# Étude d'un pendulum propulsé par un moteur RC

EFREI Research lab
EFREI - École d'Ingénieurs Généraliste du Numérique

January 15, 2024

**Abstract**

L'objectif de cette étude est de développer une commande pour asservir le pendule à un angle précis. Dans un premier temps, on établira l'équation de mouvement du système. Ensuite, nous étudierons la stabilité du système, et enfin, nous procéderons à l'étude dans le domaine temporel et fréquentiel du système.

## 1 Equation de mouvement

On désire modéliser le système dynamique à un degré de liberté suivant :

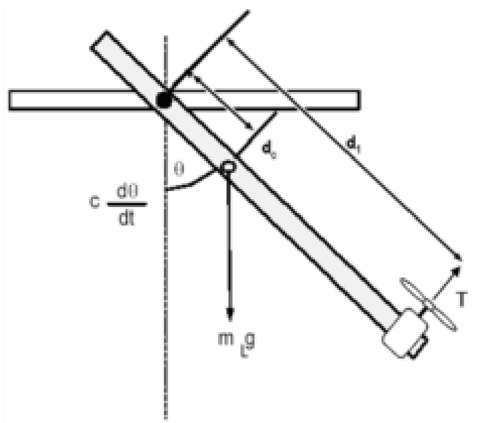


Figure 1: Pendule propulsé par un moteur RC

Pour trouver l'equation de mouvement du systeme on utilise la seconde loi de mouvement de Newton :

$$F = m.a$$

Ainsi toujours selon la seconde loi de Newton, on a :

$$\tau = I.\alpha$$

Avec $\tau$ le torque en N/m, I le moment d'inertie et $\alpha$ l'accélération angulaire.
Un pendule avec un bras solide peut être exprimé comme la somme des moments d'inertie du bras et du moteur.

$$I_{\text{total}} = I_{\text{bras}} + I_{\text{moteur}}$$

On commence par calculer le moment d'inertie du bras :

$$I_{\text{bras}} = \int_0^L x^2 \frac{m_{\text{bras}}}{g}\,dx$$
$$= \frac{m_{\text{bras}}.L^2}{3}$$

Maintenant, on calcule le moment d'inertie du moteur en considérant que le moteur est un point de masse à la fin du bras :

$$I_{\text{moteur}} = \int_0^L x^2 \frac{m_{\text{moteur}}}{g}\,dx$$
$$= m_{\text{moteur}}.L^2$$

Ainsi on a :

$$I_{\text{total}} = \frac{1}{3}.m_{\text{bras}}.L^2 + m_{\text{moteur}}.L^2$$

L'accélération angulaire est donnée par $\ddot{\theta}$.

Le torque produit par la gravite vaut :

$$\tau = -mgsin(\theta)$$

Le torque produit par la poussee vaut :

$$\tau = Thrust.L$$

On a donc :

$$\tau = c\dot{\theta} - mgsin(\theta) + L.Thrust$$
$$I\ddot{\theta} = c\dot{\theta} - mgdsin(\theta) + L.Thrust$$
$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgdsin(\theta) = L.Thrust$$
$$\dot{\theta}(0) = 0; \theta(0) = 0$$

On constate que cette équation différentielle du 2ème ordre est non linéaire. Nous devons la linéariser pour obtenir la fonction de transfert.
Pour cela, on peut utiliser : l'approximation par petits angles ou on peut trouver le jacobien de l'équation et la linéariser autour d'un point fixe.

Commençons par l'approximation des petits angles. Le terme non linéaire est $\sin(\theta)$. On cherche à approximer cet angle.
D'après la série de Taylor, on a pour $\sin(\theta)$ :

$$sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!}...$$

Les termes apres $\theta$ sont tres petits, On en deduit :

$$sin(\theta) \approx \theta$$

On cherche le jacobien au point fixe ($n\pi$,0) pour tenir compte du point d'equlibre (0,0). :

$$x_1 = \theta et x_2 = \dot{\theta}.$$

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = \frac{L}{I}.Thrust - \frac{c}{I}x_2 - \frac{mgd}{I}sin(x_1)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Avec $f_1 = \dot{x_1}$ et $f_2 = \dot{x_2}$

On obtient :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgd}{I}cos(n\pi) & -\frac{c}{I} \end{bmatrix}$$

Au point d'equilibre ($n\pi$,0), si n est paire on a 1 et si n est impaire on a -1.

Ainsi, nous nous retrouvons avec un systeme lineaire sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\frac{x}{dt}\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgd}{I} & -\frac{c}{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d}{I} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Avec :
A l'etat du systeme,
B la matrice de commande,
C la matrice d'observation,
D la matrice d'action directe,
x le vecteur d'etat,
u le vecteur de commande,
y le vecteur de sortie.

# 2 Analyse temporel

Afin de contrôler le système, on doit s'assurer qu'il soit stable et contrôlable.
Pour s'assurer de la stabilité, on cherche à trouver les valeurs propres de la matrice A. Afin de pouvoir continuer dans l'analyse de la stabilite du systeme, on donne des valeurs arbitraires a notre systeme : m = 0.3, g = 9.81, d = 0.5, I = 0.13 et c = 0.1, L = 1.

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{mgd}{I} & -\lambda - \frac{c}{I} \end{bmatrix}$$

On cherche le déterminant :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

On a :

$$\Delta = \frac{b\lambda^2 + c\lambda + mgd}{I}$$

$$\frac{b\lambda^2 + c\lambda + mgd}{I} = 0$$

$$\lambda_1 = -c + \frac{\sqrt{-4Imgd + c^2}}{2I}$$

$$\lambda_2 = -c - \frac{\sqrt{-4Imgd + c^2}}{2I}$$

En remplacant les variables par les valeurs mentionées plus haut, on a :

$$\lambda_1 = -0.3846 + 3.3423i$$

$$\lambda_2 = -0.3846 - 3.3423i$$

On constate que les parties réels sont négatives donc système est stable.

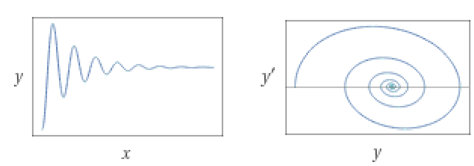


Figure 2: Portrait de phase

Désormais, on vérifie que le système est controllable. Si la matrice :

$$ctrb = \begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$$

si son rang est égal au nombre d'états, ici 2. Si oui, dans ce cas on peut choisir n'importe quel valeur propre pour rendre le système plus stable.

Pour trouver le rang de la matrice ctrb on peut la mettre sous forme échelonnée réduite. On a :

$$rref = \begin{bmatrix} -11.3 & 0.77 & 5.92 \\ 0 & 1 & 7.69 \end{bmatrix}$$

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles dans la matrice réduite, donc le rang est 2. On en déduit que le système est controllable.

# 3 Analyse fréquentielle

Pour étudier le système au niveau frequentiel, nous devons obtenir la fonction de transfert du système. On possede l'equation differentielle du second ordre ainsi que la representation d'etat du systeme. On peut donc trouver la fonction de transfert avec deux methodes :

Methode en partant de la representation d'etat :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$H(s) = \frac{L}{Js^2 + cs + mgd}$$

Methode en partant de l'equation de mouvement :

$$J\theta'' + c\theta' + mgd\theta = \text{thrust} \cdot L$$

On utilise la transformee de Laplace :

$$Js^2\Theta(s) + cs\Theta(s) + mgd\Theta(s) = \text{Thrust}(s) \cdot L$$

On isole $\Theta(s)$:

$$(Js^2 + cs + mgd)\Theta(s) = \text{Thrust}(s) \cdot L$$

$$H(s) = \frac{\Theta(s)}{\text{Thrust}(s)} = \frac{L}{Js^2 + cs + mgd}$$

Il est important de noter que sur MATLAB, en utilisant la fonction ss2tf(A,B,C,D) on obtient une fonction de transfert avec des valeurs differentes. Cependant son comportement frequentielle est identique.

On cherche dans un premier temps la reponse impulsionnelle et la reponse indicielle de la fonction de transfert.

Reponse impulstionelle :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{X(s)}\right\}$$

$$y(t) = h(t)$$

reponse indicielle :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{X(s) \cdot s}\right\}$$

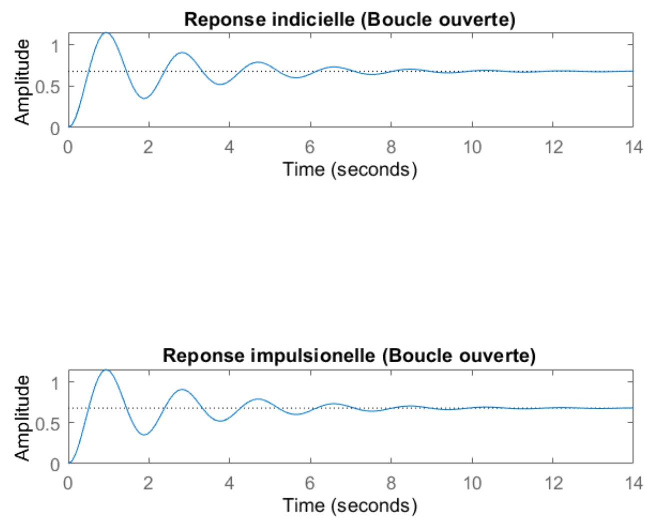


Figure 3: Reponse indicielle et impulsionnelle

On remarque que le systeme, met environ 5 secondes pour se stabiliser.