§2　方差

在实际问题中常关心随机变量与均值的偏离程度，可用 E|X-EX|，但不方便；所以通常用$E(X-EX)^2$来度量随机变量 X 与其均值 EX 的偏离程度。

1、定义

设 X 是随机变量，若$E(X-EX)^2$存在，称其为随机变量 X 的方差，记作 DX，Var(X)，即：

DX=Var(X)= $E(X-EX)^2$。$\sqrt{DX}$称为标准差。

$$DX = E(X-EX)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - EX)^2 \cdot p_i ,\qquad \text{离散型。}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 f(x)dx ,\qquad \text{连续型。}$$

返回主目录

注：方差描述了随机变量的取值与其均值的偏离程度。

方差也可由下面公式求得：

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

证明：

$$DX = E(X - EX)^2$$
$$= E\left(X^2 - (2EX)X + (EX)^2\right)$$
$$= EX^2 - (2EX)EX + (EX)^2$$
$$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2$$
$$= EX^2 - (EX)^2$$

返回主目录

例13

甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出：

X：甲击中的环数；

Y：乙击中的环数；

X	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5

Y	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

试问哪一个人的射击水平较高？

例13（续）

解：

比较两个人的平均环数.

甲的平均环数为

$$E(X)=8*0.3+9*0.2+10*0.5=9.2 \quad (\text{环})$$

乙的平均环数为

$$E(Y)=8*0.2+9*0.4+10*0.4=9.2 \quad (\text{环})$$

因此，从平均环数上看，甲乙两人的射击水平是一样的，但两个人射击环数的方差分别为

返回主目录

例13（续）

$$D(X)=(8-9.2)^2*0.3+(9-9.2)^2*0.2+(10-9.2)^2*0.5$$

$$=0.76$$

$$D(Y)=(8-9.2)^2*0.2+(9-9.2)^2*0.4+(10-9.2)^2*0.4$$

$$=0.624$$

由于 $D(Y)<D(X)$,

这表明乙的射击水平比甲稳定.

2、方差的性质

$DX = E(X - EX)^2$

1）$DX \geq 0$，若 C 是常数，则 $DC = 0$

2）$D(CX) = C^2 DX$

3）$D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2abE\{(X - EX)(Y - EY)\}$，

a，b 是常数。若 X，Y 独立，

则 $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY$

证：$D(aX + bY) = E[aX + bY - E(aX + bY)]^2$

$$= E[a(X - EX) + b(Y - EY)]^2$$

$$= E[a^2 (X - EX)^2] + E[b^2 (Y - EY)^2]$$

$$+ 2E[ab(X - EX)(Y - EY)]$$

$$= a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X - EX)(Y - EY)$$

若X,Y独立，则

E{(X-EX)(Y-EY)}=E (X-EX)E (Y-EY)=0

故：

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abE(X-EX)(Y-EY),$$

$$=a^2DX+b^2DY$$

4）DX=0 ⇔ P{X=c}=1， c=EX

注：

令， $Y=(X-EX)/\sqrt{DX}$ 则 EY=0,DY=1。

称Y是随机变量X的标准化了的随机变量。

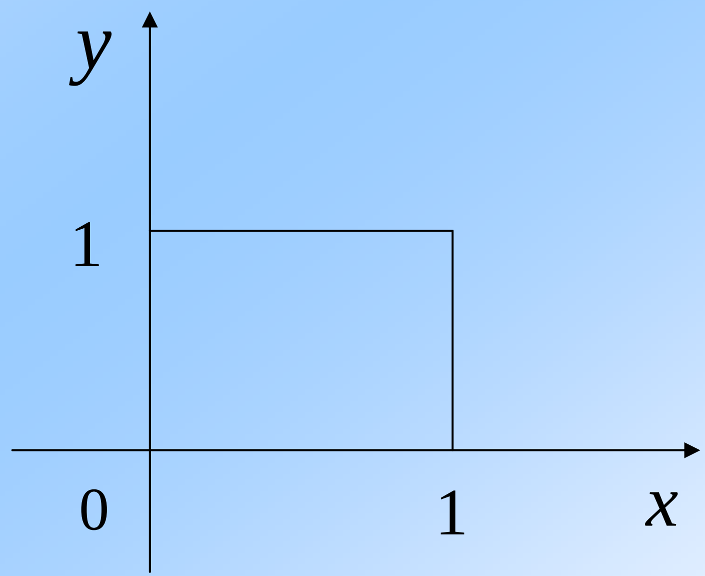
返回主目录

例 14

设$X,Y \sim U[0,1]$，且相互独立。求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

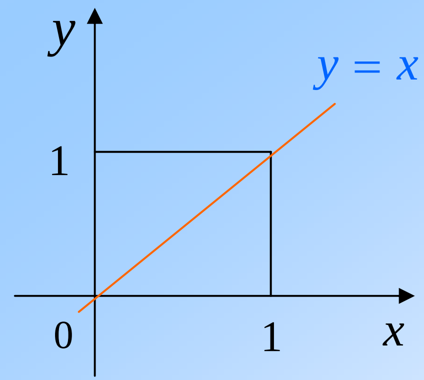
解：

$$f_X(x)=1 \quad 0<x<1,\ f_Y(y)=1 \quad 0<y<1,$$
$$f(x,y)=1 \quad 0<x<1, 0<y<1.$$



例 14续

$$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\,f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dxdy$$



$$= \int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy + \int_0^1 dy\int_0^y (y-x)dx$$

$$= 2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy \;= 2\int_0^1 (x^2 - \frac{x^2}{2})dx \;= \frac{1}{3}$$

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

先求:

$$E|X-Y|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^2\; f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 |x-y|^2\; dxdy$$

返回主目录

例 14（续）

$$=\int_0^1\int_0^1 (x-y)^2 dxdy \quad =\int_0^1\int_0^1 (x^2-2xy+y^2)dxdy=\frac{1}{6}$$

则： $D|X-Y|=E|X-Y|^2-(E|X-Y|)^2$

$$=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

思考题：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,且它们独立，

求：$E\,|\,X-Y\,|,D\,|\,X-Y\,|$

更多的例子见教材P104。

3、定理

定理：（切比雪夫不等式）　(Chebyshev 不等式)

设随机变量X有数学期望$EX=\mu$，　方差$DX=\sigma^2$对任意$\varepsilon>0$，不等式$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\sigma^2/\varepsilon^2$成立，

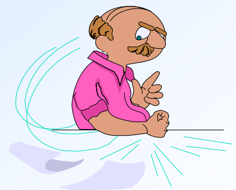
或

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

证明：（只证 X 是连续型）

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\frac{DX}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$　。



这个不等式给出了随机变量 X 的分布未知情况下，事件$\{|X-\mu|<\varepsilon\}$的概率的一种估计方法。

例如：在上面不等式中，取$\varepsilon=3\sigma,4\sigma$，有：

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geq 0.8889$$

$$P\{|X-\mu|<4\sigma\}\geq 0.9375$$

例15

假设一批种子的良种率为$\frac{1}{6}$，从中任意选出600粒，试用切比雪夫（Chebyshev）不等式估计：这600粒种子中良种所占比例与$\frac{1}{6}$之差的绝对值不超过0.02的概率。

解：　设 X 表示600粒种子中的良种数,则 $X \sim B(600,\frac{1}{6})$

$$EX = 600 \times \frac{1}{6}, \qquad DX = 600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}.$$

由切比晓夫不等式有

$$P\{\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| \le 0.02\} = P\{\left|\frac{X-100}{600}\right| \le 0.02\}$$

$$= P\{|X-100| \le 12\} \ge 1 - \frac{DX}{12^2} = 1 - \frac{600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{144} = 0.4213$$

例16

利用Chebyshev不等式证明：若$DX=0$，则$P\{X=EX\}=1$.

证明：

教材P106。