

第五章 光学系统的成像分析

5.1 成像系统概述

5.2 透镜的结构及变换作用

5.3 透镜的傅里叶变换性质

5.4 透镜的空间滤波特性

5.5 光学系统的一般模型

5.6 衍射受限系统成像的空域分析

光学成像系统可以看成是一种光学信息处理系统，采用频谱分析方法和线性系统理论全面研究光学系统成像的过程，已成为现代光学中的一种重要手段，并且是光学信息处理技术的重要理论基础。

前面提到，要在衍射屏后的自由空间观测夫琅禾费衍射，其条件是相当苛刻的。要想在近距离观测夫琅禾费衍射，就需借助会聚透镜来实现。在单色平面波垂直照射衍射屏的情况下，夫琅禾费衍射就是屏函数的傅里叶变换。对透射物体进行傅里叶运算的物理手段是实现它的夫琅禾费衍射。

透镜是光学成像系统和光学信息处理系统中最基本的元件。透镜的傅里叶变换特性是光学信息处理的基础。正是由于透镜具有傅里叶变换性质，才使傅里叶分析在信息光学中取得了有效的应用。

透镜之所以具有傅里叶变换性质，根本的原因是它能改变入射光波的相位相。

5.1 成像系统概述

从光学的角度来看，“物体”是能发射或反射电磁波的任何东西。或者说，在这个意义上，“物体”与“光源”是同义的。物体或光源可以“初级光源”(primary source)，这时物体是自身发光的。也可以是“次级光源”(secondary source)，这时物体被其他光源照明。

一个在空间是有限的“物体”可以看成是由很多发出球面波的点光源(空间上无限小的)组成。总波前的形状和性质是由构成整个有限物体的点光源发出所有球面波的构造性干涉(constructive interference)决定。

从几何光学的观点来看，需要考察的将是一点光源发出的球面波，一个物点可定义为发出光线的点。人眼或光学接收器可以收集这些光线中的一部分而“看到”一个物体，这就是所谓的“像”。也就是说，当发身某“物体”的光线收敛于另一个点时就形成一个“像”(image)。用波前来说，成像过程是一个球面波汇聚于某像点。在光线汇聚于像点之后，光线仍将按各自方向继续。

光线确实交汇于一点所形成的像称之为“实像”(real image)。光线并不交汇，但光线看起来都来自一个点形成的像称之为“虚像”(virtual image)。

如果离开物点的每条光线后来都汇聚于一个实像点，或看起来都发自一个虚像点，那么像是理想(ideal)或完美(perfect)。

光线偏离完美像点的量，称为“像差”(aberrations)。

实际上，实际的像只是大部分来自物点的光线在通过成像系统后交汇在像点附近。光的波动本质设置了成像过程的最终极限。如，形成实像时，光波应汇聚于一点。但实际的情况是，波前通过光学系统后不可能保持精确球面，一方面是由于波前在光学系统边缘由于衍射而偏折；另一方面是由于光学系统的质量的缺陷也会限制了光线交汇在像点的准确度。

常见的三种简单的成像系统是：反射镜、单个折射表面和薄透镜，来自物点的光线经过这样的系统发生偏折，从而成像。

用几何光学概念分析光学系统，这意味着把光波的波长假定的很小而可以忽略。当然，实际上光的波长总是有限，但只要一个光波的振幅和相位的所有变化在空间尺度远大于光的波长，几何光学的观点通常是正确的。但如果波的相位在可与一个波长相比的空间尺度上发生大小可与 2π 弧度相比的变化时，几何光学的预言就够精确了。

从波长光学的观点来定义光线，光线可定义为穿越空间的一条轨迹或路径，它从波前上任一特定点出发，和光波一道穿过空间运动，在轨迹上的每一点都永远保持与波前垂直。因此，一旦波前确定了，光线的轨迹也就可以确定了，光线画出了各向同性介质中功率的路径。

对光学系统的研究，除特殊情况外，通常都要再加一个限制条件：只研究轴对称系统。轴对称性意味着系统中所有球面的球心和开孔的圆心都位于同一条直线上。这条直线称为“光轴” (optical axis)。

如果画出几条被球面镜反射的光线就会看出，这些光线并不交汇在同一个像点上。不过，与平面折射面的情况类似，我们知道球面镜确实形成清晰的像。所以，需要再一次对光线进行某种限制。如果只研究与光轴成很小夹角、不会偏离光轴很远的光线，那么这些光线通过光学系统的路径将很贴近光轴。称这些光线为“近轴光线” (paraxial rays)或“傍轴光线”。只考虑近轴光线将确保来自一个物点的光线将最终交汇于同一像点。

光学系统中内有一些平面在概念上和实际应用中，都有着重要的作用。

(1) 共轭面。如果一个光学系统内的二个平面，其中一个平面上的光场分布是另一个平面上的光场分布的像(通常会有放大或缩小)，这二个平面就称为共轭面。类似地，如果一个点是另一个点的像，则这二个点为共轭点。

(2)焦面。一束沿光轴方向传播进入透镜的光线，不论是厚透镜还是薄透镜，对于傍轴光线，在光轴上存在一点，对正透镜光束将向此点会聚，对负透镜则是从此点发散的。以正透镜为例，原来的平行光束聚焦在透镜后面的一个点同，叫做透镜的后焦点或第二焦点。通过这一点垂直于光轴的平面叫做后焦面或第二焦面。当一束与光轴成任意角度进入透镜的傍轴平行光线将会聚焦于焦面上的一点，其位置取决于光束的初始倾角。类似地，对于正透镜前面光轴上的一个点光源。在透镜前面有一个特殊的点，如果将点光源放在这个点上，则它发出的发散光束就会以平行于光轴的平面的平行光束的形式向透镜后方射出，这个点叫做透镜的前焦点或第一焦点。通过前焦点并垂直于光轴的平面叫做透镜的前焦面或第一焦面。对于负透镜前焦点、前焦面和后焦点、后焦面的作用倒过来。这里的前焦点是一束原来平行于光轴的光，在透镜的出射方看，显得好像是从这一点发散射出。后焦点的定义为，如果一束入射的光束在通过透镜后变为一束平行或准直光束射出，则原来光束的会聚点就叫后焦点。

5.2 透镜的结构及变换作用

5.2.1 透镜的结构

5.2.2 透镜的成像

5.2.3 透镜的相位变换作用

5.2.4 薄透镜的厚度函数

5.2.5 薄透镜的相位变换及其物理意义

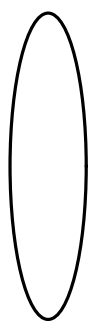
5.2.1 透镜的结构

透镜具有成像作用，成像作用相当于改变了波面的形状，即改变了波面的相位。由于透镜这种功能，透镜能把平行的或发散的光会聚或成像，这样，可利用透镜把发散的光聚焦在后焦面上，就可以观察衍射屏的夫琅禾费衍射了，这实际上意味着利用透镜实现了傅里叶变换，或者说透镜具有傅里叶变换的功能。透镜的这两项性质：成像和作为傅里叶变换器，使它成为光学成像系统以及光信息处理的最基本、最重要的元件。

最常见的透镜表面是球面的。在光学元件中，球面的应用极为广泛。球面的加工相对容易，让一片玻璃与另一片玻璃或某种工具进行无规则的摩擦就可以实现光学元件的抛光和磨削。两者之间放置磨料进行实际磨削，当两个表面以这种方式相互运动时，它们可能具有并始终保持触接的形状就是球面。平面可看成是球面的特殊情况，即曲率半径为无穷大的球面。这样，光学元件的自然形状是球面，向外弯曲的球面称为“凸”、向内弯曲的球面称为“凹”。只要球面的曲率半径相对大，球面就可以提供适当的成像质量。从解析的角度看，球面可以用很简单的数学进行处理。另外，球面是绝大多数其他光学表面(如非球面表面)很好的一级近似。

透镜是由透明物质制成的，通常是一块曲面玻璃，它的两个表面是凸(凹、平)形的曲面，这种曲面玻璃就称为透镜，曲面的半径用 R 。本书采用应用光学中的符号规定：光线由左到右时，曲率中心在顶点右方的球面的曲率半径 R 为正，曲率中心在顶点左方的 R 为负。焦距 f 为正的透镜称为正透镜，为负的透镜称为负透镜。

常见的透镜正透镜有双凸、平凸和正弯月形，负透镜双凹、平凹和负弯月形，如：



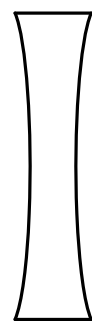
双凸



平凸



正弯月形



双凹

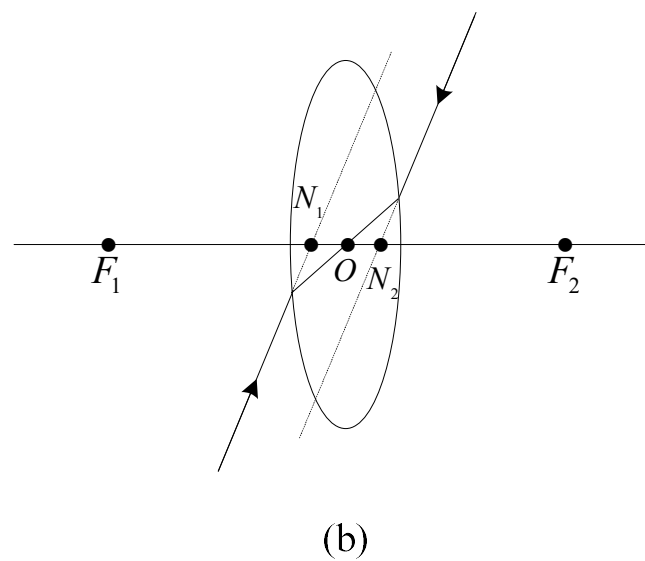
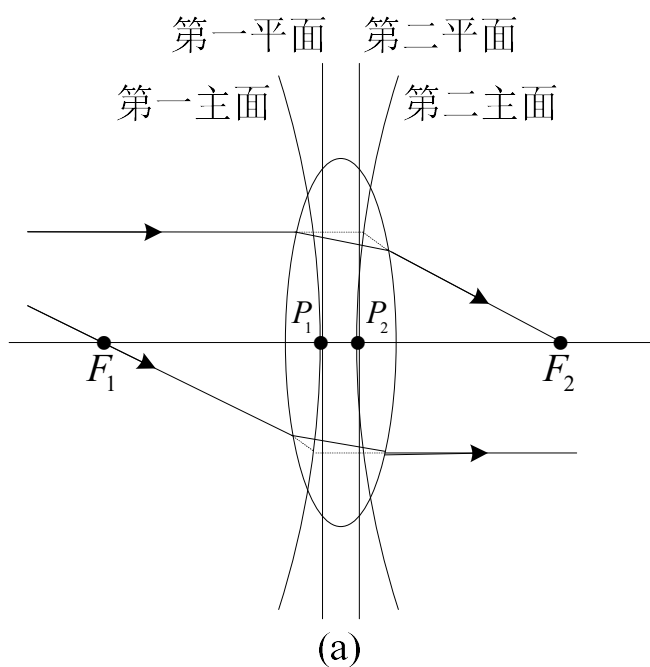


平凹



负弯月形

对于表面为球面的透镜，不同表面的球面可能半径不同，通过表面的曲率中心作一直线，这条直线就称为透镜的光轴。透镜的基点位于光轴上，共有6个。



从任一主点到相应焦点的距离，称为透镜的有效焦距 f 或简称焦距。当透镜置于真空或空气中时，其焦距为：

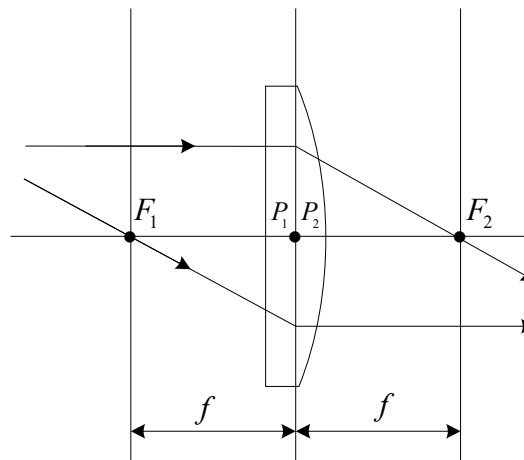
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{(n-1)w_0}{nR_1R_2} \right]$$



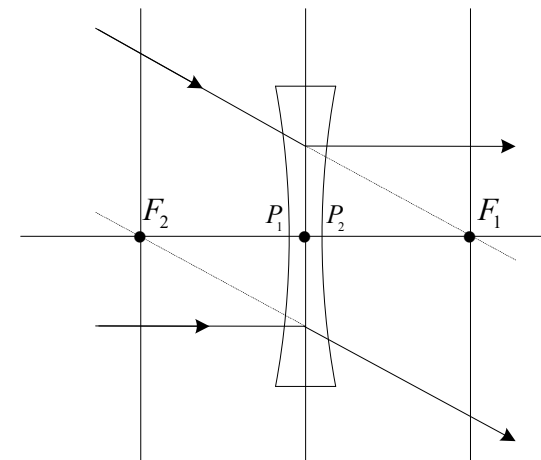
薄透镜， w_0 很小，且 $f_1 \cong f_2 \cong f$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

对于薄透镜，通常假定其两个主平面重合



(a)

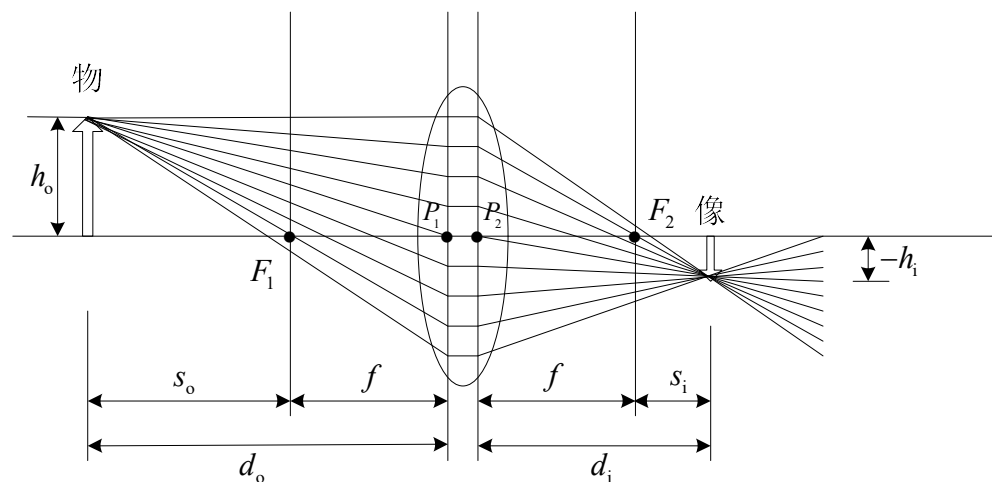


(b)

5.2.2 透镜的成像

下图示了单元双凸透镜的几何成像性质。

假定基点已知，透镜左边的箭头表示物体。物上的每一点都发射球面波，它们中的某些被透镜截割并聚焦在像平面上。像位置通过如下方式确定：一束发自物点并平行于光轴的光线，将从透镜出射并通过第二个焦点 F_2 ；一束通过第一焦点 F_1 的光线将由透镜出射并平行于光轴。如果两条这样的光线自物上的同一点发出，则它们在像空间的交点就决定了像平面的位置。可以证明，发自物上同一点的所有其他光线也将通过像平面上的这一点，于是，物上的每一点都被映射成像上的一点。



对正焦距，透镜定律表示如下，而满足这个表达式的物平面和像平面称为共轭平面，有：

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

像高与物高之比称为横向放大率为：

$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{-d_i}{d_o} = \frac{-f}{d_o - f} = \frac{f - d_i}{f} = \frac{-f}{s_o} = \frac{-s_i}{f}$$

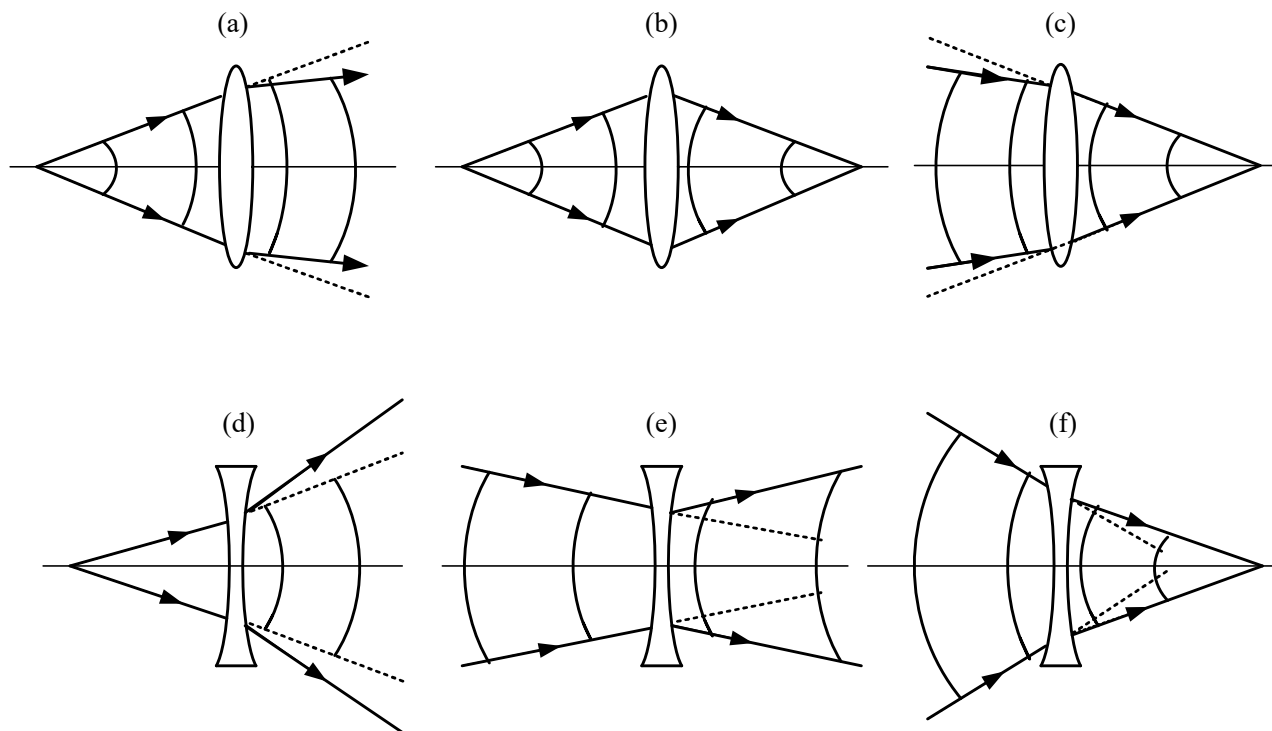
对负焦距有：

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{|f|}$$

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} = \frac{d_i + |f|}{|f|} = \frac{|f|}{d_o + |f|}$$

5.2.3 透镜的相位变换作用

正透镜使得发散球面波会聚或发散较慢，而使会聚球面波更快地会聚。而负透镜则发散球面波更快地发散，使会聚球面波发散或会聚的较慢。



正是由于透镜具有变换作用，所以无论是在传统的几何光学系统还是现代的光信息处理系统中，透镜都具有极为重要的广泛应用。

透镜的横向尺度是从光轴到透镜边缘、或到夹持透镜的镜框边缘的距离。根据透镜形状的不同，每个表面可以具有不同的横向尺度。此横向尺度D被称为表面的通光半径，用下标来标识通光半径与哪个表面相关。通光半径是从光轴算起，一条光线可以通过该表面的最大光线高度。透镜必须比镜框边缘大一点以便夹持。不过，透镜太大将浪费玻璃。所在，在实际情况中，透镜边缘半径与镜框半径差别很小。通常不作区分，统称为“透镜边缘”。

一个透镜的通光半径与该透镜的厚度是相关的。最大通光半径的绝对值等于该表面的曲率半径。在这种情况下，透镜是一个球体或半球体。不过，通常情况下，透镜要薄得多，通光半径也相应要小。

面波在通过透镜以后会成为一个发散或会聚球面波，这里透镜对光波波面起一个相位变换器的作用。由于透镜的折射率与周围介质的是不同的，光波通过介质时，就会产生相位延迟，也就是说透镜之所以具有对入射光波的相位变换功能是由它的几何结构及构成它的材料所具有折射率决定的。透镜能成像的原因是它能够改变光波的空间位相分布。透镜是由光密物质如玻璃构成的，玻璃的折射率约为1.5，因此光在其中的传播速度小于光在空气中的传播速度。

当各个光线入射点对应的透镜厚度不同时，所形成的相位延迟也不同。但如果一条光线在透镜的一面上从坐标为 (x, y) 的点射入，而在相对的另一面上从近似相同的坐标处射出，也就是说，光线经过透镜后的出射点和其相对应的入射点在垂直光轴方向上产生的位移可以忽略，即光线在透镜内传播的几何路程就是该点处的透镜的厚度。所以，如果可以忽略光在透镜内的偏移，则称此透镜是一个薄透镜。于是，一个薄透镜的作用只是使入射波前受到延迟，延迟的大小正比于透镜各点的厚度。

所谓薄透镜，是指透镜的最大厚度(透镜两表面在其主轴上的间距)和透镜表面的曲率半径相比可以忽略时的透镜。

5.2.4 薄透镜的厚度函数

透镜的横向尺度是从光轴到透镜边缘、或到夹持透镜的镜框(mount)边缘的距离。根据透镜形状的不同，每个表面可以具有不同的横向尺度。此横向尺度 D 被称为表面的通光半径(clear radius)，用下标来标识通光半径与哪个表面相关。通光半径是从光轴算起，一条光线可以通过该表面的最大光线高度。透镜必须比镜框边缘大一点以便夹持。不过，透镜太大将浪费玻璃。所在，在实际情况下，透镜边缘半径与镜框半径差别很小。通常不作区分，统称为“透镜边缘”(lens rim)。

一个透镜的通光半径与该透镜的厚度是相关的。最大通光半径的绝对值等于该表面的曲率半径 R 。在这种情况下，透镜是一个球体(sphere)或半球体(hemisphere)。不过，通常情况下，透镜要薄得多，通光半径也相应要小。

正透镜的厚度包括三个部分。两个表面分别在两边产生弧拱(sag)，另外必须有一定的边缘厚度。没有边缘厚度的透镜将形成锋利的边缘，不仅透镜不便使用和危险，还很容易崩裂(chip)。对于一个标准尺寸(25mm通光半径)，边缘厚度至少1mm。对很大的透镜，边缘厚度还要加大以保证透镜强度。通常决定透镜结构的参数有：球面曲率半径 R_1 和 R_2 ，中心厚度 w_0 ，以及材料的折射率。

下面以双凸透镜为例来推导出透镜的厚度函数。

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y)$$

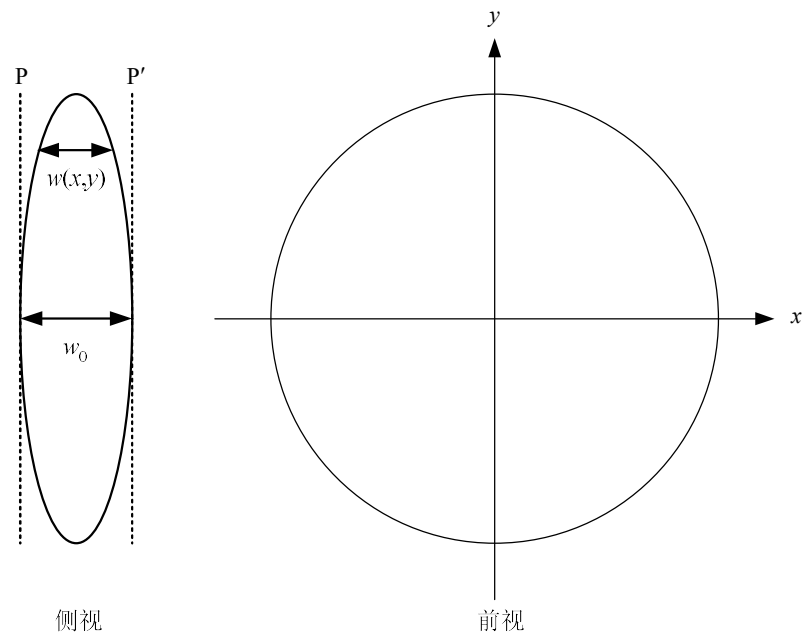
$$w_1(x, y) = w_{10} - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)} \right)$$

$$w_3(x, y) = w_{30} - \left(-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)} \right)$$

近轴
光线



$$\sqrt{x^2 + y^2} \ll R_1 \quad \sqrt{x^2 + y^2} \ll -R_2$$



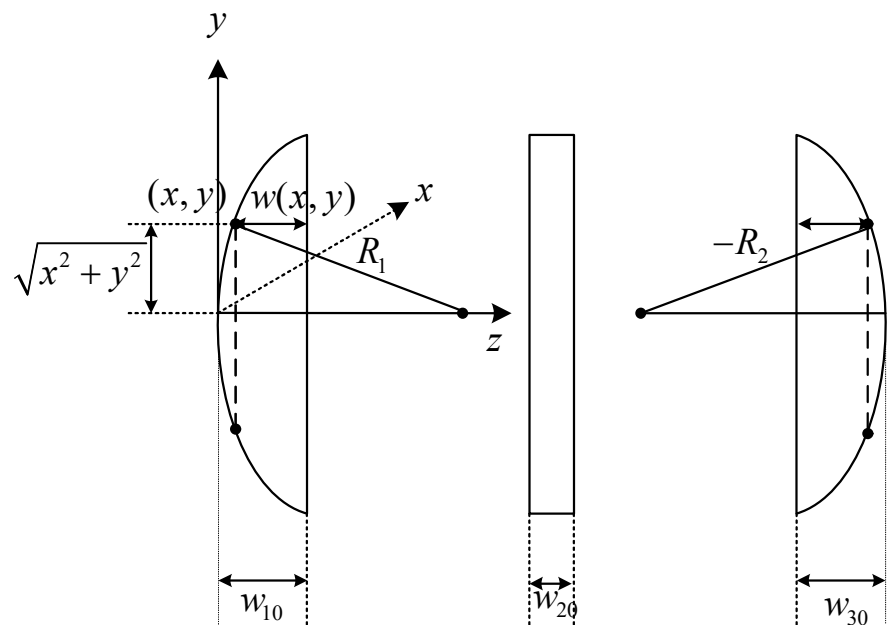
$$w_1(x, y) = w_{10} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right)$$

$$\approx w_{10} - \frac{x^2 + y^2}{2R_1}$$

$$w_3(x, y) = w_{30} - R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right)$$

$$\approx w_{30} + \frac{x^2 + y^2}{2R_2}$$

$$w_2(x, y) = w_{20}$$



$$w(x, y) = w_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$w_0 = w_{10} + w_{20} + w_{30}$$

式中所表示的透镜厚度函数实际是用旋转抛物面来近似表示透镜的球面。

5.2.5 薄透镜的相位变换及其物理意义

$$U'(x, y) = U(x, y)t(x, y)$$

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$$

$n_0 \approx 1$

$$\phi(x, y) = knw(x, y) + kn_0[w_0 - w(x, y)]$$

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)} = e^{ikw_0} e^{ik(n-1)w(x, y)}$$

$$t(x, y) = e^{iknw_0} e^{-ik(n-1)\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$t(x, y) = e^{iknw_0} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}$$

$f = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

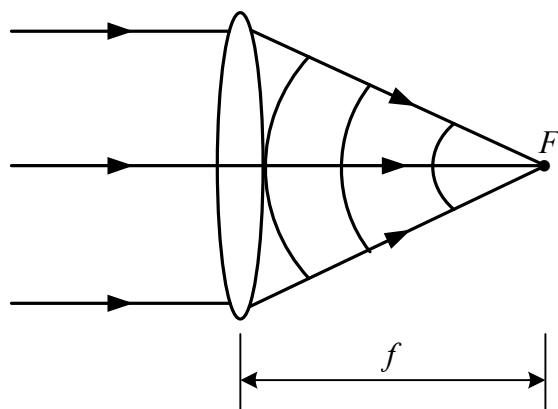
$$U'(x, y) = U(x, y)e^{iknw_0} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}} = e^{iknw_0} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}$$

$$t(x, y) = e^{iknw_0} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2f}}$$

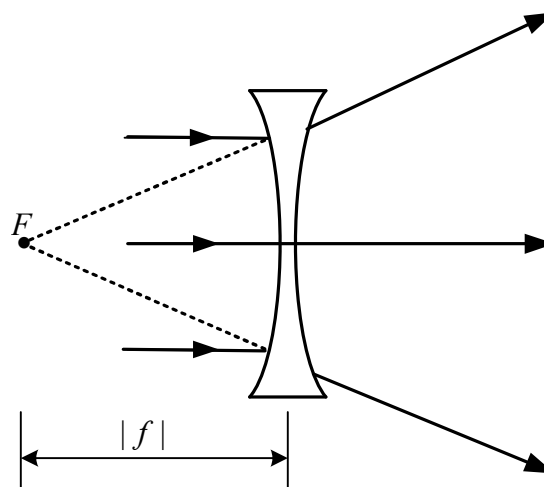
傍轴近似下，这是一个球面波的表达式。

透镜对于入射光波的常相位延迟，并不影响相位的空间相对分布。即它不会改变光波波面的形状，故常常可略去。

表示透镜的相位因子，这表明光波通过透镜时 (x, y) 点的相位延迟与该点到透镜中心的距离的平方成反比，而且与透镜的焦距密切相关。



正透镜



负透镜

5.3 透镜的傅里叶变换性质

5.3.1 透镜的一般变换特性

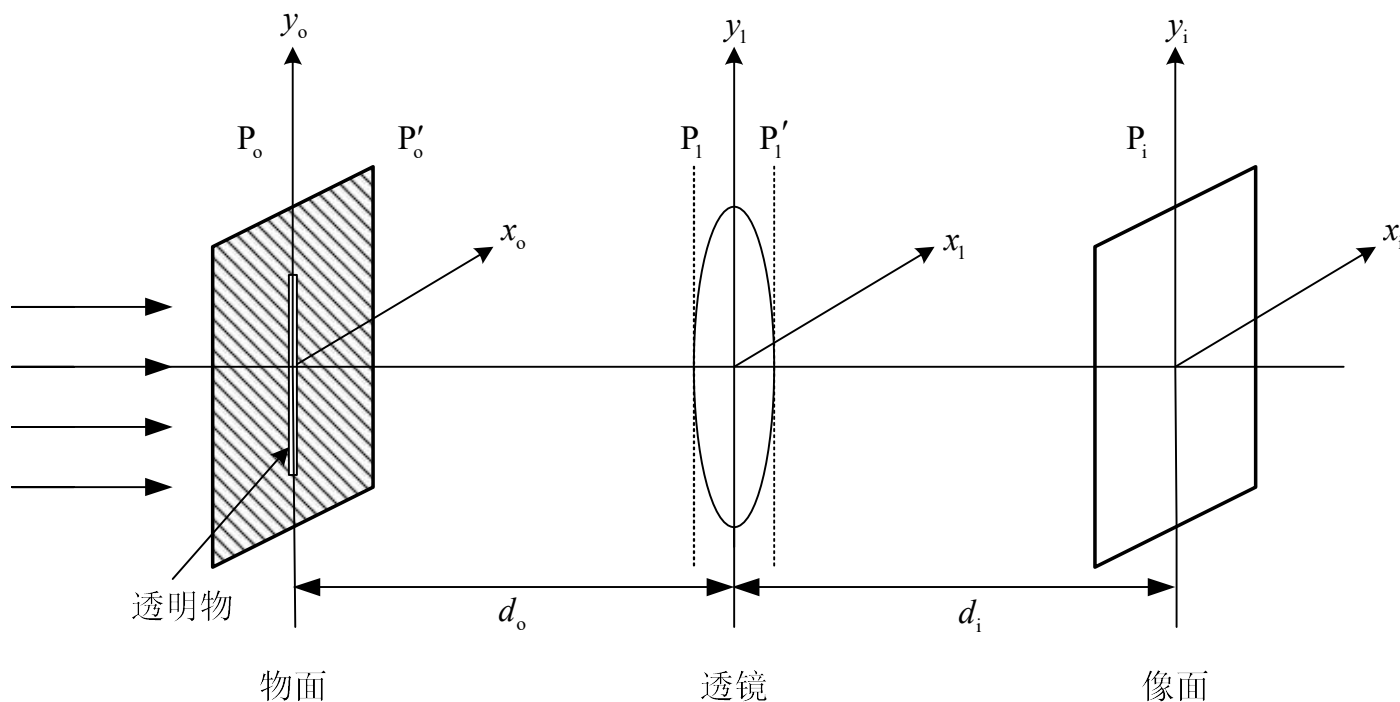
5.3.2 物在透镜之前

5.3.3 物在透镜后方

会聚透镜(正透镜)最突出和最有用的性质之一, 就是它具有进行二维傅里叶变换的本领。傅里叶变换运算一般要使用复杂而昂贵的电子学频谱分析仪才能完成。这种复杂的模拟运算可采用一个简单的光学装置 (如一个透镜) 来实现, 且运算速率非常快捷 (理论上为光速)。

单位振幅平面波垂直照射衍射屏的夫琅禾费衍射, 恰好是衍射屏透射函数的傅里叶变换 (除一相位因子外)。另外, 在会聚光照射下的菲涅耳衍射, 通过会聚中心的观测屏上的菲涅耳衍射场分布, 也是衍射屏透射函数傅里叶变换 (除一相位因子外)。这两种途径都能用透镜比较方便地实现。第一种情况可在透镜的后焦面 (无穷远照射光源的共轭面) 上观测夫琅禾费衍射, 第二种情况可在照射光源的共轭面上观测屏函数的夫琅禾费图样。下面分别就透明片 (物) 放在透镜之前和之后两种情况进行讨论。

5.3.1 透镜的一般变换特性



第一步：由光源发出的光照射到物所在的平面上，即衍射屏前表面 P_o ，在该平面的光场的复振幅为： $U_o(x_o, y_o)$

第二步：从衍射屏前表面到衍射屏后表面： $P_o \Rightarrow P'_o$

$$U'_o(x_o, y_o) = t(x_o, y_o)U_o(x_o, y_o)$$

第三步：从衍射屏后表面到透镜前表面： $P'_o \Rightarrow P_1$

为光的衍射过程，当符合菲涅耳近似条件时。

$$\begin{aligned} U_1(x_1, y_1) &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o)^2]} dx_o dy_o \\ &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_1^2+y_1^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} e^{-\frac{ik}{2d_o}(x_1x_o+y_1y_o)} dx_o dy_o. \end{aligned}$$

第四步：从透镜前表面到透镜的后表面

光经过透镜，可以通过引入透镜的复振幅透射率函数来得到透镜对入射波面的变换作用。

$$U'_1(x_1, y_1) = t_1(x_1, y_1)U_1(x_1, y_1) = e^{iknw_0} e^{-ik\frac{x_1^2+y_1^2}{2f}} U_1(x_1, y_1)$$

光瞳函数 (pupil function)

当考虑光瞳孔径时，则有：

$$U'_1(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1) e^{iknw_0} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)} P(x_1, y_1)$$

$$P(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 < r_0^2 & \text{透镜孔径内} \\ 0 & x_1^2 + y_1^2 > r_0^2 & \text{其它} \end{cases}$$

透镜圆形孔径的半径

第五步：从透镜后表面到观测面： $P'_1 \Rightarrow P_i$

这是最后一步，与第二步类似，也是光场在空间的衍射过程，类似第二步的处理。

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ikd_1}}{i\lambda d_1} e^{\frac{ik}{2d_1}(x_i^2 + y_i^2)} e^{iknw_0}$$

$$\cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} U_1(x_1, y_1) P(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2d_1}(x_1^2 + y_1^2)} e^{-\frac{ik}{2d_1}(x_1 x_i + y_1 y_i)} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)} dx_1 dy_1。$$

描述了物置于透镜前任一位置时，物光场布与衍射光场分布之间的一般关系。其中 d_i 不一定是像距，也不一定是焦距，只是透镜到观察面的距离。

如果不考虑透镜孔径对入射场的影响，就可忽略光瞳的影响，即取光瞳函数的光瞳内的区域为 $(-\infty, \infty)$ ，这里，在整个区域内都有： $P(x_1, y_1) = 1$ 。

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{e^{ik(d_i + d_o + nw_0)}}{-\lambda^2 d_o d_i}$$

$$\cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \left[\frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_1} + \left(\frac{1}{2d_o} - \frac{1}{2f} + \frac{1}{2d_i} \right) (x_1^2 + y_1^2) + \frac{x_o^2 + y_o^2}{2d_o} - \frac{x_1 x_o + y_1 y_o}{d_o} - \frac{x_1 x_i + y_1 y_i}{d_i} \right]} dx_1 dy_1 dx_o dy_o。$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\alpha^2} \mathrm{d}\alpha = \sqrt{\pi/a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

$$U_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(d_1+d_0+nw_0)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k(f-d_{\mathrm{o}})(x_{\mathrm{i}}^2+y_{\mathrm{i}}^2)}{2m}}}{-\lambda^2d_{\mathrm{o}}d_{\mathrm{i}}}$$

$$\cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} U'_{\mathrm{o}}(x_{\mathrm{o}},y_{\mathrm{o}}) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k(f-d_{\mathrm{i}})(x_{\mathrm{o}}^2+y_{\mathrm{o}}^2)}{2m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{f(x_{\mathrm{o}}x_{\mathrm{i}}+y_{\mathrm{o}}y_{\mathrm{i}})}{m}} \mathrm{d}x_{\mathrm{o}}\mathrm{d}y_{\mathrm{o}}$$

$$m=fd_{\mathrm{i}}-d_{\mathrm{o}}d_{\mathrm{i}}+d_{\mathrm{o}}f$$

$$\xi=\frac{f}{m\lambda}x_{\mathrm{i}}\qquad \eta=\frac{f}{m\lambda}y_{\mathrm{i}}$$

$$U_{\mathrm{i}}(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(d_{\mathrm{i}}+d_{\mathrm{o}}+nw_0)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m\lambda(f-d_{\mathrm{o}})(\xi^2+\eta^2)}{f^2}}}{-\lambda^2d_{\mathrm{o}}d_{\mathrm{i}}}$$

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} U'_{\mathrm{o}}(x_{\mathrm{o}},y_{\mathrm{o}}) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k(f-d_{\mathrm{i}})(x_{\mathrm{o}}^2+y_{\mathrm{o}}^2)}{2m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x_{\mathrm{o}}\xi+y_{\mathrm{o}}\eta)} \mathrm{d}x_{\mathrm{o}}\mathrm{d}y_{\mathrm{o}}$$

结果是两个函数傅里叶变换的卷积，即有：

$$U_i(\xi_i, \eta_i) = \frac{e^{ik(d_i + d_o + nw_0)}}{-\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{im\lambda(f-d_o)(\xi_i^2 + \eta_i^2)}{f^2}} F\{U'_o(x_o, y_o)\} * F\left\{e^{ik\frac{(f-d_i)(x_o^2 + y_o^2)}{2m}}\right\}$$

$$U_i(\xi, \eta) = \frac{e^{ik(d_i + d_o + nw_{\max})}}{-\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{im\lambda(f-d_o)(\xi^2 + \eta^2)}{f^2}}$$

$$\cdot F\{t(x_o, y_o)\} * F\{U_o(x_o, y_o)\} * F\left\{e^{ik\frac{(f-d_i)(x_o^2 + y_o^2)}{2m}}\right\}$$

$$= \frac{e^{ik(d_i + d_o + nw_{\max})}}{-\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{im\lambda(f-d_o)(\xi^2 + \eta^2)}{f^2}} T_o(\xi, \eta) * A_o(\xi, \eta) * E_o(\xi, \eta)。$$

$$\begin{array}{ccc}
 t(x_o, y_o), & U_o(x_o, y_o), & e^{ik \frac{(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}} \\
 \nearrow & \uparrow & \nearrow \\
 T_o(\xi, \eta), & A_o(\xi, \eta), & E_o(\xi, \eta)
 \end{array}$$

具体到不同情形时，表达式会所有不同，下面就输入面、输出面以及照射光处于几种特殊情况下输出面的光场分布进行讨论。

5.3.2 物在透镜之前

1. 轴上平行光照射

轴上平行光照射，就是轴上点光源位于透镜前无限远处，即平面波照射的情况，设平面波的振幅为常数 A_0 ，则物前平面的复振幅： $U_o(x_o, y_o) = A_0$ 其傅里叶变换为：

$$A_o(\xi, \eta) = F\{U_o(x_o, y_o)\} = F\{A_0\} = A_0\delta(\xi, \eta)$$

$$U_i(\xi, \eta) = A_0 \frac{e^{ik(d_i + d_o + nw_0)}}{-\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{i\pi m \lambda (f - d_o)(\xi_i^2 + \eta_i^2)}{f^2}} T_o(\xi, \eta) * E_o(\xi, \eta)$$

由上式，我们可以得到输入面和输出面位于几种特殊位置时的表达式。

(1) 输出面偏离透镜后焦面。输出面偏离透镜后焦面位于 d_i 处。

$$E(\xi_i, \eta_i) = F \left\{ e^{ik \frac{(f-d_i)(x_o^2+y_o^2)}{2m}} \right\} = i \frac{m\lambda}{f-d_i} e^{-i \frac{m\lambda(\xi^2+\eta^2)}{f-d_i}}$$

$$F\{e^{ia\alpha^2}\} = \sqrt{\pi/a} e^{-i\pi\xi^2/a^2}$$

代入式(5.3.17)，便可求得输出面的光场分布。

(2) 输出面位于透镜后焦面

$$d_i = f \quad \delta(\alpha) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{i\pi}} e^{ia^2\alpha^2}$$

$$E_o(\xi, \eta) = i \frac{m\lambda}{f-d_i} \delta(\xi, \eta)$$

代入式(5.3.17)，可得：

$$U_i(\xi, \eta) = iA_0 \frac{m e^{ik(d_i+d_o+nw_0)}}{-\lambda d_o d_i (f-d_i)} e^{\frac{i\pi m\lambda(f-d_o)(\xi^2+\eta^2)}{f^2}} T_o(\xi, \eta)$$

物体的透射系统与输出面位于透镜后焦面内的光场分布近似满足傅里叶变换，也称为准傅里叶变换。

(3) 输入面位于透镜前焦面且输出面位于透镜后焦面

$$d_o = f \quad d_i = f$$

$$U_i(\xi, \eta) = iA_0 \frac{me^{ik(2f+nd_0)}}{-\lambda f^2(f-d_i)} T_o(\xi, \eta)$$



与空间坐标无关

位于透镜前焦面上物的光场分布与其后焦面上的光场分布之间的关系为傅里叶变换关系。

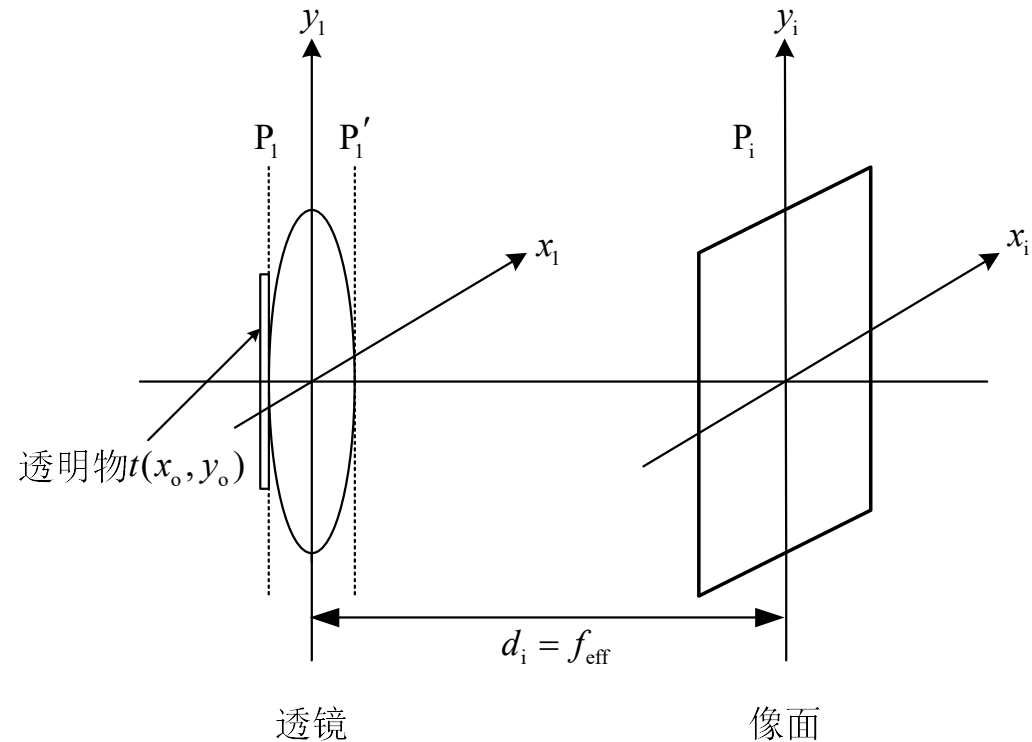
在这种情况下，衍射物体的复振幅分布存在准确的傅里叶变换关系，并且只要照射光源和观测平面满足共轭关系，与照射光源的具体位置无关。也就是说，不管照射光源位于何处，均不影响观察面上空间频率与位置坐标的关系。

(4) 输入面紧靠透镜而输出面位于后焦面

$$d_o = 0 \quad d_i = f$$

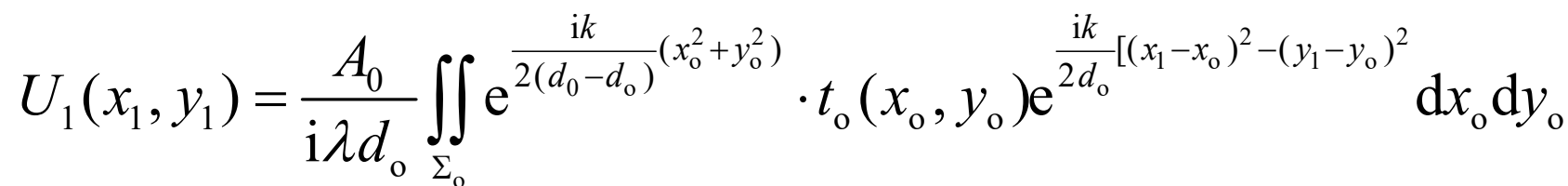
$$U_i(\xi_i, \eta_i) = c e^{i\pi f \lambda (\xi_i^2 + \eta_i^2)} T_o(\xi_i, \eta_i)$$

$$\xi = \frac{x_i}{\lambda q} \quad \eta = \frac{y_i}{\lambda d_i}$$



$$U_i(\xi, \eta) = A_0 \frac{e^{ik(d_i + n w_0)}}{i\lambda d_i} e^{i\pi f \lambda (\xi^2 + \eta^2)} T_o(\xi, \eta)$$

在这种情况下，衍射物体的复振幅透射率与观察面上的场分布不是准确的傅里叶变换关系，有一个二相位因子。

$$A_0 e^{\frac{ik}{2(d_0-d_o)}(x_o^2+y_o^2)} \downarrow A_0 e^{\frac{ik}{2(d_0-d_o)}(x_o^2+y_o^2)} \cdot t(x_o, y_o)$$

$$U_1'(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1)P(x_1, y_1)e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)}$$

光瞳函数

$$U_i(x_i, y_i) = -\frac{A_0}{\lambda^2 d_0 d_o} \iint_{\Sigma_o} \iint_{\Sigma_i} t(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2}(A_{x_i} + A_{y_i})} dx_o dy_o dx_i dy_i$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x_i} &= \frac{x_o^2}{d_0 - d_o} + \frac{(x_1 - x_o)^2}{d_o} - \frac{x_1^2}{f} + \frac{(x_i - x_1)^2}{d_i} \\ &= x_o^2 \left(\frac{1}{d_0 - d_o} + \frac{1}{d_o} \right) + x_1^2 \left(\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right) + \frac{x_i^2}{d_i} - \frac{2x_o x_1}{d_o} - \frac{2x_i x_1}{d_i} \\ &= \frac{fd_i x_o^2}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]} + \frac{x_1^2[d_i(f - d_o) + f_{\text{eff}}d_o]}{d_o fd_i} + \frac{x_i^2}{d_i} - \frac{2x_o x_1}{d_o} - \frac{2x_i x_1}{d_i} \\ &= \left\{ x_o \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]}} - x_1 \sqrt{\frac{d_i(f - d_o) + fd_o}{d_o fd_i}} + x_i \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f - d_o) + fd_o]}} \right\}^2 \\ &\quad + \frac{(f - d_o)x_i^2}{d_i(f - d_o) + fd_o} - \frac{2fx_o x_i}{d_i(f - d_o) + fd_o}, \end{aligned}$$

$$A_{y_i} = \left\{ y_o \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f-d_o)+fd_o]}} - y_i \sqrt{\frac{d_i(f-d_o)+fd_o}{d_o fd_i}} + y_i \sqrt{\frac{fd_i}{d_o[d_i(f-d_o)+fd_o]}} \right\}^2$$

$$+ \frac{(f-d_o)y_i^2}{d_i(f-d_o)+fd_o} - \frac{2fy_o y_i}{d_i(f-d_o)+fd_o}$$

在上面的化简中，应用了物像共轭关系的高斯公式： $1/d_o + 1/d_i = 1/f$

公式(5.3.26)要分别对物平面和光瞳平面积分，光瞳平面的积分为：

$$U_1 = \iint_{\Sigma_1} e^{\frac{ik}{2}(A_{x_i} + A_{y_i})} dx_1 dy_1$$

$$\alpha = d_i(f-d_o) + fd_o$$

光瞳平面的积分为：
$$U_P = \iint_{\Sigma_P} e^{\frac{ik}{2}(A_x + A_y)} dx_1 dy_1$$

做变量代换，令： $\alpha = q(f - d_0) + fd_0$

$$\bar{x} = x_0 \sqrt{\frac{fq}{d_0 \alpha}} - x_1 \sqrt{\frac{\alpha}{d_0 fq}} + x \sqrt{\frac{fd_0}{q\alpha}} \quad d\bar{x} = -\sqrt{\frac{\alpha}{d_0 fq}} dx_1$$

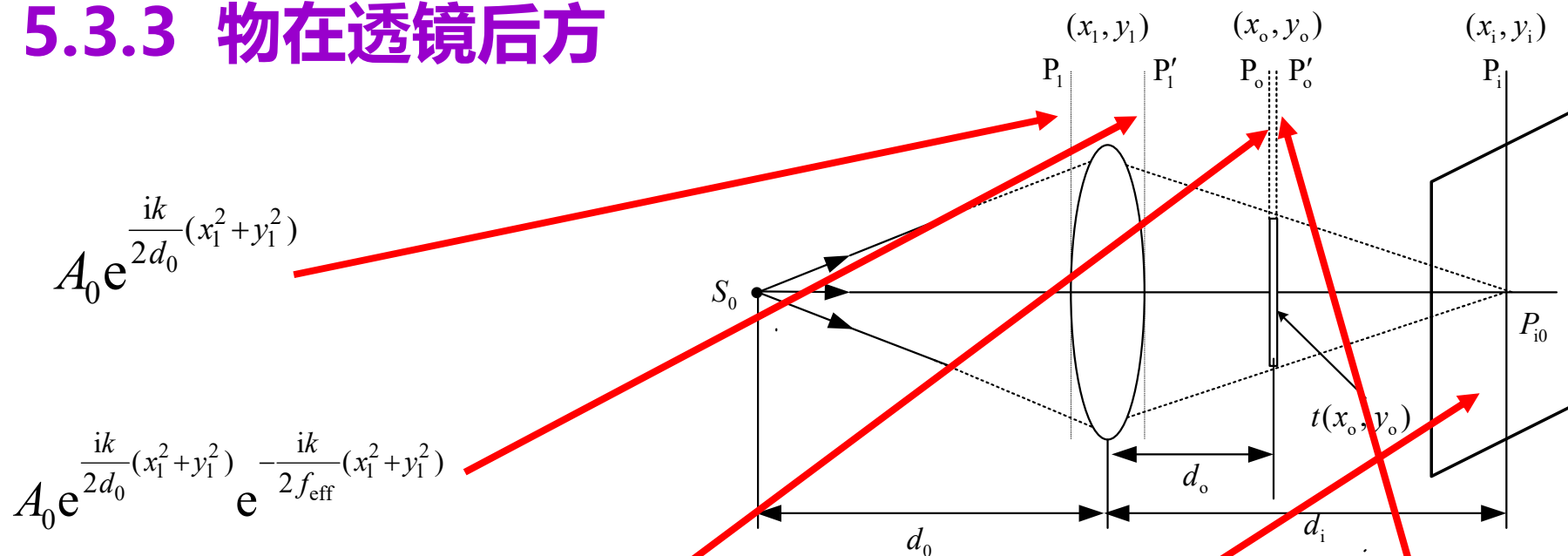
$$\bar{y} = y_0 \sqrt{\frac{fq}{d_0 \alpha}} - y_1 \sqrt{\frac{\alpha}{d_0 fq}} + y \sqrt{\frac{fd_0}{q\alpha}} \quad d\bar{y} = -\sqrt{\frac{\alpha}{d_0 fq}} dy_1$$

$$U_P = \frac{d_0 fq}{\alpha} e^{\frac{ik(f-d_0)}{2\alpha}(x^2+y^2)} e^{-\frac{ik}{\alpha}(x_0 x + y_0 y)} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} d\bar{x} d\bar{y}$$

$$U_P = \frac{i\lambda f q d_0}{\alpha} e^{\frac{ik(f-d_0)}{2\alpha}(x^2+y^2)} e^{-\frac{ik}{\alpha}(x_0 x + y_0 y)}$$

$$U(x, y) = c' e^{\frac{ik(f-d_0)(x^2+y^2)}{2[q(f-d_0)+fd_0]}} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) e^{-\frac{ikf(x_0 x + y_0 y)}{q(f-d_0)+fd_0}} dx_0 dy_0$$

5.3.3 物在透镜后方



$$A_0 e^{\frac{ik}{2d_0}(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$A_0 e^{\frac{ik}{2d_0}(x_1^2 + y_1^2)} e^{-\frac{ik}{2f_{\text{eff}}}(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$U_o(x_o, y_o) = \frac{A_0}{i\lambda d_o} \iint_{\Sigma_1} e^{\frac{ik}{2d_0}(x_1^2 + y_1^2)} e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2]} dx_1 dy_1$$

$$U'_o(x_o, y_o) = t_o(x_o, y_o) U_o(x_o, y_o)$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{1}{i\lambda(d_i - d_o)} \iint_{\Sigma_o} t_o(x_o, y_o) U_o(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2(d_i - d_o)}(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2} dx_o dy_o$$

$$U_i(x_i, y_i) = -\frac{A_0}{\lambda^2 d_o (d_i - d_o)} \iint_{\Sigma_i} \iint_{\Sigma_o} t(x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2}(A_{x_i} + A_{y_i})} dx_o dy_o$$

$$A_{x_i} = \frac{x_1^2}{d_o} - \frac{x_1^2}{f} + \frac{(x_o - x_1)^2}{d_o} + \frac{(x_i - x_o)^2}{d_i - d_o}$$

$$= x_1^2 \left(\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_o} - \frac{1}{f} \right) + x_o^2 \left(\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i - d_o} \right) + \frac{x_i^2}{d_i - d_o} - \frac{2x_o x_1}{d_o} - \frac{2x_o x_i}{d_i - d_o}$$

$$= x_1^2 \frac{d_i - d_o}{d_o d_i} + x_o^2 \frac{d_i}{d_o (d_i - d_o)} + \frac{x_i^2}{d_i - d_o} - \frac{2x_o x_1}{d_o} - \frac{2x_o x_i}{d_i - d_o}$$

$$= \left[x_1 \sqrt{\frac{d_i - d_o}{d_o d_i}} - x_o \sqrt{\frac{d_i}{d_o (d_i - d_o)}} \right]^2 + \frac{x_i^2}{d_i - d_o} - \frac{2x_o x_i}{d_i - d_o},$$

$$A_{y_i} = \left[y_1 \sqrt{\frac{d_i - d_o}{d_o d_i}} - y_o \sqrt{\frac{d_i}{d_o (d_i - d_o)}} \right]^2 + \frac{y_i^2}{d_i - d_o} - \frac{2y_o y_i}{d_i - d_o}$$

不管衍射物体位于何种位置，只要观测面是照射光源的共轭面，则物面(输入面)和观察面(输出面)之间的关系都是傅里叶变换关系，即观察面上的衍射场都是夫琅禾费型。

表 5.3.1 透镜变换光路

	输入面位置	光源位置	变换平面位置	二次相位因子	空间频率
傅里叶变换	前焦面 $d_o = f$	∞	后焦面	无	$\frac{x_i}{\lambda f}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f'}$	无	$\frac{x_i}{\lambda f}$
准傅里叶变换	紧靠透镜 $d_o = 0$	∞	后焦面	$\frac{k(f - d_o)(x_1^2 + y_1^2)}{2f^2}$	$\frac{x_i}{\lambda m f}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'_{\text{eff}}}{d_o - f'_{\text{eff}}}$	$\frac{k(f - d_o)(x_1^2 + y_1^2)}{2m}$	$\frac{x_i}{\lambda m f}$
	紧靠透镜 $d_o = 0$	∞	后焦面	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2f}$	$\frac{x_i}{\lambda f}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f'}$	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2d_i}$	$\frac{x_i}{\lambda d_i}$
	紧靠透镜 $d_o = 0$	∞	后焦面	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2(f - d_o)}$	$\frac{x_i}{\lambda(f - d_o)}$
		d_o	$d_i = \frac{d_o f'}{d_o - f'}$	$\frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2(d_i - d_o)}$	$\frac{x_i}{\lambda(d_i - d_o)}$

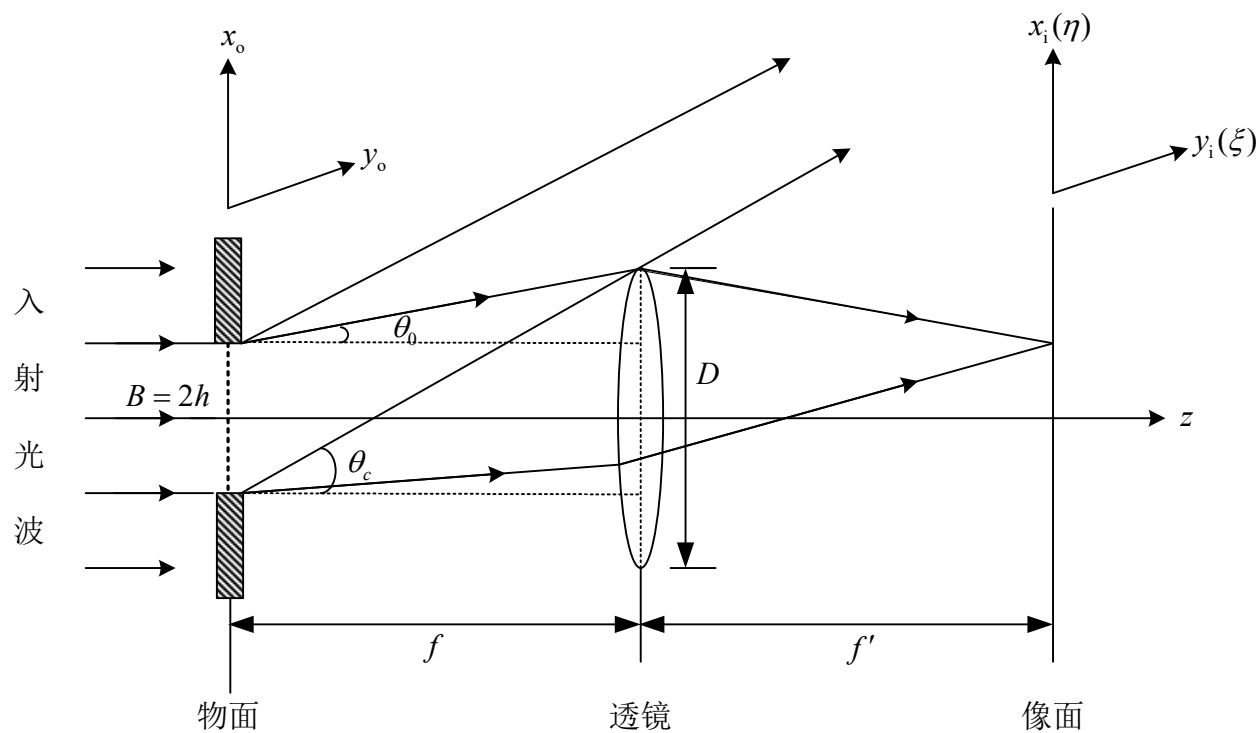
5.4 透镜的空间滤波特性

5.4.1 透镜的截止频率、空间带宽积和视场

5.4.2 透镜孔径引起的渐晕效应

5.4.1 透镜的截止频率、空间带宽积和视场

根据透镜前后两个焦面互为傅里叶变换关系的理论，为了获得严格的傅里叶变换，一般都会把处理面(输入面)置于透镜的前焦面，而频谱面(滤波面)置于相应的后焦面。



傅里叶透镜有限孔径会限制物面频率成分的传播。仅当某一方向上的平面波分量不受阻拦地通过傅里叶透镜时，在透镜的后焦面上相应会聚点测得的强度才准确代表物相应空间频率的模的平方。在小角度情况下，有：

$$\theta_0 = \frac{(D/2) - (B/2)}{f} = \frac{D - B}{2f}$$

因透镜是圆形孔径，在圆周方向上都有相应的最大空间频率，由空间频率的定义，有：

$$\xi_0 = \frac{\sin \theta_0}{\lambda} \approx \frac{\theta_0}{\lambda} = \frac{D - B}{2\lambda f}$$

上式就是所测得的强度准确代表了物的傅里叶谱的模的平方的最大空间频率表达式。即为截止频率的表达式。

当某一方向传播的平面波分量完全被透镜孔径阻拦时，在后焦面上没有该频率成分，测得的频谱强度为零。

$$\theta_c = \frac{(D/2) + (B/2)}{f} = \frac{D+B}{2f}$$

空间频率

$$\xi_c = \frac{\sin \theta_c}{\lambda} \approx \frac{\theta_c}{\lambda} = \frac{D+B}{2\lambda f}$$

透镜 L 的截止频率

由上分析可见，透镜除了可以改变光波的相位外，还可以对光波的空间频率进行滤波。由上述分析，要得到如下结论：

$$\xi_c \leq \frac{D-B}{2\lambda f} \quad \text{透镜后焦面上可以得到相应的空间频率成分} \quad \text{物体准确的傅里叶谱}$$

$$\frac{D-B}{2\lambda f} < \xi_c < \frac{D+B}{2\lambda f} \quad \text{透镜后焦面上可以得到的并非准确的傅里叶谱，各空间频率成分受到透镜孔径程度不同的阻拦}$$

$$\xi_c \geq \frac{D+B}{2\lambda f} \quad \text{虽然物可能有更高的空间频率成分，但因这些分量全部被透镜的有限孔径所阻拦，在焦面上完全得不到物的傅里叶谱中的这些高频成分。}$$

从公式可以看出，当傅里叶透镜的孔径增大时，可以减小这一效应的影响。

一个信息系统，无论是信息的记录和存储系统，还是信息的传输和处理系统，都存在一个信息容量问题。

$$N = \Delta\xi / \delta\xi \qquad \Delta\xi = 2\xi_c = \frac{D-B}{\lambda f}$$

信息容量 频带宽度 单频线宽



这里单频线宽是指由于主动的或被动的各种原因，系统记录或传输的总不可能是理想的单频信息，而是有一定线宽的准单频信息。如有限长度的准单色光、有限尺寸的正弦光栅等。对傅里叶透镜来说，它处理的是光学图像这类空间信息。

有限尺寸的正弦信息有一定的衍射发散角为：

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{B \cos \theta}$$

空间频率: $\sin \theta = \xi \lambda \longrightarrow \cos \theta \cdot d\theta = \lambda \cdot d\xi$

因此空域中的发散角对应频域中的单频线宽为: $d\xi = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\theta$

$$d\xi = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\theta = \frac{\cos \theta}{\lambda} \frac{\lambda}{B \cos \theta} = \frac{1}{B} = \delta\xi$$

可得到傅里叶变换透镜的信息容量为:

$$N = \frac{\Delta\xi}{\delta\xi} = \Delta\xi B = \frac{D-B}{\lambda f} B = SW$$

信息容量

空间带宽积


傅里叶变换透镜的视场:

$$\frac{\partial N}{\partial B} = \frac{D}{\lambda f} - \frac{2B}{\lambda f}$$

信息容量为最大: $\frac{\partial N}{\partial B} = 0$  $B = D / 2$

物的线度 B (也就是等处理的图片线度, 即视场)不宜过大, 也不宜过小, 取为透镜的一半时最佳, 这样有:

$$N_m = SW_m = \frac{f}{4\lambda} \left(\frac{D}{f} \right)^2$$

 $D / 2 = B = 2h$

$$SW = \frac{2}{\lambda} h \left(\frac{D / 2}{f} \right)$$

5.4.2 透镜孔径引起的渐晕效应

视场光阑将限制系统的视场(field of view)。如果物点离开光轴太远，那么视场光阑将挡住发自该物点的主光线。但是单靠主光线并不能控制视场的大小。即例主光线被挡住了，发自同一物点的其他光线也可能通过系统，从而视场比入射窗要大一些。只有当入射窗与物平面重合时，轴外物点发出的所有光线才能被完全挡住。这有一种更复杂的情况。当从一个轴外物外观察光学系统时，各光阑和透镜边缘好像不再同轴了。所以，除孔径光阑和视场光阑以外的其他光阑也可能挡住一些光线。一些光线被挡住、而另一些光线可以通过将产生一种现象，即像的亮度将随着离开光轴的距离增大而逐渐降低。这种现象称为“渐晕”(vignetting)，原指边缘逐渐淡出的相片。

渐晕是一种复杂的现象，但我们可以画出渐晕图以显示在光学系统中发生的事情。渐晕图的目的是要显示，当从物或像的位置观察时，系统中所有的透镜边缘和光阑的相对尺寸和位置。渐晕图将显示，哪些透镜边缘和光阑将限制通过系统的光线。

绘制渐晕图的第一步，是让所有的光阑和透镜边缘向物空间成像。使用像空间是一个样的。当各光阑和透镜边缘都在物空间成像之后，可把它们作为物进行等效处理。从一个物点发出、射向某个像的边缘的光线，可以确保它也一定实际经过相对应的物理光阑或透镜的边缘。当从某个轴外物点观察时，这些像将是各种尺寸的圆，但它们的圆心将偏离光轴不同的距离。从轴外物点向每个像的中心做直线，可以确定各个像的视在偏移量 (apparent displacements)。从轴外物点向每个像的边缘做直线，可确定它们的视在半径 (apparent radii)。将这些直线延长至入瞳，从而将所有的像都投影到同一个平面上。

穿过两个圆环进行观察，就可以体会到把像进行投影的重要性。把一个圆环放在眼前、另一个放在一臂远的距离。离得较远的圆环看起来要小一些，如果它是光阑或透镜边缘的话，它将挡住更多的发自眼点的光线。如果你从圆环连心线以外的地方观察，那么这两个圆环将不再同心。当你向上移动时，较远的圆环将向下移。当两个圆环有部分重叠时，一个圆环将挡住某些光线、而另一个圆环将挡住另外一些光线。这就是渐晕。

绘制渐晕图的第二步，是测量各个像的中心偏移和投影半径。最后一步，是用测量得到的值绘制渐晕图。由于光阑和透镜边缘之外的任何光线都将挡住，所以只有能从所有的像孔内通过的光线才能实际穿过系统。渐晕图上的无渐晕面积，是所有圆孔的交集。一般来说，一个光系统的焦距取决于系统所采用的材料。除些之外，系统的物方焦距长度、主平面位置以及其他大多数的一级性质都与折射有关。由于存在色散，任何材料的折射率都是波长的函数。但通常来说，光阑不随波长的变化发生改变，不过入瞳、出瞳、入射窗、出射窗等的大小和位置会随波长发生轻微的改变。

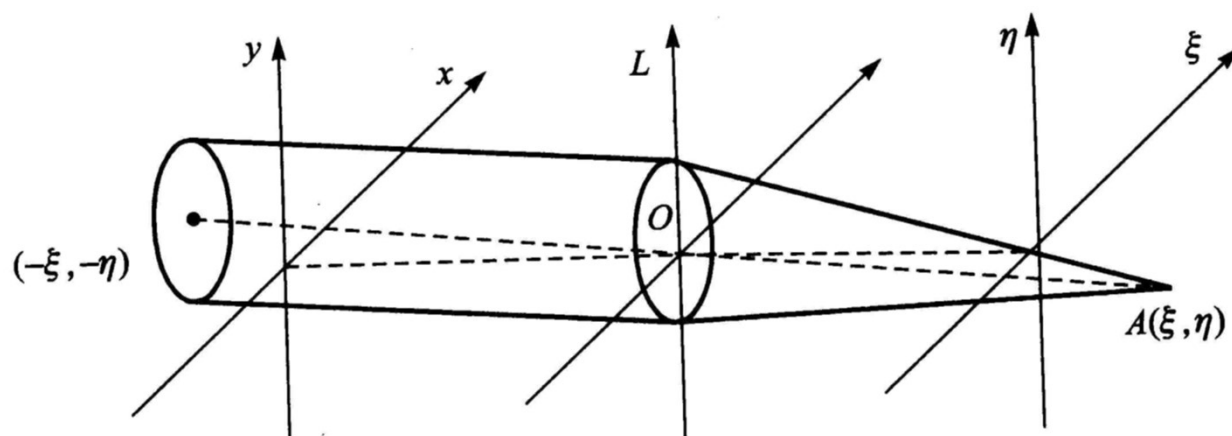
色散对成像质量产生的影响称为“色差” (chromatic aberration)。一个系统所产生的一级色差，可以通过追踪具有不同波长的光线来确定。由于近轴光线是线性的，任何一条近轴光线的色差都可以通过边缘轴上光线和全视场主光线产生的色差来确定。色差效应不是由于光线在介质中的传播引导起的，因为在均匀介质中所有的光线只会沿直线传播。色差是由于Snell定律中的折射角发生改变而引起的。

傅里叶透镜有限孔径对于物面频率成分传播的限制称为渐晕。

以上讨论透镜的傅里叶变换性质时，都没有考虑透镜孔径的影响。然而在许多实际情况中，透镜孔径的有限大小往往又不能忽视。透镜孔径除了限制入射光束从而影响出射光通量外，还会对形成傅里叶频谱产生影响，从而最终影响成像质量。

根据透镜前后两个焦面互为傅里叶变换关系的理论，为了得到严格的傅里叶变换，通常把被处理面(输入面、物面)置于透镜的前焦面，而频谱面(滤波面)置于相应的后焦面，如图5.4.1所示。由于透镜的孔径有限，它将限制物体的较高频率成分的传播，这种现象称为渐晕 (vignetting) 效应。显然，物体越靠近透镜或透镜孔径愈大，渐晕效应愈小。渐晕效应的存在，将使后焦面上得不到完全的物体频谱。从傅里叶光学的观点来看，傅里叶透镜的有限孔径对于物面空间频谱成分传播的限制就会产生渐晕效应。仅当某一方向的平面波分量不受拦阻地通过傅里叶透镜时，在透镜的后焦面上相应会聚点测得的强度才能准确代表相应空间频率的模的平方。

为了得到准确的傅里叶变换关系，输入物体必须放在傅里叶变换透镜的前焦平面上，因此，透镜的有限大小的孔径必然会限制物体衍射波中的高频成分，从而引起频谱波上的光分布偏离物体的傅里叶变换，这种现象称渐晕效应。渐晕的大小，除了与物体衍射波的空间频率有关，而且与透镜的相对孔径。



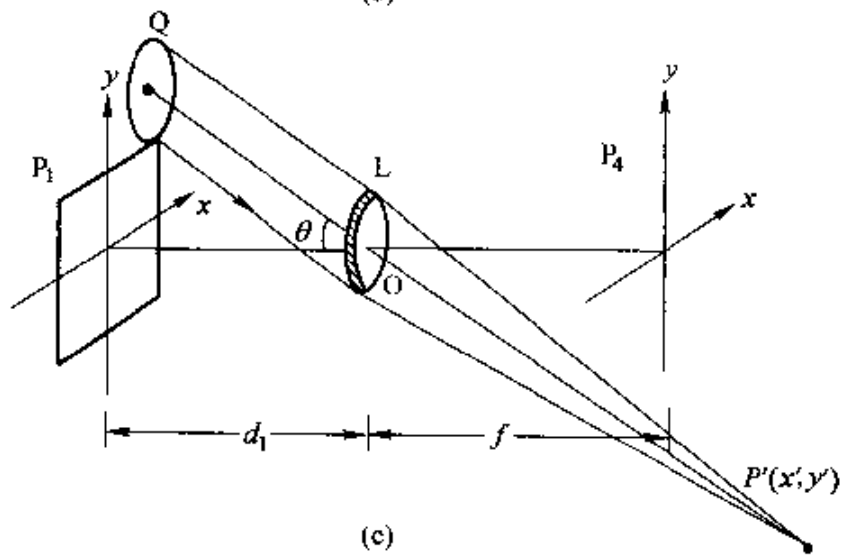
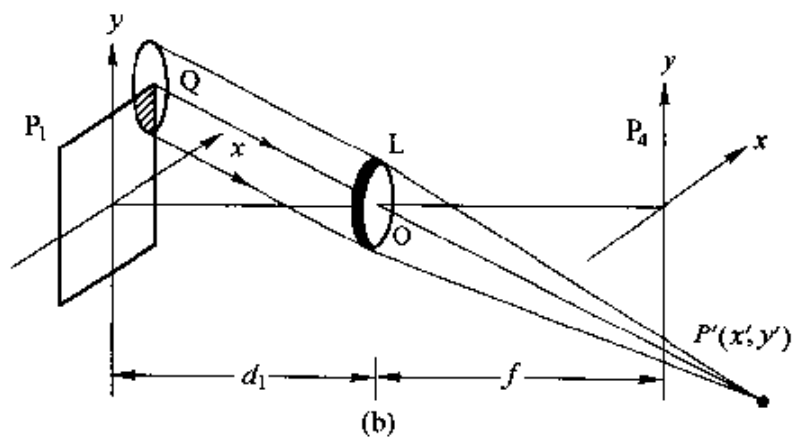
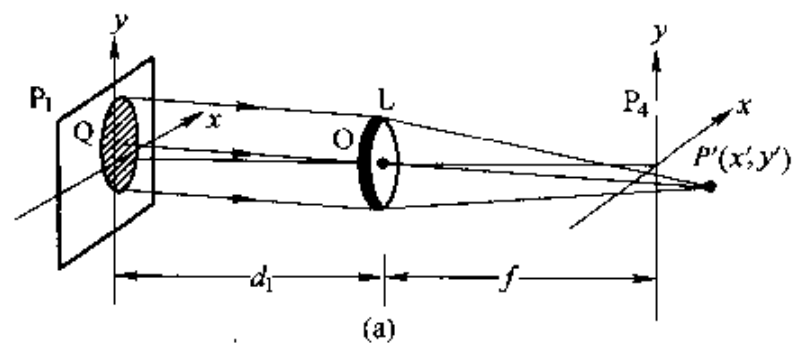
从几何光学的观点来看，渐晕就是一些光线被挡住、而另一些光线可以穿过系统而产生的一种现象，即像的亮度将随着离开光轴的距离增而逐渐降低，渐晕原就是指边缘逐渐淡出的相片。渐晕是一种复杂现象。这里，我们从傅里叶光学的角度会一个简单的讨论。

这里，光波从物到透镜之间的传播可看做直线传播，并忽略透镜的孔径衍射。这样的条件在实用中的绝大多数问题都能得到满足。于是有：

$$U(x_i, y_i) = c' e^{\frac{ik(f-d_o)(x_i^2+y_i^2)}{2f^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_o, y_o) P\left(x_o + \frac{d_o}{f} x_i, y_o + \frac{d_o}{f} y_i\right) e^{-\frac{ikf(x_o x_i + y_o y_i)}{f}} dx_o dy_o$$

在某些只对功率谱感兴趣的应用中，往往喜欢将输入物体放置在尽量靠近傅里叶变换透镜平面上，可以最大限度减小渐晕效应的影响。

以上，我们讨论的关于透镜变换性质，都是在几何光学近轴近似条件下进行的。对于非近轴情况下的傅里叶变换，必然专门设计傅里叶变换透镜才能获得比较理想的傅里叶频谱，即使消除了像差的理想成像系统，仍不能实现理想的傅里叶变换。



5.5 光学系统的一般模型

5.5.1 孔径光阑和视场光阑

5.5.2 入射光瞳和出射光瞳

5.5.3 入射窗和出射窗

5.5.4 黑箱模型

实际光学系统与理想光学系统不同，其参与成像的光束宽度和成像范围都是有限的，其限制来自于光学零件的尺寸大小。从光学设计的角度看，如何合理地选择成像光束是必须分析的问题。光学系统不同，对参与成像的光束位置和宽度要求也不同。这一节，我们从成像的空域来分析光系统的一般模型。

5.5.1 孔径光阑和视场光阑

除透镜边缘之外，光线也可能被一些特别设计的、被称为“光阑”的平面挡住。通常，在光学系统中用一些中心开孔的薄金属片来合理地限制成像光束的宽度、位置和成像范围，这些限制成像光束的成像范围的中间开孔的金属薄片就是光阑。

如果光学系统中安放光阑的位置与光学元件的某一面重合，则光学元件的边框就是光阑。光阑对光线的传播不产生任何影响。但开孔尺寸决定了哪些光线可以通过，而哪些光线不能。如果光阑外光线高度的值大于光阑的半径，那么光线将被挡住。既然光阑对系统的焦强完全没有贡献，为什么还要在光学系统中设置光阑呢？这是因为，光阑可用来控制哪些光可以通过系统。例如，通过调整光阑的大小和在光学系统中的位置，可以一定程度上控制像差。

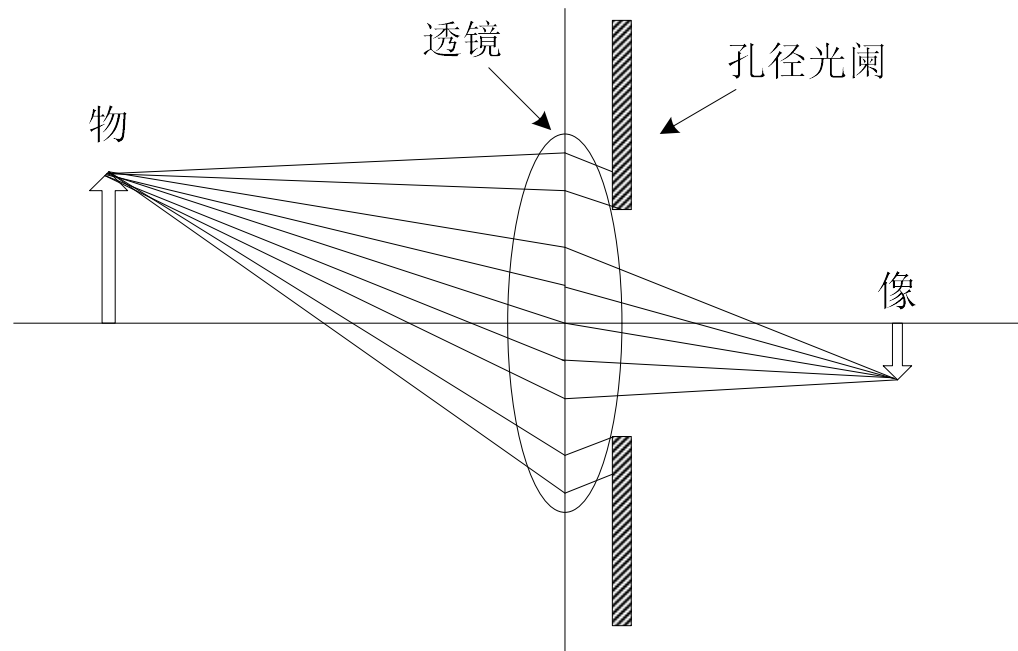
光阑主要有两类：孔径光阑和视场光阑。

如果通过系统的光线均来自光轴上的某点，那么，对于轴对称系统，一个透镜边缘或光阑将负责挡住最多的光线通过系统。这个光阑或透镜边缘被称为“**孔径光阑**”。

从一个复杂的光学系统中的光轴上某点向系统里望，可以看到系统的孔径光阑。可能会看到几个圈，它们是系统中的透镜边缘或光阑孔边的像。这些圈中最小的那个就是孔径光阑。看不到孔径光阑后面的透镜边缘或光阑孔边。要特别注意的是：孔径光阑可能不是限制发自轴外物点的光线的透镜边缘或光阑。另外，孔径光阑的确定将针对某个特定的物点，不同的物点可能具有不同的孔径光阑。

孔径光阑还决定了发自物体的光线中有多少能够实际通过系统参与成像。刚好可以通过的光线的倾角越大，发自物点并能通过系统的光线就越多。可以使用较小的孔径光阑来限制光线的倾角，以使的近轴近似更好地得到满足。这样可以提高成像质量。

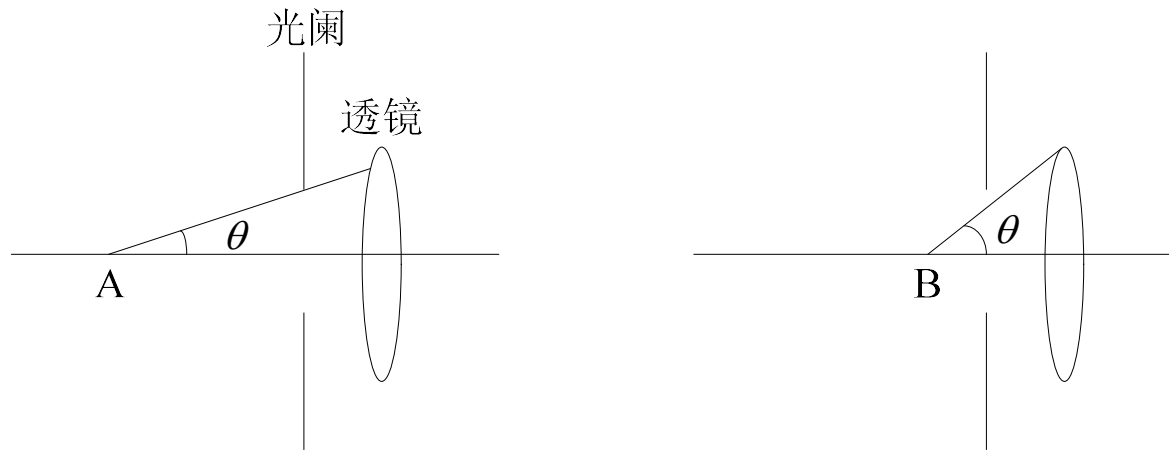
孔径光阑它实际上限制着系统所接收的光锥的角域，它控制着到达像面总辐射通量。它可以直接就是系统中某一透镜的边缘，或者是为了所述目的而特意加入的一个开有孔的不透明屏。如在照相机中，可变光圈的作用主是一个具有可变直径的孔径光阑。孔径光阑的作用如下图所示。



有几种方法可以找一个系统的孔径光阑。一个方法是追踪一系列发自物点、倾角逐渐增大的光线。最终光线倾角将大到该光线被系统中的某个表面所挡住，这个表面就是孔径光阑。具有略微小一点点的倾角、刚好通过系统的光线，叫做“边缘光线”。这种方法虽然可以清晰地显示了孔径光阑的物理意义，但它需要太大的计算量。另外，光线倾角的增幅必须很小，否则就有可能越过具有最小倾角的表面、错误地将另一个具有较大倾角表面当成孔径光阑，这不是一个很好的方法。另一个方法是任意追踪一条发自轴上物点的光线，这条光线就是用来确定成像位置的那条光线，由于所有的光线追踪方程都是线性的，这条光线的倾角和光线高度可以比例缩放，这是个较好的方法。

关于孔径光阑需要注意的几个问题。

(1) 在具体的光学系统中，如果物平面位置有了变动，我们需要仔细分析究竟谁是真正起限制轴上物点光束宽度作用的孔径光阑？如，在下图中所示的系统中，当物平面位于A处时，限制轴上物点光束最大孔径角的图示的孔径光阑，而当物平面位置不在A处而在B处时，原先的“孔径光阑”开同虚设，真正起限制轴上物点孔径角大小作用的是透镜的边框，这时透镜的边框是系统的孔径光阑。

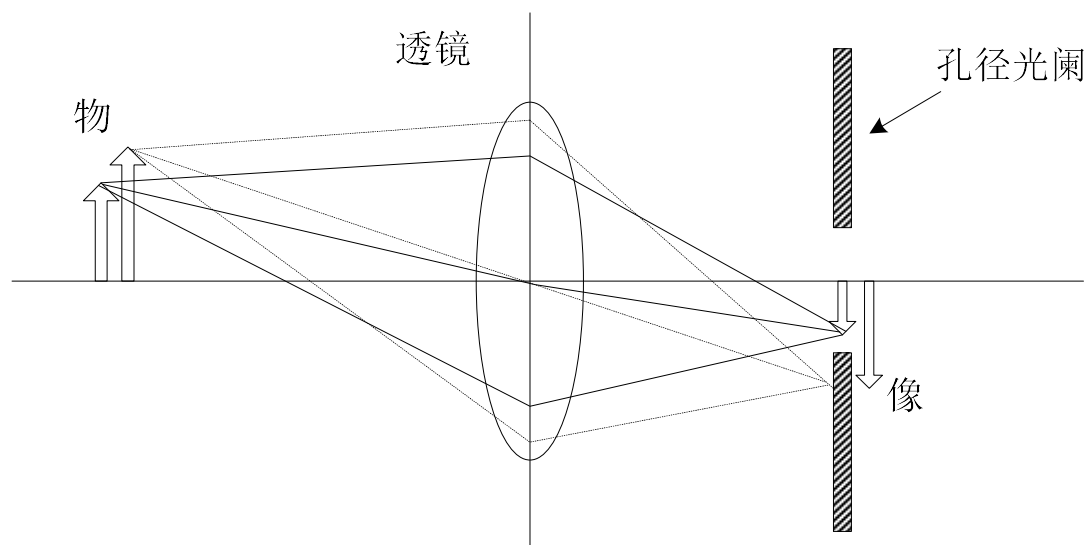


(2) 如果几块口径一定的透镜组合在一起形成一个镜头，对于确定的轴上物点位置，要找出究竟哪个透镜的边框是孔径光阑。有两种常用的方法：一是从轴上物点追迹一条近轴光线。求出光线在每个折射面上的投影高度，然后将得到的投射高度，然后将得到的投射高度与相应折射面的实际口径去比，比值最大的那个折射面的边框就是这个镜头的孔径光阑。二是将一块透镜经它前面的所有透镜成像并求出像的大小，在这些像中，对给定的轴上物点所张的角最小者，其相应的透镜边框为这个镜头的孔径光阑。

(3) 孔径光阑位置的安放原则在不同的光学系统是不同的。在目视系统中，系统的出射光瞳必须在目镜外的一定位置，便于人眼瞳孔与其衔接；在投影度量光学系统中，为使投影像的倍率不因物距变化而变化，要求系统的出射光瞳或入射光瞳位于无限远处；当仪器不对光阑位置提出要求时，光学设计者所确定的光阑位置应是轴外光束像差校完善的位置，也就是把光阑位置的选择作为校正像差的一个手段；在遵循了上述原则后，光阑位置若还有余地，则应考虑如何合理地匹配光学系统各元件的口径。

在实际的光学系统中，不仅物面上每一点发出并进入系统参与成像的光束宽度是有限的，而且能够清晰成像的物面大小也是有限的。把能清晰成像的这个物面范围称为光学系统的视场，相应的像面范围称为像方视场。事实上，这个清晰成像的范围也是由光学设计者根据仪器性能要求主动限定的，限定的办法通常是在物面上或在像面上安放一个中间开孔的光阑。光阑孔的大小就限定了物面或像面的大小，限定光学系统的成像范围。这个限定成像范围的光阑称为视场光阑。

主光线在孔径光阑处具有太大的倾角，它就可能无法通过系统，限制主光线最大倾角的光阑或透镜边缘，就是**视场光阑**。孔径光阑确定之后，通过正向和反向追踪一条任意的通过系统的主光线，就可以确定视场光阑。如照相机中那样，胶片实际上起着视场光阑的作用。视场光阑的作用如下图所示。



根据孔径光阑和视场光阑的定义，这两个光阑绝对不会位于同一个平面上的，它们相互补充的，对对像的质量和亮度都起着非常重要的作用。就像孔径光阑可以深埋在系统中一样，视场光阑也可能深埋在系统内。同时，与确定入瞳和出瞳一样，我们也可以找出视场光阑在像空间和物空间中的像。视场光阑的像将有助于确定经过系统后、在像空间可以看到多大的物空间。

5.5.2 入射光瞳和出射光瞳

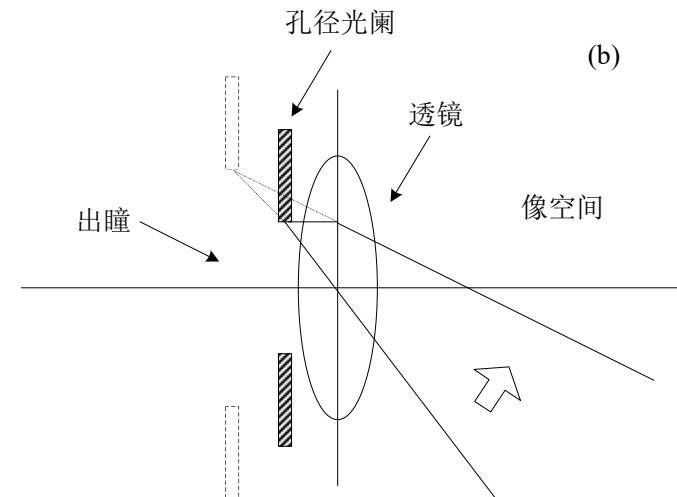
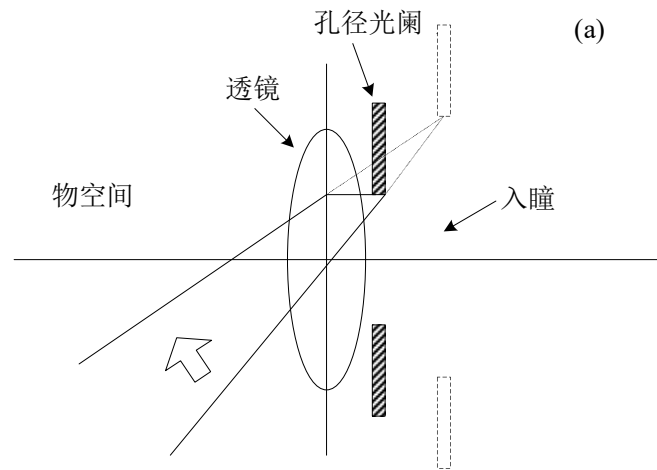
孔径光阑一般都深深地“埋”在光学系统里。如果希望两个光学系统高效率地一起使用，即使孔径光阑的位置不方便，也要“光学地”匹配两个系统的孔径光阑。如人眼观察使用的望远镜或其他仪器。在这种情况下，眼球的瞳孔是眼球的孔径光阑。如果瞳孔与仪器的孔径光阑在光学配合不好，那么，要么仪器收集太多的光线、而又把光线浪费在眼球上，要么仪器收集的光线不够。在前一种情况中，成像质量将被不必要地降低，而在后一种情况中，像的亮度可能不够。

匹配孔径的问题可以解决，因为一个物体和它所产生的像在光学是上等效的。如果光学系统的一部分把孔径光阑作为物，那么孔径光阑的像就有可能被利用了。

投射到像空间的孔径光阑的像，称为“出射光瞳” (exit pupil)，简称“出瞳”。

孔径光阑在物空间中的像，称为“入射光瞳” (entrance pupil)，简称“入瞳”。

由于入瞳是从物空间看来是由孔径光阑前面的全部光学元件所形成的孔径光阑的像，这通常是一个虚像，如下图(a)所示。因此，是确定系统所接收光锥角域的一个“表观”限制元件。



出瞳是从像空间向回看所见到的由其后面的全部光学元件对孔径光阑所形成的像，如上图(b)所示。系统像差及其分辨本领都往往与出瞳有关。理论上，对于一个点物，由出瞳投射一个球面波并会聚到(或发散自)一个理解像点。

孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳三者是物像关系。

5.5.3 入射窗和出射窗

视场光阑经它前面的光学系统所成的像，即视场光阑在像空间中的像，称为“**入射窗**” (entrance window)。视场光阑被其后面的光学系统所成的像，即视场光阑在物空间中的像，称为“**出射窗**” (exit window)。由于像在光学上等效于物，如果入射窗位于物平面上的话，即视场光阑安放在像面上，入射窗就和物平面重合，那么视场光阑将锐利地裁剪出系统的视场，那么出射窗必定位于像平面，入射窗就是视场光阑本身，即出射窗与像平面重合。因此，入射窗、视场光阑和出射窗三者互为物像关系。

由于孔径光阑和视场光阑不可能位于同一平面，所以视窗 (windows) 也不可能与光瞳 (pupils) 重合。有些系统中，如果在像面处无法安放视场光阑，在物面处安放视场光阑又不现实，成像范围的分析就会复杂的多。

5.5.4 黑箱模型

对衍射受限光学系统成像规律的研究可以追溯到1873年阿贝 (Ernst Abbe) 或1896瑞利 (Lord Rayleigh) 提出的理论。阿贝认为，光波通过光学系统的衍射效应是由有限大小的入射光瞳引起的，阿贝在研究显微镜相干成像时首先提出来的，他认为一个物体所产生的衍射分量只有一部分为有限的入射光瞳所截取，未被截取的分量正是物振幅分布中高频分量部分，因而像的分辨率会下降。从像空间看过去，瑞利认为，衍射效应来自于有限大小的出射光瞳。然而，由于入射光瞳与出射光瞳对整个光学系统来说是共轭的，它们都是实际对光线起限制作用的孔径光阑的像，出射光瞳不过是入射光瞳的不过是入射光瞳的几何光学像。所以，这两种看法是完全等价的。

所谓**衍射受限系统**，是指不考虑系统的几何像差，仅仅考虑系统的衍射限制。大多数光学系统，通常不会只有单个透镜，而是由若干个透镜(正透镜或负透镜)和其他光学元件(如棱镜、光阑等)组合成的复合系统。而且，透镜也不一定是薄的。因此，在考察光学系统对成像的影响时，必然在若干个可能对光束起限制作用的通光孔径中，找到对光束起实际限制作用的那个孔径，该孔径可能是某一透镜边框，也可能是光路中某一个特定光阑。

由于，入射光瞳、孔径光阑和出射光瞳三者相互共轭。当轴的物点确定后，孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳由系统元件参数及相对位置决定。由入射光瞳限制的物方光束必定能全部通过系统，成为被出射光瞳所限制的像方光束。

一个成像系统的外部性质可以由入射光瞳或出射光瞳来描述。因此，不管成像系统的详细结构如何，都可以将它归结为下列普遍模型：光波由物平面变换到像平面，可以分为3个过程：

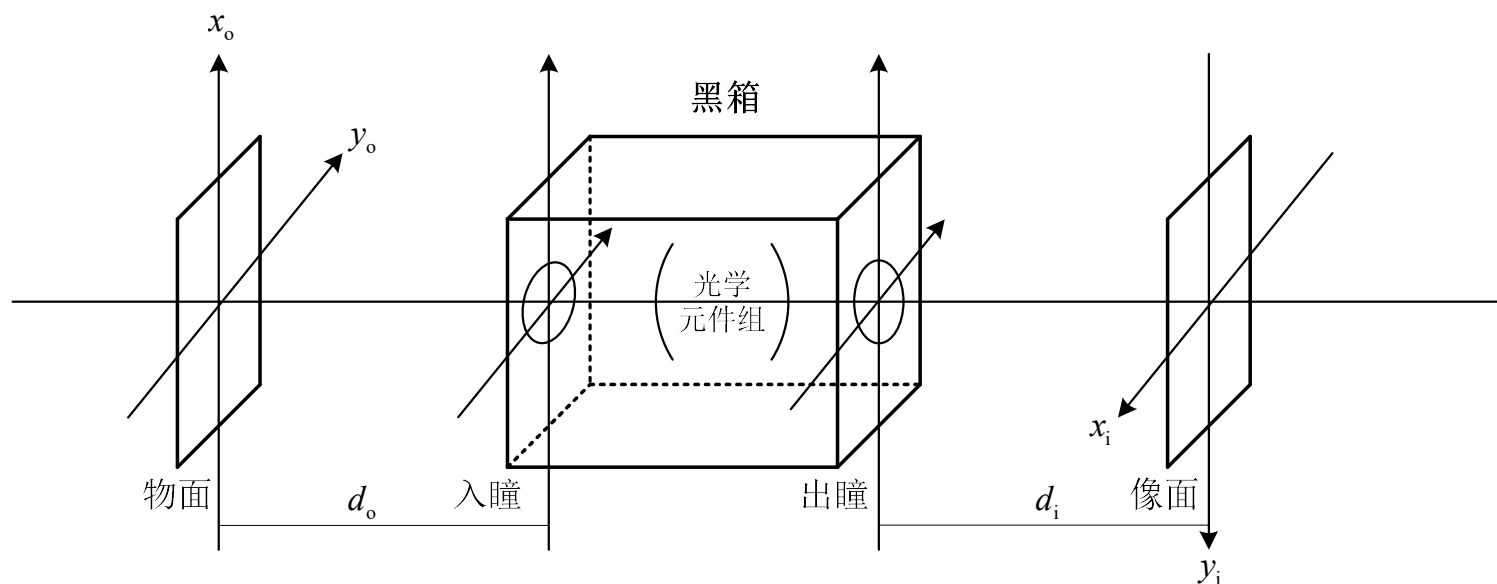
I：由光由物平面到入瞳面，

II：由入瞳面到出瞳面，

III：由出瞳面到像平面。

当光波通过成像系统时，波面受到入瞳的限制，变换到空间就成为出瞳对出射波的限制。这两种限制是等价的，是同一种限制在两个空间的反映。这一结论称为光束限制的共轭原理。在考虑光波通过光学系统的衍射效应时，只需考虑其中任何一种限制，通常是考虑出瞳对光波的衍射作用。至于光波从入瞳到出瞳的传播，由于在此过程中波面已不再受到别的限制，故此段传播可以用几何光学很好地描述。

有了光瞳的概念，在研究光学成像系统的性质时，可以不去涉及系统的详细结构，而把整个系统的成像看成一个“黑箱”的作用，只需知道黑箱边端(即入瞳和出瞳平面)的物理性质，就可以知道像平面上合乎实际的像场分布。



为了确定系统的脉冲响应，首先需要知道这个“黑箱”对点光源发出的球面波的变换作用，即当入瞳平面上输入发散球面波时，出瞳平面透射的波场特性。对于实际光学系统，这一边端性质千差万别，但总的来说，可以分成两类，即衍射受限系统和有像差系统。

5.6 衍射受限系统成像的空域分析

5.6.1 衍射受限系统的点扩散函数

5.6.2 正薄透镜的点扩散函数

5.6.3 单色光照明衍射受限系统的成像规律

5.6.4 准单色光照明衍射受限系统的成像规律

5.6.1 衍射受限系统的点扩散函数

光学成像系统可以看成是一种光学信息处理系统，采用频谱分析方法和线性系统理论全面研究光学系统成像的过程，已成为现代光学中的一种重要手段，并且是光学信息处理技术的重要理论基础。

前面提到，要在衍射屏后的自由空间观测夫琅禾费衍射，其条件是相当苛刻的。欲在近距离观测夫琅禾费衍射，就需借助会聚透镜来实现。在单色单位平面波垂直照射衍射屏的情况下，夫琅禾费衍射就是衍射屏函数的傅里叶变换。所以透射物体的夫琅禾费衍射就是实现傅里叶运算的物理手段。

当像差很小或者系统的孔径和视场都不大，实际光学系统就可近似看做衍射受限系统。这时的边端性质比较简单，也就是说，从物平面上任一点源，如果从该点发出的发散球面波通过成像系统后，因该系统受限制，转换成了新的理想球面波，并且在像平面上会聚成一个理想点，则称该成像系统是衍射受限的 (diffraction-limited)。因此，衍射受限系统的作用就是将投射到入瞳上的发散球面波变换成出瞳上的会聚球面波。至于有像差的系统，其边端条件是：点光源发出的发散球面波投射到入瞳上，在出瞳处的透射波场将明显偏离理想球面波，偏离程度由波像差决定。

任何物的场分布都可以看做无数小面元的组合，而每个小面元都可看做一个加权的 δ 函数。对于任何一个衍射受限的成像系统，如果能清楚地了解物平面上任一小面元的光振动通过成像系统后，在像平面上所造成的光振动分布情况，通过线性叠加，原则上就能够求得任何物面光场分布通过系统后的像面光场分布，进而求得像面强度分布，这就是相干照射下的成像过程。所以，这里问题的关键是求出任意小面元的光振动所对应的像场分布。

面元 (δ 函数) 经过线性系统 (黑箱)，在像面上产生脉冲响应函数，即点扩散函数为： $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ 。

对于任意的物函数，可以把它看成是由物平面上许多面元组成，每个面元具有相应的点扩散函数。由于成像系统是线性系统，只要能够确定成像系统点扩散函数，就能完备描写该成像系统的性质。

$$U'_o(x_o, y_o) \xrightarrow{\text{分解}} dU'_o(x_o, y_o) = \delta(x_o, y_o) \xrightarrow{\text{衍射}} dU_1(x_1, y_1) \xrightarrow{\text{黑箱}} dU'_1(x_1, y_1) \xrightarrow{\text{衍射}} dU_i(x_i, y_i)$$

在“黑箱”前表面，有

$$\begin{aligned} dU_1(x_1, y_1; x_{o0}, y_{o0}) &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0}) e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1 - x_{o0})^2 + (y_1 - y_{o0})^2]} dx_{o0} dy_{o0} \\ &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1 - x_{o0})^2 + (y_1 - y_{o0})^2]} \end{aligned}$$

(x_{o0}, y_{o0}) 是任意的，故可省出下标中的“0”，

出瞳平面上的复振幅，为：

$$\begin{aligned} dU'_1(x_1, y_1; x_o, y_o) &= P(x_1, y_1) dU_1(x_1, y_1; x_o, y_o) \\ &= \frac{e^{ikd_o}}{i\lambda d_o} P(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2d_o}[(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2]} \end{aligned}$$

在观测面上引起的复振幅分布，即点扩散函数为

$$\begin{aligned} dU_i(x_i, y_i; x_o, y_o) &= \frac{e^{ikd_i}}{i\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} dU'_1(x_1, y_1; x_o, y_o) e^{\frac{ik}{2d_i}[(x_i-x_1)^2+(y_i-y_1)^2]} dx_1 dy_1 \\ &= h(x_i, y_i; x_{o0}, y_{o0}) \end{aligned}$$

可得：

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_o, y_o) &= -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} \\ &\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_o}\right)(x_1^2+y_1^2)} e^{-ik\left[\left(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_o}{d_o}\right)x_1+\left(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_o}{d_o}\right)y_1\right]} dx_1 dy_1. \end{aligned}$$

上式就是满足菲涅耳条件下衍射受限系统的点扩散函数。

如果物像的共轭关系满足高斯公式(式5.2.3)，则上式可化为：

$$\begin{aligned} h(x_i, y_i; x_o, y_o) &= -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} \\ &\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-ik\left[\left(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_o}{d_o}\right)x_1+\left(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_o}{d_o}\right)y_1\right]} dx_1 dy_1. \end{aligned}$$

令: $x_o = -\tilde{x}_o / M \quad y_o = -\tilde{y}_o / M$ $M = d_i / d_o$

这样有:

$$h(x_i, y_i; \tilde{x}_o, \tilde{y}_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(\tilde{x}_o^2+\tilde{y}_o^2)}$$

透镜的横向放大率

$$\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i}[(x_i-\tilde{x}_o)x_1+(y_i-\tilde{y}_o)y_1]} dx_1 dy_1$$

令:

$$C = -e^{ik(d_o+d_i)} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(\tilde{x}_o^2+\tilde{y}_o^2)}$$

当透镜的孔径比较大时, 能对像面上点 (x_i, y_i) 的光场产生有效贡献的, 必定是物面上以几何成像所对应的以物点 (x_o, y_o) 为中心的很小的区域, 这样, 像点坐标与物点坐标成共轭坐标关系, 即有:

$$C \approx -e^{ik(d_o+d_i)} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(x_i^2+y_i^2)}$$

由上式可见, 近似后的相位因子不再依赖物点坐标, 因此因子 C 不会影响像面上的强度分布。这样有:

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = \frac{C}{\lambda^2 d_o d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i} [(x_i - \tilde{x}_o)x_1 + (y_i - \tilde{y}_o)y_1]} dx_1 dy_1$$

由上式可见，积分部分的值只依赖于坐标差 $(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)$ 。上式就是满足夫琅禾费衍射条件下衍射受限系统的点扩散函数，从表达式可以看出，在夫琅禾费衍射条件下衍射受限系统是线性空不变系统，这时，系统的脉冲响应就等于夫琅禾费衍射图样。

孔径的衍射作用是否显著，是由孔径线度相对于波长 λ 和像距 d_i 的比例决定的，为此，对孔径平面上的坐标作如下变换：

$$\xi = \frac{x_1}{\lambda d_i} \quad \eta = \frac{y_1}{\lambda d_i}$$

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = MC \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{-i2\pi [(x_i - \tilde{x}_o)\xi + (y_i - \tilde{y}_o)\eta]} d\xi d\eta$$

λd_i 足够大 $P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = 1 \longrightarrow \Sigma_1 \rightarrow \infty$

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = MC \iint_{\Sigma_1} e^{-i2\pi [(x_i - \tilde{x}_o)\xi + (y_i - \tilde{y}_o)\eta]} d\xi d\eta = MC \delta(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)$$

C 是复常数，对光强没有贡献

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = |M| \delta(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)$$

这时，点物成像为一个像点，即理想成像。即当不考虑光瞳有限大小时，点脉冲 $\delta(x_o, y_o)$ 通过衍射受限成像系统后，其响应函数 (即输出函数，或像点) 仍是点脉冲，其位置在

$$x_i = \tilde{x}_o = -Mx_o \qquad y_i = \tilde{y}_o = -My_o$$

这便是几何光学中点物-像点成像的理想情况。

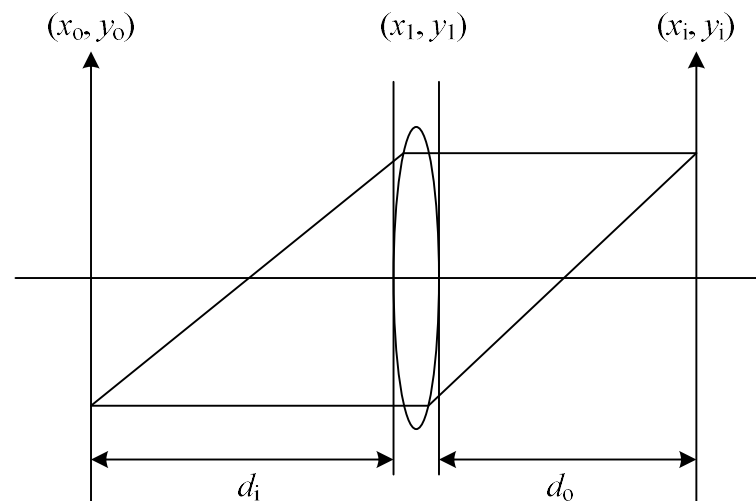
由物点发出的球面波，在像方得到的将是一个被出射光瞳所限制的球面波，这个球面波是以理想像点为中心的。由于出射光瞳的限制作用，在像平面上将产生以理想像点为中心的出瞳孔径的夫琅禾费衍射图样。

式(5.5.12)表明，若略去积分号前面的系数，脉冲响应函数就是光瞳函数的傅里叶变换。即衍射受限系统的脉冲响应是光学系统出瞳的夫琅禾费衍射图样，其中心在几何光学的理想像点 $(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)$ 。

5.6.2 正薄透镜的点扩散函数

下图所示的是在相干照射下，一个消像差的正薄透镜对透明物成像的情况。其孔径函数为：

$$P(x_1, y_1) = P_L(x_1, y_1) e^{-\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)}$$



这样有：

$$h(x_i, y_i; x_{o0}, y_{o0};) = \frac{1}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_{o0}^2 + y_{o0}^2)} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2 + y_i^2)}$$

$$\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} P_L(x_1, y_1) e^{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o} - \frac{1}{f}\right)(x_1^2 + y_1^2)} e^{-ik\left[\left(\frac{x_i}{d_i} + \frac{x_{o0}}{d_o}\right)x_1 + \left(\frac{y_i}{d_i} + \frac{y_{o0}}{d_o}\right)y_1\right]} dx_1 dy_1.$$

当物、像平面为共轭关系时，满足高斯公式(5.2.3)，这样，式(5.6.16)

可简化为：

$$h(x_i, y_i; x_o, y_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)}$$

$$\cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P_L(x_1, y_1) e^{-ik \left[\left(\frac{x_i+x_o}{d_i+d_o} \right) x_1 + \left(\frac{y_i+y_o}{d_i+d_o} \right) y_1 \right]} dx_1 dy_1$$



$$x_o = -\tilde{x}_o / M \quad y_o = -\tilde{y}_o / M$$

$$h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = -\frac{e^{ik(d_o+d_i)}}{\lambda^2 d_o d_i} e^{\frac{ik}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} e^{\frac{ik}{2d_o M^2}(\tilde{x}_o^2+\tilde{y}_o^2)}$$

$$\cdot \int \int_{-\infty}^{\infty} P_L(x_1, y_1) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i} [(x_i - \tilde{x}_o)x_1 + (y_i - \tilde{y}_o)y_1]} dx_1 dy_1$$

上式与式(5.6.11)是完全相同。延用上面的分析方法，可得完全相同的结果。由此可见，衍射受限系统的成像在夫琅禾费衍射条件下，与薄透镜成像其效果是完全相同的，上节所得出的结论，也完全适用于薄透镜成系统。所以，式(5.6.11)所表达的衍射受限系统的点扩散函数，也就是薄透镜的点扩散函数。

同样，如果式(5.6.12)也成立 $P_L(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = 1$ ，这就是薄透镜几何光学理想成像的情况。

5.6.3 单色光照明衍射受限系统的成像规律

然而，在像平面上将这些无数个脉冲响应合成的结果是和物面照射情况有关的：如果物面上脉冲与脉冲是相干的，那么这些脉冲在像平面上的响应便是相干叠加；如果这脉冲与脉冲是非相干的，则这些个脉冲在像平面上的响应将是非相干叠加，即强度叠加。所以衍射受限系统的成像特性对于相干照射和非相干照射是不同的。

在相干照射下，物面上的各点是完全相干的物体后的复振幅分布为：

$$U'_o(x_o, y_o) = \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_{o0}, y_{o0}) \delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0}) dx_{o0} dy_{o0}$$

物面上每一个脉冲通过系统后都形成一个复振幅分布，所有这些分布的相干叠加，便是物通过系统后所得的像：

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i) &= L\{U'_o(x_o, y_o)\} = L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_{o0}, y_{o0}) \delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0}) dx_{o0} dy_{o0}\right\} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_{o0}, y_{o0}) L\{\delta(x_o - x_{o0}, y_o - y_{o0})\} dx_{o0} dy_{o0} \end{aligned}$$

在理想成像时满足线性空不变系统时，像点的位置只是物点坐标反演的 M 倍，这样有 $h(x_i, y_i; x_o, y_o) = h(x_i - (-Mx_o), y_i - (-My_o))$ 。可省略下标中的“0”，则上式变为：

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(x_o, y_o) h(x_i - (-Mx_o), y_i - (-My_o)) dx_o dy_o$$



$$x_o = -\tilde{x}_o / M \quad y_o = -\tilde{y}_o / M$$

$$U_i(x_i, y_i) = \frac{1}{M^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M) h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o$$

理想的成像分布为：

理想成像

$$\begin{aligned} U_i^g(x_i, y_i) &= \frac{C}{M} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M) \delta(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \\ &= \frac{C}{M} U'_o(-x_i / M, -y_i / M) \end{aligned}$$

在理想成像的情形下，全部的物点构成的物分布为：

$$U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M) \Leftrightarrow U'_o(x_o, y_o)$$

在理想像平面中的坐标读数比在物平面中的坐标读数放大了 M 倍，所以在像平面中：

$$U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M) \Leftrightarrow U_i^g(x_i, y_i)$$

可见，理想像 $U_i^g(x_i, y_i)$ 的分布形式与物 $U'_o(x_o, y_o)$ 的分布形式是一样的，只是在方向 x_i 和 y_i 放大了 M 倍，因此，把 $U_i^g(x_i, y_i)$ 叫做 $U'_o(x_o, y_o)$ 的理想像。
令：

$$\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) = \frac{1}{M} h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o)$$

这样有：

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} U'_o(-\tilde{x}_o / M, -\tilde{y}_o / M) h(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o$$


由于几何像与物有点对点对应关系，可得

$$U_i(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o = U_i^g(x_i, y_i) * \tilde{h}(x_i, y_i)$$

这是物像关系在空域中的表达式。由上式，便可以理解式(5.5.23)的物理意义为：物 $U_o'(x_o, y_o)$ 通过衍射受限系统后的像分布 $U_i(x_i, y_i)$ 是 $U_o'(x_o, y_o)$ 的理想像 U_i^g 和点扩散函数 \tilde{h} 的卷积。这就表明，不仅对于薄的单透镜系统，而且对于更普遍的情形，衍射受限系统也是可以看成线性空间不变系统的。

将式(5.6.12)代入式(5.6.24)，可得：

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{-i2\pi[(x_i - \tilde{x}_o)\xi_1 + (y_i - \tilde{y}_o)\eta_1]} d\xi d\eta \\ &= F\{P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)\} \end{aligned}$$


$$\tilde{x}_o = \tilde{y}_o = 0$$

在相干照射条件下，对于衍射受限成像系统，表征成像系统特征点扩散函数 \tilde{h} 仅取决于系统的光瞳函数 P 。

$$\tilde{h}(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) e^{-i2\pi(x_i \xi + y_i \eta)} d\xi d\eta = F\{P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)\}$$

5.6.4 准单色光照明衍射受限系统的成像规律

前面的讨论都是在严格单色光照明条件下进行的，实际照明光源不是理想单色的，只能获得准单色光。

激光器发出的光波、一个普通光源通过针孔后(点光源)出射的光波等这类光源照射下，物平面上任意两点光振动之间的相位差随时间的变化是恒定的，这种照射方式称为空间相干照射(coherent illumination)。

准单色光波可以看成波长为中心波长的单色光波，因此相干照明成像系统的物象关系仍可用式(5.6.28)描述，不过系统和脉冲响应函数的波长应当换成准单色光波的中心波长。

当用准单色光照射时，可先采用傅里叶分析的方法，把物光 U_0 分解成一系统单色波的线性组合，这样就可应用前面对单色光照射下获得的结果，求出一系统对每一单色波的响应，最后再把各个单色波的响应叠加起来，就得到总的响应 U_i 。

先分析一下准单色光照射时，光学成像系统的物像关系。

$$\tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) = F \{ U_o(x_o, y_o; t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o; t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$



$$\tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) h(x_i - x_o, y_i - y_o) dx_o dy_o$$



$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i; t) &= F^{-1} \{ \tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i(x_i, y_i; \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) h(x_i - x_o, y_i - y_o; \nu) dx_o dy_o \right] e^{i2\pi\nu t} d\nu \end{aligned}$$



准单色光照明

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i; t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_o(x_o, y_o; \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \right] h(x_i - x_o, y_i - y_o; \nu_0) dx_o dy_o \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} U_o(x_o, y_o; t) h(x_i - x_o, y_i - y_o; \nu_0) dx_o dy_o \end{aligned}$$

通常光探测器(如肉眼、照相乳胶和光电探测器)都只能感知光的强度,且其响应频率远小于光波频率,故光探测器所感知到的像平面上的光强度为:

$$I_i(x_i, y_i) = \left\langle U_i(x_i, y_i; t) U_i^*(x_i, y_i; t) \right\rangle$$

式中: 尖括号表示对物理量在足够长的时间内求平均。交换积分和求平均的次序得到:

$$\begin{aligned} I_i(x_i, y_i) &= \left\langle \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \right. \\ &\quad \cdot \left. \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^{g*}(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \right\rangle \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \right\rangle \\ &\quad \cdot \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \end{aligned}$$

对于准单色光照射时，在物平面上的复振幅分布函数中，幅值随时间作缓慢变化，而相位部分将因光波频率很高而随时间迅速变化。因此，对于物面上的任意两点处的光振动可分别写成：

$$U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) = U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) e^{i\phi(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t)} \quad U_i^g(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t) = U_i^g(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) e^{i\phi(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t)}$$

则有：

$$\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t) \rangle = U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) e^{i[\phi(x_o, y_o; t) - \phi(x'_o, y'_o; t)]}$$

随便着照射方式的不同，由式(5.6.34)及式(5.6.36)会得出不同意义的结果。当用它照明物面时，物面光场可以是空间完全相干的、部分相干的和非相干的，这里只讨论相干和非相干两种情况。物面光场为空间完全相干时，称作相干照明；非相干时，称作非相干照明。

激光器发出的光波、一个普通光源通过针孔后(点光源)出射的光波等这类光源照射下，物平面上任意两点光振动之间的相位差随时间的变化是恒定的，即式(5.6.36)中的相位差的平均值为常数，不失一般性的，可令这个常数为零，由式(5.6.36)和式(5.6.34)可得：

$$\begin{aligned}
I_i(x_i, y_i) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \\
&\cdot \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) h^*(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \\
&= \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \\
&\cdot \left[\int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \right]^* \\
&= |U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) * \tilde{h}(x_i, y_i)|^2 = |U_i(x_i, y_i)|^2.
\end{aligned}$$

由于几何像与物相同，像面上的光场空间相干性与物面上的相同。

当完全相干时，有：

$$U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o, t) = \frac{U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)}{\sqrt{\langle |U_i^g(\tilde{x}_o = 0, \tilde{y}_o = 0, t)|^2 \rangle}} U_i^g(\tilde{x}_o = 0, \tilde{y}_o = 0, t)$$

从而得到：

$$I_i(x_i, y_i) = \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o \right|^2$$

上式与(5.6.37)的结果是一致的。一般将相干照明的系统叫作相干成像系统。由(5.6.37)可知，相干成像系统复振幅是线性的。式(5.6.37)与式(5.6.26)相比可以发现，这二式实际上一样的，由此可见，照射方式相干照射 (coherent illumination) 时，准单色光波可以看成波长为中心波长的单色光波，因此相干照明成像系统的物象关系仍可用式(5.6.26)描述，不过系统和脉冲响应函数的波长应当换成准单色光波的中心波长。

在漫射光源、扩展光源等这类光源照射下，物平面上各点的光振动随时间的变化都是统计无关的，这种照射方式称为非相干照射(incoherent illumination)。这时，有：

$$\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t) \rangle = \begin{cases} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) & (\tilde{x}_o - \tilde{x}'_o)^2 + (\tilde{y}_o - \tilde{y}'_o)^2 \leq \varepsilon^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

↓ ε 为任意小的正数

$$\langle U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o; t) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o; t) \rangle = U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) \delta(\tilde{x}_o - \tilde{x}'_o, \tilde{y}_o - \tilde{y}'_o)$$

将上式代入式(5.6.34)，得到非相干照射像面上的光强分布为：

$$\begin{aligned} I_i(x_i, y_i) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) U_i^{g*}(\tilde{x}'_o, \tilde{y}'_o) \tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0) \\ &\quad \cdot \tilde{h}^*(x_i - \tilde{x}'_o, y_i - \tilde{y}'_o; \nu_0) \delta(\tilde{x}_o - \tilde{x}'_o, \tilde{y}_o - \tilde{y}'_o) d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o d\tilde{x}'_o d\tilde{y}'_o \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} |U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)|^2 |\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_o, y_i - \tilde{y}_o; \nu_0)|^2 d\tilde{x}_o d\tilde{y}_o = I_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) * \tilde{h}_1(x_i, y_i). \end{aligned}$$

↗

$$I_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o) = |U_i^g(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o)|^2$$

$$\tilde{h}_1(x_i, y_i) = \left| \tilde{h}(x_i, y_i) \right|^2$$

称为系统的**强度点扩散函数**。式(5.6.42)表明，在非相干照射方式下，衍射受限光学系统成像对光强度的变换是线性空不变的，对复振幅的变换则不是线性的。

由上面的讨论可以看到，对于非相干线性空不变成像系统，在理想成像的情况下，物像关系满足下述卷积积分：

$$I_i(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} I(x_g, y_g) h_1(x_i - x_g, y_i - y_g) dx_g dy_g = I_i^g(x_g, y_g) * \tilde{h}_1(x_i, y_i)$$

几何光学理想像的强度分布



可见，在非相干照射下，线性空不变成像系统的像强分布是理想像的强度分布与强度点扩散函数的卷积。

显然，非相干成像系统对光强度是线性的。