电动力学

第一章：电磁现象的基本规律，静电场

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

March 6, 2019

电磁场是带电粒子之间发生电磁相互作用的媒介，它本身也是物质存在的一种形态，具有能量、动量、角动量和自旋等物质基本属性.

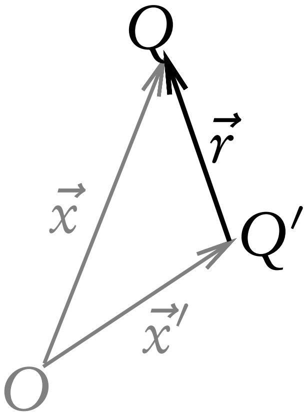
- 基本特征：电磁场不带电，但它对处于其中的其它带电粒子将施加 Lorentz 力作用；
- 分布特点：电磁场弥散于广域空间；
- 描述方法：两个矢量函数；
  1. 电场强度：$\vec{E}(x, y, z, t)$
  2. 磁感应强度：$\vec{B}(x, y, z, t)$
- 运动规律：麦克斯韦方程组、洛仑兹力、本构关系式；
- 数学方法：求解 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 所满足之偏微分方程.

库仑定律 (1875) 是一条实验定律，描写了真空中两个相对静止的点电荷之间的相互作用.

- 真空中静止点电荷 Q' 对另一个静止点电荷 Q 具有作用力 $\vec{F}$，其大小和方向为:

$$\vec{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

其中 ϵ_0 是真空的介电常数，又称电容率.



对库仑定律两种迥然不同的解释:

- 库仑力是超距作用，是两电荷之间的直接相互作用:
  电荷—电荷;
- 库仑力的传递需要花费时间，需要通过媒介(静电场):
  电荷—电场—电荷;

虽然在静电情形下无法分辨这两种观点谁是谁非，

但 Faraday 电磁感应现象和电磁波的发现证实时变电磁场可以脱离电荷电流独立存在，因而电磁场本身是真实的物理存在.

因此，静止点电荷之间的库仑力可以重新写为

$$\vec{F} = Q(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})$$

这里 $\vec{E}(\vec{x})$ 是 Q' 在 Q 所在处激发的静电场的电场强度矢量:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'(\vec{x}\,')\,(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \qquad \{超距作用形式\}$$

- 静止电荷体系的电场:
  1. 电场的特征是对电荷有作用力，故可利用之描述电场: 单位电量试探点电荷在电场中所受的力定义为电场的电场强度矢量.
  2. 平方反比定律: 是高斯定律的基础，暗示着电磁力是长程力(光子质量为零).
  3. 其系数定义了电荷的单位，这里的形式是国际单位制.
  4. 叠加性原理: 实验原理，线性理论.
  5. 先点电荷、再电荷组、再连续分布: 数学上从单粒子到多粒子求和、再到体积分.
  6. 空间一点的电场与其邻近的电场及电荷的相互关系: 静电场微分形式.

讨论: 倘若库仑定律修改为

$$F \propto \begin{cases} r^{-(2+\delta)} & \text{偏离平方反比律的长程力} \\ r^{-2}e^{-\alpha r} & \text{汤川短程力} \end{cases}$$

迄今为止的实验结果是: $\delta \leq 2.7 \times 10^{-15}$，$\alpha \approx 0$.

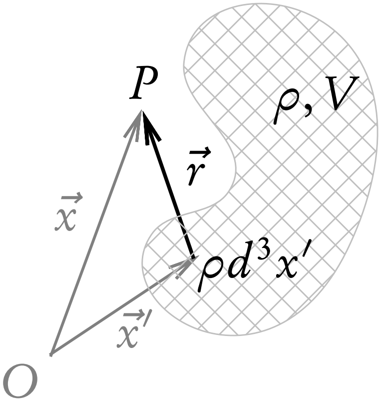
电荷分布激发的静电场

- 力的叠加性导致静电场的叠加. 所以, 点电荷组激发的静电场是,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i(\vec{x}_i')(\vec{x}-\vec{x}_i')}{|\vec{x}-\vec{x}_i'|^3}$$

- 连续电荷分布产生的静电场:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'$$



试问:

1. 上列表达式适用于哪些参考系?
2. 可否把静止电荷分布激发的电场强度统一地写为第二个表达式?

拙见：

1. 电场强度的上述表达式只在与激发此电场的电荷分布保持相对静止的参考系中成立. $\mathcal{Q}$: 在其他参考系中，同一电场的场强如何表达呢？

2. 电场强度的上述表达式可以统一地表为第二式：

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$$

代价是我们必须定义点电荷组的电荷体密度：

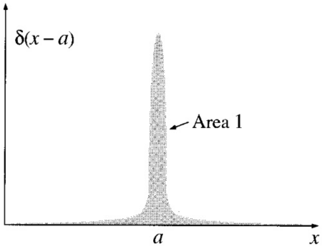
$$\boxed{\rho(\vec{x}') = \sum_{i=1}^{N} Q_i(\vec{x}'_i)\delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'_i)}$$

此处 $\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{a})$ 是三维 Dirac 代尔塔函数.

数学小知识：Dirac's δ-函数

Dirac 引入的 δ 函数定义如下：

$$\delta(x-a)=\begin{cases}0 & 若\ x\neq a\\ \infty & 若\ x=a\end{cases}$$



虽然 δ 函数在严格数学意义下不合法，但在物理学的理论表述中很有用．它有如下重要性质．设 $F(x)$ 是 x 的一个任意函数，

1. $\int F(x)\delta(x-a)dx=F(a)$.
2. $\int F(x)\delta'(x-a)dx=-F'(a)$.
3. 若 $F(x)$ 有若干零点 x_i $(i=1,2,\cdots)$，使得 $F(x_i)=0$，则有恒等式：

$$\delta[F(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|F'(x_i)|}$$

高斯定律

- 积分形式:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})d^3x$$

此式中的积分区域 V 是任意的,有向闭合曲面 S 是 V 的边界.

电通量:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- 高斯定律积分形式表明: 静电场对于任一闭合曲面的电通量正比于曲面内所包围的电荷量.

- 由矢量场散度的定义,

$$\nabla\cdot\vec{\mathscr{A}} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \vec{\mathscr{A}}\cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

可得高斯定律的微分形式:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

电场的散度仅与当地的电荷体密度相关.

在没有电荷分布的地点,静电场的场强有可能不为零,但其散度一定为零.

高斯定律与库仑定律的比较:

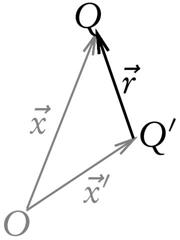
高斯定律表明:

电场是有源场.

- 高斯定律与库仑定律都是实验规律.
- 高斯定律不仅适合于描写静止电荷分布激发的静电场，也正确地描写了时变电磁场电场强度分布的有源性.
- 库仑定律仅仅适合于描写静电场. 但它不仅描写了静电场的有源性，同时还表明静电场是无旋场.

可以考虑验证由库仑定律确定的静电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 确实满足高斯定律. 为方便起见，我们需要事先熟悉

1. 位置矢量: $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$
2. 梯度算符: ∇



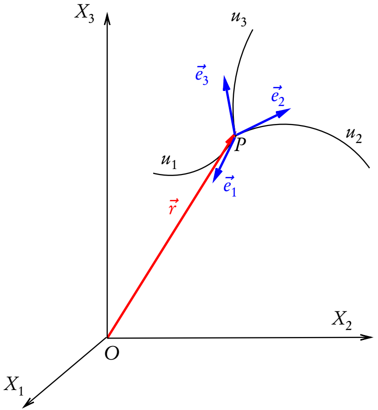
在正交曲线坐标系中的数学性质.

考虑三维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^3$ 中位置矢量为 $\vec{r}$ 的场点 P.

在 P 点建立一右旋的正交曲线坐标系 S，其坐标和单位基矢分别记做 (u_1, u_2, u_3) 和 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

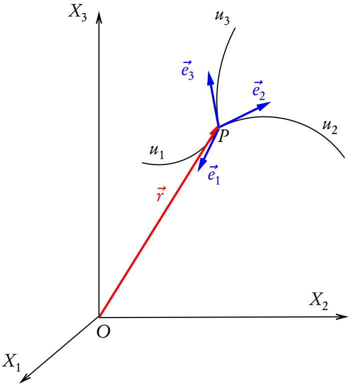
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$



1. 为了清楚起见，使用曲线坐标系时不采用 Einstein 求和约定.

曲线坐标系的性质：



曲线坐标系最重要的性质是，

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \propto \vec{e}_i$$

式中 $\vec{r}$ 是场点 P 的位置矢量. 这是因为在求偏导数 $\partial \vec{r}/\partial u_i$ 时，另外两个坐标保持不变，位矢 $\vec{r}$ 的位移只能发生在曲线 u_i 的切线方向上.

通常把上式写为如下等式：

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \vec{e}_i$$

h_i $(i = 1, 2, 3)$ 称为 Lame 系数. 需要特别注意的是，此处的重复指标不表示求和.

正交曲线坐标系中的梯度算符:

考虑任一标量函数 $\Psi(u_1,u_2,u_3)$ 的全微分. 在坐标系 S 中,

$$d\Psi = d\Psi(u_1,u_2,u_3) = \sum_i \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}du_i$$

1. $\nabla\Psi$ 按下式定义,

$$d\Psi = \nabla\Psi\cdot d\vec{r}$$

注意到位置矢量的微元位移 $d\vec{r}$ 在曲线坐标系 S 中表达为,

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}du_i = \sum_i \vec{e}_i h_i\, du_i$$

若令 $\nabla\Psi = \sum_i \Omega_i\vec{e}_i$, 则有:

$$\sum_i \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}du_i = d\Psi$$

$$= \nabla\Psi\cdot d\vec{r} = \sum_{i,j}\Omega_i h_j du_j\, \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \sum_i \Omega_i h_i du_i$$

因此，

$$\Omega_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Psi}{\partial u_i}$$

此处重复指标不代表求和. 所以，

$$\nabla \Psi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_i}{h_i}\frac{\partial \Psi}{\partial u_i}$$

鉴于标量函数 Ψ 的任意性，我们有：

$$\nabla = \sum_{j=1}^{3} \frac{\vec{e}_j}{h_j}\frac{\partial}{\partial u_j}$$

1. 警告：

曲线坐标系的基矢一般不是常矢量. 所以在曲线坐标系中，

$$\nabla \varphi \neq \sum_i \vec{e}_i \partial_i \varphi, \qquad \nabla \cdot \vec{A} \neq \sum_i \partial_i A_i, \qquad \nabla \times \vec{A} \neq \sum_{i,j,k} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k.$$

旋度公式:

正交曲线坐标系中标量场梯度的计算公式是:

$$\nabla\varphi = \sum_j \frac{\vec{e}_j}{h_j}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}$$

那么，怎样计算矢量场的散度和旋度呢?

顿悟：

若把 ∇ 算符作用于场点在正交曲线坐标系中的坐标 u_i，则有:

$$\nabla u_i = \left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\vec{e}_j}{h_j}\frac{\partial}{\partial u_j}\right]u_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\vec{e}_j}{h_j}\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\vec{e}_j}{h_j}\delta_{ij} = \frac{\vec{e}_i}{h_i}$$

由于梯度场无旋，$\nabla\times\nabla u_i = 0$，我们得知:

$$\nabla\times\frac{\vec{e}_i}{h_i} = 0$$

散度公式:

接着计算 ∇u_i 与 ∇u_j 的矢量积:

$$\nabla u_i \times \nabla u_j = \frac{\vec{e}_i}{h_i} \times \frac{\vec{e}_j}{h_j} = \frac{1}{h_i h_j}(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \frac{1}{h_i h_j}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\vec{e}_k$$

注意到恒等式

$$\nabla \times \left[f\vec{g}\right] = \nabla f \times \vec{g} + f\nabla \times \vec{g}$$

分别取 $f = u_i$ 和 $\vec{g} = \nabla u_j$, 知:

$$\nabla u_i \times \nabla u_j = \nabla \times (u_i \nabla u_j) - u_i \nabla \times \nabla u_j = \nabla \times (u_i \nabla u_j)$$

$$\rightsquigarrow \quad \nabla \times (u_i \nabla u_j) = \frac{1}{h_i h_j}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\vec{e}_k$$

由于旋度场的散度为零, $\nabla \cdot [\nabla \times (u_i \nabla u_j)] = 0$, 我们得到:

$$\nabla \cdot \left[\sum_{k=1}^{3} \frac{\epsilon_{ijk}\vec{e}_k}{h_i h_j}\right] = 0$$

矢量分析中的几招独孤剑法：

上面得到的两个恒等式：

1. $\nabla\cdot\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\epsilon_{ijk}\vec{e}_k}{h_ih_j}\right]=0$
2. $\nabla\times\frac{\vec{e}_i}{h_i}=0$

是矢量分析技术中类似于独孤九剑一类传奇剑法的杀手锏.

倘若将它们[1]与如下公式结合使用

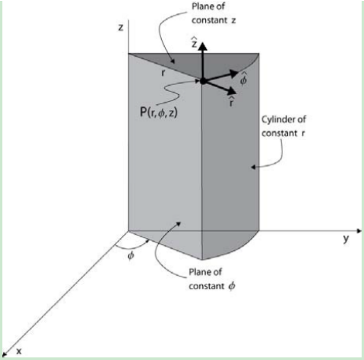
- $\nabla\cdot(f\vec{g})=\nabla f\cdot\vec{g}+f\nabla\cdot\vec{g}$
- $\nabla\times(f\vec{g})=\nabla f\times\vec{g}+f\nabla\times\vec{g}$

就形成了三维 Euclidean 空间中矢量分析的必杀技，足以秒杀理论物理学习和研究中所遭遇的所有矢量分析问题.

以下举例示范.

[1] 1984 年 3 月，我与这两个恒等式邂逅于哈普尔的著作《数学物理引论》(中译本). 这本书的原版是： C. Harper， Introduction to mathematical physics, 1976, Prentice-Hall Inc.

- 已知某矢量场 $\vec{V}$ 在柱坐标系中的表达式是：$\vec{V} = (\ln r)\,\hat{\phi}$，求其散度和旋度.



解：

如附图，场点 P 相对于坐标原点的位置矢量在柱坐标系可表为

$$\vec{r} = r\,\hat{r} + z\,\hat{z}$$

其微元增量是：

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + rd\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

说明如下.

柱坐标系的基矢 $\hat{z}$ 是常矢量, 但 $\hat{r}$ 和 $\hat{\phi}$ 不是常矢量. 从附图可见, $\hat{r}$ 的方向随 ϕ 角的变化而变化, 从而 $\partial_\phi \hat{r} \neq 0$.

Question : $\partial_\phi \hat{r} = \ ?$

注意到 $\hat{r}$ 是单位矢量, $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$, 我们有:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\hat{r}\cdot\hat{r}\right) = 2\hat{r}\cdot\partial_\phi\hat{r} \qquad \rightsquigarrow \quad \hat{r}\perp\partial_\phi\hat{r}$$

从而, $\partial_\phi \hat{r} \ \propto \ \hat{\phi}$.

事实上, 对 ϕ 求微商不会改变 $\hat{r}$ 的量值.[2] 所以,

$$\partial_\phi \hat{r} = \hat{\phi}$$

[2]这一结论可以直接从前页示意图所示的几何关系:

$$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

读出, 此处 $\hat{x}$ 与 $\hat{y}$ 是辅助的直角坐标系分别沿 x 轴与 y 轴的单位基矢.

同理，根据基矢 $\hat{\phi}$ 的归一化条件 $\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}=1$ 可知，

$$0=\partial_\phi\big(\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\big)=2\hat{\phi}\cdot\partial_\phi\hat{\phi}, \qquad \rightsquigarrow \quad \hat{\phi}\perp\partial_\phi\hat{\phi}$$

所以，

$$\partial_\phi\hat{\phi}\ \propto\ \hat{r}\,.$$

可以将此比例关系写为等式 $\partial_\phi\hat{\phi}=\kappa\,\hat{r}$. 为了确定系数 κ，我们求基矢的正交性方程 $\hat{r}\cdot\hat{\phi}=0$ 对极角 ϕ 的微商：

$$0=\partial_\phi\big(\hat{r}\cdot\hat{\phi}\big)=\big[\partial_\phi\hat{r}\big]\cdot\hat{\phi}+\hat{r}\cdot\big[\partial_\phi\hat{\phi}\big]=\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}+\kappa\,\hat{r}\cdot\hat{r}=1+\kappa$$

因此 $\kappa=-1$，

$$\partial_\phi\hat{\phi}\ =\ -\ \hat{r}$$

借助辅助关系式 $\partial_\phi\,\hat{r}=\hat{\phi}$，不难求出场点位矢 $\vec{r}=r\,\hat{r}+z\,\hat{z}$ 的微元增量：

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\big[r\,\hat{r} + z\,\hat{z}\big] = dr\,\hat{r} + r\ d\hat{r} + dz\,\hat{z} \\ &= dr\,\hat{r} + r d\phi\ \partial_\phi \hat{r} + dz\,\hat{z} \\ &= dr\,\hat{r} + r d\phi\ \hat{\phi} + dz\,\hat{z} \end{aligned}$$

柱坐标系的 Lame 系数求得为：

$$h_r = 1,\ \ h_\phi = r,\ \ h_z = 1. \qquad \rightsquigarrow \quad \nabla = \hat{r}\,\partial_r + \frac{\hat{\phi}}{r}\partial_\phi + \hat{z}\,\partial_z$$

所以，柱坐标系中存在如下恒等式：

$$0 = \nabla \times \left[\frac{\hat{\phi}}{h_\phi}\right] = \nabla \times \frac{\hat{\phi}}{r},$$

$$0 = \nabla \cdot \left[\frac{\hat{\phi}}{h_r h_z}\right] = \nabla \cdot \hat{\phi}$$

现在计算矢量 $\vec{V} = (\ln r)\,\hat{\phi}$ 的散度. 注意到,

$$\nabla(\ln r) = \left[\hat{r}\partial_r + \frac{\hat{\phi}}{r}\partial_\phi + \hat{z}\partial_z\right](\ln r) = \hat{r}\partial_r(\ln r) = \frac{\hat{r}}{r}$$

以及复合矢量散度所满足的性质

$$\nabla\cdot(f\vec{g}) = \nabla f\cdot\vec{g} + f\nabla\cdot\vec{g}$$

我们有:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{V} &= \nabla\cdot\left[\,(\ln r)\,\hat{\phi}\,\right] \\
&= \nabla(\ln r)\cdot\hat{\phi} + (\ln r)\nabla\cdot\hat{\phi} \\
&= \frac{\hat{r}\cdot\hat{\phi}}{r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

借助恒等式

$$\nabla\times(f\vec{g})=\nabla f\times\vec{g}+f\nabla\times\vec{g}$$

以及

$$\nabla\times\frac{\hat{\phi}}{r}=0$$

矢量场 $\vec{V}=(\ln r)\,\hat{\phi}$ 的旋度可以按如下方式计算:

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{V}&=\nabla\times\left[(\ln r)\,\hat{\phi}\right]=\nabla\times\left[(r\ln r)\,\frac{\hat{\phi}}{r}\right]\\&=\nabla(r\ln r)\times\frac{\hat{\phi}}{r}+(r\ln r)\nabla\times\frac{\hat{\phi}}{r}\\&=[\hat{r}\partial_r(r\ln r)]\times\hat{\phi}/r\\&=\frac{(\ln r)+1}{r}(\hat{r}\times\hat{\phi})=\frac{(\ln r)+1}{r}\hat{z}\end{aligned}$$

此结果与前章直角坐标系中的计算一致. 但此处的计算效率明显高.

Question: 流体力学的 Navier-Stokes 方程涉及流速 $\vec{v}$ 与其旋度矢量积 $\vec{\mathscr{A}} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ 的旋度. 已知某流体的流速矢量在柱坐标系中表为 $\vec{v} = \hat{z}(\ln r)$. 请针对这样的流速计算 $\vec{\mathscr{A}}$ 的旋度和散度.

Solution: 采取柱坐标系，其 Lame 系数为 $h_r = 1, h_\phi = r$ 和 $h_z = 1$.首先计算流速的旋度，

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \nabla \times \left[(\ln r)\hat{z}\right] = \nabla(\ln r) \times \hat{z} + (\ln r)\ {\color{red}\nabla \times \hat{z}} \\ &= \left[\partial_r(\ln r)\right]\ \hat{r} \times \hat{z} \\ &= -\frac{\hat{\phi}}{r}\end{aligned}$$

流速矢量与其旋度的矢量积是，

$$\vec{\mathscr{A}} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = (\ln r)\hat{z} \times \left[-\frac{\hat{\phi}}{r}\right] = \frac{(\ln r)}{r}\ \hat{r}$$

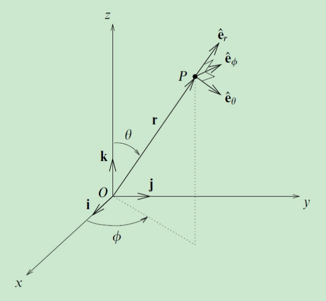
$\vec{\mathscr{A}}$ 的旋度显然为零：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\mathscr{A}} &= \nabla \times \left[\frac{(\ln r)}{r}\,\hat{r}\right] = \nabla \frac{(\ln r)}{r} \times \hat{r} + \frac{(\ln r)}{r}\,\nabla \times \hat{r} \\
&= \left[\partial_r \frac{(\ln r)}{r}\right]\,\hat{r} \times \hat{r} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\vec{\mathscr{A}}$ 的散度计算如下：

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\mathscr{A}} &= \nabla \cdot \left[\frac{(\ln r)}{r}\,\hat{r}\right] = \nabla \cdot \left[(\ln r)\,\frac{\hat{r}}{r}\right] \\
&= \nabla(\ln r) \cdot \frac{\hat{r}}{r} + (\ln r)\,\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r} \\
&= \left[\partial_r (\ln r)\right]\,\hat{r} \cdot \frac{\hat{r}}{r} \\
&= \frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

球坐标系：



球坐标系中，场点相对于坐标原点的位置矢径是：

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

所以，

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dr\,\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r \\ &= dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\partial_\theta\vec{e}_r + r\,d\phi\,\partial_\phi\vec{e}_r \\ &= dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

式中，

$$\vec{e}_\theta = \partial_\theta\vec{e}_r, \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\vec{e}_r.$$

备注： $\partial_\phi\vec{e}_r = \partial_\phi\left[\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{z}\right] = \sin\theta\,\partial_\phi\hat{r} = \sin\theta\,\vec{e}_\phi.$

球坐标系(续):

倘若把 $d\vec{r}$ 写作:

$$d\vec{r} = h_r dr\vec{e}_r + h_\theta d\theta\vec{e}_\theta + h_\phi d\phi\vec{e}_\phi$$

则球坐标系的拉梅系数分别为:$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r\sin\theta$.

球坐标系中的梯度算符:

$$\nabla = \vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

所以,在球坐标系中:

$$\nabla r = \vec{e}_r,\quad \nabla\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{r},\quad \nabla\phi = \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}.$$

旋度公式化为: $\nabla\times\vec{e}_r = 0,\ \ \nabla\times\frac{\vec{e}_\theta}{r} = 0,\ \ \nabla\times\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta} = 0.$ 而散度公式化为: $\nabla\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} = 0,\ \ \nabla\cdot\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} = 0,\ \ \nabla\cdot\frac{\vec{e}_\phi}{r} = 0.$

矢量 $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$:

以场点 $\vec{x}$ 为坐标原点建立球坐标系，则：$\vec{r} = (\vec{x} - \vec{x}') = r\vec{e}_r$，其大小为：$r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. 这个矢量在库仑定律中以

$$\frac{\vec{r}}{r^3}$$

的方式出现.所以当 $r \neq 0$ 时，使用恒等式 $\nabla \times (f\vec{g}) = \nabla f \times \vec{g} + f\nabla \times \vec{g}$，我们有：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} &= \nabla \times \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \nabla \times \left(\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \right) \\
&= \nabla \frac{1}{r^2} \times \vec{e}_r + \frac{1}{r^2} \nabla \times \vec{e}_r \\
&= -\frac{2}{r^3} \nabla r \times \vec{e}_r \\
&= -\frac{2}{r^3} \vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0.
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 0$$

以及[3]，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}&=\nabla\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}=\nabla\cdot\left(\sin\theta\,\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)\\&=\sin\theta\,\nabla\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}+\nabla\sin\theta\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\\&=\nabla\sin\theta\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta\vec{e}_\theta}{r}\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\\&=\frac{\cot\theta}{r^3}(\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_r)=0\end{aligned}$$

注意到此式的成立要求 $\vec{r}\neq 0$. 为了研究此散度在 $\vec{r}=0$ 处的行为，需要计算体积分：

$$\int_V d^3x\,\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

积分区域 V 要求为包含 $\vec{r}=0$ 在内的球体.

[3] $\nabla\cdot(f\vec{g})=\nabla f\cdot\vec{g}+f\nabla\cdot\vec{g}$.

设此球体外表面 S 的半径为 R. 根据多元函数微积分的奥高定理,

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \oint_S d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \oint_S d\sigma \vec{e}_r \cdot \frac{\vec{e}_r}{R^2} = \frac{1}{R^2} \oint_S d\sigma = 4\pi$$

综合以上结果，我们有:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

注意到,

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

以及 $\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi$, 上式还可以等价地写作:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

在计算

$$\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3},\quad \nabla^2\frac{1}{r}$$

时，为了规避 $\vec{r}=0$ 处的奇点，也可以使用直角坐标系、并采用如下技巧:

$$\begin{aligned}
\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}=-\nabla\times\nabla\frac{1}{r}\ &=-\vec{e}_i\epsilon_{ijk}\lim_{\varepsilon\to 0}\partial_j\partial_k\frac{1}{\sqrt{r_lr_l+\varepsilon^2}}\\
&=\vec{e}_i\epsilon_{ijk}\lim_{\varepsilon\to 0}\partial_j\left[\frac{r_k}{(r_lr_l+\varepsilon^2)^{3/2}}\right]\\
&=\vec{e}_i\epsilon_{ijk}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\delta_{jk}}{(r_lr_l+\varepsilon^2)^{3/2}}-\frac{3r_jr_k}{(r_lr_l+\varepsilon^2)^{5/2}}\right]\\
&=-3\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\vec{r}\times\vec{r}}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}}\\
&=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} \; &= \lim_{\varepsilon \to 0} \partial_i \partial_i \frac{1}{\sqrt{r_l r_l + \varepsilon^2}} \\
&= - \lim_{\varepsilon \to 0} \partial_i \left[\frac{r_i}{(r_l r_l + \varepsilon^2)^{3/2}} \right] \\
&= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\delta_{ii}}{(r_l r_l + \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{3 r_i r_i}{(r_l r_l + \varepsilon^2)^{5/2}} \right] \\
&= - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

若 $r \neq 0$，上式中 $\varepsilon \to 0$ 的极限可以直接求出：

$$
\nabla^2 \frac{1}{r} = 0
$$

若 $r = 0$，上式的结果是：

$$
\nabla^2 \frac{1}{r} = - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{\varepsilon^3} \quad \rightsquigarrow \infty
$$

函数 $\nabla^2 \frac{1}{r}$ 在 $r = 0$ 处的发散行为可以通过计算其在全空间的体积分进一步估计. 采取球坐标系并注意到被积函数的球对称性质, 我们有:

$$\begin{aligned}
\int d^3x \, \nabla^2 \frac{1}{r} &= -12\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \int_0^\infty dr \, \frac{r^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \\
&= -12\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty d\rho \, \frac{\rho^2}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} \\
&= -12\pi \int_0^{\pi/2} d\beta \; \sec^2 \beta \cdot \frac{\tan^2 \beta}{\sec^5 \beta} \\
&= -12\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta \cos \beta \, d\beta \\
&= -12\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta d \sin \beta \; = -4\pi
\end{aligned}$$

所以,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

验证静电场满足高斯定律（一）:

按照库仑定律，连续电荷分布产生的静电场是:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$$

其散度计算如下，

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[\nabla\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right] d^3x' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\right] d^3x' \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})
\end{aligned}$$

这正是高斯定律.

验证静电场满足高斯定律(二):

点电荷组激发的静电场场强矢量是:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i(\vec{x}_i')(\vec{x}-\vec{x}_i')}{|\vec{x}-\vec{x}_i'|^3}$$

其散度仍由高斯定律给出,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}Q_i(\vec{x}_i')\left[\nabla\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{x}_i')}{|\vec{x}-\vec{x}_i'|^3}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}Q_i(\vec{x}_i')\left[4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_i')\right]\\ &= \rho(\vec{x})/\epsilon_0\end{aligned}$$

式中点电荷组的电荷体密度定义为:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N}Q_i(\vec{x}_i')\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_i')$$

静电场的旋度:

旋度是矢量场性质的一个方面。要完整地描写一个矢量场，需要同时确定其散度和旋度。旋度所反映的是场的力线的环流性质。静电场的场强由库仑定律给出，

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$$

因此，静电场是无旋场:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

静电场的电力线不形成闭合曲线.

证明如下，

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[\nabla \times \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right] d^3x' = 0$$

静电场的电势:

根据静电场的无旋性，可以引入"电势" $\varphi(\vec{x})$ 替代场强来描写静电场的性质，

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi(\vec{x})$$

这是因为 $\nabla\times\nabla\varphi = 0$.

显然，

- $\varphi(\vec{x})$ 是一个标量函数.
- $\varphi(\vec{x})$ 与 $\varphi(x)+C$ 描写的是同一个静电场. 所以，电势零点的选择是任意的.

按照库仑定律，静电场的场强表为:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[-\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]d^3x'\end{aligned}$$

静电场的电势(续):

换言之,

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right]$$

所以[4], 静电场的电势可以表达为:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' + C$$

当然, 要使用此式计算电势, 须事先得知空间中全部的电荷分布体密度 $\rho(\vec{x}')$. 而这在一般情况下是未知的.

---

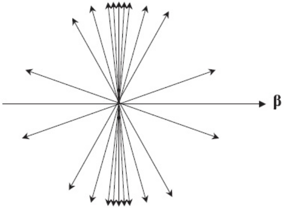
[4] 回忆静电势的定义式,

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi(\vec{x}) \,.$$

例题：

例： 以速度 $\vec{v} = c\vec{\beta}$ 做匀速直线运动的点电荷 Q 在空间激发的电场强度矢量可以在球坐标系中表为：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\, Q\,\vec{r}}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$



式中 $\vec{\beta}$ 为点电荷的无量纲速度(常矢量)，β 为其大小. 点电荷瞬时处于坐标原点处，θ 是场点位置矢径 $\vec{r}$ 与 $\vec{\beta}$ 之间的夹角.

请计算 $\vec{E}$ 的散度与旋度.

解： 若 $\beta = 0$，则此电场强度退化为静电场的电场强度，

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\,\vec{r}}{r^3}$$

其特点是有源无旋且散度服从高斯定律. $\beta \neq 0$ 的情形如何呢?

利用复合矢量求散度的恒等式

$$\nabla\cdot(f\vec{g}) = \nabla f\cdot\vec{g} + f\nabla\cdot\vec{g}$$

以及重要公式

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right) = 0$$

可知： 若 $\vec{r}\neq 0$,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E} &= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\,\nabla\cdot\left[\frac{1}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right]\\
&= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla\left(\frac{\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\right)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\nabla\cdot\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\right)\right]\\
&= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\left(\frac{\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\right)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} = 0
\end{aligned}$$

此外，$\vec{E}$ 对于以点电荷占据的原点为球心、半径为 r 的球面的电通量是：

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{\sigma} &= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\oint_S (r^2\sin\theta d\theta d\phi)\vec{e}_r\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\\ &= \frac{Q(1-\beta^2)}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\\ &= \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

最后一步使用了计算机软件 Mathematica，注意参数 β 的取值范围是 $0\le\beta<1$.

把上面两部分的结果综合起来，即有：

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

此式恰为期望的高斯定律.

1. 所以，高斯定律不仅适合于静电场，也适用于运动电荷激发的电场.

$\vec{E}$ 的旋度计算如下:

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{E} &= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\,\nabla\times\left[\frac{1}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right] \\
&= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla\left(\frac{1}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\right)\times\vec{e}_r\right. \\
&\qquad\left. + \frac{1}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\color{red}{\nabla\times\vec{e}_r}\right] \\
&= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta\left(\frac{1}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\right)\times\vec{e}_r \\
&= \frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{e}_\theta\times\vec{e}_r)}{r^3}\,\frac{3\beta^2\sin\theta\cos\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}} \\
&= -\frac{3\beta^2(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q\sin\theta\cos\theta}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\,\vec{e}_\phi \neq 0
\end{aligned}
$$

因此,做匀速直线运动的点电荷激发的电场不是保守力场.

或许有人会问:

电磁学常有使用高斯定律辅以对称性考虑求电场强度分布的习题. 这类习题的逻辑是否暗示高斯定律对于静电场性质的描写与库仑定律一样也是全面的、即既描写了静电场的有源性也描写了其无旋性?

答:

高斯定理本身仅仅反映了电场的有源性. 使用高斯定理求电荷体系激发的场强分布时, 对称性的作用不是辅助性的、而是决定性的. 以匀速直线运动点电荷为例, 其电场强度矢量

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\,Q\vec{r}}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

在 $\beta \neq 0$ 时不具有球对称性. 场强的散度与旋度分别为:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r}), \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{3\beta^2(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\sin\theta\cos\theta}{r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{5/2}}\vec{e}_\phi$$

这样的电场显然是非保守力场. 若令 $\beta=0$，则场强分布的球对称性恢复，同时场强的旋度变为零 $(\nabla\times\vec{E}=0)$、电场从 $\beta\neq 0$ 时的非保守力场提升为保守力场.

电磁学中使用高斯定律求场强时，常见的对称性是三维问题中场强分布的球对称性:

$$\vec{E}=E(r)\vec{e}_r \qquad (\text{球坐标系})$$

或者二维问题中场强分布的轴对称性:

$$\vec{E}=E(r)\hat{r} \qquad (\text{柱坐标系})$$

注意到:

$$\nabla\times\left[E(r)\vec{e}_r\right]=\nabla E(r)\times\vec{e}_r+E(r)\nabla\times\vec{e}_r=\partial_r E(r)\vec{e}_r\times\vec{e}_r=0$$

和

$$\nabla\times\left[E(r)\hat{r}\right]=\nabla E(r)\times\hat{r}+E(r)\nabla\times\hat{r}=\partial_r E(r)\hat{r}\times\hat{r}=0$$

无论哪种对称性都意味着 $\nabla\times\vec{E}=0$. 所以，对称性考虑实质上意味着假设静电场的场强具有无旋性.

专题研究:

按照牛顿万有引力定律，两个静止的质点之间的引力也遵从平方反比律:

$$\vec{F}_g = -\frac{1}{4\pi\kappa}\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

式中 $\kappa = 1/4\pi G$， G 是牛顿引力常数.

分析:

1. 牛顿引力定律与静电库仑定律在数学形式上的相似性暗示引力作用也是通过场传递的. 质量为 M 的质点在其周围空间激发的引力场场强是:

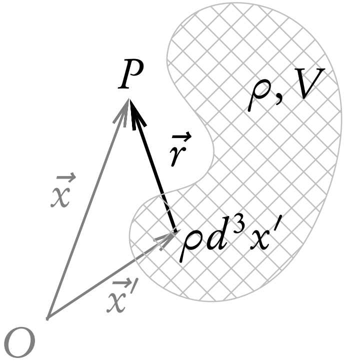
$$\vec{\mathscr{G}} = -\frac{1}{4\pi\kappa}\frac{M\vec{r}}{r^3}$$

2. 若质量为 m 的质点处在场强为 $\vec{\mathscr{G}}$ 的外引力场中，它将受到引力的作用，其大小和方向由下式给出:

$$\vec{F}_g = m\vec{\mathscr{G}}$$

力的叠加性导致引力场强矢量的叠加.
所以，连续质量分布激发的引力场场强矢量是:

$$\vec{\mathscr{G}}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\kappa}\int_V \frac{\rho(\vec{x}\,')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'$$



物质系统的总质量是:

$$M = \int_V d^3x'\;\rho(\vec{x}\,')$$

由此可知:

1. 牛顿引力场是有源场，质量体密度是它的源:

$$\nabla\cdot\vec{\mathscr{G}}(\vec{x}) = -\rho(\vec{x})/\kappa$$

2. 牛顿引力场是保守力场:

$$\nabla\times\vec{\mathscr{G}}(\vec{x}) = 0$$

回忆数学恒等式，

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{\vec{e}_r}{r^2}=\frac{1}{r^2}\nabla r=-\nabla\frac{1}{r}$$

亦即：

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}=-\nabla\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

我们可以把连续质量体分布 $\rho(\vec{x}\,')$ 激发的引力场场强矢量改写为：$\vec{\mathscr{G}}=-\nabla\varphi_g$，其中，

$$\varphi_g(\vec{x})=-\frac{1}{4\pi\kappa}\int_V d^3x'\ \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$$

是此引力场的标势.

- 把 $\vec{\mathscr{G}}=-\nabla\varphi_g$ 与引力高斯定律 $\nabla\cdot\vec{\mathscr{G}}=-\rho/\kappa$ 结合起来可知：

  $$\nabla^2\varphi_g=\rho/\kappa$$

  所以，与静电场类似，牛顿引力场传递的也是一种超距相互作用.

- 牛顿引力势与静电势的本质区别在于前者服从 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi_g = \rho/\kappa$$

而后者服从 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0 \qquad (真空中，)$$

因此，相同种类的质量分布之间的引力作用表现为相互吸引，而相同种类的电荷之间的静电作用表现为相互排斥[5].

这一区别最终造成了引力的相对论理论与电磁理论在表现形式与物理本质两方面的鲜明差异，以至于无法在狭义相对论的理论框架内建立起逻辑自洽的引力理论. 通常所说的广义相对论与量子力学之间的不相容也可以把源头追溯至此.

[5]详见第二章讨论.

作业：

1. 请使用奥高散度定理证明矢量运算恒等式：

$$\int_V \nabla\psi d^3x = \oint_S \psi d\vec{s}, \qquad \int_V \nabla\times\vec{A} d^3x = \oint_S d\vec{s}\times\vec{A}$$

   式中 ψ 与 $\vec{A}$ 是三维欧氏空间中的标量场与矢量场，S 与 V 分别为空间中某区域的表面积和体积.

2. 请计算下列各式的值，其中 $\vec{a}$ 为常矢量，$\vec{r}$ 为场点相对于坐标原点的位置矢径、r 为其大小.

$$\nabla\frac{1}{r}, \quad \nabla\times\frac{\vec{r}}{r}, \quad \nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}), \quad \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \quad \nabla r, \quad \nabla\frac{1}{r^2},$$
$$\nabla^2\frac{1}{r}, \quad \nabla\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\right), \quad \nabla\times\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\right), \quad \nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}$$