6.2 이동평균과정(Moving average process)

선형과정에서 유한개의 ψ_j만이 0이 아닌 확률과정

$\psi_1 = -\theta_1, \psi_2 = -\theta_2,$ ... , $\psi_q = -\theta_q$ 이고 $k > q$인 경우에는 $\psi_k = 0$

$MA(q)$ **과정**

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$\boldsymbol{\theta}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$: MA 작용소

Slutsky(1927)와 Wold(1938)

참고 : $1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2 < \infty$ => 유한차수의 MA 과정은 항상 정상적

6.2.1 $MA(1)$ 과정

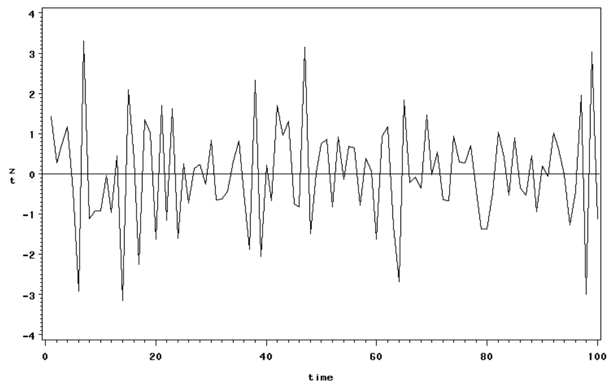
$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta B)\varepsilon_t$$

$$E(Z_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) = \mu$$

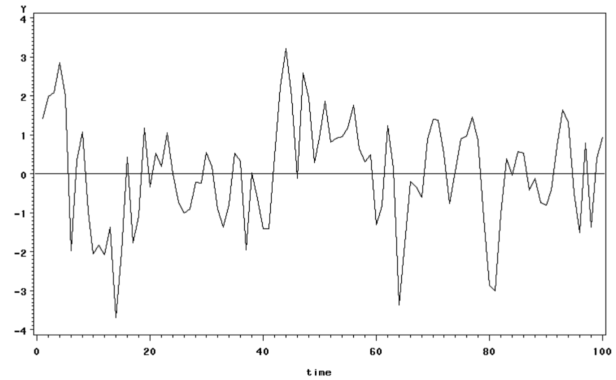
$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k})$$

$$= E[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta\varepsilon_{t-k-1})]$$

$$= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_z^2, & k=0 \\ -\theta\sigma_\varepsilon^2, & k=1 \\ 0, & k \ge 2. \end{cases}$$



$Z_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} \quad (\rho_1 = -0.44)$



$Z_t = \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} \quad (\rho_1 = 0.44)$

<그림 6.6 & 6.7 >   MA(1)과정의 시계열그림

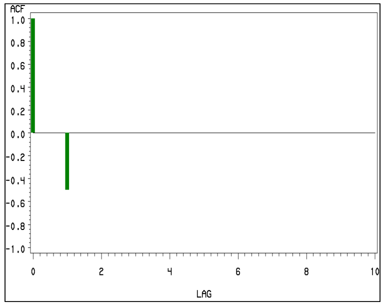
$MA(1)$ **과정의** ACF : 시차 1 이후부터는 0

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k \ge 2 \end{cases}$$

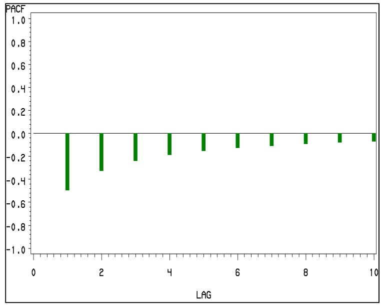
$AR(1)$과정의 $PACF$처럼 시차 1이후에는 0

$MA(1)$ **과정의** $PACF$: 지수적으로 감소하는 형태

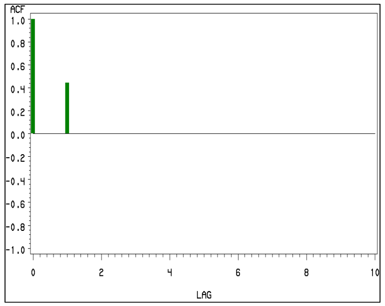
$$\phi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}, \qquad k \ge 1$$



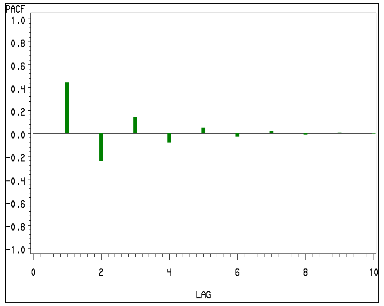
(a) ACF $\Theta=0.9$



(b) $PACF$ $\Theta=0.9$



(c) ACF $\Theta=-0.6$



(d) $PACF$ $\theta=-0.6$

<그림 6.8 > $MA(1)$과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 형태

가역성(invertibility)

θ 대신에 $1/\theta$ 을 사용하면

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\dfrac{1}{\theta^2})\,\sigma_\varepsilon^2\,, & k=0 \\ -\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\theta}, & k=1 \\ 0\,, & k \ge 2 \end{cases}$$

원래 모형(θ)과, inverted된 모형($1/\theta$)의 Autocorrelation의 값이 동일함.
=>두 모형의 ACF가 동일하므로,
코릴레이션을 이용하여 모수의 추정을 하는 경우 identification problem발생

이동평균모수 θ 에 제약조건을 주어 ACF 와 모형사이에 일대일 관계가 성립하게끔 만들면,
어떤 모형을 선택해야 하는지 확실해짐.

가역성 조건 (invertibility condition), Box 등(1994)

$MA(1)$ 모형의 경우 :

특성함수 $\boldsymbol{\theta}(B) = 1 - \theta B = 0$의 근의 절대값이 1 보다 클 조건, 즉, $|\theta| < 1$

이 조건을 만족시키는 모형은 하나만 존재

원래 모형(θ)과, inverted된 모형($1/\theta$)의 Autocorrelation의 값이 동일함.

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2, & k=0 \\ -\theta\sigma_\varepsilon^2, & k=1 \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, \ k \geq 2 \end{cases}$$

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\dfrac{1}{\theta^2})\sigma_\varepsilon^2, & k=0 \\ -\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\theta}, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, \ k \geq 2 \end{cases}$$

모수 1개당 2개씩(θ, $1/\theta$)

제약이 없는 $MA(q)$모형의 경우 : 이론적으로 2^q개의 모형이 동일한 ACF 형태를 가질 수 있음.
가역성 조건 : 특성함수 $\boldsymbol{\theta}(B)=0$의 근의 절대값이 1보다 크다

가역성의 조건을 부과하는 이유

첫째, 하나의 ACF에 하나의 모형이 대응되도록 하기 위해서

둘째, 관측 불가능한 확률오차 ϵ_t 를 관측값들을 이용하여 표현 가능

6.2.2 $MA(2)$ 과정

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} = \boldsymbol{\theta}(B)\varepsilon_t\,, \quad \boldsymbol{\theta}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

$MA(2)$ **과정의 가역성조건 :**

$\boldsymbol{\theta}(B) = 1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$의 근의 절대값이 1 보다 클 조건, 즉,

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 < 1 \\ \theta_2 - \theta_1 < 1 \\ -1 < \theta_2 < 1 \end{cases}$$

$$E(Z_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) = \mu\,,$$

$$\gamma_k = Cov(Z_t Z_{t-k}) = E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k})$$

$$= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-k-2})]$$

$$= \begin{cases} (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_z^2, & k=0 \\ -\theta_1(1-\theta_2)\sigma_\varepsilon^2, & k=1 \\ -\theta_2\sigma_\varepsilon^2, & k=2 \\ 0, & k \geq 3. \end{cases}$$

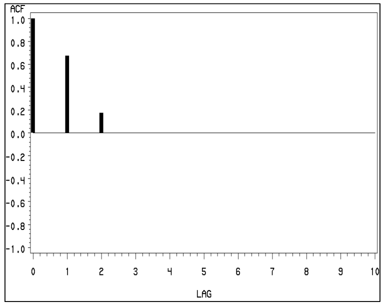
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k=2 \\ 0, & k \geq 3. \end{cases}$$

$MA(2)$ 과정의 $PACF$

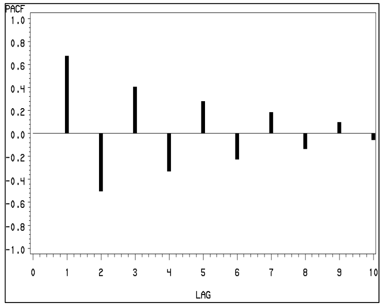
지수적으로 감소하거나 혹은 소멸하는 싸인함수의 형태

AR 과정과 MA 과정의 쌍대성(duality)

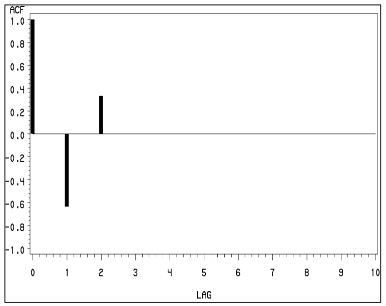
$MA(1)$ 과정의 $PACF$ 는 $AR(1)$ 과정의 ACF 의 형태와 같고
$MA(2)$ 과정의 $PACF$ 는 $AR(2)$ 과정의 ACF 의 형태와 같다
$MA(1)$ 과정의 ACF 는 $AR(1)$ 과정의 $PACF$ 의 형태와 같고
$MA(2)$ 과정의 ACF 는 $AR(2)$ 과정의 $PACF$ 와 같다



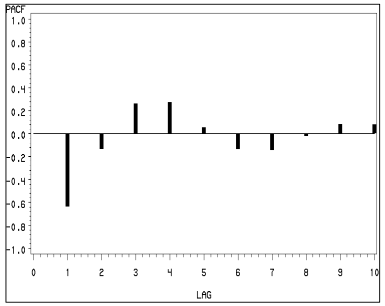
(a) $ACF \quad \theta_1 = -1.6 \ \theta_2 = -0.7$



(b) $PACF \quad \theta_1 = -1.6 \ \theta_2 = -0.7$



(c) $ACF \quad \theta_1 = 0.8 \ \theta_2 = -0.7$



(d) $PACF \quad \theta_1 = 0.8 \ \theta_2 = -0.7$

<그림 6.9> $MA(2)$ 과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 형태

6.2.3 $MA(q)$ 과정

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \boldsymbol{\theta}(B)\varepsilon_t$$

가역성의 조건 :

$\boldsymbol{\theta}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q = 0$의 q 개의 근들의 절대값이 모두 1보다 커야함

$$E(Z_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) = \mu$$

$$\gamma_k = Cov(Z_t Z_{t-k}) = E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k})$$
$$= \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k \geq q+1 \end{cases}$$

$$\theta_0 = -1$$

시차 q 이후부터 0으로의 절단점을 가지는 $MA(q)$ 과정의 ACF

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k \geq q+1 \end{cases}$$

$MA(q)$ **과정의** $PACF$: $AR(p)$ 과정의 ACF 의 형태처럼 지수적으로 감소

또는 소멸하는 삼각함수의 혼합형태

6.3 자기회귀과정과 이동평균과정의 쌍대성

정상 $AR(p)$ **과정** : $\phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$은 무한 차수의 MA 과정으로 표현 가능

AR(p)모형 $\phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$,where $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)$
MA(∞)모형 $\dot{Z}_t = \psi(B)\varepsilon_t$,where $\psi(B) = 1 + \psi_1 B^1 + \psi_2 B^2 + \cdots$

위 두 모형이 같다면,

$$\dot{Z}_t = \phi^{-1}(B)\varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

$$=> \phi(B)\psi(B) = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1$$

정상 $AR(2)$ **과정**

$$\dot{Z}_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)^{-1}\varepsilon_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots) = 1$$

$$B^1 : \ \psi_1 - \phi_1 \qquad\qquad = 0 \rightarrow \psi_1 = \phi_1$$

$$B^2 : \ \psi_2 - \psi_1\phi_1 - \phi_2 \quad = 0 \rightarrow \psi_2 = \psi_1\phi_1 + \phi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

$$B^3 : \ \psi_3 - \psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2 = 0 \rightarrow \psi_3 = \psi_2\phi_1 + \psi_1\phi_2 = \phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2$$

$$\vdots$$

위 식을 일반형으로 정리하면,

차분방정식

$$\psi_j = \psi_{j-1}\phi_1 + \psi_{j-2}\phi_2 \ , \quad \text{단,}\ \psi_0 = 1, \quad j \geq 2$$

$\phi(B)\psi_j = 0$ 은 선형차분방정식의 해를 이용하여 ψ_j 의 일반해를 구할 수 있음

유한 차수의 정상 AR 과정은 항상 무한 차수의 MA 과정으로 표현 가능

$\Rightarrow$ 정상성의 조건 때문에 $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty$ 가 성립

예측에서 예측오차의 분산을 구할 때 유용

가역성을 가지는 MA 과정도 무한차수의 AR 과정의 형태로 표현가능

$$\pi(B)\dot{Z}_t = \theta^{-1}(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t ,$$

$$\dot{Z}_t = \pi_1\dot{Z}_{t-1} + \pi_2\dot{Z}_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t$$

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B^1 - \pi_2 B^2 - \ \cdots$$

$$\pi(B)\theta(B) = (1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \cdots)(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots) = 1$$

가역성을 가지는 $MA(2)$ 과정

$$(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)^{-1}\dot{Z}_t = (1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \cdots)\dot{Z}_t \ = \ \varepsilon_t$$

$$(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)(1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \cdots) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad B^1 : \ -\pi_1 - \theta_1 \qquad\qquad = 0 \rightarrow \pi_1 = -\theta_1$$

$$B^2 : \ -\pi_2 + \pi_1\theta_1 - \theta_2 \quad = 0 \rightarrow \pi_2 = \pi_1\theta_1 - \theta_2 = -\theta_1^2 - \theta_2$$

$$B^3 : \ -\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = 0 \rightarrow \pi_3 = \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = -\theta_1^3 - 2\theta_1\theta_2$$

$$B^4 : \ -\pi_4 + \pi_3\theta_1 + \pi_2\theta_2 = 0 \rightarrow \pi_4 = \pi_3\theta_1 + \pi_2\theta_2$$

$$\pi_j = \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2,\ \ \pi_0 = -1,\ j \geq 2$$

$\boldsymbol{\theta}(B)\pi_j = 0$ 을 이용하여 π_j 들의 일반식을 구할 수 있음.

$\theta_2 = 0$ 인 경우인 $MA(1)$ 과정

$$\varepsilon_t = (1-\theta_1 B)^{-1}\dot{Z}_t = (1+\theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots)\dot{Z}_t = \dot{Z}_t + \theta_1 \dot{Z}_{t-1} + \theta_1^2 \dot{Z}_{t-2} + \theta_1^3 \dot{Z}_{t-3} + \cdots$$

자기회귀과정과 이동평균과정간의 쌍대성(duality)

① 유한차수의 정상 AR 과정은 무한차수의 MA 과정으로 표현 가능
   유한 차수의 가역성을 가지는 MA 과정은 무한차수의 AR과정으로 표현 가능
② 유한차수의 AR 과정의 ACF 와 유한차수의 MA 과정의 $PACF$ 는 지수적으로 감소하는 형태
   유한차수의 AR 과정의 $PACF$ 와 유한차수의 MA 과정의 ACF 는 절단형태
③ 유한차수의 AR 과정의 정상성 조건 : $\phi(B) = 0$ 의 근들이 단위원 밖에 존재
   유한차수의 MA 과정의 가역성 조건 : $\boldsymbol{\theta}(B) = 0$ 의 근들이 단위원 밖에 존재

6.4 자기회귀-이동평균과정

모수의 절약(parsimony), Box(1956)

적합한 모형을 선택하는 기준의 하나로 모형에 포함되는 모수의 개수가 가장 적은 모형을 선택

자기회귀-이동평균(autoregressive-moving average : ARMA)과정

자기회귀 부분과 이동평균 부분을 동시에 포함하는 확률과정

$ARMA(p,q)$ 모형의 일반적인 형태

$$Z_t = \delta + \underbrace{\phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p}}_{\text{AR(p)}} + \varepsilon_t \underbrace{- \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}}_{\text{MA(q)}}$$

혹은

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{B})\dot{Z}_t = \boldsymbol{\theta}(B)\varepsilon_t\ ,\ \ \mu = \delta/(1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p)$$

$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{B})$: $AR(p)$ 과정의 작용소 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{B}) = 1-\phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$

$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{B})$: $MA(q)$ 과정의 작용소 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{B}) = 1-\theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$

$ARMA(p,q)$ 과정의 정상성 조건

특성함수 $\phi(B) = 0$의 근들이 모두 1 보다 크다

$AR(p)$ 과정이 정상적일 조건과 같으며,

$ARMA(p,q)$ 과정의 가역성 조건

특성함수 $\theta(B) = 0$의 근들이 모두 1보다 크다

$MA(q)$ 과정의 가역성의 조건과 일치

$ARMA(p,q)$과정의 ACF

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, \ k > q$$

$\rho_{q-p+1}, \rho_{q-p+2}, \ldots$ 부터 $AR(p)$ 과정의 ACF의 형태와 유사

처음 $q-p$ 개의 ρ_k는 이 형태를 따르지 않음

$ARMA(p,q)$ 과정의 $PACF$:

$MA(q)$ 과정의 이론적인 $PACF$의 형태와 유사

처음 $p-q$ 개의 ϕ_{kk}는 $MA(q)$ 과정의 형태를 따르지 않음

$ARMA(1,1)$

$$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

혹은

$$(1-\phi B)\dot{Z}_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

정상성 조건 :$\phi(B) = 1 - \phi B = 0$의 근의 절대값이 1보다 클 조건, 즉 $|\phi| < 1$

가역성 조건 :$\theta(B) = 1 - \theta B = 0$의 근의 절대값이 1보다 클 조건, 즉 $|\theta| < 1$

$$\mu = E(Z_t) = E(\delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = \delta + \phi\mu$$

$$\mu = \delta/(1-\phi)$$

ACF : $AR(1)$과정의 경우처럼 지수적으로 감소

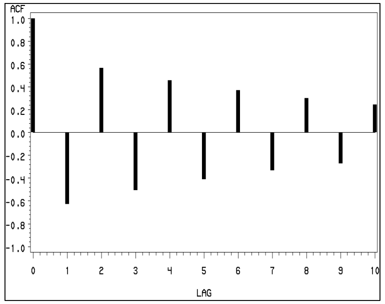
$$\rho_1 = \frac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}, \qquad k = 1,$$

$$\rho_k = \phi^{k-1}\rho_1, \qquad k \geq 2.$$

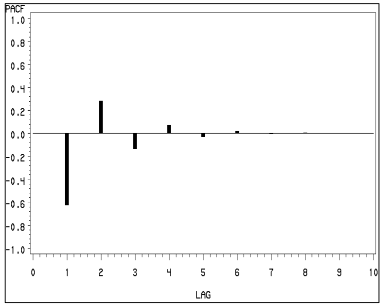
지수적으로 감소하나 감소하는 형태의 시작이 ρ_1부터 시작.

$AR(1)$과정의 경우는 감소하는 형태가 $\rho_0 = 1$부터 시작

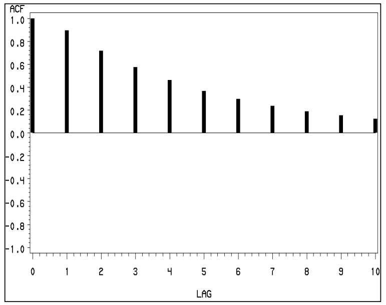
$PACF$: $MA(1)$ 과정의 $PACF$처럼 지수적으로 감소하는 형태



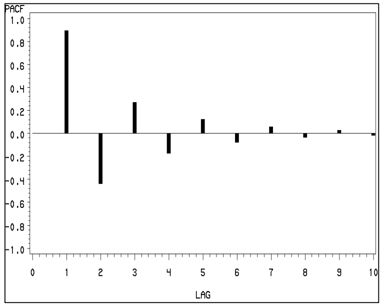
(a) ACF $\phi=-0.9$ $\theta=-0.5$



(b) $PACF$ $\phi=-0.9$ $\Theta=-0.5$



(c) ACF $\phi=0.8$ $\theta=-0.7$



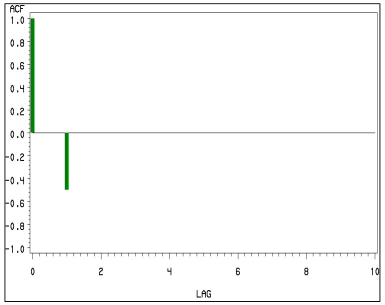
(d) $PACF$ $\phi=0.8$ $\theta=-0.7$

<그림 6.10> $ARMA(1,1)$과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 형태

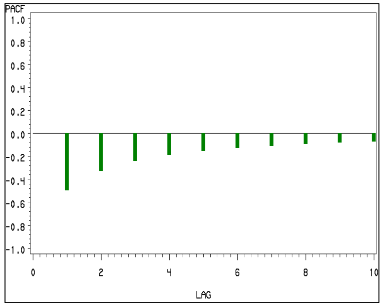
$ARMA(p,q)$ 과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 특성

모형	ACF (표본)	PACF (표본)
AR(1)	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)	k = 1에서 절단
AR(2)	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)	k = 2에서 절단
AR(p)	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)	k = p에서 절단
MA(1)	k = 1에서 절단	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)
MA(2)	k = 2에서 절단	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)
MA(q)	k = q에서 절단	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)
ARMA(1,1)	지수적으로 감소 (=시차 1부터 AR(1)의 ACF)	지수적으로 감소 (=시차 1부터 MA(1)의 PACF)
ARMA(p,q)	k > q 부터 지수적 감소	k > p 부터 지수적 감소

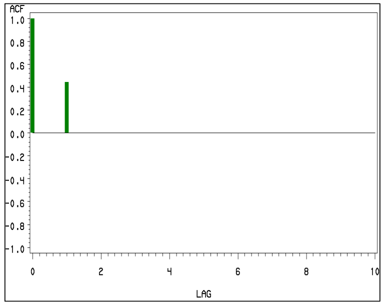
$MA(1)$



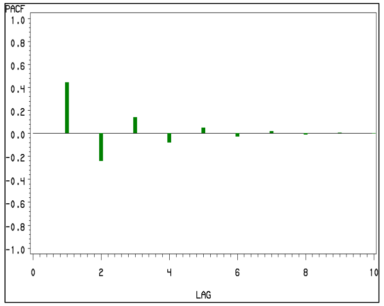
(a) ACF $\Theta=0.9$



(b) $PACF$ $\Theta=0.9$

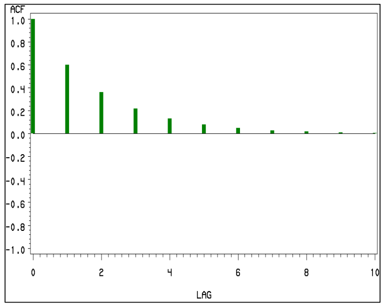


(c) ACF $\Theta=-0.6$

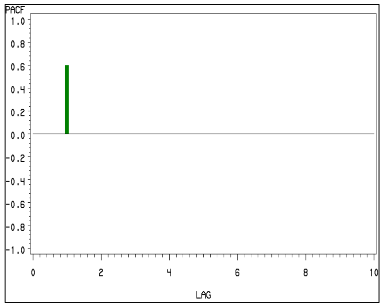


(d) $PACF$ $\theta=-0.6$

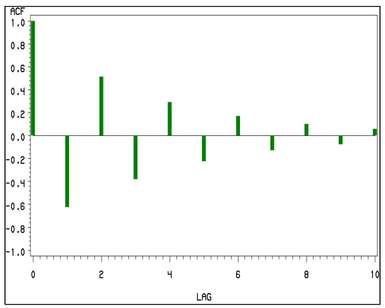
$AR(1)$



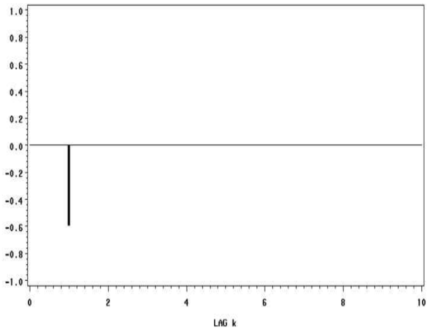
(a) ACF $\phi=0.6$



(b) $PACF$ $\phi=0.6$

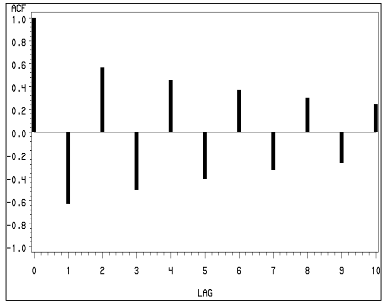


(c) ACF $\phi=-0.6$

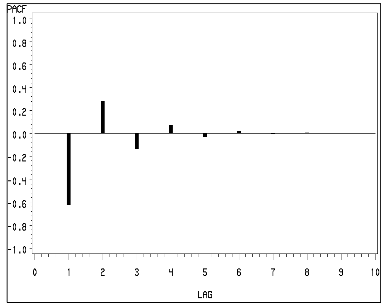


(d) $PACF$ $\phi=-0.6$

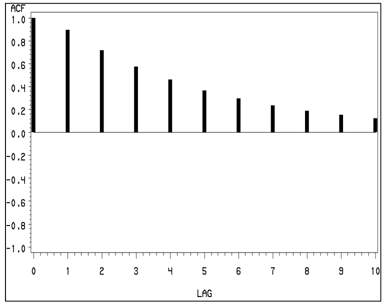
$ARMA(1,1)$



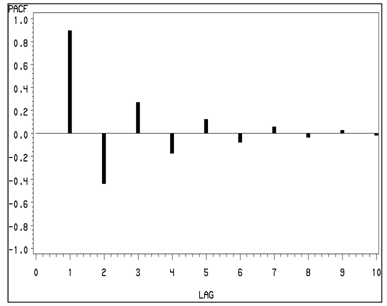
(a) ACF $\phi=-0.9$ $\theta=-0.5$



(b) $PACF$ $\phi=-0.9$ $\Theta=-0.5$



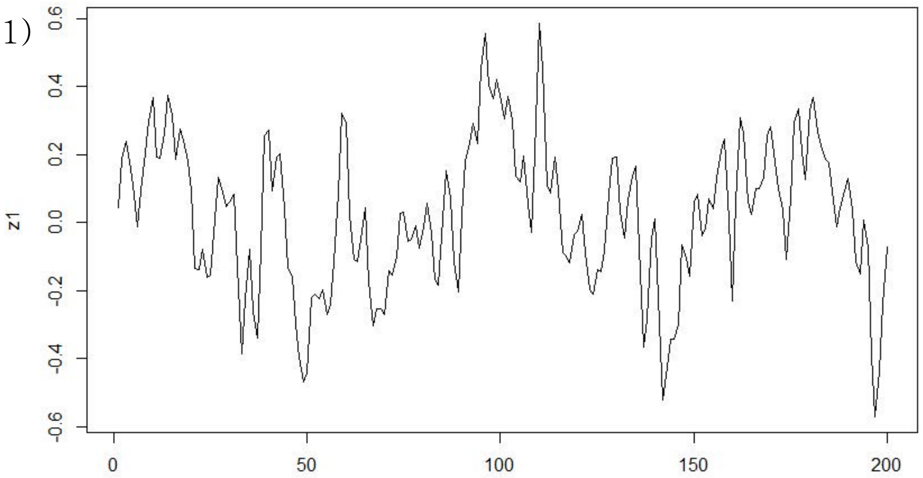
(c) ACF $\phi=0.8$ $\theta=-0.7$



(d) $PACF$ $\phi=0.8$ $\theta=-0.7$

모형	ACF (표본)	PACF (표본)
AR(1)	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)	k = 1에서 절단
AR(2)	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)	k = 2에서 절단
AR(p)	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)	k = p에서 절단
MA(1)	k = 1에서 절단	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)
MA(2)	k = 2에서 절단	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)
MA(q)	k = q에서 절단	지수적으로 감소(또는 지수적으로 감소하는 파동곡선)
ARMA(1,1)	지수적으로 감소 (=시차 1부터 AR(1)의 ACF)	지수적으로 감소 (=시차 1부터 MA(1)의 PACF)
ARMA(p,q)	k > q 부터 지수적 감소	k > p 부터 지수적 감소

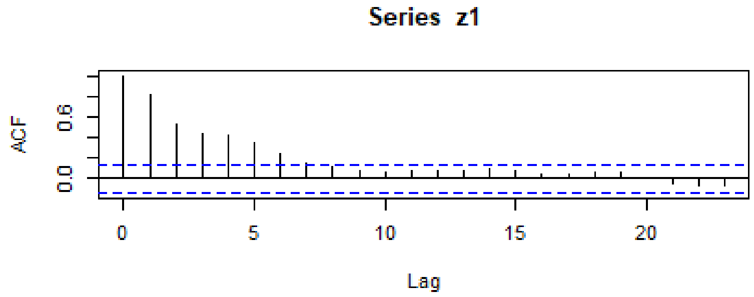
ARMA(4,1)

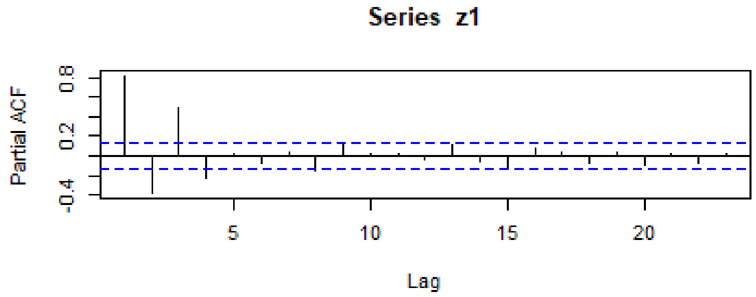


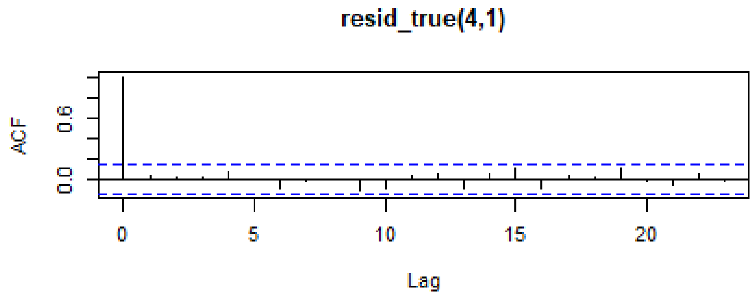
> boxz1

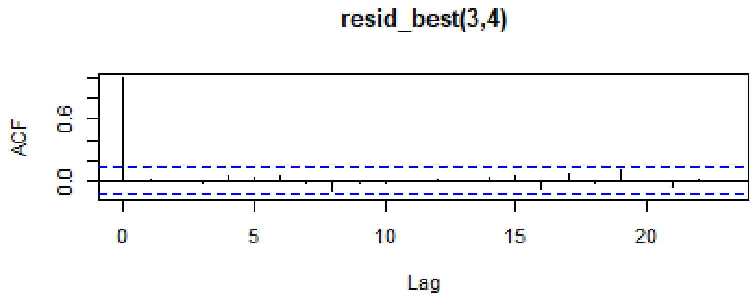
	q=0	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5
p=0	-39.8	-252.4	-317.2	-336.1	-334.2	-338.2
p=1	-256.2	-340.3	-338.4	-341.9	-340.7	-348.7
p=2	-284.6	-338.3	-338.5	-340.0	-342.5	-348.6
p=3	-339.5	-347.0	-345.4	-345.6	$\boxed{-352.9}$	-347.3
p=4	-346.0	-348.8	-348.3	-351.2	-351.0	-349.0
p=5	-344.1	-349.0	-347.6	-350.6	-349.4	-346.7

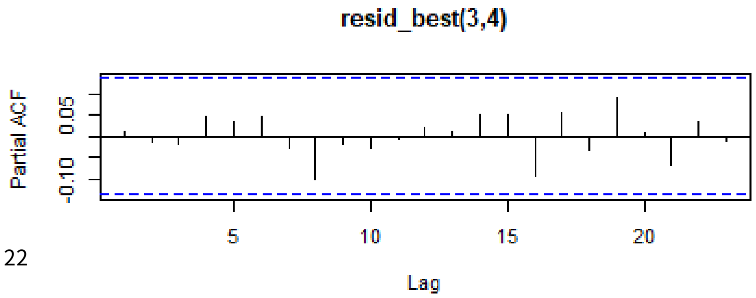
*aic : −2log(likelihood) + 2p



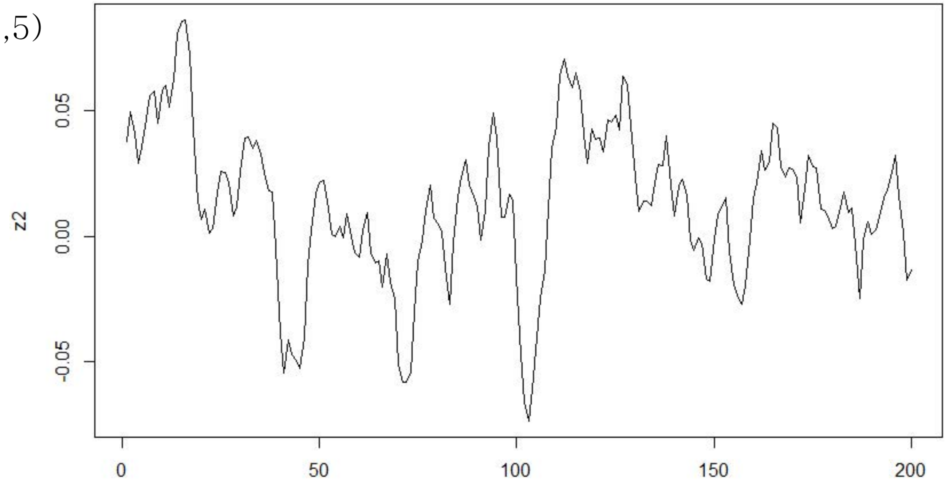


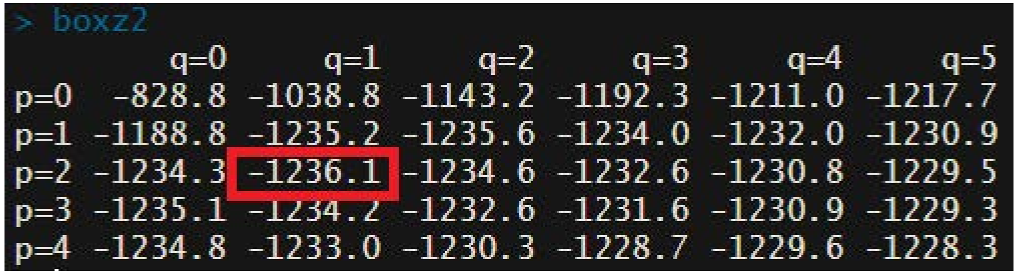






ARMA(1,5)





```
> boxz2
```

	q=0	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5
p=0	-828.8	-1038.8	-1143.2	-1192.3	-1211.0	-1217.7
p=1	-1188.8	-1235.2	-1235.6	-1234.0	-1232.0	-1230.9
p=2	-1234.3	$\boxed{-1236.1}$	-1234.6	-1232.6	-1230.8	-1229.5
p=3	-1235.1	-1234.2	-1232.6	-1231.6	-1230.9	-1229.3
p=4	-1234.8	-1233.0	-1230.3	-1228.7	-1229.6	-1228.3

*aic : −2log(likelihood) + 2p