

目录  
Contents

CHAPTER 1

PRELIMINARIES

1

§ 1.1 NAIVE SET THEORY |—————→ 1

集合的运算 ..... 1

disjoint union ..... 1

set product ..... 2

等价关系 ..... 2

分划与等价类 (partition & equivalence class) ..... 2

集合商 (set quotient) ..... 3

§ 1.2 FUNCTIONS BETWEEN SETS |—————→ 3

函数 ..... 3

Identity function(id) ..... 4

函数的 image ..... 4

函数的 restriction ..... 4

函数的复合 (composition) ..... 4

单射、全射、双射 (injections, surjections, bijections) ..... 5

单射、全射、双射的性质 ..... 5

§ 1.3 范畴 (CATEGORIES) |—————→ 8

态射们 ..... 9

§ 1.4 泛性质 (UNIVERSAL PROPERTIES) |—————→ 11

泛性质与一些例子 ..... 11

CHAPTER 2

GROUPS

17

§ 2.1 群的定义 ..... 17

    群的一些小性质 ..... 18

    阶 ..... 18

    一些总结 ..... 19

§ 2.2 一些群 ..... 20

    对称 (置换) 群 (symmetric groups) ..... 20

    二面体群 (Dihedral groups) ..... 20

    循环群和一些同余算术 (Cyclic groups and modular arithmetic) ..... 21

§ 2.3 群范畴 GRP ..... 22

    群同态 (Group homomorphisms) ..... 22

§ 2.4 群同态们 ..... 25

§ 2.5 自由群 (FREE GROUPS) ..... 26

    自由群的描述和泛性质 ..... 26

    自由群的具体构造 ..... 27

    自由交换群 (Free abelian group) ..... 29

# Preliminaries: Set theory & categories

## 1.1

SECTION

Naive set theory

## 1.1.1 集合的运算

「<sub>DEF</sub>

集合的运算

- $\cup$  : *union*;
- $\cap$  : *intersection*;
- $\setminus$  : *difference*;
- $\amalg$  : *disjoint union*;
- $\times$  : *set product*;

」

## 1.1.2 disjoint union

「<sub>DEF</sub>

Disjoint union

$S \amalg T$ : 得到  $S$  与  $T$  的拷贝  $S'$  与  $T'$ , 且  $S' \cap T' = \emptyset$ , 则  $S' \cup T' = S \amalg T$ . 其中一种依赖于 *set product*

的实现:

$$\begin{cases} S' := \{0\} \times S, \\ T' := \{1\} \times T. \end{cases}$$

」

### 1.1.3 set product

「**DEF**

**Set product**

$$S \times T := \{\{\{s\}, \{s, t\}\} : s \in S \wedge t \in T\}.$$

将  $\{\{s\}, \{s, t\}\}$  写作  $(s, t)$ , 称为 *pair*.

」

### 1.1.4 等价关系

「**DEF**

**等价关系**

若  $\mathcal{R}$  是二元关系, 则  $a, b$  满足关系  $\mathcal{R}$  写为:

$$a \mathcal{R} b.$$

若关系  $\sim$  定义在集合  $S$  上满足:

- reflexivity:  $(\forall a \in S) a \sim a$ .
- symmetry:  $(\forall a \in S)(\forall b \in S) a \sim b \implies b \sim a$ .
- transitivity:  $(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall c \in S) a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$ .

则称  $\sim$  是在集合  $S$  上的等价关系.

」

### 1.1.5 分划与等价类 (partition & equivalence class)

「**DEF**

**分划与等价类**

- 分划是一个集合的集合, 满足:

$$\begin{cases} (\forall a \in P)(\forall b \in P) a \cap b = \emptyset, \\ \bigcup_{a \in P} a = S. \end{cases}$$

则称  $P$  是  $S$  的分划.

- 等价类:

$$[a]_{\sim} := \{x \in S : x \sim a\}.$$

称此为在  $S$  上  $a$  的等价类, 由于等价类两两不交, 且具有自反性, 则  $S$  上某等价关系得到的所有等价类组成的集合是  $S$  的分划  $\mathcal{P}_{\sim}$ .

」

### 1.1.6 集合商 (set quotient)

「**DEF**

**集合商**

集合  $S$  与等价关系  $\sim$  的商定义为:

$$S/\sim := \mathcal{P}_{\sim}.$$

」

即  $a, b \in S$  等价  $\iff$  商到同一个元素.

#### 一个集合商的例子

定义  $\mathbb{Z}$  上的等价关系  $\sim : a \sim b \iff \frac{a-b}{2} \in \mathbb{Z}$ , 则:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0]_{\sim}, [1]_{\sim}\}.$$

## 1.2

## Functions between sets

SECTION

### 1.2.1 函数

「**DEF**

**函数**

- 函数的 Graph:

$$\Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

且满足  $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in \Gamma_f$ , 即  $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)f(a) = b$ .

- 函数的图的表示:

$$\begin{cases} A \xrightarrow{f} B, \\ a \mapsto f(a). \end{cases}$$

」

### 1.2.2 Identity function(id)

在集合  $A$  上有:

$$\text{id}_A : A \rightarrow A, (\forall a \in A) \text{id}_A(a) = a.$$

### 1.2.3 函数的 image

若  $S \subset A, f : A \rightarrow B$ , 则:

$$f(S) := \{b \in B : (\exists a \in S) f(a) = b\}.$$

则  $f(A)$  就是函数的 image, 记作  $\text{im } f$

### 1.2.4 函数的 restriction

记  $S \subset A$ , 则:

$$f|_S : S \rightarrow B, (\forall s \in S) f|_S(s) = f(s).$$

### 1.2.5 函数的复合 (composition)

- 若  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ , 则  $g \circ f : A \rightarrow C, (\forall a \in A) g \circ f(a) := g(f(a)).$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

此时称图是交换 (commutative) 的, 因为图描述的所有从  $A$  到  $C$  的通路都会送  $A$  中的任意一个元素到相同的结果.

函数的复合满足结合律:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ & & \searrow g \circ f & & \nearrow h \circ g & & \\ & & & & & & \end{array}$$

即  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$

## 1.2.6 单射、全射、双射 (injections, surjections, bijections)

「DEF

## 单射 (Injections, Inj)

 $f: A \rightarrow B$  是单的若:

$$(\forall a' \in A)(\forall a'' \in A)a' \neq a'' \implies f(a') \neq f(a'').$$

实际上就是  $(\forall a' \in A)(\forall a'' \in A)f(a') = f(a'') \implies a' = a''$ . 一般用箭头  $f: A \hookrightarrow B$  表示.

」

「DEF

## 全射 (Surjections, Surj)

 $f: A \rightarrow B$  是全的若:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)f(a) = b.$$

此时  $\text{im } f = B$ . 一般用箭头  $f: A \twoheadrightarrow B$  表示.

」

「DEF

## 双射 (Bijections, Bij)

$f$  是双的当且仅当  $f$  又单又全, 一般用箭头  $f: A \xrightarrow{\sim} B$  表示.

- 若  $\exists f: A \xrightarrow{\sim} B$ , 则记此时  $A \cong B$ , 若其中一个集合元素数量有限, 则另一个也有限且两个集合元素数量相等.
- 集合  $A$  中的元素数量写作  $|A|$ ; 幂集写作  $2^A$ .

」

## 1.2.7 单射、全射、双射的性质

- 双射有逆 (inverse):

## THEOREM 1.2.1: 双射有逆

定义函数  $f: A \xrightarrow{\sim} B$ , 定义  $g: B \rightarrow 2^A, (\forall b \in B)g(b) = \{a: f(a) = b\}$ , 则由于  $f$  是单的, 则  $(\forall a', a'' \in A)f(a') = f(a'') \implies a' = a''$ , 故  $(\forall b \in B)|g(b)| = 1$ . 故可以定义  $g': B \rightarrow A, (\forall b \in B)g(b) = a, \text{ st } f(a) = b$ , 且是良定义的.  
此时  $g' \circ f = \text{id}_A, f \circ g' = \text{id}_B$ , 此称  $g'$  为  $f$  的逆, 记为  $f^{-1}$ .

双射的逆唯一:

## PROOF 1.2.1: 双射的逆唯一

定义  $f: A \xrightarrow{\sim} B$  的逆  $g, g'$ , 由于  $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$ , 因此:

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

故唯一. □

- 左逆与右逆 (Linv & Rinv) 若  $f : A \rightarrow B, g \circ f = \text{id}_A$ , 则称  $g$  是  $f$  的左逆, 同理有右逆.  
如果  $A \neq \emptyset, f : A \rightarrow B$ :
  - $f$  有 Linv  $\iff f$  是单的.

### PROOF 1.2.2

1. ( $\implies$ ) 若  $f$  有左逆, 设为  $f^{-1}$ , 则:

$$(\forall a, b \in A \wedge a \neq b) f^{-1}(f(a)) = \text{id}_A(a) = a \neq b = f^{-1}(f(b)).$$

若  $(\exists a, b \in A) f(a) = f(b)$ , 则与上式矛盾, 故  $f$  是单的.

2. ( $\impliedby$ ) 若  $f$  是单的, 有双射有逆那部分的讨论知道  $(\forall b \in \text{im } f) \exists! a \in A \text{ st } f(a) = b$ , 故定义:

$$g(b) := \begin{cases} a, & \text{if } (\exists a \in A) b = f(a) \\ S, & \text{if } b \notin \text{im } f. \end{cases}$$

则  $g$  满足  $g \circ f = \text{id}_A$ . □

- $f$  有 Rinv  $\iff f$  是单的.

### PROOF 1.2.3

只证明 ( $\impliedby$ ) 的部分, 由于  $f$  是单的, 定义:

$$g : B \rightarrow 2^A, b \mapsto \{a \in A : f(a) = b\}.$$

则  $(\forall b \in B) g(b) \neq \emptyset$ , 定义:

$$h : B \rightarrow A, b \mapsto a \text{ st } a \in g(b).$$

这样定义的  $h$  可能有很多种, 但都满足其是  $f$  的右逆:

$$(\forall b \in B) h(b) \in g(b) \implies f \circ h(b) = \text{id}_B.$$

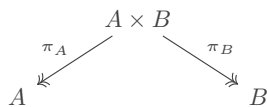
□

- 若  $f$  同时有左逆和右逆, 则两个逆相同.



## 一些单射、全射的例子

- 投影

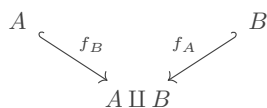


其中  $\pi$  是投影 (projection) 映射:

$$\begin{aligned} \pi_A((a, b)) &:= a, \\ \pi_B((a, b)) &:= b. \end{aligned}$$

是全射.

- 与不交并的映射



若将  $A \amalg B$  表示为  $A' \cup B'$ , 其中  $A' \cong A, B' \cong B$ , 则  $(\forall a \in A) f_A(a) := F_A(a) \in A \amalg B$ .

- 商

$$A \xrightarrow{f} A/\sim$$

- 函数的标准分解 (Canonical decomposition) 对函数  $f: A \rightarrow B$ , 在  $A$  上建立等价关系:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

则函数可以分解为:

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ A & \xrightarrow{\quad} & A/\sim & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{im } f \hookrightarrow B \end{array}$$

其中  $\tilde{f}: A/\sim \rightarrow \text{im } f, \tilde{f}([a]_\sim) := f(a)$ , 不难验证这是良定义的, 现在证明  $\tilde{f}$  是双射:

**PROOF 1.2.4**

只需证明  $f$  既是单射也是全射就可以了:

1. inj:

$$\tilde{f}([a]_\sim) = \tilde{f}([b]_\sim) \implies f(a) = f(b) \implies a \sim b \implies [a]_\sim = [b]_\sim.$$

2. surj:

$$(\forall b \in \text{im } f) \exists a \in A \text{ st } f(a) = b \implies \tilde{f}([a]_\sim) = b.$$

□

### 1.3

SECTION

## 范畴 (Categories)

一个范畴  $\mathbf{C}$  包括:

- 一个类  $\text{Obj}(\mathbf{C})$ , 包括了对象 (object).
- 对任意两个对象  $A, B$  存在一个集合记为  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  包含了从  $A$  到  $B$  的全部态射 (morphisms), 态射和  $\text{Hom}$  满足以下特点:

**幺元的存在性**  $\forall A \in \mathbf{C}, \exists 1_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A) =: \text{End}_{\mathbf{C}}(A)$ , 称为  $A$  的 identity.

**态射复合的存在性** 若  $\exists f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$ , 则存在  $f, g$  决定的态射  $gf \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C)$ , 由于  $\text{Hom}$  是集合, 因此存在函数:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C).$$

**态射复合的结合性** 若  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C), h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D)$ , 则

$$(hg)f = h(gf).$$

这一性质导致态射图可交换.

**幺元律**

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B), f1_A = 1_B f = f.$$

### 一些范畴的小例子

1. 对象为集合、态射为集合函数的范畴, 记为  $\mathbf{SET}$ :

- $\text{Obj}(\mathbf{SET}) :=$  一个包含所有集合的类.
- $\text{Hom}_{\mathbf{SET}}(A, B) := B^A$ .

2. 一个关于二元运算的范畴: 若  $S$  上的二元运算  $\sim$  满足:

$$(\forall a, b, c \in S) \begin{cases} a \sim a, \\ a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c. \end{cases}$$

则定义  $\mathbf{C}_{\sim}$ :

- $\text{Obj}(\mathbf{C}_{\sim}) := S$ .
- $\text{Hom}_{\mathbf{C}_{\sim}}(A, B) := \begin{cases} (A, B), & \text{if } A \sim B, \\ \emptyset, & \text{if } A \not\sim B. \end{cases}$

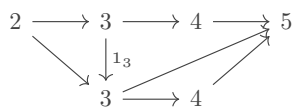
定义复合为:

$$\circ_{\mathbf{C}_{\sim}} : ((A, B), (B, C)) \mapsto (A, C).$$

则其为一个范畴.

## 1.3. 范畴 (CATEGORIES)

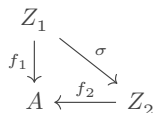
- 一个特例，如果认为  $S = \mathbb{Z}$ ， $\sim$  为  $\leq$ ，则态射图如下：



### 3. 由范畴诱导范畴

**Slice CAT** 考虑范畴  $C$  中的对象  $A$ ，接下来构建  $C_A$ ：

- $\text{Obj}(C_A) := C$  中所有到  $A$  的态射.
- $\text{Hom}_{C_A}(f_1, f_2) = \{\sigma : f_1 = f_2 \sigma\}$ .



$C_A$  中态射的复合取自  $C$  中的态射复合.

**CoSlice CAT** 同理，只不过将从到  $A$  变成了  $A$  到其他对象的态射.

**Opp CAT**

$$\begin{cases} \text{Obj}(C^{\text{op}}) := \text{Obj}(C), \\ \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(A, B) := \text{Hom}_C(B, A). \end{cases}$$

### 1.3.1 态射们

「**DEF**

#### 同构 (Isomorphisms)

若一个态射  $f \in \text{Hom}_C(A, B)$  满足：

$$\exists g \in \text{Hom}_C(B, A) \text{ st } gf = 1_A, fg = 1_B.$$

则  $f$  是一个同构，此时记  $g$  为  $f^{-1}$ ，如果  $f$  有左逆、右逆，则它们必然相等（唯一）。

」

#### 一些关于逆相关范畴的例子

- 一个同构都是 *identity* 的例子，用  $(\mathbb{Z}, \leq)$  定义的范畴.
- 一个每个态射都是同构的例子，用  $(\mathbb{Z}, =)$  定义的范畴. 这种性质的范畴被称为广群 (Groupoids).

「**DEF**

#### 自同构 (Automorphisms)

就是属于  $\text{End}$  的同构，所有  $A$  的自同构组成的集合称为  $\text{Aut}_C(A)$ .

- $f, g \in \text{Aut}_C(A) \implies fg \in \text{Aut}_C(A)$ .

- $f \in \text{Aut}_C(A) \implies f^{-1} \in \text{Aut}_C(A)$ .

$\text{Aut}$  是一个群 (Group). ┘

「DEF

### 单态射 (Monomorphisms, Monic)

即满足左消去律的态射:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall a, b \in \text{Hom}_C(Z, A), f : A \rightarrow B$$

$$f \text{ is a monic} \iff (f \circ a = f \circ b \implies a = b)$$

┘

「DEF

### 全态射 (Epimorphisms, Epic)

满足右消去律的态射:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall a, b \in \text{Hom}_C(B, Z), f : A \rightarrow B$$

$$f \text{ is an epic} \iff (a \circ f = b \circ f \implies a = b)$$

┘

在 SET 中, 单态射和全态射就是集合之间的单射和全射.

#### PROOF 1.3.1: SET 中的单/全态射是集合之间的单/全射

( $\Leftarrow$ ), 只需考虑单/全射的左/右逆即可:

$$f \circ a = f \circ b \implies f^{-1} \circ f \circ a = f^{-1} \circ f \circ b \implies a = b.$$

( $\Rightarrow$ ), 可以用反证法, 若  $f$  是非单射但是单态射, 则  $\exists a \neq b (f(a) = f(b))$ , 考虑态射  $A : \{*\} \rightarrow a, B : \{*\} \rightarrow b$ , 则  $A \neq B \wedge f \circ A = f \circ B$ , 与单态射的定义矛盾.

类似的, 若  $f : A \rightarrow B$  是非全射但是全态射, 则  $B \setminus \text{im } f \neq \emptyset$ , 定义态射  $X : B \rightarrow \{1\}, Y : B \rightarrow \{0, 1\}$ , 且:

$$Y(y) := \begin{cases} 1, & \text{if } y \in \text{im } f, \\ 0, & \text{if } y \notin \text{im } f. \end{cases}$$

则同样与全态射的定义矛盾. □

**注意! Iso 并不等于 Monic  $\wedge$  Epic!** 具体例子可以见  $(\mathbb{Z}, \leq)$  所定义的范畴: 每个 Hom 中只有一个态射, 则必然左/右可消去, 但只有 End 是同构. 同时, Monic 的复合是 Monic, Epic 同理.

## 1.4

SECTION

## 泛性质 (Universal properties)

泛性质与  $I(\text{initial})$  /  $F(\text{final})$  对象有关:

「DEF

I 对象与 F 对象

$A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 则  $A$  是  $I$  的若:

$$(\forall Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})) |\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Z)| = 1.$$

$A$  是  $F$  的若:

$$(\forall Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})) |\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, A)| = 1.$$

若  $I_1, I_2$  是  $\mathcal{C}$  上的  $I$  /  $F$  对象, 则  $I_1 \cong I_2$ .

」

## 1.4.1 泛性质与一些例子

泛性质长得像一个范畴的  $I/F$  对象, 比如:

## 空集的泛性质是「集合之间的映射」

因为以集合为对象、集合映射为态射的范畴  $\text{SET}$  中, 空集是  $I$  对象.

## 一些其他例子

- 集合商  $A/\sim$  的泛性质是从集合  $A$  到其他映射集合的映射, 满足: “等价的  $A$  中元素有相同的像.” 即

$$A \xrightarrow{f} Z, f \text{ st } a \sim b \implies f(a) = f(b).$$

以此为范畴  $\mathcal{C}_{A, \sim}$  的  $\text{Obj}$ , 则态射为  $\text{Hom}(f_1, f_2) = \{\sigma : \sigma f_1 = f_2\}$ , 则考虑以下  $cd$ :

$$\begin{array}{ccc} A/\sim & \xrightarrow{\exists! \sigma} & Z \\ \pi \uparrow & f_A \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

其中  $\pi$  已给定 (为商投影映射), 则  $A/\sim$  是这个范畴的  $I$  对象.

## PROOF 1.4.1

$\forall a \in A$  都有  $\sigma\pi(a) = f_A(a)$ , 即  $\sigma([a]_{\sim}) = f_A(a)$ , 这就相当于定义了  $\sigma$  (保证唯一), 易证  $\sigma$  是良定义的.  $\square$

同时,  $\text{im } f$  也是其  $I$  对象:

$$\begin{array}{ccc} \text{im } f & \xrightarrow{\exists! \sigma'} & Z \\ f \uparrow & f_A \nearrow & \\ A & & \end{array}$$

故由  $I$  对象的特点有  $\text{im } f \cong A/\sim$ .

- 集合的积集合  $A, B$  的积的泛性质是一个集合到  $A$  和  $B$  的两个映射.

给出三元组  $(Z, f_A, f_B)$ , 此为  $\mathbf{C}$  的  $\text{Obj}$ . 则其态射为:

$$\text{Hom}((Z_1, f_A, f_B), (Z_2, g_A, g_B)) := \{\sigma : g_A \sigma = f_A \wedge g_B \sigma = f_B\}.$$

$A \times B$  是其  $F$  对象:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & f_A \nearrow & & \nwarrow & \\ Z & & \xrightarrow{\exists! \sigma} & A \times B & \\ & f_B \searrow & & \swarrow & \\ & & B & & \end{array}$$

对  $\forall z \in Z$ , 都有:

$$\begin{cases} \pi_A \sigma(z) = f_A(z), \\ \pi_B \sigma(z) = f_B(z). \end{cases}$$

故  $\sigma : z \mapsto (f_A(z), f_B(z))$ , 唯一.

定义  $A \times B$  中的积 (product) 为  $\mathbf{C}_{A,B}$  那个的  $F$  对象 (若存在).

- 另一个例子, 在  $\mathbb{Z}, \leq$  定义的范畴中,  $A \times B := \min(A, B)$ .
- 余积 (Coproduct) 定义  $A, B$  余积  $A \amalg B$  为  $\mathbf{C}^{A,B}$  中的  $I$  对象, 则  $\text{SET}$  中的余积为两个集合的不交并.

#### PROOF 1.4.2

$$\begin{array}{ccccc} & & A \amalg B & & \\ & I_A \nearrow & & \nwarrow I_B & \\ A & & \xrightarrow{\exists! \sigma} & B & \\ & f_A \searrow & & \swarrow f_B & \\ & & Z & & \end{array}$$

如图所示, 考虑  $A \amalg B$  的一种实现:

$$A \cong A', B \cong B', A' \cap B' = \emptyset, A' \cup B' \cong A \amalg B.$$

则,  $\begin{cases} \forall a \in A, \sigma I_A(a) = f_A(a) \\ \forall b \in B, \sigma I_B(b) = f_B(b) \end{cases}$ , 故:

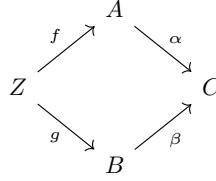
$$\sigma : a \mapsto \begin{cases} f_A(I_A^{-1}|_{A'}(a)), & \text{if } a \in A', \\ f_B(I_B^{-1}|_{B'}(b)), & \text{if } a \in B'. \end{cases}$$

□

「DEF

纤维积

首先定义范畴  $\mathbf{C}_{\alpha, \beta}$ :

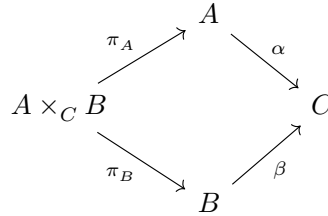


其  $\text{Obj}$  是如上三元组  $(Z, f, g)$  满足  $\alpha f = \beta g$ . 其态射为

$$\text{Hom}((Z_1, f_1, g_1), (Z_2, f_2, g_2)) := \{\sigma : f_1 = f_2 \sigma \wedge g_1 = g_2 \sigma\}.$$

看起来和  $\mathbf{C}_{A, B}$  很像, 只不过交换图要求更高了. 定义  $A, B$  的纤维余积  $A \times_C B$  为此范畴的  $F$  对象. 」

SET 上的纤维积可以如下定义:



不妨设  $A \times_C B \subset A \times B$ , 由于态射图要交换, 即  $\alpha \pi_A = \beta \pi_B$ , 故  $A \times_C B := \{(x, y) : \alpha(x) = \beta(y)\}$ . 现在来证明  $A \times_C B$  是终对象:

#### PROOF 1.4.3

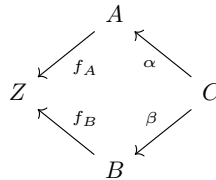
对于  $\forall Z$ , 若存在  $Z$  到  $A, B$  的映射  $f_A, f_B$  满足  $\alpha f_A = \beta f_B$ , 则  $\exists! \psi$  满足  $f_A = \pi_A \psi \wedge f_B = \pi_B \psi$ , 不妨设  $\psi$  将  $z$  映射到  $(\psi_A(z), \psi_B(z))$ . 则易得  $\psi_A = f_A, \psi_B = f_B$ , 因此  $\psi$  是存在且唯一的.  $\square$

- 纤维余积 (Fiber coproduct)

「DEF

纤维余积

定义范畴  $\mathbf{C}^{\alpha, \beta}$ :



以上是  $C^{\alpha, \beta}$  的  $\text{Obj}$ , 其态射为定义为:

$$\text{Hom}((Z_1, f_1, g_1), (Z_2, f_2, g_2)) := \{\sigma : \sigma f_1 = f_2 \wedge \sigma g_1 = g_2\}.$$

则纤维余积是这个态射的  $I$  对象.

以下是  $\text{SET}$  上的纤维余积:

重点是要解决态射图的“交换性质”, 即  $(\forall z \in C)(f_A \alpha(z) = f_B \beta(z))$ , 同时,  $I_A$  也会将同一个元素映射到同一个元素, 故设定价关系:

$$a \sim_A b \iff \alpha(a) = \alpha(b).$$

故  $[a]_{\sim_A} \subset C$  中的所有元素都会被映射到  $A \amalg_C B$  中的同一个元素, 若  $[a]_{\sim_A} \cap [b]_{\sim_B} \neq \emptyset$ , 则这两个等价类中的元素也都会映射到  $A \amalg_C B$  中的同一个元素, 故考虑等价关系:

$$[a]_{\sim_A} \sim_C [b]_{\sim_B} \iff [a]_{\sim_A} \cap [b]_{\sim_B} \neq \emptyset,$$

$$[a]_{\sim_A} \sim_C [b]_{\sim_A} \iff a = b.$$

故考虑商集:

$$(C/\sim_A \amalg C/\sim_B)/\sim_C.$$

则满足交换性质. 另若  $a \notin \text{im } \alpha$ , 则可映射到自身 (的等价类), 因此可以认为:

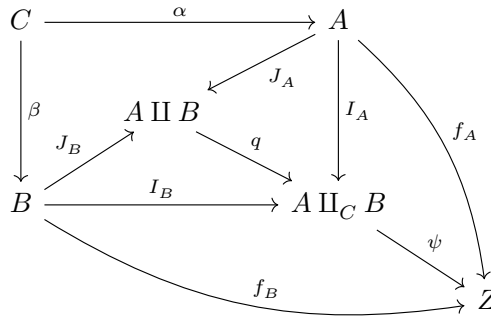
$$A \amalg_C B \cong (C/\sim_A \amalg C/\sim_B)/\sim_C \cup ((A \setminus \text{im } \alpha) \amalg (B \setminus \text{im } \beta)).$$

另外一个不太明显的想法是直接在  $A \amalg B$  上直接商:

考虑等价关系  $\sim$ , 满足  $A \amalg B$  被其商掉后的商集满足态射图的交换. 也就是说若  $\alpha^{-1}(z_1) \cap \beta^{-1}(z_2) \neq \emptyset$ , 则这样  $z_1 \sim z_2$ , 在商后会将  $C$  中的一大把元素映射到  $A \amalg B$  中的一个元素.

$$\sim := \begin{cases} (z_1, A) \sim (z_2, B) \iff \alpha^{-1}(z_1) \cap \beta^{-1}(z_2) \neq \emptyset, \\ (z_1, A) \sim (z_2, A) \iff z_1 = z_2. \end{cases}$$

则  $A \amalg_C B := A \amalg B / \sim$ .





接下来我们知道对于  $\forall c \in C$ , 都有  $\alpha^{-1}(\alpha(c)) \cap \beta^{-1}(\beta(c)) \neq \emptyset$ , 也即  $J_A \alpha(c) \sim J_B \beta(c)$ , 因此在此集合商之后有:

$$qJ_A \alpha(c) = qJ_B \beta(c) \implies I_A \alpha = I_B \beta.$$

其中,  $J_A, J_B$  是不满足态射图的交换的, 但最终  $I_A$  和  $I_B$  满足. 接下来证明这是个 I 对象:

#### PROOF 1.4.4

设  $\psi : A \amalg_C B \rightarrow (Z, f_A, f_B)$ , 则有  $\psi I_A = f_A, \psi I_B = f_B$ , 故  $(x, A) \mapsto [(x, A)]_{\sim} \mapsto \psi([(x, A)]_{\sim}) = f_A(x)$ , 故:

$$\psi([x, ?]_{\sim}) = f_?(x), ? \in \{A, B\}.$$

由于如果  $[x, A] \sim [y, B] \implies \alpha^{-1}(x) \cap \beta^{-1}(y) \neq \emptyset \implies \forall m_1, m_2 \in \alpha^{-1}(x) \cup \beta^{-1}(y)$ , 则  $m_1, m_2$  在  $Z$  中的像都相同 (由于态射图的交换性质), 因此  $A \amalg_C B$  的确为 I 对象. 如果是  $(C/\sim_A \amalg C/\sim_B)/\sim_C \cup ((A \setminus \text{im } \alpha) \amalg (B \setminus \text{im } \beta))$  形状的纤维余积, 则考虑

$$I_A : a \mapsto \begin{cases} [[\alpha^{-1}(a)]_{\sim_A}]_{\sim_C}, & \text{if } a \in \text{im } \alpha, \\ a, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$I_B$  同理. 则:

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} [[x]_{\sim_?}]_{\sim_C}, & \text{if } x \in C/\sim_A \amalg C/\sim_B, \\ f_?(x), & \text{if } x \in (A \setminus \text{im } \alpha) \amalg (B \setminus \text{im } \beta). \end{cases}$$

□



# Group, first encounter

乐子. 一个群 (group) 是一个单对象广群的同态集  $\text{Aut}$  .

## 2.1

## SECTION

## 群的定义

「DEF

群

- 群  $G$  是一个集合, 上面赋予了二元运算  $\circ_G : G \times G \rightarrow G$ , 满足结合律:

$$(\forall a, b, c \in G) a \circ_G b \circ_G c = a \circ_G (b \circ_G c).$$

- 存在幺元

$$(\exists e_G \in G)(\forall g \in G) \underline{st} \ g \circ_G e_G = e_G \circ_G g = g.$$

- 存在逆元

$$(\forall g \in G)(\exists g^{-1} \in G) g \circ_G g^{-1} = g^{-1} \circ_G g = e_G.$$

」

## 一些例子

比如  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \times)$  都是群.

可逆  $n \times n$  实矩阵组成的群表示为  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

### 2.1.1 群的一些小性质

- 么元唯一
- 逆元唯一

(由于结合律, 记  $g^n := \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ times}}, g^{-n} := \underbrace{g^{-1} \circ \cdots \circ g^{-1}}_{n \text{ times}}$ ), 显然  $g^a g^b = g^{a+b}$ .

如果是可交换群则用  $+$  表示定义在其上的运算.

- 群的消去律

由于群元素有逆, 因此可以同时左/右消去.

### 2.1.2 阶

「DEF

若  $g \in G, \exists n \in \mathbb{N}, g^n = e$ , 则  $|g| := \inf_{g^n=e} n$ , 称为该元素在群  $G$  中的阶.

群元素的阶

- 如  $g^n = e$ , 则  $|g| \mid n$ .

#### PROOF 2.1.1

考虑  $g^{n-|g|\lfloor \frac{n}{|g|} \rfloor}$ .

□

- 如果群是有限的, 那么  $|G|$  记为该群的阶. 则  $|G| \geq |g|, \forall g \in G$ .

群的阶在交换的前提下长得比较奇妙. 以下是另一个重要的推论:

- 若  $g \in G$  的阶为  $n$ , 则对任意  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ :

$$|g^m| = \frac{\text{lcm}(m, |g|)}{m} = \frac{|g|}{\gcd(m, |g|)}.$$

#### PROOF 2.1.2

若  $(g^m)^n = g^{mn} = e$ , 则:

$$|g| \mid mn \wedge m \mid mn \implies \inf mn = \text{lcm}(m, |g|) \implies \inf n = \frac{\text{lcm}(m, |g|)}{m} = \frac{|g|}{\gcd(m, |g|)}.$$

□

- 如果  $gh = hg$ , 则  $|gh| \mid \text{lcm}(|g|, |h|)$ : 显然  $(gh)^N = g^N h^N \implies (gh)^{\text{lcm}(|g|, |h|)} = e$ .

## 2.1.3 一些总结

- 乘法表可以用来表示一些群:

	$e$	$g$	$h$
$e$	$e$	$g$	$h$
$g$	$g$	$h$	$e$
$h$	$h$	$e$	$g$

	$e$	$g$
$e$	$e$	$g$
$g$	$g$	$e$

从乘法表看出, 单元素群 (平凡群)、二元素、三元素群都只有一种结构.

- $gG := \{gh : h \in G\} = G$ , 实际上是群到群自身的映射  $I_g : G \rightarrow G$ . 由群元素可逆易证.

以下是一些关于交换的例子:

- 若  $\gcd(|g|, |h|) = 1$ , 则  $|gh| = |g||h|$ , 以下是一个典型的证明:

**PROOF 2.1.3**

考虑  $(gh)^{|gh|} = e \implies (gh)^{|gh| \cdot |h|} = e$ , 即:

$$g^{|gh||h|} = e \implies |g| \mid |gh||h| \xrightarrow{\gcd(|h|, |g|)=1} |g| \mid |gh|.$$

同理  $|h| \mid |gh|$ , 故  $\text{lcm}(|g|, |h|) \mid |gh|$ , 又  $|gh| \mid \text{lcm}(|g|, |h|)$ , 故  $|gh| = |g||h|$ .  $\square$

- 若一个交换群  $G$  有有限的阶, 则设其元素阶的最大值为  $|g|$ , 则  $\forall h \in G (|h| \mid |g|)$ , 以下是另一个典型的证明:

**PROOF 2.1.4**

如果  $|h| \nmid |g|$ , 则  $\exists p \in \mathbb{P} \text{ st } |g| = p^m r, |h| = p^n s, m < n$ , 否则  $|h|$  中所有质数的指数都不大于  $|g|$ , 即  $|h| \mid |g|$ .

接下来考虑  $|g^{p^m} h^s|$ , 使用上一个推论:

$$|g^{p^m}| = r, |h^s| = p^n.$$

由于  $\gcd(p^n, r) = 1$ , 因为  $p \in \mathbb{P}$ . 故  $|g^{p^m} h^s| = |g^{p^m}| |h^s| = p^n r > |g|$ , 矛盾!  $\square$

## 2.2

## SECTION

## 一些群

## 2.2.1 对称(置换)群 (symmetric groups)

「DEF

对称群

对称群是一个对集合  $S_A$  的置换  $\text{Aut}_{\text{SET}}(S_A)$ , 一个对  $\{1, \dots, n\}$  的置换群记为  $S_n$ .

很显然  $|S_n| = n!$ , 这里指的是群元素数量而不是阶.

☞ 低阶对称群们  $S_2$  只有两个元素  $e, f$ :

$$e = (1, 2), f = (2, 1).$$

易证是交换的 (双元素群都是交换的)

$S_3$  有六个元素:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1), \\ (1, 3, 2), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \end{array} \right\}.$$

$S_3$  是不交换的.

☞ 群的生成初探 在  $S_3$  的例子中, 令  $x = (2, 1, 3), y = (3, 1, 2)$ , 则  $S_3$  中六各元素可以只用  $x, y$  表示:

$$S_3 = \{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}.$$

其中  $x^2 = e, y^3 = e$ . 我们称  $A \subset G$  生成  $G$  若每个  $G$  中元素都可以表示成  $A$  中元素与  $A$  中元素的逆的乘积.

## 2.2.2 二面体群 (Dihedral groups)

「DEF

二面体群

一个正  $n$  边形有以下  $2n$  种对称情况:

- 绕中心旋转  $\frac{2i\pi}{n}$ , 其中  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  有  $n$  种.
- 若  $n \in \text{Odd}$ , 则有  $n$  种翻转 (沿着中心与  $n$  个顶点的连线, 同时也连接对应边的中点).  
若  $n \in \text{Even}$ , 则有  $\frac{n}{2}$  种沿着中心到顶点的翻转,  $\frac{n}{2}$  种中心到边中点的翻转, 总共  $n$  个.

故加起来总共有  $2n$  种对称性, 因此二面体群记为  $D_{2n}$ . 」

如果给每个顶点标号, 则  $D_{2n} \subseteq S_n$ . 一些特殊的情况是  $D_6 = S_3, D_4 = S_2$  (因为群元素数量相同).

### 2.2.3 循环群和一些同余算术 (Cyclic groups and modular arithmetic)

「 DEF

循环群

建立在  $\mathbb{Z}$  上的等价关系如下:

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}) : a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (b - a).$$

这称为  $n$  的 congruence modulo. 我们记商集  $\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

则此是一个元素为同余等价类的集合:

$$[0]_n, \dots, [n-1]_n.$$

定义此集合上的运算  $+$ :

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

(由于同余保持加法) 这个运算是良定义的, 在此运算的基础上, 集合的单位元为  $[0]_n$ ,  $[m]_n$  的逆元为  $[-m]_n$ , 保持交换律、结合律, 因此是个交换群, 不妨记作  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . 」

以下是一些推论:

- $|[m]_n| = \frac{n}{\text{lcm}(m, n)}$ . 由于  $|g^m| = \frac{|g|}{\text{lcm}(|g|, m)}$ , 因此将  $[m]_n$  看成  $m[1]_n$  即可.

- 在上面推论的前提下得到一个关于循环群的重要性质:

同余等价类  $[m]_n$  可以生成整个  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \gcd(m, n) = 1$ , 因为阶刚好和群元素数量相等.

同余也保持乘法, 但是没法在  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  上面建立群 (因为有  $[0]_n$ ), 因此考虑:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \gcd(m, n) = 1\}.$$

则  $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$  是个群. 以下是一些证明:

- 首先证明这个集合关于乘法封闭:

$$\gcd(a, n) = 1 \wedge \gcd(b, n) = 1 \implies \gcd(ab, n) = 1 \implies [ab]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*.$$

- 群的单位元显然是  $[1]_n$ , 接下里是逆元的存在性:

由于  $\gcd(m, n) = 1$ , 则  $[m]_n$  可以生成整个  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , 故  $(\exists a \in \mathbb{N}) a[m]_n = [1]_n \implies [am]_n = [1]_n$ , 因此  $[m]_n$  在  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  中的逆元为  $[a]_n$ .

## 2.3

SECTION

## 群范畴 GRP

### 2.3.1 群同态 (Group homomorphisms)

DEF

群同态

群同态是一个态射:

$$\psi: G \rightarrow H.$$

不妨再定义:

$$\psi \times \psi: G \times G \rightarrow H \times H, \psi \times \psi((a, b)) = (\psi(a), \psi(b)).$$

则满足下图交换的态射  $\psi$  就是  $G \rightarrow H$  的群同态  $\in \text{Hom}_{\text{GRP}}(G, H)$ :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\psi \times \psi} & H \times H \\ \downarrow \circ_G & & \downarrow \circ_H \\ G & \xrightarrow{\psi} & H \end{array}$$

为了使上图交换必须有:

$$\begin{array}{ccc} (a, b) & & (a, b) \xrightarrow{\psi \times \psi} (\psi(a), \psi(b)) \\ \downarrow \circ_G & & \downarrow \circ_H \\ a \circ_G b & \xrightarrow{\psi} & \boxed{\psi(a \circ_G b)} \quad = \quad \boxed{\psi(a) \circ_H \psi(b)} \end{array}$$

即  $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$ : 群同态保持群结构.

DEF

GRP

- $\text{Obj}(\text{GRP}) :=$  所有的群.
- $\text{Hom}_{\text{GRP}}(G, H) :=$  所有  $G \rightarrow H$  的群同态.

群同态的一些性质如下:

- 群同态保持逆、幺元和阶

#### PROOF 2.3.1: 群同态保持逆、幺元

◦ 设  $f: G \rightarrow H$  是群同态, 则:

$$0_H \circ_H f(0_G) = f(0_G) = f(0_G \circ_G 0_G) = f(0_G) \circ_H f(0_G) \xrightarrow{\text{消去律}} f(0_G) = 0_H.$$



$$\circ f(g) \circ_H f(g^{-1}) = f(g \circ_G g^{-1}) = f(0_G) = 0_H \implies f(g^{-1}) = f(g)^{-1}.$$

□

「DEF

**群的直积 (Direct product)**

按照集合积的方法有：

$$G \times H = \{(a, b) : a \in G \wedge b \in H\}.$$

而  $G \times H$  上的运算定义为：

$$\circ_{G \times H} : (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H, ((a, b), (c, d)) \mapsto (a \circ_G c, b \circ_H d).$$

同时还有两个标准投影：

$$\begin{array}{ccc} & G \times H & \\ \pi_G \swarrow & & \searrow \pi_H \\ G & & H \end{array}$$

」

**PROOF 2.3.2: 群的直积就是 GRP 中两个群  $G, H$  的积：**

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi_G & \xrightarrow{\quad} & G \\ & \nearrow & & & \nearrow \pi_G \\ Z & \xrightarrow{\exists! \psi_G \times \psi_H} & G \times H & & \\ & \searrow & & & \searrow \pi_H \\ & & \psi_H & \xrightarrow{\quad} & H \end{array}$$

存在唯一一个态射  $\psi_G \times \psi_H$  满足条件。证明与集合积的证明相同：

$$\begin{aligned} \psi_G \times \psi_H(ab) &= (\psi_G(ab), \psi_H(ab)) = (\psi_G(a)\psi_G(b), \psi_H(a)\psi_H(b)) \\ &= (\psi_G(a), \psi_H(a))(\psi_G(b), \psi_H(b)) = \psi_G \times \psi_H(a)\psi_G \times \psi_H(b) \end{aligned}$$

故该态射也是一个群同态。

□

群的余积一般表示为  $G * H$ ，也被称为自由积 (free product)，此处按下不表。

## 🔗 一些关于交换群的东西

「DEF

Ab

- $\text{Obj}(\text{Ab}) :=$  所有的交换群。

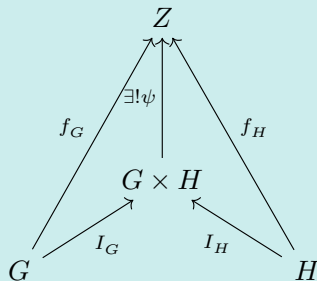
- $\text{Hom}_{\text{Ab}}(G, H) :=$  所有  $G \rightarrow H$  的群同态.

┘

这样一个范畴会比普通的 GRP 更为好看, 一个特点是:

### PROOF 2.3.3: Ab 中群的余积也是群的直积

考虑一下交换图:



其中  $I_G, I_H$  是嵌入映射  $I_G : g \mapsto (g, 0_H), I_H : h \mapsto (0_G, h)$ . 则 (由于图要交换):

$$\psi((g, 0_H)) = f_G(g), \psi((0_G, h)) = f_H(h).$$

另外  $\psi$  是一个群同态, 因此有:

$$\psi((a, b)) = \psi((a, 0_H) + (0_G, b)) = \psi((a, 0_H)) + \psi((0_G, b)) = f_G(a) + f_H(b).$$

这是  $\psi$  唯一的定义 (若存在), 接下来是要满足群同态的性质 (上面那个只是特殊的):

$$\begin{aligned} \psi((a, b) + (c, d)) &= \psi((a + c, b + d)) = f_G(a + c) + f_H(b + d) \\ &= f_G(a) + f_G(c) + f_H(b) + f_H(d) \\ &\stackrel{\text{交换群}}{=} f_G(a) + f_H(b) + f_G(c) + f_H(d) \\ &= \psi((a, b)) + \psi((c, d)). \end{aligned}$$

那的确是个群同态.

□

- $\mathbb{Q}$  不是任意两个非平凡群的直积.

不妨设  $G, H$  是非平凡的, 且  $G \times H = \mathbb{Q}$ , 讨论群  $G \times \{0_H\}$  和  $\{0_G\} \times H$ , 显然这俩群非平凡. 则讨论集合  $G \times \{0_H\} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ , 则必然非空, 设  $\frac{a}{b} \in G \times \{0_H\} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}, a \neq 0$ , 同理设  $\frac{c}{d} \in \{0_G\} \times H \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}, c \neq 0$ , 故  $ac = ad \cdot \frac{c}{d} = cb \cdot \frac{a}{b}$ , 故 (由于  $G \times \{0_H\}, \{0_G\} \times H$  是群, 因此  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  的倍数必然在对应的群里)  $ac \in G \times \{0_H\} \cap \{0_G\} \times H = \{0_H, 0_G\} = 0_{\mathbb{Q}}$ , 则  $ac = 0$

矛盾!

因此  $G \times \{0_H\}$  和  $\{0_G\} \times H$  必然有一个是平凡的, 故  $G.H$  有一个是平凡的.

- 存在这样的例子:  $H$  非平凡,  $G \times H \cong G$ .

一个著名的例子是:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x].$$

该群同态为  $(n, (a_0, a_1, \dots)) \mapsto (n, a_0, a_1, \dots)$ . 易验证是可逆的群同态.

## 2.4

SECTION

## 群同态们

### 一些例子

- 由于群同态只需满足保持运算, 那么将群  $G$  所有的元素全部映射到  $0_H$  的群同态  $\psi$  必然存在. 该群同态可以分解为  $G$  到 GRP 中的  $Z$  对象、再从该  $Z$  对象到  $H$  的群同态的复合. 这种群同态被称为平凡群同态.
- 指数 (Exponential) 群同态:  $\epsilon_g: \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto g^n$ , 注意到如果这个群同态是全射, 那么  $G$  中所有元素都可以用  $g$  的幂来表示, 即  $g$  生成了  $G$ .
- 对待整数集, 有一个投影商映射:  $\pi_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, a \mapsto [a]_n$ , 很显然这是全射, 因为  $a \mapsto a[1]_n$ , 而  $[1]_n$  生成了整个  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

群同态与阶相关的例子 注意到  $\psi(g^{|g|}) = \psi(0) = \psi(g)^{|g|} = 0$ , 故  $|\psi(g)| \mid |g|$ .

### 群同构

DEF

群同构

群同构就是在 GRP 范畴中的同构, 也就是群同态  $\psi$  必须要有一个群同态的逆  $\psi^{-1}$ .

#### PROOF 2.4.1: 一个群同态是群同构与该群同态是双的相互蕴含

显然只有双射有逆, 因此只需证明该逆是群同态:

$$\psi^{-1}(AB) = \psi^{-1}(\psi(\psi^{-1}(A))\psi(\psi^{-1}(B))) = \psi^{-1}(\psi(\psi^{-1}(A)\psi^{-1}(B))) = \psi^{-1}(A)\psi^{-1}(B).$$

□

因此指数函数  $\exp: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \times)$  实际上是一个群同构. 当然此时可以说  $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ .

「DEF

循环群

一个群  $G$  是循环群若  $\exists n \in \mathbb{N}$  st  $G \cong C_n$ .

」

群同构比普通的群同构保留了更多群的性质，比如阶、交换性等等：

- 若  $G \xrightarrow[f]{} H$ ，则  $(\forall g \in G)|g| = |f(g)|$ .
- 若  $G$  交换， $G \cong H$ ，则  $H$  也交换.

☞ **交换群上的群同态** 此时  $f : G \rightarrow H$ ，可以诱导出一个群若  $H$  是交换的，这个群是  $\text{Hom}_{\text{GRP}}(G, H)$ ：

$$(\psi + \phi)(z) := \psi(z) + \phi(z).$$

现在要满足一些性质：

- 封闭性，即  $\psi + \phi$  也是群同态.：

$$\begin{aligned} (\psi + \phi)(a + b) &= \psi(a + b) + \phi(a + b) = \psi(a) + \psi(b) + \phi(a) + \phi(b) \\ &\stackrel{\text{交换}}{=} \psi(a) + \phi(a) + \psi(b) + \phi(b) \\ &= (\psi + \phi)(a) + (\psi + \phi)(b). \end{aligned}$$

- 结合律、逆元、单位元自然取自  $H$  中的. 因此整个群  $\text{Hom}_{\text{GRP}}(G, H)$  都由交换群  $H$  诱导（与  $G$  是否交换无关）.

## 2.5

SECTION

## 自由群 (Free groups)

### 2.5.1 自由群的描述和泛性质

自由群是一个群以“特定的方式”包含了某个没有任何结构的集合  $A$ . 下面是一个例子：

$$\mathcal{F}(\{a\}) := \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

故  $\{*\}$  的自由群是一个无限循环群. 而空集  $\emptyset$  的自由群则是任意的平凡群.

☞ **自由群的泛性质** 自由群是这样范畴  $\mathcal{F}^A$  中的 I 对象，这个范畴可以如下定义：

「DEF

 $\mathcal{F}^A$ 

- $\text{Obj}(\mathcal{F}^A) := \{j \in \text{Hom}_{\text{SET}}(A, G) : G \in \text{Obj}(\text{GRP})\},$
- $\text{Hom}_{\mathcal{F}^A}(j_1, j_2) := \{\sigma : \sigma j_1 = j_2 \wedge \sigma \in \text{Hom}(\text{GRP})\}.$

」

以下是一个对  $\mathcal{F}(\{a\})$  同构与  $\mathbb{Z}$  的验证:

### 对 $\mathcal{F}(\{a\})$ 同构与 $\mathbb{Z}$ 的验证

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\exists! \psi} & G \\ j \uparrow & \nearrow f & \\ \{a\} & & \end{array}$$

$a$  必然是被映射到  $\mathbb{Z}$  中的 ‘1’, 代表着  $a^1$ , 而接下来, 由于  $\psi$  是群同态, 因此  $n \in \mathbb{Z}$  会被映射到  $f(a)^n$ . 这样就决定了  $\psi$  的整个 Graph.

## 2.5.2 自由群的具体构造

由于集合  $A$  没有任何结构, 我们不妨认为  $A$  中元素在自由群里的逆元不存在于  $A$  中 (其实存在也无所谓). 以下将给出一个自由群的具体构造:

「DEF

自由群

1. 给定一个新的集合  $A^{-1} \cong A, f: a \mapsto a^{-1}$ , 此时只是记号阶段, 只有这些到了自由群里才会真正起到“逆”的作用.
2. 给出“字 (Word)”的定义:

「DEF

字

我们可以将  $W(A)$  定义如下:

$$W(A) := \{f \in \text{Hom}_{\text{SET}}(\{1, \dots, n\}, A) : n \in \mathbb{N}\}.$$

其实就是用  $A$  中元素组合而成的有限字串. 其中  $n$  被称为字串的长度, 我们不妨用  $L(w)$  来表示字串  $w$  的长度.

顺带一提的是, 长度为 0 的字串也算, 称为空字串.

」

3. 字串里面有些特殊的存在, 比如:

$$xyy^{-1}x \text{ 和 } x^2.$$

在群里我们认为是相同的, 我们可以将其商掉, 但为了方便我们构造个函数来解决这一困扰:

构造“约化”函数  $r: W(A) \rightarrow W(A)$ , 它的作用是从左到右找到第一个  $aa^{-1}$  或者  $a^{-1}a$  的组合, 然后将它删去. 显然有以下两点:

- 如果  $r(w) = w$ , 则我们认为这个字串已经被化简到最简了.
- $r^{\lfloor L(w)/2 \rfloor}(w)$  必然是最简的, 因为如果连续有效化简  $\left\lfloor \frac{L(w)}{2} \right\rfloor$  那么多次, 则字串的长度会被减到小于零, 矛盾.

那不妨定义  $R: W(A) \rightarrow W(A), w \mapsto r^{\lfloor L(w)/2 \rfloor}(w)$ .

4. 解下来我们认为将  $W(A)$  中的元素全部  $R$  之后就可以得到自由群, 即  $\text{im } R$ . 定义自由群上的运算:

$$a \sim b := R(ab).$$

这里的  $ab$  指的是字符串接合.

$$ab: n \mapsto \begin{cases} a(n), & \text{if } n \leq L(a) \\ b(n), & \text{if } L(a) + L(b) \geq n > L(a). \end{cases}$$

接下来是验证:

- 结合律. 这个是明显的, 因为只需一次  $R$  就可以化到最简.
- 么元就是空字符串.
- 逆元就是将每一个元素都变成其“逆”然后再将字符串顺序颠倒.

这样就给出了对任意一个集合  $A$ , 其自由群的定义. ┘

### PROOF 2.5.1: 自由群的泛性质

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{\exists! \psi} & G \\ j \uparrow & \nearrow f & \\ A & & \end{array}$$

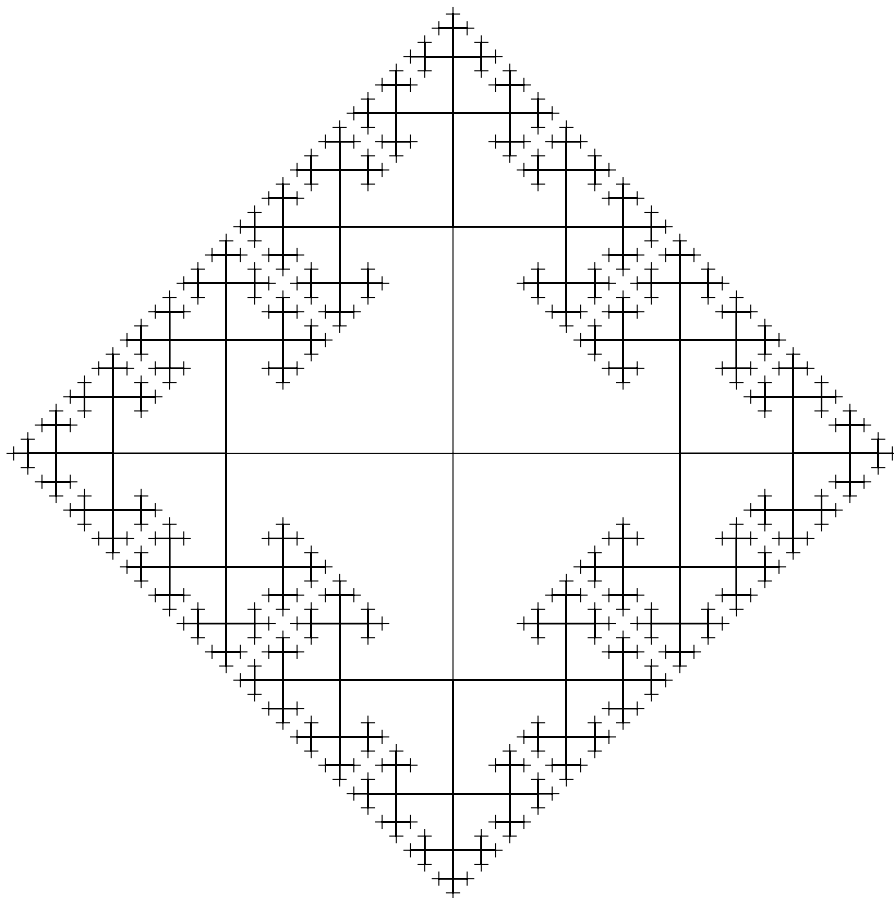
不妨考虑  $\mathcal{F}(A)$  的超集  $W(A)$ , 由于交换性, 必然有:

$$\psi j(a) = f(a) \implies \psi(j_a) = f(a).$$

其中  $j_a: 1 \rightarrow a$ . 同时, 由于是群同态有

$$\psi \left( \underset{i=1}{\overset{n}{\sim}} j_{a_i} \right) = \prod_{i=1}^n f(a_i).$$

而  $W(A)$  中的所有元素都可以用  $\sim \prod_{i=1}^n j_{a_i}$  来表示, 因此将  $\psi$  限制到  $\mathcal{F}(A)$  上即可.  $\square$



只可意会的二阶自由群 Cayley 图

### 2.5.3 自由交换群 (Free abelian group)

自由交换群和自由群类似, 只不过群变成了交换群:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{\text{ab}}(A) & \xrightarrow{\psi} & G \\ \uparrow j & \nearrow f & \\ A & & \end{array}$$

考虑  $\mathbb{Z}$  的  $n$  次直积 (在交换的前提下记为直和)  $\mathbb{Z}^{\oplus n}$ , 则面对元数数量为  $n$  的群  $A$  时,  $\mathbb{Z}^{\oplus n} \cong \mathcal{F}^{\text{ab}}(A)$ .

**PROOF 2.5.2:**  $\mathbb{Z}^{\oplus|A|} \cong \mathcal{F}^{\text{ab}}(A)$ 

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{\oplus|A|} & \xrightarrow{\psi} & G \\ j \uparrow & \nearrow f & \\ A & & \end{array}$$

$j$  定义为:

$$j : a_i \mapsto (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0).$$

则我们可以仿照自由群那样让  $j(a)$  生成整个群 (其实上也的确如此):

$$+_{\mathbb{Z}^{\oplus|A|}} : ((m_1, \dots, m_n), (k_1, \dots, k_n)) \mapsto (m_1 + k_1, \dots, m_n + k_n).$$

因此:

$$(m_1, \dots, m_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i j(a_i).$$

由于图表的交换性, 那么有:

$$\psi \left( (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0) \right) = f(a_i).$$

和群同态的性质——

$$\psi((m_1, \dots, m_n)) = \prod_{1 \leq i \leq n} f(a_i)^{m_i}.$$

最后验证这确实是个群同态:

$$\begin{aligned} \psi((m_1, \dots, m_n) + (k_1, \dots, k_n)) &= \psi((m_1 + k_1, \dots, m_n + k_n)) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} f(a_i)^{m_i + k_i} \\ &\stackrel{\text{Abelian}}{=} \prod_{1 \leq i \leq n} f(a_i)^{m_i} \prod_{1 \leq i \leq n} f(a_i)^{k_i} \\ &= \psi((m_1, \dots, m_n)) \psi((k_1, \dots, k_n)) \end{aligned}$$

□

在此之上, 我们定义针对集合的群直和:

「**DEF**

**直和**

设  $H$  是一个交换群,  $A$  是一个集合, 则  $\text{Hom}_{\text{SET}}(A, H) = H^A$  是一个交换群. 直和是  $H^A$  的子集, 定义如下:

$$H^{\oplus A} := \{f \in H^A : |\{a \in A : f(a) \neq 0_H\}| < \infty\}.$$

」



这解决了不可数集合的自由群问题, 如下:

- 定义  $J_a : A \rightarrow H^{\oplus A}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{if } x = a, \\ 0, & \text{if } x \neq a. \end{cases}$  则我们可以将  $H^{\oplus A}$  中的元素以下表示:

$$\sum_{a \in A} m_a J_a.$$

则显然有  $\psi : \sum_{a \in A} m_a J_a \mapsto \sum_{a \in A} m_a f(a).$

当然  $m_a$  只有有限个不为零.