6 장 정상 자기회귀-이동평균과정

6.1 자기회귀과정(autoregressive process)

확률과정 $\{Z_t\}$: **자기회귀과정(autoregressive process)**

$$Z_t = f(Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots) + \varepsilon_t$$

단, $\{\varepsilon_t\}$는 평균 0, 분산 σ_ε^2을 가지는 백색잡음과정

$AR(p)$ 과정:

$$\begin{aligned} Z_t - \mu &= \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \phi_2(Z_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(Z_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j (Z_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t , \end{aligned}$$

$\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ 라면

$$\dot{Z}_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \dot{Z}_{t-j} + \varepsilon_t$$

후진작용소(backshift operator) B : $BZ_t = Z_{t-1}$, $B^2 Z_t = Z_{t-2}$, $\cdots$, $B^j Z_t = Z_{t-j}$, $\cdots$

$$\phi(B)(Z_t - \mu) = \phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$$

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$: AR**작용소(AR operator)**

*Note
$\phi()$는 ϕ들로 이루어진 함수이고,
ϕ는 모수이다.

$AR(p)$ 과정 : $\delta = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu$ 이용

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$$

$AR(p)$ **과정의 정상성 조건 :**

$\phi(B) = 0$ 의 근들이 단위원밖에 있어야 함, 즉, $\phi(B) = 0$ 의 근의 절대값이 1보다 커야 함 $|\phi| < 1$

$\Leftrightarrow \phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다, 즉, $|B| = |1/\phi| > 1$과 동치

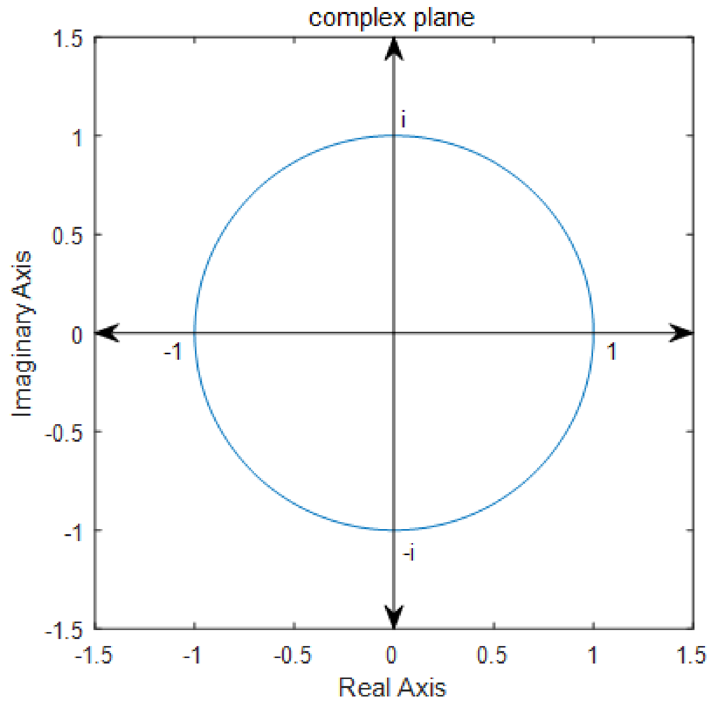
근의 절대값이 1보다 작다면, $|\phi| > 1$이 되어 분산이 존재하지 않게 됨

단위근 :
방정식의 근이 복소평면에서의 좌표가 반지름이 1인 단위원 위에 있다.
ex) 근이 $a \pm bi$라면 복소평면의 좌표$(a, b), (a, -b)$가 단위원 위에 있다.

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

ex) 근이 실근인데 단위근이면,
$a \pm bi$ 에서 b가 0인 case. $(a, 0)$이 $a^2 = 1$을 만족하는 $|a| = 1$이됨
단위원 밖에 있다면 $|a| > 1$을 의미.

ex) 근이 복소수인데 단위근이면,
$a \pm bi$의 복소평면의 좌표$(a, b), (a, -b)$가 단위원 위에 있다.
$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$
(a, b)가 단위원 밖에 있으려면
$a^2 + b^2 > 1$을 만족하면 됨.

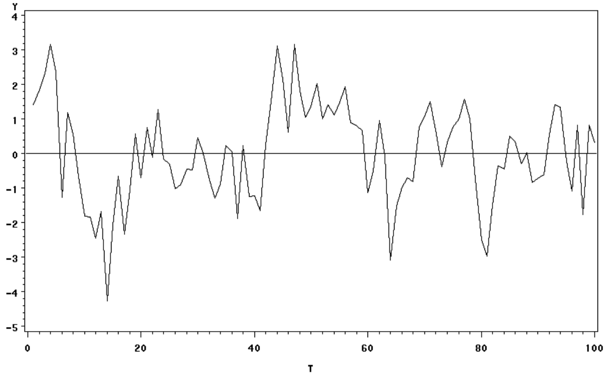


6.1.1 $AR(1)$ 과정 :마코프(Markov)과정

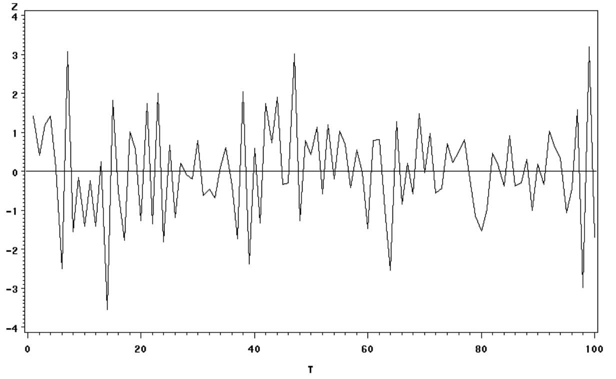
$$\dot{Z}_t = \phi \dot{Z}_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{또는} \quad Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\phi(B) = 1 - \phi B$ 이용

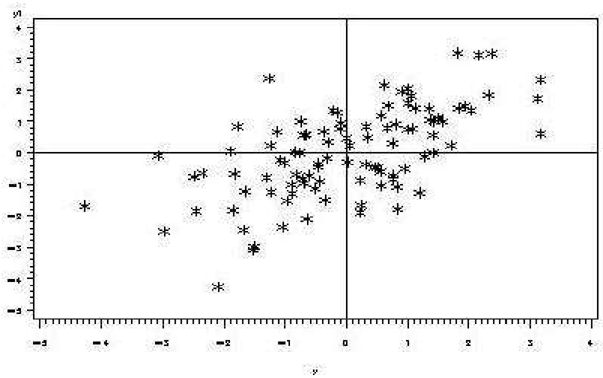
$$\phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$$



<그림6.1> $AR(1)$과정의 시계열그림 $(\rho_1 = 0.5)$ $Z_t = 0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_t$



<그림6.2> $AR(1)$과정의 시계열그림 $(\rho_1 = -0.5)$; $Z_t = -0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_t$



<그림 6.3> (Z_{t-1}, Z_t)의 산점도

$AR(1)$ **과정의 정상성 조건(stationary condition)** $|\phi| < 1$ 가정 하에서

$$\mu = E(Z_t) = E(\delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t) = \delta + \phi\mu$$

$$\sigma_z^2 = Var(Z_t) = \phi^2 \, Var(Z_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) = \phi^2 \sigma_z^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \delta/(1-\phi)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_\epsilon^2/(1-\phi^2) = \gamma_0$$

$|\phi| < 1 \Leftrightarrow \phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다, 즉, $|B| = |1/\phi| > 1$과 동치

AR(1)

$\boldsymbol{\phi}(B) = 1 - \phi_1 B = 0$를 풀면

$B = \frac{1}{\phi_1}$

$\boldsymbol{\phi}(B)$의 근이 단위원 밖 : $|B| = \left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1$

$\Rightarrow |\phi_1| < 1$

$$\begin{aligned} Var(\dot{Z}_t) &= Var(\phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \epsilon_t) \\ &= Var(\epsilon_t) + \phi_1 Var(\epsilon_{t-1}) + \phi_1^2 Var(\epsilon_{t-2}) + \cdots \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\phi_1}, & |\phi_1| < 1 \\ \text{진동 또는 발산}, & else \end{cases} \end{aligned}$$

$|\phi_1| < 1$인 경우에만 유한한 분산이 존재

$\leftrightarrow \boldsymbol{\phi}(B)$의 근이 단위원 밖에 존재

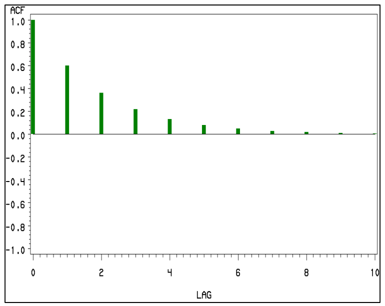
$AR(1)$ 과정의 ACF

$$E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k}) = \phi E(\dot{Z}_{t-1} \dot{Z}_{t-k}) + E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k}),$$

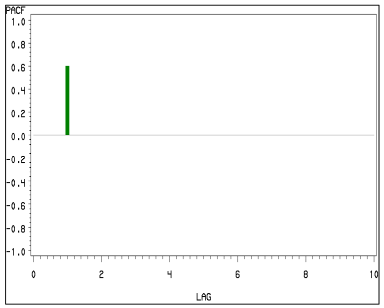
$k \geq 1$ 일 때 $E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k}) = 0$

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} = \phi^2 \gamma_{k-2} = \cdots = \phi^k \gamma_0 = \phi^k \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}, \quad k \geq 1 .$$

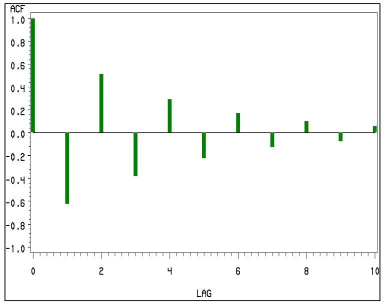
k -시차 ACF : $$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k, \quad k \geq 1$$



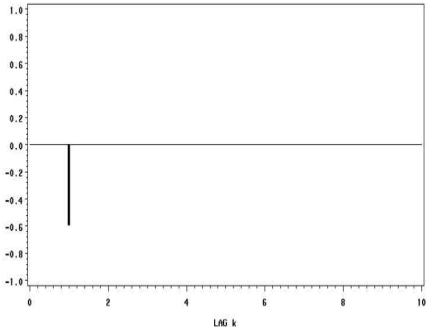
(a) ACF $\phi = 0.6$



(b) $PACF$ $\phi = 0.6$



(c) $ACF \quad \phi = -0.6$



(d) $PACF \quad \phi = -0.6$

<그림 6.4> $AR(1)$과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 형태

ACF의 형태

$\phi > 0$인 경우에는 지수적으로 감소

$\phi < 0$인 경우에는 양의 값과 음의 값을 번갈아 가지며 지수적으로 감소

$AR(1)$ 과정의 $PACF$: $\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi\,, & k = 1 \\ 0\,, & k \geq 2 \end{cases}$

시차 1에서만 ϕ 의 부호에 따라 0이 아니고 2 이상의 시차에서는 0이 됨.

$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = 0$ (AR(1)의 경우 $\rho_2 = \rho_1^2$이므로)

6.1.2 $AR(2)$ 과정

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + \varepsilon_t$$

또는

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

$AR(2)$ 작용소 $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ 이용

$$\phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$$

$AR(2)$ **과정의 정상성 조건** : $\phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다.

$$\mu = E(Z_t) = E(\delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t) = \delta + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu \quad \Rightarrow \mu = \delta/(1 - \phi_1 - \phi_2)$$

AR(2)의 정상성조건

$$\phi(B)1 - \phi_1 B - \phi_2 \mathrm{B}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B^2} - \phi_1 \frac{1}{B} - \phi_2 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - \phi_1 X - \phi_2, \qquad X = \frac{1}{B}$$

정상성조건 : $|X| = \left|\frac{1}{B}\right| < 1$

$$X = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

두 근이 단위원 안의 값을 갖는 조건은

$$\frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1 \; and \; \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} > -1$$

또한 두 근의 곱 $-\phi_2$이 $|-\phi_2| < 1$을 만족해야 하므로
세 조건을 정리하면 AR(2)의 정상성 조건은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$$

$$E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k}) = \phi_1 E(\dot{Z}_{t-1}\dot{Z}_{t-k}) + \phi_2 E(\dot{Z}_{t-2}\dot{Z}_{t-k}) + E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k})$$

$$E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2, \; k = 0 \\ \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_{-1} + \phi_2 \gamma_{-2} + \sigma_\varepsilon^2$$
$$= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$AR(2)$ **과정의** ACF : $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \qquad k \geq 1$

Yule-Walker 방정식

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 \quad + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \; \hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_2)}{1-\hat{\rho}_1^2}, \; \hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1-\hat{\rho}_1^2}}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1-\phi_2}$$

$AR(2)$ **과정의 분산** : $\sigma_z^2 = \gamma_0 = (\frac{1-\phi_2}{1+\phi_2})\{\frac{\sigma_\epsilon^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}\}$

$AR(2)$ **과정의** ACF

$\phi(B) = 0$ 의 두 근이 모두 실수일 때 : 지수형태로 감소

두 근이 모두 복소수일 때: 점차 소멸하는 싸인(sine)함수의 형태

AR(2) 과정의 PACF

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

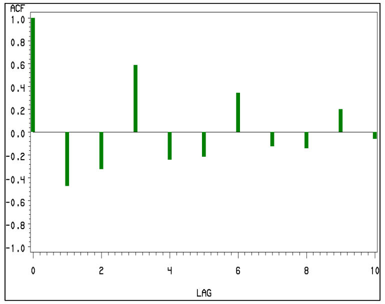
$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \phi_2$$

$$\phi_{kk} = 0,\ k \geqq 3$$

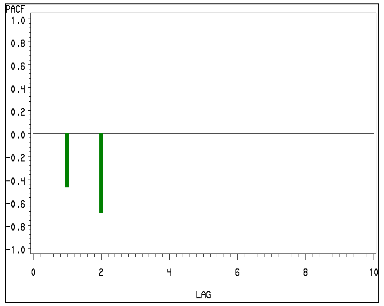
시차 2 이후부터 0이 되는 절단형태

ACF : 지수적으로 감소하거나 싸인함수의 형태로 감소

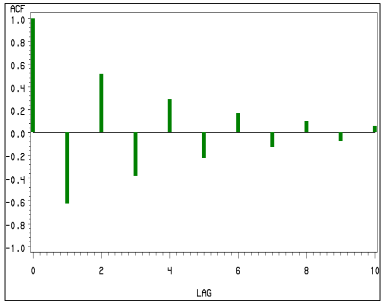
$PACF$: 시차 2까지만 $\phi_{11} = \rho_1$과 $\phi_{22} = \phi_2$의 값을 갖고 그 이후로는 0



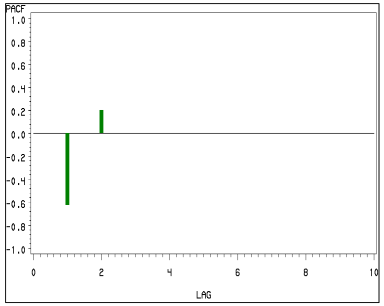
(a) ACF $\phi_1 = -0.8$ $\phi_2 = -0.7$



(b) $PACF$ $\phi_1 = -0.8$ $\phi_2 = -0.7$

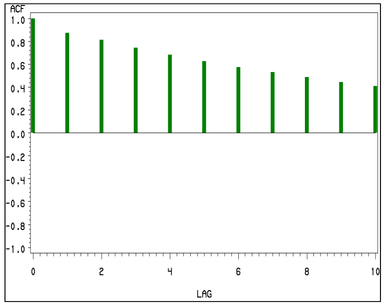


(c) ACF $\phi_1 = -0.5$ $\phi_2 = 0.2$

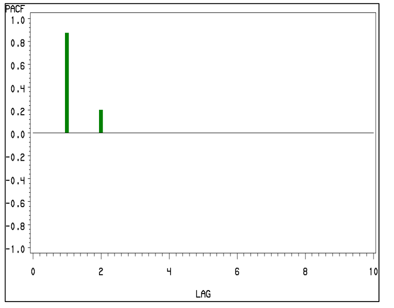


(d) $PACF$ $\phi_1 = -0.5$ $\phi_2 = 0.2$

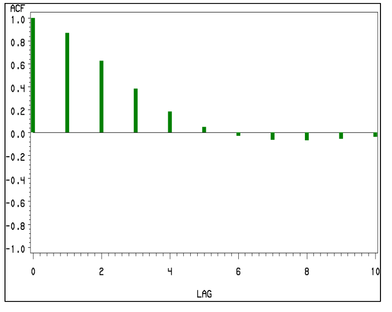
<그림 6.5> $AR(2)$ 과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 형태



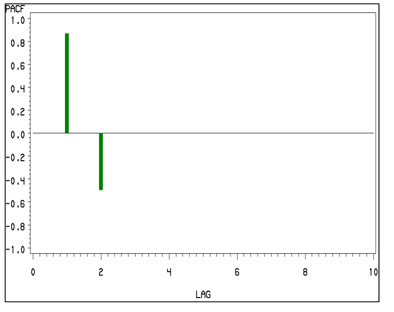
(e) ACF $\phi_1 = 0.7$ $\phi_2 = 0.2$



(f) $PACF$ $\phi_1 = 0.7$ $\phi_2 = 0.2$



(g) ACF $\phi_1 = 1.3$ $\phi_2 = -0.5$



(h) $PACF$ $\phi_1 = 1.3$ $\phi_2 = -0.5$

<그림 6.5> $AR(2)$ 과정의 ACF 와 $PACF$ 의 이론적인 형태

6.1.3 $AR(p)$ 과정

$$\phi(B)(Z_t-\mu)=\phi(B)\dot{Z}_t=\varepsilon_t$$

$AR(p)$ 과정의 정상성조건

$\phi(B)=1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p=0$의 근의 절대값이 1 보다 크다.

ACF의 형태 : 소멸하는 지수함수 또는 소멸하는 싸인함수의 혼합형

$PACF$ ϕ_{kk} : 5장에서 설명한 알고리즘 (5.10)에 의해 구할 수 있음

$AR(p)$ 과정의 이론적인 ACF와 $PACF$의 일반적인 형태

ACF : 지수함수의 형태로 또는 싸인함수와 같은 곡선의 형태를 가지며 점차 줄어듬
$PACF$: $AR(p)$모형의 차수인 시차 p까지는 0이 아니며 시차 p이후에는 0이 됨