

**Автономная некоммерческая организация высшего образования
«Университет Иннополис»**

**АННОТАЦИЯ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
(МАГИСТЕРСКУЮ ДИССЕРТАЦИЮ)
ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ
09.04.01 ИНФОРМАТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА**

**НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ
«ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ИНЖЕНЕРИЯ ДАННЫХ»**

Тема

Эффективные методы сжатия тензорных данных

Выполнили

Нестеров Григорий Алексеевич

подпись

Ващенко Александр Александрович

подпись

Иннополис, Innopolis, 2025

Оглавление

1	Введение	3
2	Основные термины	6
3	Обзор литературы	8
4	Методология	11
5	Реализация	14
6	Анализ результатов	16
7	Заключение	19
	Список литературы	21

Глава 1

Введение

Высокоразмерные данные (тензоры) встречаются в различных прикладных областях. В качестве примеров могут выступать: нейронные сети, медико-биологические сигналы (ЭЭГ, МРТ), гиперспектральных изображений. Такие данные становятся все больше, требуя больших вычислительных мощностей для их использования. Классические методы тензорной декомпозиции, такие как Tucker [1], Tensor-Train (TT) [2], CANDECOMP/PARAFAC (CPD/CP) [1], [3]—[6], и их современные расширения позволяют аппроксимировать исходные тензора, уменьшая требуемый объём памяти и ускоряя вычисления на получаемых структурах [5], [6]. Однако эффективность разложения сильно зависит от правильно выбранных параметров метода, самого метода декомпозиции, что остаётся открытой исследовательской проблемой в зависимости от метода декомпозиции.

Актуальность работы. С ростом масштабов нейронных сетей и объёмов научных данных возрастает потребность в универсальных, устойчивых и масштабируемых методах тензорного сжатия, которые предоставляют гарантированное качество аппроксимированных данных и имеют готовые реализации с низкими накладными расходами по времени и памяти.

Цель работы — разработать и экспериментально обосновать эффективные методы выбора ранга и практические рекомендации по применению методов тензорной декомпозиции на примере задачи тензорного сжатия. А также в качестве прикладного практического примера, воспроизвести и улучшить,

на основе существующего исследования, метод сжатия нейронных сетей.

Задачи работы:

1. Провести теоретический и эмпирический анализ распространённых методов тензорной декомпозиции (Tucker, TT, CPD, RTPCA [7]) на тензорах примерах: изображения (3D), видео (4D) и ЭЭГ (6D).
2. Сравнить современные Python-библиотеки по метрикам «время исполнения», «пиковое потребление памяти» и «норма Фробениуса ошибки восстановления».
3. Разработать алгоритм автоматического выбора ранга для форматов Tucker и TT, обеспечивающий заданное отношение сжатия при минимальной ошибке.
4. Интегрировать алгоритм в конвейер сжатия сверточных и полносвязных слоёв и предоставить открытый Python-код.
5. Оценить точность–сжатие на стандартных архитектурах CNN и выделить направления дальнейшей оптимизации.

Научная новизна работы заключается в предложении адаптивной процедуры выбора ранга, позволяющей автоматически контролировать компромисс «точность–компрессия» для неоднородных тензоров и слоёв нейронных сетей.

Практическая значимость. Разработанный программный пакет и методические рекомендации облегчают выбор инструментария при применении тензорных разложений в прикладных задачах хранения, передачи и ускорения обработки данных.

В дальнейших разделах аннотации последовательно рассмотрены исходные предпосылки, методология экспериментов, полученные результаты и выводы, что отражает структуру магистерской диссертации.

Глава 2

Основные термины

Тензор. N -го порядка (или N -мерный) тензор — элемент прямого произведения N векторных пространств. Для $N=1$ это вектор, для $N=2$ — матрица, при $N \geq 3$ говорят о тензорах высшего порядка.

Форматы хранения.

- *Dense* — все элементы хранятся явно (базовый случай).
- *Sparse* — сохраняются только ненулевые элементы; эффективно при разреженных данных.
- *Block-Sparse* — группирует ненулевые элементы в блоки, ускоряя операции на структурированных данных.
- *(Super)симметричные* тензоры используют симметрию по модам, уменьшая избыточность и объём памяти.

Тензорное произведение расширяет понятие матричного (Кронекерова) произведения, комбинируя два тензора в новый, порядок которого равен сумме порядков исходных.

Тензорная контракция — суммирование по общим индексам двух (или более) тензоров; обобщает скалярное произведение и лежит в основе вычислений в тензорных сетях.

Тензорные сети. Факторизуют высокоразмерный тензор в граф низкоразмерных «ядер». Классический пример — *Tensor-Train* (Matrix Product

State), обеспечивающий полиномиальный рост числа параметров вместо экспоненциального.

Тензорные разложения. Представляют исходный тензор как сумму или композицию более простых компонент (Tucker, TT, CP, RTRCA). Это ключ к сжатию данных и параметров нейросетей: выбор ранга и формата напрямую определяет компромисс «точность–степень сжатия».

Перечисленные операции и форматы образуют методологическую основу дальнейших глав, где анализируются их вычислительные свойства и применимость к различным типам данных.

Глава 3

Обзор литературы

В справочной части диссертации проанализированы четыре ключевые семьи тензорных разложений: *CANDECOMP/PARAFAC* (CP), *Tucker* (HOSVD), *Tensor-Train* (TT) и *Robust Tensor PCA* (RTPCA) как представитель устойчивых методов. Рассмотрены их математические основы, недавние усовершенствования и практические сценарии использования.

Классический инструментарий

- **CP-разложение** (Hitchcock 1927; Carroll & Chang 1970) аппроксимирует тензор суммой рангов-1, обеспечивая структурную интерпретируемость при условной уникальности представления. Основные проблемы: выбор ранга R и вычислительная устойчивость для высоких порядков.
- **Tucker/HOSVD** (Tucker 1966) разлагает тензор на компактное ядро \mathcal{G} и матрицы факторов $\{A_n\}$ со свободными рангами R_n по модам. Гибкость даёт высокую точность и возможности денойзинга, но порождает неоднозначность факторов и сложность подбора рангов.
- **Tensor-Train (TT)** (Oseledets 2011) хранит данные цепочкой ядер и TT-рангов, переводя экспоненциальную сложность в линейную по порядку d . Метод широко применяется для сжатия параметров нейросетей и решения многомерных уравнений.

Устойчивые и современные расширения

- **Robust Barron-Loss Tucker** [8] заменяет норму Фробениуса обобщённой Barron-функцией, уменьшая влияние выбросов при сохранении управляемости гладкостью.
- **RTPCA** [7] сочетает ядерную норму и ℓ_1 -штраф для разделения низкоранговой структуры и разреженных выбросов. Эффективна в видеоденойзинге и медицинских данных.

Прикладные тенденции

- **Компрессия CNN.** *Stable Low-rank Decomposition* [9] объединяет CP и Tucker для фильтров 3×3 (VGG-16, ResNet-18), достигая лучшего баланса «точность–ускорение». *Hybrid TT + Hierarchical Tucker* [10] показывает, что разные форматы оптимальны для свёрточных и полносвязных слоёв соответственно.
- **Оптимизационные фреймворки.** Работы [11] объединяют ADDM-регуляризацию, ТТ-разложение и дообучение, позволяя либо повысить точность, либо добиться экстремальных коэффициентов сжатия.
- **Масштабируемые аппроксимации.** *Cross Tensor Approximation* (CTA) [12] обходит полную SVD, используя выборку срезов/фибр и малое ядро; обеспечивает скорость и малый объём памяти для гиперспектральных и EEG-тензоров.
- **Временная разреженность.** Time-aware разложения [13] вводят динамический штраф по временной моде, сочетая аналитическое и итеративное обновления матриц факторов для эволюционирующих данных.

Выводы и выявленные пробелы

Обзор показывает, что:

1. Выбор ранга остаётся главным фактором влияния на компромисс «точность–степень сжатия» и не решён универсально для Tucker и TT.
2. Современные библиотеки (TensorLy, tntorch, T3F и др.) различаются по API-зрелости и производительности; нет независимого бенчмарка, охватывающего 3D–6D тензоры разных типов.
3. Робастные формулировки (Barron-Loss, RTPCA) улучшают устойчивость, но требуют специализированных процедур ранжирования и ещё мало интегрированы в софт для нейросетей.

Эти пробелы мотивируют практические задачи диссертации: (i) построить единый бенчмарк библиотек, (ii) разработать автоматический выбор ранга для Tucker и TT под заданное отношение сжатия, (iii) внедрить алгоритм в конвейер сжатия слоёв CNN и провести эмпирическую оценку.

Глава 4

Методология

Цель методики — разработать воспроизводимый бенчмарк, сравнивающий тензорные разложения и их реализации с точки зрения *времени, памяти и точности* и одновременно предоставить алгоритм автоматического выбора ранга, пригодный для сжатия как данных, так и слоёв нейросетей.

Корпус тензоров

- *Изображения* — три RGB-тензора формата $(H, W, 3)$ с разрешением 412×620 – 689×1195 пикс.
- *Видео* — три 4-х мерных тензора $(T, H, W, 3)$ с короткими роликами ($T \leq 237$ кадров) для проверки влияния временного измерения.
- *EEG* — два 6-ти мерных тензора, включающие факторы «субъект», «сессия», «событие», «эпоха», «канал», «время» (до $4 \times 12 \times 2 \times 15 \times 64 \times 1281$). Используются для стресс-теста высокой размерности.

Критерии оценки

- **Пиковое потребление памяти (RAM/VRAM).**
- **Время исполнения алгоритма.**
- **Относительная ошибка Фробениуса** между оригиналом и реконструкцией.

- Для нейросетей — **потеря точности** на валидации.

Алгоритм выбора ранга

Ранг (\mathbf{r}) ищется как минимум функции

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \alpha \varepsilon_F(\mathbf{r}) + \beta (\rho_{\text{target}} - \rho_{\text{actual}}(\mathbf{r}))^2,$$

где ε_F — нормированная ошибка Фробениуса, ρ — доля памяти (цель — 50% от исходного объёма). Ограничения на ТТ-ранги r_k и Tucker-ранги R_n задаются классическими верхними/нижними границами. Поиск ведётся пакетами SciPy (Nelder–Mead, Powell, SLSQP, дифференциальная эволюция) плюс кастомный локальный оптимизатор; выбирается наименьшая \mathcal{L} .

Дизайн бенчмарка

1. Для каждого тензора вызывается процедура выбора ранга (Tucker или ТТ) под целевое сжатие 0.5.
2. Выполняются разложения из TensorLy и T3F.
3. Регистрируются время, пиковая память, ошибка.
4. Сравнение проводится отдельно по Dense, Sparse и Block-Sparse форматам при наличии поддержки в библиотеке.

Компрессия нейронных сетей

На основе работы [9] реализован конвейер в PyTorch:

1. автоматический выбор слоёв (conv и transposed-conv),

2. применение CP, Tucker или гибрид CP+Tucker к фильтрам,
3. интеграция алгоритма ранга для соблюдения заданного ρ_{target} ,
4. тонкая доводка (fine-tuning) сети.

Тестовые архитектуры (VGG-16, ResNet-18/50) показывают сокращение параметров в $4\text{--}8\times$ при падении точности $\leq 1\%$ на ImageNet, подтверждая пригодность методики.

Итог. Методология обеспечивает репрезентативную оценку разложений на тензорах 3D–6D и демонстрирует практическую ценность адаптивного выбора ранга для компрессии как данных, так и глубоких моделей.

Глава 5

Реализация

Вся кодовая база открыта: <https://github.com/Innopolis-tensor-compression/tensor-compression-methods>. Проект организован по принципу *reproducible research*: фиксация версий в `pyproject.toml`, единые `seed`’ы (`np/torch/tf.random.seed(42)`) отключённые нефрагментированные эвристики `cuDNN` и `TF_DETERMINISTIC_OPS=`

Аппаратно-ПО платформы.

- *Среда А* — WSL 2 (Ubuntu 22.04) на Intel i7-6700K, 32 GB DDR3, NVIDIA GTX 1080 Ti 11 GB; Python 3.11, CUDA-PyTorch 2.0.1, TensorFlow 2.17.
- *Среда В* — Ubuntu 25.04 на Intel i7-13700HK, 32 GB DDR5, NVIDIA RTX 4070 8 GB; Python 3.12, PyTorch 2.5.1 + CUDA.

Алгоритм автоматического ранга. Реализован на TensorLy+PyTorch (Tucker, TT) и SciPy оптимизаторах (Nelder–Mead, Powell, SLSQP, дифференциальная эволюция) с единой функцией потерь $\mathcal{L} = \alpha \varepsilon_F + \beta (\rho_{\text{target}} - \rho_{\text{actual}})^2$ ($\alpha=1$, $\beta=10$). Для быстрых тестов доступен детерминированный алгоритм покоординатного поиска.

Бенчмарк-конвейер.

1. Загрузка тензора (изображения, видео, EEG).
2. Выбор ранга под целевое сжатие 50%.
3. Запуск разложения (TensorLy / T3F).

4. Логирование: время (`perf_counter`), пик RAM/VRAM (`memory_profiler`, `torch.cuda.max_memory_allocated`), ошибка Фробениуса, фактическое сжатие.
5. Экспорт в JSON для последующего анализа Plotly-ноутбуками.

Компрессия нейросетей. На базе PyTorch создан пайплайн, который:

- сканирует модель, выделяет свёрточные и транспонированные свёрточные слои,
- применяет CP, Tucker или гибрид CP+Tucker с автоматическим рангом,
- подменяет исходный слой компактной каскадой,
- выполняет fine-tuning для восстановления точности.

На VGG-16 и ResNet-18/50 достигнуто 4–8-кратное сокращение параметров при снижении топ-1-точности не более чем на 1 %.

Трудности и обходы.

- Ограничения GPU-памяти вынудили исключить CP-разложение для 4-D/6-D тензоров.
- Переход TensorLy на новую мажорную версию потребовал адаптации к изменённому API.
- Ряд C/Matlab-библиотек отклонён по отсутствию Python-обёрток и невозможности конвертации форматов тензоров.

Таким образом, реализован единый, детерминированный и расширяемый инструментальный набор для оценки тензорных разложений и компрессии глубоких моделей, пригодный для дальнейших исследований и промышленного использования.

Глава 6

Анализ результатов

В завершающем этапе исследованы (i) точность алгоритма автоматического выбора ранга, (ii) производительность популярных библиотек тензорных разложений и (iii) эффективность предложенного конвейера сжатия нейронных сетей.

Алгоритм выбора ранга

Для трёх тестовых RGB-тензоров (3-го порядка) сравнены пять оптимизаторов. *Дифференциальная эволюция* оказалась наилучшей по совокупности критериев: при целевом сжатии 50 % она обеспечила

- среднюю относительную ошибку Фробениуса $< 1\%$ (0.01 % для наиболее «цветового» изображения);
- время подбора ранга 39–51 с против 94 с у координатного поиска и 28–58 с у Powell при худшей точности;
- надёжную сходимость без «залипаний» в ранге $[1, 1, 1, 1]$, наблюдавшихся у Nelder–Mead и SLSQP.

Таким образом, сформулированная задача минимизации комбинированного функционала (ошибка + штраф за отклонение от заданного коэффициента сжатия) успешно решена; итоговый модуль rank search для форматов Tucker и TT опубликован в репозитории.

Бенчмарк библиотек

Комплексный бенчмарк (10 158 запусков; тензоры 3D–6D) охватывал TensorLy 0.9.0, T3F 1.2.0 и несколько альтернатив / устаревших пакетов. Ключевые выводы:

- **TensorLy + Tensor-Train** показал наилучший баланс «точность – RAM/VRAM – время»: ошибка 0.0002–0.48 %, ускорение до 5× по сравнению с CP/Tucker, память ≤ 3 ГБ для 3D и ≤ 5.5 ГБ для 6D.
- **CP/PARAFAC** превосходил по ошибке (до 0.3 %) лишь на мелких 3D-тензорах, но требовал $\sim 2\times$ больше памяти и 5–20× больше времени.
- Основные *OOM-срывы* (50 % неудачных прогонов) вызваны комбинациями `init=svd` или `svd=symeig_svd`; переход к `init=randomsvd=truncated_svd` устраняет проблему без потери качества.

Практические рекомендации: *TT* (*Truncated SVD*), *Tucker* (*init=random, svd=randomized*) и *CP* (*init=random, cvg_criterion=rec_error, l₂-peg.=0.5*).

Сжатие нейронных сетей

Конвейер PyTorch применён к шести моделям ImageNet (ResNet-18/34/50, VGG-11/16/19); все свёрточные и обратные свёрточные слои заменены Tucker-ядрами с автоматическим рангом.

- **Сжатие параметров:** 4–8× (30 % от исходного веса).
- **Скорость инференса:** ускорение 14–22 %.

- **Точность:** после 1 эпохи fine-tuning потери ≤ 1 pp Top-1; для ResNet-18/34 точность даже выросла на $\approx 2\%$ благодаря лёгкому регуляризующему эффекту разложения.

Ключевые выводы

1. Глобальные стохастические схемы (дифференциальная эволюция) предпочтительны для дискретной оптимизации рангов.
2. TensorLy-ТТ — практический стандарт де-факто для разнотипных тензоров; СР оправдан лишь при строгих требованиях к интерпретируемости на малых данных.
3. Интеграция автоматического ранга в pipeline DL-сжатия позволяет получать компактные модели без ручного подбора гиперпараметров и без существенного ухудшения метрик.

Перспективы. Планируется изучить гибриды «глобальный поиск + локальное доулучшение», GPU-ускоренные версии оптимизаторов ранга и дополнительные функции потерь, учитывающие структурные свойства данных (например, спектральные нормы). Все отчёты, журналы и ноутбуки доступны по адресу: <https://github.com/Innopolis-tensor-compression/tensor-compression-methods>

Глава 7

Заключение

Работа обобщает результаты систематического исследования тензорных разложений для трёх классов данных (изображения, видео и ЭЭГ) и их применения к сжатию глубоких нейросетей. Решены все поставленные в начале задачи.

Основные достижения.

1. *Качественный обзор* > 30 библиотек; сформирован краткий «шорт-лист» Python-инструментов (TensorLy, T3F), пригодных для воспроизводимых экспериментов.
2. *Бенчмарк 10 000+ прогонов* на 3D–6D тензорах: измерены время, пиковая RAM/VRAM и ошибка Фробениуса. Выявлено, что TensorLy-TT обеспечивает оптимальный баланс точности и ресурсов; даны практические настройки гиперпараметров для CP, Tucker и TT.
3. Разработан *автоматический выбор ранга* для форматов Tucker и Tensor-Train. Алгоритм на базе дифференциальной эволюции гарантирует заданное сжатие (50 %) при минимальной ошибке; опубликован модуль rank_search.
4. Воссоздан и улучшен *конвейер сжатия CNN*. Для VGG и ResNet получено 4–8x уменьшение параметров и 14–22 % ускорение инференса при падении Top-1 не более 1 pp (часто — рост после fine-tuning).

Практическая ценность.

- Открытый репозиторий содержит полный код, журналы и ноутбуки (<https://github.com/Innopolis-tensor-compression/tensor-compression-methods>), обеспечивая воспроизводимость и возможность дальнейшего расширения.
- Рекомендации по выбору библиотек, форматов и параметров пригодны для прикладных задач хранения, передачи и ускорения моделей и многомерных данных.

Ограничения и направления будущих работ.

- Улучшить функцию потерь и исследовать гибридные «глобальный + локальный» оптимизаторы ранга.
- Расширить конвейер на другие типы слоёв (групповые свёртки, attention) и форматы (Tensor Ring).
- Дополнить бенчмарк новыми наборами данных (аудио, гиперспектр) и библиотеками (EXATN, Scikit-TT).

Таким образом, работа вносит вклад в практику эффективного сжатия тензорных данных и моделей, предлагая как новые алгоритмы, так и документированную инфраструктуру для их оценки и применения.

Список литературы

- [1] T. G. Kolda и B. W. Bader, «Tensor Decompositions and Applications,» *SIAM Review*, т. 51, № 3, с. 455—500, 2009. DOI: [10.1137/07070111X](https://doi.org/10.1137/07070111X). eprint: <https://doi.org/10.1137/07070111X>. url: <https://doi.org/10.1137/07070111X>.
- [2] I. V. Oseledets, «Tensor-Train Decomposition,» *SIAM Journal on Scientific Computing*, т. 33, № 5, с. 2295—2317, 2011. DOI: [10.1137/090752286](https://doi.org/10.1137/090752286). eprint: <https://doi.org/10.1137/090752286>. url: <https://doi.org/10.1137/090752286>.
- [3] G. Tomasi и R. Bro, «PARAFAC and missing values,» *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, т. 75, № 2, с. 163—180, 2005, ISSN: 0169-7439. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2004.07.003>. url: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169743904001741>.
- [4] R. Bro, «Multiway analysis in the food industry. Models, algorithms and applications,» *Ph.D. dissertation, University of Amsterdam, Amsterdam*, авг. 2001.
- [5] G. Ballard и T. G. Kolda, *Tensor Decompositions for Data Science*. авг. 2024, Preliminary draft copy. Accessed on: October 4, 2024, url: <https://www.mathsci.ai/post/tensor-textbook/>.
- [6] Y. Liu, J. Liu, Z. Long и C. Zhu, *Tensor Computation for Data Analysis*. Springer Cham, янв. 2022, ISBN: 978-3-030-74385-7. DOI: [10.1007/978-3-030-74386-4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-74386-4).

- [7] C. Lu, J. Feng, Y. Chen, W. Liu, Z. Lin и S. Yan, *Tensor Robust Principal Component Analysis with A New Tensor Nuclear Norm*, 2019. arXiv: 1804.03728 [stat.ML]. url: <https://arxiv.org/abs/1804.03728>.
- [8] M. Mozaffari и P. P. Markopoulos, «Robust Barron-Loss Tucker Tensor Decomposition,» в *2021 55th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 2021, с. 1651—1655. DOI: 10.1109/IEEECONF53345.2021.9723232.
- [9] A. H. Phan, K. Sobolev, K. Sozykin и др., «Stable Low-rank Tensor Decomposition for Compression of Convolutional Neural Network,» *CoRR*, т. abs/2008.05441, 2020. arXiv: 2008.05441. url: <https://arxiv.org/abs/2008.05441>.
- [10] B. Wu, D. Wang, G. Zhao, L. Deng и G. Li, «Hybrid tensor decomposition in neural network compression,» *Neural Networks*, т. 132, с. 309—320, дек. 2020, ISSN: 0893-6080. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.09.006. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.neunet.2020.09.006>.
- [11] M. Yin, Y. Sui, S. Liao и B. Yuan, *Towards Efficient Tensor Decomposition-Based DNN Model Compression with Optimization Framework*, 2021. arXiv: 2107.12422 [cs.CV]. url: <https://arxiv.org/abs/2107.12422>.
- [12] S. Ahmadi-Asl, C. F. Caiafa, A. Cichocki и др., «Cross Tensor Approximation Methods for Compression and Dimensionality Reduction,» *IEEE Access*, т. 9, с. 150 809—150 838, янв. 2021. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3125069.
- [13] D. Ahn, J.-G. Jang и U. Kang, «Time-aware tensor decomposition for sparse tensors,» *Machine Learning*, т. 111, № 4, с. 1409—1430, 1 апр. 2022, ISSN: 1573-0565. DOI: 10.1007/s10994-021-06059-7. url: <https://doi.org/10.1007/s10994-021-06059-7>.