第三章　线性系统和光场的傅里叶分析

3.1 线性系统的概念

3.2 线性系统的分析方法

3.3 光场解析信号表示

3.4 光场的复振幅空间描述

3.5 二维光场的傅里叶分析

3.6 函数抽样与函数复原

在20世纪30年代后期，光学就与通信、信息学相关联了，进入21世纪以后，这种关联就更加密切了。可以从各个角度来说明这关联，但其中最为重要而基本的应该是二者都可用类似的方法即傅里叶分析和系统理论来描述各自感兴趣的系统。在经典光学中，并不使用这样的数学理论和方法，但光信息处理中，傅里叶分析和线性系统理论就成了主要的数学手段。所以，我们需要学习线性系统的有关知识。

3.1 线性系统的概念

3.1.1 信号和信息

3.1.2 系统的概念

3.1.3 线性系统

3.1.4 线性空不变系统

3.1.1 信号和信息

信号(signal)通常是指随时间或空间变化的某种物理量。而文字、语言、图像或数据常被称为消息(message)。在消息中包含有一定的信息(information)。信息一般不能直接传送，需要借助一定形式的信号才能传送和处理信号，如光信号、电信号、声信号等。因此，信号是消息的表现形式，它是信息传输的客观对象；消息则是信号的具体内容，它蕴含于信号中，从这个意义上说，信号与信息是等同的。在这里，我们统一用信息一词，这样，以后提到的光信息常可理解为光信号。而光信号通常是随时间和空间变化的，在数学中可以表示为时间和空间的函数，从这个意义上说，信号与函数又是等同的。

信号在系统中按一定规律运动、变化，系统在输入信号的驱动下对信号进行加工、处理并发送、输出信号。因此，从系统论的角度来说，对信息的传输与处理可以看成一个系统，如一个光学系统就是对光信息的传输与处理。通常，作为一个系统，就是把收集到的信息转换成所需要的输出信息。常见的通信系统传递和处理的信号是随时间变化的函数，如被调制的电压和电流波形。而光学系统所传递和处理转换的信息，如光学成像系统，信号是光场随空间变化的复振幅分布或光强度分布，可表示二维空间坐标的函数$f(x, y)$。由此可见，信号的概念是与系统的概念紧密相连的。

3.1.2 系统的概念

光学与通信的很多现象与问题都可抽象为使函数 f 通过一定的，形成函数 g 的运算过程。这种实现函数变换的运算过程，称为系统。在这种意义下的系统，既可以是特定功能的元器件组，如通信网络、光学透镜组等，也可以是与实际无关的物理现象。所以，广义地说，系统是若干相互作用和相互依赖的事物组而成的具有特定功能的整体。一个具有特定功能的完整系统可以分为三大部分：输入系统输出。输入是指施加于系统的作用，称为系统的输入激励(excitation)。输出是要求系统完成的功能，称为系统的输出响应(response)。可见，系统的特性决定对某一输入激励会产生什么样的输出响应。当研究一个系统的性质时，不必过多地关心系统内部的结构，只需知道其输入端和输出端的性质就行了。

分析一个系统，首先要对系统建立数学模型，然后运用数学方法进行求解，最后又回到系统，对结果做出物理解释，并赋予物意义。所谓系统的模型是指系统物理特性的抽象，以数学表达式或具有物理特性的符号图形来表征系统特性。系统的分类比较复杂，从数学模型的差异来看，可划分为：

(1) 连续时间(空间)系统和离散时间(空间)系统；

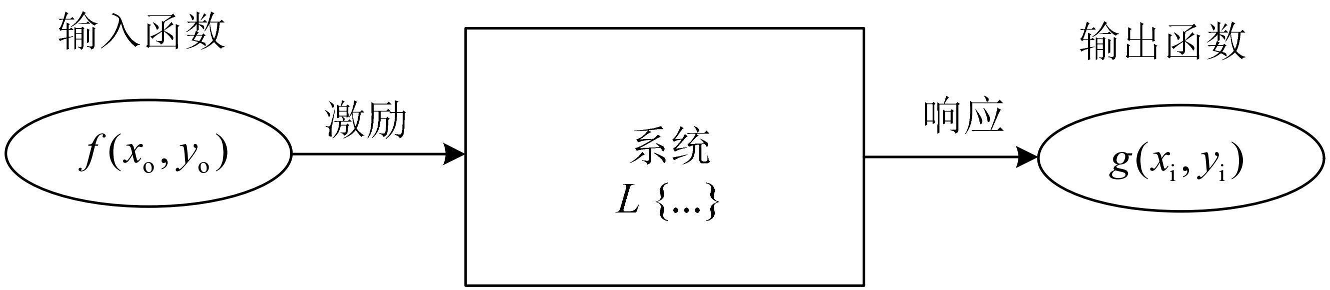
(2) 线性系统和非线性系统 ；

(3) 坐标不变系统和坐标变系统；

(4) 因果系统和非因果系统。

在傅里叶光学中，常常采用一种算符把光学系统的激励与对此产生的响应联系起来，系统的作用就是完成数学上的某种变换或运算。算符$\boldsymbol{L}\{\ldots\}$表示系统的作用，激励函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$通过系统后变成相应的响应函数$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，两函数之间满足下列关系：

$$g(x_i, y_i) = L\{f(x_o, y_o)\} \leftarrow f(x_o, y_o)$$



算符的性质，则要针对具体的系统而定。实际存在的系统是多样性的。这里我们只讨论具有线性或同时具有平移不变性的系统。

3.1.3 线性系统

所谓线性 (**linearity**) 特性是指齐次性与叠加性。若系统输入增加**k**倍，输出也增加 **k**倍，这就是齐次性 (**homogeneity**)。若有几个输入同时作用于系统，而系统总的输出等于每一个单独作用所引起的输出之和，这就是叠加性 (**superposition property**)。系统同时具有齐次性和叠加性便呈现线性特性。一般线性系统性必须具有以下特性：① 分解性 (**decomposition**)；② 零输入线性；③ 零状态线性。凡不具备上述特性的系统则为非线性系统。

光是一种电磁波，其在空间的传播可由波动方程来描述。波动方程是线性微分方程，如果有两个独立的函数都能满足同一个给定的微分方程，那么这两个函数的和也必然是这个微分方程解的，这也是光的叠加原理的数学基础，满足光叠加原理的范围光学现象称为线性光学。在线性光学范围内所研究的各种光学系统都是线性系统，例如可以把光学成像过程看作是由“物”光分布到“像”光分布的一个线性变换。下面我们给出二维线性系统的数学表述。

一个二维系统，其一般形式为输入(对系统的激励)一组二维函数，到输出(对系统的响应)一组二维的函数的映射，这样，输入和输出函数组的关系可表示为：

$$g_1(x_i, y_i) = L_1\{f_1(x_o, y_o), f_2(x_o, y_o), \cdots, f_m(x_o, y_o), \cdots\}$$

$$g_2(x_i, y_i) = L_2\{f_1(x_o, y_o), f_2(x_o, y_o), \cdots, f_m(x_o, y_o), \cdots\}$$

$$\vdots$$

$$g_n(x_i, y_i) = L_k\{f_1(x_o, y_o), f_2(x_o, y_o), \cdots, f_m(x_o, y_o), \cdots\}$$

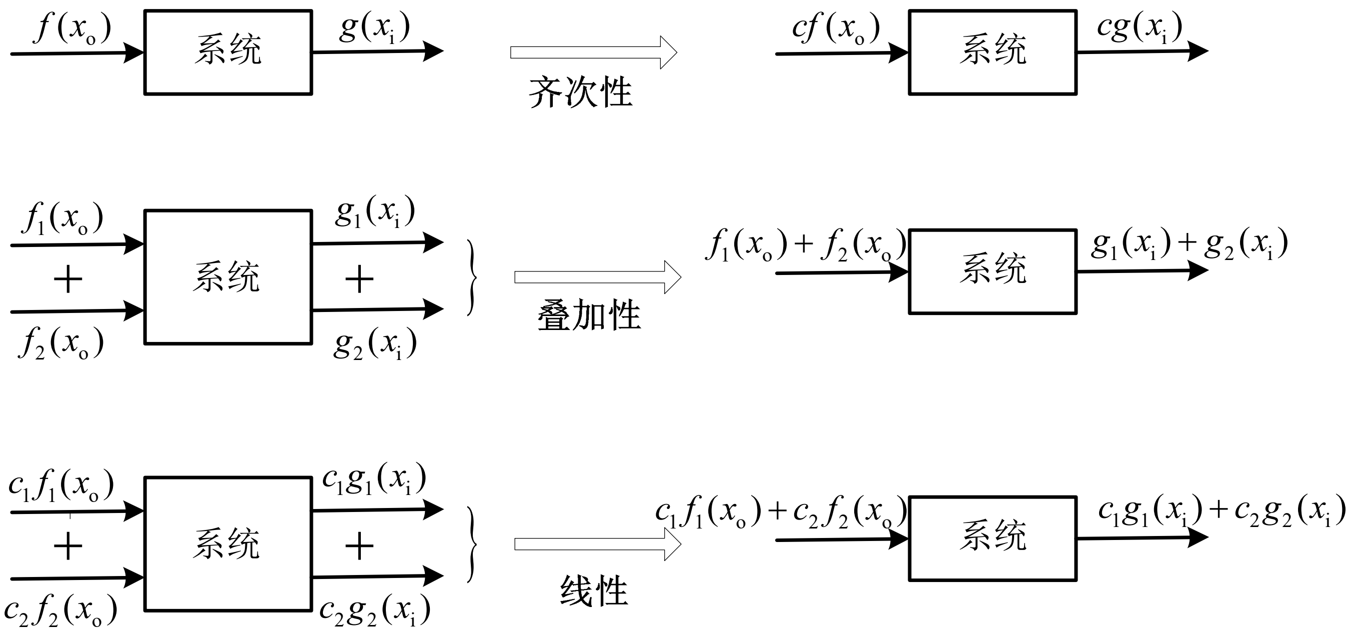
$$\vdots$$

映射可由多到少，或由少到多，特别地，可以是的一对一映射。一般地，二维系统为非因果系统，因为空间变量相对于某参考系可以为负。但如果二维系统服从叠加律，该二维系统为相加的线性系统，在一对一映射的情况下，有：

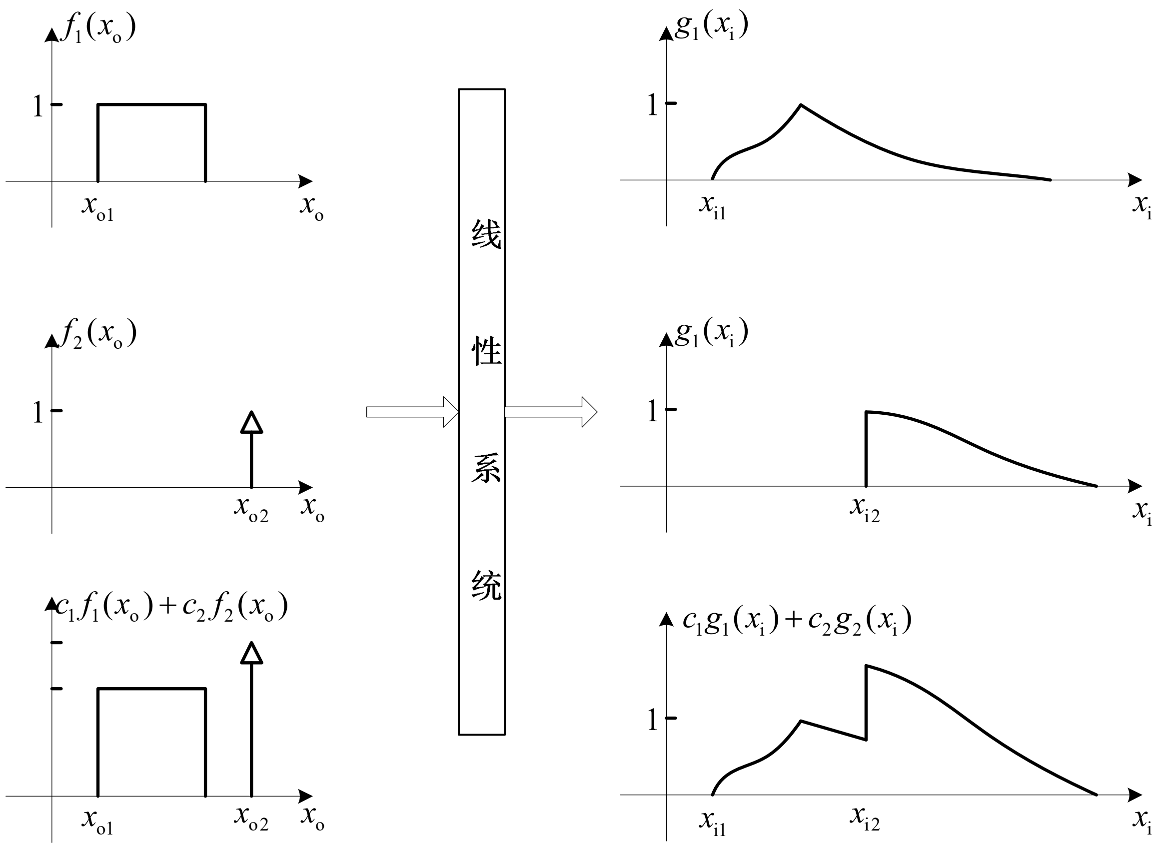
$$\sum_{m=1}^{M} c_m g_m(x_i, y_i) = L\left\{\sum_{m=1}^{M} c_m f_m(x_o, y_o)\right\}$$

则称此系统为线性系统。线性系统总是满足叠加原理即：

$$L\{c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)\} = c_1 g_1(x, y) + c_2 g_2(x, y)$$


$f(x_o)$
系统
$g(x_i)$
齐次性
$cf(x_o)$
$cg(x_i)$
$f_1(x_o)$
$f_2(x_o)$
$g_1(x_i)$
$g_2(x_i)$
叠加性
$f_1(x_o)+f_2(x_o)$
$g_1(x_i)+g_2(x_i)$
$c_1f_1(x_o)$
$c_2f_2(x_o)$
$c_1g_1(x_i)$
$c_2g_2(x_i)$
线性
$c_1f_1(x_o)+c_2f_2(x_o)$
$c_1g_1(x_i)+c_2g_2(x_i)$

线性=齐次性+叠加性



二个输入函数线过线性系统作用后的输出响应过程

对于具有连续激励的系统而言，可写成积分形式：

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} ag(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} af(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}$$

上两式表明，一个线性组合整体输入线性系统，则系统的总响应是单个响应的同样的线性组合。也就是说，系统对任意输入的响应能够用它对此输入分解成的某些基元函数的响应表示出来。在一定条件下，光学系统、电路系统等都可以看成是线性系统。

一个线性系统输出函数和输入函数形式通常是不相同，如果相同，则有：

$$g(x,y)=L\{f(x,y)\}=cf(x,y)$$

c是任意常数。使输出函数与输入函数具体这样的性质的系统，是线性系统的一个子类，它的数学模型是一个齐次线性方程。在物理上，电子学中的线性放大器或衰减器就属于这类系统。后面我们可以看到，在光学中的一个理想成像系统，物像能如实地反映原来的物，即形状完全相似，只是大小、正倒不同，显然它也是这类系统。

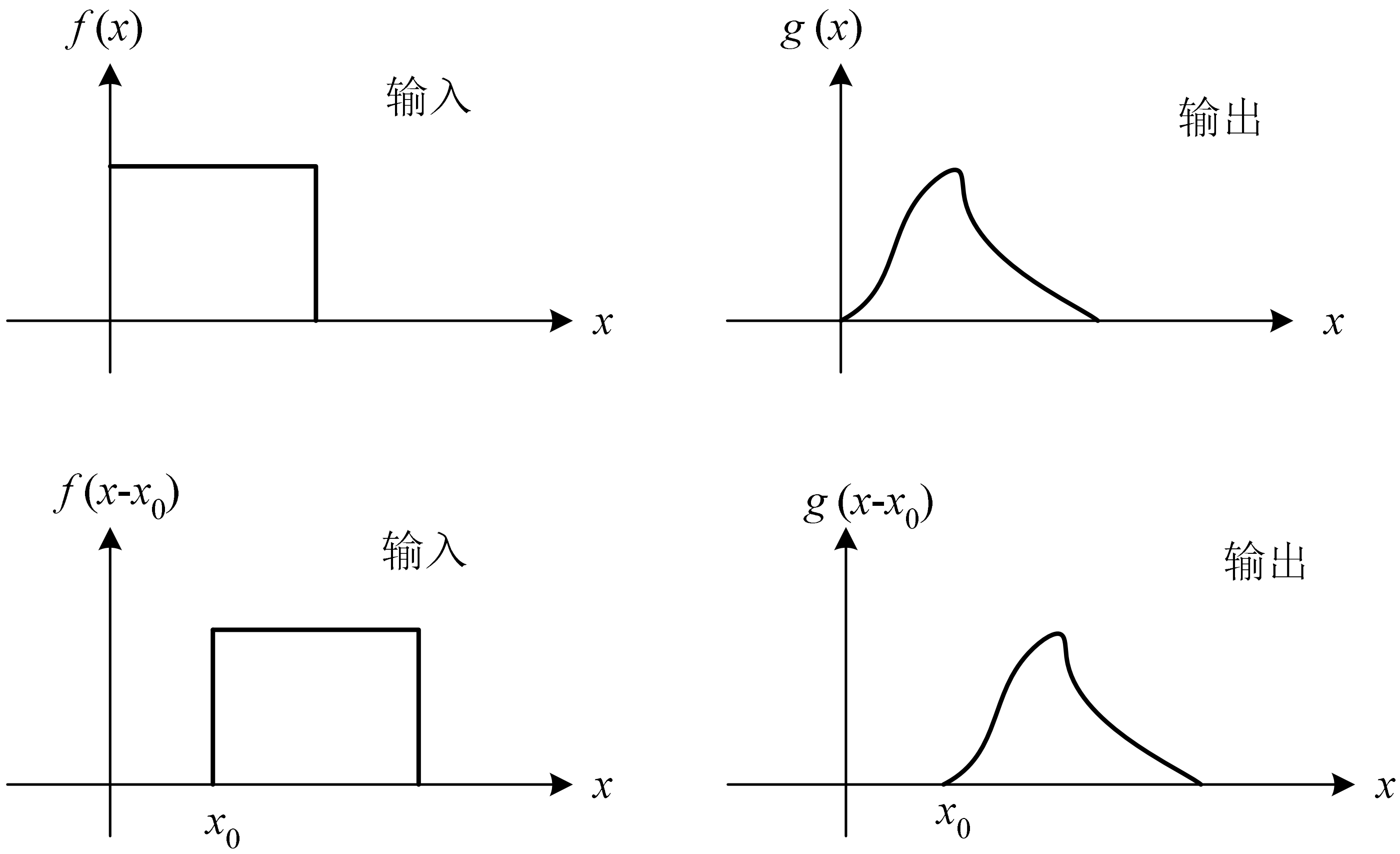
2.1.4 线性空不变系统

如果系统的输入函数发生一个平移，系统相应的输出函数也只是平移，我们说该系统具有平移不变性。若系统又是线性的，则称这种系统为空间平移不变系统，有时，也简称为线性空不变系统**(LSI, linear space invariant system)**，也可以表示如下：

$$L\{c_1 f_1(x_0 - x_0, y_0 - y_0) + c_2 f_2(x_0 - x_0, y_0 - y_0)\}$$
$$= c_1 g_1(x - x_0, y - y_0) + c_2 g_2(x - x_0, y - y_0)$$

对于线性空不变系统，其输入和输出的变换关系是不随空间位置而变化的。由线性空不变系统的性质，可知在输出坐标平面中的坐标位移等于在输入坐标平面上的坐标，这时，如果以坐标位移x_0, y_0为参变量时，输入坐标平面和输出坐标平面将不在区分，也就是数学上的宗量的统一，这在后文的许多地方会看到这种坐标的变化，要特别注意，不要造成理解上的混淆。

在光学中，理想成像系统是一个线性空间不变系统，空间不变特性理想成像系统是必备的。下图以一维函数为例，说明了这一平移不变性。



3.2 线性系统的分析方法

3.2.1 正交函数系

3.2.2 基元函数的响应

3.2.3 线性空不变系统的传递函数

3.2.4 基元函数的传递函数

可以利用线性系统的叠加性质来方便地求出系统对任意复杂输入的响应。首先把一个复杂输入函数分解成多个更加基本的称之为基元函数的线性组合。基元函数的选取主要考虑如下两方面的因素：一是是否任何输入函数都可以比较方便地分解成为这些基元函数的线性组合，二是系统的基元函数是否能比较方便地求得。这样，这些基元函数的响应经线性组合，就可以得到复杂输入函数所对应的输出函数。在光学系统中，常用的基元函数有：δ函数、阶跃函数、复指数函数和余弦或正弦函数。

3.2.1 正交函数系

1. 正交函数的概念

如果能把一个复杂信号分解成由许多简单分量所组成，就可以简化信号的处理，而且也会突显出其物理意义。从数学上来说，就是将描述复杂信号函数分解为初等函数(称为基底函数或基函数)的线性组合。实际上，在高等数学中，就是我们熟悉的函数展开。但在信息处理中，高等数学这种函数展开由于限制条件苛刻而一般无法采用，如要求函数具有任意阶导数。而信号处理中，经常遇到的都是第一章所讲述的一些非初等函数，如矩形函数、三角函数等这类“性质特别不好”的函数。所以，如何选择合适的基函数来分析分解信号，是信息处理中极为重要的问题。

要实现对任意信号的分解，要解决二个问题，一是能否选择一种合适的基底函数$\{\psi_n(x)\}$，几乎可以把任何函数在某个区间 **[*a*, *b*]**上展开为如下函数的级数之和，即：

$$f(x)=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)+\cdots+c_n\psi_n(x)+\cdots$$

c_n是系数(实数或复数)。二是若这种函数系$\{\psi_n(x)\}$存在，能否很方便地求出系数c_n.

把信号分解为正交函数分量的是常用的一种数学手段，因按正交函数展开的方法，可以很好地解决上述二个问题。这与把一个矢量分解为正交矢量（如在直角坐标系中）的思想是类似的。可以把正交矢量空间的概念推广到正交函数系。

正交函数系的定义：

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \mu_m & n = m \end{cases}$$

如果 $\mu_m = 1$，则称为标准正交函数系，或称为归一函数系。一切正交函数都是可以归一化的。满足正交性的函数系统很多，但对线性系统最重要的是正弦函数系、余弦函数系和复指数函数系。

$$\psi_n = \sin 2\pi n\xi_0 x \qquad \psi_n = \cos 2\pi n\xi_0 x \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\psi_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\xi_0 x} \qquad n = 0,\pm1,\pm2,\cdots$$

正弦函数系、余弦函数系和复指数函数系是实现函数分解的最主要的基元函数。

2. 函数的正交展开

可以用正交函数中的各函数(即基元函数)的线性组合表示位于区间的任一复函数：

$$f(x)=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)+\cdots+c_n\psi_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi_n(x)$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}W(\xi)\psi(x;\xi)\mathrm{d}\xi$$

复值系数c_n是级数每一项的权重因子。根据具体问题，展开式可以是有限项也可以是无穷项。

$$\int_a^b f(x)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b c_n\psi_n(x)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x$$

$$W(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi^*(x;\xi)\mathrm{d}x$$

$$c_m=\frac{1}{\mu_m}\int_a^b f(x)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x \qquad c_m=\int_a^b f(x)\psi_m^*(x)\mathrm{d}x$$

3.2.2 基元函数的响应

线性系统最基本的特性就是它满足叠加原理。它对同时作用的几个激励函数的响应恒等于每个激励函数单独作用时对其产生的响应之和。根据这一原理，就可以把系统对任一复杂激励的响应用它对某种“基元”激励的响应表示出来。具体来说，可以把一个复杂激励分解成基元激励的线性组合，而每一个基元激励所产生的响应是已知的，或极容易求出，那末根据叠加原理，总响应就可以看成是各个基元激励所产生的响应的相同线性组合。

所谓基元，就是不能再分解的最基本的函数单元。在线性系统的理论中，常见的基元函数有 δ 函数，正、余弦函数和复指数函数等。

1. δ 函数的响应

$$L\{\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\} = h(x_i, y_i; x_{o0}, y_{o0}) \xrightarrow{\text{原点}} L\{\delta(x_o, y_o)\} = h(x_i, y_i; 0, 0)$$

线性不变系统

通常具有不同的函数形式

线性不变系统

$$L\{\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\} = h(x_i - x_{o0}, y_i - y_{o0}; 0, 0)$$

$$L\{\delta(x_o, y_o)\} = h(x_i, y_i)$$

当同一个脉冲输入分别作用于不同的线性空不变系统时，将产生不同的脉冲响应，因此线性空不变系统的作用可以用脉冲响应来表征。至于脉冲响应的具体表达式，则要根据具体的系统去寻求。后面我们可以看到，一个星点经光学成像系统所成的像是爱里**(Airy)**圆斑，该圆斑的光强分布函数就是系统的强度脉冲响应，又称为点扩散函数。

将点光源用 δ 函数表示，有：

$$\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0}) = \begin{cases} \infty & x_o = x_{o0}, y_o = y_{o0} \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

根据 δ 函数的筛选性质及偶函数的性质，可以把系统输入函数写成，即输入光信号的光场分布可以表示为：

$$f(x_o, y_o) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_{o0}, y_{o0})\delta(x_{o0} - x_o, y_{o0} - y_o)\mathrm{d}x_{o0}\mathrm{d}y_{o0}$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_{o0}, y_{o0})\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\mathrm{d}x_{o0}\mathrm{d}y_{o0}$$

上式的物理意义是输入光信号的光场分布可以看成是一系列带有权重 $f(x_{o0}, y_{o0})$ 的点光源的线性叠加。这种利用 δ 函数来对系统输入函数进行分解的方法，称为脉冲分解。

输入光信号 $f(x_o, y_o)$经线性系统的输出 $g(x_i, y_i)$可以表示为：

$$g(x_i, y_i) = L\{f(x_o, y_o)\} = L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x_{o0}, y_{o0})\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\mathrm{d}x_{o0}\mathrm{d}y_{o0}\right\}$$

对于光场中的每一点， $f(x_{o0}, y_{o0})$是确定的，可看作常量，由线性叠加性质，上式可写为

$$g(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_{o0}, y_{o0})L\{\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\}\mathrm{d}x_{o0}\mathrm{d}y_{o0}$$

$$h(x_i, y_i; x_{o0}, y_{o0}) = L\{\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\}$$

$$g(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_{o0}, y_{o0})h(x_i, y_i; x_{o0}, y_{o0})\mathrm{d}x_{o0}\mathrm{d}y_{o0}$$

脉冲响应函数

上式有时也称为 **“叠加积分(superposition integral)”**，描述了线性系统输入和输出的变换关系。这样，线性系统的性质完全由它对脉冲的响应表征。只要知道了系统的脉冲响应，就可以过叠加积分求出系统的输出。

在存在像差且通光孔径有限大的光学成像系统中，输入平面上可用 δ函数表示的一物点通过系统后，在输出像面上不是形成一个像点，而是扩展成一个弥散的像斑，这时脉冲响应函数***h***就称为点扩散函数。把所有点扩散函数叠加起来，就可以得到输出的像。但要完全确定一个线性系统，就需要知道系统对于输入平面所有可能位置上δ函数输入的脉冲响应。通常情况下，这是困难，只有对于线性系统的一个重要子类，线性不变系统，才可以比较方面的得到。

线性空不变系统的叠加积分式具有特别形式，即：

$$g(x_i,y_i)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x_{o0},y_{o0})h(x_i-x_{o0},y_i-y_{o0})\mathrm{d}x_{o0}\mathrm{d}y_{o0}=f(x_o,y_o)*h(x_i,y_i)$$

上式表明，**LSI**系统的输出函数**(**也就是像**)**可以表示为输入函数**(**物函数**)**与系统脉冲响应在输出平面上的一个二维卷积。实际上，我们可以看出，这一特殊形式的叠加积分，正是我们前面讲过的卷积积分。由此可见，脉冲响应函数完全描述了**LSI**系统的性态，故也称***h***为**LSI**系统输入－输出关系的空域描述。

在数学上，要求输入与输出函数具有相同的宗量

$$g(x, y) = L\{f(x, y)\}$$

$$L\{f(x - x_0, y - y_0)\} = g(x - x_0, y - y_0)$$

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = f(x, y) * h(x, y)$$

2. 复指数函数的响应

当线性不变系统的输入函数是一个复指数函数， $f(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}$

$$g(x,y;\xi_0,\eta_0)=L\{f(x,y)\}=L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}\}$$

$$L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi[\xi_0(x-x_0)+\eta_0(y-y_0)]}\}=L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x_0+\eta_0 y_0)}\}$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x_0+\eta_0 y_0)}L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x_0+\eta_0 y_0)}g(x,y;\xi_0,\eta_0)$$

$\Big\downarrow$ 线性空间不变系统

$$L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi[\xi_0(x-x_0)+\eta_0(y-y_0)]}\}=g(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)$$

$$g(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x_0+\eta_0 y_0)}g(x,y;\xi_0,\eta_0)$$

$$g(x,y;\xi_0,\eta_0)=H(x,y;\xi_0,\eta_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(x,y;\xi_0,\eta_0)}$$

$$g(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)=H(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)}$$

$$\frac{g(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)}{g(x,y;\xi_0,\eta_0)}$$

$$=\frac{H(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)}{H(x,y;\xi_0,\eta_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\Phi(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)-\Phi(x,y;\xi_0,\eta_0)]}$$

$$\frac{H(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)}{H(x,y;\xi_0,\eta_0)}=1$$

激励函数在不同点作用于系统所产生的响应函数，其振幅处处是相等的。

$$\Phi(x-x_0,y-y_0;\xi_0,\eta_0)-\Phi(x,y;\xi_0,\eta_0)=-2\pi(\xi_0x_0+\eta_0y_0)$$

不同点输出的相位函数之增量为常量,这说明相位函数是位置 $\boldsymbol{x_0}$的线性函数，当然也是参量 $\boldsymbol{\xi_0}$ 的函数。

$$H(x_\mathrm{i}-x_{\mathrm{o}0},y_\mathrm{i}-y_{\mathrm{o}0};\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})=H(x_\mathrm{i},y_\mathrm{i};\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})=H(\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})$$

$$\Phi(x_\mathrm{i},y_\mathrm{i};\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})=2\pi(\xi_{\mathrm{o}0}x_\mathrm{o}+\eta_{\mathrm{o}0}y_\mathrm{o}) \qquad \Phi(x_\mathrm{i}-x_{\mathrm{o}0},y_\mathrm{i}-y_{\mathrm{o}0};\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})=0$$

由以上分析可知

$$g(x_\mathrm{i},y_\mathrm{i};\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})=H(\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})\mathrm{e}^{2\pi(\xi_{\mathrm{o}0}x_\mathrm{o}+\eta_{\mathrm{o}0}y_\mathrm{o})}$$

$$g(x_\mathrm{i},y_\mathrm{i};\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})=L\{f(x_\mathrm{o},y_\mathrm{o})\}=L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_{\mathrm{o}0}x_\mathrm{o}+\eta_{\mathrm{o}0}y_\mathrm{o})}\}$$
$$=H(\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})\mathrm{e}^{2\pi(\xi_{\mathrm{o}0}x_\mathrm{o}+\eta_{\mathrm{o}0}y_\mathrm{o})}=H(\xi_{\mathrm{o}0},\eta_{\mathrm{o}0})f(x_\mathrm{o},y_\mathrm{o})$$

$$g(x,y;\xi_0,\eta_0)=L\{f(x,y)\}=L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0x+\eta_0y)}\}$$
$$=H(\xi_0,\eta_0)\mathrm{e}^{2\pi(\xi_0x+\eta_0y)}=H(\xi_0,\eta_0)f(x,y)$$

由此可见，线性空不变系统的输入是复指数函数时，输出也同样是复指数函数，输出函数的形式不变，只是复振幅有变化。所以，复指数函数是线性空不变系统的本征函数。

3. 余弦函数的响 应

余弦函数可以表示成复指数函数的形式以，可以就应用上面的结果也讨论余弦函数的响应。

$$g(x;\xi_0)=L\{\cos 2\pi\xi_0 x\}=\frac{1}{2}L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\}=\frac{1}{2}L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\}+\frac{1}{2}L\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\}$$

$$=\frac{1}{2}H(\xi_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}+\frac{1}{2}H(-\xi_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}$$

$$\downarrow$$

$$H(\xi_0)=H^*(-\xi_0)\xrightarrow{\text{令}}H(\xi_0)=A(\xi_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\xi_0)}$$

$$L\{\cos 2\pi\xi_0 x\}=\frac{1}{2}H(\xi_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}+\frac{1}{2}\left[H(\xi_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\right]^*=\mathrm{Re}\{H(\xi_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}\}$$

$$=\frac{1}{2}A(\xi_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\xi_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}+\frac{1}{2}A(\xi_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi(\xi_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi_0 x}=A(\xi_0)\cos\left[2\pi\xi_0\left(x-\frac{\Phi(\xi_0)}{2\pi\xi_0}\right)\right]$$

上式表明，满足一定条件的线性不变系统，当输入是一个余弦函数时，其输出仍然是同频率的余弦函数，只不过输出的振幅和相位都有了改变。所以，余弦函数也是线性空不变系统的本征函数。

在实际的情形中，系统的输入函数并非总是复指数函数或余弦函数的，但是可以根据系统的物理特性，把输入函数分解为适当本征函数的线性组合。由于本征函数的特性，其通过系统时，函数的形式不变，因而在实际应用中将会很有便利。同时，为了验证一个系统是不是线性空不变系统，则可以输入一下余弦信号，然后检测输出信号是的频率特性，如果除了输出信号中只含有输入余弦信号的频率成分，这个系统就系统就是线性空不变系统了，如果输出信号中还包含有其他频率成分，则该系统就不是线性空不变系统。

3.2.3 线性空不系统的传递函数

输入函数	输出函数	响应函数
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$f(x,y)$	$g(x,y)$	$h(x,y)$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$F(\xi,\eta)$	$G(\xi,\eta)$	$H(\xi,\eta)$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
输入频谱函数	输出频谱函数	响应频谱函数

$$G(\xi,\eta)=H(\xi,\eta)F(\xi,\eta) \Longleftarrow \text{线性空不变系统}$$

$$H(\xi,\eta)=\frac{G(\xi,\eta)}{F(\xi,\eta)}=L\{h(x,y)\}$$

空间不变系统的传递函数

空间不变系统的传递函数，它表示系统在频域中对信号的传递能力。这就是说，原点脉冲响应的频谱密度可以表征系统对输入函数中不同频率的基元成分的传递能力。在频域中分析一个系统，实际上就是研究对输入函数中不同频率的基元函数的作用。这种作用表现在输出函数与输入函数中同一频率基元成分权重的相对变化上。

3.2.4 基元函数的传递函数

1. δ函数的传递函数

$$f(x,y)=\delta(x-x_0,y-y_0)$$ 输入函数

$$F(\xi,\eta)=L\{\delta(x-x_0,y-y_0)\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)}$$ 输入函数的频谱

$$G(\xi,\eta)=H(\xi,\eta)F(\xi,\eta)=H(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)}$$ 输出函数的频谱

输出函数

$$g(x,y)=L^{-1}\{G(\xi,\eta)\}=\iint_{-\infty}^{\infty}H(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x_0+\eta y_0)}e^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=h(x-x_0,y-y_0)$$

$$L\{\delta(x-x_0,y-y_0)\}=h(x-x_0,y-y_0)$$

表明脉冲响应函数在空域中描述了线性空不变系统的特性

由此可见，对于线性空间不变系统，δ函数与传递函数构成一个傅里叶变换对，这样δ函数的传递函数为：

$$H(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}h(x-x_0,y-y_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

当输入函数处于坐标原点时，有更为简单的形式， 即

$$f(x,y)=\delta(x,y)$$

$$F(\xi,\eta)=F\left\{\delta(x,y)\right\}=\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=1$$

$$g(x,y)=F^{-1}\left\{G(\xi,\eta)\right\}=\iint_{-\infty}^{\infty}H(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=h(x,y)。$$

$$H(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

2. 复指数函数的传递函数

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)} \longleftrightarrow F(\xi,\eta)=L\{f(x,y)\}=\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)$$

$$G(\xi,\eta)=H(\xi,\eta)F(\xi,\eta)=H(\xi,\eta)\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)$$

傅里叶逆变换，得到输出函数

$$g(x,y)=L^{-1}\{G(\xi,\eta)\}=\iint_{-\infty}^{\infty}H(\xi_0,\eta_0)\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=H(\xi_0,\eta_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}$$

$$g(x,y)=L\{f(x,y)\}$$

$$=L\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}\}=H(\xi_0,\eta_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)}$$

$$=H(\xi_0,\eta_0)f(x,y)$$

复指数函数可以形式不变地通过线性空不变系统，输出函数与输入函数只差一个复比例常数，所以复指数输入函数是线性空不变系统的本征函数，而相应的比例常数则为该本征函数的本征值。这个本征值函数便是该线性空不变换系统的传递函数。

3. 余弦数函数的传递函数

基元函数是实函数的线性系统，且其傅里叶变换具有厄米函数特性，即：

$$H(\xi,\eta)=H^*(-\xi,-\eta)$$

$$H(\xi,\eta)=A(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(\xi,\eta)} \qquad H^*(-\xi,-\eta)=A(-\xi,-\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(-\xi,-\eta)}$$

$$A(\xi,\eta)=A(-\xi,-\eta) \qquad \Phi(\xi,\eta)=-\Phi(-\xi,-\eta)$$

即振幅传递函数是偶函数，而相位传递函数是奇函数。余弦函数就是这类系统的本征函数。

$$f(x,y)=\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)]$$

$\downarrow$ 傅里叶变换，得到频谱

$$F(\xi,\eta)=L\{\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)]\}=\frac{1}{2}[\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)+\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)]$$

$$G(\xi,\eta)=H(\xi,\eta)F(\xi,\eta)=\frac{1}{2}H(\xi,\eta)[\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)+\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)]$$

$\downarrow$ 傅里叶逆变换

$$g(x,y)=\frac{1}{2}\{A(\xi_0,\eta_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)+\Phi(\xi_0,\eta_0)]}+H(\xi_{0\_0},\eta_{0\_0})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)+\Phi(\xi_0,\eta_0)]}\}$$

$$=A(\xi_0,\eta_0)\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)+\Phi(\xi_0,\eta_0)]。$$

$$L\{\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)]\}=A(\xi_0,\eta_0)\cos[2\pi(\xi_0 x+\eta_0 y)+\Phi(\xi_0,\eta_0)]$$

对脉冲函数是实函数线性空不变系统，余弦输入函数将产生同频率的余弦输出函数；但可能产生与频率有关的振幅衰减和相移，其大小取决于传递函数的模和幅角。

3.3 光场解析信号表示

3.3.1 单色光场的数学形式和复数表示

3.2.3 准单色光场的复数表示

3.3.3 多色光场的复数表示

从波动光学的观点来看，光是由高频交变的电磁场在空间传播形成的一种波动，是特定波段的电磁波。光波具有一切波动的基本特性，如，光波的传播具有时空的双重周期性，它的时间周期(或时间频率)和空间周期(或空间频率)由波的传播速度相联系；光的波动过程，总伴随着能量的传输。描述光波的波动方程波动方程的解具有线性性质，因此任何复杂的波都可用波动方程的基本解的线性组合来表示。对于光波的描述，既可以在时空域中进行，也可以时频域和空频域中进行，前者所采用的即是经典波动光学的分析方法，而后者则是傅里叶光学的分析方法。这一节我们先讨论光场在时域和时频域中的数学描述。

在线性系统中研究光波的问题时，常常把一个实函数表示成一个复函数，这样使用起来更为方便。对于色光场，由已知的实函数构造一个相应的复函数比较容易；对于多色光场，就不那么简单明了了。单色和多色光场的复值表示，有时也称为解析信号表示法。

$P(x,y,z)$

$$u(x,y,z;t) = u^{\mathrm{r}}(x,y,z;t) + \mathrm{i}u^{\mathrm{i}}(x,y,z;t)$$

复函数

实标量函数

u 称为 u^{r} 的解析信号**(analytic signal)**。

当只讨论与时间变量有关时，可简写为

$$u(t) = u^{\mathrm{r}}(t) + \mathrm{i}u^{\mathrm{i}}(t)$$

3.3.1 单色光场的复数表示

单色光场是指单频率的光波，其实函数的方式可表示如下：

$$u^{\mathrm{r}}(P;t)=\tilde{U}(P)\cos[2\pi\nu_0 t-\phi(P)]$$

或 $u^{\mathrm{r}}(x,y,z;t)=\tilde{U}(x,y,z)\cos[2\pi\nu_0 t-\varphi(x,y,z)]$

这个光场的复数表示为：

$$u(P;t)=\tilde{U}(P)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}[2\pi\nu_0 t-\phi(P)]}$$

其实部正好等于原来的光场 $u^{\mathrm{r}}(P;t)$

这个光场的复振幅定义为：

$$U(P)=\tilde{U}(P)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\phi(P)}$$

这个复振幅表示了单色光场的振幅与相位。

一个实函数表示成为一个复函数，其虚部不是任意的，而是与原来的实光场密切相关的。那么用什么样的方法，才能得到其的复数表示呢？可以通常频域来理解这个问题。由欧拉公式，有

$$u^{\mathrm{r}}(P;t)=\frac{\tilde{U}(P)}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}[2\pi\nu_0 t-\phi(P)]}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[2\pi\nu_0 t-\phi(P)]}\right]$$

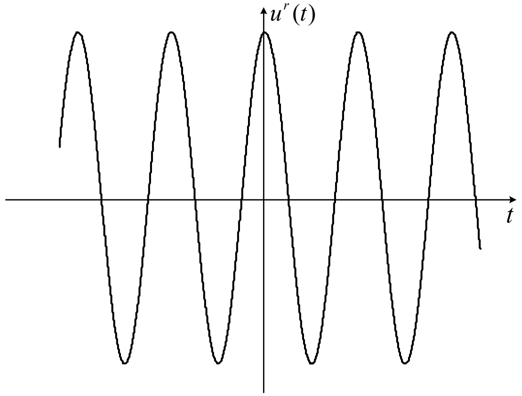
两边作傅里叶变换

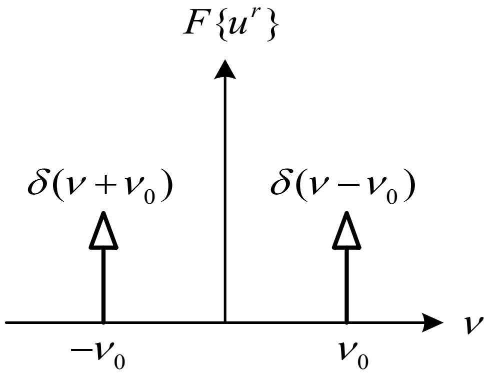
$$U^{\mathrm{r}}(P;\nu)=F\{u^{r}(P;t)\}\frac{\tilde{U}(P)}{2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(P)}\delta(\nu+\nu_0)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(P)}\delta(\nu-\nu_0)\right]$$

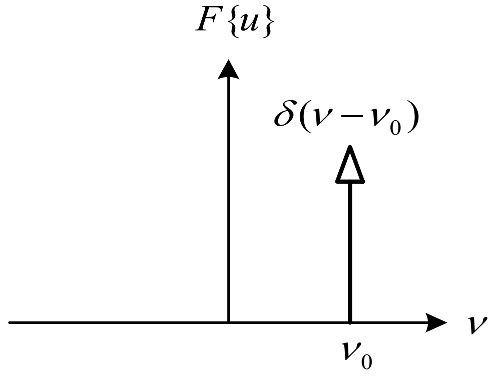
单色实光场的傅里叶谱

再对复光场 ***u(P; t)*** 作傅里叶变换，有：

$$U(P;\nu)=F\{u(P;t)\}=\tilde{U}(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(P)}\delta(\nu-\nu_0)$$







以从原来的实光场到复光场通过频域中的比较可以看出，是去掉实光场的负频成分，加倍实光场的正频成分。由此可见，单色复光场是只有正频分量的单边谱。

采用了正频分量来构成一个复指数函数，实际上，也可以用负频分量来定义道是单色光的复数表示，这时应为

$$u(x,y,z;t)=\tilde{U}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[2\pi\nu_0 t-\phi(x,y,z)]}$$

即相当于去掉正频分量，将负频分量加倍。虽然物理上并不存在负频率，但从数学角度来看，实函数$\boldsymbol{u}^r$的频谱中正频分量或负频分量均携带了单色光的全部信息。

要注意的是，用式**(3.3.3)**表示光场时，在复指数中真正表示光场的，仍然是函数的实部(或虚部)。一个实值物理量不能等同于一个复值函数。在运算过程中，只有作线性运算，如波函数的叠加、微分和积分等复函数运算时，复函数运算结果的实部才代表所求的物理量，由复数形式**(3.3.3)**代替式**(3.3.1)**是可以的，不会出现歧义的结果；对于非线性运算，一般应当先取出实部再作运算。另外，当运算涉及到单色场矢量的乘积或乘方时，如果能量密度和玻印矢量，也会出现问题，这时必须取场矢量的实部。

之所以采用复数形式，更多是由于在涉及线性运算时，复数形式更为方便。

一般来说，两个复数的实部和乘积的实部出，也就是说，如果**u**和**v**是两个任意复数，则通常有：

$$u^r + v^r = \mathrm{Re}\{u+v\} \qquad \mathrm{Re}\{u\}\cdot\mathrm{Re}\{v\} \neq \mathrm{Re}\{uv\}$$

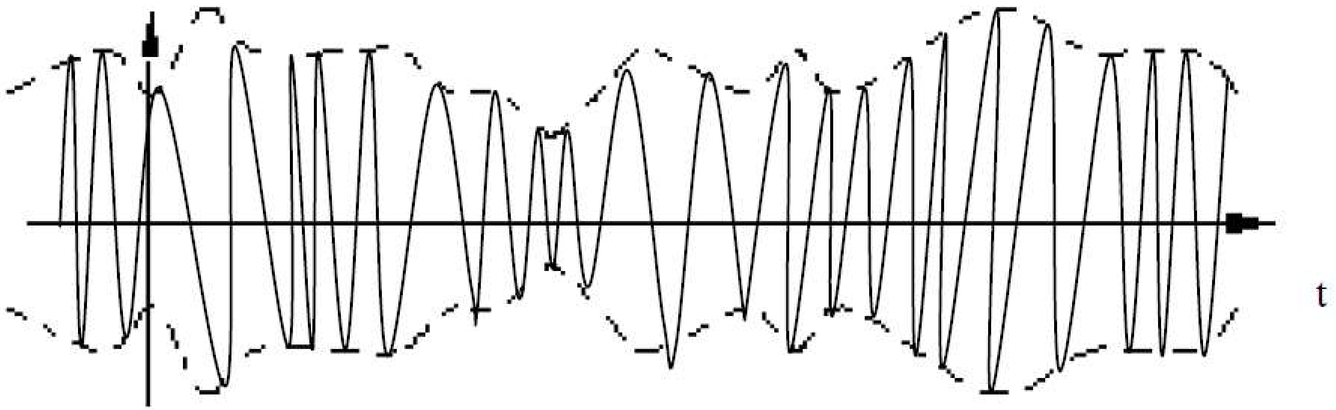
3.3.2 准单色光场的复数表示

一个非单色光信号，当其频谱宽度$\Delta\nu$与中心频率ν_0相比，满足关系式$\Delta\nu << \nu_0$时，称为准单色光。

对非单色光，复振幅U不再只是坐标的函数，也是时间的函数。对准单色光而，复振幅U的振幅$\tilde{U}(t)$和相位$\varphi(t)$是时间的慢变函数，这样其用实函数$u^r(t)$的形式可表示为：

$$u^{\mathrm{r}}(t) = \tilde{U}(t)\cos[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$$

准单色光实信号(也称为窄带信号)及其包络示意如下图所示



准单色光的解析信号写成如下形式：

$$u(t)=\tilde{U}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu_0 t}=U(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu_0 t}$$

复振幅，即复包络

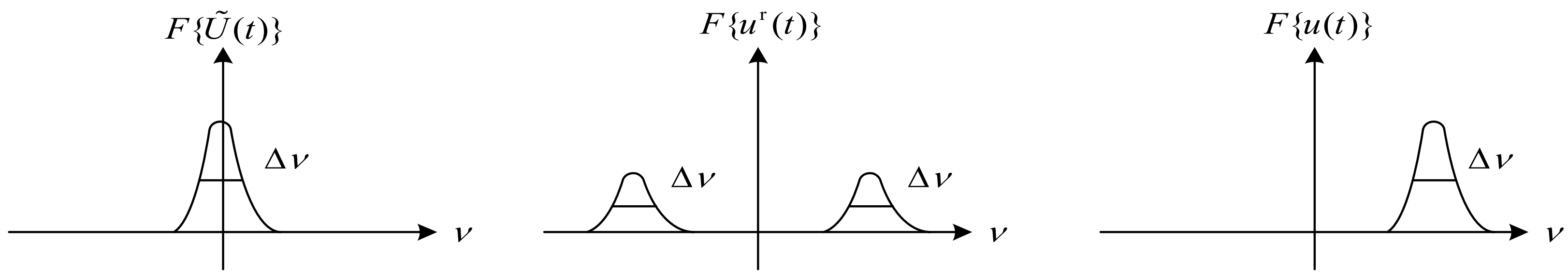
$$U(t)=\tilde{U}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}$$

$$\tilde{U}(t)=\int_0^\infty \tilde{U}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu-\nu_0)t}\mathrm{d}\nu$$

$$\mu=\nu-\nu_0 \qquad g(\mu)=\tilde{U}(\mu+\nu_0)$$

$$\tilde{U}(t)=\int_0^\infty g(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\mu t}\mathrm{d}\mu$$

下图显示了准单色光信号的频谱图



准单色光要求，谱振幅只在$\nu \approx \nu_0$附近才显著不为 0，即上式的积分是低频分量的叠加。再者，准单色光条件要求$\Delta\nu << \nu_0$，故准单色光的振幅$\tilde{U}(t)$和相位$\varphi(t)$和$\cos(2\pi\nu_0 t)$相比变化缓慢，因此它们都是时间的慢变函数。所以，在准单色光的条件下，可以把$\tilde{U}(t)$看成是一个振幅包络，它调制了一个频率为ν_0的波。也就是说，在与$1/\Delta\nu$相当的时间间隔内，$\tilde{U}(t)$与$\varphi(t)$只有微小的变化。然而，在$\tau_c = 1/\Delta\nu$的时间间隔内，它们将有显著的变化，因此，相干时间表示准单色光复振幅和相位基本保持不变的时间间隔的上限。

3.3.3 多色光场的复数表示

实多色光场的傅里叶变换为：

$$u^{\mathrm{r}}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

厄米函数 $\longrightarrow$ $U^{\mathrm{r}}(\nu)=[U^{\mathrm{r}}(-\nu)]^{*}$

负频率分量与正频率分量载有同样的信息，亦即仅正频率**(**或负频率分量**)**就携带了实函数的全部信息。因此，只用正频率分量并不会丢失光场的任何信息。令

$$U^{\mathrm{r}}(\nu)=A(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\nu)}$$

$$A(\nu)=A(-\nu)\qquad \phi(\nu)=-\phi(-\nu)$$

取其中对应的正频率和负频率项相加，利用欧拉公式，最后可得：

$$u^{\mathrm{r}}(t)=2\int_0^{+\infty}A(\nu)\cos[2\pi\nu t+\phi(\nu)]\mathrm{d}\nu$$

上式包含所有正频率分量的积分。若把这些频率分量都相移**π/2**，则可定义函数：

$$u^{\mathrm{i}}(t)=2\int_0^{+\infty}A(\nu)\sin[2\pi\nu t+\phi(\nu)]\mathrm{d}\nu$$

因而与 $u^{\mathrm{r}}(t)$ 相关联的解析信号可写成：

$$u(t)=u^{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{i}u^{\mathrm{i}}(t)=2\int_0^{\infty}A(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\nu t+\phi)}\mathrm{d}\nu$$

$$=2\int_0^{\infty}U^{\mathrm{r}}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu=\int_0^{\infty}U(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$ 。

去掉实函数所有负频率分量，并把正频率分量的幅值加倍后叠加起来，就得到了解析信号

$$u^{\mathrm{r}}(t)=\mathrm{Re}[u(t)]$$

相缔合的函数**(associated function)**

零频分量

$$U(\nu)=\begin{cases}2U^{\mathrm{r}}(\nu) & \nu>0\\ U^{\mathrm{r}}(\nu) & \nu=0\\ 0 & \nu<0\end{cases}$$

$$U(\nu)=[1+\mathrm{sgn}(\nu)]U^{\mathrm{r}}(\nu)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[1+\mathrm{sgn}(\nu)]U^{\mathrm{r}}(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

由此可见，在构造解析信号时，应该去掉 $u^{\mathrm{r}}(t)$ 的负频分量，保留零频分量，加倍正频分量。

由希尔伯特变换

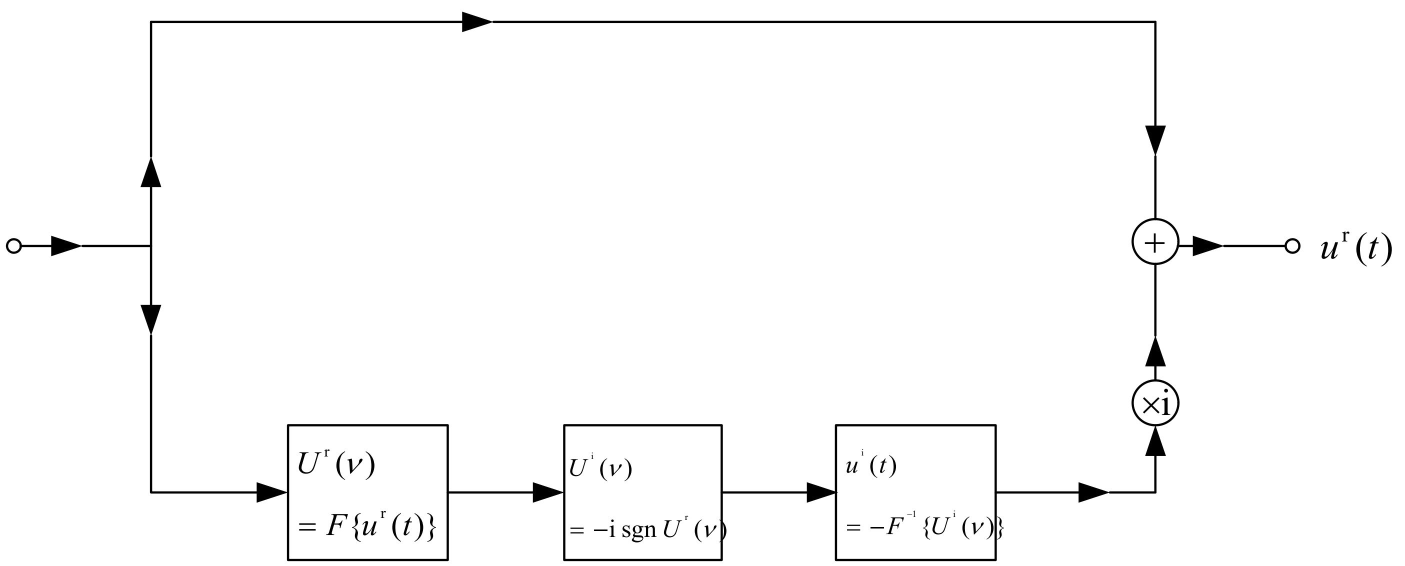
$$u^{\mathrm{i}}(t) = H\{u^{\mathrm{r}}(t)\} = u^{\mathrm{r}}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)$$

$$H(\nu) = F\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\} = \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\nu)$$

为希尔伯特滤波器

$$h(t) = -\frac{1}{\pi t}$$

从一个实信号构造一个解析信号的过程



3.4 光场的复振幅空间描述

3.4.1 球面波的复振幅

3.4.2 球面波的近轴近似

3.4.3 平面波的复振幅

对于光波的描述，既可以在时空域中进行，也可以时频域和空频域中进行，前者所采用的即是经典波动光学的分析方法，而后者则是傅里叶光学的分析方法。

信息光学中处理的光信号，大多为定态光场，定态光场是指具有如下性质的光场：① 光场中点的振动是时间频率相同的简谐振动；② 光场中各点振动的振幅不随时间变化，在空间形成稳定分布。

光振动被分解成与空间有关和与时间有关的两部分。在研究光的空间分布时，就可以忽略与时间有关这一项。复振幅的引入便于许多光学问题如干涉、衍射等的计算。如用复振幅表示光强就十分方便：

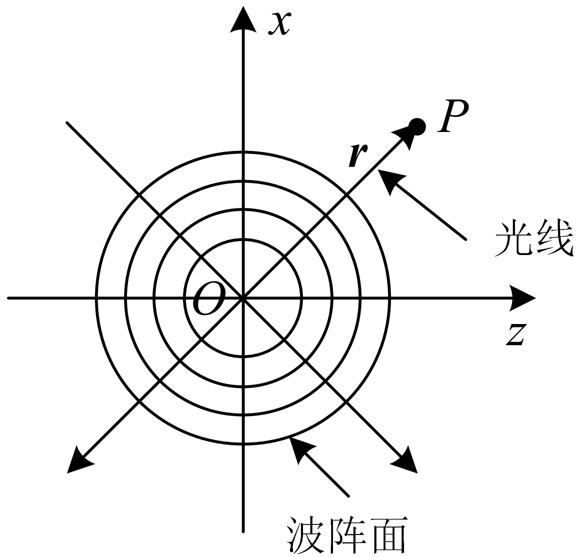
$$I = \left|U(x,y,z)\right|^2 = U(x,y,z)U^*(x,y,z)$$

下面我们讨论单色光场的空间部分。光波最基本形式有球面波、平面波和柱面波。由于任意复杂的光波都能表示为这些基本光波的合成，所以，在对实际光波进行分解或综合时，它们将充当基本单元的角色，把复杂光波与简单光波联系起来，进而深入地探讨和理解实际问题的物理意义。从复振幅的定义可知，复振幅表达式包含两部分：振幅因子和相位因子。这两部分对光信息的处理都有着重要的意义。

3.4.1 球面波的复振幅

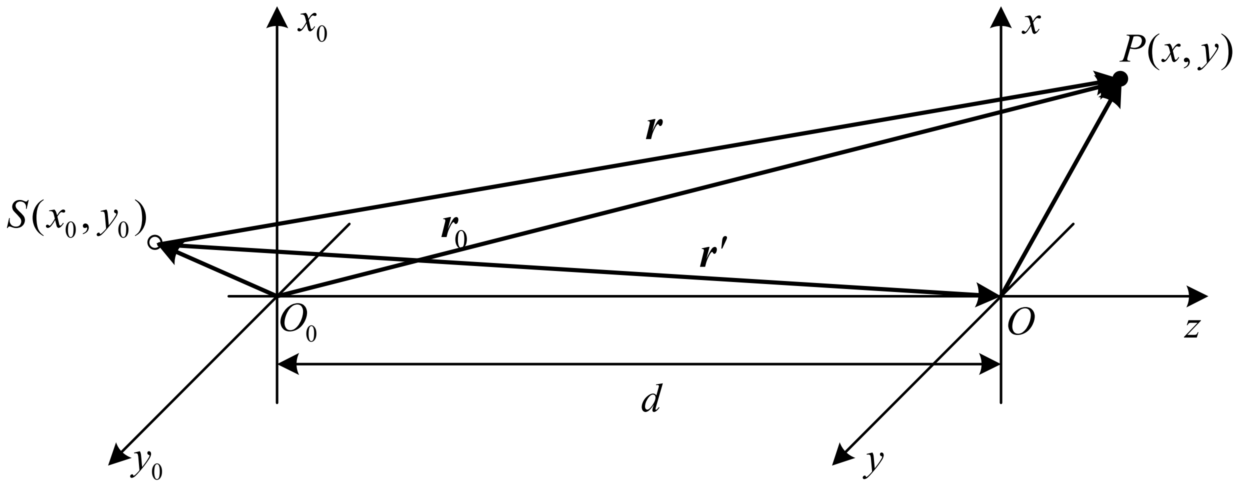
一个复杂的光源可以看作是许多点光源的组合，所以点光源是一个基本的光源。从点光源发出的光，其波面为球面，所以可以用球面波来描述点光源。在直角坐标系中，球面波的复振幅可表示为：

$$U(x,y,z)=\frac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} & \text{发散球面}\\[2ex] \dfrac{a_0}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r} & \text{会聚球面}\end{cases}$$



在某一确定的时间，相位为常数的面是相位间隔相等的等相位面，是一组等间距的同心球面，各点上的振幅与该点到球心的距离成反比。

3.4.2 球面波的近轴近似



$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + d_2} \qquad r_0 \approx d + \frac{x^2 + y^2}{2d}$$

傍轴近似

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2} \qquad r' \approx d + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + d^2} \qquad r \approx d + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2d}$$

$$U(x,y)=\frac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}=\frac{a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+d^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+d^2}}$$

近轴近似

$$U(x,y)=\frac{a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k/2d)\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]}$$

$r\approx d$

为球面波的二次相位因子

二次型相位因子，其等相位线族方程由下式确定：

$$\phi = \frac{k}{2d}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] = 2n\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 2n\lambda d = C$$

等相位线方程

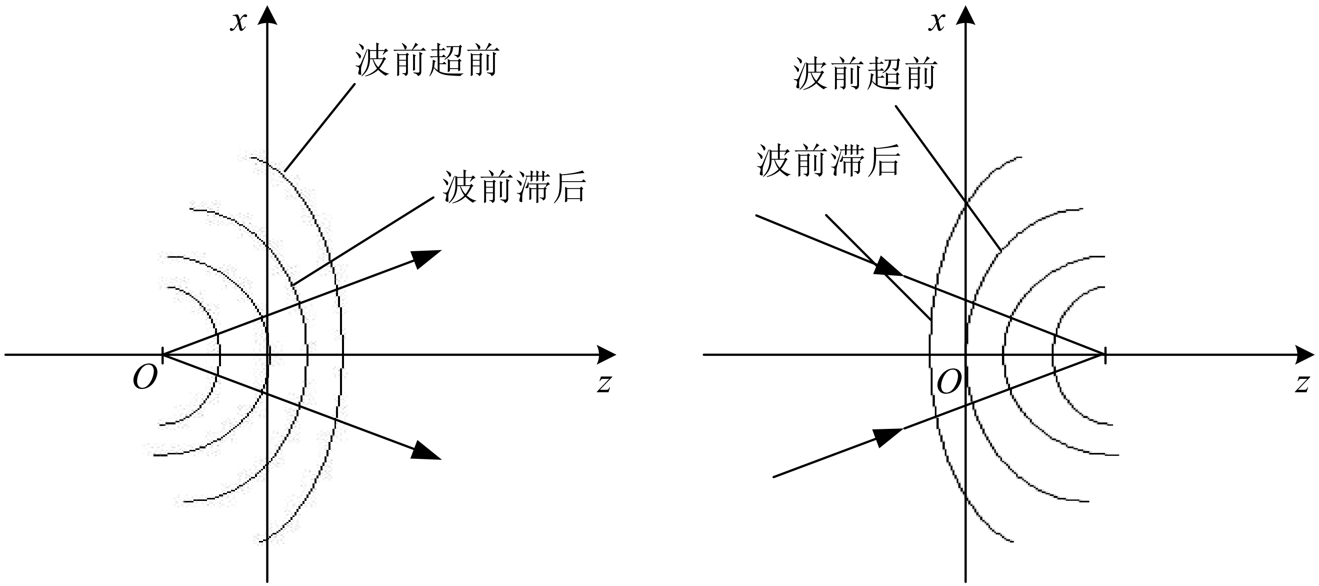
$$x_0 = y_0 = 0$$

相位因子

$$U(x,y) = \frac{a_0}{d} e^{ikd} \cdot e^{i(k/2d)(x^2+y^2)}$$

$$\phi(x,y) = e^{-i\frac{k}{2|d|}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}$$

$$U(x,y) = \frac{a_0}{|d|} e^{-ikd} \cdot e^{-i(k/2|d|)(x^2+y^2)}$$



近轴近似并加上远场条件时 $|\overrightarrow{O_0S}|^2 = x_0^2 + y_0^2 << \lambda d$

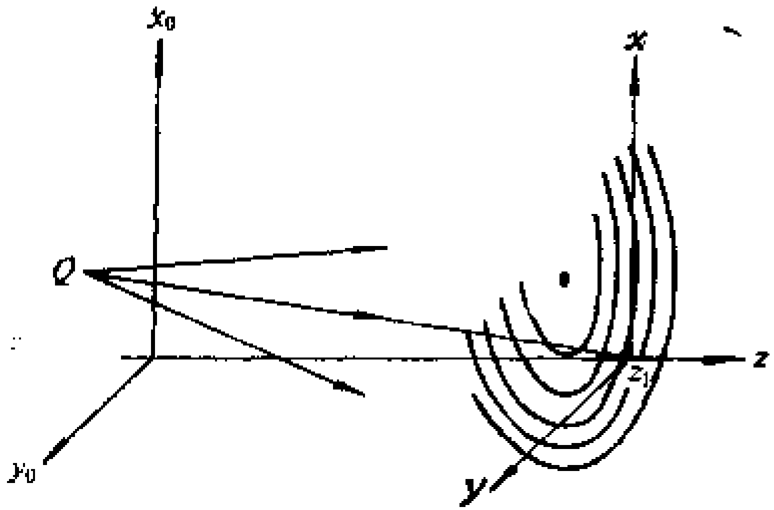
$$U(x,y) = \frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda d}x + \frac{y_0}{\lambda d}y\right)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2d}}$$

$$\frac{x_0}{d} = -\cos\alpha \qquad \frac{y_0}{d} = -\cos\beta$$

$$U(x,y) = \frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2d}}$$

$$\phi(x,y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{|d|}(x_0x+y_0y)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{2|d|}(x^2+y^2)} \approx \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k}{2|d|}(x^2+y^2)}$$

此式右边含有两个相位因子，前者等同于一列倾斜平面波的相位因子，后者等同于一列中心在轴上的球面波相位因子。所以，一个中心离轴的球面波函数，就相当于中心在轴上的球面波函数与一个倾斜平面波面数的乘积，其倾斜角由球面波中心离轴的情况来决定。



3.4.3 平面波的复振幅

1. 任一方向上的平面波(三维平面波)

如果等相位是平面，便是平面波，平面波是光源最简单的，也是一种理想的形式。在各向同性介质中，等相面与传播方向垂直，在平面波光场中，各点的振幅为常数。点光源发出的光波经透镜准直，或者把光源移到无穷处，都可近似地获得平面波。也就是说该光波的振幅和相位在任意时刻在某一平面上总是常数时，即其等相位面为平面的波，称为平面波。

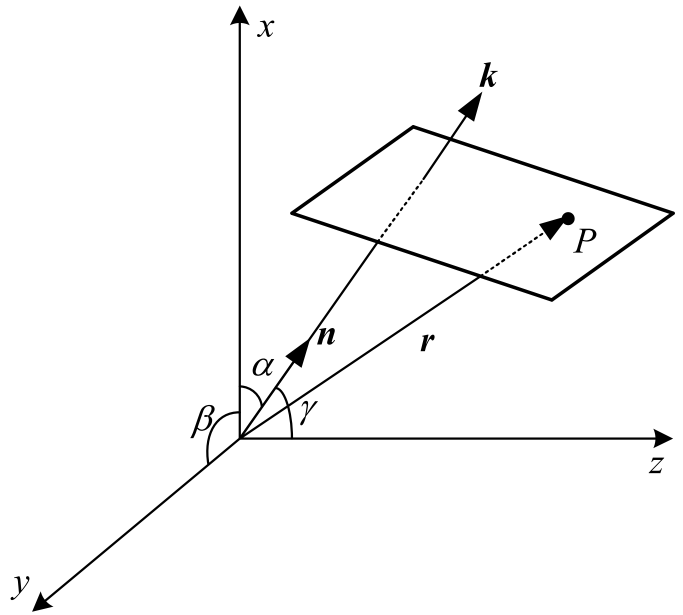
$$\phi_0 = 0$$

$$\phi(P) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \phi_0 = k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} + \phi_0$$

$$u(x,y,z,t) = a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi\nu t}$$

$$= a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi\nu t} = U(x,y,z)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi\nu t}$$

$$U(x,y,z) = a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}$$

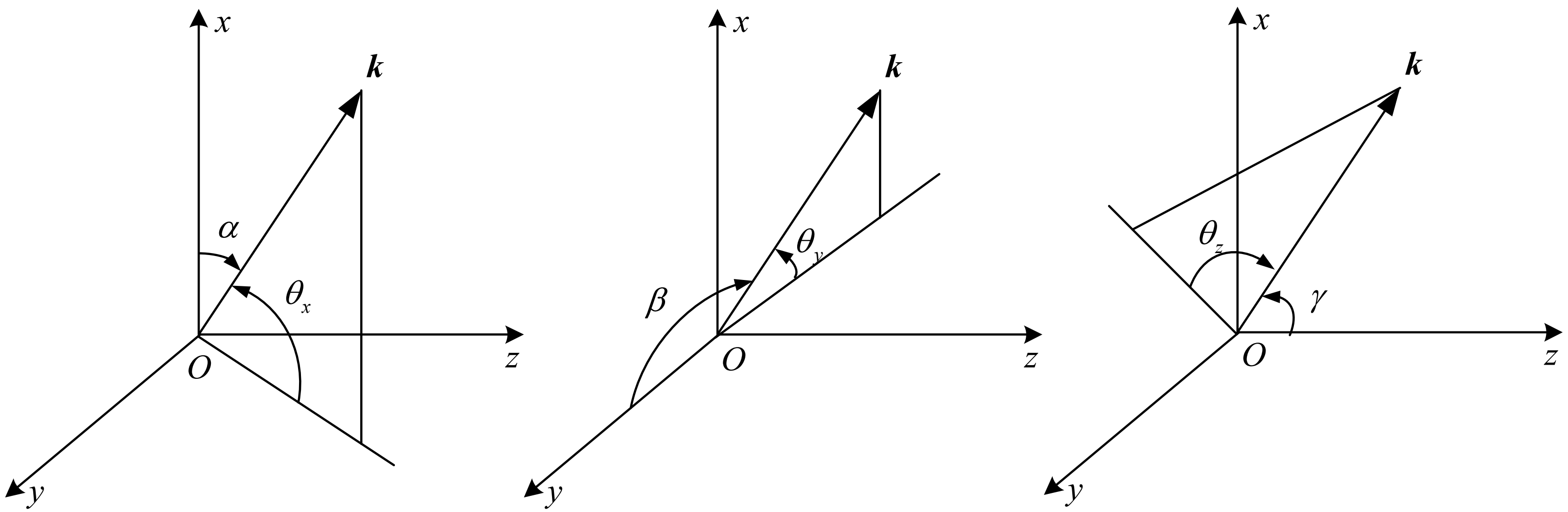


$$k_x = k\cos\alpha, k_y = k\cos\beta, k_z = k\cos\gamma$$ ← 方向余弦

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\phi(x,y,z) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x k_x + \boldsymbol{e}_y k_y + \boldsymbol{e}_z k_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z) = xk_x + yk_y + zk_z$$
$$= k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$

波矢方向的表示



$$U(x,y,z)=a_0 e^{ik(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}$$

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

$$U(x,y,z)=a_0 e^{ikz\cos\gamma}\cdot e^{ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)}=a_0 e^{ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}\cdot e^{ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)}$$

$$=Ae^{ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)}$$

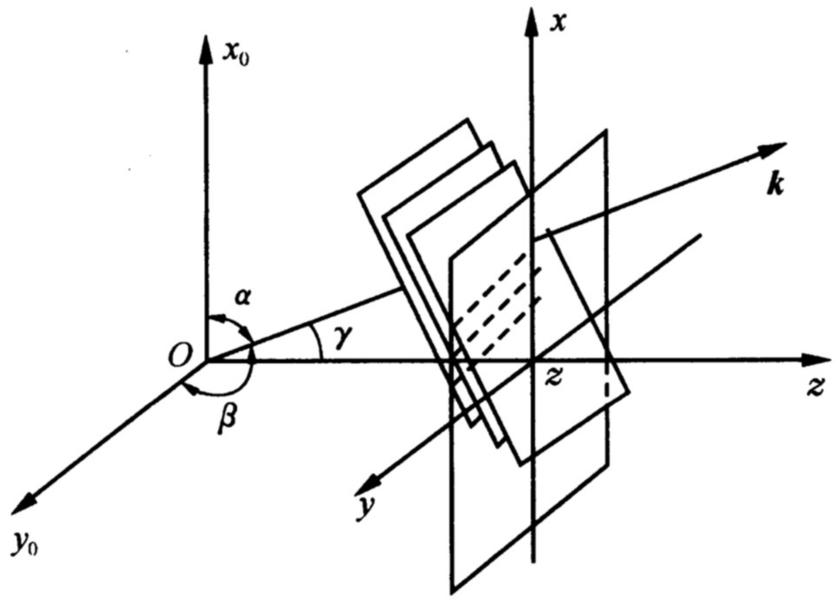
$$A=a_0 e^{ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}$$

$$z=d$$

$$z=d$$

$$A_0=a_0 e^{ikd\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}$$

$$U(x,y)=A_0 e^{ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)}$$



2. 任一方向上的平面波(二维平面波)

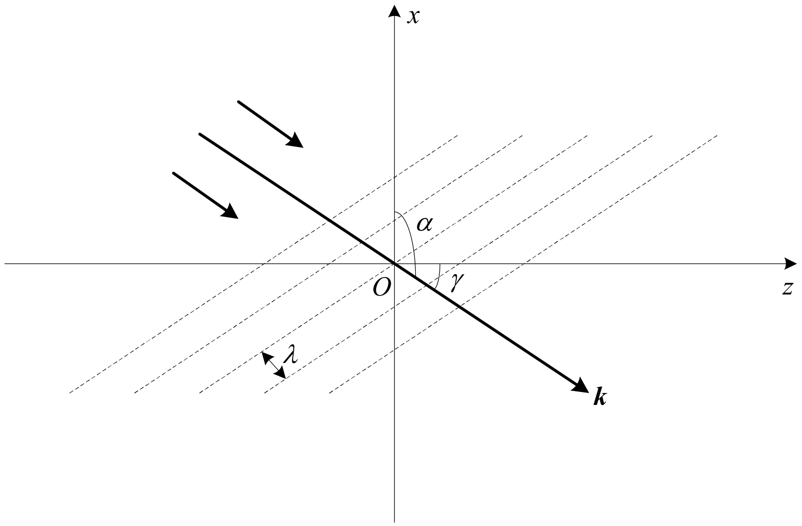
由式(3.4.39)表示的三维平面波就只含两个位置变量，成为二维平面波。

$$U(x,z)=a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\alpha+z\cos\gamma)} = A_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cos\alpha}$$

$$A_x = a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

$$U(y,z)=a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(y\cos\beta+z\cos\gamma)} = A_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky\cos\beta}$$

$$A_y = a_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz\sqrt{1-\cos^2\beta}}$$

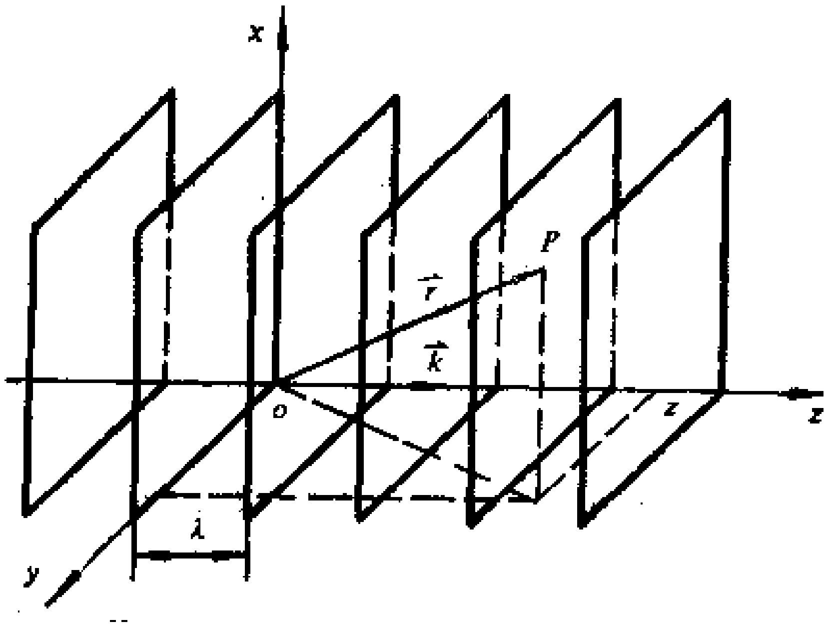


3. 一维平面波

当传播方向沿某一坐标轴时，则波函数中只保留一个位置变量这里就得到一维平面波。通常选择**z**为传播方向,这样平面波的复振幅为：

$$U(z) = a_0 e^{ikz} = A_z \xrightarrow{z=d} A_0 = a_0 e^{ikd} = A_{0z}$$

$$\phi(z) = kz \longleftarrow \text{相位函数}$$



3.5 二维光场的傅里叶分析

3.5.1 平面波的空间频率

3.5.2 球面波的空间频率

3.5.3 复振幅分布的空间频谱和角谱

3.5.4 局域空间频率

3.5.5 复杂光波的分解

由于历史的原因，提到频率我们通常会习惯地认为就是时间频率，它表示特定波形在单位时间内重复的次数。由此，我可以类推出空间频率的定义，即来表示特定波形在单位距离内重复的次数。例如，对于一列平面波谐波，空间频率表示单位长度内波峰的个数。要注意的事，当我们引入空间频率概念时，为了同时表征光波传播方向，可以把光波空间频率定义为矢量形式，它在不同坐标轴上有相应的空间频率分量，其分量值既可为正，也可为负。而相应的周期值也可正、可负。

空间频率(spatial frequency)是信息光学中最为基本的物理概念，需要深入理解其物理含义。空间频率是傅里叶空间中的变量，是直线正弦空间分布周期的倒数。它可以用直线或角度来表示，空间频率的单位名称定为1/毫米或1/毫弧度(1/度)。

如果有一个复杂的物体，通常它(或由它反射)的光波将是大量的具有不同空间频率的平面波的叠加。如果该物体是具有高度细节的物体，那么该光波将包含有许多高空间频率的成分。

空间频率是近代光学可的一个重要概念。因为在光学可处理的图像都是随着空间坐标变化的图形，引入空间频率的概念后，就可以采用傅里叶分析的方法来处理光学问题。

3.5.1 平面波的空间频率

$$\cos\beta = 0$$

$$U(x,y) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cos\alpha}$$

$$\phi(x) = kx\cos\alpha = c$$

$$\Delta\phi = k\Delta X\cos\alpha = 2\pi$$

$$\phi = kx\cos\alpha = 2n\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

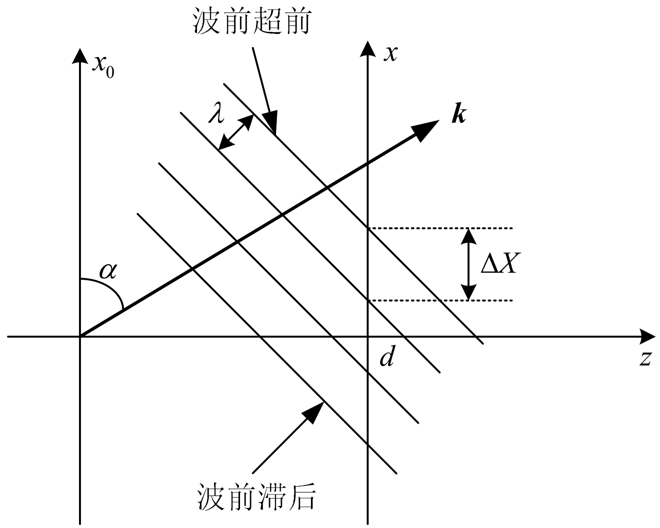
$$k\Delta X\cos\alpha = 2\pi$$

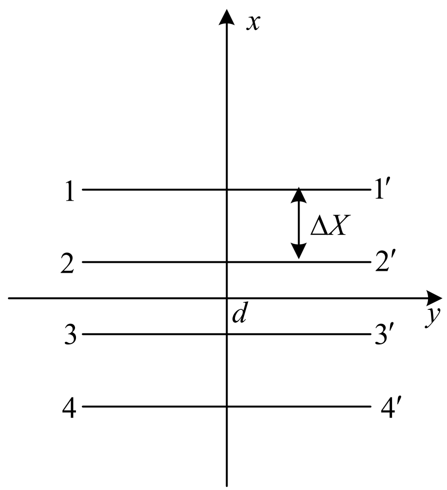
$$\Delta X = \frac{2\pi}{k\cos\alpha} = \frac{\lambda}{\cos\alpha}$$

$$\xi = \frac{1}{\Delta X} = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$$

x 方向的空间频率

周/**mm**作为空间频率的单位





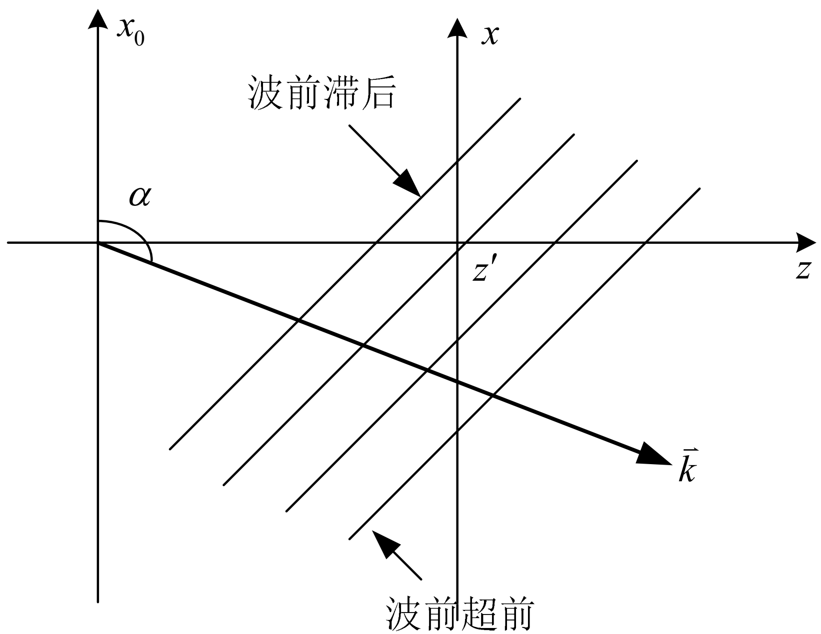
由于等相位线平行于 y 轴，可以认为，沿方向的空间周期为：$\eta = \dfrac{1}{Y} = 0$

可以用空间频率来描述单色平面波： $U(\xi) = A_x e^{i2\pi\xi x}$

空间频率有正负值，其正负表示了平面波不同的传播方向。空间频率的绝对值表示复振幅在**x**方向单位长度上变化的周期数。

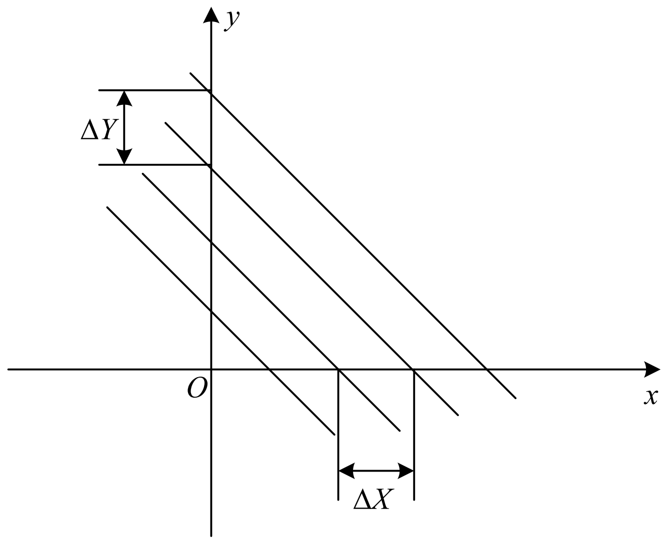
$$\eta = \frac{1}{\Delta Y} = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$

$$\xi = \frac{1}{\Delta X} = 0$$



对平面波，一般情况是传播方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ ，这时平面上的等相位线是平行的斜线。下图表示了位相差为的等相位线

等相位线方程为：



$$k(x\cos\alpha + y\cos\beta) = c$$

$$k(x\cos\alpha + y\cos\beta) = 2n\pi$$

$$y = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}x + \frac{n\lambda}{\cos\beta} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\Delta X = \frac{\lambda}{\cos\alpha} \qquad \Delta Y = \frac{\lambda}{\cos\beta}$$

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \qquad \eta = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$

$$\theta_x = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \theta_y = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\xi = \frac{\sin\theta_x}{\lambda} \qquad \eta = \frac{\sin\theta_y}{\lambda}$$

$$|f_n| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \qquad \tan\varphi = \frac{\xi}{\eta}$$

$$U(\xi,\eta) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}$$

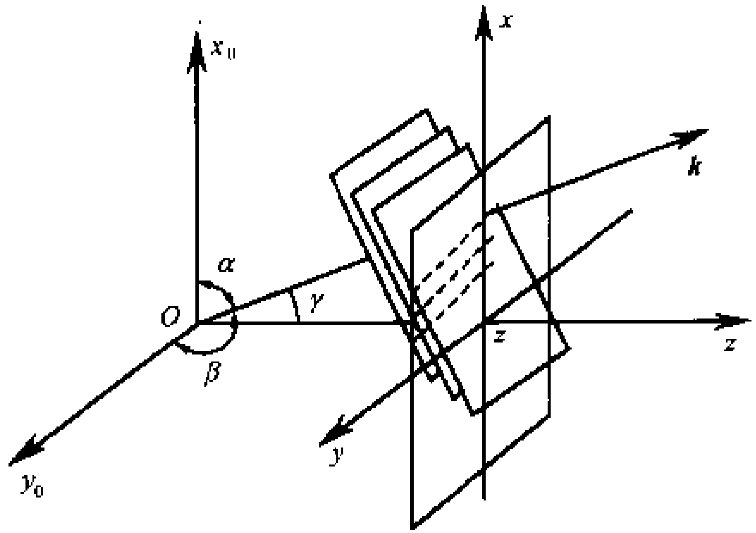
如果平面波不只是在某一平面上，而是在整个空间中传播，则

$$\Delta X = \frac{\lambda}{\cos\alpha} \qquad \Delta Y = \frac{\lambda}{\cos\beta} \qquad \Delta Z = \frac{\lambda}{\cos\gamma}$$

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \qquad \eta = \frac{\cos\beta}{\lambda} \qquad \zeta = \frac{\cos\gamma}{\lambda}$$

$$U(\xi,\eta,\zeta) = A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y+\zeta z)}$$

$$\zeta = \frac{\cos\gamma}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \xi^2 - \eta^2}$$



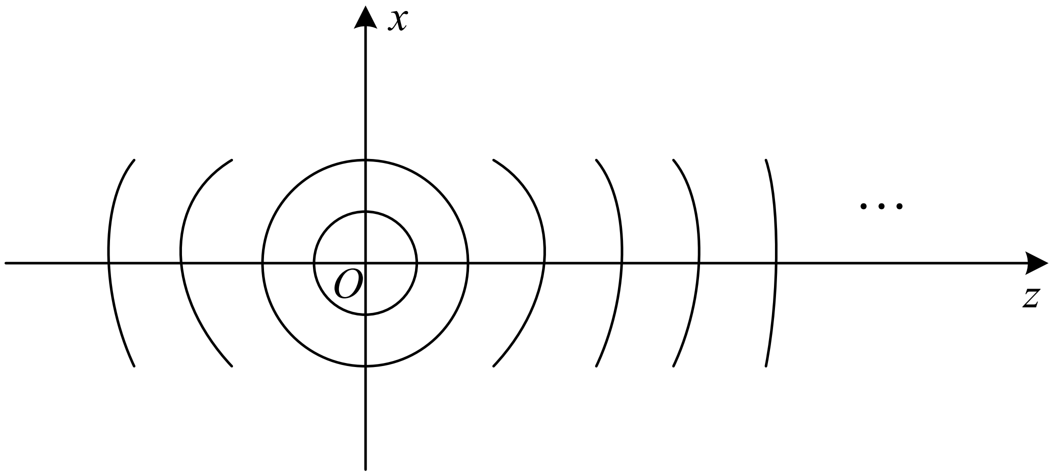
3.5.2 球面波的空间频率

对球面波复振幅分布的空间频率描述，由于振幅是非周期性的，在一定条件下近似为成为一个常量，故无空间频率可言。至于相位，虽然它在三维空间具有周期性，但在上述观察平面上，其等相位线族为空间不等间隔的二次曲线，相位因子的空间频率不是一个常数，而是空间坐标的函数。当满足远场条件时，且还满足：

$$l^2(x,y) = x^2 + y^2 << \lambda d$$

$$U(x,y) = \frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)} = \frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}$$

可见当经过上述一系列近似后，一列球面波也就变成为在观察平面的限定范围内，具有空间频率的一列平面波。



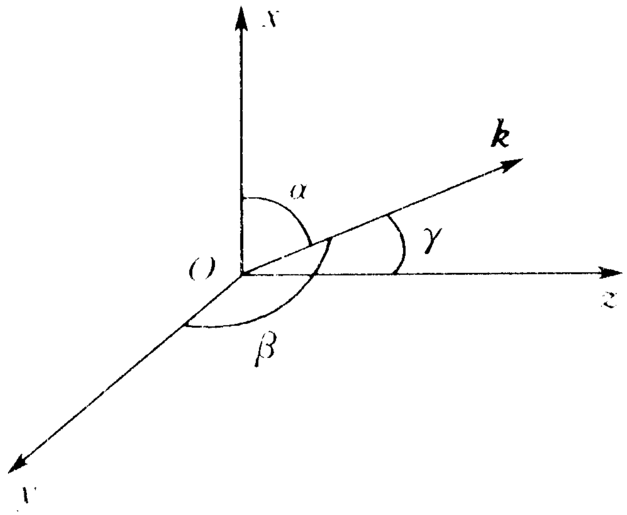
3.5.3 复振幅分布的空间频率和角谱

$$a(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} A(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

复振幅分布　　频谱　　基元函数

$$A(\xi,\eta)=A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\iint_{-\infty}^{\infty} a(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

角谱



从角谱的概念，使我们可以进一步理解到单色光场某一平面上的场分布可以看作不同方向传播的单色平面波的叠加，在叠加时各平面波成分有自己的振幅和常量相位，其值分别取决于角谱的模和幅角。

$$a(x,y) \longleftrightarrow A(\xi,\eta)$$

空间周期函数 $\longrightarrow$ 离散函数

空间非周期函数 $\longrightarrow$ 连续函数

在光波的空间傅里叶分析中，三维简谐平面波的这种简单波构成傅里叶分析的基础，称为基元光波。这种以三维简谐平面波作为基元光波的分析方法被称为平面波基元分析法或余弦基元分析法。之所以选择简谐平面波作为傅里叶分析的基元函数，是因为简谐平面波是一种定态光波，它在传播过程中，时间频率不变，振幅为常数，相位随空间坐标和时间坐标线性变化，函数形式简单，方便数学处理。特别是，对于线性系统来说，简谐平面波的波函数是系统的本征函数，它通过系统传播时，波函数形式不变，这使得复杂波在系统中传播的物理过程变得十分明晰。应用基元分析方法，只要求出了系统对基元光波的响应，即可得出对任意复杂输入的输出。从这个意义上，系统的作用完全可由它对基元函数的响应性质来表征。因此，以简谐平面波作为基元函数是一种合理的选择。

3.5.4 局域空间频率

在傅里叶分析中，构成函数的每一频率成分的基元函数是扩展到整个x - y空间域，这样就无法把空间位置与特定的空间频率联系起来。但有时，也会遇到空间频率局域化的情况。例如，图像的某一局部由类似光栅的一组平行线段构成，图像在局部表现出的周期性特点可以引入与位置关联的局部空间频率来描述。

$$g(x,y)=a(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,y)} \longrightarrow \begin{cases} \xi_l=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) \\ \eta_l=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) \end{cases}$$

单色平面波

$$g(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)} \longrightarrow \begin{cases} \xi_l=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}[2\pi(\xi x+\eta y)]=\xi \\ \eta_l=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}[2\pi(\xi x+\eta y)]=\eta \end{cases}$$

二次相位函数

$$g(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha(x^2+y^2)} \qquad \xi_l=\alpha x \qquad \eta_l=\alpha y$$

"有限啁啾" 函数

$$g(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\beta(x^2+y^2)}\mathrm{rect}\frac{x}{2L_x}\mathrm{rect}\frac{y}{2L_y}$$

$$\xi_l=\beta x\mathrm{rect}(\frac{x}{2L_x})$$

$$\eta_l=\beta y\mathrm{rect}(\frac{y}{2L_y})$$

局域空间频率在光学中有专门的物理意义。相干光波前的复振幅的局域空间频率相当于该波前在几何光学描述情况下的光线方向。

3.5.6 复杂光波的分解

实际光源发出的光波通常是复杂波，即在时间参量上包含种时间频率，在空间分布上，等相面上具有复杂的形状。研究复杂波的一种有效方法是把它分解为一系列简谐平面波的线性组合，通过对各个简谐平面波成分传播规律的分析，最后综合出复杂波的传播规律。对复杂波分解的理论依据是波动方程的线性性质和波的叠加原理。此外，由于简谐平面波波函数的集合构成了数学上的正交完备系，因此，凡是符合傅里叶变换存在条件的一切复杂波，都可以应用傅叶里变换作为分解手段。对复杂波的分解，先将空间各考察点处的振动分解为各种时间频率的简谐振动的线性组合， 即时间域分解；然后，将每个简谐波分解为一系统不同空间频率的平面波的线性组合，即空间域分解。最后将复杂波表示一系列简单平面波的线性组后。

$$a(x,y,z;t) \longleftrightarrow A(x,y,z;\nu)$$

$$A(x,y,z;\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} a(x,y,z;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \longleftrightarrow a(x,y,z;t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y,z;\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$A'(\xi,\eta,\zeta;\nu)=\iiint_{\infty} A(x,y,z;\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y+\zeta z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\updownarrow$$

$$A(x,y,z;\nu)=\iiint_{\infty} A'(\xi,\eta,\zeta;\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y+\zeta z)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

空间频率分量并不独立，它们和时间频率关为：

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\left(\frac{\nu}{v}\right)^2$$

$$a(x,y,z;t)=\iiint_{\infty}\int A'(\xi,\eta,\varsigma,\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y+\varsigma z-\nu t)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varsigma\mathrm{d}\nu$$

3.6 函数抽样和函数复原

3.6.1 函数的离散

3.6.2 一维抽样定理

3.6.3 二维抽样定理

3.6.4 宽间—带积宽

3.6.5 线性光学系统的分辨率

宏观的物理过程通常总是连续变化的，描述这些物理过程的物理量的时间或空间分布也是连续变化的。但在对一个的物理过程或图像进行观测、记录、传送和处理时，由于物理器件的信息容量总是有限的，因而不能用连续的方式进行。例如，使用的**CCD**摄像机拍摄连续变化的图像时，每秒钟也只能记录有限幅的图像，而其中每幅图像也是用一些离散分布的数值来表示的，这些数值的点数多少则取决由**CCD**的像素数。

将一个连续变化的物理量，用它的一些离散分布的数值来表示，称为抽样，这些抽样值的表达式也是离散的。但是在对物理量进行抽样过程中所得到的抽样值函数**(**或称为样本函数**)**来表示原来的物理过程，有多大的准确性**?** 抽样间隔应取多大才能做到既不丢失信息，又不致对探测器件提出过分要求**?**另外，选择什么样的抽样函数对被测函数抽样，才能使抽样值函数更精确地反映被测函数。再就是如何从抽样值函数复原出真实的连续变化的函数来**?**这些就是抽样定理要讨论的问题。

3.6.1 函数的散离

要对一个连续函数 $y=f(x)$离散化，一种方法就是对它进行等间隔抽样。若抽样间隔为 Δx，则各抽样点$x = n\Delta x$ (n = 0,1,2,…) 所得到的离散函数可记为:

$$y = f(x) \longrightarrow y_n = f(n\Delta x)$$

$$y = \mathrm{e}^{-ax^2}\cos 2\pi bx \longrightarrow y_n = \mathrm{e}^{-a(n\Delta x)^2}\cos 2\pi b(n\Delta x)$$

离散函数与连续函数是部分与整体的关系，而这个部分必须能全面地反映整体。我们知道，任一个连续函数(周期的和非周期性的)只要它满足一定条件，都可以表示成无穷多个谐波分量的迭加，也就是不同频率的正、余弦函数的线性组合。如果能对其中的每一个正、余弦函数正确地抽样和恢复，那么对任意连续函数的抽样和恢复的问题也就都解决了。

正弦型序列

连续波表达式为 $s(x)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$

振幅　　模拟角频率　　相位

正弦型序列的定义如下： $s(k)=A\sin(\Omega_0 k+\phi)$

数学角频率

$$\Omega_0=\omega_0 T$$

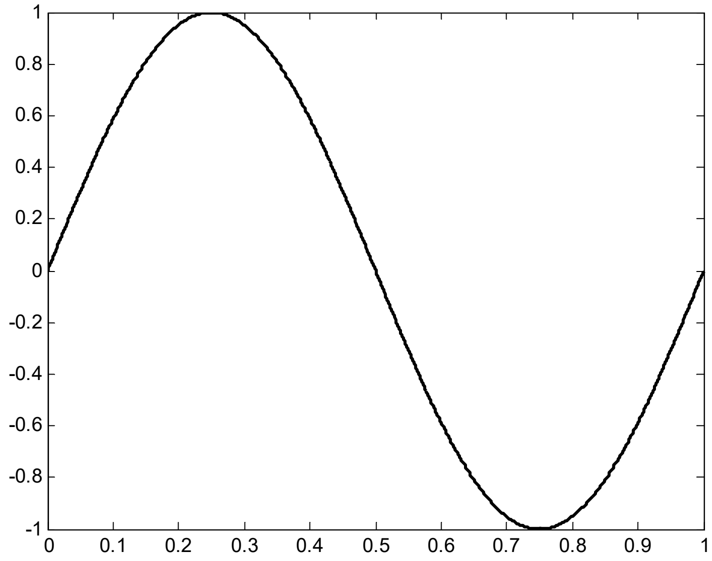
单位为 **rad**　　单位是**rad/s**

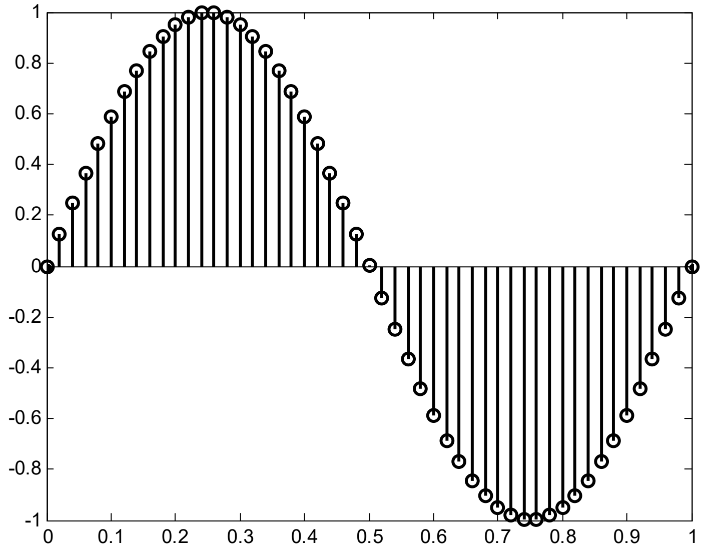
数学角频率表示相邻两个样值弧度的变化量。

与模拟正弦信号不同，离散正弦是否为周期性函数取决于比值 $2\pi/\Omega_0$ 是正整数、有理数还是无理数。

$$A\sin[\Omega_0(k+N)+\phi]=A\sin\left[\Omega_0\left(k+\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)+\phi\right]$$

$$=A\sin[\Omega_0 k+2\pi+\phi]=A\sin(\Omega_0 k+\phi)$$





余弦序列：$f(k)=A\cos(\Omega_0 k+\phi)$

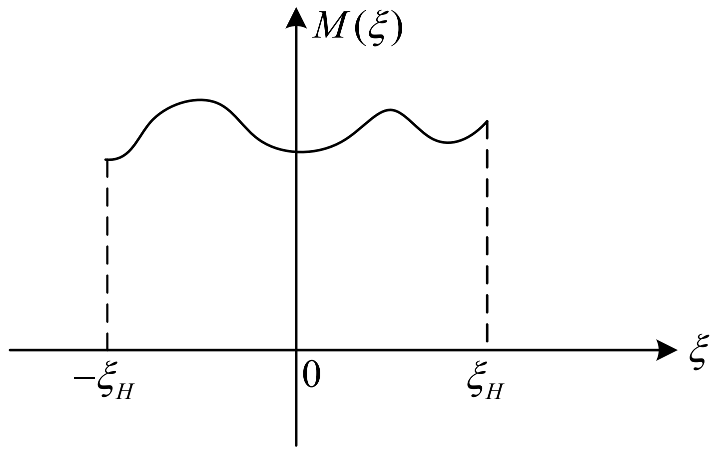
3.6.2 一维抽样定理

抽样定理最初由怀特克(**Whittaker**)提出，后来是由美国科学家、著名信息论学者香农(**Shannon，1919–2001**)在信息论中研究而广为人知。抽样定理适用于带限函数类，所谓带限函数是指这类函数的傅里叶变换只在频率空间的有限区域上不为零。抽样定理告诉我们：如果对某**—**带宽有限的时间连续物理量**(**如模拟信号**)**进行取样，且取样速率达到**—**定数值时，那么根据这些取样值就能准确地确定原信号。

抽样定理表明：一个频带限制在$(0, \xi_H)$赫兹内的连续信号 $m(x)$, ξ_H为连续信号 $m(x)$的最高频率。如果以$1/(2\xi_H)$秒的间隔对它进行等间隔取样， 则$m(x)$将被所得到的取样值完全确定。此定理称为均匀抽样定理。换句话说，在信号最高频率分量的每一个周期内起码应取样两次。

频带限制(bandlimited)函数

$$F\{m(x)\}=M(\xi)=\begin{cases}M(\xi) & |\xi|\le\xi_H\\ 0 & |\xi|>\xi_H\end{cases}$$

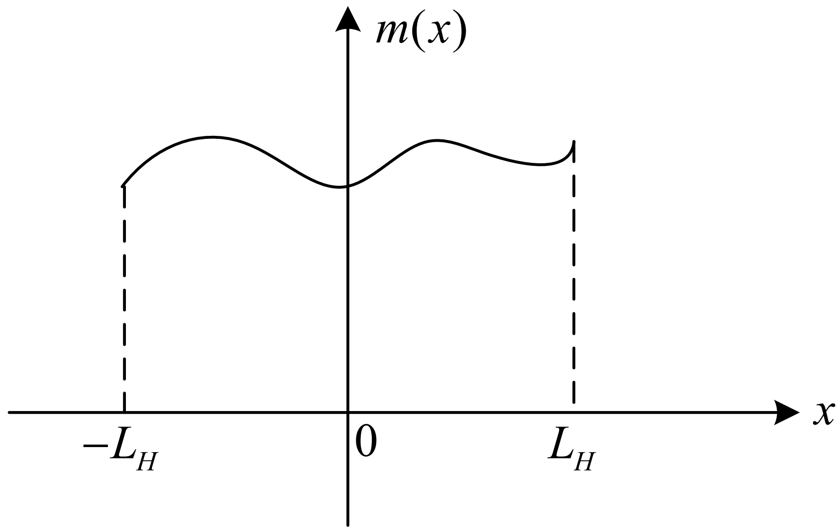


$$m(x)=\int_{-\xi_H}^{\xi_H}M(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}\xi$$

在信息光学，频带限制函数是经常遇到的，如经过一个有限孔径光学系统的光学信号是空间频率受限的，就可以用这种函数描述。

空间限制函数

$$m(x)=\begin{cases}m(x) & |x|\le L_H\\ 0 & |x|>L_H\end{cases}$$



$$\mathrm{comb}(x/L) = L\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL)$$

$$m_s(x) = m(x)\mathrm{comb}(x/L)$$

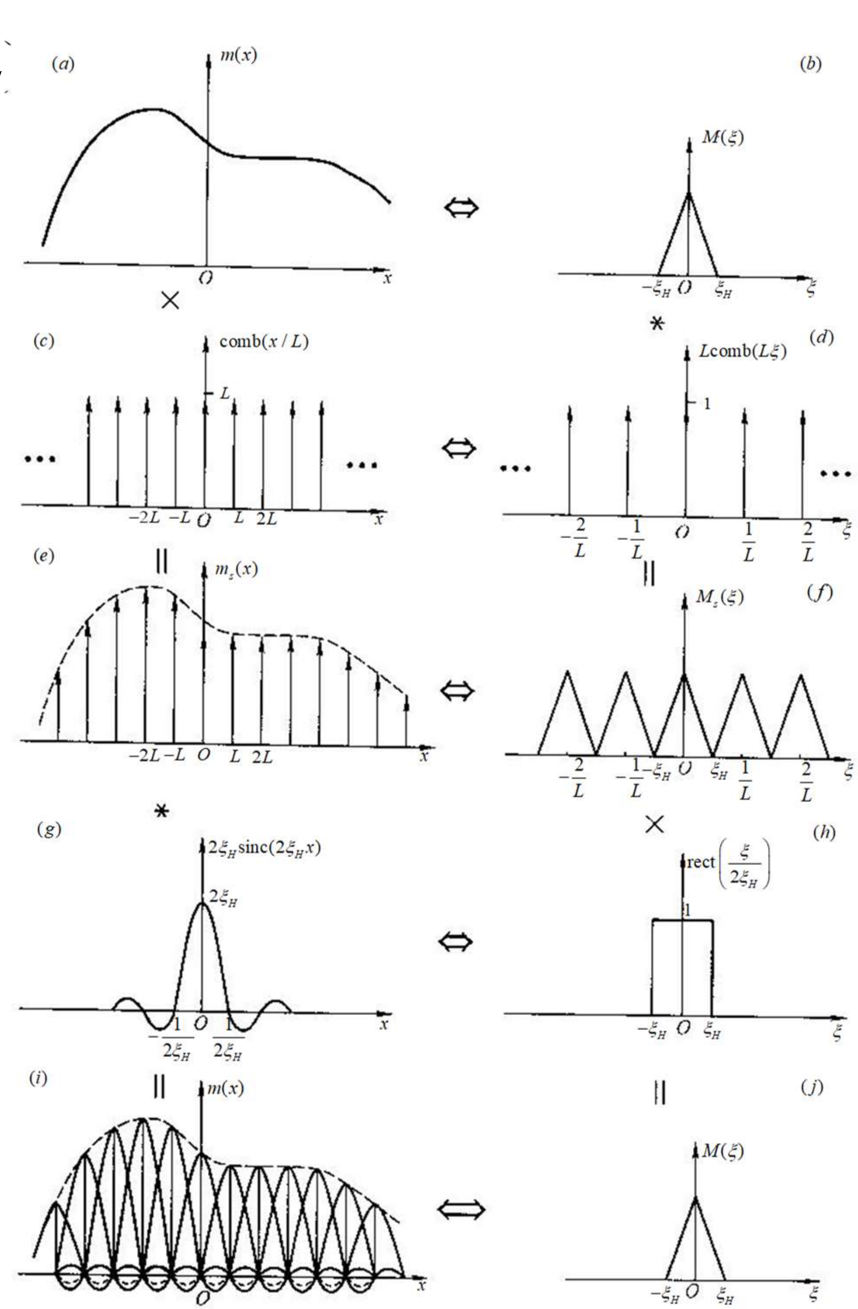
$$M_s(\xi) = M(\xi) * F\{\mathrm{comb}(x/L)\}$$

$$M_s(\xi) = M(\xi) * L\mathrm{comb}(L\xi)$$

$$= M(\xi) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi - n/L)$$

$$M_s(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\xi - n/L)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\xi - n\xi_s)$$



抽样定理告诉我们：如果对某一带宽有限的时间连续物理量(如模拟信号)进行取样，且取样速率达到一定数值时，那么根据这些取样值就能准确地确定原信号。

$$m(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nL)\delta(x-nL) * \mathrm{sinc}(2\xi_H x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nL)\delta(x-nL) * \mathrm{sinc}(x/L)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nL)\mathrm{sinc}\left(\frac{x-nL}{L}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nL)\mathrm{sinc}(2\xi_H x-n)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nL)\mathrm{sinc}\left[2\xi_H\left(x-\frac{n}{2\xi_H}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nL)\frac{\sin[\pi(x-nL)/L]}{\pi(x-nL)/L}\text{。}$$

上式也称为内插公式，这时**sinc**函数也被称为取样函数。此式表示，当取样速率不低于奈奎特速率时，低通信号***m*(*t*)**可以由其所有的取样值 ***m*(*nL*)**重建，即每个样值乘以取样函数**sinc**的合成波形即为原信号。

3.6.3 二维抽样

抽样过程是通过原函数与一个抽样函数相乘来实现的。显然，对于像图像函数 $f(x, y)$ 这类二维函数来说，需要它在 x-y 平面内的一个分立点集上的抽样值阵列来表示。因此，比较理想的是采用二维梳状函数作为抽样函数。从直观上看很清楚，如果这些抽样点间隔取得相当小时，那么可以说抽样数据就很接近原图像函数的精确表示。这样，二维函数 $m(x, y)$ 的抽样可由下式定义：

$$m_s(x, y) = m(x, y)\operatorname{comb}\left(\frac{x}{L_x}, \frac{y}{L_y}\right) = f(x, y)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{L_x} - m, \frac{y}{L_y} - n\right)$$

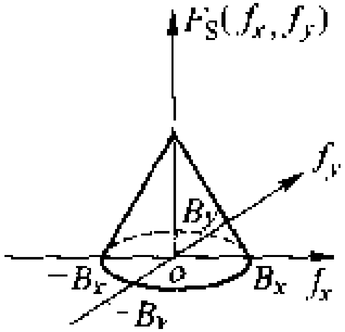
$$= m(x, y)L_x L_y \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x - mL_x, y - nL_y\right)$$

因此，抽样值函数 $m_s(x, y)$ 的谱频是由 δ 函数的阵列组成，各个 δ 函数之间的相互间隔在 x 方向上的宽度为 Lx，而在 y 方向上的宽度为 Ly。

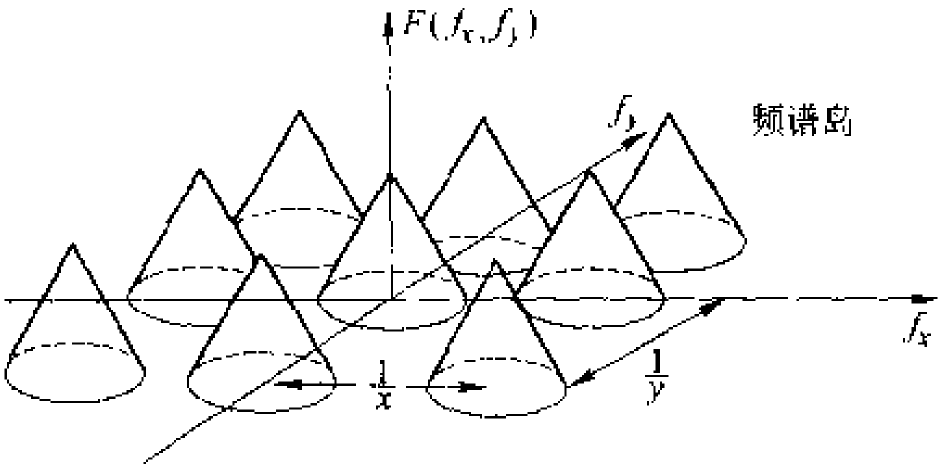
$$M_s(\xi,\eta) = M(\xi,\eta) * F\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{x}{L_x},\frac{y}{L_y}\right)\right\} = M(\xi,\eta) * L_x L_y \mathrm{comb}(L_x\xi, L_y\eta)$$

$$= M(\xi,\eta) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi-\frac{n}{L_x},\eta-\frac{y}{L_y}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty} M\left(\xi-\frac{n}{L_x},\eta-\frac{y}{L_y}\right)$$。

上式表明，抽样值函数的频谱由频率平面上无限重复的原函数的频谱所构成，形成排列有序的“频谱岛”，其重复间距分别为**1/Lx,1/Ly**



(a) 原函数的频谱



(b) 抽样值函数的频谱

$$m = n = 0$$

$$M_s(\xi,\eta) = M(\xi,\eta)$$

即从抽样值函数的周期性重复的频谱中可绝对准确地恢复出原函数的频谱。

要能从抽样值函数的周期性重复的频谱中恢复原函数的频谱，必须使各重复的频谱要能彼此分得开，为此，原函数的频谱宽度应是有限的同，即要为带限函数：

$$F\{m(x,y)\} = \begin{cases} M(\xi,\eta) & -\xi_H \le \xi \le \xi_H, -\eta_H \le \eta \le \eta_H \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$L_x = \frac{1}{2\xi_H} \qquad Y = \frac{1}{2B_y}$$

称为奈奎斯特判据。满足此条件的抽样间隔称为临界抽样间隔

$$L_x < \frac{1}{2\xi_H} \qquad L_y < \frac{1}{2\eta_H}$$

过抽样

$$L_x > \frac{1}{2\xi_H} \qquad L_y > \frac{1}{2\eta_H}$$

欠抽样

在确定了临界抽样间隔之后，剩下的问题就是选择具体的滤波器及其传递函数。这里有很大的选择余地。例如，可以选择矩形滤波器，其传递函数为：

$$H(\xi,\eta)=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_H},\frac{\eta}{2\eta_H}\right)=\begin{cases}1 & \left|\frac{\xi}{2\xi_H}\right|\le\frac{1}{2},\left|\frac{\eta}{2\eta_H}\right|\le\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\updownarrow$$

$$h(x,y)=F^{-1}\{H(\xi,\eta)\}=4\xi_H\eta_H\mathrm{sinc}(2\xi_H x,2\eta_H y)$$

$$M_s(\xi,\eta)\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_H},\frac{\eta}{2\eta_H}\right)=M(\xi,\eta)\quad\longleftrightarrow\quad F^{-1}\left\{M_s(\xi,\eta)\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_H},\frac{\eta}{2\eta_H}\right)\right\}=m(x,y)$$

$$m(x,y)=4\xi_H\eta_H L_x L_y\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}m(nL_x,mL_y)\mathrm{sinc}[2\xi_H(x-nL_x),2\eta_H(y-mL_y)]$$

奈奎斯特判据 $\downarrow$

怀特克–香农抽样定理

$$m(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}m(\frac{n}{2\xi_H},\frac{m}{2\eta_H})\mathrm{sinc}[2\xi_H(x-n/2\xi_H),2\eta_H(y-m/2\eta_H)]$$

怀特克–香农抽样定理实际是一个插值公式，即用抽样点的函数值去计算在抽样点之间所不知道的非抽样点的函数值。这个定理的重要意义在于，它表明在一定条件下，由插值准确恢复一个带限函数是可以实现的。办法是在每一抽样点上放置一个以抽样值为权重的**sinc**函数作为内插函数，并将它们线性组合起来，就得到了这种复原。

上述结果在形式上不是唯一可能的抽样定理。因为在讨论中作了两个相当任意的选择：一个是使用了方形的抽样格点，另一个是选择了式矩形表示的传递函数。如果在这两处作别的选择，则将导出别种形式的抽样函数。

严格说来，带限函数在物理上是不存在的。任何在空域中分布在有限范围内的信号 **(**函数**)**，其频谱在频域的分布都是无限的；但这些函数的频谱随着频率提高，到一定程度后总会大大减小。实际上，由于观察仪器 **(**包括人眼**)** 的通频带总是有限的，即使某函数的频带很宽，观察仪器也感知不到其高频部分，因此实际应用时，可以把它们近似看作带限函数，而忽略高频分量所引起的误差。

3.6.4 空间—带积宽

空间–带宽积 (SW，space-bandwidth product) 定义为函数在空域和频域所占面积的乘积，表示成：

$$SW = 16L_x'L_y'\xi_H\eta_H$$

空间–带宽积是评价系统性能的重要参数，它既可以用来描述图像的信息容量，也可以用来描述成像系统、信息处理系统的信息传递和处理能力。例如，成像系统的空间–带宽积就等效于有效视场和系统截止频率所确定的通带面积的乘积。

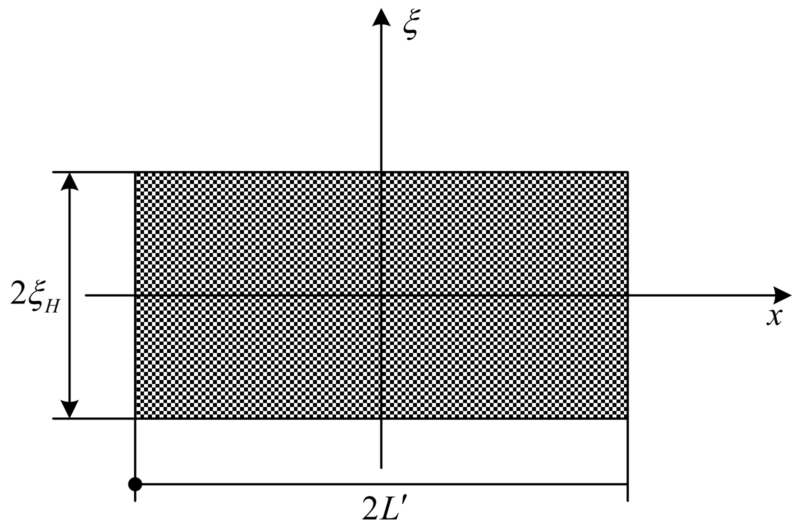
对于一个二维函数，例如二维分布的图像，**SW**用来描述信息的容量，它决定了可分辨像元的数目，这个数目也称为图像的自由度或自由参数

$$N = SW = 16L_x'L_y'\xi_H\eta_H$$

$$N = SW = 32L_x'L_y'\xi_H\eta_H$$

SW不仅用于描述空间信号的信息容量，也可以用来描述成像系统、信息处理系统的信息传递和处理能力。例如，当物体尺寸较大时，用显微镜只能看到被观察物的一部分，显微镜中有效光阑限制了最高能传输的信号空间频率，因而这一成像系统的空间带宽积就等于有效视场和由系统截止频率所确定的通带面积的乘积。当信号通常经过传递或处理时，只有系统的**SW**大于信号的**SW**才不会损失信息。当然，系统的**SW**越大，传递信息的能力就越大，但设计和制造就越困难。

下图所示为一维情况下的空间带宽积的示意图，从图中可以看出，**SW**是一个不变量，当函数**(**图像**)**在空间位移或产生频移时，随空间大小变化，带宽依反比关系变化，则**SW**仍具有不变性。当图像发生空间位移、缩放，受到调制或变换等操作时，为了不丢失信息，应使空间带宽积保持不变。



3.6.5 线性光学系统的分辨率

具有低通滤波性能的系统的分辨率，即输入平面能被系统分辨开来的两个最小间距(最小分辨长度)的倒数。

最小分辨长度与空间带宽积的关系为：

$$\delta_x \delta_y \propto L'_x L'_y / SW$$

SW越大，最小分辨长度就越小，系统的分辨率就越高，测量过程的失真越小。