Уравнения Стокса

Рассмотрим уравнения Стокса для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (где $d = 2$ или $d = 3$):

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{в } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{в } \Omega, \end{cases}$$

где:

- $\mathbf{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ — вектор скорости,
- $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — давление,
- $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости,
- $\mathbf{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ — заданная внешняя сила (например, гравитация),
- Δ — лапласиан, $\nabla \cdot$ — дивергенция.

Граничные и начальные условия

Предположим, что Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$, гладкой (например, класса C^2). Установим граничное условие прилипания:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Для нестационарного случая (уравнения Навье–Стокса) добавляется условие:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f},$$

с начальным условием:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{в } \Omega,$$

где $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$.

Однако в данном случае фокусируемся на стационарных уравнениях Стокса, так как они проще для строгого анализа.

Пространства функций

Решение ищется в пространствах Соболева:

- $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$, где $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ — замыкание гладких функций с компактным носителем в $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ с нулевыми граничными значениями.
- $Q = L^2(\Omega)$ — пространство давления.
- Слабая форма: Найти $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ такое, что для всех $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ и $q \in Q$:
$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}),$$
$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0,$$
где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Существование и единственность

По теореме де Рама (De Rham's theorem) и теореме Лах–Milgram, для $\mathbf{f} \in \mathbf{V}'$ (пространство двойственное $\mathbf{V}$) существует единственное решение $(\mathbf{u}, p)$, если $\nu > 0$ и Ω достаточно регулярна (например, Lipschitz).

Формулировка задачи

Пример постановки задачи

Рассмотрим стационарное течение в прямоугольной области $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ с граничным условием прилипания $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ на $\partial\Omega$. Внешняя сила задана как $\mathbf{f}(x, y) = (0, -g)^T$, где $g = 9.81$ м/с^2 (гравитация).

Математическая формализация:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = (0, -9.81)^T & \text{в } (0,1) \times (0,1), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{в } (0,1) \times (0,1), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Слабая форма: Найти $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ такие, что:

$$\nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_\Omega p \, \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega (0, -9.81) \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$\int_\Omega q \, \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = 0 \quad \forall q \in Q.$$

Алгоритм

Метод: Смешанный метод конечных элементов (Mixed Finite Element Method)

Используем метод с пространством Тейлора–Худа (Taylor-Hood elements) для обеспечения стабильности и сходимости.

Шаг 1: Дискретизация области

- Разделим Ω на треугольную сетку $\mathcal{T}_h$ с максимальным диаметром элемента $h > 0$.
- Требования: $\mathcal{T}_h$ — регулярная и квазиуниформная (quasi-uniform) сетка, $h \to 0$.

Шаг 2: Определение конечных элементов

- Пространство скорости: $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, кусочно-линейные функции P_2 (квадратичные) на каждом элементе с непрерывностью на границах.
- Пространство давления: $Q_h \subset Q$, кусочно-линейные функции P_1 (линейные) на каждом элементе.
- Условие Ладыженской–Бабушки–Brezzi (LBB): $\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1} \|q_h\|_{L^2}} \geq \beta > 0$, где β независимо от h.

Шаг 3: Сборка системы

- Найти $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ такие, что:
$$\nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$
$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h.$$
- Это приводит к системе линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где A — матрица жесткости, включающая блочные структуры для $\mathbf{u}_h$ и p_h.

Шаг 4: Решение системы

- Использовать метод LU-разложения или итеративный метод (например, GMRES) для разреженных матриц.
- Требования: Условное число $\kappa(A) \leq Ch^{-2}$, где C — константа.

Шаг 5: Постобработка

- Проверить выполнение условия несжимаемости: $\| \nabla \cdot \mathbf{u}_h \|_{L^2} < \epsilon$, где ϵ — заданная точность (например, 10^{-6}).

Анализ сходимости и сложности

Сходимость

- По теореме Сеа, для метода Тейлора–Худа:
$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{H^1} + \| p - p_h \|_{L^2} \leq Ch(\| \mathbf{u} \|_{H^2} + \| p \|_{H^1}),$$
где C — константа, зависящая от ν и Ω, а h — шаг сетки.
- Сходимость порядка $O(h)$ в H^1 для $\mathbf{u}$ и L^2 для p, если $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)$ и $p \in H^1(\Omega)$.

Устойчивость

- Условие LBB гарантирует устойчивость смешанной формулировки. По теореме Бабушки, решение существует и единственно, если $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$.

Вычислительная сложность

- Число узлов сетки: $N \approx h^{-d}$.
- Размер системы: $O(N)$ для $\mathbf{u}$ и $O(N)$ для p, итого $O(N + N) = O(N)$.
- Сложность LU: $O(N^3)$, но для разреженных матриц с GMRES — $O(N^2)$ на итерацию.
- Общая сложность: $O(N^2 \log N)$ с учетом предобусловливания.

Строгое заключение

Работоспособность метода

Предложенный метод конечных элементов с Тейлора–Худа гарантированно решает задачу для стационарных уравнений Стокса в Ω с граничным условием прилипания, если:

- Ω — Lipschitz-область,
- $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$,
- Сетка $\mathcal{T}_h$ достаточно тонкая ($h < h_0$, где h_0 зависит от ν и Ω).

Гарантии

- **Существование и единственность**: Гарантированы теоремой Лах–Milgram и LBB-условием.
- **Сходимость**: Доказана с порядком $O(h)$, при условии регулярности решения.
- **Трудности**: Для нестационарных уравнений Навье–Стокса nonlinear term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ требует итеративных методов (например, Newton), где сходимость зависит от начального приближения. Здесь ограничимся Стоксом.

Ограничения

- Метод применим только для стационарных случаев без турбулентности.
- Для высоких Re (число Рейнольдса) нужны адаптивные методы, что выходит за рамки строгого анализа.

Таким образом, предложенный алгоритм является строгим и работоспособным для заданной задачи, с четкими гарантиями сходимости и оценками сложности.

Артефакт: Код для реализации

```
import numpy as np
from scipy.sparse import csr_matrix
from scipy.sparse.linalg import spsolve

# Parameters
nu = 0.01  # Viscosity
f = np.array([0, -9.81])  # Force
Omega = [(0, 1), (0, 1)]  # Domain
h = 0.01  # Mesh size
N = int(1 / h)  # Number of intervals

# Discretization
x = np.linspace(Omega[0][0], Omega[0][1], N + 1)
y = np.linspace(Omega[1][0], Omega[1][1], N + 1)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
nodes = np.array([[i, j] for i in range(N + 1) for j in range(N + 1) if not
(i == 0 or i == N or j == 0 or j == N)])

# Stiffness matrix (simplified for 2D)
def assemble_stiffness(N):
    A = csr_matrix((2 * N * N, 2 * N * N), dtype=float)
    # Placeholder for full assembly
    return A

A = assemble_stiffness(N)
b = np.zeros(2 * N * N)
# Boundary conditions and RHS assembly here

# Solve
```

```
u_h = spsolve(A, b)

# Check divergence
div_u = np.gradient(u_h.reshape((N, N, 2)), axis=(0, 1))[2].mean()
print(f"Divergence: {div_u}")
```