§4 连续型随机变量的概率密度

☆ 概率密度及其性质

◷ 指数分布

◷ 均匀分布

◷ 正态分布与标准正态分布

返回主目录

一. 连续型随机变量的概念与性质

定义　如果对于随机变量X的分布函数$F(x)$，存在非负函数$f(x)$，使得对于任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

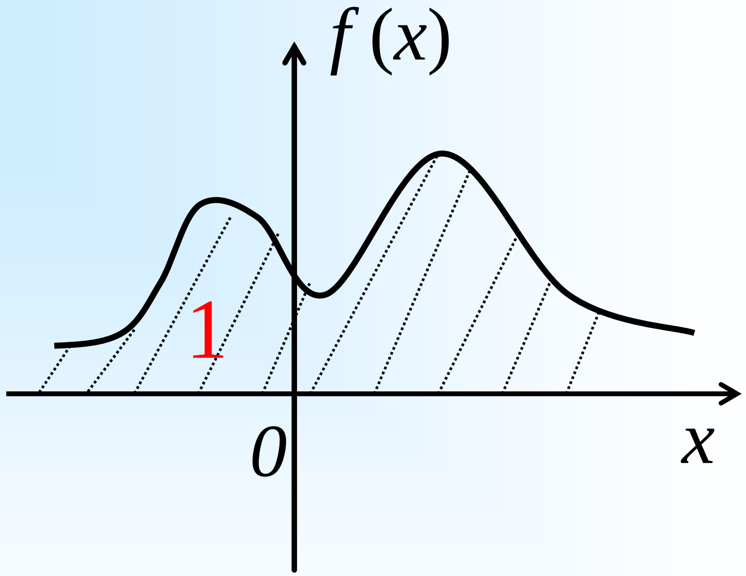
则称X为连续型随机变量，其中函数$f(x)$称为X的概率密度函数，简称概率密度.

连续型随机变量 X 由其密度函数唯一确定.

由定义知道，概率密度 $f(x)$ 具有以下性质：

$1^0 \quad f(x) \geq 0.$

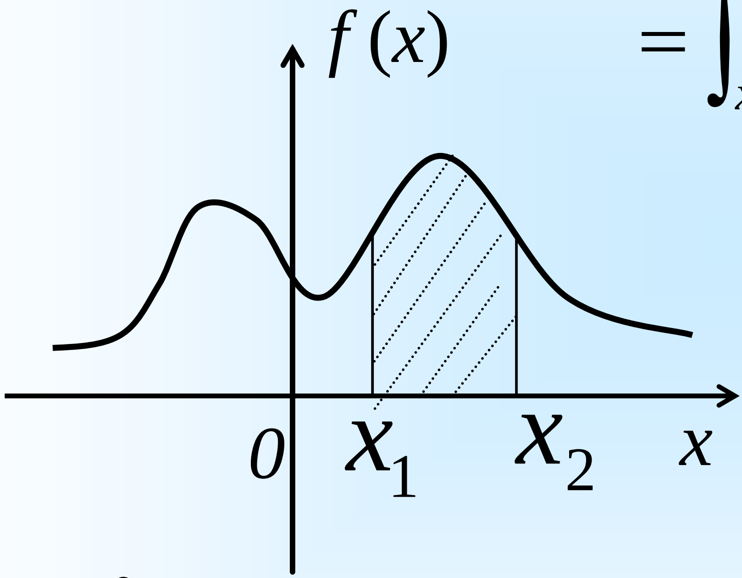
$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$



返回主目录

3^0 $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \, (x_1 \le x_2)$$



4^0 若$f(x)$在点x处连续，则有

$$F'(x) = f(x).$$

返回主目录

注 意

连续型随机变量密度函数的性质与离散型随机变量分布律的性质非常相似，但是，**密度函数不是概率！**

我们不能认为：$P\{X=a\}=f(a)$ ！

连续型随机变量的一个重要特点

设 X 是连续型随机变量，则 对任意的实数 a，有

$$P\{X=a\}=0$$

返回主目录

证明：

$$P\{X=a\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left\{a-\frac{1}{n}<X\leq a\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a}f(x)dx\quad=0$$

所以有 $$P\{X=a\}=0$$

说　明

(1). 由上述性质可知，对于连续型随机变量，我们关心它在某一点取值的问题没有太大的意义；我们所关心的是它在某一区间上取值的问题.

若已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，则 X 在任意区间 G（G可以是开区间，也可以是闭区间，或半开半闭区 间；可以是有限区间，也可以是无穷区间）上 取值的概率为，

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$

返回主目录

例 1

设 X 是连续型随机变量，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} c\left(4x-2x^2\right) & 0<x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1). 常数 c；　(2). $P\{X>1\}$.

解：

(1). 由密度函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

例 1（续）

得 $$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{2} c\left(4x-2x^2\right)dx=c\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}c$$

所以， $$c=\frac{3}{8}$$

(2). $$P\{X>1\}=\int_{1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx$$

返回主目录

例 1（续）

$$=\int_1^2 \frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 2

某电子元件的寿命（单位：小时）是以

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 100\\ \dfrac{100}{x^2} & x>100\end{cases}$$

为密度函数的连续型随机变量．求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率.

解：

设：A={ 某元件在使用的前 150 小时内需要更换}

返回主目录

例 2（续）

则　$P(A)=P\{X\le 150\}=\int_{-\infty}^{150} f(x)dx$

$$=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\frac{1}{3}$$

检验 5 个元件的使用寿命可以看作是在做一个5重Bernoulli试验.

B={ 5 个元件中恰有 2 个的使用寿命不超过150小时 }

则　$P(B)=C_5^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$

返回主目录

例3

设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

试求 X 的密度函数.

解:

设 X 的密度函数为 $f(x)$，则

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

例 4

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求 X 的分布函数.

解:

当 $x\le 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad =0$

当 $0<x\le 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ =\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$

返回主目录

例 4（续）

$$= \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

当$1 < x < 2$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2-t)\,dt = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

返回主目录

例 4（续）

当$x>2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{x} f(t)dt$$

$$=\int_{0}^{1} tdt+\int_{1}^{2}(2-t)dt$$

$$=1$$

例 4（续）

综上所述，可得随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0<x\le 1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & 1<x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}$$

二. 一些常用的连续型随机变量

1. 均匀分布

若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称随机变量 X 服从区间 $[a,\ b]$ 上的均匀分布.

记作 X ~ U [a , b]

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

密度函数的验证

设$X\sim$区间$[a,\ b]$上的均匀分布，$f(x)$是其密度函数，则有：

(1). 对任意的x，有 $f(x)\geq 0$；

(2). $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$

$$=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1.$$

由此可知，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 确是密度函数.

返回主目录

说　明

(1). 类似地，我们可以定义

区间$(a,\ b)$上的均匀分布；

区间$[a,\ b)$上的均匀分布；

区间$(a,\ b]$上的均匀分布.

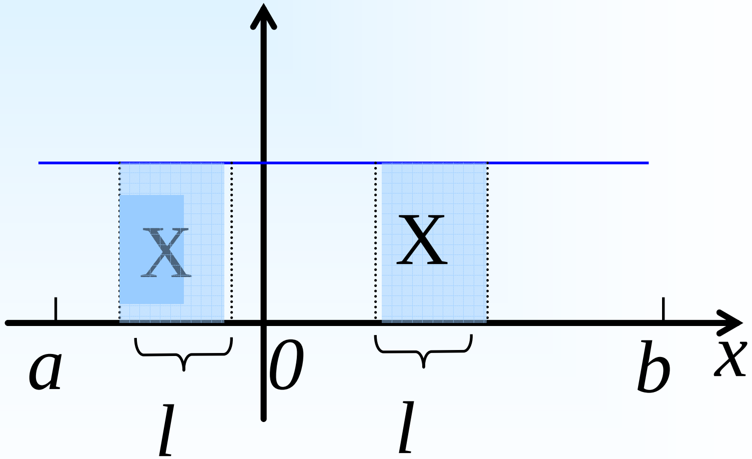
§ 4 连续型随机变量的概率密度

均匀分布的概率背景

如果随机变量 X 服从区间 $[a, \ b]$ 上的均匀分布，则随机变量 X 在区间 $[a, \ b]$ 上的任意一个子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比，而与该子区间的位置无关.

这时，可以认为随机变量 X 在区间 $[a, \ b]$ 上取值是等可能的.

$$P\{c < X \le c+l\} = \int_c^{c+l} f(x)dx$$



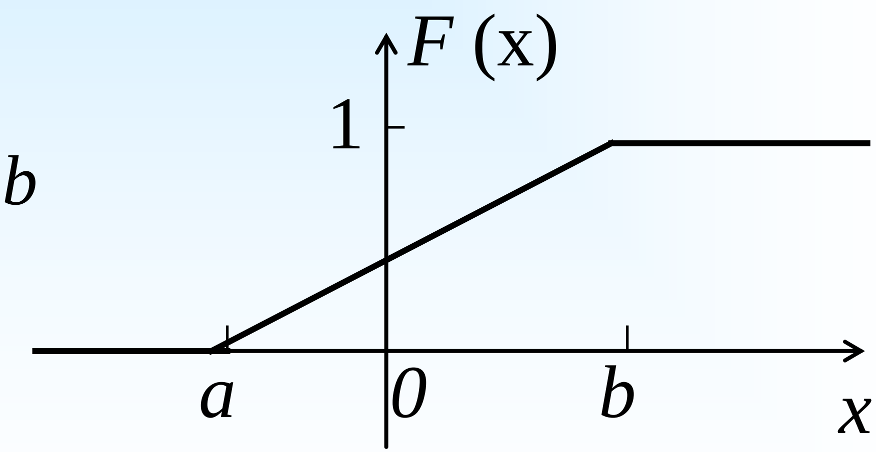
$$= \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}.$$

返回主目录

均匀分布的分布函数

若随机变量 X 服从区间 $[a, \ b]$ 上的均匀分布，则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b<x \end{cases}$$



例 5

设公共汽车站从上午7时起每隔15分钟来一班车，如果某乘客到达此站的时间是 7:00 到7:30之间的均匀随机变量．试求该乘客候车时间不超过5分钟的概率．

解：

设该乘客于7时X分到达此站．

则 X 服从区间 $[0,\ 30]$ 上的均匀分布．

其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30} & 0\le x\le 30\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

返回主目录

例 5（续）

令：B={ 候车时间不超过5分钟 }

则 $P(B) = P\{10 \le X \le 15\} + P\{25 \le X \le 30\}$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

例 6

设随机变量ξ服从区间$[-3,\ 6]$上的均匀分布，试求方程

$$4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0$$

有实根的概率.

解:

随机变量ξ的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & -3\le x\le 6\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

返回主目录

例 6（续）

设：$A=\left\{方程4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0有实根\right\}$

则 $$P(A)=P\left\{(4\xi)^2-4\times4\times(\xi+2)\geq 0\right\}$$

$$=P\left\{(\xi+1)(\xi-2)\geq 0\right\}$$

$$=P\left\{\xi\leq -1或\xi\geq 2\right\}$$

$$=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{9}dx+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}dx$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2}{3}$$

返回主目录

2. 指数分布

如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数，则称随机变量服从参数为λ的指数分布.

密度函数的验证

设$X\sim$参数为λ的指数分布，$f(x)$是其密度函数，则有：

(1). 对任意的 x，有 $f(x)\geq 0$；

(2). $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lambda e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=1.$$

由此可知，

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$ 确是一密度函数.

返回主目录

指数分布的分布函数

若随机变量 X 服从参数 λ 指数分布，

则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases}$$

返回主目录

例 7

设打一次电话所用的时间X（单位：分钟）是以$\lambda=\dfrac{1}{10}$为参数的指数随机变量．如果某人刚好在你前面走进公用电话间，求你需等待10分钟到20分钟之间的概率．

解：

X的密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

返回主目录

例 7（续）

令：B={ 等待时间为10~20分钟 }

则 $P(B)=P\{10\le X\le 20\}$

$$=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=-\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\Big|_{10}^{20}$$

$$=e^{-1}-e^{-2}=0.2325$$

3. 正 态 分 布

如果连续型随机变量 X 的密度函数为

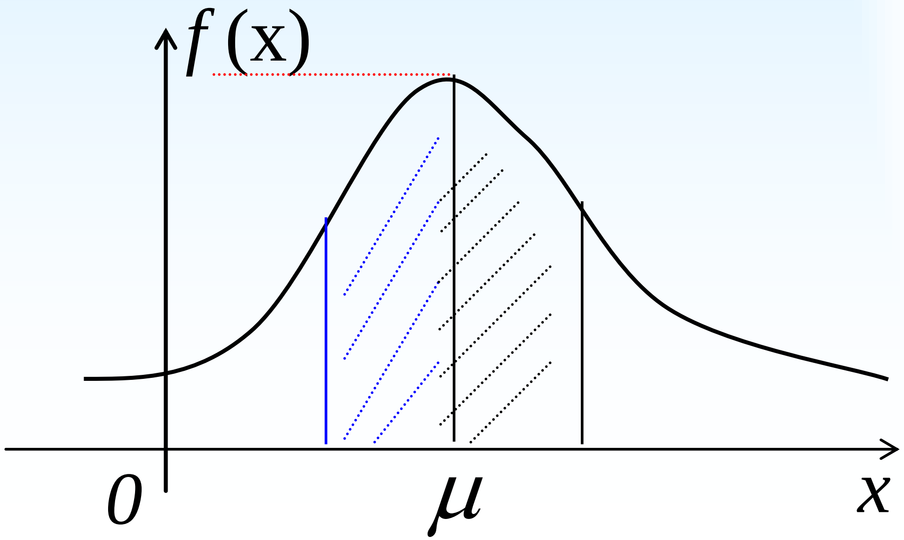
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$\left(\text{其中} -\infty<\mu<+\infty, \quad \sigma>0 \text{为参数}\right)$,

则称随机变量 X 服从，参数为 $(\mu, \quad \sigma^2)$ 的

正态分布. 记作

$$X \sim N(\mu, \quad \sigma^2)$$



标准正态分布

若 $\mu = 0$， $\sigma = 1$，我们称 $N(0,\ 1)$为标准正态分布.

标准正态分布的密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

返回主目录

密度函数的验证

设$X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$，$f(x)$是其密度函数，则有：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}>0$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

下面验证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

返回主目录

密度函数的验证(续)

下面验证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

首先验证：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$$

或验证： $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$$

密度函数的验证（续）

为此，我们只需证明：

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = 2\pi$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

密度函数的验证（续）

作极坐标变换：$x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$，　则有

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

$$= 2\pi\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 2\pi$$

因此，　$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$$

返回主目录

密度函数的验证（续）

下面验证：$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

作变换：$u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$，　则 $du = \dfrac{dx}{\sigma}$

则有 $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\frac{dx}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 1$$

返回主目录

密度函数的验证（续）

综上所述，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

满足密度函数的两项基本条件，因此 $f(x)$ 确是一个密度函数.

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

正态分布密度函数的图形性质

对于正态分布的密度函数

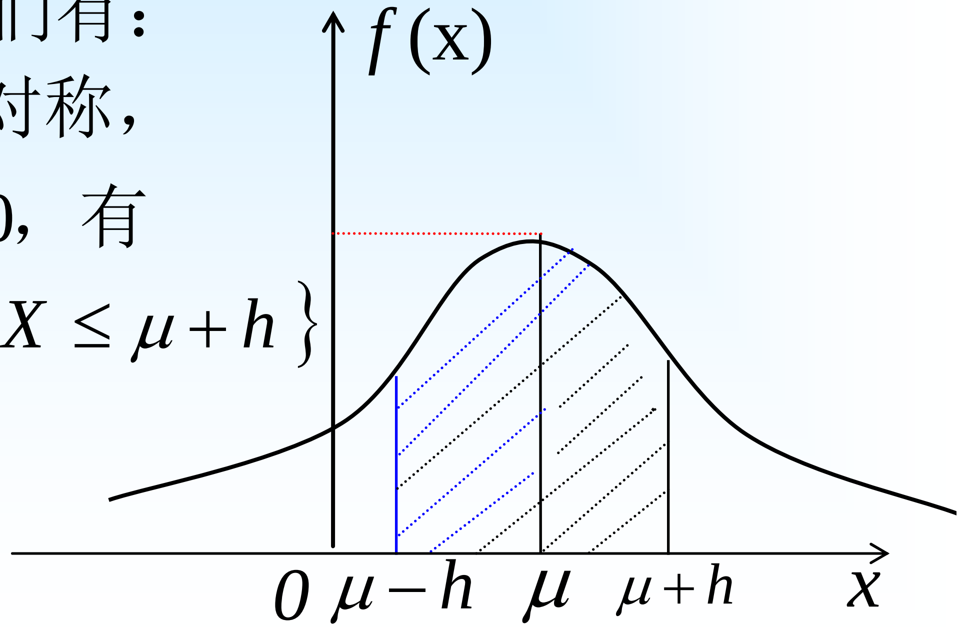
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

由高等数学中的知识，我们有：

(1). 曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，

这表明：对于任意的 $h>0$，有

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\}$$



正态分布密度函数的图形性质（续）

(2). 当$x=\mu$时，$f(x)$取到最大值

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

x离μ越远，$f(x)$的值就越小. 这表明，对于同样长度的区间，当区间离μ越远时，随机变量X落在该区间中的概率就越小.

返回主目录

正态分布密度函数的图形性质（续）

(3). 曲线$y=f(x)$在$x=\mu\pm\sigma$处有拐点；曲线$y=f(x)$以Ox轴为渐近线.

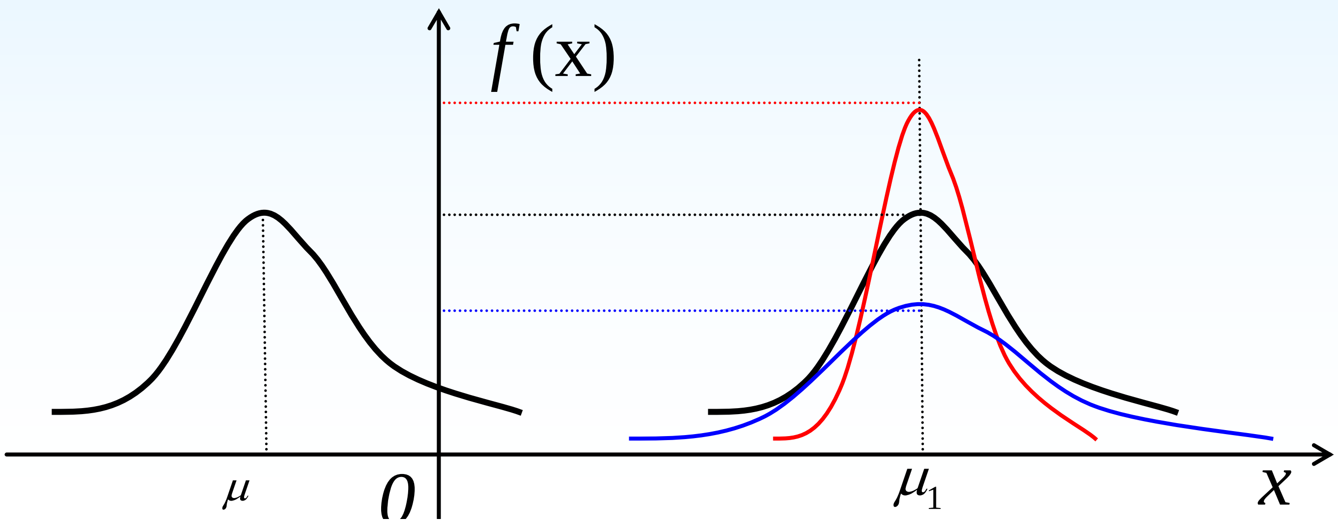
(4). 若σ固定，而改变μ的值，则$f(x)$的图形沿x轴平行移动，但不改变其形状. 因此$y=f(x)$图形的位置完全由参数μ所确定.

正态分布密度函数的图形性质（续）

(5)．若μ固定，而改变σ 的值，由于$f(x)$的最大值为

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

可知，当σ越小时，$y=f(x)$图形越陡，因而 X 落在μ附近的概率越大；反之，当σ越大时，$y=f(x)$的图形越平坦，这表明X的取值越分散．



正态分布的重要性

正态分布是概率论中最重要的分布，这可以由以下情形加以说明：

(1). 正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的. 可以证明，如果一个随机指标受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机指标一定服从或近似服从正态分布.

(2). 正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的.

(3). 正态分布可以作为许多分布的近似分布.

标准正态分布的计算

如果随机变量 $X \sim N(0,\ 1)$，则其密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty,\ +\infty)$$

其分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

教科书上第 439页列出了标准正态分布 表，

返回主目录

标准正态分布的计算（续）

对于$x \geq 0$我们可直接查表求出 $\Phi(x) = P\{X \leq x\}$

如果$x < 0$，我们可由公式

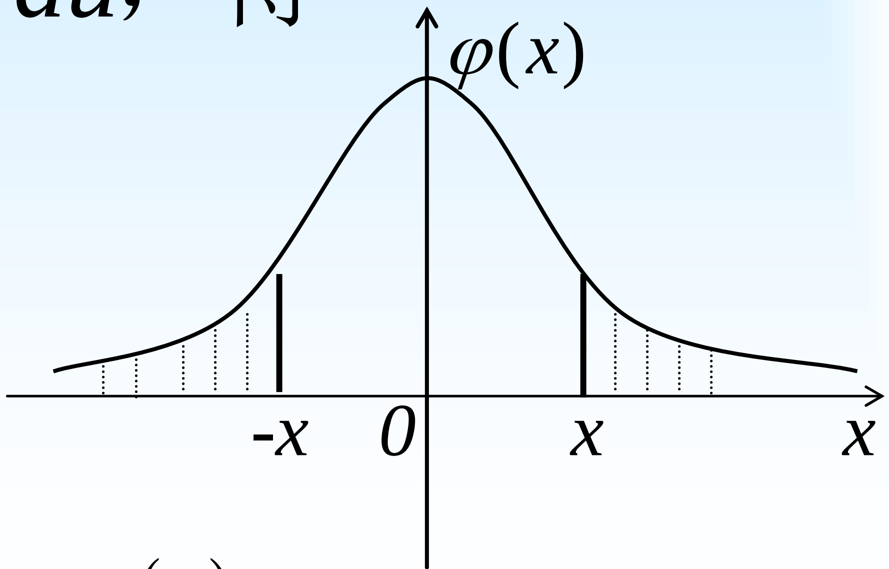
$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

作变换 $t = -u$，$dt = -du$，得

$$\Phi(-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1 - \Phi(x)$$



§4 连续型随机变量的概率密度

一般正态分布的计算

设$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，则$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\}$$

$$= P\{X \le \mu + \sigma y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

作变换$u = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$，则$du = \dfrac{dt}{\sigma}$，代入上式，得

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(y)$$

$$\therefore F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

一般正态分布的计算（续）

其中，$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数.

$$\therefore F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

故对任意的 $a<b$，有

$$\mathrm{P}\{\mathrm{a}<\mathrm{X}<\mathrm{b}\}=\Phi(\frac{\mathrm{b}-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$

例 8

设随机变量 $X \sim N(0,\ 1)$，试求：

$(1).\ P\{1 \le X < 2\}$；$(2).\ P\{-1 < X < 2\}$.

解：

$$(1).\ P\{1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(1)$$

$$= 0.97725 - 0.84134 = 0.13591$$

$$(2).\ P\{-1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)]$$

$$= 0.97725 - 1 + 0.84134 = 0.81859$$

返回主目录

例9

设随机变量 $X \sim N(2,\ 9)$，试求：

(1). $P\{1 \le X < 5\}$; (2). $P\{|X-2| > 6\}$; (3). $P\{X > 0\}$.

解：

(1). $P\{1 \le X < 5\} = F(5) - F(1)$

$$= \Phi(\frac{5-2}{3}) - \Phi(\frac{1-2}{3}) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0.84134 + 0.62930 - 1$$

$$= 0.47064$$

返回主目录

例9续

(2). $P\{|X-2|>6\}=1-P\{|X-2|\le 6\}$

$$=1-P\{-6\le X-2\le 6\}$$

$$=1-P\{-4\le X\le 8\}$$

$$=1-[\Phi(\frac{8-2}{3})-\Phi(\frac{-4-2}{3})]=1-[\Phi(2)-\Phi(-2)]$$

$$=2\times[1-\Phi(2)] \quad =2\times(1-0.97725)=0.0455$$

返回主目录

例9续

(3). $P\{X>0\}=1-P\{X\leq 0\}$

$$=1-\Phi(\frac{0-2}{3})$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=0.7486$$

例 10

某地区的月降水量服从 $\mu = 40$，$\sigma = 4$（单位：cm）的正态分布．求从某月起连续10个月的月降水量都不超过50cm的概率．

解：

设：X：该地区的月降水量．则 $X \sim N\left(40,\ 4^2\right)$

再设：$A = \left\{ \text{月降水量不超过50}cm \right\}$.

则：$P(A) = P\left\{ X \le 50 \right\} = \Phi\left(\frac{50-40}{4}\right)$

例 10（续）

$$=\Phi\left(2.5\right)=0.99379$$

所以，$P\left\{\text{连续10个月降水量都不超过50}cm\right\}$

$$=0.99379^{10}$$

$$=0.9396$$

返回主目录

§4 连续型随机变量的概率密度

设 $X \sim N(0,1)$, 若 z_α 满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

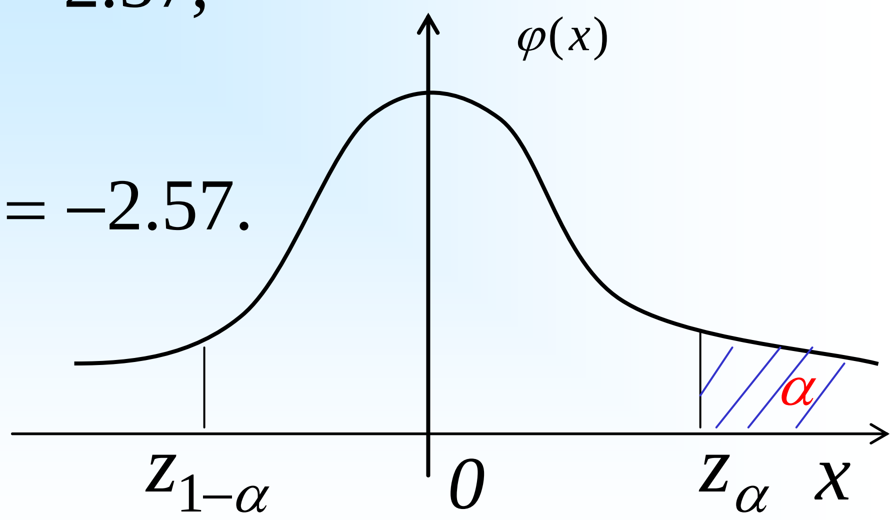
则称点 z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

查表可知

$$z_{0.05} = 1.645, \quad z_{0.005} = 2.57,$$

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha,$$

$$z_{0.95} = -1.645, \quad z_{0.995} = -2.57.$$



4. Γ-分布.

如果连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

(其中 $r>0$，$\lambda>0$ 为参数)

则称随机变量 X 服从参数为 $(r,\ \lambda)$ 的 Γ-分布.

记作： $X\sim\Gamma(r,\ \lambda)$

返回主目录

Γ-函数

Γ−函数的定义：

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$$

Γ−函数的定义域：$(0,\ +\infty)$.

Γ−函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$.

$$\Gamma(1)=1,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ .$$

如果n为自然数，则$\Gamma(n)=(n-1)!$.

返回主目录

说明：

如果 $r=1$，则由$\Gamma(1)=1$，得 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

这正是参数为λ的指数分布.

这说明指数分布是Γ－分布的一个特例.

如果$r=n$，由$\Gamma(n)=(n-1)!$ 得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

我们称此分布为*Erlang*分布，它是排队论中重要的分布之一.

说明：

如果$r=\frac{n}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，其中n为自然数，则有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

我们称此分布为自由度为n的χ^2-分布，记作$\chi^2(n)$.
它是数理统计学中重要的分布之一.

返回主目录