Chapter

Contents

目录
Contents

Chapter 1

Preliminaries: Set theory & categroies

1.1 Naive set theory

Section

1.1.1 集合的运算

- $\cup$: union;
- $\cap$: intersection;
- $\setminus$: difference;
- $\amalg$: disjoint union;
- $\times$: set product;

1.1.2 disjoint union

- $S \amalg T$：得到 S 与 T 的拷贝 S' 与 T'，且 $S' \cap T' = \emptyset$，则 $S' \cup T' = S \amalg T$.
- 其中一种依赖于 set product 的实现：

$$\begin{cases} S' := \{0\} \times S, \\ T' := \{1\} \times T. \end{cases}$$

1.1.3 set product

$$S \times T := \{\{\{s\},\{s,t\}\} : s \in S \wedge t \in T\}.$$

将 $\{\{s\},\{s,t\}\}$ 写作 (s,t)，称为 pair.

1.1.4 等价关系

- 若 $\mathcal{R}$ 是二元关系，则 a,b 满足关系 $\mathcal{R}$ 写为:

  $$a \,\mathcal{R}\, b.$$

- **等价关系**: 若关系 $\sim$ 定义在集合 S 上满足:
  - reflexivity: $(\forall a \in S)a \sim a$.
  - symmetry: $(\forall a \in S)(\forall b \in S)a \sim b \implies b \sim a$.
  - transitivity: $(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall c \in S)a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$.

  则称 $\sim$ 是在集合 S 上的等价关系.

1.1.5 分划与等价类 (partition & equivalence class)

- **分划**是一个集合的集合，满足:

  $$\begin{cases} (\forall a \in P)(\forall b \in P)a \cap b = \emptyset, \\ \bigcup\limits_{a \in P} a = S. \end{cases}$$

  则称 P 是 S 的分划.

- 等价类:

  $$[a]_\sim := \{x \in S : x \in a\}.$$

  称此为在 S 上 a 的等价类，由于等价类两两不交，且具有自反性，则 S 上某等价关系得到的所有等价类组成的集合是 S 的分划 $\mathcal{P}_\sim$.

1.1.6 集合商 (set quotient)

集合 S 与等价关系 $\sim$ 的商定义为:

$$S/\!\sim := \mathcal{P}_\sim.$$

即 $a,b \in S$ 等价 $\iff$ 商到同一个元素.

一个集合商的例子

定义 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系 $\sim: a \sim b \iff \dfrac{a-b}{2} \in \mathbb{Z}$，则：

$$\mathbb{Z}/\!\sim = \{[0]_\sim, [1]_\sim\}.$$

1.2 SECTION Functions between sets

1.2.1 函数

- 函数的 Graph:

$$\Gamma_f := \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

  且满足 $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a,b) \in \Gamma_f$，即 $(\forall a \in A)(\exists! b \in B) f(a) = b$.

- 函数的图的表示:

$$\begin{cases} A \xrightarrow{f} B, \\ a \mapsto f(a). \end{cases}$$

1.2.2 Indentity function(id)

在集合 A 上有:

$$\mathrm{id}_A : A \to A, (\forall a \in A)\, \mathrm{id}_A(a) = a.$$

1.2.3 函数的 image

若 $S \subset A, f : A \to B$，则:

$$f(S) := \{b \in B : (\exists a \in S) f(a) = b\}.$$

则 $f(A)$ 就是函数的 image，记作 $\operatorname{im} f$

1.2.4 函数的 restriction

记 $S \subset A$，则:

$$f|_S : S \to A, (\forall s \in S) f|_S(s) = f(s).$$

1.2.5 函数的复合 (composition)

- 若 $f : A \to B, g : B \to C$，则 $g \circ f : A \to C, (\forall a \in A) g \circ f(a) := g(f(a))$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} .$$

此时称图是交换 *(commutative)* 的，因为图描述的所有从 A 到 C 的通路都会送 A 中的任意一个元素到相同的结果.

函数的复合满足结合律:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd} .$$

即 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

1.2.6 单射、全射、双射 (injections, surjections, bijections)

- 单射 (injections, **inj**)

  $f : A \to B$ 是单的若:

  $$(\forall a' \in A)(\forall a'' \in A) a' \neq a'' \implies f(a') \neq f(a'').$$

  实际上就是 $(\forall a' \in A)(\forall a'' \in A) f(a') = f(a'') \implies a' = a''$. 一般用箭头 $f : A \hookrightarrow B$ 表示.

- 全射 (surjections, **surj**) $f : A \to B$ 是满的若:

  $$(\forall b \in B)(\exists a \in A) f(a) = b.$$

  此时 $\operatorname{im} f = B$. 一般用箭头 $f : A \twoheadrightarrow B$ 表示.

- 双射 (bijections, **bij**) f 是双的当且仅当 f 又单又满，一般用箭头 $f : A \xrightarrow{\sim} B$ 表示.
  - 若 $\exists f : A \xrightarrow{\sim} B$，则记此时 $A \cong B$，若其中一个集合元素数量有限，则另一个也有限且两个集合元素数量相等.
  - 集合 A 中的元素数量写作 $|A|$；幂集写作 2^A.

1.2.7 单射、全射、双射的性质

- 双射有逆 (inverse)：

> **THEOREM 1.2.1: 双射有逆**
>
> 义函数 $f : A \overset{\sim}{\to} B$，定义 $g : B \to 2^A, (\forall b \in B)g(b) = \{a : f(a) = b\}$，则由于 f 是单的，则 $(\forall a', a'' \in A)f(a') = f(a'') \implies a' = a'$，故 $(\forall b \in B)|g(b)| = 1$. 故可以定义 $g' : B \to A, (\forall b \in B)g(b) = a$，<u>st</u> $f(a) = b$，且是良定义的.
>
> 此时 $g' \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ g' = \mathrm{id}_B$，此称 g' 为 f 的逆，记为 f^{-1}.

双射的逆唯一：

> **PROOF 1.2.1: 双射的逆唯一**
>
> 定义 $f : A \overset{\sim}{\to} B$ 的逆 g, g'，由于 $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$，因此：
>
> $$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_A \circ g' = g'.$$
>
> 故唯一. □

- 左逆与右逆 (Linv & Rinv) 若 $f : A \to B, g \circ f = \mathrm{id}_A$，则称 g 是 f 的左逆，同理有右逆.
如果 $A \neq \emptyset, f : A \to B$:
  - f 有 Linv $\iff$ f 是单的.

> **PROOF 1.2.2**
>
> 1. ($\implies$) 若 f 有左逆，设为 f^{-1}，则:
>
> $$(\forall a, b \in A \wedge a \neq b)f^{-1}(f(a)) = \mathrm{id}_A(a) = a \neq b = f^{-1}(f(b)).$$
>
>   若 $(\exists a, b \in A)f(a) = f(b)$，则与上式矛盾，故 f 是单的.
>
> 2. $\impliedby$ 若 f 是单的，有双射有逆那部分的讨论知道 $(\forall b \in \operatorname{im} f)\exists! a \in A$ <u>st</u> $f(a) = b$，故定义:
>
> $$g(b) := \begin{cases} a, & \text{if } (\exists a \in A)b = f(a) \\ S, & \text{if } b \notin \operatorname{im} f. \end{cases}$$
>
>   则 g 满足 $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
>
> □

◦ f 有 Rinv $\iff$ f 是全的.

PROOF 1.2.3: 只

证明 $\impliedby$ 的部分，由于 f 是满的，定义:

$$g : B \to 2^A, b \mapsto \{a \in A : f(a) = b\}.$$

则 $(\forall b \in B)g(b) \neq \emptyset$，定义:

$$h : B \to A, b \mapsto a \ \underline{\mathrm{st}}\ a \in g(b).$$

这样定义的 h 可能有很多种，但都满足其是 f 的右逆:

$$(\forall b \in B)h(b) \in g(b) \implies f \circ h(b) = \mathrm{id}_B\,.$$

□

◦ 若 f 同时有左逆和右逆，则两个逆相同.

一些单射、全射的例子

- 投影

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, two heads, "\pi_A"'] \arrow[dr, two heads, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

其中 π 是投影 (projection) 映射:

$$\begin{aligned} \pi_A((a,b)) &:= a, \\ \pi_B((a,b)) &:= b. \end{aligned}.$$

是全射.

- 与不交并的映射

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook, "f_B"] & & B \arrow[dl, hook', "f_A"'] \\ & A \amalg B & \end{tikzcd}$$

若将 $A \amalg B$ 表示为 $A' \cup B'$，其中 $A' \overset{F_A}{\cong} A, B' \overset{F_B}{\cong} B$，则 $(\forall a \in A)f_A(a) := F_A(a) \in A \amalg B$.

- 商

$$A \overset{f}{\twoheadrightarrow} A/\sim$$

- 函数的标准分解 (Canonical decomposition) 对函数 $f : A \to B$，在 A 上建立等价关系:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

则函数可以分解为：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "f"] & A/\sim \arrow[r, "\sim", "\tilde{f}"'] & \operatorname{im} f \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

其中 $\tilde{f}: A/\sim \to \operatorname{im} f, \tilde{f}([a]_\sim) := f(a)$，不难验证这是良定义的，现在证明 $\tilde{f}$ 是双射：

PROOF 1.2.4

只需证明 f 既是单射也是全射就可以了：

1. **inj**:
$$\tilde{f}([a]_\sim) = \tilde{f}([b]_\sim) \implies f(a) = f(b) \implies a \sim b \implies [a]_\sim = [b]_\sim.$$
2. **surj**:
$$(\forall b \in \operatorname{im} f)\exists a \in A \ \underline{\text{st}}\ f(a) = b \implies \tilde{f}([a]_\sim) = b.$$

$\square$

1.3 Section 范畴 (Categories)

一个范畴 C 包括：

- 一个类 $\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，包括了对象 (object).
- 对任意两个对象 A, B 存在一个集合记为 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 包含了从 A 到 B 的全部态射 (morphisms)，态射和 Hom 满足以下特点：

幺元的存在性 $\forall A \in \mathsf{C}, \exists 1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A) =: \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$，称为 A 的 indentity.

态射复合的存在性 若 $\exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$，则存在 f, g 决定的态射 $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C)$，由于 Hom 是集合，因此存在函数：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C).$$

态射复合的结合性 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C), h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, D)$，则

$$(hg)f = h(gf).$$

这一性质导致态射图可交换.

幺元律

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), f1_A = 1_B f = f.$$

一些范畴的小例子

1. 对象为集合、态射为集合函数的范畴，记为 SET：

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{SET}) :=$ 一个包含所有集合的类.
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{SET}}(A, B) := B^A$.

2. 一个关于二元运算的范畴：若 S 上的二元运算 $\sim$ 满足：

$$(\forall a, b, c \in S)\begin{cases} a \sim a, \\ a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c. \end{cases}$$

则定义 $\mathsf{C}_\sim$：

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}_\sim) := S$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_\sim}(A, B) := \begin{cases} (A, B), & \text{if } A \sim B, \\ \emptyset, & \text{if } A \nsim B. \end{cases}$

定义复合为：

$$\circ_{\mathsf{C}_\sim} : ((A, B), (B, C)) \mapsto (A, C).$$

则其为一个范畴.

- 一个特例，如果认为 $S = \mathbb{Z}$，$\sim$ 为 $\leqslant$，则态射图如下：

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d, "1_3"] & 4 \arrow[r] & 5 \\
& 3 \arrow[r] \arrow[urr] & 4 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

3. **由范畴诱导范畴**

Slice CAT 考虑范畴 C 中的对象 A，接下来构建 C_A：

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}_A) := \mathsf{C}$ 中所有到 A 的态射.
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_A}(f_1, f_2) = \{\sigma : f_1 = f_2\sigma\}$.

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
A & Z_2 \arrow[l, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

C_A 中态射的复合取自 C 中的态射复合.

CoSlice CAT 同理，只不过将从到 A 变成了 A 到其他对象的态射.

Opp CAT

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$.

1.3.1 态射们

- **同构** (Isomorphisms) 若一个态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 满足:

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A) \ \underline{\mathrm{st}} \ gf = 1_A, fg = 1_B.$$

则 f 是一个同构，此时记 g 为 f^{-1}，如果 f 有左逆、右逆，则它们必然相等（唯一）.

  - 1_A 是自逆的.
  - $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

一些关于逆相关范畴的例子

- 一个同构都是 *indentity* 的例子，用 $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ 定义的范畴.
- 一个每个态射都是同构的例子，用 $(\mathbb{Z}, =)$ 定义的范畴. 这种性质的范畴被称为广群 *(Groupoids)*.

- 自同构 (Automorphisms) 就是属于 End 的同构，所有 A 的自同构组成的集合称为 $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$

  - $f, g \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A) \implies fg \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$.
  - $f \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A) \implies f^{-1} \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$.

Aut 是一个**群** (Group).

- 单态射 (Monomophisms, **Monic**)

即满足左消去律的态射:

$$\forall Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}), \forall a, b \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, A), f : A \to B$$

$$f \text{ is a monic} \iff (f \circ a = f \circ b \implies a = b)$$

- 全态射 (Epimorphisms, **Epic**)

满足右消去律的态射:

$$\forall Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}), \forall a, b \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, Z), f : A \to B$$

$$f \text{ is an epic} \iff (a \circ f = b \circ f \implies a = b)$$

$$^{124235}\!/_{2432}.$$

$$\vdash\vdash\longmapsto \quad c.$$