

# 数学物理方法作业集

潘逸文\*, 余钊焕†

中国广州中山大学物理学院

September 10, 2019

## 简介

2019 年秋季数学物理方法 (面向 18 级光电信息科学与工程) 作业。每周作业除了在课上宣布, 本文件也会每周更新, 可在 QQ 群文件, 或 <https://panyw5.github.io/courses/mmp.html> 以及 <http://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html> 找到。

---

\*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn

†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

## 1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a) \frac{i}{e}, \quad (b) 2 + \sqrt{2}i, \quad (c) 1 + e^{\frac{9\pi i}{14}} e^{\frac{-\pi i}{7}}, \quad (d) \sqrt{3} + i \text{ 的所有 } 7 \text{ 次方根} \quad (1.1)$$

2. 定义点集  $S_N \equiv \{z^N | z \in N(0, R)\}$ , 其中  $R > 0, N = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}_{>0}$ 。讨论  $S_N$  与  $S_{N+1}$  之间谁是谁的子集, 是否真子集, 写明推理。

3. 设点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ , 其中  $R > 0$ 。求解最大的  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对于任意  $S$  的内点  $z$ ,  $z^N$  都还是内点。写明推理。

4. 考虑点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$ , 其中  $R > 0$ 。  $S$  是否区域? 是否单连通? 写明推理。

## 2 第二周 (9 月 10 日课上交)

0. (若上周没做这道题) 考虑点集  $S \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| < R\}$ , 其中  $R > 0$ 。  $S$  是否区域? 是否单连通? 写明推理。

1. 用代数式 (即  $x + iy$  的形式) 表达以下复数, 其中  $a, b \in \mathbb{R}, i$  是虚数单位,

$$(a) a^i, \text{ 其中 } a > 0, \quad (b) i^{a+bi}, \quad (c) \sin(a + ib). \quad (2.1)$$

2. 设  $u(x, y) = e^x \sin y, v(x, y) = -e^x \cos y$ , 并考虑复变函数  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ 。验证  $w$  是  $\mathbb{C}$  上解析函数。

3. 设  $f$  为区域  $D$  内解析函数, 同时, 其值域是  $\mathbb{R}$  的子集。求证  $f$  是常数函数。

4. 设解析函数  $f(z)$  的实部  $u(x, y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$ , 求其虚部, 并把  $f$  的表达式改写为只含  $z$  的表达式。

## 3 第三周 (9 月 17 日课上交)

1. 计算  $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z} dz$  和  $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z} dz$ , 其中  $C_1$  和  $C_2$  分别是上半圆周 (半径  $R > 0$ , 逆时针方向) 和下半圆周 (半径  $R > 0$ , 逆时针方向)。

2. 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz. \quad (3.1)$$

3. 设复变函数  $f$  在单连通区域  $D$  内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续,  $G \subset D$  是其单连通子区域并有  $G \cup \partial G \subset D$ 。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz, \quad (3.2)$$

其中面积元  $d\bar{z} dz = 2i dx dy$ 。