Estruturas básicas: conjuntos, funções r.v.r., sucessões

Ano letivo 2025/2026

universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção de objetos chamados elementos. Matematicamente um conjunto é representado por letras maiúsculas e os seus elementos são representados por letras minúsculas.

- Dois conjuntos, A e B, dizem-se **iguais** e denota-se por $A = B$ se tiverem exatamente os mesmos elementos;
- Um conjunto A é um **subconjunto** de B e denota-se por $A \subseteq B$, se cada elemento de A é também um elemento de B;
- Dois conjuntos, A e B, dizem-se **disjuntos** se não possuem qualquer elemento em comum.

Exemplo

- *Se* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{4, 3, 2, 1\}$ *então* $A = B$.
- *Se* $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ *então* $A \subset B$.
- *Se* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{5, 6, 7\}$ *então* A *e* B *são disjuntos.*

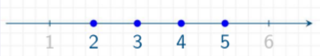
O conjunto que não tem elementos denomina-se por **conjunto vazio** e representa-se por $\{\}$ ou $\varnothing$.

Representação algébrica de um conjunto

Exemplo 1:

Conjunto dos números naturais superiores a 1 e menores ou iguais a 5.

- Representação em **extensão**
  $A = \{2, 3, 4, 5\}$
- Representação em **compreensão**
  $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x \leq 5\}$
- Representação **gráfica**



Exemplo 2:

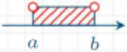
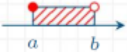
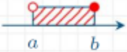
Conjunto dos números reais superiores a 1 e menores ou iguais a 5.

- Representação em **extensão**
  Este conjunto tem uma infinidade de elementos, por isso não é possível representá-lo em extensão.
- Representação em **compreensão**
  $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 5\}$
- Representação **gráfica**
  

- Representação sob a forma de **intervalo**
  $]1, 5]$

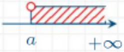
Intervalos de números reais

Intervalos limitados

Compreensão	gráfico	Intervalo	
$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$		$]a, b[$	aberto
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$		$[a, b]$	fechado
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$		$[a, b[$	fechado à esquerda e aberto à direita
$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$		$]a, b]$	aberto à esquerda e fechado à direita

Intervalos de números reais

Intervalos ilimitados

Compreensão	gráfico	Intervalo	
$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$		$]-\infty, b[$	aberto
$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$		$]-\infty, b]$	aberto à esquerda e fechado à direita
$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$		$]a, +\infty[$	aberto
$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$		$[a, +\infty[$	fechado à esquerda e aberto à direita

Operações com conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos do universo U.

Reunião

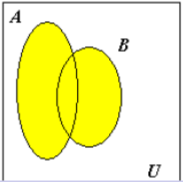
A **união** ou **reunião** de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contém todos os elementos dos dois conjuntos,

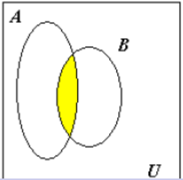
$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

Interseção

A **interseção** de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém os elementos comuns aos dois conjuntos.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$





Exercício

Considere os seguintes conjuntos: $A =]2, 7]$, $B = [3, 9[$, $C =]-\infty, 3[$ e $D = [7, +\infty[$.
Determine: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $A \cup D$ e $A \cap D$.

Operações com conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos do universo U.

Complementar

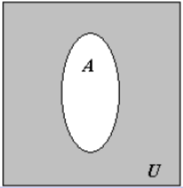
Todos os elementos do universo U que não pertencem ao conjunto A formam o **complementar** de A, denotado por A^c, $\overline{A}$ ou A',

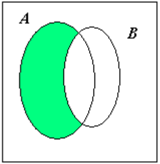
$$A^c = \{x \in U \wedge x \notin A\}$$

Diferença

O conjunto da **diferença** de A e B, denotada por $A - B$ ou $A \backslash B$, é o conjunto formado por todos os elementos de A exceto os que pertencem a B.

$$A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$





Exercício

Considere os seguintes conjuntos: $A =]2, +\infty[$ e $B =]1, 6]$.
Determine: $\overline{A}$, $A \backslash B$, $\overline{B}$ e $B \backslash A$.

Operações com conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos do universo U.

Produto cartesiano

Chama-se **produto cartesiano** $A \times B$ ao conjunto formado por todos os pares ordenados em que a 1.ª coordenada pertence a A e a 2.ª coordenada pertence a B,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemplo

Para $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5\}$ *vem*

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

Observações

- Geralmente $A \times B$ é diferente de $B \times A$
- O produto cartesiano $A \times A$ representa-se por A^2

Exercícios

1. Considere $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{0, -1\}$. Determine : $A \times B, \quad B \times A$ e B^3.

2. Considere $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B\{= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determine:

   (a) $A - B; \quad C - B$

   (b) $A \cap B \cap C; \quad A \cup B \cup C$

   (c) $(A \cup B) \cap C; \quad (A \cap B) \cup C$

3. Sejam $A = [-1, 4]$ e $B =]-\infty, 0]$. Determine $A \cup B; \quad A \cap B, \quad A - B, \quad A^c$.

4. Considere $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \vee x > 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \wedge x > 10\}$. Escreva A e B u

   intervalos.

5. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x < 6\right\}$ e $B =]-\infty, 0[$.

   Indique: $A \cap B, \quad A \cup B, \quad \bar{A} \quad$ e $\quad A - B$.

6. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e $B = [\sqrt{2}, +\infty[$.

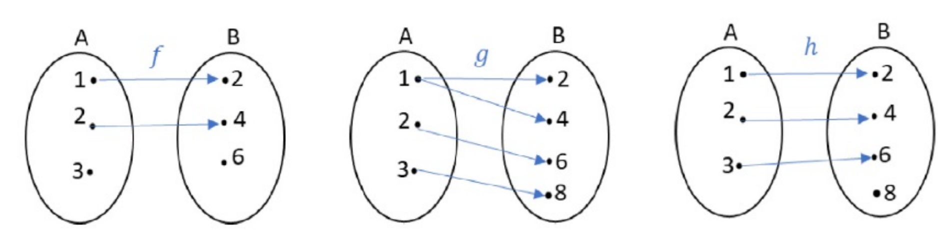
   Determine: $A \cup B, \quad A \cap B, \quad \bar{A} = \quad$ e $\quad A - \bar{B}$.

Funções reais de variável real

Definições

- Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se **relação binária** de A para B, a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Seja $R \subseteq A \times B$ e x e y elementos de A e B, diz-se que x **está na relação** R **com** y e escreve-se xRy, se $(x, y) \in R$.
- **Domínio** de R:
  $D_R = \{x \in A : (x, y) \in R \text{ para algum } y \in B\}$.
- **Contradomínio** de R:
  $D'_R = \{y \in B : (x, y) \in R \text{ para algum } x \in A\}$.
- Uma **função** definida no conjunto A e com valores no conjunto B, é qualquer relação binária f de A para B que verifica as condições:
  - (i) o domínio de f é o conjunto A;
  - (ii) quaisquer que sejam x, y e z pertencentes a A, se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.
- Aos elementos de A designamos **objetos** e a $f(x)$ **imagem** de x por f.
  O conjunto A, **domínio** de f denota-se D_f e o conjunto das imagens, designado por **contradomínio** de f denota-se por D'_f.

Exemplo



Alguma das correspondências f, g e h entre os conjuntos A e B é uma função?

Definições

Seja $f : A \to B$ uma função de A em B.

(i) Se $CD_f = B$, a aplicação é **sobrejetiva**;

(ii) Se a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, a aplicação é **injetiva**:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(ii) Quando a função é sobrejetiva e injetiva, diz-se **bijetiva**.

Uma **função real de variável real** é uma função cujo domínio, A, é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada, B, é $\mathbb{R}$.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Gráfico

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y = f(x)\}$$

Zero

$x_1 \in D_f$ é um **zero** de f se e só se $f(x_1) = 0$.

Paridade

Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem. f diz-se uma função

- **par** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.
- **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy, e o de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Função limitada

f é **limitada** se existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in D_f$.

Monotonia e extremos

Sejam f uma função de domínio D e $x_1, x_2, c, d \in I =]a, b[$, com $I \subset D$.

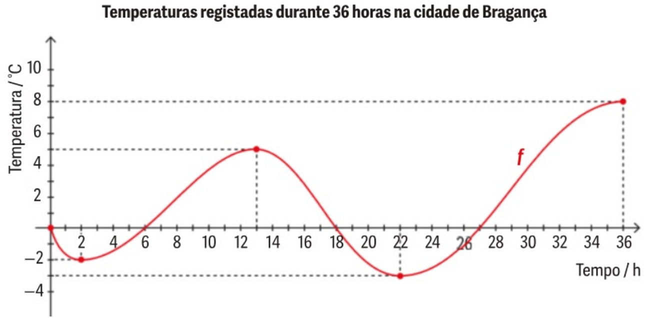
Monotonia

- f é **estritamente crescente** (crescente) em I se $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$ quando $x_1 < x_2$;
- f é **estritamente decrescente** (decrescente) em I se $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ quando $x_1 < x_2$;
- f é **constante** em I se $f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$.

Extremos

- f tem um **máximo local** para $x = c$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo o $x \in]c - \epsilon, c + \epsilon[$. Neste caso c diz-se **maximizante** e $f(c)$ diz-se **máximo local**.
- f tem um **mínimo local** para $x = d$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(d)$ para todo o $x \in]d - \epsilon, d + \epsilon[$. Neste caso c diz-se **minimizante** e $f(d)$ diz-se **mínimo local**.
- Se $f(x) \geq m, \forall x \in D$, então m é um **mínimo absoluto**.
- Se $f(x) \leq M, \forall x \in D$, então M é um **máximo absoluto**.

Exemplo



- Domínio: $D_f = [0, 36]$ Contradomínio: $D'_f = [-3, 8]$ Zeros: $0, 6, 18$ e 27
- Injetividade: f não é injetiva;
- Monotonia:
  f é crescente em $[2, 13]$ e em $[22, 36]$; f é decrescente em $[0, 2]$ e em $[13, 22]$;
- Extremos locais:
  máximos locais:0, 5 e 8 ; maximizantes: 0; 13 e 36;
  mínimos locais: -2, -3 ; minimizantes: 2 e 22;
- Extremos absolutos: máximo absoluto: 8; mínimo absoluto: -3.

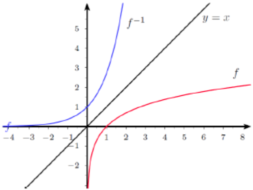
Função inversa

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. À função f^{-1} que tem domínio $f(D)$, contradomínio D e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, y \in f(D)$$

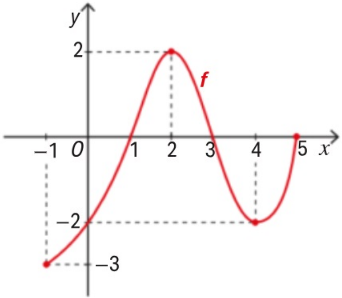
chama-se **função inversa** de f.

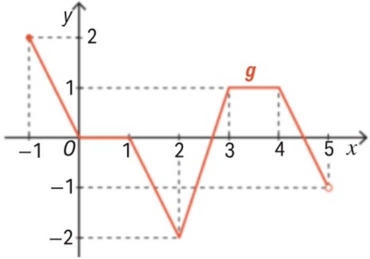
O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à reta $y = x$.



CENTRO 2030
Os Fundos Europeus mais próximos de si.
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

1. Considere as funções f e g representadas graficamente na figura seguinte.





Indique:

1. o domínio e contradomínio de cada uma das funções;
2. os zeros de f;
3. os intervalos de monotonia de f;
4. os extremos locais de f;
5. os extremos absolutos de g;
6. os intervalos onde a função g é constante;
7. o valor de $f(0)$ e de $g(3)$;
8. o número de soluções da equação $g(x) = 5$;
9. os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

Sucessões

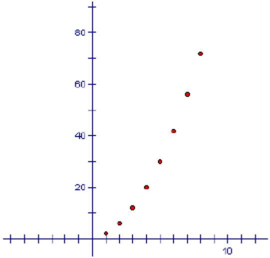
Chama-se **sucessão** de números reais a toda a função u de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.
As imagens designam-se por **termos da sucessão**, os objetos por **ordens dos termos** e à expressão u_n dá-se a designação de **termo geral da sucessão**.

Exemplo

$1, 3, 5, 7, \ldots \qquad u_1 = 1; u_2 = 3, u_3 = 5 \qquad$ *termo geral:* $u_n = 2n - 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3} \qquad$ *termo geral:* $u_n = \frac{1}{n}$

A representação gráfica de uma sucessão é constituída por pontos isolados.



Exercícios

1. Descubra a regra, escreva o respetivo termo geral e verifique se 37 é termo da sucessão.
   a) $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$;
   b) $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$.
2. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 2^{n-2}$.
   a) Escreva os quatro primeiros termos da sucessão;
   b) Verifique se 32 é termo da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Sucessão definida por recorrência

Dada uma sucessão de números $u_1, u_2, \ldots$ chama-se **relação de recorrência** a uma equação que relaciona u_n com os termos que o antecedem e que é válida para todo o n maior que um dado natural fixado n_0.

Exemplo

$$u_n = \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = 5 \\ u_3 = 8 \\ \vdots \\ u_n = 4u_{n-2} + 2u_{n-1}, \; n \geq 2 \end{cases}$$

Exercício

Determine os quatro primeiros termos das sucessões definidas por recorrência:

1. $u_{n+1} = u_n + 5, \; u_1 = 2;$
2. $u_{n+1} = (n+3)u_n; \; u_1 = 2;$
3. $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \; u_1 = 1, \; u_2 = 4.$

Exercícios

1. Calcule os 6 primeiros termos das seguintes sucessões:

   $a_n = 2n - 1$; $b_n = \dfrac{n^2+1}{n}$; $c_n = (-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{n}$.

2. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

   (a) Determine o termo de ordem 20;

   (b) Determine o termo de ordem $n+1$;

3. Determine os primeiros 5 termos das sucessões definidas por recorrência:

   (a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_1 = 2$;

   (b) $a_n = na_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

4. Determine uma relação de recorrência para as seguintes sucessões:

   (a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots;$

   (b) $5, 11, 17, 23, 29, \cdots;$

   (c) $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \cdots$.

Cofinanciado pela União Europeia