电动力学

第五章：辐射电磁场

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

May 15, 2019

本章内容简介:

宏观物理领域内产生电磁波的基本手段有两种:

1. 电荷做加速运动;
2. 电流随时间变化.

Goal:

本章研究高频交变电流辐射电磁波的规律.

本章的基本内容如下:

- 引入电磁场的"规范势"描写方法. 说明规范势选择的不唯一性、势的规范变换与物理量的规范变换不变性等问题.
- 分析规范势的"推迟势解", 指出电磁相互作用传播速度的有限性.
- 应用推迟势公式计算各种类型的交变电流分布所激发的辐射电磁场, 尤其是电偶极辐射.
- 研究电磁场的辐射压强等问题.

用势描写电磁场:

考虑真空中的电磁场. Maxwell 方程组为:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$
$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\rightsquigarrow \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

1. 在一般电磁场情形下, 矢势 $\vec{A}$ 的物理意义仍然是: $\vec{A}$ 在任意时刻 t 沿任一闭合曲线 C 的环量等于该时刻穿过以 C 为边界的任一曲面的磁通量.
2. 对于任意的时变电磁场而言, 其电场强度矢量 $\vec{E}$ 不再是无旋场. 于是, $\vec{E} \neq -\nabla\varphi$.

用势描写电磁场 (二):

把 Faraday 定律与矢势 $\vec{A}$ 的定义式结合起来，我们看到:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} \\ &= \nabla \times \vec{E} + \partial_t (\nabla \times \vec{A}) \\ &= \nabla \times \left[\vec{E} + \partial_t \vec{A}\right] \end{aligned}$$

此式表明：对于一般的电磁场而言，尽管电场强度 $\vec{E}$ 本身不是无旋场，复合场量 $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ 仍是无旋场. 因此，这个复合矢量场可以表为某个标量场 φ 的负梯度:

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla \varphi$$

即:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A}$$

φ 称为电磁场的标势.

用势描写电磁场(三):

我们看到，在一般情形下，电磁场仍可以用势 $(\varphi, \vec{A})$ 描写:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

值得强调的是:

1. 对于时变的电磁场，电场与磁场是相互作用着的整体. 必须把矢势与标势作为整体来描写电磁场.
2. 时变情形下，电场不再是保守力场，即 $\vec{E} \neq -\nabla\varphi$，因此: 标势 φ 不再能解释为单位点电荷在电磁场中的势能. 在高频交变电路中，也无法定义“电压”的概念.

势的规范变换:

用于描写电磁场的“合格的”势 $(\varphi, \vec{A})$ 并不是唯一的，即给定的场强矢量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 并不唯一地对应于一组势 $(\varphi, \vec{A})$. 设 ψ 为一任意的时空函数. 作变换:

$$\vec{A} \rightsquigarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$
$$\varphi \rightsquigarrow \varphi' = \varphi - \partial_t\psi$$

倘若 $(\varphi, \vec{A})$ 是电磁场的一组合格的势，即:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

利用“梯度场无旋”的性质，我们看到:

$$\nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla\psi = \nabla\times\vec{A} = \vec{B}$$

与

$$-\nabla\varphi' - \partial_t\vec{A}' = -\nabla(\varphi - \partial_t\psi) - \partial_t(\vec{A} + \nabla\psi) = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} = \vec{E}$$

这个结果表明 $(\varphi', \vec{A}')$ 与势 $(\varphi, \vec{A})$ 描写同一电磁场，因此也是电磁场的一组合格的势.

势的规范变换(二):

物理小贴士[1]**:**

1. 对于给定的电磁场场强矢量 $(\vec{E}, \vec{B})$ 而言，每一组合格的势 $(\varphi, \vec{A})$ 称为一种"规范"。或者称为规范势.
2. 两组规范势，如 $(\varphi, \vec{A})$ 和 $(\varphi', \vec{A}')$，之间的联系
$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$
称为"规范变换"。ψ 称为规范变换函数.
3. 在经典电动力学中，电磁场的可观测物理量是场强矢量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$. 由规范变换相联系的不同的规范势对应着同一组 $(\vec{E}, \vec{B})$. 所以，物理规律，此处特指 Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式，具有规范变换下的不变性.

[1] 物理贴士：tips on physics.

两种规范:

规范变换自由度的存在是由于在规范势 $(\varphi, \vec{A})$ 的定义中矢势 $\vec{A}$ 的定义不完整. 电磁场的场强矢量 $(\vec{E}, \vec{B})$ 只规定了矢势 $\vec{A}$ 的旋度:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

但对其散度 $\nabla \cdot \vec{A}$ 却并未作出任何规定. 从物理上讲, 可以随意地选择矢势的散度, $\nabla \cdot \vec{A}$ 的每一种选择就对应一种规范.

从实践角度讲, 应用最广泛的规范有如下两种:

1. 库仑规范. 规范选择条件是:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

2. Lorenz 规范. 规范选择条件是:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

规范势的运动方程:

我们现在尝试用规范势表达真空中的 Maxwell 方程组.两个齐次的 Maxwell 方程, 即 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 和 $\nabla\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=0$ 等价于规范势 $(\varphi,\vec{A})$ 的定义式:

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\quad \vec{E}=-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}.$$

电场强度满足的 Gauss 定理可重新写为:

$$\begin{aligned}\rho/\epsilon_0 &= \nabla\cdot\vec{E}\\ &= \nabla\cdot\Big(-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}\Big)\\ &= -\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

即,

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

规范势的运动方程（二）：

而 Maxwell 方程可改写为[2]：

$$\begin{aligned}\mu_0\vec{J} &= \nabla\times\vec{B}-\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}\\ &= \nabla\times(\nabla\times\vec{A})-\frac{1}{c^2}\partial_t\big(-\nabla\varphi-\partial_t\vec{A}\big)\\ &= \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}\nabla\partial_t\varphi\end{aligned}$$

即：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{J}$$

上述两个方程构成了规范势的基本运动方程，它们是适于任意规范选择的方程组。

[2] 真空中光速的表达式：$c=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

规范势的运动方程 (三):

若采取库仑规范，

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

则规范势运动方程组简化为:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

库仑规范的特点是：标势满足静电 Poisson 方程，在无界空间其解采取库仑势形式:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

把此式代入到第一个同时含有 φ 与 $\vec{A}$ 的方程中，"原则上" 可以确定矢势 $\vec{A}$，进而确定辐射电磁场.

规范势的运动方程(四):

若采取 Lorenz 规范,

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

则规范势的运动方程组可简化为:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

显见:

- 在 Lorenz 规范中, 标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 满足的运动方程形式相同.
- 这两组方程均是非齐次的波动方程, 波源分别是电荷密度和电流密度矢量. 从方程上看, 电荷激发标势波动、电流激发矢势波动. 离开电荷、电流分布区域之后, 矢势和标势都以波动的形式在空间传播.

例题：

例：试证明：在库仑规范中，电磁场矢势所满足的运动方程可以写为如下非齐次的波动方程

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}_T$$

式中 $\vec{J}_T$ 为电流密度矢量的横分量 (无散分量).

解：按照 Helmholtz 定理，任一矢量均可分解为无散分量与无旋分量的矢量和.因此，

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T$$

这里 $\vec{J}_L$ 表示纵向电流密度而 $\vec{J}_T$ 表示横向电流密度：

$$\nabla\times\vec{J}_L = 0\,, \quad \nabla\cdot\vec{J}_T = 0\,.$$

回忆数学恒等式，

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

我们有:

$$\begin{aligned}\vec{J}(t,\vec{x}) &= \int d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\vec{J}(t,\vec{x}') \\ &= \int d^3x' \left[-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\vec{J}(t,\vec{x}') \\ &= \nabla^2\left[-\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\end{aligned}$$

灵活使用矢量分析恒等式:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{u}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla^2\vec{u}$$

可以把上式改写为:

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int d^3x' \frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int d^3x' \frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

上式右端第一项是梯度场 (无旋), 第二项是旋度场 (无散).所以它们分别是电流密度矢量的纵分量和横分量:

例(三):

$$\vec{J}_L(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int d^3x' \frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

$$\vec{J}_T(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int d^3x' \frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

下面对$\vec{J}_L$的表达式作进一步的简化:

$$\begin{aligned}
\vec{J}_L(t,\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\nabla\cdot\int d^3x' \frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\int d^3x' \nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\vec{J}(t,\vec{x}')\right] \\
&= +\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\int d^3x' \nabla'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\vec{J}(t,\vec{x}')\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\nabla\left[\int d^3x' \nabla'\cdot\frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \int d^3x' \frac{\nabla'\cdot\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]
\end{aligned}$$

最后一步的第一项体积分可以通过奥高定理化为无穷远边界上的面积分，结果为零：

$$\int d^3x'\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\oint_{\infty}d\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rightsquigarrow 0$$

所以，

$$\vec{J}_L(t,\vec{x})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\int d^3x'\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

另一方面，我们注意到在库仑规范中，规范势满足的运动方程组如下：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

利用标势运动方程的解以及电荷守恒定律，即 $\nabla\cdot\vec{J}+\partial_t\rho=0$，我们有：

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\left[\int d^3x'\frac{\rho(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left[\int d^3x'\frac{\partial_t\rho(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left[\int d^3x'\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right] \\
&= -\mu_0\vec{J}_L(t,\vec{x})
\end{aligned}
$$

代回到矢势的运动方程中，并注意到 $\vec{J}(t,\vec{x}) = \vec{J}_L(t,\vec{x}) + \vec{J}_T(t,\vec{x})$，即得：

$$
\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}_T
$$

此式表明：库仑规范中矢势的波动完全是由横向电流密度矢量激发的.事实上，考虑到库仑规范条件 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$，矢势 $\vec{A}$ 在库仑规范中只有横分量.

例: 求平面电磁波的规范势.

解: 平面电磁波只能在没有电荷、电流分布的区域中传播.若采取库仑规范, $\nabla\cdot\vec{A}=0$, 则规范势满足方程组:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi$$
$$\nabla^2\varphi=0$$

第二个方程具有平凡解: $\varphi=0$. 因此, 矢势 $\vec{A}$ 服从如下齐次波动方程:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

其平面波解为:

$$\vec{A}(t,\vec{x})=\vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)$$

或者,

$$\vec{A}(t,\vec{x})=\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

例 (二):

进而:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} = i\omega\vec{A}$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}$$

库仑规范条件 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ 保证了 $\vec{A}$ 只有横分量,

$$\vec{k}\cdot\vec{A} = 0$$

刚好足够描写"平面电磁波具有两种独立偏振"这一实验事实.

物理小贴士:

平面电磁波的波矢、电场强度和磁感应强度两两正交:

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = \vec{k}\cdot\vec{B} = \vec{E}\cdot\vec{B} = 0.$$

当然, 这一结论与势的规范选择无关.

例 (三):

若改取 Lorenz 规范,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

则自由空间的规范势 $(\varphi, \vec{A})$ 均服从齐次波动方程:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

其平面波解为:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \varphi(t, \vec{x}) = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t+\alpha)}, \quad k^2 := \vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2/c^2 .$$

计入 Lorenz 规范条件,知 $\alpha = 0$,且:

$$\varphi_0 = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}_0 \qquad \rightsquigarrow \quad \varphi(t, \vec{x}) = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}(t, \vec{x})$$

例（四）：

讨论：

1. 在 Lorenz 规范中，只要给定矢势的波幅矢量 $\vec{A}_0$，就可以完全确定平面电磁波的场强：

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A} = -i\vec{k}\varphi + i\omega\vec{A} = -i\frac{c^2}{\omega}(\vec{k}\cdot\vec{A})\vec{k} + i\omega\vec{A} \end{aligned}$$

2. 与库仑规范情形不同，在 Lorenz 规范中，φ 和 $\vec{A}$ 并没有唯一地确定。从上面场强的表达式可知，Lorenz 规范中的势还允许存在如下剩余规范变换：

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \gamma\vec{k}$$

这里的 γ 是一个任意常数。剩余规范自由度的存在说明：平面电磁波的场强只依赖于矢势的横分量。

作业:

在 Lorenz 规范中，平面电磁波的电场强度矢量可进一步表达为:

$$\vec{E} = -\frac{ic^2}{\omega}\left[\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}) - k^2\vec{A}\right] = -\frac{ic^2}{\omega}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{A}) = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{B}$$

回忆,

$$\vec{B} = i\vec{k}\times\vec{A}$$

我们看到:

$$\vec{k}\cdot\vec{E} \propto \vec{k}\cdot(\vec{k}\times\vec{B}) = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{B} \propto \vec{k}\cdot(\vec{k}\times\vec{A}) = 0$$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} \propto (\vec{k}\times\vec{B})\cdot\vec{B} = 0$$

即平面电磁波的波矢 $\vec{k}$, 电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 是两两正交的，不依赖于规范的选择.

第十七次作业:

郭硕鸿著《电动力学》(第三版),
第 185-186 页,
第 1，2，4 题.

推迟势:

现在求无界空间中规范势 $(\varphi, \vec{A})$ 的一般解.
在 Lorenz 规范中，标势、矢势满足的场方程形式相同，故以下我们专注于标势的达朗贝尔方程

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$$

的求解.

定义无界空间中的含时 Green 函数 $G(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$:

$$\nabla^2 G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(t, \vec{x}; t', \vec{x}')}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(t - t')\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}')\Big|_{|\vec{x}-\vec{x}'|\to\infty} \to 0$$

此 Green 函数在物理上可解释为处于时空点 $(t', \vec{x}')$ 处的单位点电荷在另一时空点 $(t, \vec{x})$ 处激发的电磁标势. 上述方程具有空间坐标平移变换下的不变性. 所以,

$$G(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = G(t, t'; \vec{x} - \vec{x}')$$

推迟势 (二):

设 $\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$，其量值为 $r=|\vec{x}-\vec{x}'|$. 以 $\vec{x}'$ 点为坐标原点建立球坐标系. 注意到无界空间中点电荷的规范势分布具有球对称性，我们有:

$$G(t,t';\vec{x}-\vec{x}')=G(t,t';r)$$

所以，Green 函数满足的方程可简化为:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec{r})$$

在除却坐标原点之外的任何场点处，$\vec{r}\neq 0$，$G(t,t';r)$ 满足齐次波动方程:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=0$$

考虑到标势随源点、场点之间距离的增加而减弱，令:

$$G(t,t';r)=\frac{u(t,t';r)}{r}$$

推迟势 (三):

不难证明，在 $r \neq 0$ 的场点，$u(t, t'; r)$ 满足的方程在形式上可看做一维空间的波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

其通解为[3]:

$$u(t, t'; r) = f(t - r/c) + g(t + r/c)$$

这里的解函数 f, g (暂时) 是完全任意的. 因此，当 $r \neq 0$ 时，

$$G(t, t'; r) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

通解的第一项描写向外发散的球面波，第二项描写向内汇聚的球面波. 研究辐射问题时，电磁场是由原点处的电荷产生并向外发散的. 所以应取 $g = 0$,

$$G(t, t'; r) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

[3] 若电磁场由运动电荷激发，则解可以通过距离 $r = |\vec{x} - \vec{x}'(t')|$ 依赖于 t'. 切记!

推迟势 (四):

我们假设：若 f 采取某个特殊的函数形式，上述齐次波动方程的解

$$G(t,t';r)=\frac{f(t-r/c)}{r}$$

也是非齐次方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec{r})$$

的解. 为了验证满足上述要求的函数 f 的存在性和确定它的具体形式，现计算上述非齐次方程在以原点为球心、半径为 $R\to 0^+$ 的球面所包围的区域 V 中的体积分. 显然，

$$\begin{aligned}
-\delta(t-t')/\epsilon_0 \quad &= \int_V d^3x\left[-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(t-t')\delta^{(3)}(\vec{r})\right]\\
&= 4\pi\int_0^R r^2dr\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right]\\
&= 4\pi\int_0^R r^2dr\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\frac{f(t-r/c)}{r}
\end{aligned}$$

推迟势 (五):

$$= 4\pi \int_0^R r^2 dr \Big[f(t - r/c)\nabla^2 \frac{1}{r} - 2\nabla f(t-r/c) \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{r}\nabla^2 f(t-r/c) - \frac{1}{c^2 r}\frac{\partial^2 f(t-r/c)}{\partial t^2}\Big]$$

显然，除第一项外，其余各项的积分在 $R \to 0^+$ 极限下均趋于零。而第一项在 $R \to 0^+$ 下的积分计算如下：

$$4\pi \int_0^R r^2 dr f(t-r/c)\nabla^2 \frac{1}{r}\Big|_{R\to 0} = \int_V d^3x f(t)\nabla^2 \frac{1}{r} = f(t)\int_V d^3x\big[-4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})\big] = -4\pi f(t)$$

所以，

$$f(t) = \frac{\delta(t-t')}{4\pi\epsilon_0}, \qquad \rightsquigarrow \quad f(t-r/c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\delta\big(t-t'-r/c\big)$$

推迟势 (六):

于是，无界空间中的含时 Green 函数求得为:

$$G(t,t';r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\delta\left(t-t'-r/c\right)$$

1. 除过 $\delta(t-t'-r/c)$ 因子之外，此 Green 函数在形式上恰为单位点电荷的静电标势.
2. 对于 $r\neq 0$ 的场点而言，$\delta(t-t'-r/c)$ 因子取非零值的条件不是 $t'=t$，而是:

   $$t'=t-r/c<t$$

   这表明 t 时刻场点 $\vec{x}$ 处的规范标势是由较早时刻 t' 位于 $\vec{x}'$ 的单位点电荷激发的.
3. 上述含时 Green 函数称为无界空间中的推迟 (Retarded) Green 函数，可改记为 $G_R(t,t';r)$.
4. 推迟 Green 函数的发现表明电磁相互作用的传递需要一定的时间，不是超距作用.

推迟势（七）：

有了推迟 Green 函数 $G_R(t,t';r)$ 之后，任意电荷分布 $\rho(t,\vec{x})$ 在空间中所激发的规范标势可由下式计算：

$$
\begin{aligned}
\varphi(t,\vec{x}) &= \int d^3x' dt' G_R(t,t';r)\rho(t',\vec{x}') \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' dt' \frac{\rho(t',\vec{x}')}{r}\delta(t-t'-r/c) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x' \frac{\rho(t-r/c,\vec{x}')}{r}
\end{aligned}
$$

由于 Lorenz 规范中矢势与标势满足相同形式的波动方程，故有：

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x' \frac{\vec{J}(t-r/c,\vec{x}')}{r}$$

规范势的上述表达式称为 Lorenz 规范中的“推迟势”公式.

例题：

例： 验证上述推迟势公式满足 Lorenz 规范条件.

证： 设 $t' = t - r/c$，这里 $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. 如此可以将上述 Lorenz 规范中的推迟势公式写作：

$$\varphi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x' \, \frac{\rho(t', \vec{x}')}{r}, \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x' \, \frac{\vec{J}(t', \vec{x}')}{r}$$

切记此二式所涉及的被积函数的两个自变量，即 t' 和 $\vec{x}'$，并不是相互独立的.

检验 Lorenz 规范条件需要求矢势的散度 $\nabla \cdot \vec{A}$，为方便起见我们先求

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(t', \vec{x}')}{r}\right]$$

注意到对 $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ 的任意函数，均有等价关系 $\nabla = -\nabla'$，所以：

例 (二):

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right]=\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')+\frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')$$
$$=\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')+\frac{1}{r}\nabla t'\cdot\frac{\partial\vec{J}(t',\vec{x}')}{\partial t'}$$
$$=-\nabla'\frac{1}{r}\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')-\frac{1}{r}\nabla' t'\cdot\frac{\partial\vec{J}(t',\vec{x}')}{\partial t'}$$

另一方面，我们有:

$$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right]=\nabla'\frac{1}{r}\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')$$
$$=\nabla'\frac{1}{r}\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')+\frac{1}{r}\nabla' t'\cdot\frac{\partial\vec{J}(t',\vec{x}')}{\partial t'}+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')\Big|_{t'\text{不变}}$$

比较知:

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right]=-\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right]+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')\Big|_{t'\text{不变}}$$

于是，无界空间中推迟矢势的散度计算如下：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right] \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right] \\
&\qquad + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')\bigg|_{t'\text{不变}} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_\infty d\vec{\sigma}'\cdot\left[\frac{\vec{J}(t',\vec{x}')}{r}\right] \\
&\qquad + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')\bigg|_{t'\text{不变}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(t',\vec{x}')\bigg|_{t'\text{不变}}
\end{aligned}
$$

例（四）:

利用电荷守恒定律,

$$\nabla' \cdot \vec{J}(t', \vec{x}')\Big|_{t'\text{不变}} + \frac{\partial \rho(t', \vec{x}')}{\partial t'} = 0$$

并回忆 t' 的定义式：$t' = t - r/c$，可以进一步把上式改写为：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(t', \vec{x}')}{\partial t'} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \, \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(t', \vec{x}')}{\partial t} \\
&= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(t', \vec{x}')}{r} \right] \\
&= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(t, \vec{x})}{\partial t}
\end{aligned}$$

即:

$$\nabla \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(t, \vec{x})}{\partial t} = 0$$

这正是 Lorenz 规范条件.

思考题：

库仑规范中有无推迟势概念？

库仑规范中规范势满足的运动方程组为：

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0\,, \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}_T$$

在无界空间，其解可表为：

$$\varphi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x'\,\frac{\rho(t,\vec{x}')}{r}\,, \quad \vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{\vec{J}_T(t-r/c,\vec{x}')}{r}$$

这里 $r=|\vec{x}-\vec{x}'|$. 所以，尽管库仑规范中的标势具有超距传播的特点，矢势仍是推迟势.

第十八次作业：

郭硕鸿著《电动力学》(第三版)，第 185-186 页，第 3，5 题.