Lógica e Álgebra de Boole

Ano letivo 2025/2026

universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Lógica e Álgebra de Boole

Tópicos deste capítulo:

- Operações Lógicas Básicas
- Proposições e Tabelas-Verdade
- Definição e Propriedades de uma Álgebra Booleana

No final do capítulo o estudante:

- Usar as operações lógicas: conjunção, disjunção e negação
- Utilizar as propriedades da Álgebra de Boole

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Lógica e Álgebra de Boole

- A Lógica, fundada por Aristóteles no século IV a.C.,tem como objetivo o estudo dos princípios e técnicas do raciocínio. Procura definir linguagens formais que representem, de forma precisa e sem ambiguidades, a linguagem natural, estabelecendo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.
- No séc. XIX, George Boole introduz um formalismo que permite o tratamento sistemático da lógica designado por Álgebra de Boole.

A Lógica Matemática é a base das linguagens de programação.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Definição de Proposição e Composição de Proposições

- Define-se uma **proposição** como sendo uma frase declarativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.
  ex.: "Lisboa é a capital de Portugal."(V); "Paris é a capital de Portugal."(F)
- Uma proposição é dita **primitiva** se não pode ser subdividida em duas proposições mais simples, isto é, não é composta.
  ex.: "Lisboa é a capital de Portugal e π é um número irracional."; "A Maria é inteligente ou estuda toda a noite."são exemplos de proposições compostas.
- Representaremos as proposições simples por p, q, r, $\cdots$. A estes símbolos chamamos **variáveis proposicionais**.
- O valor lógico de uma proposição composta fica completamente determinado pelo valor lógico das proposições simples que a compõem juntamente com o modo pelo qual as mesmas estão conectadas.

Tautologia e contradição

Em lógica clássica, são considerados dois valores lógicos: **verdadeiro** (**V** ou **1**) e **falso** (**F** ou **0**).

- Chama-se **tautologia** a uma proposição composta que é sempre verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos atribuídos às proposições primitivas que a compõem.
- Chama-se **contradição** a uma proposição composta que é sempre falsa quaisquer que sejam os valores lógicos atribuídos às proposições primitivas que a compõem.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Conetivos Proposicionais e Tabelas de Verdade

Negação

Seja p uma proposição. A **negação** de p representa-se por $\neg p$ (ou $\overline{p}$) e lê-se "não p", "é falso "p"ou "não é verdade p".
O valor lógico da negação de p contrário ao de p.

Tabela de verdade para $\neg p$:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Exemplo

- p: "A programação cria instruções."
- $\neg p$: "A programação não cria instruções."

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Conetivos Proposicionais e Tabelas de Verdade

Conjunção

A **conjunção** de duas proposições, p, q, representa-se por $p \wedge q$ e lê-se "p e q". O valor lógico da conjunção $p \wedge q$ é verdadeiro somente se p e q forem ambas proposições verdadeiras e falso, caso contrário.

Tabela de verdade para $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemplo

- p: "A programação cria instruções."
- q: "Os algoritmos organizam dados."
- $p \wedge q$: "A programação cria instruções e os algoritmos organizam dados."

Conetivos Proposicionais e Tabelas de Verdade

Disjunção

A **disjunção** de duas proposições, p, p, representa-se por $p \vee q$ e lê-se "p ou q". O valor lógico da disjunção de $p \vee q$ é falso somente se p e q forem ambas proposições falsas, e verdadeiro, caso contrário.

Tabela de verdade para $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplo

- p: "O aluno estuda MQI."
- q: "O aluno vai à praia."
- $p \vee q$: "O aluno estuda MQI ou vai à praia."

Operações Lógicas Básicas

Conjunção: $p \wedge q$, lê-se p "e" q
Disjunção: $p \vee q$, lê-se p "ou" q
Disjunção exclusiva: $p \dot{\vee} q$, lê-se "ou" p "ou" q
Negação $\neg p$, lê-se "não" p.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$\sim p$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	
F	F	F	F	F	

Outras notações:

$p\&q,\ p \cdot q\ ou\ pq \quad para \quad p \wedge q$

$p + q \quad para \quad p \vee q$

$p',\ \neg p\ ou\ \overline{p} \quad para \quad \sim p$

Tabelas-Verdade

Tabela-verdade para $\neg p \vee q$:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Tabela-verdade para $\neg(p \wedge \neg q)$:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Proposições equivalentes

As proposições $\neg p \vee q$ e $\neg(p \wedge \neg q)$ são **equivalentes**, uma vez que assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

Tabelas-Verdade

Tabela de verdade para $\neg(p \vee q)$ e para $\neg p \wedge \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Conclusão: $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são proposições equivalentes.

Exercício

Construa a tabela de verdade para $\neg(p \wedge q)$ e para $\neg p \vee \neg q$ e verifique que são proposições equivalentes.

Leis de De Morgan

- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Exercícios

1. Seja p a proposição "Faz frio" e q a proposição "Chove". Escreva a proposição verbal que descreve cada uma das proposições a seguir:

    1. $\neg p$
    2. $p \wedge q$
    3. $\neg(p \wedge q)$
    4. $p \vee q$
    5. $\neg(p \vee q)$
    6. $q \vee \neg p$

2. Represente algebricamente cada uma das seguintes afirmações (designe por c, m e f as variáveis que representam "chuva", "tempo mau" e "está frio", respetivamente).

    1. Chove e o tempo está mau;
    2. O tempo está bom e não chove;
    3. Chove ou faz frio;
    4. Nem chove nem faz frio.

3. Construa a tabela de verdade da expressão $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$.
4. Mostre que $\neg(p \wedge (q \vee p)) \vee \neg q$ e $\neg(p \wedge q)$ são proposições equivalentes.
5. Mostre que $\neg p \vee (p \vee q)$ é uma tautologia.

Álgebra Booleana

- No século XIX, George Boole introduziu um formalismo que permite o tratamento sistemático da lógica, designado por Álgebra de Boole.
- A Álgebra de Boole é um sistema matemático baseado em operações lógicas, como E (AND), OU (OR) e NÃO (NOT), que manipulam valores binários (0 e 1).
- O objetivo principal da Álgebra Booleana é simplificar e manipular expressões lógicas, sendo utilizada na Informática na construção de circuitos digitais, na programação e na otimização de sistemas computacionais.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Álgebra Booleana

Estrutura matemática constituída por um conjunto não vazio B no qual se define uma operação unária negação $\neg$ e duas operações binárias $+$, $\cdot$ que obdecem aos seguintes axiomas:

- *as operações binárias são comutativas, isto é, para* $a, b \in B$, $a + b = b + a$ *e* $a \cdot b = b \cdot a$*;*
- *as operações binárias são associativas, isto é, para* $a, b, c \in B$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ *e* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$*;*
- *as operações binárias são distributivas uma em relação à outra, ou seja, para* $a, b, c \in B$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *ou* $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
- *existem dois elementos* $0, 1 \in B$ *(o zero e a unidade) tais que* $0 \neq 1$ *e para todo o* $a \in B$ *são válidas as identidades:*

  . $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $\overline{\overline{a}} = a$*;*

  . $a + \overline{a} = 1$, $a + 0 = a$, $a + a = a$, $a + 1 = 1$*;*

  . $a.\overline{a} = 0$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot a = a$, $a \cdot 1 = a$.

Exemplo

Seja $B = \{0, 1\}$. O terno $(B, +, \cdot)$ com a negação constitui uma álgebra booleana, uma vez que

- $0 \cdot 0 = 0$; $1 + 1 = 1$; $1 \cdot 1 = 1$; $0 + 0 = 0$;
- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$;
- $\bar{1} = 0$.

Este exemplo é a álgebra de Boole que normalmente se aplica a circuitos com interruptores.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Álgebra Booleana - Princípio da dualidade

O dual de qualquer proposição numa álgebra booleana é a proposição que se obtém pela troca das operações $+$ e $\cdot$ e dos seus elementos 1 e 0.

Exemplo

O dual de $(1 + a) \cdot (b + 0) = b$ *é* $(0 \cdot a) + (b \cdot 1) = b$.

Princípio de Dualidade

O dual de qualquer teorema numa álgebra de Boole é também um teorema.

Exercício 2.1.

Escreva o dual de cada uma das expressões booleanas:

1. $(a \cdot 1) \cdot (0 + \overline{a}) = 0$
2. $a + \overline{a}b = a + b$
3. $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot a + \overline{a} \cdot b \cdot c$
4. $a + a \cdot b = a$

Propriedades das operações no sentido booleano

a	b	ab	a+b
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Funções booleanas

Chama-se função booleana de n variáveis booleanas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ a uma aplicação de $\{0,1\}^n$ em $\{0,1\}$.

Exemplo: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x_2}x_3$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Exercício 2.2.

Escreva a tabela de verdade correspondente a cada uma das seguintes funções booleanas:

1. $f(a, b, c) = a \cdot (\overline{b} + \overline{c}) \cdot (b + c)$
2. $f(a, b, c) = \overline{a \cdot c} + \overline{b \cdot c}$
3. $f(a, b, c) = a \cdot (\overline{b} + c)$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Leis da Álgebra Booleana

Resultados da álgebra booleana que permitem simplificar funções lógicas obtendo a sua forma mínima (forma com o número mínimo de termos e variáveis).

$a + a = a;\ a \cdot a = a$	*leis da idempotência*
$a + 0 = a$	*el. neutro da soma lógica*
$a \cdot 1 = a$	*el. neutro do produto lógico*
$a + 1 = 1$	*el. absorv. da soma lógica*
$a \cdot 0 = 0$	*el. absorv. do produto lógico*
$\bar{\bar{a}} = a$	*lei de involução*
$a + a \cdot b = a;\ a \cdot (a + b) = a$	*leis da absorção*
$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b};\ \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$	*leis de De Morgan*
$a + \bar{a} \cdot b = a + b;\ a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$	*leis da adjacência*
$a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$	*lei do termo "incluído"*
$(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$	*lei do termo "incluído"*

Cofinanciado pela União Europeia

Exemplo

$f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z$

$xyz + x\overline{y}z = (y + \overline{y})(xz) = 1 \cdot (xz) = xz$

$f(x,y,z) = xz$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Exercício 2.3.

Sejam a, b e c variáveis booleanas. Recorrendo aos axiomas e aos teoremas da Álgebra de Boole binária que conhece, mostre as seguintes igualdades:

1. $(a + \overline{b} + a \cdot b) \cdot (a + \overline{b}) \cdot (\overline{a} \cdot b) = 0$
2. $\overline{a} \cdot b + a \cdot (1 \cdot a + \overline{a \cdot b}) = a + b$
3. $(\overline{b \cdot 1} + 1 \cdot c \cdot a) \cdot b + 1 \cdot b = b$
4. $\overline{a}b + \overline{b}\overline{c} + ab + \overline{b}c = 1$
5. $a \cdot c + a \cdot b \cdot c = a \cdot c$
6. $\overline{[\overline{(\overline{b} + c)} \cdot a] + \overline{c \cdot d}} = c \cdot d$
7. $(a \cdot \overline{b} \cdot (c + b \cdot d) + \overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot c = \overline{b} \cdot c$

Aplicações

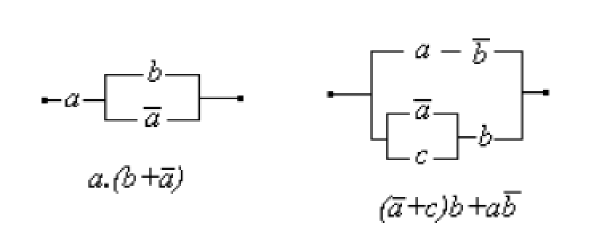
Circuitos com interruptores

Sejam $a, b, \ldots$ interruptores elétricos e suponha-se que a, $\overline{a}$ designam sempre dois interruptores com a propriedade de que se um está ligado o outro está desligado e vice-versa.

Dois interruptores , a e b, por exemplo, podem ser ligados por fios, em série ou em paralelo, o que se denota por $a \cdot b$ e $a + b$, respetivamente.

Exemplo

Um circuito booleano é um arranjo de fios e interruptores que pode ser montado com o uso repetido de combinações em série e em paralelo podendo, portanto, ser descrito pelo uso dos sinais $+$ e $\cdot$.



As variáveis a e b que representam os interruptores apenas podem tomar os valores 0 e 1 que significam "interruptor fechado" e "interruptor aberto", respetivamente.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

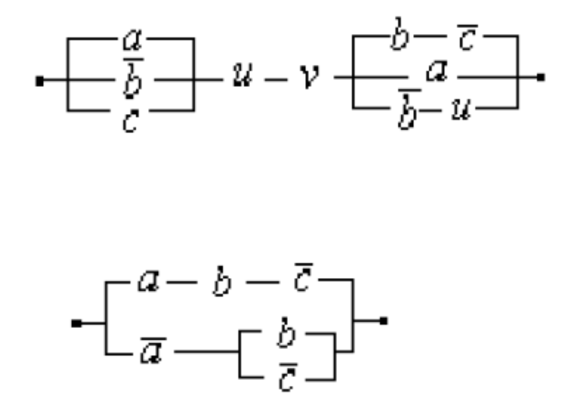
Para determinar o comportamento de um circuito booleano constrói-se uma tabela de verdade:

a	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$+b	a(b+$\overline{a}$)
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{a}$+c	(c+$\overline{a}$) b	$\overline{b}$	a$\overline{b}$	($\overline{a}$+c)b+a$\overline{b}$
1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0

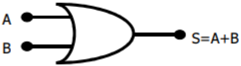
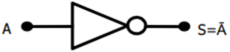
Exercício 2.4.

Escreva a expressão booleana correspondente a cada um dos seguintes circutos:



Circuitos lógicos

Circuitos lógicos são estruturas construídas a partir de certos circuitos elementares chamados portas lógicas. Cada circuito lógico pode ser visto como uma máquina L que contém um ou mais dispositivos de entrada e exatamente um dispositivo de saída. São geralmente usados em circuitos electrónicos, visto que os sinais deste tipo de circuitos podem apresentar: presença de sinal (1) ou ausência de sinal (0). O comportamento dos circuitos lógicos é conhecido pela tabela de verdade que apresenta os estados lógicos das entradas e das saídas.
Existem três tipos principais de portas lógicas:

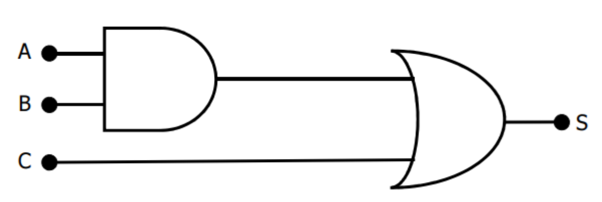
Nome	Símbolo Gráfico	Função Algébrica	Tabela Verdade
E (AND)		S=A.B S=AB	A B | S=A.B 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OU (OR)		S=A+B	A B | S=A+B 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
NÃO (NOT) Inversor		$S=\bar{A}$ S=A' $S=\neg A$	A | $S=\bar{A}$ 0 | 1 1 | 0

Cofinanciado pela União Europeia
Os Fundos Europeus mais próximos de si.

Todo o circuito lógico executa uma expressão booleana.

Exemplo

$S = (a \cdot b) + c$



Por vezes é desejável expressar a função booleana com o número mínimo de termos e varáveis, obtendo-se a chamada forma mínima. Isto é particularmente importante no desenho de circuitos: quanto menor for o número de termos e de variáveis, mais simples e mais económico será o circuito. A simplificação de um circuito pode ser feita, muitas vezes, apelando à intuição e à experiência. Contudo, em situações mais complexas pode ser útil usar métodos mais sistemáticos, nomeadamente a aplicação das propriedades das álgebras de Boole já mencionadas.

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Exercício 2.5.

Escreva a expressão booleana executada por cada um dos circuitos: