$= P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}$$

$$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}. \quad (因为\sigma^2 \le \sigma_0^2)$$

要使 $P\{H_0 为真, 拒绝 H_0\} \le \alpha,$

只需令 $P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\} = \alpha.$

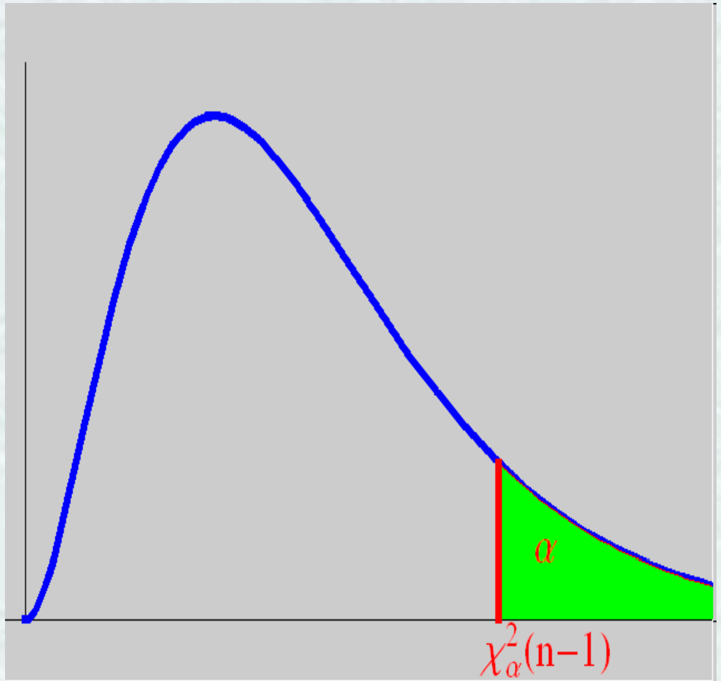
因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以$\frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi_\alpha^2(n-1),$

故 $k=\dfrac{\sigma_0{}^2}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1)$,

右边检验问题的拒绝域为

$s^2\geq\dfrac{\sigma_0{}^2}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1)$,

即 $\boxed{\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\geq\chi_\alpha^2(n-1).}$



同理左边检验问题: $H_0:\sigma^2\geq\sigma_0{}^2$, $H_1:\sigma^2<\sigma_0{}^2$,

拒绝域为 $\boxed{\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\leq\chi_{1-\alpha}^2(n-1).}$

上述检验法称为 χ^2 检验法.

例1 某厂生产的某种型号的电池, 其寿命长期以来服从方差σ^2=5000 (小时^2) 的正态分布, 现有一批这种电池, 从它生产情况来看, 寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池, 测出其寿命的样本方差 s^2=9200(小时^2). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化?

$(\alpha = 0.02)$

解 要检验假设 $H_0: \sigma^2 = 5000, \quad H_1: \sigma^2 \neq 5000,$

$n = 26, \quad \alpha = 0.02, \quad \sigma_0^2 = 5000,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314,$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524,$$

拒绝域为: $\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}\le 11.524,$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}\ge 44.314$.

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}=\dfrac{25\times 9200}{5000}=46>44.314$,

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

例2 (续第八章第二节例1)如果只假设切割长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒长度的标准差有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 因为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0: \sigma = 0.15$, $H_1: \sigma \neq 0.15$,

即 $H_0: \sigma^2 = 0.0225$, $H_1: \sigma^2 \neq 0.0225$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s^2 = 0.056$,

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} = \dfrac{14 \times 0.056}{0.0225} = 34.844$,

查表得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(14) = 5.629,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(14) = 26.119,$

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} = \dfrac{14 \times 0.056}{0.0225} = 34.844 > 26.119,$

所以拒绝 $H_0,$

认为该机切割的金属棒长度的标准差有显著变化.

例3 某厂生产的铜丝的折断力指标服从正态分布, 现随机抽取9根, 检查其折断力, 测得数据如下(单位:千克): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20? $(\alpha = 0.05)$

解 按题意要检验 $H_0: \sigma^2 = 20,\ H_1: \sigma^2 \neq 20,$

$n = 9, \quad \bar{x} = 287.89, \quad s^2 = 20.36,$

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18, \quad \chi^2_{0.025}(8) = 17.5,$

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8 \times 20.36}{20} = 8.14, \quad 2.18 < 8.14 < 17.5,$

故接受 H_0, 认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

例4 某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布, 按规定产品尺寸的方差 σ^2不得超过0.1, 为检验该自动车床的工作精度, 随机的取25件产品, 测得样本方差 s^2=0.1975, $\bar{x} = 3.86$. 问该车床生产的产品是否达到所要求的精度? $(\alpha = 0.05)$

解 要检验假设 $H_0: \sigma^2 \le 0.1, \quad H_1: \sigma^2 > 0.1,$

$n = 25, \quad \chi^2_{0.05}(24) = 36.415,$

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} = \dfrac{24 \times 0.1975}{0.1} = 47.4 > 36.415,$

所以拒绝 H_0,

认为该车床生产的产品没有达到所要求的精度.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2})$的样本,

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$ 的样本,

且设两样本独立, 其样本方差为 $S_1^{\ 2}, S_2^{\ 2}$.

又设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^{\ 2}, \sigma_2^{\ 2}$均为未知,

需要检验假设: $H_0: \sigma_1^{\ 2} \le \sigma_2^{\ 2}$, $H_1: \sigma_1^{\ 2} > \sigma_2^{\ 2}$,

当 H_0 为真时, $E(S_1^2)=\sigma_1^{\ 2} \le \sigma_2^{\ 2} = E(S_2^{\ 2})$,

当 H_1 为真时, $E(S_1^2)=\sigma_1^{\ 2} > \sigma_2^{\ 2} = E(S_2^{\ 2})$,

当 H_1 为真时, 观察值 $\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}$ 有偏大的趋势,

故拒绝域的形式为 $\dfrac{s_1^{\ 2}}{s_2^{\ 2}} \ge k$,

此处 k 的值由下式确定:

$$P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} = P_{\sigma_1^{\ 2} \le \sigma_2^{\ 2}}\left\{\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \ge k\right\}$$

$$\leq P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq k\right\}, \quad (\text{因为} \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \leq 1)$$

要使 $P\{H_0 \text{为真}, \text{拒绝} H_0\} \leq \alpha,$

只需令 $P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq k\right\} = \alpha.$

根据**第六章§2定理四**知

定理四

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

即 $k = F_{\alpha}(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$

检验问题的拒绝域为 $\boxed{F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha}(n_1 - 1,\ n_2 - 1).}$

上述检验法称为 ***F* 检验法**.

例5 试对第八章第二节例4中的数据检验假设

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. (取 $\alpha=0.01$)

解 $n_1=n_2=10$, 拒绝域见表 8.1.

附表8-1

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\geq F_{0.005}(10-1,\ 10-1)=6.54$$

或 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\leq F_{1-0.005}(10-1,\ 10-1)$

$$=\frac{1}{F_{0.005}(9,\ 9)}=\frac{1}{6.54}=0.153,$$

因为 $s_1^2 = 3.325, \quad s_2^2 = 2.225,$

所以 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.49,$

$$0.153 < \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.49 < 6.54,$$

故接受 H_0, 认为两总体方差相等.

两总体方差相等也称两总体具有方差齐性.

例6 试对第七章第五节例9中的数据检验假设

$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. (取 $\alpha = 0.1$)

解 $n_1 = 18$, $n_2 = 13$, 拒绝域见表 8.2. 附表8-2

$$F_\alpha(n_1 - 1, \ n_2 - 1) = F_{0.1}(18 - 1, \ 13 - 1) = 1.96,$$

拒绝域为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge 1.96,$

因为 $s_1^2 = 0.34$, $s_2^2 = 0.29$, $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.17 < 1.96,$

故接受 H_0, 认为两总体具有方差齐性.

例7 两台车床加工同一零件, 分别取6件和9件测量直径, 得: $s_x^2 = 0.345$, $s_y^2 = 0.357$. 假定零件直径服从正态分布, 能否据此断定 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. $(\alpha = 0.05)$

解 本题为方差齐性检验:

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

$$F_{0.025}(5,\ 8) = 4.82, \quad F_{0.975}(5,\ 8) = 0.148,$$

取统计量 $F = \dfrac{s_x^2}{s_y^2} = \dfrac{0.345}{0.357} = 0.9644,$

$0.148 < F < 4.82$, 故接受 H_0, 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

例8 分别用两个不同的计算机系统检索10个资料, 测得平均检索时间及方差(单位:秒)如下:

$$\bar{x}=3.097,\ \ \bar{y}=3.179,\ \ s_x^{\ 2}=2.67,\ \ s_y^{\ 2}=1.21,$$

假定检索时间服从正态分布, 问这两系统检索资料有无明显差别? $(\alpha=0.05)$

解 根据题中条件, 首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0:\sigma_x^{\ 2}=\sigma_y^{\ 2},\quad H_1:\sigma_x^{\ 2}\neq\sigma_y^{\ 2}.$

$$F_{0.025}(9,\ 9)=4.03,\quad F_{0.975}(9,\ 9)=0.248,$$

取统计量 $F=\dfrac{s_x^{\ 2}}{s_y^{\ 2}}=\dfrac{2.67}{1.21}=2.12,$

$0.248 < F = 2.12 < 4.03,$

故接受 H_0，　认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

再验证 $\mu_x = \mu_y$,

假设 $H_0: \mu_x = \mu_y$,　$H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

取统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$.

当H_0为真时, $t \sim t(n_1+n_2-2)$.

$n_1 = 10$, $n_2 = 10$, $t_{0.05}(18) = 2.101$,

$$因为\ t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{3.097-2.179}{\sqrt{\frac{10(2.67+1.21)}{18}}\cdot\sqrt{\frac{2}{10}}}$$

$= 1.436 < 2.101$, 故接受 H_0,

认为两系统检索资料时间无明显差别.

三、小结

1. 单个正态总体方差的检验法 —— χ^2 检验法;

2. 两个正态总体方差的检验法 —— F 检验法;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

附表8-1

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5				$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $(\mu_1, \mu_2$未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

$$F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \text{或}$$
$$F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

第六章§2定理四

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且这两个样本互相独立，设 $\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$，

$\bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是这两个样本的均值，

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$$

分别是这两个样本的方 差,则有

(1) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$

(2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时,

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad S_w=\sqrt{S_w^2}.$