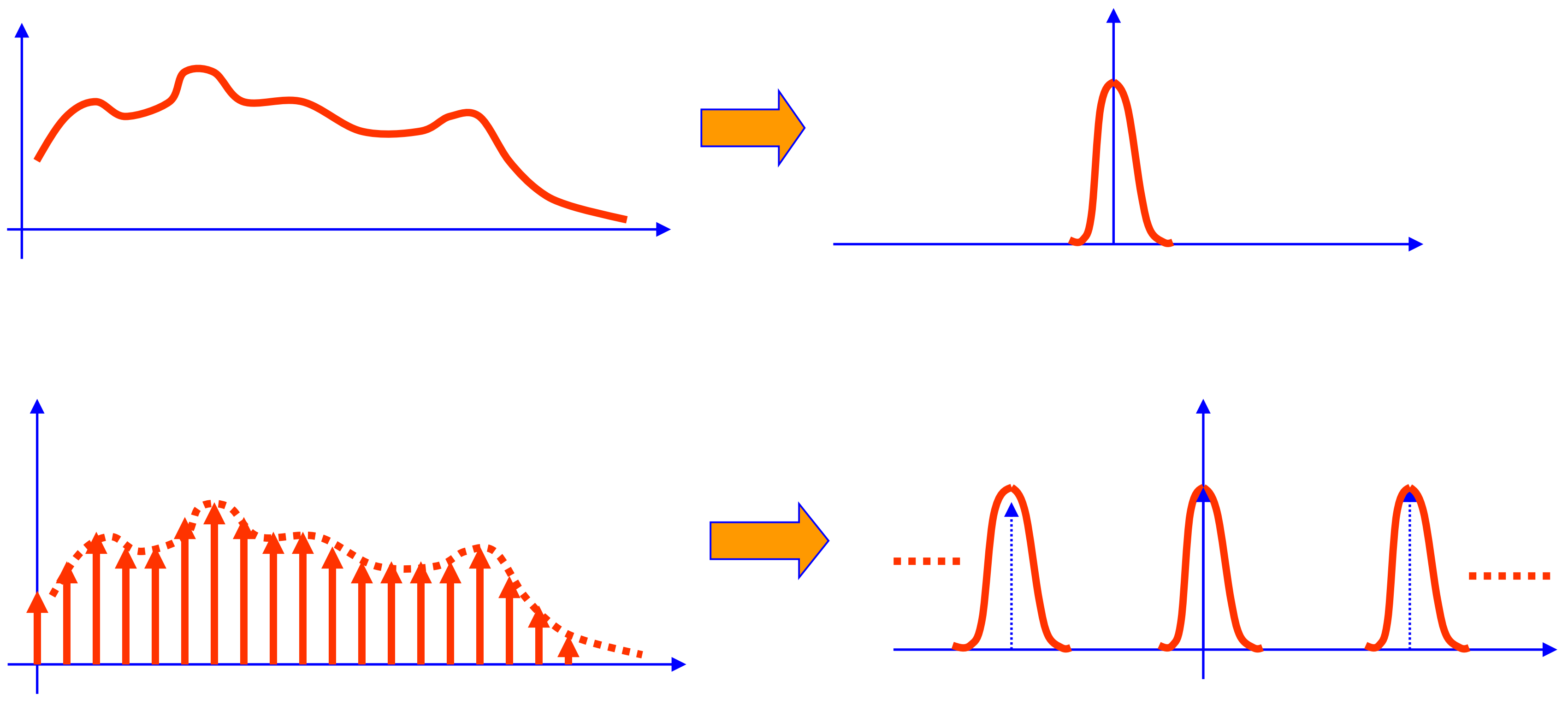
# 1. 时域抽样的本质



本质：用连续信号的样品值来表示信号　　将频域信号以$\omega_s=2\pi/T$为周期进行延拓

# 5.1 时域抽样定理

## 二. 时域抽样定理

(1) 对于带限最高频率$\omega_M$的连续时间信号$x(t)$，只有在以 $\omega_s > 2\omega_M$的频率周期对其进行理想抽样时， $x(t)$可以唯一的由样本$x(nT)$来确定而不丢失原有的信息。

(2) 如果需要从连续时间信号的离散时间样本$x(nT)$不失真的恢复成原来的连续时间信号$x(t)$，需要将其样本值序列通过一个低通滤波器，该理想低通滤波器截止频率$\omega_c$满足$\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$，并且通带增益为$T$。

# LTI系统的分析方法

系统分析研究的主要问题就是对于给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。具体来说就是：建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法
- 输入输出法 （外部法） -单输入单输出
- 状态变量法 （内部法） -多输入多输出

外部法
- 时域分析
  - 连续系统--- 微分方程，卷积积分
  - 离散系统--- 差分方程，卷积和
- 变换域分析
  - 连续系统--- 频域法和复频域法
  - 离散系统--- 频域法和z域法

系统特性： 系统函数-系统的稳定性

外部法： 状态变量法

# 第六章 离散时间信号与系统的频域分析

## 6.1 离散时间傅里叶级数

- 周期信号的离散时间傅里叶级数
- 周期信号的频谱

## 6.2 非周期信号的傅里叶变换

- 非周期信号的傅里叶积分表示
- 傅里叶频谱特性
- 离散时间傅里叶变换性质

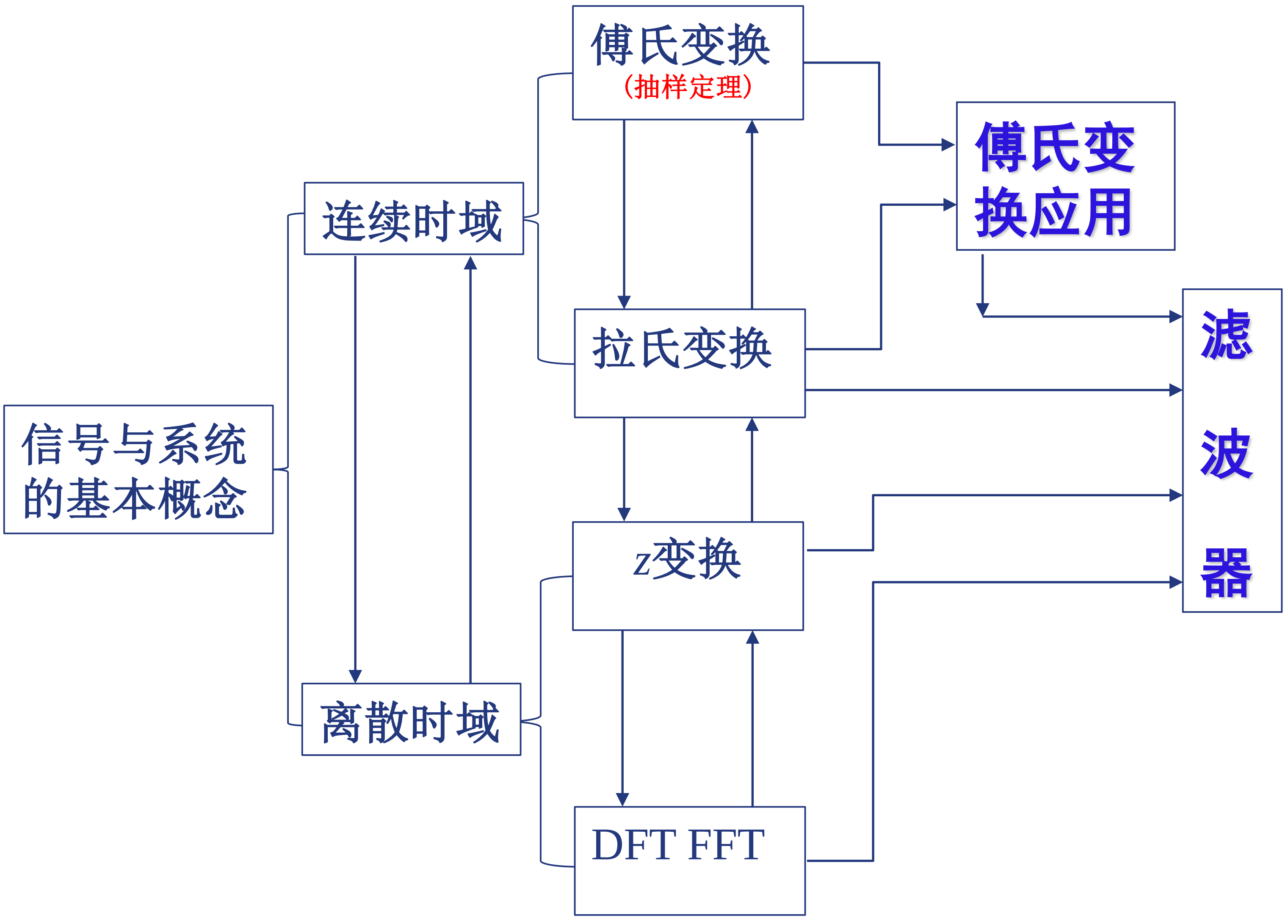
## 6.3 几种傅里叶变换的关系

- 连续时间傅里叶变换
- 连续时间傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶级数

## 6.4 离散LTI系统的频域分析

- 系统响应的频域表示
- 单位样值响应
- 滤波特性

# 信号与系统

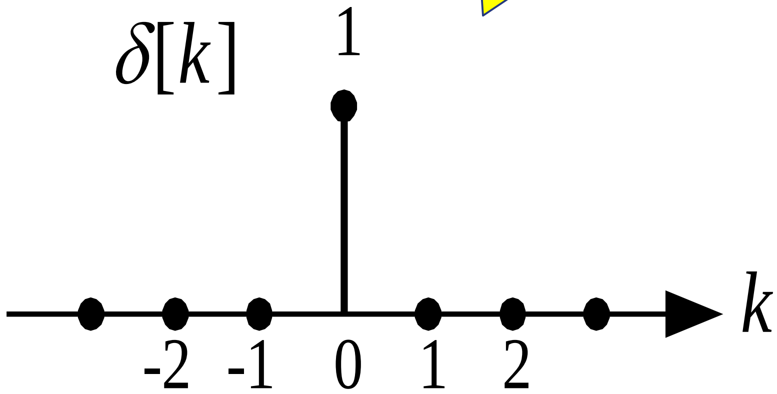


# 离散时间信号

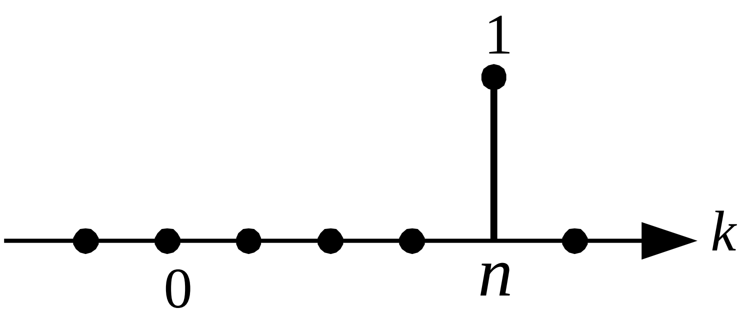
复习

## 单位脉冲序列

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$




$$\delta(k-n)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$



## 单位脉冲序列性质

复习

$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$$

$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)=1 \qquad \delta(k)=\delta(-k)$$

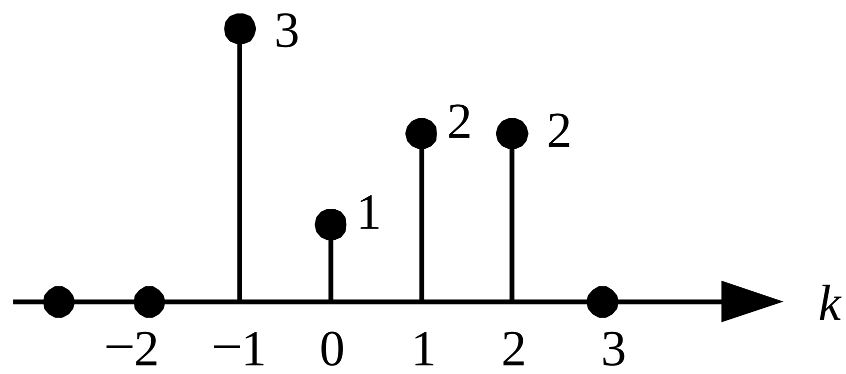
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)$$

# 离散时间信号

单位脉冲序列可以表示任意离散时间信号

复习




$$f(k)=3\delta(k+1)+\delta(k)+2\delta(k-1)+2\delta(k-2)$$

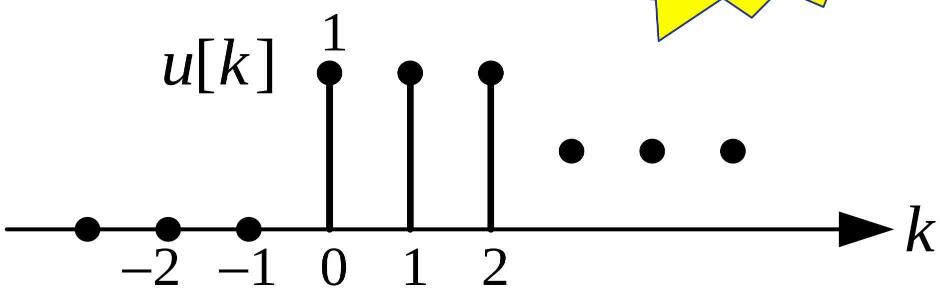
$$f(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(k-n)$$

# 离散时间信号

## 单位阶跃序列

复习

$$u(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$




✓ δ(k)与u(k)的关系：

$$\delta(k)=u(k)-u(k-1)$$

$$u(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta(n)$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

# 卷积和

复习

已知定义在区间(–∞,+∞)上的两个函数$x_1(n)$和$x_2(n)$，则定义和

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x_1(i)x_2(n-i)$$

为$x_1(n)$和$x_2(n)$ 的**卷积和**，简称为**卷积**，**可记为：** $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$

**常用卷积和公式**

$$(1)\ f(k)*\delta(k)=f(k);$$

$$(2)\ f(k)*\delta(k-k_0)=f(k-k_0);$$

$$(3)\ \delta(k)*\delta(k)=\delta(k);$$

$$(4)\ \delta(k-k_1)*\delta(k-k_2)=\delta(k-k_1-k_2);$$

$$(5)\ f_1(k-k_1)*f_2(k)=f_1(k)*f_2(k-k_1);$$

$$(6)\ f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f_1(k-k_2)*f_2(k-k_1)$$

$$=f_1(k)*f_2(k-k_1-k_2)=f_1(k-k_1-k_2)*f_2(k)$$

# 第六章 离散时间信号与系统的频域分析

## 6.1 离散时间傅里叶级数

- ◆ 周期信号的离散时间傅里叶级数
- ◆ 周期信号的频谱

## 6.2 非周期信号的傅里叶变换

- ◆ 非周期信号的傅里叶积分表示
- ◆ 傅里叶频谱特性
- ◆ 离散时间傅里叶变换性质

## 6.3 几种傅里叶变换的关系

- ◆ 连续时间傅里叶变换
- ◆ 连续时间傅里叶级数
- ◆ 离散时间傅里叶变换
- ◆ 离散时间傅里叶级数

## 6.4 离散LTI系统的频域分析

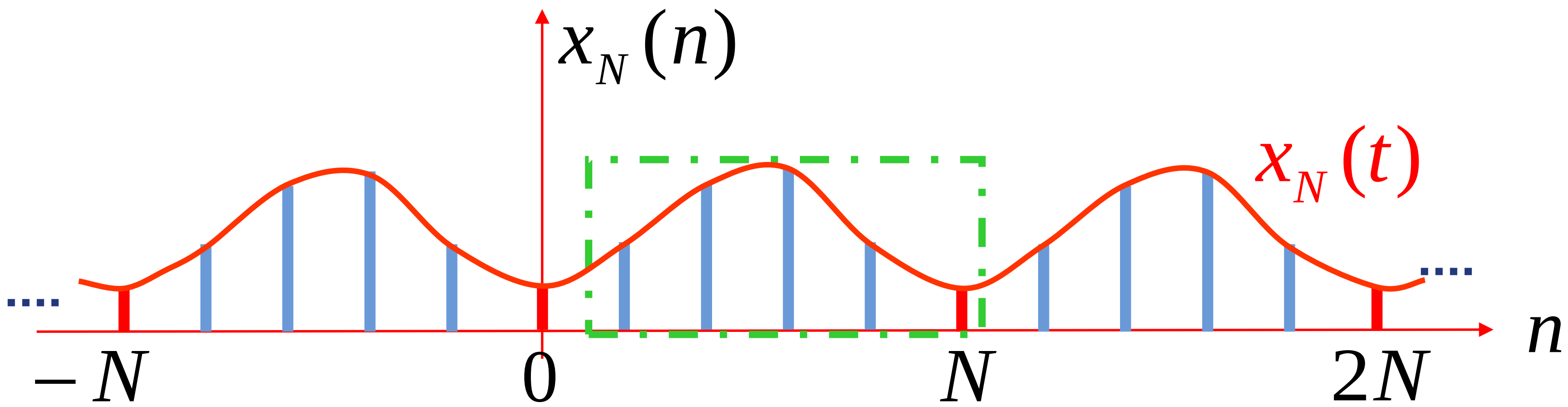
- ◆ 系统响应的频域表示
- ◆ 单位样值响应
- ◆ 滤波特性

# 6. 1 离散时间傅里叶级数

## 一. 周期信号的离散傅里叶级数（Discrete-Time Fourier Series）

### 1. 离散周期信号:

$$x_N(n) = x_N(n + mN)$$




离散周期信号看成是连续周期信号的采样信号。

# 1.2 信号的描述及其分类

**例题**：判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

$$(1)\ f_1(t) = \sin 2t + \cos 3t \qquad (2)\ f_2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$$

**分析**：两个周期信号$x(t)$，$y(t)$的周期分别为$T_1$和$T_2$，若其周期之比$T_1/T_2$为有理数，则其和信号$x(t)+y(t)$仍然是周期信号，其周期为$T_1$和$T_2$的最小公倍数。

复习

（1）$\sin 2t$是周期信号，其角频率和周期分别为：

$$\omega_1 = 2\ \text{rad/s}, \quad T_1 = 2\pi/\omega_1 = \pi\ \text{s},$$

$\cos 3t$是周期信号，其角频率和周期分别为：

$$\omega_2 = 3\ \text{rad/s}, \quad T_2 = 2\pi/\omega_2 = (2\pi/3)\ \text{s},$$

由于$T_1/T_2 = 3/2$为有理数，故$f_1(t)$为**周期信号**，其周期为：$T_1$和 $T_2$的最小公倍数$2\pi$。

（2） $\cos 2t$ 和$\sin \pi t$的周期分别为$T_1 = \pi$s， $T_2 = 2$ s，

由于$T_1/T_2$为无理数，故$f_2(t)$为非周期信号

# 1.2 信号的描述及其分类

**例题**：判断正弦序列 $f(k) = \sin(\beta k)$ 是否为周期信号，若是确定其周期。

解 $f(k) = \sin(\beta k) = \sin(\beta k + 2m\pi)$， $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$= \sin[\beta(k + m\frac{2\pi}{\beta})] = \sin[\beta(k + mN)]$$

式中 β 称为正弦序列的数字角频率，单位：**rad**。

复习

**由上面的定义可知：**

① 仅当 $2\pi/\beta$ 为整数时，正弦序列才具有周期 $N = 2\pi/\beta$。

② 当 $2\pi/\beta$ 为有理数时，正弦序列仍为具有周期性，但其周期为 $N= M(2\pi/\beta)$，M取使N为整数的最小整数。

③ 当 $2\pi/\beta$ 为无理数时，正弦序列为非周期序列。

# 1.2 信号的描述及其分类

复习

**例题**：判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

(1) $f_1(k) = \sin(3\pi k/4) + \cos(0.5\pi k)$ (2) $f_2(t) = \sin(2k)$

解 （1）$\sin(3\pi k/4)$ 和$\cos(0.5\pi k)$的数字角频率分别为

$\beta_1 = 3\pi/4$ rad， $\beta_2 = 0.5\pi$ rad

由于$2\pi/\beta_1 = 8/3$， $2\pi/\beta_2 = 4$为有理数，故它们的周期分别为$N_1 = 8$， $N_2 = 4$，故$f_1(k)$ 为周期序列，其周期为$N_1$和$N_2$的最小公倍数8。

解（2）$\sin(2k)$ 的数字角频率为 $\beta_1 = 2$ rad；由于$2\pi/\beta_1 = \pi$ 为无理数，故$f_2(k) = \sin(2k)$为非周期序列 。

结论

1） 连续正弦信号一定是周期信号，而正弦序列不一定是周期序列。
2） 两连续周期信号之和不一定是周期信号，而两周期序列之和一定是周期序列。

# 6.1 离散时间傅里叶级数

## 一. 周期信号的离散傅里叶级数

### 2. 离散周期信号的傅里叶级数:

连续周期信号傅里叶级数: $$x_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\omega_0 t},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

离散化后成为离散周期信号: $$x_N(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\Omega_0 n},\quad \Omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

(变量替换)

**第k次谐波:** $g_k=e^{jk\Omega_0 n}$ **,第k+N次谐波:** $g_{k+N}=e^{j(k+N)\Omega_0 n}=e^{jk\Omega_0 n}\cdot e^{j2\pi n}=g_k$

$$g_{k+mN}=e^{j(k+mN)\Omega_0 n}=e^{jk\Omega_0 n}\cdot e^{jm2\pi n}=e^{jk\Omega_0 n}=g_k,\ m\text{为整数}$$

# 6.1 离散时间傅里叶级数

## 一. 周期信号的离散傅里叶级数

离散傅里叶级数表达式为:

$$x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_N(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

记作： $x_N(n)\xleftrightarrow{DTFS}X_k$

$$\begin{cases} x_T(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \\ X_k=\dfrac{1}{T}\int_0^T x_T(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \end{cases}$$

记作： $x_T(t)\xleftrightarrow{FS}X_k$

离散性、谐波性、收敛性

离散性、谐波性、周期性

令

$$W=e^{-j\Omega_0}=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_N(n)W^{kn}$$ 离散傅里叶系数（正变换）

$$x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_kW^{-kn}$$ 离散傅里叶级数展开式（逆变换）

# 6.1 离散时间傅里叶级数

## 二. 周期信号的频谱

离散傅里叶级数表达式为：$x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

$N$个分量：$X_0, X_1 e^{j\Omega_0 n}, \cdots, \quad X_k e^{jk\Omega_0 n}, \cdots, X_{N-1} e^{j(N-1)\Omega_0 n}$

第k次谐波大小

信号的频谱：

$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$

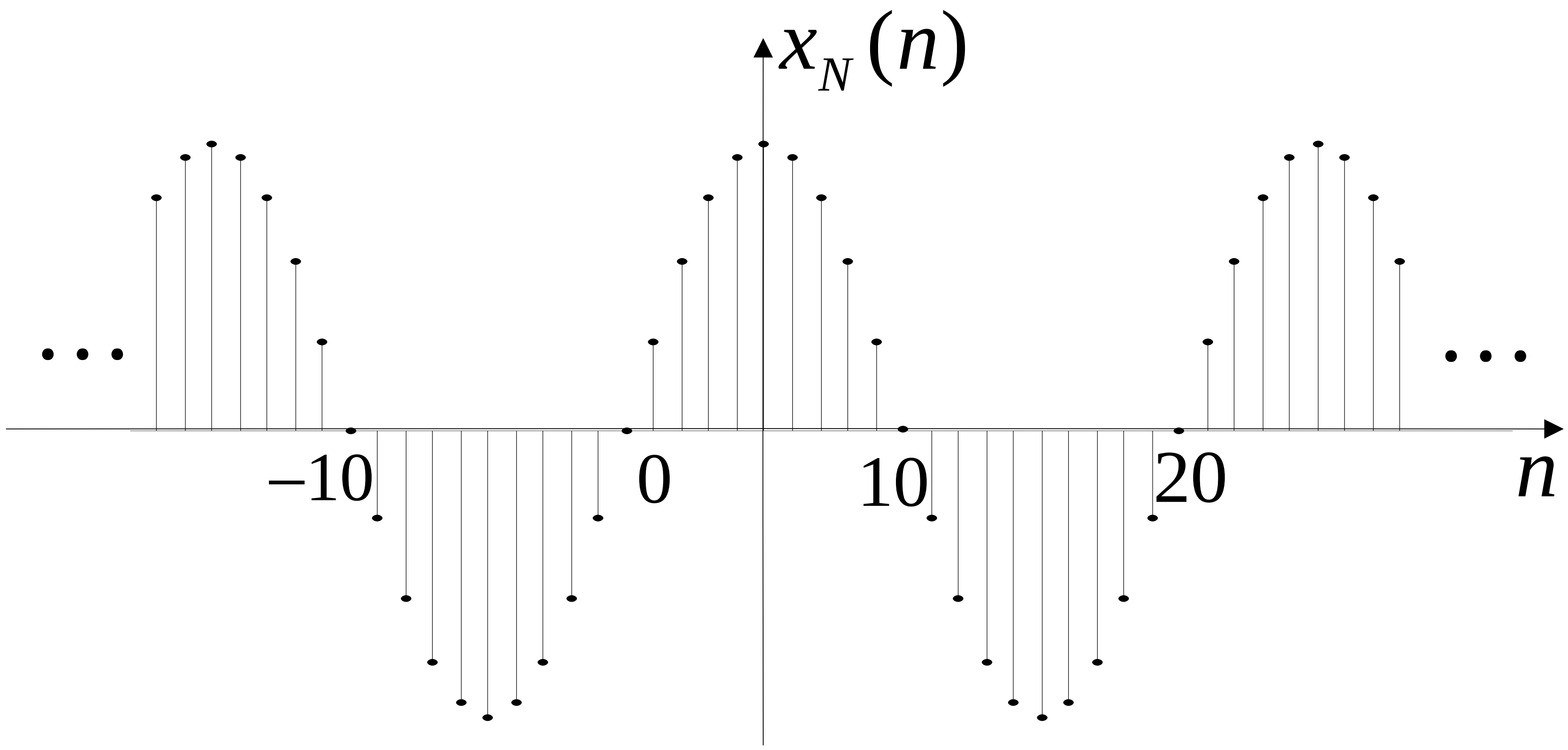
幅度谱：$|X_k|$对$\Omega$的图 $\quad |X_k| = |X_{-k}|$

相位谱：$\angle X_k$对$\Omega$的图 $\quad \angle X_k = -\angle X_{-k}$

以$\Omega$为横轴，$X_k$每隔$2\pi$间隔重复；以$k$为横轴，$X_k$每隔$N$间隔重复

# 6.1 离散时间傅里叶级数

例1. 求 $\cos 0.1\pi n$ 的离散傅里叶级数表达式



# 6.1 离散时间傅里叶级数

解： 1)求$N$，　$N = 2\pi / 0.1\pi = 20$

2)求$X_k$，

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{19} \cos 0.1\pi n \cdot e^{-jk0.1\pi n}$$

$$= \frac{1}{40}\sum_{n=0}^{19} (e^{j0.1\pi n(1-k)} + e^{-j0.1\pi n(1+k)})$$

$$= \frac{1}{40}\left(\frac{1-e^{j2\pi(1-k)}}{1-e^{j0.1\pi(1-k)}} + \frac{1-e^{-j2\pi(1+k)}}{1-e^{-j0.1\pi(1+k)}}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{40}(20+0) = \frac{1}{2}, & k=1 \\ \frac{1}{40}(0+20) = \frac{1}{2}, & k=19 \end{cases}$$

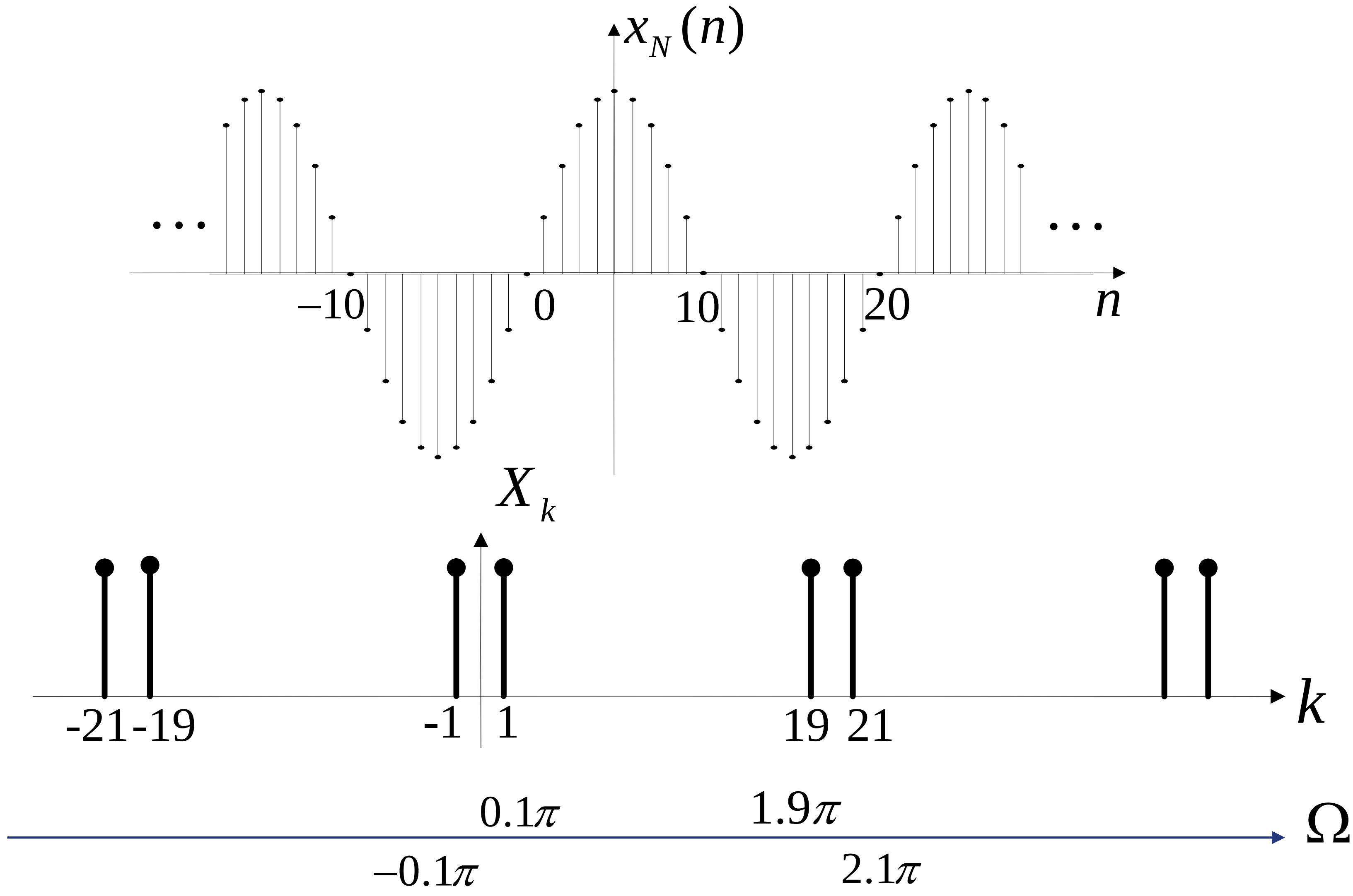
$$x_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j0.1\pi n} + e^{j1.9\pi n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j0.1\pi n} + e^{-j0.1\pi n}\right)$$

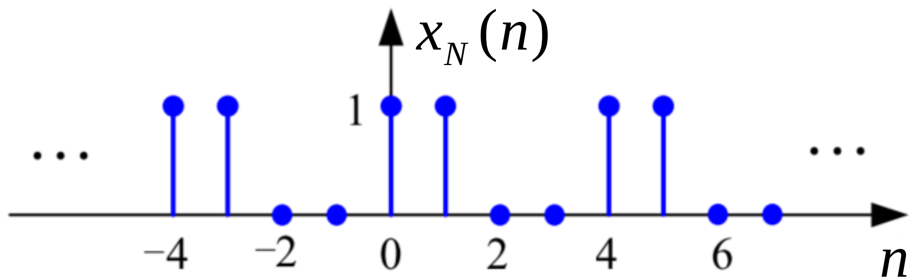
# 6. 1 离散时间傅里叶级数

例1. 求 $\cos 0.1\pi n$ 的离散傅里叶级数表达式



# 6.1 离散时间傅里叶级数

例2：　求图示周期脉冲序列的离散傅里叶级数展开式。




$$x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

**解：**

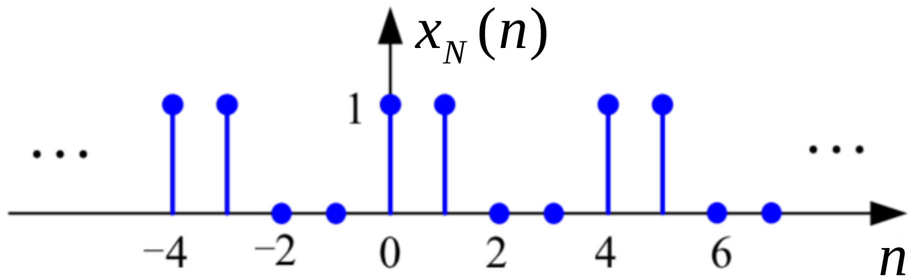
$$N=4,\quad \Omega=2\pi/N=\pi/2 \qquad X_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_N(n)e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$X_0=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_N(n)e^{-j0\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{2} \qquad X_1=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_N(n)e^{-j\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{4}(1-j)$$

$$X_2=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_N(n)e^{-j\pi n}=0 \qquad X_3=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_N(n)e^{-j\frac{3\pi}{2}n}=\frac{1}{4}(1+j)$$

# 6. 1 离散时间傅里叶级数

例2：求图示周期脉冲序列的离散傅里叶级数展开式。




**解：**

$$x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-j)e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{4}(1+j)e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

# 第六章 离散时间信号与系统的频域分析

## 6.1 离散时间傅里叶级数
- 周期信号的离散时间傅里叶级数
- 周期信号的频谱

## 6.2 非周期信号的傅里叶变换
- 非周期信号的傅里叶积分表示
- 傅里叶频谱特性
- 离散时间傅里叶变换性质

## 6.3 几种傅里叶变换的关系
- 连续时间傅里叶变换
- 连续时间傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶级数

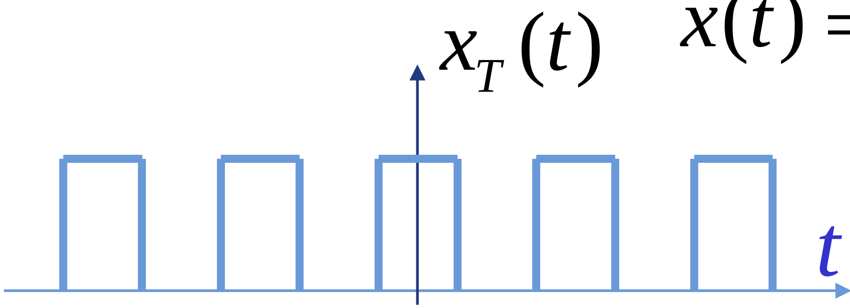
## 6.4 离散LTI系统的频域分析
- 系统响应的频域表示
- 单位样值响应
- 滤波特性

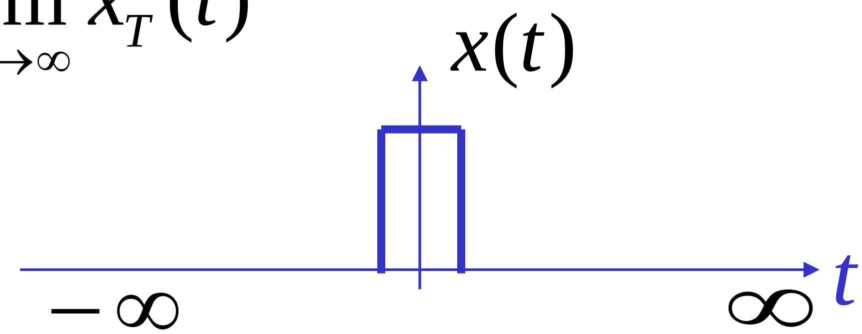
# 6.2 非周期信号的傅里叶变换

复习

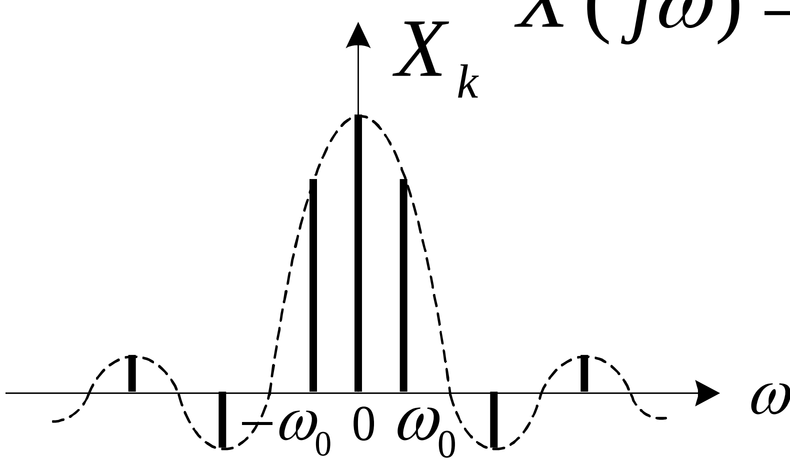
## 一. 非周期信号的傅里叶积分表示

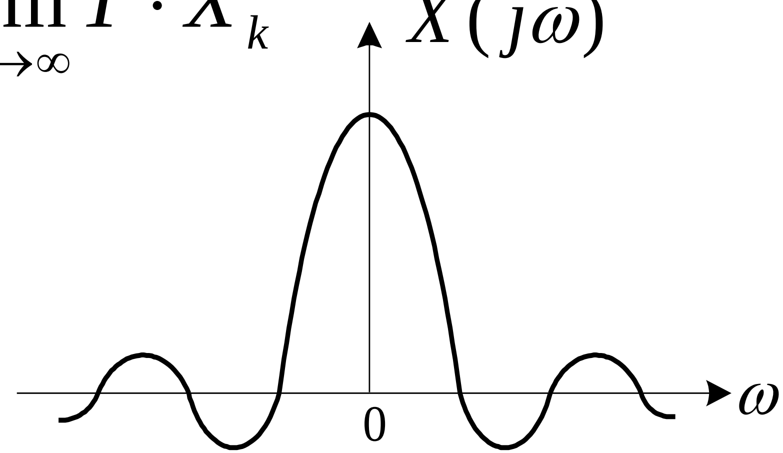
$$x(t)=\lim_{T\to\infty} x_T(t)$$




$$X(j\omega)=\lim_{T\to\infty} T\cdot X_k$$



# 6.2 非周期信号的傅里叶变换

## 一. 非周期信号的傅里叶积分表示

$$\begin{cases} x_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0=\dfrac{2\pi}{N} \\ X_k=\dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_N(n)e^{-jk\Omega_0 n} \end{cases} \xrightarrow{\Omega=k\Omega_0=k\frac{2\pi}{N}}$$

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \lim_{N\to\infty} N\cdot X_k \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} x_N(n)e^{-jk\Omega_0 n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

$$x(n)=\lim_{N\to\infty} x_N(n)=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}(NX_k)e^{j\Omega n}\cdot\frac{2\pi}{N}$$

$$N\to\infty, \quad \Omega_0\to 0, \quad \Omega_0=\frac{2\pi}{N}\to\Delta\Omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Omega_0\to 0}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta\Omega)e^{jk\Delta\Omega n}\Delta\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

# 6.2 非周期信号的傅里叶变换

## 一. 非周期信号的傅里叶积分表示

离散时间傅里叶正变换 (DTFT)

离散时间傅里叶反正变换 (IDTFT)

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$X(\Omega)=\mathrm{DTFT}\left[x(n)\right]$$

$$x(n)=\mathrm{IDTFT}\left[X(\Omega)\right]$$

$$x(n)\leftrightarrow X(\Omega)$$

非周期信号可表示成复指数信号的线性组合，这些复指数信号在频率上是连续变化的。

# 6. 2 非周期信号的傅里叶变换

## 二. 傅里叶频谱特性

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

- 傅里叶频谱是Ω的连续函数；
- 傅里叶频谱是Ω的周期函数，周期为2π；
- 共轭对称性 $x^*(n)=X^*(-\Omega)$

$$if\quad x(n)=x^*(n),\ then\quad X(\Omega)=X^*(-\Omega)$$

$$Let\quad X(\Omega)=|X(\Omega)|e^{\angle X(\Omega)} \Rightarrow \begin{array}{l}|X(\Omega)|=|X(-\Omega)| \\ \angle X(\Omega)=-\angle X(-\Omega)\end{array}$$

- **DTFT**存在的充分条件：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$

# 6.2 非周期信号的傅里叶变换

**求下列序列的离散时间傅里叶变换DTFT**

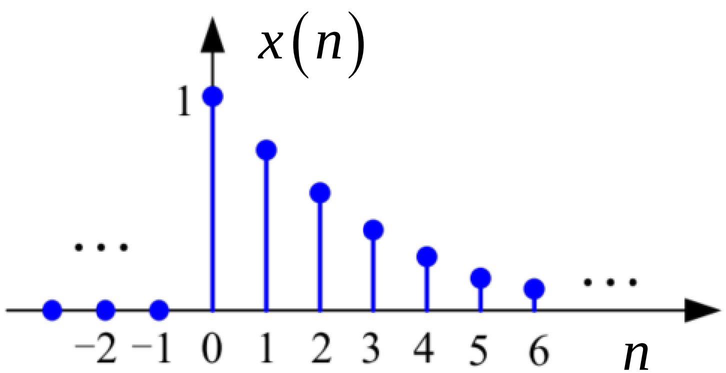
$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

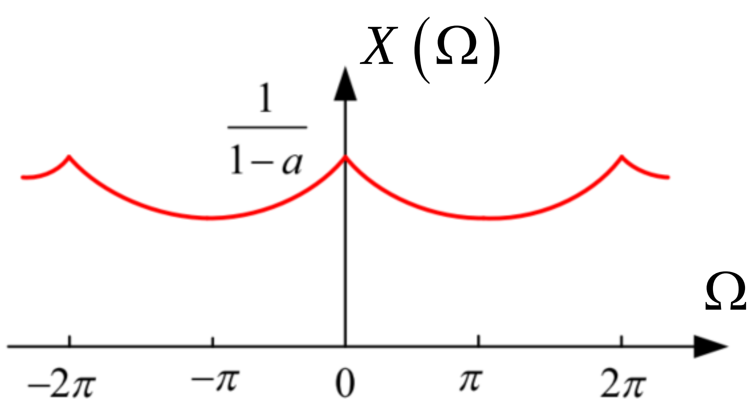
(1) 单位样值序列$x(n)=\delta(n)$

$$X(\Omega)=\mathrm{DTFT}\left[\delta(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-j\Omega n}=1$$

(2) 单位指数衰减序列$x(n)=a^n u(n), |a|<1$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$



# 6.2 非周期信号的傅里叶变换

**求下列序列的离散时间傅里叶变换DTFT**

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

(3) 离散序列$x(n)=1=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-m)$

$$X(\Omega)=\mathrm{DTFT}\left[x(n)\right]=2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$$

**1.反变换证明**
**2.抽样定理解释**

(4) 单位阶跃序列$x(n)=u(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(n)$

$$\text{Let }\ \mathrm{sgn}(n)\leftrightarrow U(\Omega),\ \text{then }\ \mathrm{sgn}(n-1)\leftrightarrow U(\Omega)e^{-j\Omega}$$

$$\delta(n)=\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(n)-\mathrm{sgn}(n-1)]\leftrightarrow 1 \quad\Rightarrow\quad U(\Omega)=\frac{2}{1-e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega)=\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)+\frac{1}{2}U(\Omega)=\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi l)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$$

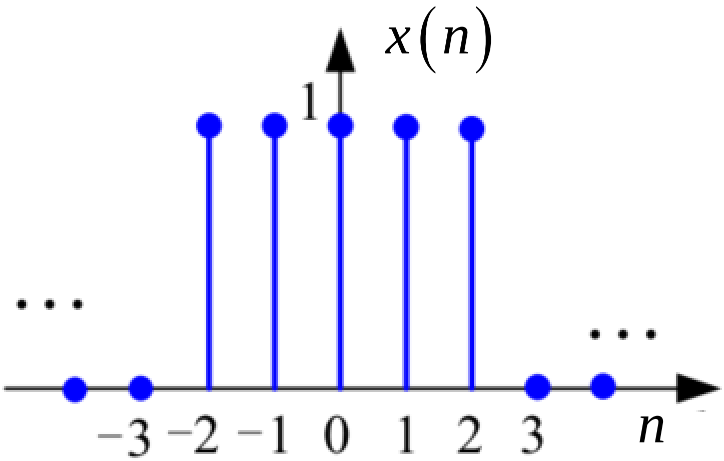
# 6. 2 非周期信号的傅里叶变换

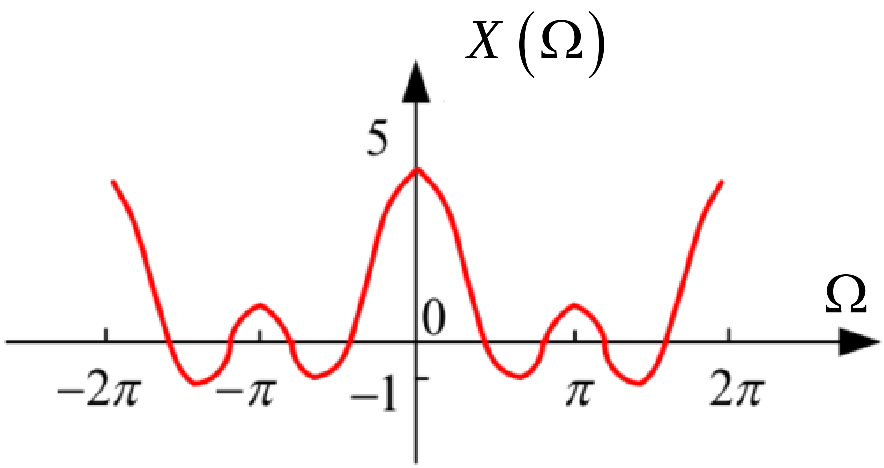
**求下列序列的离散时间傅里叶变换DTFT**

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

(5) 方波序列$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le 2\\ 0 & |n|>2\end{cases}$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-2}^{2}e^{-j\Omega n}=\frac{e^{j2\Omega}\left(1-e^{-j5\Omega}\right)}{1-e^{-j\Omega}}=\frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$$



# 6.2 非周期信号的傅里叶变换

## 三.离散时间傅里叶变换的性质

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

**1. 线性** $\quad ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$

**2. 时域翻转** $\quad x(-n)\leftrightarrow X(-\Omega)$

**3. 时移** $\quad x(n+n_0)\leftrightarrow X(\Omega)e^{jn_0\Omega}$

**4. 频移** $\quad e^{j\Omega_0 n}x(n)\leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

## 三.离散时间傅里叶变换的性质

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

**5. 频域微分**

$$nx(n)\leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

**6. 时域卷积**

$$x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow X_1(\Omega)\cdot X_2(\Omega)$$

**7. 频域卷积**

$$x_1(n)x_2(n)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)$$

**8. Parseval定理**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2d\Omega$$

# 第六章 离散时间信号与系统的频域分析

## 6.1 离散时间傅里叶级数

- 周期信号的离散时间傅里叶级数
- 周期信号的频谱

## 6.2 非周期信号的傅里叶变换

- 非周期信号的傅里叶积分表示
- 傅里叶频谱特性
- 离散时间傅里叶变换性质

## 6.3 几种傅里叶变换的关系

- 连续时间傅里叶变换
- 连续时间傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶级数

## 6.4 离散LTI系统的频域分析

- 系统响应的频域表示
- 单位样值响应
- 滤波特性

# 6.3 几种傅里叶变换的关系

Page 212

## 连续时间傅里叶级数（CTFS）

$$X_k(j\omega)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{j\omega_0 t}$$

## 连续时间傅里叶变换（CTFT）

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

## 离散时间傅里叶级数（DTFS）

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

## 离散时间傅里叶变换（DTFT）

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{-j\Omega n}d\Omega$$

# 第六章 离散时间信号与系统的频域分析

## 6.1 离散时间傅里叶级数
- ◆ 周期信号的离散时间傅里叶级数
- ◆ 周期信号的频谱

## 6.2 非周期信号的傅里叶变换
- ◆ 非周期信号的傅里叶积分表示
- ◆ 傅里叶频谱特性
- ◆ 离散时间傅里叶变换性质

## 6.3 几种傅里叶变换的关系
- ◆ 连续时间傅里叶变换
- ◆ 连续时间傅里叶级数
- ◆ 离散时间傅里叶变换
- ◆ 离散时间傅里叶级数

## 6.4 离散LTI系统的频域分析
- ◆ 系统响应的频域表示
- ◆ 单位样值响应
- ◆ 滤波特性

# 6.4 离散LTI系统的频域分析

## 一.系统响应的频域表示

系统的频域响应
(时域中单位样值响应)

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{LTI 系统}} \longrightarrow y_{zs}(n)$$

$$x(n) \quad * \quad h(n) \quad = \quad y_{zs}(n)$$

$$\downarrow \text{DTFT} \qquad \downarrow \text{DTFT} \qquad \uparrow \text{IDTFT}$$

$$X(\Omega) \quad \times \quad H(\Omega) \quad = \quad Y(\Omega)$$

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n}$$

$H(\Omega)$ 是Ω的周期函数，周期为2π。

$$H(\Omega)=\left|H(\Omega)\right|e^{j\angle H(\Omega)}$$

幅频特性： $\left|H(\Omega)\right|$ $\quad$ $\left|H(\Omega)\right|=\left|H(-\Omega)\right|$

相频特性： $\angle\left|H(\Omega)\right|$ $\quad$ $\angle H(\Omega)=-\angle H(-\Omega)$

# 6.4 离散LTI系统的频域分析

## 二. 单位样值响应

离散LTI系统用$k$阶常系数差分方程描述：

$$y(n-k)+a_{k-1}y(n-k+1)+\cdots+a_1y(n-1)+a_0y(n)$$
$$=b_mx(n-m)+b_{m-1}x(n-m+1)+\cdots+b_1x(n-1)+b_0x(n)$$

$a_i$、$b_j$为常数。

方程两边取傅里叶变换：

$$\sum_{i=0}^{k}a_ie^{-ji\Omega}Y(\Omega)=\sum_{r=0}^{m}b_re^{-jr\Omega}X(\Omega)$$

系统的频域响应

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{\sum_{r=0}^{m}b_re^{-jr\Omega}}{\sum_{i=0}^{k}a_ie^{-ji\Omega}}$$

例：下列离散系统的初始状态为0，求系统的单位样值响应

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n)$$

**解：单位样值响应满足：**

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2\delta(n)$$

**起始条件：** $y_{zs}(0)=2$ $\quad$ $y_{zs}(1)=\frac{3}{4}y_{zs}(0)=\frac{3}{2}$

**时域方法**

**特征根：0.25 和0.5** $\quad y_{zs}(n)=C\left(0.5\right)^n+D\left(0.25\right)^n$

$$\begin{cases}C+D=2\\0.5C+0.25D=1.5\end{cases}$$

解得$C$=4，$D$=-2

$$y_{zs}(n)=4\left(0.5\right)^n-2\left(0.25\right)^n，\quad n\geq 0$$

例：下列离散系统的初始状态为0，求系统的单位样值响应

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n)$$

**解**：系统的频率响应为

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{2}{1-0.75e^{-j\Omega}+0.125e^{-j2\Omega}}$$

频域方法

部分分式展开法

$$H(\Omega)=\frac{2}{\left(1-0.5e^{-j\Omega}\right)\left(1-0.25e^{-j\Omega}\right)}=\frac{4}{1-0.5e^{-j\Omega}}-\frac{2}{1-0.25e^{-j\Omega}}$$

$$y_{zs}(n)=4\left(0.5\right)^{n}u(n)-2\left(0.25\right)^{n}u(n)$$

# 6.4 离散LTI系统的频域分析

## 三. 滤波特性

◆ 与连续系统的滤波特性一样，离散系统的滤波特性也有低通、高通、带通、带阻、全通之分；

◆ 由于频率响应的周期性特点，特性限于一个周期范围内区分；

◆ 理想低通滤波器也是非因果的，因而也是物理不可实现的，但是可以用实际的系统来逼近理想滤波器的特性。

# 6.4 离散LTI系统的频域分析

**练习：**

**例：Ch7 7.2-3　　p216**

**例：Ch7 7.4-2**

$$(1)y_{zs}(n)=3\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

# 第六章 离散时间信号与系统的频域分析

**6.1 离散时间傅里叶级数**
- 周期信号的离散时间傅里叶级数
- 周期信号的频谱

**6.2 非周期信号的傅里叶变换**
- 非周期信号的傅里叶积分表示
- 傅里叶频谱特性
- 离散时间傅里叶变换性质

**6.3 几种傅里叶变换的关系**
- 连续时间傅里叶变换
- 连续时间傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶级数

**6.4 离散LTI系统的频域分析**
- 系统响应的频域表示
- 单位样值响应
- 滤波特性

# 第六章 本章要点

## 1、周期信号离散傅里叶级数

**傅立叶级数形式、性质、频谱特点**

## 2、非周期信号傅里叶变换

**傅立叶变换与反变换**

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n} \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

**常用信号的频谱函数 见表7.1 p203**

**离散时间傅里叶变换的性质-见下页**

## 3. 离散LTI系统的频域分析

**离散LTI系统的频率响应**

**滤波器**

# 非周期信号的傅里叶变换的性质

1. 线性 $ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$

2. 时域翻转 $x(-n)\leftrightarrow X(-\Omega)$

3. 时移 $x(n+n_0)\leftrightarrow X(\Omega)e^{jn_0\Omega}$

4. 频移 $e^{j\Omega_0 n}x(n)\leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

5. 频域微分 $nx(n)\leftrightarrow j\dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

6. 时域卷积 $x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow X_1(\Omega)\cdot X_2(\Omega)$

7. 频域卷积 $x_1(n)x_2(n)\leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)$

8. Parseval定理 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega$

# 第五次作业　20190703交

习题

7.1-2，

7.2-2,

7.4-4

8.1-1

# Thank You !