珠海校区 2010 学年度 1 期 10 级高等数学 2 期末试题

一.(10 分,每小题 5 分)

1.用积分中值定理证明 $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t = 0;$

证:由积分中值定理,存在 $\xi\in(-x^3,0)$, 使得

$$\left|\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t\right| = \left|e^{\xi^2}[0-(-x^3)]\right| = e^{\xi^2}\left|x^3\right| \le e^{x^6}\left|x^3\right|,$$

于是 $$\lim_{x\to 0}\left|\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t\right| \le \lim_{x\to 0} e^{x^6}\left|x^3\right| = \lim_{x\to 0} e^{x^6}\cdot\lim_{x\to 0}\left|x^3\right| = 0,$$ 此即

$$\lim_{x\to 0}\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

2.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t}{x\tan x^2}$.

解:此为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式,由洛必达法则及 $\tan x^2 \sim x^2 \quad (x\to 0)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t}{x\tan x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{-x^3}^{0} e^{t^2}\mathrm{d}t\right)'}{(x\cdot x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{(-x^3)^2}(-3x^2)}{3x^2} = 1.$$

二.(10 分) 求函数 $f(x)=(x-1)\cos x-\sin x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值

解:. $f'(x)=\cos x-(x-1)\sin x-\cos x=-(x-1)\sin x$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=0, x_2=1;$ 而 $f(0)=-1,\ f(1)=-\sin 1,\ f(\dfrac{\pi}{2})=-1$, 因此

$$\max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(1) = -\sin 1,\ \min_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

三.(10 分) 设 $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{(\ln t)^2}{2}, \end{cases} (0<t<1)$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\ln t\cdot\frac{1}{t}=\frac{\ln t}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-t^2})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)=\frac{|t|}{t\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-t^2}\ln t}{t}.$$

四.(20 分,每小题 5 分)求下列不定积分:

1. $\displaystyle\int\frac{6}{x^2-9}\mathrm{d}x$;

2. $\displaystyle\int\tan^3 x\mathrm{d}x$;

3. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;

4. $\displaystyle\int\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$.

解: 1. $\displaystyle\int\frac{6}{x^2-9}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C;$

2. $$\int\tan^3 x\mathrm{d}x=\int\tan x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int\tan x\mathrm{d}\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C;$$

3. 令 $x=2\sin t, \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t, \sqrt{4-x^2}=2\cos t$, 故

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int 4\sin^2 t\mathrm{d}t=\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}(2t)$$

$$=2t-\sin 2t+C=2t-2\sin t\cos t+C$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$$

4. $$\int\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int\frac{2(x+1)\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int\frac{2\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}[(x+1)^2+1]}{(x+1)^2+1}-\int \frac{2\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)+C.$$

五.(20 分,每小题 5 分)求下列定积分和反常积分:

1. $\int_0^4 \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$;

2. $\int_{-1}^1 x(\cos^6 x+\arctan x)\mathrm{d}x$;

3. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$;

4. $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$.

解: 1. 令 $t=\sqrt{2x+1}, x=\frac{t^2-1}{2}, \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$, 则

$$\int_0^4 \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{3(t^2-1)t\mathrm{d}t}{2t}=\frac{3}{2}\int_1^3 (t^2-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(t^3-3t)\Big|_1^3=10.$$

2. 由对称性, $\int_{-1}^1 x\cos^6 x\mathrm{d}x=0,$ 而

$$\int_{-1}^1 x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_{-1}^1-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\arctan x\right)\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

即 $$\int_{-1}^1 x(\cos^6 x+\arctan x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1.$$

3. $$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|\mathrm{d}x+\int_1^e|\ln x|\mathrm{d}x$$

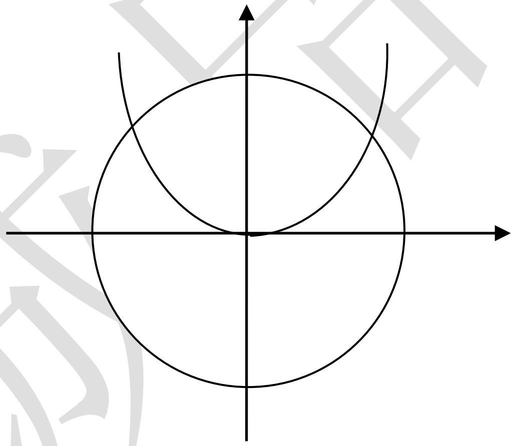
$$\int_1^e|\ln x|\mathrm{d}x=\int_1^e\ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_1^e=1$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x=-(x\ln x-x)\Big|_{1/e}^{1}=1-2e^{-1}$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x = 2(1-e^{-1}).$$

4. $\int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3} = \int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^3} = -\frac{1}{2(\ln x)^2}\Bigg|_{e}^{+\infty} = \frac{1}{2}.$

六.(10 分)求由曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ 的上半圆周所围成图形的面积,以及该图形绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积.



解:解方程组 $\begin{cases}2y=x^2,\\ x^2+y^2=8,\end{cases}$

得曲线交点 $(-2,2)$ 和 $(2,2)$, 从而所求图形的面积为

$$S=2\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^2=2+\pi$$

$$\int_0^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2=\frac{4}{3},$$ 因此 $S=2\pi+\frac{4}{3}.$

显然所求绕 x 轴旋转体的体积为

$$V=2\pi\left[\int_0^2(\sqrt{8-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\pi\int_0^2\left(8-x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(8x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2=23\frac{7}{15}\pi.$$

绕 y 轴旋转体的体积为

$$V_y=V_{\text{球冠}}+V_{\text{抛物线绕}y\text{轴旋转}}=\pi\left[\int_2^{2\sqrt{2}}(\sqrt{8-y^2})^2\mathrm{d}y\right]+\pi\int_0^2\left(\sqrt{2y}\right)^2\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_2^{2\sqrt{2}}(8-y^2)\mathrm{d}y+\pi\int_0^2 2y\mathrm{d}y$$

$$=\pi\left(8y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_2^{2\sqrt{2}}+\pi(y^2)\Big|_0^2$$

$$=\frac{32\sqrt{2}-28}{3}\pi.$$

七.(15 分,其中第 1 小题 5 分,第 2 小题 10 分)

1.求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\ln y=0$ 的通解.

解:分离变量,得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\quad(\ln y\neq 0)$, 于是 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

于是所求方程通解为 $\ln\left|\ln y\right|=\ln\left|x\right|+\ln C$, 即 $y=e^{Cx}$.

而奇解 $y\equiv 1$ 对应通解中 C=0 的情形,因此 $y=e^{Cx}$ 包含了方程的一切解.

2.求一曲线方程,该曲线通过原点,且它在点(x,y)处的斜率为 x+y.

解:由题设,得微分方程 $y'=x+y$, 初始条件为 $y(0)=0$. 用常数变易法来解.

其对应的齐次方程为 $y'=y$, 通解为 $y=Ce^{x}$.因此,设原方程的解为 $y=C(x)e^{x}$

则 $y'=C'(x)e^{x}+C'(x)e^{x}=x+y$, 得 $C'(x)e^{x}=x$, 于是 $C'(x)=xe^{-x}$,

$$C(x)=\int xe^{-x}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}(e^{-x})=-xe^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}-e^{-x}+C,$$

从而原方程的通解为 $y=C(x)e^{x}=Ce^{x}-x-1$.

由 $y(0)=0$,得 $C=1$,于是所求曲线方程为 $y=e^{x}-x-1$.

八.(5 分)求 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: $\forall\varepsilon>0$, 取 $0<\delta<1$, 使得

$$\int_\delta^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x<\int_\delta^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x<(1-\delta)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\leq\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta\frac{\delta^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^\delta\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\cdot\lim_{n\to+\infty}\delta^n=0.$$

因此, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$.