§3 幂级数

P17 习题：求下列幂级数的收敛圆. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n}(z-2)^n$ **,(2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$ **,(3)** $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{z}{n}\right)^n$ **.**

[解]由 d'Alembert 计算公式，收敛半径为 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$（在极限存在的前提下），于是：

(1) $R_1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\ln n}}{(n+1)^{\ln(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\ln n^{\ln n}}}{e^{\ln(n+1)^{\ln(n+1)}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln^2 n-\ln^2(n+1)}$

由于：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln^2 n-\ln^2(n+1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln^2 x-\ln^2(x+1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\ln\left[x(x+1)\right]\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x(x+1)\right]}{\ln^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{x(x+1)}}{-\ln^{-2}\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(-1-\frac{1}{x}\right)\frac{\ln^2\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(2x+1\right)^{-1}}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(2x+1\right)^{-1}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{x+1}{x}\frac{1}{(x+1)^2}}{-\left(2x+1\right)^{-2}2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\frac{(2x+1)^2}{(x+1)^2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+1/x}{1+1/x}\right)^2\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{1+1/x}\right)=0$$

于是：$R_1=e^0=1$

收敛圆为：$\left|z-2\right|<1$

(2) $R_2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^n}{1/(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)(1+\frac{1}{n})^n$

由于：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，故：$R_2=+\infty$

收敛圆为：$\left|z\right|<+\infty$

(3) $R_3=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

收敛圆为：$\left|z\right|<e$

§4 解析函数的 Taylor 展开

P21 习题：在原点的邻域上讲下列函数展开成 Taylor 级数并指出其收敛半径.(1) $e^{1/(1-z)}$（计算五个非零项）**,(2)** $\sin^2 z$ **,(3)** $\cos^2 z$ **.**

[解](1)在 $z=0$ 处：

$$e^{1/(1-z)}=e$$

$$\frac{de^{1/(1-z)}}{dz}=e^{1/(1-z)}\frac{1}{(1-z)^2}=e$$

$$\frac{d^2e^{1/(1-z)}}{dz^2}=e^{1/(1-z)}\frac{1}{(1-z)^4}+e^{1/(1-z)}\frac{2}{(1-z)^3}=3e$$

$$\frac{d^3e^{1/(1-z)}}{dz^3}=e^{1/(1-z)}\frac{1}{(1-z)^6}+e^{1/(1-z)}\frac{6}{(1-z)^5}+e^{1/(1-z)}\frac{6}{(1-z)^4}=13e$$

$$\frac{d^4e^{1/(1-z)}}{dz^4}=e^{1/(1-z)}\frac{1}{(1-z)^8}+e^{1/(1-z)}\frac{12}{(1-z)^7}+e^{1/(1-z)}\frac{36}{(1-z)^6}+e^{1/(1-z)}\frac{24}{(1-z)^5}=73e$$

则 Taylor 级数的前五个非零项为：

$$\begin{aligned}e^{1/(1-z)}&=e+ez+\frac{3e}{2}z^2+\frac{13e}{6}z^3+\frac{73e}{24}z^4+\cdots\\&=e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\frac{73}{24}z^4+\cdots\right)\end{aligned}$$

由于离 $z=0$ 的最近的奇点是 $z=1$，故收敛半径为 1

(2) 由 Taylor 展开式的唯一性：

$$\sin^2 z=\frac{1-\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$$

由于： $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}}{\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+2)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)(n+1/2)\right]=+\infty$

于是收敛半径为 $+\infty$，或者由于 $\sin^2 z$ 在整个开复平面上解析，因此级数在整个开复平面上收敛，与收敛半径为 $+\infty$ 一致。

(3) 由 Taylor 展开式的唯一性：

$$\cos^2 z=\frac{1+\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$$

由于 $\cos^2 z$ 在整个开复平面上解析，因此级数在整个开复平面上收敛。或者如(1)一般的计算，也可知道收敛半径为 $+\infty$ 。

补充习题 P22

1. 已知级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$的收敛半径分别为$R_1$和$R_2$，研究下列幂级数的收敛半径.(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)z^n$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n/b_n)z^n$ (其中$b_n \neq 0$).

[解] (1) 不妨设$R_1 \geq R_2$，则在$|z|<R_2$内，级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$都收敛，因此，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$收敛（这可由$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)z^k=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k+\sum_{k=0}^{n}b_k z^k$可以看出）。而对于$R_2 \leq |z| < R_1$，若$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$收敛，由于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$收敛，故：$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(a_n+b_n)z^n-a_n z^n\right]$也收敛，但是这与$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$的收敛半径是$R_2$矛盾，于是对于$R_2 \leq |z| < R_1$，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$发散，于是：$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$的收敛半径为$R=R_2$；同理对于$R_1 \leq R_2$，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$的收敛半径为$R=R_1$。

综合以上讨论，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$的收敛半径为$R=\min(R_1,R_2)$。

(2) 由于$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}(-b_n)z^n$的收敛半径相同(由$\sum_{k=0}^{n}(-b_k)z^k=-\sum_{k=0}^{n}b_k z^k$可以看出)，故由(1)的结论：$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n$的收敛半径为$R=\min(R_1,R_2)$。

(3) 在仅知道R_1和R_2的情况下，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)z^n$的收敛半径$R \geq R_1 R_2$，这个结果不能再进一步改进。证明如下。由 Cauchy-Hardamard 判别法得到：

$$1/R_1=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},\quad 1/R_2=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|},\quad 1/R=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n b_n|},$$

但是在$\{a_n\}\{b_n\}$都是非负数列的时候，关于上极限有如下的不等式[1]:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)\overline{\lim}_{n\to\infty}(b_n)$$

应用于$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}\{\sqrt[n]{|b_n|}\}$可以得到：$\frac{1}{R} \leq \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}$，于是$R \geq R_1 R_2$。

这个结果不能再进一步改进，例如，若$R_1=R_2=1$，

(I) 取$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}=1+z^2+z^4+\cdots=\frac{1}{1-z^2}$的收敛半径为 1，

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}=z+z^3+z^5+\cdots=\frac{z}{1-z^2}$的收敛半径为 1，

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)z^n=0$的收敛半径为$R=+\infty$.

(II) 取满足$0<\lambda\le 1$的任意实数λ，构造：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{2n}+\lambda^{2n+1}z^{2n+1}\right)=1+\lambda z+z^2+\lambda^3z^3+z^4+\lambda^5z^5+\cdots,$$

其收敛半径为 1(容易知道$\sqrt[n]{|a_n|}=1,\lambda,1,\lambda,1,\lambda,\cdots,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}=z+z^3+z^5+\cdots=\frac{z}{1-z^2}\text{ 收敛半径为 1，}$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{2n+1}z^{2n+1}=\dfrac{\lambda z}{1-\lambda^2z^2}$收敛半径为$R=\dfrac{1}{\lambda}\ge 1$

由(I)及(II)中λ的任意性，可知道已知级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$的收敛半径为 1 时，

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)z^n$可取$[1,+\infty]$中的所有值。因此，$R\ge R_1R_2$是最好的结果。

(4) 同样的，由于：$\overline{\lim}_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})\le\overline{\lim}_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n/b_n|})\overline{\lim}_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|b_n|})$

设$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n/b_n)z^n$的收敛半径为$R$，有：$\dfrac{1}{R_1}\le\dfrac{1}{R}\dfrac{1}{R_2}$，于是：$R\le\dfrac{R_1}{R_2}$

这也是最好的结果。例如，若$R_1=R_2=1$，取满足$0<\lambda\le 1$的任意实数λ，构造：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}=z+z^3+z^5+\cdots=\frac{z}{1-z^2}$$

其收敛半径为 1；

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{2n}+\lambda^{2n+1}z^{2n+1}\right)=1+\lambda z+z^2+\lambda^3z^3+z^4+\lambda^5z^5+\cdots$$

其收敛半径为 1(容易知道$\sqrt[n]{|a_n|}=1,\lambda,1,\lambda,1,\lambda,\cdots,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$)

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n/b_n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1/\lambda)^{2n+1}z^{2n+1}=\dfrac{z/\lambda}{1-z^2/\lambda^2}$收敛半径为$R=\lambda$

于是已知级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$的收敛半径为 1 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)z^n$可取$(0,1]$中的所有值。因此，$R\le\dfrac{R_1}{R_2}$是最好的结果。

[1]见 裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》P57
注：注意上极限的运算一般和极限的运算不一样，大多数情况下是以不等式的形式出现的。

2. 将下列函数在指定的展开中心a处展开为 Taylor 级数并指出其收敛半径.

(a) $\cos z$，$a=m\pi(m\in\mathbb{Z})$；

(b) $\cos z$，$a=1$；

(c) $\dfrac{\sin z}{1-z}$，$a=0$；

(d) $e^z\cos z$， $a=0$；

(e) $\int_0^z \frac{\sin t}{t}dt$， $a=0$；

(f) $\ln z$，（规定 $0\le\arg z<2\pi$ ）， $a=i$；

(g) z^α （其中 $\alpha\in\mathbb{C}$ 规定 $-\pi<\arg z\le\pi$ ）， $a=1$；

(h) $\ln(1+e^z)$， $a=0$．

[解] 下面的做法用到了 Taylor 级数的唯一性。

(a) $\cos z$， $a=m\pi(m\in\mathbb{Z})$；

$$\begin{aligned}\cos z&=\cos\left[(z-m\pi)+m\pi\right]=\cos(z-m\pi)\cos m\pi-\sin(z-m\pi)\sin m\pi\\&=(-1)^m\cos(z-m\pi)=(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-m\pi)^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{(2n)!}(z-m\pi)^{2n}\end{aligned}$$

收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+m}}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{(-1)^{n+1+m}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(2n+2)(2n+1)\right]=+\infty$

(b) $\cos z$， $a=1$；

$$\begin{aligned}\cos z&=\cos\left[1+(z-1)\right]=\cos1\cos(z-1)-\sin1\sin(z-1)\\&=\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{2n}-\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos1}{(2n)!}(z-1)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin1}{(2n+1)!}(z-1)^{2n+1}\end{aligned}$$

收敛半径 R 由 $\cos(z-1),\sin(z-1)$ 的 Taylor 级数的收敛半径决定，结果是 $R=+\infty$

(c) $\frac{\sin z}{1-z}$， $a=0$

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{1-z}&=\sin z\cdot\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}z^l=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^k}{2}\frac{(-1)^{(k-1)/2}z^k}{k!}\right]\sum_{l=0}^{\infty}z^l\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{2}\frac{(-1)^{(k-1)/2}z^{k+l}}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1-(-1)^k}{2}\frac{(-1)^{(k-1)/2}z^n}{k!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1-(-1)^k}{2}\frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right)z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right)z^{2n+1}\end{aligned}$$

由于离 0 最近的奇点是 1，故其收敛半径是 1。（$\left[x\right]$ 是不超过 x 的最大整数）

(d) $e^z\cos z$， $a=0$；

$$e^z\cos z=e^z\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1+i)z]^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1-i)z]^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1+i)^n+(1-i)^n]z^n}{n!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n]z^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[2^{n/2}2\cos(n\pi/4)]z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}\cos(n\pi/4)}{n!}z^n$$

收敛半径由 $e^{(1+i)z}$ 和 $e^{(1-i)z}$ 的收敛半径决定，为 $R=+\infty$

(e) $\int_0^z\frac{\sin t}{t}dt$， $a=0$；

由 $\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}$ 两边对 t 积分：

$$\int_0^z\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^z t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}z^{2n+1}$$

由于积分不改变收敛域，故收敛半径为： $R=+\infty$

(f) $\ln z$，（规定 $0\le\arg z<2\pi$ ）， $a=i$；

在规定的分支下：$\ln i=i\pi/2$， $d\ln z/dz=1/z$， $d^2\ln z/dz^2=-1/z^2$， $\cdots$，

$d^n\ln z/dz^n=(-1)^{n-1}(n-1)!/z^n$， $\cdots$，

于是：

$$\ln z=i\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!/i^n}{n!}(z-i)^n=i\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{ni^n}(z-i)^n$$

$$=i\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}(z-i)^n$$

收敛半径为： $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{i^n/n}{i^{n+1}/(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}|1+1/n|=1$

(g) z^α （其中 $\alpha\in\mathbb{C}$ 规定 $-\pi<\arg z\le\pi$ ）， $a=1$；

在规定的分支下（利用课本 P20 例 5，注意这时的支点是 0 和 ∞，割线是负实轴上 0 到 ∞ ）：

$$z^\alpha=[1+(z-1)]^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}C_\alpha^n(z-1)^n$$

收敛半径亦为$R=1$。

(h) $\ln(1+e^z)$，$a=0$.

$\ln(1+e^z)$的支点为$1+e^z$的零点，即$i(2k+1)\pi(k\in\mathbb{Z})$，因此可以用沿上半虚轴上的$i\pi$到$\infty$，下半虚轴的$-i\pi$到$\infty$割开得到$\ln(1+e^z)$的一个分支，规定此时：$-\pi<\ln z\le\pi$。

为了方便起见，取$\ln(1+e^z)\big|_{z=0}=\ln 2$的这一支。

由于：

$$\frac{d}{dz}\ln(1+e^z)\Big|_{z=0}=\frac{e^z}{1+e^z}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln(1+e^z)\Big|_{z=0}=\frac{e^z}{(1+e^z)^2}\Big|_{z=0}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\ln(1+e^z)\Big|_{z=0}=\frac{e^z(1-e^z)}{(1+e^z)^3}\Big|_{z=0}=0$$

$$\frac{d^4}{dz^4}\ln(1+e^z)\Big|_{z=0}=\frac{e^z(1-4e^z+e^{2z})}{(1+e^z)^4}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{8}$$

于是展开到前四个非零项的结果为：

$$\ln(1+e^z)=\ln 2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{192}z^4+\cdots$$

当然，收敛的半径为$R=1$，因离 0 最近的一个奇点是$\pm i\pi$。
利用特殊函数论中的 Euler 数，还可以得到更加精确的结果。

Euler 多项式$E_n(z)$（$n=0,1,2,\cdots$）由下列的展开式给出[2]：

$$\frac{2e^{zt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}E_n(z)$$

上式中令：$z=1$，于是：
$$\frac{2e^t}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}E_n(1)$$

即：
$$\frac{e^t}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(1)}{2n!}t^n$$

两边对t积分：

$$\ln(1+e^z)-\ln 2=\int_0^z\frac{e^t}{e^t+1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(1)}{2n!}\int_0^z t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(1)}{2n!}\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

于是：

$$\ln(1+e^z) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(1)}{2n!} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

[2] 王竹溪 郭敦仁《特殊函数概论》P5。

Lamberto Qin
2010-10-17
QQ:397968240
Tel:15975454463