學策云

中山大学地理科学与规划学院团委学生会学术策划部荣誉出品

2011级第一学期期末试卷A参考答案

一. 求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+5)^{2000}(3x-7)^{12}}{(2x+9)^{2012}}$;

解: 原式= $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2+3/x)^{2000}\cdot(3-7/x)^{12}}{(2+9/x)^{2012}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{12}$.

（2） $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt}{\sin^2 x}$.

2. 原式= $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\sqrt{1+(x^2)^2}}{2x}$ =1.

二. 设$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1,\ x\in[0,3]$. 求单调区间, 拐点以及最大最小值.

解：$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$.

驻点为 $x=1$, $x=2$;

单调递增区间是$[0,1]$, $[2,3]$; 单调递减区间是$[1,2]$.

$f''(x)=12x-18$;

拐点是$x=3/2$, $y=11/2$. 即点$(3/2,11/2)$.

$f(0)=1,\ f(1)=6,\ f(2)=5,\ f(3)=10$;

所以最大值是$f(3)=10$, 最小值是$f(0)=1$.

三. 函数$y=y(x)$由$\sin y+e^x-y^2=0$确定. 求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: 两边对x求导, 有$\cos y\cdot y'+e^x-2y\cdot y'=0$,

得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{2y-\cos y}.$$

两边再对x求导, 有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^x(2y-\cos y)-e^x(2y'+\sin y\cdot y')}{(2y-\cos y)^2}.$$

$$=\frac{e^x[(2y-\cos y)-(2+\sin y)\cdot\dfrac{e^x}{2y-\cos y}]}{(2y-\cos y)^2}$$

$$=\frac{e^x[(2y-\cos y)^2-(2+\sin y)e^x]}{(2y-\cos y)^3}$$

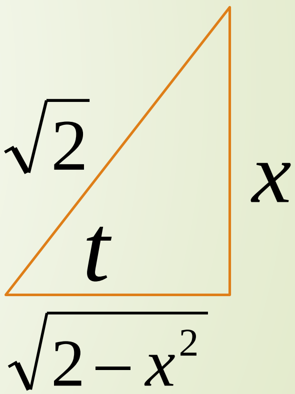
四. 求下列函数的不定积分

(1) $\int \tan x \, dx$;

解： (1) 原式$= -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln|\cos x| + C.$

(2) $\int \sqrt{2 - x^2} \, dx$;

解： 令$x = \sqrt{2}\sin t \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$,



$$\text{原式} = 2\int \cos^2 t \, dt = \int (1 + \cos 2t) \, dt$$

$$= (t + \sin t \cos t) + C$$

$$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + C.$$

(3) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$;

解：原式 $= x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{x}{1+x}\,d\sqrt{x}$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \quad (t = \sqrt{x})$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - t + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C.$$

(4) $\int \frac{1}{x^4-1}dx.$

解：

$$原式=\int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)}dx-\frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

五. 计算下列定积分或广义积分

（1） $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\,dx;$

解： (1)令$t=\sqrt{x+1}.$

$$原式 = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\,dt$$

$$= 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 2(t-\ln(t+1))\Big|_0^2 = 2(2-\ln 3).$$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^{10} x + \sin x)\,dx;$

解： 由被积函数的奇偶性，有

$$\text{原式} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

$$= -2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

(3) $\int_0^{2012\pi} |\cos(x+2012)|\,dx$；

解：原式 $\overset{t=x+2012}{=} \int_{2012}^{2012\pi+2012} |\cos t|dt = \int_0^{2012\pi} |\cos t|dt$

$$= 2012\int_0^{\pi} |\cos t|dt = 2012\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t dt\right)$$

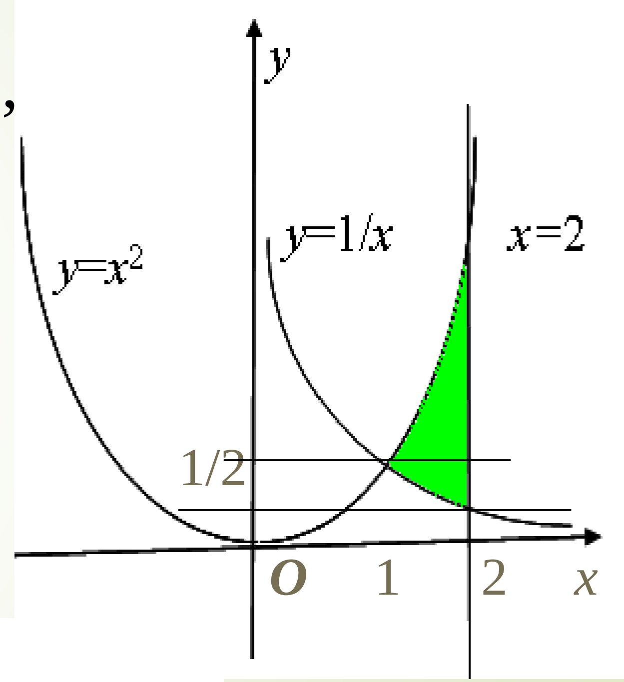
$$= 4024 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 4024.$$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx.$

解：原式 $= -\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}}\, d\frac{1}{x} = e^{-\frac{1}{x}}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

六. 求曲线$y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^2$和直线$x=2$所围成的图形的面积以及该图形绕y轴旋转形成的旋转体体积.

解: 解方程组 $\begin{cases} y=1/x \\ y=x^2, \end{cases} \Rightarrow$ 交点(1,1),



$$面积=\int_1^2 x^2-\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{7}{3}-\ln 2.$$

$$体积=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi\left(4-\frac{1}{y^2}\right)dy+\int_1^4\pi\left(4-(\sqrt{y})^2\right)dy$$

$$=\pi\left(4y+\frac{1}{y}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\pi\left(4y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^4=\frac{11}{2}\pi.$$

七. 求曲线$r=2e^{\varphi}$ $(0\le\varphi\le\pi)$ 的长度.

解：$l=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{\varphi}\,d\varphi$

$=2\sqrt{2}(e^{\pi}-1).$

八. 求微分方程$(e^{x+y}-e^{x})dx+(e^{x+y}+e^{y})dy=0$的通解.

解：分离变量得 $\frac{e^y}{e^y-1}dy=-\frac{e^x}{e^x+1}dx.$

积分得 $\ln|e^y-1|=-\ln|e^x+1|+C.$

通解 $(e^x+1)(e^y-1)=C_1,\ C_1\neq 0.$

九. 设某质点作直线运动并由位移函数$s(t)$描述. 已知

1) $s(0)=0$;

2) 此质点在时刻t的速度是$e^{-t}-s(t)$. 求$s(t)$.

解：依题意有$s'=e^{-t}-s$,即有初值问题

$$s'+s=e^{-t},\ s\big|_{t=0}=0.$$

解相应的齐次方程 $s'+s=0$, 有 $s=Ce^{-t}$.

用常数变异法, 设 $s(t)=C(t)e^{-t}$, 代入原方程得 $C'(t)=1$,

因此方程通解为 $s=e^{-t}(t+C)$

又由初值条件$s(0)=0$得$C=0$. 所以$s=te^{-t}$.

首页 上一页 下一页 结束