电动力学

第一章：电磁现象的基本规律，电磁相互作用体系的守恒定律

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

March 21, 2019

电磁场能量的描写方法:

电磁场是一种物质，具有能量、动量和角动量. 电磁场和带电粒子之间的相互作用过程可以看做能量、动量等物理量的交换过程.

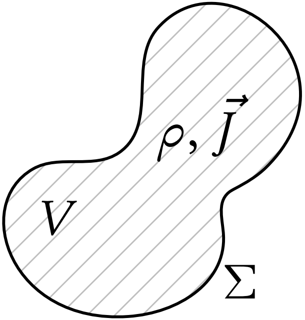
- 电磁场的能量、动量是分布于整个空间的.
- 电磁场的能量、动量是可以在空间中传播的.

所以，需要用两个物理量分别描写电磁场能量的分布和传播:

1. 能量密度 $w = w(\vec{x}, t)$: 单位体积的能量.
2. 能流密度 $\vec{S} = \vec{S}(\vec{x}, t)$: 单位时间垂直穿过单位横截面的能量，方向为能量传输的方向.

能量守恒定律:

考虑空间中某区域 V,其界面为闭合曲面 Σ. 设 V 内有电荷、电流分布 ρ 和 $\vec{J}$ 以及电磁场.



此体系的能量守恒定律写为:

$$-\oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{f} \cdot \vec{v}\, dV + \frac{d}{dt} \int_V w\, dV$$

式中,

- 单位时间内通过界面 Σ 流入区域 V 中的能量:

$$-\oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$$

- 电磁场对带电粒子所作功率:
$\int_V \vec{f} \cdot \vec{v}\, dV$
- 电磁场的能量增加率:
$\frac{d}{dt} \int_V w\, dV$

能量守恒定律(续):

讨论:

1. 若 V 包括整个空间，则:

$$\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}dV = -\frac{d}{dt}\int_V w dV$$

   即电磁场对电荷、电流所作的总功率等于场的总能量的时间减小率，因此电磁场与电荷、电流构成的体系的总能量守恒.

2. 能量守恒定律还可以表为微分形式:

$$-\nabla\cdot\vec{S} = \vec{f}\cdot\vec{v} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

w 与 $\vec{S}$ 的表达式:

电磁场施加于自由电荷、传导电流分布的 Lorentz 力密度矢量为,

$$\vec{f} = \rho_f \vec{E} + \vec{J}_f \times \vec{B}$$

所以,

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \rho_f \vec{v} \cdot \vec{E} + \rho_f \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{J}_f \cdot \vec{E}$$

式中 $\vec{J}_f = \rho_f \vec{v}$. 根据麦克斯韦方程知:

$$\vec{J}_f = \nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}$$

所以,

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$$

进一步的分析需要处理 $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$. 在直角坐标系中,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i,$$
$$\nabla \cdot \vec{a} = \partial_i a_i,$$
$$\nabla \times \vec{a} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j a_k$$

w 与 $\vec{S}$ 的表达式 (续一):

采取直角坐标系,

$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}) &= E_i(\nabla\times\vec{H})_i = \epsilon_{ijk}E_i\partial_j H_k \\ &= \partial_j\big(\epsilon_{ijk}E_iH_k\big) - \epsilon_{ijk}(\partial_j E_i)H_k \\ &= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) \\ &= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}\end{aligned}$$

最后一步使用了法拉第电磁感应定律.所以,

$$\vec{f}\cdot\vec{v} = -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B} - \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}$$

将此式于微分形式的能量守恒定律 $-\nabla\cdot\vec{S} = \vec{f}\cdot\vec{v} + \partial_t w$ 比较, 得知:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{E}\times\vec{H} \\ \partial_t w &= \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} + \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}\end{aligned}$$

w 与 $\vec{S}$ 的表达式 (续二):

能量密度必须分不同情况讨论:

- 在真空中，$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$. 所以:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad w = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right].$$

- 把极化能和磁化能包括在介质的总电磁能量中，可给出一般介质中场能量的改变量:

$$\delta w = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

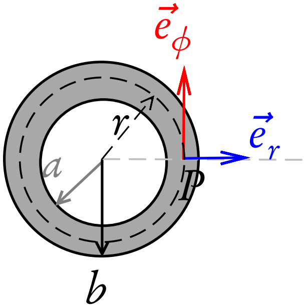
- 对于各向同性的线性介质，$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, 从而:

$$w = \frac{1}{2}\left[\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}\right]$$

例一：

同轴传输线内导体半径为 a，外导线半径为 b，两导线间为均匀绝缘介质. 导线载有电流 I，两导线间的电压为 U.

1. 忽略导线的电阻，计算介质中的能流 $\vec{S}$ 和传输功率；
2. 计及内导线的有限电导率，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率.



解： 考虑介质中的 P 点，其半径为 r $(a < r < b)$. 由安培环路定律知 P 点的磁场强度，

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$$

设导线上线电荷密度为 τ，则 P 点处的电场强度为：

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r$$

电荷线密度 τ 可以用导线间电压 (这是已知量) 表出:

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln(b/a) \quad \rightsquigarrow \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon U}{\ln(b/a)}$$

故能流密度矢量 (坡印亭矢量) 为:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I\tau}{4\pi^2\varepsilon r^2}(\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi) = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln(b/a)}\hat{k}$$

传输线的总传输功率为:

$$\begin{aligned} \mathscr{P} &= \int_a^b \vec{S} \cdot \hat{k}\; 2\pi r dr \\ &= \int_a^b \frac{UI}{2\pi r^2 \ln(b/a)} 2\pi r dr = \frac{UI}{\ln(b/a)} \int_a^b \frac{1}{r} dr = UI \end{aligned}$$

计及内导体的有限电导率 σ，则内导体中的场点 P 处电场强度不为零. 按照欧姆定律和安培环路定律，P 点的电场强度、磁场强度分别为：

$$\vec{E}' = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}\hat{k}, \quad \vec{H}' = \frac{Ir}{2\pi a^2}\vec{e}_\phi, \quad 0 \leq r \leq a.$$

所以，内导体中场点 P 处的能流密度矢量是：

$$\vec{S}' = \vec{E}' \times \vec{H}' = \frac{I^2 r}{2\pi^2 \sigma a^4}(\hat{k} \times \vec{e}_\phi) = -\frac{I^2 r}{2\pi^2 \sigma a^4}\vec{e}_r, \quad 0 \leq r \leq a$$

显然，这部分能量流入导体内部作为焦耳热消耗掉了. 流入长度 L 的一段导线内部的功率为：

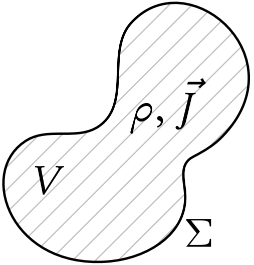
$$\mathscr{P}' = \vec{S}'|_{r=a} \cdot (-\vec{e}_r) 2\pi a L = (2\pi a L) \cdot \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma a^3} = I^2 \frac{L}{\pi a^2 \sigma} = I^2 R$$

式中 $R = L/\sigma\pi a^2$ 是导线的电阻.

电磁场的动量:

作为传递带电粒子之间电磁相互作用的媒介，电磁场本身也是物质存在的一种基本形式. 电磁场本身也具有能量、动量、角动量等物质基本属性.

现在研究电磁场的“动量”.



我们的基本研究方法是分析电磁场与带电粒子之间相互作用的 Lorenz 力公式.

考虑空间的某区域 V，其内有电荷电流分布 $(\rho, \vec{J})$ 及电磁场.

- V 内的场与电荷、电流之间由于相互作用会发生动量转移.
- V 内的场与 V 外的电磁场或者电荷、电流分布也可以通过界面 Σ 发生动量转移.

电磁场的动量 (二):

从物理直观上讲:

1. 若将 V 内、外的电磁场及电荷、电流分布作为一个整体，则这个整体可以看作是一个孤立体系，其总动量应该是不随时间变化的.
2. 若仅仅把 V 内的电磁场作为研究对象，则其与 V 内的电荷、电流系统，以及 V 外的环境之间都可以有动量的交换.

于是，V 内电磁场的动量守恒定律可以表述为:

> 单位时间内从区域 V 的外部通过界面 Σ 传入到 V 内的动量应等于 V 内电荷、电流的动量增加率与 V 内电磁场本身的动量增加率之和.

以下我们利用 Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式把电磁场的动量守恒定律写成数学方程.

Lorentz 力公式:

区域 V 内的电荷、电流所受到的电磁场作用力由 Lorentz 力公式给出. 以 $\vec{f}$ 表示 Lorentz 力密度, 则:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

借助于真空中的 Maxwell 方程组, 可以把上式右端改写为:

$$\begin{aligned}
\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} &= \left(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right)\vec{E} + \left[\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t \vec{E}\right] \times \vec{B} \\
&= \left(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \times \vec{B} - \epsilon_0 \left(\partial_t \vec{E}\right) \times \vec{B} \\
&= \left(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \\
&\quad + \epsilon_0 \vec{E} \times \partial_t \vec{B} \\
&= \left(\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \times \vec{B} - \epsilon_0 \partial_t \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \\
&\quad - \epsilon_0 \vec{E} \times \left(\nabla \times \vec{E}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\epsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \left[\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \epsilon_0\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{E}\right] \\
&\qquad - \epsilon_0\partial_t\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \\
&= \left[\left(\epsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}\right] \\
&\qquad + \left[\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \epsilon_0\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{E}\right] - \epsilon_0\partial_t\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}
$$

于是，Lorentz 力公式可以重新表述为:

$$
\begin{aligned}
\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\right) &= \Big[\left(\epsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B} \\
&\qquad + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B} + \epsilon_0\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{E}\Big]
\end{aligned}
$$

Question : 此式有何物理意义?

Claim： 上式应诠释为区域 V 内由电荷、电流分布以及电磁场共同构成的体系的动量守恒定律.

理由如下.

按照 Newton 第二定律，安培力密度 $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$ 可解释为 V 内电荷、电流分布的动量密度 $\vec{\wp}$ 的“时间增加率”：

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\wp} = \vec{f}$$

电荷、电流分布的总动量为：

$$\vec{p} = \int_V d^3x\, \vec{\wp}$$

显然，若 V 内的电荷、电流分布由 N 个离散的点电荷所构成，第 i 个点电荷位矢为 $\vec{x}_i$、动量 $\vec{p}_i$，则有：

$$\vec{\wp} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

电磁场的动量密度：

因此，倘若把前式解释成 V 内电磁场的动量守恒定律，则：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\wp}+\epsilon_0\,\vec{E}\times\vec{B}\right) = \Big[(\epsilon_0\nabla\cdot\vec{E})\,\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\epsilon_0\,(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}\Big]$$

1. 电磁场本身的动量密度须定义为：

$$\vec{g}=\epsilon_0\,\vec{E}\times\vec{B}$$

   显然，电磁场的动量密度几乎等同于其能流密度矢量：

$$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\,\vec{S}$$

2. 上页中 Lorentz 力公式右端方括号中的量应该表示单位时间内区域 V 内、外电磁场的动量转移.

为了证实第二点结论，我们还需做进一步的分析.

$\vec{g}$ 的物理意义：

让我们尝试从力与动量的关系这一视角理解一下电磁场动量密度的物理意义. 作为对比，电荷电流分布 $(\rho, \vec{J})$ 在电磁场 $(\vec{E}, \vec{B})$ 中的运动由下列动力学方程支配，

$$\partial_t \vec{\wp} = \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

式中 $\vec{\wp}$ 是电荷电流分布的动量密度.

现在研究电磁场动量密度

$$\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

的时间变化率：

$$\partial_t \vec{g} = \left(\epsilon_0 \partial_t \vec{E}\right) \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times \partial_t \vec{B}$$

- 注意到电磁场本身不带电、但电场强度的时间变化率可以诠释为位移电流密度矢量 $\vec{J}_D = \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$，因此，前式右端第一项

$$\left(\epsilon_0 \partial_t \vec{E}\right) \times \vec{B} = \vec{J}_D \times \vec{B} = \vec{f}_D$$

可以理解为电磁场作用于位移电流上的安培力密度矢量.

- 为了看清 $\epsilon_0\vec{E}\times\partial_t\vec{B}$ 的物理意义，试将 Faraday 电磁感应定律与 Maxwell 方程做个比较：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

按如下方式引入位移磁流密度矢量 $\vec{J}_D^{(M)}$，$\nabla\times\vec{E}=\vec{J}_D^{(M)}/\epsilon_0$，我们有[1]：

$$\vec{J}_D^{(M)}=-\epsilon_0\partial_t\vec{B}$$

且：

$$\epsilon_0\vec{E}\times\partial_t\vec{B}=\big(-\epsilon_0\partial_t\vec{B}\big)\times\vec{E}=\vec{J}_D^{(M)}\times\vec{E}=\vec{f}_D^{(M)}$$

可以解释为电磁场作用于位移磁流的磁安培力密度.

因此，

$$\partial_t\vec{g}=\vec{f}_D+\vec{f}_D^{(M)}$$

[1] 因为不存在非零的磁荷密度分布，传导磁流是不存在的.

电磁场的动量流密度张量:

期待中的"电磁场动量守恒定律"右端是两个矢量之和:

$$\vec{f}+\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}=\vec{\mathscr{E}}+\vec{\mathscr{B}}$$

一个是矢量

$$\vec{\mathscr{E}}\equiv\epsilon_0\,(\nabla\cdot\vec{E})\,\vec{E}+\epsilon_0\,(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}$$

另一个是它的磁感应强度对应 $\vec{\mathscr{B}}$. 在直角坐标系中,

$$\begin{aligned}\vec{\mathscr{E}}&=\epsilon_0\,(\partial_i E_i)\,E_j\,\vec{e}_j+\epsilon_0\,\vec{e}_j\,\epsilon_{jkl}\,(\nabla\times\vec{E})_k\,E_l\\&=\epsilon_0\,\vec{e}_j\left[E_j\partial_i E_i+\epsilon_{jkl}\,\epsilon_{kim}(\partial_i E_m)\,E_l\right]\\&=\epsilon_0\,\vec{e}_j\left[E_j\partial_i E_i+(\delta_{jm}\,\delta_{il}-\delta_{ji}\,\delta_{lm})\,E_l\,\partial_i E_m\right]\\&=\epsilon_0\,\vec{e}_j\left[E_j\,\partial_i E_i+E_i\,\partial_i E_j-E_l\,\partial_j E_l\right]=\vec{e}_j\partial_i\left[\epsilon_0\,E_i\,E_j-\epsilon_0\,\delta_{ij}\,\frac{1}{2}\vec{E}^2\right]\end{aligned}$$

同理,

$$\vec{\mathscr{B}}\equiv\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec{B})\,\vec{B}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}=\vec{e}_j\partial_i\left[\frac{1}{\mu_0}B_i\,B_j-\frac{1}{\mu_0}\,\delta_{ij}\,\frac{1}{2}\vec{B}^2\right]$$

现在在三维空间中引入一个 2 阶对称张量 $\mathscr{T}$，其在直角坐标系中的表达式如下:

$$\mathscr{T} = \vec{e}_i\vec{e}_j\,\mathscr{T}_{ij}$$

式中，

$$\mathscr{T}_{ij} := -\epsilon_0\,E_i\,E_j - \frac{1}{\mu_0}\,B_i\,B_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\epsilon_0\,\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}^2\right)$$

张量 $\mathscr{T}$ 的散度为:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathscr{T} &= (\vec{e}_i\,\partial_i)\cdot(\vec{e}_k\vec{e}_j\,\mathscr{T}_{kj}) \\
&= (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k)\,\vec{e}_j\,\partial_i\mathscr{T}_{kj} \\
&= \vec{e}_j\,\partial_i\mathscr{T}_{ij} \\
&= -\vec{e}_j\,\partial_i\left[\epsilon_0\,E_i\,E_j + \frac{1}{\mu_0}\,B_i\,B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\epsilon_0\,\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}^2\right)\right] \\
&= -\left(\vec{\mathscr{E}} + \vec{\mathscr{B}}\right)
\end{aligned}$$

电磁场的动量流密度张量 (三):

因此，电磁场的动量守恒定律可重新表为:

$$\vec{f} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathscr{T}$$

求此式在区域 V 的体积分，得:

$$\int_V d^3x \vec{f} + \frac{d}{dt}\int_V d^3x \vec{g} = -\int_V d^3x \nabla \cdot \mathscr{T} = -\oint_\Sigma d\vec{\sigma} \cdot \mathscr{T}$$

注意到

$$\int_V d^3x \vec{f} = \vec{F} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i$$

是区域 V 内电荷电流分布总动量的时间变化率，可以将上式等价地改写为:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \vec{p}_i + \int_V d^3x \vec{g}\right] = -\oint_\Sigma d\vec{\sigma} \cdot \mathscr{T}$$

电磁场的动量流密度张量 (四):

上式左端是 V 内电荷、电流分布与电磁场的总动量的时间增加率.所以，其右端应该表示单位时间内从 V 的外部环境通过界面 Σ 流入到 V 内的动量.这就是动量守恒的意义.

- 对称张量 $\mathscr{T}$ 称为电磁场的 “动量流密度” 张量，其在直角坐标系中的分量具有如下显示表达式:

$$\mathscr{T}_{ij} = -\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)$$

- 若区域 V 内外没有电磁动量交换，$\mathscr{T}_{ij} = 0$，则动量守恒定律退化为:

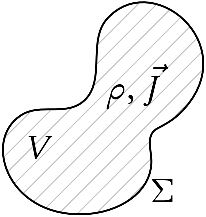
$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \vec{p}_i + \int_V d^3x \vec{g}\right] = 0$$

显见，即使在这种简化情形中，电荷电流分布自身的总动量也是不守恒的[2].

[2] 等价地说，安培力或者 Lorentz 力不服从 Newton 第三定律.

电磁场的动量流密度张量 (五):

关于 $\mathscr{T}$ 的讨论:



1. $\mathscr{T}$ 的物理意义是: 单位时间内垂直通过界面 Σ 上单位面积横截面元从区域 V 流出 (到外部环境中) 的动量.
2. 单位时间内垂直通过整个界面 Σ 流出区域 V 的总动量为:

$$\oint_{\Sigma} d\vec{\sigma} \cdot \mathscr{T}$$

按照 Newton 第二定律, 这就是区域 V 中的电磁场通过界面 Σ 施加给外部环境的合力:

$$\vec{F} = \oint_{\Sigma} d\vec{\sigma} \cdot \mathscr{T} = \oint_{\Sigma} d\sigma\, \vec{n} \cdot \mathscr{T}$$

式中的 $\vec{n}$ 表示面元 $d\sigma$ 的单位外法矢.界面 Σ 上的辐射压强是:

$$P = \vec{n} \cdot \left(\vec{n} \cdot \overline{\mathscr{T}}\right) = n_i n_j \overline{\mathscr{T}}_{ij}$$

例二：

例： 设空间存在着均匀的电场分布 $\vec{E}$. 试求此电场的应力.

解： 在电磁场占据的空间中考虑一个区域 V，设其边界面为闭合曲面 Σ. 所谓应力 (Stress)，指的是 V 内的电磁场通过界面 Σ 作用于外部环境单位面积上的力：

$$\vec{f}_n = \vec{n} \cdot \mathscr{T}$$

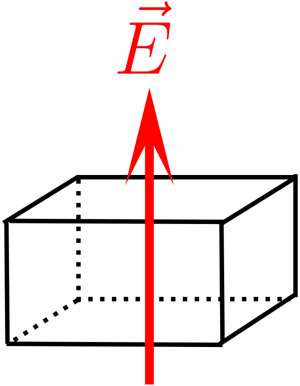
此处的 $\vec{n}$ 表示界面 Σ 的外单位法矢量. 对于题设的电场分布，其应力为：

$$\begin{aligned}\vec{f}_n &= \vec{n} \cdot \vec{e}_i \vec{e}_j \mathscr{T}_{ij} \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{e}_i)\, \vec{e}_j \left(-\epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} \epsilon_0 E^2 \right)\end{aligned}$$

若进一步取电场强度沿 $\vec{e}_3$ 方向，则上式简化为：

$$\vec{f}_n = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Big[(\vec{n} \cdot \vec{e}_1)\, \vec{e}_1 + (\vec{n} \cdot \vec{e}_2)\, \vec{e}_2 - (\vec{n} \cdot \vec{e}_3)\, \vec{e}_3 \Big]$$

计算结果表明，如果考虑单位正方体内的电场[3]，则有：



1. 沿着电场强度的方向应力表现为“拉力”：

$$\vec{f}_{\pm 3} = \mp \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \vec{e}_3$$

2. 在与电场强度垂直的边界面上应力表现为“压缩力”：

$$\vec{f}_{\pm 1} = \pm \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \vec{e}_1, \quad \vec{f}_{\pm 2} = \pm \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \vec{e}_2.$$

3. 纵向拉力与横向压缩力的大小相等，均为 $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

可见，电场线好像是拉紧了的橡皮筋．场的各部分之间存在着作用力． ⇝ 即使在静电场情形下电场力的传递也不是超距的.

[3]即把 $\vec{n}$ 看作正方体六个边界面中某一个的单位外法矢.

例三：

例： 质量为 m、电荷量为 Q 的荷电粒子在磁场 $\vec{B}$ 中运动. 试求此粒子的总动量.

解： 若粒子的运动速度为 $\vec{v}$，则其机械动量为 $m\vec{v}$. 此外，此粒子因为荷电将在周围空间激发静电场，从而粒子周围空间中的总场是既有电场成分又有磁场成分的电磁场. 鉴于静电场不能脱离荷电粒子独立存在，此情形中电磁场的总动量可以看作带电粒子动量的一部分.

引入稳恒磁场的矢势 $\vec{A}$ 使得 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，则电磁场的总动量计算如下：

$$\vec{G} = \int_V d^3x\, \vec{g} = \epsilon_0 \int_V d^3x\, \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A})$$

其中的被积函数可以改写为：

$$\begin{aligned} \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} E_j (\nabla \times \vec{A})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} E_j\, \epsilon_{kmn} \partial_m A_n \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk}\, E_j \partial_m A_n \end{aligned}$$

从而：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A}) &= \vec{e}_i\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\left[\partial_m(E_jA_n)-A_n\partial_m E_j\right] \\
&= \vec{e}_i\left[\partial_i(E_jA_j)-A_j\partial_i E_j\right]-\vec{e}_i\left[\partial_j(E_jA_i)-A_i\partial_j E_j\right] \\
&= \nabla(\vec{E}\cdot\vec{A})-A_j\nabla E_j-\vec{e}_i\nabla\cdot(A_i\vec{E})+\vec{A}\nabla\cdot\vec{E}
\end{aligned}
$$

注意到静电场的无旋性 $\nabla\times\vec{E}=0$，即：

$$
\vec{e}_k\epsilon_{mnk}\partial_m E_n=0,\quad \rightsquigarrow\ 0=\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\partial_m E_n=\partial_i E_j-\partial_j E_i,\quad \rightsquigarrow\ \partial_i E_j=\partial_j E_i
$$

并采取库仑规范：

$$
\nabla\cdot\vec{A}=0
$$

我们有：

$$
\begin{aligned}
A_j\nabla E_j &= \vec{e}_iA_j\partial_i E_j=\vec{e}_iA_j\partial_j E_i=\vec{e}_i\left[A_j(\partial_j E_i)+E_i(\partial_j A_j)\right] \\
&= \vec{e}_i\partial_j(A_jE_i) \\
&= \vec{e}_i\nabla\cdot(E_i\vec{A})
\end{aligned}
$$

于是：

$$\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\vec{E}\cdot\vec{A})-\vec{e}_i\nabla\cdot(A_i\vec{E}+E_i\vec{A})+\vec{A}\nabla\cdot\vec{E}$$

把此式代入到电磁场总动量的表达式中求体积分，注意到静电场的高斯定律，

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0=\frac{Q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

微积分中的奥高散度定理：

$$\int_V d^3x\,\nabla\cdot\vec{\mathscr{A}}=\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathscr{A}}$$

及其推论：

$$\int_V d^3x\,\nabla\psi=\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\,\psi$$

可得：

$$
\begin{aligned}
\vec{G} &= \epsilon_0 \int_V d^3x \big[\nabla(\vec{E}\cdot\vec{A}) - \vec{e}_i \nabla\cdot(A_i\vec{E} + E_i\vec{A}) + \vec{A}\nabla\cdot\vec{E}\big] \\
&= \epsilon_0 \oint_\Sigma d\vec{\sigma}(\vec{E}\cdot\vec{A}) - \vec{e}_i\epsilon_0 \oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot(A_i\vec{E} + E_i\vec{A}) \\
&\quad + \int_V d^3x\, Q\vec{A}\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\
&= \epsilon_0 \oint_\Sigma d\vec{\sigma}(\vec{E}\cdot\vec{A}) - \vec{e}_i\epsilon_0 \oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot(A_i\vec{E} + E_i\vec{A}) + Q\vec{A}(\vec{x}\,')
\end{aligned}
$$

设此荷电粒子的运动是在无界空间中进行的，Σ 是半径趋于无穷大的球面 ($r \rightsquigarrow \infty$)，则由于

$$
E_i \propto \frac{1}{r^2}, \quad A_i \propto \frac{1}{r}, \quad d\sigma \propto r^2
$$

我们看到 $\vec{G}$ 表达式中的两个面积分均趋于零. 所以:

$$
\vec{G} = Q\vec{A}(\vec{x}\,')
$$

由此知，荷电粒子在外磁场中运动时其总动量是：

$$\vec{P} = m\vec{v} + Q\vec{A}$$

提醒：

1. 磁场的矢势本身也具有鲜明的物理意义：它是单位点电荷处于此磁场中获得的电磁动量(即点电荷自场的动量).
2. 带电粒子的动量不仅与参考系的选择有关，也与规范选择有关. 换言之，即使带电粒子在某个参考系中静止不动，它在此参考系中也可能具有非零的动量.
3. 但须注意，出现在荷电粒子动力学方程

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

中的 $\vec{p}$ 仅仅是粒子的机械动量，$\vec{p} = m\vec{v}$.

4. 那么，荷电粒子的总动量 $\vec{P} = m\vec{v} + Q\vec{A}$ 有什么用呢？

作业:

1. 无限长导电圆柱内存在稳定的均匀电流. 设电流密度为 J、电导率为 σ、柱体半径为 R. 试计算单位时间内流入单位长圆柱体内的电磁能流.
2. 一个点电荷 Q 置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，求以 Q 为球心的球面所受的应力并说明其物理意义.
3. 将一个位于真空中的带电导体球切成两半，求它们之间的排斥力. 设导体球半径为 R，球上的电势为 V.

附加题 (optional):

- 点电荷占据的地点是其激发的静电场场强的奇点. Podolsky (1942) 把这个性质归因于光子的静止质量为零. 若光子的静止质量 $m \neq 0$，Podolsky 建议静电场的基本方程组可以修正为[4]

$$\left(1 - a^2\nabla^2\right)\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla\times\vec{E} = 0$$

式中 $a = \hbar/mc$ 是光子的德布罗意波长，$\hbar$ 与 c 分别是普朗克常数及真空中的光速. 若根据 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 定义静电势，请通过求修正版高斯定律的球对称解获得点电荷静电场的在 $r = 0$ 处无奇点的场强与电势.

[4] B. Podolsky, Physics Review, **62**(1942)68.

能量中心：

描写质点组的机械运动时常引入质心概念. 若质点组内部各质点之间的相互作用力满足牛顿第三定律, $\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$, 则对孤立的质点组而言其质心始终保持静止或处于匀速直线运动的状态.

- 对于带电粒子构成的孤立体系, 因为体系内部各带电粒子之间的 Lorentz 力不满足牛顿第三定律, 体系的质心显然不会保持静止或者做匀速直线运动. 此情形下, 质心概念应被能量中心替代.
- 什么是带电粒子体系的能量中心?

我们从电磁相互作用的能量守恒定律出发,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{S} &= -\vec{f}\cdot\vec{v}=-\rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}=-\rho\vec{v}\cdot\vec{E} \\
&= -\vec{J}\cdot\vec{E}
\end{aligned}
$$

式中的$\vec{J}=\rho\vec{v}$是电荷电流体系的电流密度矢量. 给此式两端同乘场点的位置矢量$\vec{r}$. 注意到$\vec{r}=x_i\vec{e}_i$与t无关,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\vec{r}=\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}w),$$

$$(\nabla\cdot\vec{S})\vec{r}=(\partial_i S_i)x_j\vec{e}_j=\vec{e}_j\left[\partial_i(S_i x_j)-S_i(\partial_i x_j)\right]=\vec{e}_j\nabla\cdot(\vec{S}x_j)-\vec{S}.$$

我们有:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}w)&=-\vec{e}_i\nabla\cdot(\vec{S}x_i)+\vec{S}-(\vec{J}\cdot\vec{E})\vec{r}\\&=-\nabla\cdot(\vec{S}\vec{r})+c^2\vec{g}-(\vec{J}\cdot\vec{E})\vec{r}\end{aligned}$$

再给动量守恒定律

$$\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}+\vec{f}=-\nabla\cdot\mathscr{T}$$

两端同乘c^2t知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\vec{g}\,c^2t)}{\partial t}&=-\vec{f}c^2t-(\nabla\cdot\mathscr{T})c^2t+c^2\vec{g}\\&=-(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B})c^2t-\nabla\cdot(\mathscr{T}c^2t)+c^2\vec{g}\end{aligned}$$

结合以上两式，知：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w\vec{r}-\vec{g}\,c^2 t\right)+\nabla\cdot\left(\vec{S}\vec{r}-\mathscr{T}c^2 t\right)=-(\vec{J}\cdot\vec{E})\vec{r}+(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B})c^2 t$$

设电荷电流体系是由 N 个点电荷构成的点电荷组，

$$\rho=\sum_{i=1}^{N}q_i\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_i),\qquad \vec{J}=\sum_{i=1}^{N}q_i\vec{v}_i\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

点电荷组内每个点电荷受到的电磁场施加的 Lorentz 力及其功率分别为：

$$\vec{F}_i=q_i(\vec{E}+\vec{v}_i\times\vec{B}),\qquad \vec{v}_i\cdot\vec{F}_i=q_i\vec{v}_i\cdot\vec{E}$$

注意在上式中重复指标不代表求和. 利用这些关系，求蓝色方程在全空间的体积分，有：

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\left(w\vec{r}-\vec{g}c^2 t\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left[(\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i)\vec{r}-\vec{F}_i c^2 t\right]$$

再结合牛顿第二定律及其推论，

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \qquad \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i = \frac{d\mathscr{E}_i}{dt}$$

此处 $\vec{p}_i$ 与 $\mathscr{E}_i$ 是第 i 个点电荷的机械动量与机械能，我们可以把上式重新表达为：

$$\frac{d}{dt}\int d^3x(w\vec{r}) + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \frac{d\mathscr{E}_i}{dt} = c^2 \int d^3x\vec{g} + c^2 t\,\frac{d}{dt}\left[\int d^3x\vec{g} + \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right]$$

计及全空间中的动量守恒定律，上式进一步化简为：

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\int d^3x(w\vec{r}) + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i\mathscr{E}_i\right] = c^2\vec{G} + \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i\mathscr{E}_i}$$

式中 $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ 与 $\vec{G} = \int d^3x\vec{g}$ 分别是第 i 个点电荷的运动速度及全空间中电磁场的总动量。

- 能量中心：

精确类似于质点组质心概念的定义，电荷电流体系能量中心的位置矢量 $\vec{R}_E$ 定义为

$$\vec{R}_E = \frac{\int d^3x(w\vec{r}) + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \mathscr{E}_i}{\int d^3xw + \sum_{i=1}^{N} \mathscr{E}_i}$$

或者，

$$\boxed{\vec{R}_E = \frac{1}{U_{\text{tot}}} \left[\int d^3x(w\vec{r}) + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \mathscr{E}_i \right]}$$

式中我们用 U_{tot} 表示电荷电流体系的总能量[5]：

$$U_{\text{tot}} = \int d^3xw + \sum_{i=1}^{N} \mathscr{E}_i$$

[5] U_{tot} 中既包含体系中每个点电荷的机械能，也包含电磁场的能量.

把前页的结论与全空间中的能量守恒定律 $dU_{\text{tot}}/dt = 0$ 相结合，我们知电荷电流体系能量中心的运动速度为：

$$\begin{aligned}
\vec{v}_E &= \frac{d\vec{R}_E}{dt} \\
&= \frac{1}{U_{\text{tot}}}\frac{d}{dt}\left[\int d^3x(w\vec{r}) + \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\mathscr{E}_i\right] \\
&= \frac{c^2}{U_{\text{tot}}}\left[\vec{G} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{v}_i}{c^2}\mathscr{E}_i\right] \\
&= \frac{c^2}{U_{\text{tot}}}\left[\vec{G} + \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right] = \frac{c^2\vec{P}_{\text{tot}}}{U_{\text{tot}}}
\end{aligned}$$

写最后一行的等号时，我们使用了相对论力学中一个自由质点做机械运动时其速度、动量与能量的关系：

$$\vec{p}_i = \frac{\vec{v}_i}{c^2}\mathscr{E}_i$$

此外，$\vec{P}_{\rm tot}$ 是电荷电流体系的总动量：

$$\vec{P}_{\rm tot} = \vec{G} + \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

所以，若一个孤立的电荷电流体系的总动量为零，则其能量中心将保持静止状态. 这个结论通常称为能量中心定理.

隐藏动量：

设电荷电流体系由一个静止的点电荷 Q 及区域 V 中一个静止的电流分布 $\vec{j}$ 所构成，

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V d^3x\, \vec{r} \times \vec{j}$$

是体系的磁偶极矩矢量. 此电荷电流体系在周围空间中激发静电场与稳恒磁场，$\vec{E} = -\nabla\varphi$，$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. 体系的电磁动量计算如下：

$$
\begin{aligned}
\vec{G} &= \epsilon_0 \int_V d^3x\, \vec{E} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \int_V d^3x\, \nabla\varphi \times \vec{B} = \epsilon_0 \int_V d^3x\, \varphi(\nabla \times \vec{B}) \\
&= \frac{1}{c^2} \int_V d^3x\, \varphi \vec{j}
\end{aligned}
$$

若点电荷 Q 远离区域 V，其激发的静电场 $\vec{E}$ 在 V 内可以近似地看作是匀强电场，

$$
\varphi(\vec{r}) \approx \varphi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}
$$

则不难看到：

$$
\begin{aligned}
\vec{G} &= \frac{\varphi(0)}{c^2} \int_V d^3x\, \vec{j} - \frac{1}{c^2} \int_V d^3x\, (\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{j} \\
&= \frac{\varphi(0)}{c^2} \vec{e}_i \int_V d^3x\, j_i - \frac{E_i}{c^2} \vec{e}_k \int_V d^3x\, x_i j_k \\
&= -\frac{1}{c^2} \vec{e}_k E_i \epsilon_{ikl} m_l \\
&= -\frac{1}{c^2} \vec{m} \times \vec{E}
\end{aligned}
$$

计算中我们使用了两个恒等式[6](留作 optional 的练习):

$$\boxed{\int_V d^3x\, j_i = 0, \qquad \int_V d^3x\, x_i j_k = \epsilon_{ikl} m_l}$$

显然，一般情形下 $\vec{G} \neq 0$.

- 因为点电荷 Q，稳恒电流分布 $\vec{j}$ 与观测者三者处于相对静止的状态，$\vec{v}_E = 0$，按照能量中心定理，体系的总动量应等于零.
- 但是电磁场的动量 $\vec{G} \neq 0$.
- 点电荷 Q 静止不动，其机械动量为零 $(\vec{p}_Q = 0)$.
- 稳恒电流分布中带电粒子机械动量的矢量和 $\sum_i \vec{p}_i$ 等于什么？存在期望的等式 $\sum_i \vec{p}_i = -\vec{G}$ 吗？

[6] 第一个恒等式仅对稳恒电流成立.

区域 V 中的稳恒电流可视为在金属导体中做定向漂移，所以载流子是具有相同的电荷与质量的带电粒子（例如电子）. 倘若牛顿力学中质点机械动量的定义在此成立，$\vec{p}_i = m\vec{v}_i$，则有：

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m\vec{v}_i = \frac{m}{q}\sum_i q\vec{v}_i = \frac{m}{q}\int_V d^3x \left[\sum_i q\vec{v}_i \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_i)\right]$$
$$= \frac{m}{q}\int_V d^3x \vec{j}$$
$$= 0$$

此结论显然与能量中心定理冲突. 这是怎么回事？

- 解决问题的密钥是否认牛顿力学对质点机械动量的定义，代之以狭义相对论的动量定义. 所以，稳恒电流分布中每个载流子的机械动量应定义为：

$$\boxed{\vec{p}_i = \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \gamma_i m\vec{v}_i}$$

点电荷 Q 激发的静电场是保守力场 ($\vec{E} = -\nabla\varphi$)，稳恒电流分布中每一载流子在此静电场中的能量守恒. 若守恒的能量对于全体载流子均为 $\mathscr{E}$，则有：

$$\gamma_i mc^2 + q\varphi = \mathscr{E}, \qquad \rightsquigarrow \quad \gamma_i m = \frac{1}{c^2}(\mathscr{E} - q\varphi)$$

所以，

$$\begin{aligned}
\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \gamma_i m \vec{v}_i &= \frac{1}{qc^2}\sum_i (\mathscr{E} - q\varphi)\, q\vec{v}_i \\
&= \frac{\mathscr{E}}{qc^2}\sum_i q\vec{v}_i - \frac{1}{c^2}\sum_i \varphi q\vec{v}_i \\
&= \frac{\mathscr{E}}{qc^2}\int_V \vec{j}\, d^3x - \frac{1}{c^2}\int_V \varphi\vec{j}\, d^3x \\
&= -\frac{1}{c^2}\int_V \varphi\vec{j}\, d^3x = -\vec{G}
\end{aligned}$$

这个结果恰如我们从能量中心定理所做的预言. 这种因为采取了相对论的动量定义而找回的电荷电流体系的机械动量称为隐藏动量 (Hidden Momentum).

1. 诸位听粒子物理方面的科普演讲时，一个耳熟能详的名词是粒子的自旋. 特别地，光子的自旋为 1. 这到底是什么意思呢？

光子是量子力学的概念，其经典对应是平面电磁波. 自旋指的是基本粒子的一种内禀角动量. 因此，欲了解光子为什么具有自旋为 1 的性质，事先须对电磁场的角动量有初步的了解.

经典电动力学中，按照角动量守恒定律[7]可知，电磁场的角动量应定义为：

$$\vec{\mathscr{J}} = \int_V d^3x\, \vec{r} \times \vec{g}$$

式中 $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ 是电磁场的动量密度矢量.

[7] 略，细节请参见 Jackson 的书.

引入矢势替代磁感应强度，$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，可以把场的动量密度 $\vec{g}$ 改写为：

$$
\begin{aligned}
\vec{g} &= \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_0 \vec{e}_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} E_j \partial_m A_n \\
&= \epsilon_0 \vec{e}_i E_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\
&= \epsilon_0 E_j (\nabla A_j - \partial_j \vec{A})
\end{aligned}
$$

进而，

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathscr{J}} &= \int_V d^3x\, \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 \int_V d^3x\, E_j \left[(\vec{r} \times \nabla) A_j - \vec{r} \times \partial_j \vec{A} \right] \\
&= \epsilon_0 \int_V d^3x\, E_j (\vec{r} \times \nabla) A_j - \epsilon_0 \int_V d^3x\, \partial_j (E_j\, \vec{r} \times \vec{A}) \\
&\quad + \epsilon_0 \int_V d^3x\, (\partial_j E_j)\, \vec{r} \times \vec{A} + \epsilon_0 \int_V d^3x\, E_j\, (\partial_j \vec{r}) \times \vec{A} \\
&= \epsilon_0 \int_V d^3x\, E_j (\vec{r} \times \nabla) A_j - \epsilon_0 \oint_S d\sigma_j (E_j\, \vec{r} \times \vec{A}) \\
&\quad + \epsilon_0 \int_V d^3x\, (\nabla \cdot \vec{E})\, \vec{r} \times \vec{A} + \epsilon_0 \int_V d^3x\, E_j\, (\partial_j \vec{r}) \times \vec{A}
\end{aligned}
$$

分析：

- 假设电磁场仅分布于区域 V 之内，无场强分量通过边界面 S 溢出。如此，

$$\oint_S d\sigma_j (E_j \vec{r} \times \vec{A}) = 0$$

- 假设 V 内仅仅存在电磁场而没有激发电磁场的电荷、电流分布，则在区域 V 的内部有：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

- 使用直角坐标系，容易看出存在如下数学等式：

$$\partial_j \vec{r} = \partial_j (x_i \vec{e}_i) = \vec{e}_i \partial_j x_i = \vec{e}_i \delta_{ij} = \vec{e}_j$$

所以，

$$\vec{\mathscr{J}} = \epsilon_0 \int_V d^3x \, E_j (\vec{r} \times \nabla) A_j + \epsilon_0 \int_V d^3x \, \vec{E} \times \vec{A}$$

或者写为:

$$\vec{\mathscr{J}} = \vec{\mathscr{L}} + \vec{\mathscr{S}}$$

其中,

1. $\vec{\mathscr{L}}$ 称为电磁场的轨道角动量:

$$\vec{\mathscr{L}} = \epsilon_0 \int_V d^3x\, E_j(\vec{r} \times \nabla) A_j$$

   之所以如此命名是因为其被积函数中含有复合算符 $(\vec{r} \times \nabla)$,而量子力学体系的轨道角动量算符是 $-i\hbar(\vec{r} \times \nabla)$.

2. $\vec{\mathscr{S}}$ 称为电磁场的自旋角动量:

$$\vec{\mathscr{S}} = \epsilon_0 \int_V d^3x\, \vec{E} \times \vec{A}$$

   自旋角动量的特点是其被积函数不显含场点的位置矢径 $\vec{r}$.

为了研究光子的自旋，现在考虑真空中一列具有确定频率的时谐电磁波且具有圆极化。假设该电磁波的频率为 ω，传播方向为直角坐标系的 Z 轴正向[8]，则有：

$$\vec{A}=A(\vec{x})\left[\hat{i}\cos(\omega t)+\hat{j}\sin(\omega t)\right],\qquad k=\omega/c$$

把矢势的定义式 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 与法拉第定律结合起来，我们有：

$$0=\nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\nabla\times\left(\vec{E}+\partial_t\vec{A}\right)$$

因此，在物理上可以有：

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\omega A(\vec{x})\left[\hat{i}\sin(\omega t)-\hat{j}\cos(\omega t)\right]\qquad\rightsquigarrow\quad[A(\vec{x})]^2=\frac{\vec{E}^2}{\omega^2}$$

进一步地，

$$\vec{E}\times\vec{A}=\omega[A(\vec{x})]^2\hat{k}=\frac{\vec{E}^2}{\omega}\hat{k}$$

---

[8] 直角坐标系三个独立方向的基矢分别记为 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

所以，

$$\vec{\mathscr{S}} = \epsilon_0 \int_V d^3x\, \vec{E} \times \vec{A} = \frac{\hat{k}}{\omega}\, \epsilon_0 \int_V d^3x\, \vec{E}^2$$

回忆电磁场的总能量可写为

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x\, \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3x\, \vec{B}^2$$

且对于真空中的平面电磁波而言[9]，

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 = \epsilon_0 \vec{E}^2 \qquad \rightsquigarrow \quad W = \epsilon_0 \int_V d^3x\, \vec{E}^2$$

我们又可以把圆极化的平面电磁波自旋角动量表达为：

$$\vec{\mathscr{S}} = \hat{k} \frac{W}{\omega}$$

[9]证明请参见本课程第四章的教案.

提醒：

1. 倘若频率为 ω 的一列平面电磁波对应于量子物理中的一个光子的话，它的能量须表为：

$$W = \hbar\omega$$

式中的 $\hbar$ 称为 Planck 常数，它具有角动量的量纲、其实验值是：

$$\hbar \approx 1.054 \times 10^{-34} \text{ 焦耳} \cdot \text{秒}$$

于是，光子的自旋角动量写为：

$$\vec{\mathscr{S}} = \hbar\hat{k}$$

鉴于 $\vec{\mathscr{S}}$ 的量值只是 $\hbar$ 的一倍，所以称光子的自旋为 1.