

Problème à N corps

Simuler un (petit) univers

version 1

Ismail Bennani
<ismail.lahkim.bennani@ens.fr>

Mesures exceptionnelles

Étant donnée la situation actuelle, vous pourrez me joindre sur [slack](#) pour me poser vos questions (envoyez moi votre mail pour que je vous invite). J'y maintiendrai une FAQ pour répondre aux questions récurrentes.

Vous pourrez bien sur me contacter par mail, et je serai aussi disponible via Skype ou Zoom pour faire des points réguliers avec vous.

1 Projet

1.1 Description du problème

Ce problème consiste à résoudre les équations du mouvement de N corps quelconques interagissant dans un champs gravitationnel en dimension $n \in \{2, 3\}$. Soient $(c_i)_{i \in [0, N]}$ nos corps. A chaque instant $t \in \mathbb{R}$ et pour chaque corps c_i , on note $m_i \in \mathbb{R}$ sa masse, $\mathbf{p}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ sa position, $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ sa vitesse et $\mathbf{a}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ son accélération.

Pour chaque autre corps c_j , on note $r_{i,j}(t) = \|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\|$ la distance euclidienne entre ces corps et $\mathbf{u}_{i,j}(t) = \frac{1}{r_{i,j}(t)}(\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t))$ le vecteur unitaire allant de $\mathbf{p}_i(t)$ à $\mathbf{p}_j(t)$.

La force gravitationnelle appliquée par un corps $j \in [0, N]$ sur un corps $i \in [0, N], i \neq j$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_{i,j}(t) = G \frac{m_i m_j}{r_{i,j}(t)} \mathbf{u}_{i,j}(t)$$

La dynamique du système est alors décrite par les équations suivantes :

$$\forall i \in [0, N], \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{a}_i(t) \\ \mathbf{a}_i(t) = \frac{1}{m_i} \sum_{j \in [0, N], j \neq i} \mathbf{F}_{i,j}(t) \end{cases}$$

1.2 Travail attendu et évaluation

Vous écrirez un simulateur capable de calculer l'évolution des positions (en 2D **ou** 3D) des N corps dans le temps, ce simulateur devra utiliser un solveur d'équations différentielles que vous aurez écrit. Vous écrirez aussi un affichage graphique pour visualiser cette évolution.

Ce sujet est volontairement long pour que vous puissiez approfondir **les parties qui vous intéressent le plus**. Je n'attends pas du tout de vous que vous fassiez tout, faites votre maximum dans le temps que vous avez. Vous pourrez par exemple :

- implémenter des optimisations pour accélérer le calcul du système d'équations différentielles (cf. section 2.1)
- implémenter un solveur d'équations différentielles plus précis que la méthode d'Euler explicite (cf. section 2.2)
- implémenter des fonctionnalités pour votre interface graphique (cf. section 2.3)
- calculer automatiquement des orbites stables (cf. section 2.4)
- gérer les collisions (cf. section 2.5)

Je demande que chaque groupe écrive au moins une version naïve, sans librairie externe, du moteur physique, du solveur et de l'interface graphique. Vous pourrez ensuite remplacer des parties de votre code par des interfaces vers un code existant, par exemple utiliser **numpy** pour vos opérations sur les vecteurs et vos opérations matricielles. Faites cohabiter les différentes versions dans le même code et faites en sorte de pouvoir choisir quelle version utiliser facilement.

Le rendu attendu est une archive contenant

- l'intégralité du code source
- un **fichier requirement.txt**
- un rapport concis expliquant votre travail, en particulier :
 - la répartition des tâches dans votre binôme
 - les librairies externes utilisées
 - le fonctionnement de votre programme, l'architecture de vos classes
 - ce que vous avez approfondi, les algorithmes implémentés
 - les difficultés rencontrées et vos solutions, les choix techniques effectués
- avoir un « effet wow » est un plus, cela peut être fait à travers une belle démo, à travers une grosse simulation, etc..

Comme vous l'a dit Natalia, ayez une version préliminaire du rapport prête à la moitié du cours pour que je puisse vous faire un retour.

Je vous suggère d'utiliser Python comme langage de programmation, mais vous pouvez me consulter si vous désirez utiliser autre chose.

En section 2.6, je vous parle de quelques librairies utiles pour Python, vous êtes libres d'utiliser les librairies que vous voulez. Par contre, veuillez à bien noter dans votre rapport tout ce que vous avez implémenté vous-même et tout ce qui

vient d’une librairie externe.

Attention, la valeur d’un code ne se mesure pas au nombre de lignes ! Faites du code correct, commenté (pas besoin de trop en faire) et clair, dans cet ordre. Veuillez par exemple à choisir des noms explicites et informatifs pour vos variables, vos fonctions et vos classes.

2 Implémentation

Dans cette section, je vous décrit une façon d’implémenter le simulateur en trois parties bien délimitées et indépendantes les unes des autres. Vous **n’êtes pas** tenus de respecter cette implémentation.

Dans la section 1 et dans ce qui suit, je ne précise jamais les unités des grandeurs physiques. Du fait des ordres de grandeurs (et de leur écart) des valeurs qu’on manipule (vitesse terre par rapport au soleil $\approx 10^4$ m.s⁻¹, distance terre-soleil $\approx 10^{11}$ m, poids soleil $\approx 10^{30}$ kg, ...), les erreurs dues à l’approximation flottante et aux approximations des solveurs sont importantes. Si vous voulez utiliser des valeurs du monde réel, je vous conseille d’utiliser les unités suivantes :

- distance : **parsec** (pc)
- masse : **masse solaire** (M_{\odot})
- vitesse : kilomètre par seconde (km.s⁻¹)
- constante gravitationnelle : pc. M_{\odot}^{-1} .km².s⁻²

Je vous conseille vivement de commencer par implémenter les version les plus naïves des différents modules. Cela vous permettra en particulier de réfléchir aux interfaces entre ces modules, de commencer à écrire des tests unitaires, de mettre en place votre dépôt git, et surtout d’avoir une meilleure vision d’ensemble du projet. Contactez moi une fois que c’est fait pour qu’on discute de la suite.

2.1 Moteur Physique

Le rôle du moteur physique est de calculer une approximation de la dynamique du problème. Il s’occupe d’une part de fournir au solveur d’équations différentielles les valeurs à intégrer, et d’autre part de fournir à l’interface graphique les données nécessaires à l’affichage des corps (positions, vitesses, ...). Ce moteur peut gérer les collisions entre corps, considérer que deux corps qui se touchent fusionnent, ou ignorer les collisions. Les méthodes que je donne plus bas ignorent les collisions.

Notez que l’efficacité de ce module sera cruciale si vous voulez pouvoir simuler un grand nombre de corps. En effet, la dynamique du système doit être calculée au moins une fois à chaque pas de calcul du solveur d’équations différentielles.

- **Méthode naïve** $\mathcal{O}(N^2)$

Une approximation simple dans notre cas est celle où les réelles sont représentés par des flottants machines, et où l’accélération d’un corps est obtenue en calculant les $N - 1$ forces qu’il subit.

Cependant, on peut être plus efficace en remarquant que

$$\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i}$$

Grâce à ça, on peut obtenir le même résultat que précédemment en économisant la moitié des calculs.

— **Simulation de Barnes-Hut** $\mathcal{O}(N \log(N))$

On peut réduire le nombre de calculs à effectuer en sacrifiant en partie la précision de leurs résultats. Cette méthode consiste à construire un arbre ([octree](#)) dont les feuilles sont vos corps, et dont les nœuds intermédiaires représentent des portions de l'espace contenant leurs fils. Dans chaque zone on peut définir un corps virtuel en son centre dont la masse est égale à la somme des masses des corps s'y trouvant.

Ensuite, pour calculer l'interaction gravitationnelle que subit un corps en particulier, on pourra remplacer la contributions d'un groupe de corps éloigné par celle de son corps virtuel.

https://en.wikipedia.org/wiki/Barnes%E2%80%93Hut_simulation
<http://arborjs.org/docs/barnes-hut>

— **Fast multiple methods** $\mathcal{O}(N)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_multipole_method
A Hierarchical $\mathcal{O}(N)$ Force Calculation Algorithm

Note

Lors de l'implémentation de ce module, il sera judicieux d'écrire une classe de vecteurs pour représenter les positions, vitesses, accélérations et forces.

Vous pourrez aussi surcharger les opérateurs arithmétiques (+, *, ...) pour manipuler les instances de cette classe.

Surcharge opérateurs : [explication](#), [liste des opérateurs](#)

2.2 Solveur d'équations différentielles

Le rôle du solveur d'équations différentielles (**Ordinary Differential Equation**) est de calculer la dynamique du système. Il reçoit du moteur physique les positions initiales des variables et leurs dérivées puis calcule la nouvelle valeur des variables à un horizon donné.

Résoudre une ODE, c'est calculer les valeurs d'une fonction $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie par

$$\forall t \geq 0, \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad \mathbf{y}(0) \text{ connue}$$

à des temps donnés. On note $(t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite des temps auxquels on veut calculer la valeur de \mathbf{y} , et $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n)$.

Notez qu'ici, notre système est une ODE d'ordre 1 :

$$\forall i \in [0, N], \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{a}_i(t) \\ \mathbf{a}_i(t) = \frac{1}{m_i} \sum_{j \in [0, N], j \neq i} \mathbf{F}_{i,j}(t) \end{cases}$$

se réécrit en

$$\forall i \in [0, N], \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i(t) \\ \frac{1}{m_i} \sum_{j \in [0, N], j \neq i} \mathbf{F}_{i,j}(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}(t)$ est donc un vecteur de dimension $2 * i$ contenant les positions et vitesses des différents corps.

— **Méthode d'Euler explicite**

Approximation du premier ordre, peu coûteuse à calculer mais peu stable, très imprécise :

$$\forall n \geq 0, \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + (t_{n+1} - t_n) * \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$$

La fonction qui implémente cette méthode pourrait s'écrire

```
def integrate(y, h, y'): return y + h * y'
```

et être utilisée comme ça : `new_y = integrate(y, h, f(t,y))`.

Cependant, les méthodes qui suivent auront besoin d'évaluer \mathbf{f} en plusieurs points entre t et $t + h$, pour produire des résultats plus précis. Pour cette raison, la façon la plus classique d'implémenter une fonction d'intégration est de lui passer en argument la fonction \mathbf{f} :

```
def integrate(f, y0, t, h): return y0 + h * f(t, y0)
```

<https://www.f-legrand.fr/scidoc/docimg/numerique/euler/euler/euler.html>

— **Méthode d'Euler implicite**

Approximation du premier ordre, plus coûteuse à calculer, plus stable et plus précise que la version précédente :

$$\forall n \geq 0, \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + (t_{n+1} - t_n) * \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$$

On cherche y_{n+1} le point fixe de la fonction

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_n + (t_{n+1} - t_n) * \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x})$$

Plusieurs méthodes existent pour ça, par exemple la [méthode de Newton-Raphson](#).

<https://www.f-legrand.fr/scidoc/docimg/numerique/euler/implicite/implicite.html>

— **Famille des méthodes Runge Kutta**

Approximation explicite, même algorithme pour plusieurs ordres, ces méthodes font parti des plus utilisées. Je vous met là une petite sélection de liens utiles si vous voulez en savoir plus et implémenter ces algorithmes

— http://www.scholarpedia.org/article/Runge-Kutta_methods

— [A family of embedded Runge-Kutta formulae, Dormand and Prince](#)

— [Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes, Butcher](#)

— **Algorithme Leapfrog**

Approximation explicite du deuxième ordre, peu coûteuse mais stable pour des mouvements oscillatoires. Elle nécessite d'avoir accès à la vitesse et à l'accélération des variables à intégrer. Ça tombe bien, c'est notre cas. Soit $i \in [0, N]$, en notant $p_n^i = p_i(t_n)$, $v_n^i = v_i(t_n)$, $a_n^i = a_i(t_n)$ et $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, on a l'approximation suivante :

$$\forall i \in [0, N], \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{k+1}^i = p_k^i + \Delta t_n v_k^i + \frac{1}{2} \Delta t_n^2 a_k^i \\ v_{k+1}^i = v_k^i + \frac{1}{2} \Delta t_n (a_k^i + a_{k+1}^i) \end{cases}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Leapfrog_integration

2.3 Interface graphique

Le rôle de l'interface est d'abord d'afficher l'état du système à l'écran. Elle peut dans un second temps servir à interagir avec le système : par exemple ajouter un corps avec un clic droit, ou en effacer un avec un clic gauche. Comme je l'ai dit plus haut, vous devez choisir de travailler en 2D ou en 3D, ce choix influera sur les bibliothèques que vous utiliserez pour l'interface graphique. Je vous suggère d'utiliser **pygame** pour la 2D, et **pyOpenGL** pour la 3D. Vous pouvez bien sûr utiliser n'importe quelle autre bibliothèque si vous préférez.

— **Pygame**

Je vous laisse suivre l'[excellent tutoriel](#) sur leur site officiel

— **pyOpenGL**

De même, je vous laisse suivre [ce tutoriel](#).

Attention : les bibliothèques de dessin en 3D sont intrinsèquement plus complexes que celles en 2D, en choisissant la 3D vous aurez plus de possibilités mais aussi plus de difficultés techniques à arriver à vos fins.

Quelque soit ce que vous choisissiez, je vous conseille de séparer les unités de votre système physique des unités graphiques. Écrivez des fonctions de changement de base entre votre monde et votre caméra, même si vous n'implémentez pas le zoom, le déplacement de la caméra ou sa rotation. Cela vous permettra de contrôler votre échelle plus facilement.

2.4 Orbites stables

Si vous voulez faire de beaux dessins, vous pouvez simuler des orbites stables (appelées *chorégraphies*) ; c'est à dire choisir des positions initiales des corps telles que, au bout d'un moment, leur mouvement devienne périodique. Trouver ces positions initiales n'est pas facile, il y a de nombreux travaux de recherche là dessus. Je vous met ici une petite liste de pointeur qui peuvent vous être utiles si vous voulez approfondir cette partie là.

- Une explication accessible http://www.scholarpedia.org/article/N-body_choreographies

- Papier : [Classification of symmetry groups for planar n-body choreographies](#), une famille de solutions pour N quelconque, illustrée [ici](#)
- Thèse : [Periodic Solutions to then \$n\$ -Body Problem](#), quelques solutions au chapitre 8

2.5 Collisions

Comme je disais en section 2.1, il est possible de considérer les collisions dans la résolution de ce problème. Dans ce cas, il faut que nos corps c_i aient une taille. On peut par exemple les assimiler à des sphères de rayon r_i . Le problème de gestion de collisions peut se décomposer en deux étapes : détecter la collision, puis la résoudre.

Tout d'abord, on peut approximer l'instant de la collision en considérant qu'elle ne peut se produire qu'à des instants auxquels on échantillonne notre dynamique, c'est à dire à un des t_n . Dans ce cas, à chaque pas, il faut chercher si un couple de corps se chevauche (le cas de collisions de plus de 2 corps est plus complexe à traiter et peut être ignoré en première approximation). Une autre solution est de surveiller les instants t_i et t_{i+1} tels que deux corps se chevauchent à t_{i+1} mais pas à t_i , puis de chercher l'instant précis auquel a eu lieu la collision. Pour ça on peut interpoler les positions entre ces instants et faire une dichotomie.

Une fois que cette collision a été détectée, il faut la traiter : c'est à dire faire que les objets ne se chevauchent plus, et mettre à jour leurs vitesses respectives pour tenir compte de la collision ; les faire rebondir. On pourrait aussi, dans le cas d'étoiles par exemple, les faire fusionner.

Plus généralement, deux corps très proches les uns des autres vont induire des forces gigantesques l'un sur l'autre, ce qui augmentera l'ordre de grandeur des erreurs que fait votre solveur d'ODE. On peut donc augmenter la fidélité de la simulation en traitant différemment ces cas. Voir [Understanding the Dynamics of Collision and Near-Collision Motions in the \$N\$ -Body Problem](#).

Notez que les algorithmes de détection de collisions peuvent être très coûteux : une version naïve est de tester à chaque pas de simulation les positions des $\frac{N(N-1)}{2}$ couples de corps possibles. Des méthodes existent pour réduire cette complexité, elles reviennent toutes plus ou moins à distinguer, pour chaque corps, ceux qui sont trop loin, et ceux qui sont suffisamment proches pour être testés exactement. En voila une : [Fast Collision Detection among Multiple Moving Spheres](#).

2.6 Outils

Voici une liste non exhaustive d'outils qui peuvent vous aider. Je rappelle que vous **devez** implémenter au moins les versions naïves de chaque module du projet, ce n'est que par la suite que vous pouvez remplacer un de vos modules naïf par une interface vers une de ces bibliothèques. Par ailleurs, j'attends de vous que

vous approfondissiez certaines parties du projet, c'est à dire que vous écriviez vous-même *certain*s algorithmes.

- **numpy** : librairie de calcul scientifique. Vous ne pourrez pas faire plus efficace que ça pour vos opérations vectorielles et matricielles sur CPU.
- **SciPy** : librairie d'algorithmes numériques. Vous y trouverez des algorithmes d'intégration déjà fait, des algorithmes d'interpolation, d'optimisation. N'hésitez pas à utiliser ces outils.
- **Matplotlib** : librairie de visualisation scientifique. Elle peut vous servir à afficher certaines choses rapidement, mais j'attends de vous un meilleur affichage que ça pour le rendu final (cf. section **2.3**)