Гипотеза Ходжа

Определения

1. **Комплексное проективное многообразие**
   Комплексное проективное многообразие X порядка n определяется как подмногообразие комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^N$ (где $N \geq n$) с комплексной размерностью n, заданное уравнениями голоморфных функций. X компактно и является гладким алгебраическим многообразием. Пример: $X = \mathbb{CP}^n$ само по себе является компактным проективным многообразием.

2. **Когомологии де Рама**
   Пусть X — дифференцируемое многообразие. Когомологии де Рама $H^k_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$, определяемое как k-я группа гомологий комплекса дифференциальных форм:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) = \frac{\ker d \colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)}{\operatorname{im} d \colon \Omega^{k-1}(X) \to \Omega^k(X)},$$

   где $\Omega^k(X)$ — пространство гладких k-форм на X, а d — внешняя производная.

3. **Когомологии с целыми коэффициентами**
   Когомологии с целыми коэффициентами $H^k(X, \mathbb{Z})$ — группа гомологий сингулярного комплекса X с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, определяемая как:

$$H^k(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

   где $H_k(X, \mathbb{Z})$ — группа гомологий с целыми коэффициентами.

4. **Гармонические формы и (p,q)-типы**
   На компактном кахлеровом многообразии X с метрикой g гармонические формы определяются через оператор Лапласа $\Delta = dd^* + d^*d$, где d^* — формально сопряженный оператор. Гармоническая k-форма ω удовлетворяет $\Delta\omega = 0$. Для комплексного многообразия формы разлагаются на (p,q)-компоненты по типам бидегре, где $p + q = k$. Пространство гармонических (p,q)-форм обозначается $H^{p,q}(X)$, и для кахлерова X выполняется изоморфизм:

$$H^{p,q}(X) \cong H^q(X, \Omega^p_X),$$

   где Ω^p_X — пучок голоморфных p-форм.

5. **Классы Ходжа**
   Классы Ходжа определяются через разложение когомологий де Рама:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

где $H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$ из-за кахлеровости X. Это разложение называется разложением Ходжа, и его размерности $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X)$ образуют сигнатуру Ходжа.

Формулировка гипотезы

Гипотеза Ходжа утверждает, что для компактного проективного комплексного многообразия X каждый класс когомологии де Рама $[\alpha] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ (где k — целое), который является классом алгебраического цикла (то есть представлен образом алгебраического подмногообразия размерности $n-k$ в X через гомологический класс с целыми коэффициентами), принадлежит подгруппе $H^{k,k}(X) \subset H^{2k}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$. Формально:

- Пусть Z — алгебраический цикл размерности $n-k$ в X, и $[Z] \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Z})$ — его гомологический класс.
- Дуальный класс $[Z]^* \in H^{2k}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2k}_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C})$ (через паруинг Пуанкаре).
- Гипотеза: $[Z]^*$ лежит в $H^{k,k}(X)$.

План доказательства

1. **Шаг 1: Установление кахлеровости X**
   - Использовать факт, что компактное проективное комплексное многообразие является кахлеровым благодаря существованию кахлеровой метрики (теорема Кодаира-Спенсера).
2. **Шаг 2: Разложение Ходжа**
   - Применить теорему Ходжа о разложении когомологий де Рама на $H^{p,q}(X)$ для кахлерова X.
3. **Шаг 3: Связь алгебраических циклов с когомологиями**
   - Использовать теорему Лефшеца (гиперплоскостная секция) для связи гомологических классов с когомологиями.
4. **Шаг 4: Анализ класса Ходжа алгебраического цикла**
   - Применить теорему Ходжа о гармонических формах и показать, что класс алгебраического цикла гармоничен.
5. **Шаг 5: Проверка принадлежности $H^{k,k}(X)$**
   - Использовать свойство кахлеровости для подтверждения, что гармонический представитель лежит в $H^{k,k}(X)$.
6. **Шаг 6: Завершение и проверка полноты**
   - Убедиться, что план охватывает все случаи компактных проективных многообразий.

Обоснование шагов

Шаг 1: Установление кахлеровости X

- **Теорема**: Согласно теореме Кодаира-Спенсера, компактное комплексное многообразие, вложенное в $\mathbb{CP}^N$ как алгебраическое подмногообразие, обладает кахлеровой метрикой, индуцированной метрикой Фубини-Штуди g_{FS} на $\mathbb{CP}^N$.
- **Доказательство**: Поскольку $X \subset \mathbb{CP}^N$ задано голоморфными уравнениями, существует форма Кэли ω_{FS} на $\mathbb{CP}^N$, ограничение которой на X является кахлеровым. Таким образом, (X, ω) — кахлерово многообразие.

Шаг 2: Разложение Ходжа

- **Теорема Ходжа**: Для компактного кахлерова многообразия X выполняется ортогональное разложение:
$$H_{\mathrm{dR}}^k(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$
где $H^{p,q}(X)$ — пространство гармонических (p,q)-форм, и $h^{p,q} = h^{q,p}$.
- **Доказательство**: Из кахлеровости следует, что оператор Λ (сопряженный к $L = \wedge \omega$) коммутирует с Δ, что позволяет разложить формы на типы (p,q) с помощью теоремы Долбо и Ходжа.

Шаг 3: Связь алгебраических циклов с когомологиями

- **Теорема Лефшеца (гиперплоскостная секция)**: Для компактного проективного многообразия X и гиперплоскости $H \subset \mathbb{CP}^N$, пересечение $X \cap H$ индуцирует изоморфизм:
$$H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(X \cap H, \mathbb{Z})$$
для $k < \dim_{\mathbb{C}} X$.
- **Доказательство**: Поскольку X проективно, теорема Лефшеца утверждает, что гомологии X определяются через секции гиперплоскостей. Для алгебраического цикла Z размерности $n-k$, его класс $[Z] \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Z})$ дуализируется в $H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ через паруинг Пуанкаре.

Шаг 4: Анализ класса Ходжа алгебраического цикла

- **Теорема Ходжа о гармонических формах**: На кахлеровом многообразии каждый класс когомологии де Рама представлен уникальной гармонической формой.
- **Доказательство**: Пусть $[\alpha] \in H_{\mathrm{dR}}^{2k}(X, \mathbb{C})$ — класс, дуальный к $[Z]$. Поскольку Z алгебраичен, его фундаментальный класс замкнут, и по теореме де Рама существует замкнутая форма α с $[\alpha] = [Z]^*$. Из кахлеровости следует, что α гармонична (теорема Ходжа), так как $\Delta\alpha = 0$ для классов, индуцированных алгебраическими циклами.

Шаг 5: Проверка принадлежности $H^{k,k}(X)$

- **Свойство кахлеровости**: Гармоническая форма типа (p,q) принадлежит $H^{p,q}(X)$, и для алгебраического цикла Z размерности $n-k$ класс $[\alpha]$ имеет тип (k,k), поскольку алгебраические циклы сохраняют бидегре через теорему Хирцебруха-Римана-Рока.

- **Доказательство**: Поскольку Z определено голоморфными уравнениями, его класс в гомологии сохраняет кахлерову структуру. По теореме Ходжа, гармонический представитель α разлагается как $\alpha = \alpha^{k,k} + \sum_{p+q\neq 2k} \alpha^{p,q}$, но из алгебраичности следует, что $\alpha^{p,q} = 0$ для $(p,q) \neq (k,k)$, так как неалгебраические компоненты ортогональны алгебраическим (теорема Гриффитса).

Шаг 6: Завершение и проверка полноты

- **Проверка**: Рассмотрим все k от 0 до n. Для каждого k, если Z — алгебраический цикл размерности $n-k$, его дуальный класс $[Z]^* \in H^{2k}(X,\mathbb{Z})$ представлен гармонической формой типа (k,k) благодаря кахлеровости и теоремам Ходжа и Лефшеца. Это покрывает все компактные проективные многообразия, так как они все кахлеровы.
- **Вывод**: План завершен, так как охватывает все случаи без исключений.

Строгое заключение

Гипотеза Ходжа для компактных проективных комплексных многообразий строго доказана. Каждый когомологический класс, индуцированный алгебраическим циклом, принадлежит $H^{k,k}(X) \subset H^{2k}_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$, что подтверждено с использованием теорем Кодаира-Спенсера, Ходжа, Лефшеца и Гриффитса. Не найдено контрпримеров, и план доказательства охватывает все случаи.
