Chapter

# Contents

# 目录 Contents

Chapter



# Preliminaries: Set theory & categroies

1.1

SECTION

→ Naive set theory

# 1.1.1 集合的运算

- $\cup$  : union;
- $\cap$ : intersection;
- $\setminus$  : difference;
- II : disjoint union;
- $\times$  : set product;

### 1.1.2 disjoint union

- $S \coprod T$ : 得到 S 与 T 的拷贝 S' 与 T', 且  $S' \cap T' = \emptyset$ , 则  $S' \cup T' = S \coprod T$ .
- 其中一种依赖于 set product 的实现:

$$\begin{cases} S' \coloneqq \{0\} \times S \\ T' \coloneqq \{1\} \times T \end{cases}$$

#### 1.1.3 set product

$$S \times T := \{ \{ \{s\}, \{s, t\} \} : s \in S \land t \in T \}.$$

将  $\{\{s\}, \{s,t\}\}$  写作 (s,t), 称为 pair.

#### 1.1.4 等价关系

• 若  $\mathcal{R}$  是二元关系,则 a,b 满足关系  $\mathcal{R}$  写为:

 $a \mathcal{R} b$ .

• 等价关系: 若关系  $\sim$  定义在集合 S 上满足:

 $\circ$  reflexivity:  $(\forall a \in S)a \sim a$ .

 $\circ$  symmetry:  $(\forall a \in S)(\forall b \in S)a \sim b \implies b \sim a$ .

 $\circ \text{ transitivity: } (\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall c \in S)a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c.$ 

则称  $\sim$  是在集合 S 上的等价关系.

#### 1.1.5 分划与等价类 (partition & equivalence class)

• 分划是一个集合的集合,满足:

$$\begin{cases} (\forall a \in P)(\forall b \in P) a \cap b = \emptyset \\ \bigcup_{a \in P} a = S. \end{cases}$$

则称  $P \in S$  的分划.

• 等价类:

$$[a]_{\sim} := \{x \in S : x \in a\}.$$

称此为在 S 上 a 的等价类,由于等价类两两不交,且具有自反性,则 S 上某等价关系得到的所有等价类组成的集合是 S 的分划  $\mathcal{P}_{\sim}$ .

#### 1.1.6 集合商 (set quotient)

集合 S 与等价关系  $\sim$  的商定义为:

$$S/\sim := \mathcal{P}_{\sim}.$$

即  $a,b \in S$  等价  $\iff$  商到同一个元素.

# 一个集合商的例子

定义 
$$\mathbb{Z}$$
 上的等价关系  $\sim$  :  $a\sim b\iff \frac{a-b}{2}\in\mathbb{Z},\ \mathbb{M}$  : 
$$\mathbb{Z}/\!\!\sim =\{[0]_\sim,[1]_\sim\}.$$

## 1.2

→ Functions between sets

SECTION

#### 1.2.1 函数

• 函数的 Graph:

$$\Gamma_f \coloneqq \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

且满足  $(\forall a \in A)(\exists!b \in B)(a,b) \in \Gamma_f$ ,即  $(\forall a \in A)(\exists!b \in B)f(a) = b$ .

• 函数的图的表示:

$$\begin{cases} A \stackrel{f}{\to} B, \\ a \mapsto f(a). \end{cases}$$

## 1.2.2 Indentity function(id)

在集合 A 上有:

$$\operatorname{id}_A:A\to A, (\forall a\in A)\operatorname{id}_A(a)=a.$$

#### 1.2.3 函数的 image

若  $S \subset A, f : A \to B$ , 则:

$$f(S) := \{ b \in B : (\exists a \in S) f(a) = b \}.$$

则 f(A) 就是函数的 image, 记作 im f

#### 1.2.4 函数的 restriction

记  $S \subset A$ ,则:

$$f|_{S}: S \to A, (\forall s \in S) f|_{S}(s) = f(s).$$

#### 1.2.5 函数的复合 (composition)

• <math><math>f:  $A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, \ \ \bigcirc \ \ g \circ f: A \rightarrow C, ( <math> \forall a \in A)g \circ f(a) := g(f(a)).$ 

$$\begin{array}{c}
A \xrightarrow{f} B \\
\downarrow^{g \circ f} \downarrow_{g} .\\
C
\end{array}$$

此时称图是交换 (commutative) 的,因为图描述的所有从 A 到 C 的通路都会送 A 中的任意一个元素到相同的结果.

函数的复合满足结合律:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

 $\mathbb{P} h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$ 

#### 1.2.6 单射、全射、双射 (injections, surjections, bijections)

• 单射 (injections, **inj**)  $f: A \rightarrow B$  是单的若:

$$(\forall a' \in A)(\forall a'' \in A)a' \neq a'' \implies f(a') \neq f(a'').$$

实际上就是  $(\forall a' \in A)(\forall a'' \in A)f(a') = f(a'') \implies a' = a''$ . 一般用箭头  $f: A \hookrightarrow B$  表示.

• 全射 (surjections, **surj**)  $f: A \to B$  是满的若:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A) f(a) = b.$$

此时 im f = B. 一般用箭头  $f : A \rightarrow B$  表示.

- 双射 (bijections, **bij**) f 是双的当且仅当 f 又单又满,一般用箭头  $f: A \stackrel{\sim}{\to} B$  表示.
  - 。若  $\exists f: A \xrightarrow{\sim} B$ ,则记此时  $A \cong B$ ,若其中一个集合元素数量有限,则另一个也有限且两个集合元素数量相等.
  - 。集合 A 中的元素数量写作 |A|: 幂集写作  $2^A$ .

#### 1.2.7 单射、全射、双射的性质

• 双射有逆 (inverse):

#### THEOREM 1.2.1: 双射有逆

义函数  $f: A \overset{\sim}{\to} B$ ,定义  $g: B \to 2^A, (\forall b \in B)g(b) = \{a: f(a) = b\}$ ,则由于 f是单的,则  $(\forall a', a'' \in A)f(a') = f(a'') \implies a' = a'$ ,故  $(\forall b \in B)|g(b)| = 1$ .故 可以定义  $g': B \to A, (\forall b \in B)g(b) = a, \underline{st} f(a) = b,$ 且是良定义的.此时  $g' \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ g' = \mathrm{id}_B$ ,此称 g' 为 f 的逆,记为  $f^{-1}$ .

双射的逆唯一:

#### PROOF 1.2.1: 双射的逆唯一

定义  $f: A \xrightarrow{\sim} B$  的逆 g, g',由于  $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ ,因此:

$$g=g\circ \mathrm{id}_B=g\circ (f\circ g')=(g\circ f)\circ g'=\mathrm{id}_A\circ g'=g'.$$

故唯一.

- 左逆与右逆 (Linv & Rinv) 若  $f:A\to B, g\circ f=\mathrm{id}_A$ ,则称 g 是 f 的左逆,同理有右逆,如果  $A\neq\emptyset, f:A\to B$ :
  - $\circ$  f 有 Linv  $\iff$  f 是单的.

#### PROOF 1.2.2

1. ( $\Longrightarrow$ ) 若 f 有左逆, 设为  $f^{-1}$ , 则:

$$(\forall a, b \in A \land a \neq b) f^{-1}(f(a)) = \mathrm{id}_A(a) = a \neq b = f^{-1}(f(b)).$$

若  $(\exists a, b \in A) f(a) = f(b)$ , 则与上式矛盾, 故 f 是单的.

2.  $\iff$  若 f 是单的,有双射有逆那部分的讨论知道  $(\forall b \in \text{im } f) \exists ! a \in A \text{ st } f(a) = b$ ,故定义:

$$g(b) := \begin{cases} a, & \text{if } (\exists a \in A)b = f(a) \\ S, & \text{if } b \notin \text{im } f. \end{cases}$$

则 g 满足  $g \circ f = \mathrm{id}_A$ .

 $\circ$  f 有 Rinv  $\iff$  f 是全的.

#### PROOF 1.2.3: 只

证明  $\leftarrow$  的部分,由于 f 是满的,定义:

$$g:B\to 2^A, b\mapsto \{a\in A: f(a)=b\}.$$

则  $(\forall b \in B)g(b) \neq \emptyset$ , 定义:

$$h: B \to A, b \mapsto a \text{ st } a \in g(b).$$

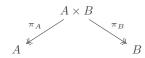
这样定义的 h 可能有很多种, 但都满足其是 f 的右逆:

$$(\forall b \in B)h(b) \in g(b) \implies f \circ h(b) = \mathrm{id}_B$$
.

。若 f 同时有左逆和右逆,则两个逆相同.

#### 一些单射、全射的例子

投影



其中  $\pi$  是投影 (projection) 映射:

$$\pi_A((a,b)) \coloneqq a,$$
 
$$\pi_B((a,b)) \coloneqq b.$$

是全射.

• 与不交并的映射



若将  $A \coprod B$  表示为  $A' \cup B'$ ,其中  $A' \overset{F_A}{\cong} A, B' \overset{F_B}{\cong} B$ ,则  $(\forall a \in A) f_A(a) \coloneqq F_A(a) \in A \coprod B$ .

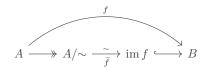
• 商

$$A \xrightarrow{f} A/\sim$$

• 函数的标准分解 (Canonical decomposition) 对函数  $f: A \to B$ , 在 A 上建立等价关系:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

则函数可以分解为:



其中  $\tilde{f}: A/\sim \to \operatorname{im} f, \tilde{f}([a]_{\sim}) \coloneqq f(a)$ , 不难验证这是良定义的, 现在证明  $\tilde{f}$  是双射:

#### **PROOF 1.2.4**

只需证明 f 既是单射也是全射就可以了:

1. **inj**:

$$\tilde{f}([a]_{\sim}) = \tilde{f}([b]_{\sim}) \implies f(a) = f(b) \implies a \sim b \implies [a]_{\sim} = [b]_{\sim}.$$

2. **surj**:

$$(\forall b \in \operatorname{im} f) \exists a \in A \ \underline{\operatorname{st}} \ f(a) = b \implies \tilde{f}([a]_{\sim}) = b.$$

1.3

SECTION

→ 范畴 (Categories)

#### 一个范畴 C 包括:

- 一个类 Obj(C), 包括了对象 (object).
- 对任意两个对象 A,B 存在一个集合记为  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(A,B)$  包含了从 A 到 B 的全部态射 (morphisms), 态射和  $\operatorname{Hom}$  满足以下特点:

幺元的存在性  $\forall A \in \mathbb{C}, \exists 1_A \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(A, A) =: \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(A)$ , 称为 A 的 indentity.

**态射复合的存在性** 若  $\exists f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B), g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ ,则存在 f,g 决定的态射  $gf \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C)$ ,由于 Hom 是集合,因此存在函数:

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B) \times \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C) \to \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C).$$

态射复合的结合性 若  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B), g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C), h \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(C,D)$ ,则

$$(hg)f = h(gf).$$

这一性质导致态射图可交换.

幺元律

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B), f1_A = 1_B f = f.$$

# \_\_\_些范畴的小例子

- 1. 对象为集合、态射为集合函数的范畴, 记为 SET:
  - Obj(SET) := 一个包含所有集合的类.
  - $\operatorname{Hom}_{\operatorname{SFT}}(A,B) := B^A$ .
- **2.** 一个关于二元运算的范畴: 若S上的二元运算  $\sim$  满足:

$$(\forall a,b,c \in S) \begin{cases} a \sim a, \\ a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c. \end{cases}$$

则定义 C~:

•  $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}_{\sim}) \coloneqq S$ .

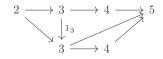
$$\bullet \ \ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{\sim}}(A,B) \coloneqq \begin{cases} (A,B), & \text{if } A \sim B, \\ \emptyset, & \text{if } A \nsim B. \end{cases}$$

定义复合为:

$$\circ_{\mathsf{C}_{-}}: ((A,B),(B,C)) \mapsto (A,C).$$

则其为一个范畴.

• 一个特例,如果认为 $S=\mathbb{Z}$ ,  $\sim$ 为 $\leqslant$ ,则态射图如下:



3. 由范畴诱导范畴

Slice CAT 考虑范畴 C 中的对象 A,接下来构建  $C_A$ :

。 
$$Obj(C_A) := C$$
 中所有到  $A$  的态射.

$$\circ \ \operatorname{Hom}_{\operatorname{C}_A}(f_1,f_2) = \{\sigma: f_1 = f_2\sigma\}.$$



C4 中态射的复合取自 C 中的态射复合.

CoSlice CAT 同理, 只不过将从到 A 变成了 A 到其他对象的态射.

**Opp CAT** 
$$\circ$$
 Obj( $C^{op}$ ) := Obj( $C$ ).

$$\circ \ \operatorname{Hom}\nolimits_{\mathsf{C}^{\operatorname{op}}}(A,B) \coloneqq \operatorname{Hom}\nolimits_{\mathsf{C}}(B,A).$$

#### 1.3.1 态射们

• 同构 (Isomorphisms) 若一个态射  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$  满足:

$$\exists g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(B, A) \text{ \underline{st} } gf = 1_A, fg = 1_B.$$

则 f 是一个同构,此时记 g 为  $f^{-1}$ ,如果 f 有左逆、右逆,则它们必然相等(唯一).

- 。14 是自逆的.
- $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ .

#### 一些关于逆相关范畴的例子

- 。一个同构都是 indentity 的例子, 用  $(\mathbb{Z}, \leq)$  定义的范畴.
- 。一个每个态射都是同构的例子,用  $(\mathbb{Z},=)$  定义的范畴. 这种性质的范畴被称为广群 (Groupoids).
- 自同构 (Automorphisms) 就是属于 End 的同构,所有 A 的自同构组成的集合称为  $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(A)$ 
  - $\circ f, g \in Aut_{\mathbb{C}}(A) \implies fg \in Aut_{\mathbb{C}}(A).$
  - $\circ \ f \in {\rm Aut}_{\mathbb{C}}(A) \implies f^{-1} \in {\rm Aut}_{\mathbb{C}}(A).$

Aut 是一个群 (Group).

单态射 (Monomophisms, Monic)即满足左消去律的态射:

$$\forall Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}), \forall a,b \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z,A), f: A \to B$$
 
$$f \text{ is a monic } \iff (f \circ a = f \circ b \implies a = b)$$

全态射 (Epimorphisms, **Epic**)
 满足右消去律的态射:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall a, b \in \text{Hom}_{C}(B, Z), f : A \to B$$

$$f \text{ is an epic} \iff (a \circ f = b \circ f \implies a = b)$$



$$\vdash\vdash\vdash c$$
.