universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

Texto de Apoio de Métodos Quantitativos para Informática

Dina Seabra

Ano letivo 2022/2023

Cofinanciado por:
CENTRO 2020 PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Este texto de apoio constitui um elemento de estudo adaptado ao programa da unidade curricular Métodos Quantitativos para Informática dos cursos Técnicos Superiores Profissionais da área da Informática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda.

Não se pretende, de forma alguma, substituir as aulas propriamente ditas. O objetivo é indicar os principais conceitos e resultados sem ter a preocupação de demonstrações. O estudo mais completo e aprofundado dos assuntos aqui tratados deve ser feito através da consulta das referências indicadas na bibliografia.

Conteúdo

1 Bases: representações numéricas e operações aritméticas **1**

1.1 Representação de números inteiros 1

1.1.1 Inteiros positivos 1

1.1.2 Inteiros negativos 4

1.2 Representação de números reais 5

1.2.1 Mudança da base 10 para a base b 5

1.2.2 Mudança da base b para a base 10 8

1.3 Operações aritméticas 8

1.3.1 Adição e subtração 8

1.3.2 Multiplicação e divisão 10

1.4 Problemas 11

2 Lógica e Álgebra de Boole **15**

2.1 Definição de Proposição e Composição de Proposições 16

2.2 Operações Lógicas Básicas 17

2.2.1 Conjunção 17

2.2.2 Disjunção 18

2.2.3 Negação 19

2.3 Proposições e Tabelas-Verdade 20

2.4 Definição e Propriedades de uma Álgebra Booleana 22

2.4.1 Operações Booleanas 22

2.4.2 Funções booleanas 24

2.5 Problemas 25

3 Estruturas básicas: conjuntos, funções reais de variável real, sucessões e matrizes **27**

3.1 Conjuntos 27

3.1.1 Operações com conjuntos 29
3.1.2 Problemas 32
3.2 Funções reais de variável real 33
3.2.1 Definições e operações com funções 33
3.2.2 Monotonia de uma função 37
3.3 Sucessões 39
3.3.1 Generalidades e conceitos 39
3.3.2 Problemas 44
3.4 Matrizes 45
3.4.1 Generalidades 45
3.4.2 Alguns tipos de matrizes 46
3.4.3 Operações com Matrizes 48
3.4.4 Problemas 51

4 Organização e descrição de dados **55**
4.1 Organização e Interpretação de Dados Estatísticos 55
4.1.1 Alguns Conceitos de Estatística Descritiva 55
4.1.2 Tabelas de Frequências 56
4.1.3 Representar e Interpretar Dados 60
4.1.4 Problemas 61
4.2 Medidas de Localização e de Dispersão 63
4.2.1 Medidas de Localização 64
4.2.2 Medidas de Dispersão 67
4.2.3 Algumas Funções no Excel 70
4.2.4 Problemas 71

5 Erros: Valores aproximados e Tipos de Erros **73**
5.1 Erros: Origem e Manipulação 73
5.1.1 Tipo de Erros 73
5.1.2 Valores aproximados e erros 75
5.2 Problemas 77

Capítulo 1

Bases: representações numéricas e operações aritméticas

As máquinas digitais convertem todos os dados para sistema binário (0 ou 1, presença ou ausência de energia), realizam as operações e transformam-nos em decimais para que seja possível compreendê-los. Todos os cálculos são realizados utilizando algumas propriedades.

1.1 Representação de números inteiros

1.1.1 Inteiros positivos

Começa-se por tratar os números inteiros positivos. A representação de um número inteiro na base decimal (base 10) consiste num conjunto de algarismos, em que cada um possui um valor que depende da respetiva posição na representação.

Por exemplo,

$$123 = 1 \times \mathbf{100} + 2 \times \mathbf{10} + 3 \times \mathbf{1}$$

É o mesmo que dizer que um número na base dez é representado pela soma de várias potências de 10 com coeficientes inteiros que variam de 0 a 9, inclusive,

$$123_{(10)} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Exemplo 1.1.1. O número 523 significa 5 centenas, mais 2 dezenas e mais 3 unidades. De uma forma mais sucinta, $523 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

Utilizando o símbolo d_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ para representar o dígito decimal colocado na posição

$i+1$ a contar da direita, um inteiro positivo k com n dígitos possui a seguinte representação decimal

$$k = (d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_{10} = d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0,$$

com $d_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ e $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

Por exemplo, para $k = 523$ tem-se $d_2 = 5$, $d_1 = 3$ e $d_0 = 3$.

A generalização desta ideia a uma base b diferente de 10, com $b \geq 2$ e b inteiro, não oferece dificuldade. Assim, um número inteiro positivo k cuja representação na base b seja $k = (d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_b$ com $0 \leq d_i < b$ e $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ terá a representação decimal obtida através da expressão

$$k = (d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_b = d_n \times b^n + d_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0,$$

em que as operações adição e multiplicação são efetuadas na base 10.

Por exemplo, se a base for 5 os dígitos da base 5 serão 0, 1, 2, 3 e 4.

Nota 1.1.1. *Para alguns casos particulares de bases, a representação tem nomes específicos, por exemplo:*

- *se $b = 2$ chama-se representação binária,*
- *se $b = 8$ chama-se representação octal;*
- *se $b = 12$ chama-se representação duodecimal;*
- *se $b = 16$ chama-se representação hexadecimal.*

Nota 1.1.2. *A representação de um número natural numa base b é única.*

Exemplo 1.1.2. Mudança da base 8 para a base 10

Considere-se $k = (563)_8$.

Como $k = 5 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 5 \times 64 + 6 \times 8 + 3 = 371$ Tem-se $(563)_8 = (371)_{10}$.

Seja k um número cuja repesentação decimal é dada. Pretende-se obter a sua representação numa base b. Nestas condições é necessário determinar os dígitos $d_n, d_{n-1}, \cdots, d_1, d_0$ tais que $k = (d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_b = d_n \times b^n + d_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0$. Pretende-se determinar d_i com $0 \leq d_i < b$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

- Ao dividir k por b obtém-se o quociente q_0 e o resto d_0: $k = b\, q_0 + d_0$
- Para determinar os restantes dígitos divide-se o quociente, q_0, obtido na disvisão anterior, por b, assim obtém-se o quociente q_1 e o resto obtido é d_1 : $q_0 = b\, q_1 + d_1$

- d_2 será o resto da divisão de q_1 por b;
- procede-se de modo análogo e o processo termina quando o quociente é zero e d_n será o resto da última divisão.

Exemplo 1.1.3. Mudança da base 10 para a base 2.

Pretende-se a representação de 13 na base 2.

- Dividindo 13 por 2 obtém-se resto 1 e quociente 6 - assim $d_0 = 1$;
- ao dividir 6 por 2 obtém-se quociente 3 e resto zero - $d_1 = 0$;
- ao dividir 3 por 2 resulta quociente 1 e resto 1 - $d_2 = 1$;
- na divisão seguinte o quociente é 0 e o resto 1 - $d_3 = 1$

Assim $\mathbf{(13)}_{10} = \color{red}{\mathbf{(1101)}}_2$

Esquematicamente vem

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{13} & 2 & & & \\
\color{red}{\mathbf{1}} & 6 & 2 & & \\
 & \color{red}{\mathbf{0}} & 3 & 2 & \\
 & & \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 \\
 & & & \color{red}{\mathbf{1}} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Exemplo 1.1.4. Mudança da base 10 para a base 7. Pretende-se a representação de 90 na base 7.

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{90} & 7 & & \\
\color{red}{\mathbf{6}} & 12 & 7 & \\
 & \color{red}{\mathbf{5}} & 1 & 7 \\
 & & \color{red}{\mathbf{1}} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Assim $\mathbf{(90)}_{10} = \color{red}{\mathbf{(156)}}_7$

Tal como foi referido anteriormente os dígitos d_i que aparecem na expressão $(d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_b$ são dígitos na base b, ou seja , $0 \leq d_i < b$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Quando se usam bases b superiores a 10 deve-se recorrer a símbolos para representar 10, 11, 12, $\cdots$. Há duas técnicas:

- uso das primeiras letras do alfabeto: A, B, C, $\cdots$;
- uso dos símbolos $\underline{10}$, $\underline{11}$, $\underline{12}$, $\cdots$.

Exemplo 1.1.5.

- Na base 12: d_i podem ser: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9, A e B
- Na base 16: d_i podem ser: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9, A, B, C, D, E e F.

Exemplo 1.1.6. Pretende-se determinar $(177130)_{10}$ na base hexadecimal.

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
\mathbf{177130} & 16 & & & & \\ \cline{2-2}
\mathbf{10} & 11070 & 16 & & & \\ \cline{3-3}
\mathbf{(A)} & \mathbf{14} & 691 & 16 & & \\ \cline{4-4}
 & \mathbf{(E)} & \mathbf{3} & 43 & 16 & \\ \cline{5-5}
 & & & \mathbf{11} & 2 & 16 \\ \cline{6-6}
 & & & \mathbf{(B)} & \mathbf{2} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Assim $(177130)_{10} = (2B3EA)_{16}$.

Na tabela seguinte apresentam-se as representações hexadecimal, octal e binária dos números inteiros de 0 a 15.

decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
octal	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
binária	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Tabela 1.1: Representação hexadecimal, Octal e binária dos inteiros de 0 a 15.

Exercícios 1.1.1.

1. Obtenha a representação do número $(184)_{10}$ nas seguintes bases: 2, 8 e 16.
2. Determine a representação decimal dos seguintes números : $(101101)_2$; $(221)_3$; $(427)_8$; $(1A0F)_{16}$.

1.1.2 Inteiros negativos

A representação do sinal $+$ e do sinal $-$ em computador pode fazer-se reservando um bit para o efeito, geralmente o bit 0 para o sinal $+$ e o bit 1 para o sinal $-$. Esta representação poderá trazer alguns problemas. Neste texto matém-se o sinal $-$ para representar os números negativos.

A representação de números inteiro negativos faz-se tendo em atenção a representação adequada para o seu módulo e usando o sinal $-$

Exemplo 1.1.7. Pretende-se a representação de -85 na base 2.

Como $85 = (1010101)_2$ vem $-85 = -(1010101)_2$

1.2 Representação de números reais

Na base decimal a notação de 45,76 é interpretada da seguinte forma

$$45,76 = 45 + 0,76$$

em que

$$45 = 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0; \qquad 0,76 = 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}.$$

Tendo por base esta representação é possível ter uma ideia da representação de um número real x na base 10:

$$x = (d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-m})_{10}$$

ou seja

$$x = d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_0 \times 10^0 + d_{-1} \times 10^{-1} + d_{-2} \times 10^{-2} + \cdots + d_{-m} \times 10^{-m}.$$

Analogamente, um número x na base b será representado da forma

$$x = (d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-m})_b$$

ou seja

$$x = d_n \times b^n + d_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + d_0 \times b^0 + d_{-1} \times b^{-1} + d_{-2} \times b^{-2} + \cdots + d_{-m} \times b^{-m}.$$

$(d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_b$ representa a parte inteira e $(d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-m})_b$ reprenta a parte decimal da representação do número na base b.

1.2.1 Mudança da base 10 para a base b

A conversão de um número decimal na base 10 para outra base é obtida através de produtos sucessivos como se ilustra no exemplo seguinte.

$$(0,828125)_{10} = ???_2$$

Neste exemplo, os produtos sucessivos são por 2:

$$\begin{aligned}
0,828125 \times 2 &= \mathbf{1},\underbrace{65625} \\
0,65625 \times 2 &= \mathbf{1},\underbrace{3125} \\
0,3125 \times 2 &= \mathbf{0},\underbrace{625} \\
0,625 \times 2 &= \mathbf{1},\underbrace{25} \\
0,25 \times 2 &= \mathbf{0},\underbrace{5} \\
0,5 \times 2 &= \mathbf{1},0
\end{aligned}$$

$$(0,828125)_{10} = 0,\mathbf{(110101)}_2$$

Para representar um número real da base 10 para a base b faz-se a representação da parte inteira como se indicou na seção anterior. Assim, basta tratar a representação da parte decimal.

Considere-se por exemplo

$$x = (0, d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-m})_b = d_{-1} \times b^{-1} + d_{-2} \times b^{-2} + \cdots + d_{-m} \times b^{-m}.$$

Ao multiplicar x por b obtém-se d_{-1} como sendo a parte inteira do resultado. Fazendo sucessivas multiplicações, das partes décimais obtidas, por b obtém-se d_{-2} para parte inteira, d_{-3} e assim sucessivamente.

Exemplo 1.2.1. Pretende-se converter o número $(380, 34375)_{10}$ na base binária. Como o número tem parte inteira e parte decimal, a conversão é realizada em duas etapas separadas.

Conversão da parte inteira

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{380} & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & & & & & \\ \cline{2-2}
\mathbf{0} & 190 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & & & & \\ \cline{3-3}
 & \mathbf{0} & 95 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & & & \\ \cline{4-4}
 & & \mathbf{1} & 47 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & & \\ \cline{5-5}
 & & & \mathbf{1} & 23 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & \\ \cline{6-6}
 & & & & \mathbf{1} & 11 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & \\ \cline{7-7}
 & & & & & \mathbf{1} & 5 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & \\ \cline{8-8}
 & & & & & & \mathbf{1} & 1 & \multicolumn{1}{|c}{2} & \\ \cline{9-9}
 & & & & & & & \mathbf{0} & 1 & \multicolumn{1}{|c}{2} \\ \cline{10-10}
 & & & & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{0}
\end{array}$$

$$(380)_{10} = \mathbf{(101111100)}_2$$

Conversão da parte decimal

$0{,}34375 \times 2 = \mathbf{0},\underbrace{6875}$

$0{,}6875 \times 2 = \mathbf{1},\underbrace{375}$

$0{,}375 \times 2 = \mathbf{0},\underbrace{75}$

$0{,}75 \times 2 = \mathbf{1},\underbrace{5}$

$0{,}5 \times 2 = \mathbf{1},\underbrace{0}$

$(,34375)_{10} = ,\mathbf{(01011)}_2$

Então $(380,34375)_{10} = (101111100,01011)_2$.

Exemplo 1.2.2. Pretende-se representar $0,625$ na base 2.

Considerando:

- $0,625 \times 2 = 1,250$, conclui-se que $d_{-1} = 1$;
- $0,250 \times 2 = 0,50$, conclui-se que $d_{-2} = 0$
- $0,50 \times 2 = 1,00$, $d_{-3} = 1$

Assim $0,625 = (0,101)_2$

Por vezes a representação de um número numa nova base pode não ser finita.

Exemplo 1.2.3. Pretende-se escrever $0,523$ na base 2.

Considerando:

$0,523 \times 2 = 1,046$, conclui-se que $d_{-1} = 1$;

$0,046 \times 2 = 0,092$, vem $d_{-2} = 0$

$0,092 \times 2 = 0,184$, $d_{-3} = 0$

$0,184 \times 2 = 0,368$ $d_{-4} = 0$

$0,368 \times 2 = 0,736$; $d_{-5} = 0$;

$0,736 \times 2 = 1,472$, $d_{-6} = 1$

$0,472 \times 2 = 0,944$; $d_{-7} = 0$,

$0,944 \times 2 = 1,888$, $d_{-8} = 1$,

$0,888 \times 2 = 1,776$, $d_{-9} = 1$

$\vdots$

Este número tem representação na base 2 (representação binária) infinita.

$0,523 = (0,100001011\cdots)_2$

1.2.2 Mudança da base b para a base 10

Para obter $x = (0, d_{-1}d_{-2} \cdots d_{-m})_b$ na representação decimal, basta desenvolver esta representação, ou seja

$$x = (0, d_{-1}d_{-2} \cdots d_{-m})_b = d_{-1} \times b^{-1} + d_{-2} \times b^{-2} + \cdots + d_{-m} \times b^{-m}.$$

Exemplo 1.2.4. Considere $(0, 542)_4$. Escreva este número na base decimal.

Como $(0, 542)_4 = 5 \times 4^{-1} + 4 \times 4^{-2} + 2 \times 4^{-3} = 1, 53125$.

Apresenta-se um **esquema de conversões entre bases**

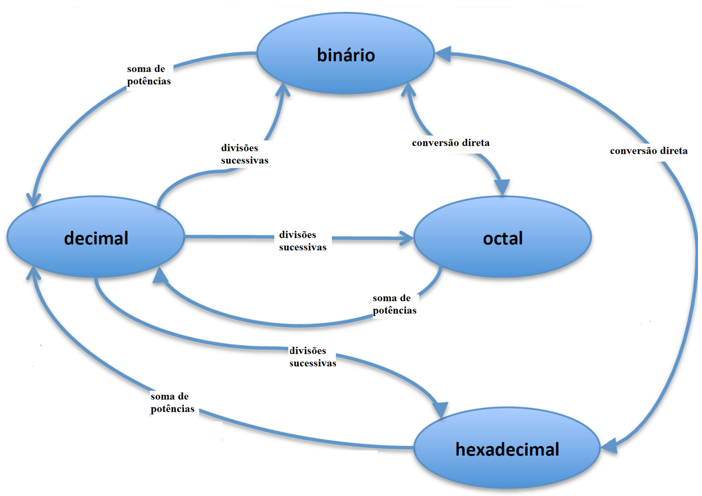


Figura 1.1: Conversões entre bases

Exercícios 1.2.1. Converta

1. $(234, 504)_8$ para o sistema decimal

2. $(1100110, 001)_2$ para os sistema decimal

3. $(298)_{10}$ para a base 3

4. $(3084, 01888)_{10}$ para a base 5

1.3 Operações aritméticas

1.3.1 Adição e subtração

A **adição** no sistema binário reduz-se à resolução de cinco simples operações

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\ \ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ \ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ \ 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1 \\ + & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\textit{0 e vai 1}} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1 \\ & 1 \\ + & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\textit{1 e vai 1}} \end{array}$$

Exemplos 1.3.1.

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ \ 011 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 00111 \\ \hline 11001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100110 \\ +\ \ 010110 \\ \hline 111100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101101 \\ +\ \ 1100101 \\ \hline 11010010 \end{array}$$

A **subtração** de B a A é equivalente a somar A ao simétrico de B.

Dado um número, o seu simétrico é obtido negando os seus bits todos e somando 1 ao resultado

Exemplo 1.3.1. Pretende-se escrever os simétricos dos seguintes números na base 2: $(66)_{10}$, $(78)_{10}$, $(33)_{10}$

$$(66)_{10} = (01000010)_2 \longrightarrow \begin{array}{lr} & 10111101 \\ + & 1 \\ \hline & (-66)_{10}{=}(10111110)_2 \end{array}$$

$$(78)_{10} = (01001110)_2 \longrightarrow \begin{array}{lr} & 10110001 \\ + & 1 \\ \hline & (-78)_{2}{=}(10110010)_2 \end{array}$$

$$(33)_{10} = (00100001)_2 \longrightarrow \begin{array}{lr} & 11011110 \\ + & 1 \\ \hline & (-33)_{10}{=}\ (11011111)_2 \end{array}$$

Exemplo 1.3.2. $(01001110)_2 - (00100001)_2$

Primeiro obtém-se o simétrico de $(00100001)_2$, isto é,

$$\begin{array}{lr} & 11011110 \\ + & 1 \\ \hline & 11011111 \end{array},$$

de seguida somam-se os números

$$\begin{array}{rr} & 01001110 \\ + & 11011111 \\ \hline \underline{1}| & 00101101 \end{array}$$

Então $(01001110)_2 - (00100001)_2 = (00101101)_2$.

Nota 1.3.1. *Verifique que a operação efetuada no exemplo anterior foi* $(78)_{10} - (33)_{10} = (45)_{10}$.

1.3.2 Multiplicação e divisão

A multiplicação e a divisão de dois números binários podem realizar-se pelos algoritmos clássicos das operações com números decimais.

Exemplos 1.3.2.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ \times & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccl} & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \text{multiplicando} \\ & & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & \text{multiplicador} \\ \hline & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \text{produto} \end{array}$$

Exemplos 1.3.3.

$$\begin{array}{cccc|cc} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \cline{5-6} - & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \cline{1-4} & 0 & 1 & 1 & & \\ & - & 1 & 0 & & \\ \cline{2-4} & & 0 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \\ \cline{7-10} - & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}$$

$$
\begin{array}{lcccccccc|ccccl}
\text{dividendo} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \text{divisor} \\
\cline{10-13}
 & - & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \text{quociente} \\
\cline{2-6}
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & - & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & - & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\
\cline{4-8}
\text{resto} & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}
$$

1.4 Problemas

1. Transforme em binário o número $(26)_{10}$.

2. Transforme o número $(37)_{10}$ em binário.

3. Determine a representação decimal dos seguintes números:

   (a)$(110001)_2$; (b)$(725)_8$; (c)$(2AB3F)_{16}$.

4. Obtenha a representação octal dos seguintes números:

   (a)$(101001)_2$; (b)$(1000111)_2$.

5. Apresente a representação hexadecimal dos seguintes números:

   (a) $(10010)_2$; (b)$(10101011)_2$.

6. Determine a representação binária dos seguintes números:

   (a)$(0,5)_{10}$; (b)$(2,31)_{10}$;

7. Converta os seguintes números em decimais:

   (a)$(0,110001)_2$; (b)$(0,1111111)_2$

8. Indique o valor lógico das seguintes igualdades

   (a) ☐ $(142)_8 = (99)_{10}$

   (b) ☐ $(15,C8)_{16} = (25,62)_8$

   (c) ☐ $(A)_{16} = (10)_{10}$

   (d) ☐ $(54,12)_{10} = (66,0753)_8$

(e) $\square$ $(712)_8 = (1CA)_{16}$

9. Verifique se $(100101, 011)_2$ é a representação binária do número $(37, 375)_{10}$.

10. Considere o número $x = (107, 9375)_{10}$. Então,

    (a) $x = (1101011, 1111)_2$

    (b) $x = (1110100, 0011)_2$

    (c) $x = (1110101, 0011)_2$

    (d) $x = (1110101, 1011)_2$

11. Efetue as seguintes adições de números binários :

    (a) $1001 + 11$

    (b) $111 + 101$

    (c) $1010 + 110$

    (d) $1100 + 110$

    (e) $101110 + 10101$

    (f) $100101 + 111$

    (g) $111011 + 10111$

12. Efetue as subtrações seguintes usando a igualdade $A - B = A + (-B)$.

    (a) $1100100 - 110010$

    (b) $1111010 - 1101$

    (c) $100011 - 1110$

    (d) $1101110 - 1010101$

    (e) $10101 - 111$

    (f) $111001 - 101010$

    (g) $1111100 - 101110$

13. Faça as seguintes operações.

    (a) 110×11

    (b) 10100×110

    (c) 11010×101

(d) 1110×111

(e) $101110 : 100$

(f) $1101 : 11$

(g) $11110 : 101$

(h) $10101 : 111$

Capítulo 2

Lógica e Álgebra de Boole

A Lógica (do grego clássico $\lambda o\gamma\iota\kappa\acute{\eta}$ logos, que significa palavra, pensamento, ideia, argumento, relato, razão lógica ou princípio lógico) é uma ciência de índole matemática e fortemente ligada à filosofia. Já que o pensamento é a manifestação do conhecimento, e que o conhecimento busca a verdade, é preciso estabelecer algumas regras para que essa meta possa ser atingida.

A aprendizagem da lógica não constitui um fim em si. Ela só tem sentido enquanto meio de garantir que o nosso pensamento proceda correctamente a fim de chegar a conhecimentos verdadeiros. Podemos, então, dizer que a lógica trata dos argumentos, isto é, das conclusões a que chegamos através da apresentação de evidências que as sustentam. O principal organizador da lógica clássica foi Aristóteles, com a sua obra chamada Organon.

Um sistema lógico é um conjunto de axiomas e regras de inferência que visam representar formalmente o raciocínio válido. Diferentes sistemas de lógica formal foram construídos ao longo do tempo quer no âmbito escrito da Lógica Teórica, quer em aplicações práticas na computação e em Inteligência Artificial.

De uma maneira geral, pode-se considerar que a lógica, tal como é usada na filosofia e na matemática, observa sempre os mesmos princípios básicos: a lei do terceiro excluído (uma afirmação da forma p ou não p é sempre verdadeira), a lei da não contradição (uma afirmação não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo), e a lei da identidade (o que é verdadeiro é sempre verdadeiro e o que é falso é sempre falso). A esse tipo de lógica pode-se chamar "lógica clássica", ou "lógica aristotélica". Além desta lógica, existem outros tipos de lógica que podem ser mais apropriados, dependendo das circunstâncias onde são utilizados, mas que não serão abordados aqui, uma vez que se encontram fora do âmbito desta unidade curricular.

Em matemática, uma lógica proposicional (ou cálculo sentencial) é um sistema formal no qual, as fórmulas representam proposições, que podem ser formadas pela combinação de proposições atómicas usando conectivos lógicos, e um sistema de regras de derivação que permite que certas fórmulas sejam estabelecidas como "teorema" do sistema formal. Estes aspectos serão abordados nas secções que se seguem.

2.1 Definição de Proposição e Composição de Proposições

As frases que se constroem, tanto em linguagem matemática como em linguagem corrente, envolvem certos entes ou termos, cada um dos quais é designado por um símbolo conveniente (a que, neste caso, se chama designação). Na frase "dois é um número natural par" aparecem os entes cujas designações são respectivamente "dois", "número natural" e "número natural par". Não se deve confundir o ente com a sua designação, até porque um mesmo ente pode ter várias designações diferentes; por exemplo "dois", "2" e "$\frac{4}{2}$" são três designações distintas para o mesmo ente.

Nas frases, ou proposições, intervêm vários entes.

Exemplo 2.1.1. Na proposição "4 é múltiplo de 2", aparecem os entes designados respectivamente por "4" e por "múltiplo de 2".

Claro que não se pode confundir as designações com as proposições; por exemplo: , $3 + p$, e Lisboa, são designações, enquanto "π é um número irracional", e "Lisboa é a capital de Portugal" são proposições.

Definição 2.1.1. *Define-se uma proposição (ou declaração) como sendo uma frase declarativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.*

Exemplo 2.1.2. A proposição "Lisboa é a capital de Portugal" é verdadeira, enquanto a proposição "Paris é a capital de Portugal" é falsa.

Diz-se, por isso, que a proposição "Lisboa é a capital de Portugal" tem o valor lógico V (verdade) e que a proposição "Paris é a capital de Portugal" tem o valor lógico F (falso).

Neste breve estudo da Lógica Matemática admitiremos que, em cada teoria, toda a proposição tem um e um único dos dois valores lógicos referidos V ou F. De facto, esta ideia não representa todas as teorias, visto existirem teorias com interesse matemático onde há proposições que não são verdadeiras nem falsas (são as chamadas proposições indecidíveis).

Muitas proposições são compostas, isto é, formadas de subproposições e vários conectivos, que abordaremos adiante.

Definição 2.1.2. *Uma proposição é dita primitiva, ou atómica, se não pode ser subdividida em duas proposições mais simples, isto é, se não é composta.*

Exemplos 2.1.1.

1. "Lisboa é a capital de Portugal e π é um número irracional";

2. "A Maria é inteligente ou estuda toda a noite".

São exemplos de proposições compostas.

Definição 2.1.3.

- *Chama-se* ***tautologia*** *a uma proposição composta que é sempre verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos atribuídos às proposições atómicas, que a compoêm.*

- *Chama-se* ***contradição*** *a uma proposição que é sempre falsa quaisquer que sejam os valores atribuídos às proposições atómicas, que a compoêm.*

A propriedade fundamental de uma proposição composta : O valor lógico de uma proposição composta fica completamente determinado pelo valor lógico das suas subproposições juntamente com o modo pelo qual essas subproposições estão conectadas para formar a proposição composta. A próxima secção estuda alguns desses conectivos.

2.2 Operações Lógicas Básicas

As operações lógicas básicas aqui consideradas são a **conjunção**, **disjunção** e a **negação**, que correspondem respectivamente às palavras "e", "ou" e "não".

2.2.1 Conjunção

A operação lógica designada **Conjunção** e simbolizada pelo símbolo $\wedge$ permite combinar quaisquer duas proposições pela palavra "e" para formar uma nova proposição (proposição composta). Simbolicamente o que acabou de ser dito é representado pela expressão lógica:

$$p \wedge q, \text{ sendo } p \text{ e } q \text{ as duas proposições.}$$

Como $p \wedge q$ é uma proposição, ela terá um valor lógico que depende dos valores lógicos de p e q. Se p e q são proposições verdadeiras, ou seja têm o valor lógico V, então $p \wedge q$ tem o mesmo valor lógico; caso contrário, a proposição $p \wedge q$ é falsa. Uma vez que uma proposição só pode ter os valores lógicos V ou F ou, como por vezes também se utiliza, 1 ou 0, os valores possíveis de uma expressão lógica podem ser obtidos através de uma tabela que, para o caso da conjunção se ilustra na tabela 2.1.

Exemplos 2.2.1.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2.1: Valores lógicos possíveis para $p \wedge q$.

1. 1 byte são 8 bits e 1+2=3;
2. Windows é um sistema operativo e 1+2=5;
3. Linux não é um sistema operativo e 1+2=3;
4. PASCAL é uma linguagem de programação e 2+2=5.

Nos exemplos apresentados, note que apenas a primeira proposição é verdadeira. Cada uma das outras proposições é falsa já que pelo menos uma das suas subproposições também o é.

2.2.2 Disjunção

A operação lógica designada **Disjunção** e simbolizada pelo símbolo $\vee$ permite combinar quaisquer duas proposições pela palavra "ou" para formar uma nova proposição (proposição composta). Simbolicamente o que acabou de ser dito é representado pela expressão lógica:

$$p \vee q, \text{ sendo } p \text{ e } q \text{ as duas proposições.}$$

O valor lógico de "p ou q" depende apenas dos valores lógicos de p e q. Se p e q são falsas então $p \vee q$ também o é. Caso contrário, $p \vee q$ é verdadeira. A Tabela 2.2 mostra os valores lógicos associados à disjunção.

Observação 2.2.1. *A palavra "ou" é normalmente utilizada de duas formas distintas. Às vezes é usada com o sentido "p ou q ou ambas", i.e., pelo menos uma das alternativas ocorre, como acima, e outras vezes tem o significado de "p ou q, mas não ambas", i.e., somente uma das alternativas ocorre. Por exemplo, a proposição "ele entrará para a Universidade do Porto ou para a Universidade de Aveiro", utiliza "ou" da segunda forma, conhecida como* ***disjunção exclusiva*** *e simbolizada por* $\dot{\vee}$.

A Tabela 2.3 apresenta os valores lógicos associados à disjunção exclusiva. A menos que se explicite o contrário, "ou" será utilizado com o primeiro sentido, i.e.,"p e/ou q".

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 2.2: Valores lógicos possíveis para $p \vee q$.

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 2.3: Valores lógicos possíveis para $p \dot{\vee} q$.

Exercícios 2.2.1. Seja p a proposição "O Jorge frequenta uma licenciatura na ESTGA" e q a proposição "A Maria frequenta um CteSP da ESTGA".

1. Escreva a proposição verbal que descreve a expressão $p \vee q$ e $p \dot{\vee} q$;

2. Sabendo que só uma das proposições acima é falsa diga qual o valor lógico de $p \vee q$ e $p \dot{\vee} q$.

2.2.3 Negação

Dada uma proposição qualquer p, outra proposição, denominada **Negação** de p, pode ser formada escrevendo "não ocorre ...." Ou "é falso que ... " antes de p, ou, se possível inserindo em p a palavra "não". Simbolicamente $\sim p$ (lê-se "não p") denota a negação de p. O valor lógico de "não p" depende do valor lógico de p. Assim, se p é verdadeira, então "não p" é falsa; se p é falsa, então "não p" é verdadeira. O valor lógico de $\sim p$ está definido na Tabela 2.4. O valor lógico da negação de p é sempre o oposto do valor lógico de p.

Exemplos 2.2.2.

1. Bill Gates comprou o sistema operativo QDOS a Tim Paterson;

2. Não ocorre que Bill Gates comprou o sistema operativo QDOS a Tim Paterson;

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabela 2.4: Valores lógicos possíveis para $\sim p$.

3. Bill Gates não comprou o sistema operativo QDOS a Tim Paterson;

4. Bill Gates mudou o nome do sistema operativo QDOS para DOS;

5. Não ocorre que Bill Gates mudou o nome do sistema operativo QDOS para DOS;

Como se pode verificar 2. e 3. são a negação de 1., e 5. é a negação de 4.. Como 1. é verdadeira, 2. e 3. são proposições falsas. Analogamente, como 4. é verdadeira, 5. é falsa.

Observação 2.2.2. *A notação lógica para os conectivos "e", "ou" e "não", não é completamente padronizada. Por exemplo alguns textos usam:*

$$\begin{array}{lll} p\&q,\ p\cdot q \text{ ou } pq & \text{para} & p\wedge q \\ p+q & \text{para} & p\vee q \\ p',\ \neg p \text{ ou } \overline{p} & \text{para} & \sim p \end{array}$$

Exercício 2.2.1. Seja p a proposição "Bill Gates vendeu licenças de DOS à IBM" e q a proposição "a ESTGA é uma escola politécnica da UA". Escreva as proposição verbais que descrevem as expressões $\sim p\wedge \sim q$ e $\sim\sim p$.

2.3 Proposições e Tabelas-Verdade

Seja $P(p,q,\cdots)$ a expressão lógica construída a partir das variáveis lógicas $p,q,\cdots$, que assumem valores lógicos Verdadeiro (V) ou Falso (F), e dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$. Como já referido anteriormente, uma tal expressão denomina-se por proposição composta, ou simplesmente proposição. A propriedade principal de uma proposição $P(p,q,\cdots)$ é o seu valor lógico depender exclusivamente dos valores lógicos das suas variáveis ou seja, o valor lógico de uma proposição é conhecido quando são conhecidos os valores lógicos das suas variáveis. Uma maneira concisa de ilustrar essa relação é pela chamada tabela-verdade.

No que se segue ilustra-se como se pode construir uma tabela-verdade através de um exemplo, usando a proposição $\sim p\vee q$ (em verdade, as tabelas acima são tabelas-verdade simples construídas para os conectivos lógicos definidos). Como se pode observar na Tabela 2.5, as primeiras colunas são para as variáveis $p, q, \cdots$ e que existem linhas suficientes na tabela para todas as combinações possíveis dos valores lógicos V e F das variáveis (para duas variáveis quatro linhas são suficientes, para três variáveis, oito linhas; e em geral para n variáveis, 2^n linhas). Existe também uma coluna para cada fase "elementar" da construção da proposição, sendo o valor lógico a cada passo determinado a partir das fases anteriores, usando a definição dos conectivos. Finalmente na última coluna obtém-se o valor lógico da proposição final. A tabela-verdade de $\sim p \vee q$, Tabela2.5, será então constituída somente por quatro colunas, com os valores lógicos de p, q, $\sim p$ e $\sim p \vee q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Tabela 2.5: Valores lógicos possíveis para $\sim p \vee q$.

Exemplo 2.3.1. Construa a tabela-verdade de $\sim (p \wedge \sim q)$ e verifique que esta proposição é logicamente equivalente a $\sim p \vee q$.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Exercício 2.3.1. Construa a tabela-verdade da expressão $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$.

Teorema 2.3.1. ***(Leis de de Morgan)***

1. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$*;*

2. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$*;*

Por outras palavras:

- a negação da disjunção de duas proposições é equivalente à conjunção das negações das duas proposições;

- a negação da conjunção de duas proposições é equivalente à disjunção das negações das duas proposições.

2.4 Definição e Propriedades de uma Álgebra Booleana

As operações com conjuntos (reunião, intersecção, complementar,...) e as operações com proposições (conjunção, disjunção, negação,...) satisfazem propriedades semelhantes. Estas propriedades são usadas para definir uma estrutura abstracta chamada Álgebra de Boole, assim denominada porque foi desenvolvida pelo matemático britânico George Boole (1815-1864) que, em 1854, publicou "An Investigation of the Laws of Thought" onde descreveu um sistema algébrico, mais tarde designado por álgebra de Boole, para o estudo da lógica.

2.4.1 Operações Booleanas

Seja B um conjunto não vazio. Chama-se operação unária definida sobre B a uma regra que a cada elemento x de B faz corresponder um elemento y de B que é único. Denotar-se-á esta operação por um traço sobre a letra que designa o elemento considerado, i.e., $y = \overline{x}$.

No caso da teoria dos conjuntos a operação de complementação, que a cada conjunto A associa o seu complementar A^c, é uma operação unária; no cálculo proposicional a negação de uma proposição, que a cada proposição p faz corresponder a proposição $\sim p$, é uma operação unária.

A toda a correspondência que a cada par de elementos a, b, por esta ordem, faz corresponder um único elemento c de B designa-se por operação binária definida sobre B. A reunião e intersecção de conjuntos são exemplos de operações binárias na teoria dos conjuntos; a conjunção e a disjunção são exemplos de operações binárias no cálculo proposicional.

Numa álgebra booleana abstracta representam-se geralmente por $+$ e $\cdot$ (ou por simples justaposição), as duas operações binárias que intervêm na sua definição e por $\sim$, $^-$ ou $'$ a operação unária.

Definição 2.4.1. *Chama-se álgebra booleana $\mathcal{B}$ à estrutura matemática, constituída por um conjunto não vazio B no qual se define uma operação unária negação $\sim$ e duas operações binárias $+, \cdot$ que obedecem aos seguintes axiomas:*

- *as operações binárias são comutativas, isto é, para a, $b \in B$, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$;*
- *as operações binárias são associativas, isto é, para $a, b, c \in B$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;*
- *as operações binárias são distributivas uma em relação à outra, ou seja, para $a, b, c \in B$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ou $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.*

- *existem dois elementos* $0, 1 \in B$ *(o zero e a unidade) tais que* $0 \neq 1$ *e para todo o* $a \in B$ *são válidas as identidades:*

  . $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $\overline{\overline{a}} = a$;

  . $a + \overline{a} = 1$, $a + 0 = a$, $a + a = a$, $a + 1 = 1$;

  . $a.\overline{a} = 0$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot a = a$, $a \cdot 1 = a$.

A família de todos os subconjuntos de um universo $\mathcal{U}$ com as operações de reunião, intersecção e complementação constitui uma algebra booleana na qual $\mathcal{U}$ é o elemento unidade e $\emptyset$ é o zero. A família de todas as proposições compostas formadas a partir de n proposições simples, com as operações de disjunção, conjunção e negação, constitui uma álgebra de Boole. Nesta álgebra a unidade é a proposição universalmente verdadeira enquanto que o zero é a proposição universalmente falsa. Qualquer resultado provado numa álgebra booleana abstracta tem a sua interpretação quer em teoria de conjuntos quer no cálculo proposicional.

Exemplo 2.4.1. Seja $B = \{0, 1\}$. O terno $B = (B, +, \cdot)$ com a negação, constitui uma álgebra booleana, uma vez que

- $0.0 = 0$; $1 + 1 = 1$; $1.1 = 1$; $0 + 0 = 0$;
- $0.1 = 1.0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$;
- $\overline{1} = 0$.

A álgebra de Boole apresentada neste exemplo é a que normalmente se aplica a circuitos com interruptores.

Existe um princípio especial na álgebra booleana denominado princípio da dualidade. Por definição, o dual de qualquer proposição numa álgebra booleana é a proposição que se obtém pela trocas das operações $+$ e $\cdot$ e dos seus elementos 1 e 0. Por exemplo, o dual de $(1+a)\cdot(b+0) = b$ é $(0\cdot a)+(b\cdot 1) = b$.

Teorema 2.4.1. *(Princípio de Dualidade) O dual de qualquer teorema numa álgebra de Boole é também um teorema.*

O princípio de dualidade verifica-se em qualquer álgebra de Boole. Cada axioma da definição de álgebra de Boole tem duas partes e a única diferença entre estas duas partes é o papel desempenhado pelas operações $+$ e $\cdot$ que estão trocados bem a como o papel desempenhado pelas constantes 1 e 0.

Exercício 2.4.1. Escreva, numa álgebra booleana, as expressões duais das seguintes expressões:
$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot a + \overline{a} \cdot b \cdot c$; $\overline{a} \cdot (a + b)$; $a + a \cdot b = a$; $\overline{a} \cdot b + b = a + b$.

A Tabela 2.6 que se segue, descreve o comportamento das operações binárias ab e $a+b$ e da operação unária $\overline{a}$.

a	b	ab	a+b
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Tabela 2.6: Propriedades dos operações no sentido booleano

Observe-se que a Tabela 2.6 acima é idêntica às Tabelas 2.1, 2.2 e 2.4.

2.4.2 Funções booleanas

Chama-se função booleana de n variáveis booleanas $x_1, x_2, ..., x_n$ a uma aplicação de $\{0,1\}^n$ em $\{0,1\}$. Por exemplo a função de três variáveis $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x}_2 x_3$ onde $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$ e as operações são entendidas no sentido booleano, isto é, sujeitas às propriedades ilustradas na tabela 2.6.

A função $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x}_2 x_3$ está representada na Tabela 2.7

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Tabela 2.7: Tabela de verdade da função $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x}_2 x_3$.

Por vezes é desejável expressar uma função booleana com o número mínimo de termos e variáveis, obtendo-se então a chamada forma mínima. No que se segue, apresentam-se alguns resultados da álgebra booleana que podem ser usados para simplificar funções lógicas e assim obter a forma mínima.

Teorema 2.4.2. *Sejam a, b, c elementos de uma álgebra booleana $\mathcal{B}$. São válidas as seguintes leis:*

$a+a=a$; $a\cdot a=a$	*leis da idempotência*
$a+0=a$	*el. neutro da soma lógica*
$a\cdot 1=a$	*el. neutro do produto lógico*
$a+1=1$	*el. absorv. da soma lógica*
$a\cdot 0=0$	*el. absorv. do produto lógico*
$\bar{\bar{a}}=a$	*lei de involução*
$a+a\cdot b=a$; $a\cdot(a+b)=a$	*leis da absorção*
$\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$; $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$	*leis de De Morgan*
$a+\bar{a}\cdot b=a+b$; $a\cdot(\bar{a}+b)=a\cdot b$	*leis da adjacência*
$a\cdot b+\bar{a}\cdot c+b\cdot c=a\cdot b+\bar{a}\cdot c$	*lei do termo "incluído"*
$(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)=(a+b)(\bar{a}+c)$	*lei do termo "incluído"*

Exemplo 2.4.2. Pretende-se simplificar a função boleana definida por $f(x,y,z)=xyz+x\bar{y}z$.

Como

$$\begin{aligned} xyz+x\bar{y}z &= (y+\bar{y})(xz) \\ &= 1\cdot(xz), \end{aligned}$$

vem $f(x,y,z)=xz$

2.5 Problemas

1. Seja p a proposição "Faz frio" e q a proposição "Chove". Escreva a proposição verbal que descreve cada uma das proposições a seguir:

   (a) $\sim p$;

   (b) $p\wedge q$;

   (c) $\sim(p\wedge q)$;

   (d) $p\vee q$;

   (e) $\sim(p\vee q)$;

   (f) $q\vee\sim p$.

2. Represente algebricamente cada uma das seguintes afirmações (designe por c, m e f as variáveis que representam "chuva", tempo mau e "está frio", respectivamente).

(a) Chove e o tempo está mau;

(b) O tempo está bom e não chove;

(c) chove ou faz frio;

(d) Nem chove nem faz frio;

3. Escreva o dual de cada uma das equações booleanas:

(a) $(a \cdot 1) \cdot (0 + \overline{a}) = 0$;

(b) $a + \overline{a}b = a + b$.

4. Escreva a tabela-verdade correspondente a cada uma das seguintes funções booleanas:

(a) $f(a, b) = \overline{a} + b$;

(b) $f(a, b, c) = a + \overline{b + c}$;

(c) $f(a, b, c) = \overline{a} \cdot (b + a) + a \cdot b$;

5. Sejam, a, b e c variáveis booleanas. Verifique que

$$\overline{a}b + \overline{b}\overline{c} + ab + \overline{b}c = 1.$$

6. Indique a tabela-verdade de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$;

(b) $f(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + z \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$.

7. Verifique se a função booleana $g(x, y, a, b, c) = (xy + abc)(xy + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ pode ser escrita na forma $g(x, y, a, b, c) = xy$.

Capítulo 3

Estruturas básicas: conjuntos, funções reais de variável real, sucessões e matrizes

Neste capítulo apresentam-se algumas das estruturas necessárias para representar objetos discretos.

Muitas dessas estruturas discretas são construídas usando conjuntos. Por outro lado, o conceito de função é extremamente importante uma vez que atribui a cada elemento de um conjunto exatamente um elemento de um segundo conjunto, onde os dois conjuntos não são necessariamente distintos.

Outro tipo de estruturas úteis, são as sucessões que são tipos especiais de funções.

Por fim, as matrizes são usadas para representar uma variedade de estruturas discretas. Apresentam-se os conceitos básicos sobre matrizes bem como as operações matriciais.

3.1 Conjuntos

Os conjuntos são fundamentais para a formalização de qualquer teoria. Em particular, em Informática e Ciência da Computação, a Teoria de Conjuntos apresenta-se das mais diversas formas como, por exemplo:

- na construção de álgebras booleanas (cerne da Computação Digital);
- no desenvolvimento e validação da teoria de bases de dados;
- no desenvolvimento de linguagens formais.

Um **conjunto** é uma coleção de objetos chamados elementos. Matematicamente um conjunto é representado por letras maiúsculas e os seus elementos são representados por letras minúsculas.

A maneira mais simples de representar algebricamente um conjunto é colocando os seus elementos entre chavetas, $\{a,\ b,\ c,\ \cdots\}$, usando o sinal $\cdots$ para indicar um conjunto infinito de elementos. Por exemplo, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$. Neste caso o conjunto está definido em extensão. Porém, existem notações alternativas para representar os conjuntos, por exemplo, a notação que usa uma condição $P(x)$ para definir os elementos do conjunto,$\{x \in U\ :\ P(x)\}$. Por exemplo $\{x \in \mathbb{R}\ :\ x > 2\}$. Neste caso, o conjunto está representado por compreensão.

O conjunto que não tem elementos denomina-se por conjunto vazio e representa-se por $\{\,\}$ ou $\emptyset$.

Um conjunto A é um subconjunto de B, e denota-se por $A \subseteq B$, se cada elemento de A é também um elemento de B. Por exemplo, o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, o conjuntos dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, e conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Sejam A e B dois conjuntos. Se A e B são conjutos com os mesmos elementos então dizem-se iguais; se não possuem qualquer elemento em comum então dizem-se disjuntos.

Exemplo 3.1.1.

- Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 3, 2, 1\}$ então $A = B$.
- Se $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ então $A \subset B$.
- Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$ então A e B são disjuntos.

Na discussão de conjuntos particulares supõe-se que estes conjuntos tenham outro conjunto, U, como suporte, denominado por conjunto universo ou simplesmente universo. No estudo que vamos desenvolver nesta unidade curricular usamos principalmente o conjunto dos números reais, como conjunto universo. Este conjunto pode-se representar sobre uma reta denominada por reta real. Cada um dos pontos na reta real corresponde exatamente a um número real e cada número real pode ser localizado num ponto da reta.

O subconjunto dos números reais que consiste em todos os números reais x que estão compreendidos entre a e b pode ser representado pela dupla desigualdade $a < x < b$ e, em termos de conjunto, pelo intervalo $]a, b[$, designado por intervalo aberto, ou

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ a < x < b\},$$

e graficamente pela Figura.3.1

Caso as extremidades a e b estejam incluídas representa-se o intervalo por $[a, b]$ e designa-se por intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a \leq x \leq b\},$$

e graficamente pela Figura3.2

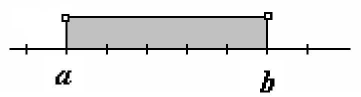


Figura 3.1: Intervalo aberto

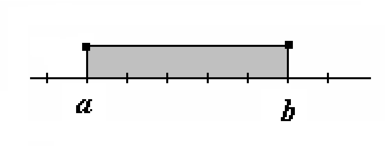


Figura 3.2: Intervalo fechado

Os intervalos contendo apenas uma das extremidades $[a, b[$ ou $]a, b]$, designam-se por intervalos semi-abertos, onde:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\} \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}.$$

Pode-se ainda usar os intervalos $[a, +\infty[$ e $]-\infty, b]$ para representar em termos de conjuntos as desigualdades $x \geq a$ e $x \leq b$, respectivamente, e apresentados na Figura 3.3

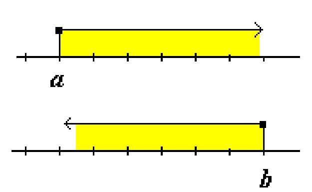


Figura 3.3: intervalo ilimitado

3.1.1 Operações com conjuntos

Relações e Operações não são sinónimos. Enquanto que as relações (igualdade, inclusão, $\cdots$) são essencialmente formas de comparar conjuntos, as operações são formas de criar novos conjuntos a partir de conjuntos já existentes.

Assim, uma operação entre conjuntos gera um novo conjunto como resposta.

União, Interseção, Complemetar e Diferença

Sejam A e B dois conjuntos do universo U. A **união ou reunião** de A e B, $A \cup B$, é o conjunto que contém todos os elementos dos dois conjuntos,

$$A \cup B = \{x \in U \ : \ x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Usando o diagrama de Venn vem (Figura 3.4)

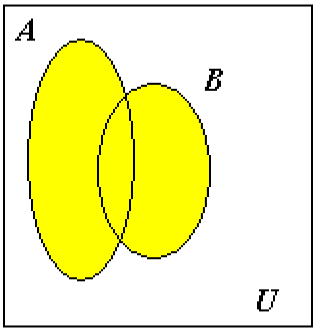


Figura 3.4: Reunião

A **interseção** de A e B, $A \cap B$, é o conjunto dos elementos comuns aos dois conjuntos,

$$A \cap B = \{x \in U \ : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Usando o diagrama de Venn vem (Figura 3.5)

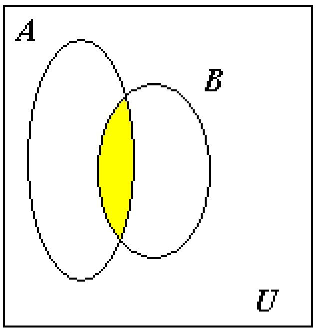


Figura 3.5: Interseção

Se a interseção de dois conjuntos é o conjunto vazio, os conjuntos são disjuntos.

Todos os elementos do universo U que não pertencem ao conjunto A formam o **complementar** de A, A^c, $\overline{A}$ ou A'. Assim

$$A^c = \{x \in U \ \wedge \ x \notin A\}.$$

Usando o diagrama de Venn vem (Figura 3.6)

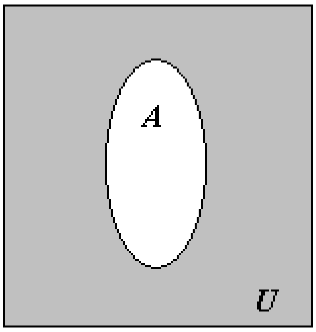


Figura 3.6: Complementar

Designa-se por $A - B$ ou $A \backslash B$ o conjunto da **diferença** de A e B, formado por todos os elementos de A excepto os que pertencem a B (Figura 3.7),

$$A - B = \{x \in U \ : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

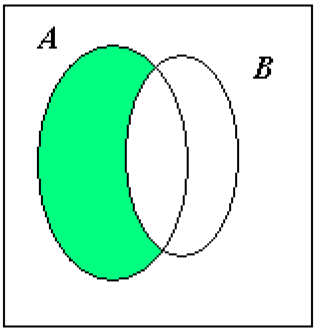


Figura 3.7: Diferença

Produto cartesiano

O produto cartesiano de conjuntos ocupa lugar de destaque nas operações definidas na Teoria de Conjuntos, principalmente no que diz respeito às suas aplicações à Informática, pois permite definir conjuntos de natureza diferente dos originais, através da associação ordenada dos seus elementos, como por exemplo: gráficos, relaciona conjuntos de dados, representação de regras lógicas.

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **produto cartesiano** $A \times B$ ao conjunto formado por todos os pares ordenados em que a $1^{\underline{a}}$ coordenada pertence a A e a $2^{\underline{a}}$ coordenada pertença a B, simbolicamente,

$$A \times B = \{(x, y) : \ x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo 3.1.2. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$ vem

$$A \times B = \{(1, 4),\ (1, 5),\ (2, 4),\ (2, 5),\ (3, 4),\ (3, 5)\}$$

e

$$B \times A = \{(4, 1),\ (4, 2),\ (4, 3),\ (5, 1),\ (5, 2),\ (5, 3)\}.$$

Nota 3.1.1. *Geralmente $A \times B$ é diferente de $B \times A$.*

Observação 3.1.1. *O produto cartesiano $A \times A$ representa-se por A^2; A^3 será $A \times A \times A$ e, no caso geral, A^n será $A \times A \times \cdots \times A$.*

Exemplo 3.1.3. Considere $A = \{1, a\}$.

Neste caso, $A^3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, a), (1, a, 1), (1, a, 1), (1, a, a), (a, 1, 1), (a, 1, a), (a, a, 1), (a, a, a)\}$

Observação 3.1.2. *O conjunto $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$ representa o plano XOY.*

As sequências ordenadas de elementos (ou n-uplos ordenados), $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ são elementos do produto cartesiano formado por n conjuntos,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Além disso, observe-se que a natureza dos elementos a_i, $i = 1, \cdots, n$ não é necessariamente ser a mesma. Isto é, a_1 pode ser um número, enquanto que a_2 pode ser um nome, por exemplo. O importante é perceber que cada posição define a natureza do elemento que ali pode ser colocado.

Este conceito é importante em Informática, pois é usado como fundamento para a definição de listas ordenadas, de vetores e de registos de bases de dados.

3.1.2 Problemas

1. Considere $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{0, -1\}$. Determine : $A \times B$, $\quad B \times A$ e B^3.

2. Considere $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B\{= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determine:

    (a) $A - B$; $\quad C - B$

    (b) $A \cap B \cap C$; $\quad A \cup B \cup C$

    (c) $(A \cup B) \cap C$; $\quad (A \cap B) \cup C$

3. Sejam $A = [-1, 4]$ e $B =]-\infty, 0]$. Determine $A \cup B$; $\quad A \cap B$, $\quad A - B$, $\quad A^c$.

4. Considere $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \vee x > 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \wedge x > 10\}$. Escreva A e B usando intervalos.

5. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x < 6\right\}$ e $B =]-\infty, 0[$.

   Indique: $A \cap B$, $\quad A \cup B$, $\quad \bar{A}$ $\quad$ e $\quad A - B$.

6. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e $B = [\sqrt{2}, +\infty[$.

   Determine: $A \cup B$, $\quad A \cap B$, $\quad \bar{A} =$ $\quad$ e $\quad A - \bar{B}$.

7. Num estudo, verificou-se que 15 pessoas utilizam o produto A ou o produto B e que algumas delas utilizam os dois. O produto A é usado por 12 dessas pessoas e o produto B, por 10 delas. Qual o número de pessoas que utilizam ambos os produtos?

8. O que pode dizer sobre os conjuntos A e B se:

   (a) $A \cup B = A$, $\quad$ (b) $A \cap B = A$, $\quad$ (c) $A - B = A$

3.2 Funções reais de variável real

3.2.1 Definições e operações com funções

O conceito de função estabelece relações com vários outros conceitos matemáticos sendo essencial para descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de fenómenos naturais, económicos ou sociais. Assim sendo, no que se segue apresenta-se o conceito de função recordando o conceito de relação entre dois conjuntos e posteriormente apresentaremos alguns conceitos importantes para o estudo das funções.

Definição 3.2.1. *Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se* ***relação binária*** *de A para B, a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Seja $R \subseteq A \times B$ e x e y elementos de A e B, respetivamente. Diz-se que x está na relação R com y (ou x está relacionado com y através de R) e escreve-se xRy, se $(x, y) \in R$.*

Nota 3.2.1. *Se $B = A$, diz-se que se trata de uma relação binária em A.*

Definição 3.2.2. *Sendo R uma relação binária (ou correspondência) de A para B, o* ***domínio*** *de R é o conjunto de todos os elementos $x \in A$ para os quais existe pelo menos um $y \in B$ tal que xRy, ou seja,*

$$D_R = \{x \in A : (x, y) \in R \text{ para algum } y \in B\}.$$

*O **contradomínio** de R é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe pelo menos um $x \in A$ tal que xRy, ou seja,*

$$CD_R = \{y \in B : (x, y) \in R \text{ para algum } x \in A\}.$$

Definição 3.2.3. *Uma aplicação de A em B, ou **função** definida no conjunto A e com valores no conjunto B, é qualquer relação binária f de A para B que verifica as condições:*

(i) o domínio de f é o conjunto A;

(i) quaisquer que sejam x, y e z pertencentes a A, se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Para indicar que f é uma aplicação de A em B escreve-se $f : A \longrightarrow B$. O conjunto B designa-se por conjunto de chegada. Aos elementos x de A chamamos objetos e a $f(x)$ imagem de x por f ou transformado de x por f. O contradomínio da função é um subconjunto do conjunto B, podendo coincidir, ou não, com este e denota-se por CD_f, D'_f ou $f(A)$.

Considere as correspondências f, g e h apresentadas na Figura 3.8

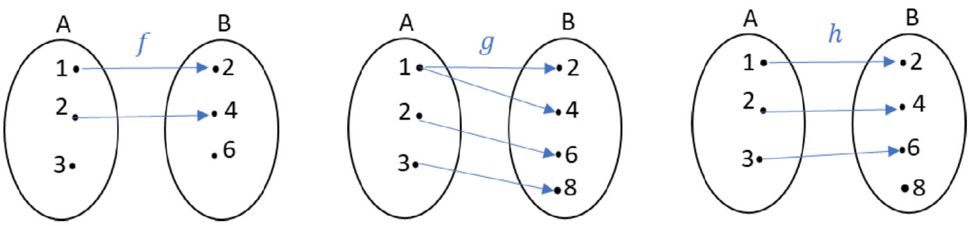


Figura 3.8: Correspondências f, g e h entre o conjunto A e o conjunto B

A correspondência f formada pelos pares (1,2) e (2,4), não é uma função porque existe um elemento de A, elemento 3, que não tem correspondente no conjunto de chegada B.

A correspondência g, formada pelos pares $\{(1, 2), (1, 4), (2, 6), (3, 8)\}$ não é uma função porque existe um elemento do conjunto A, elemento 1, que tem dois correspondentes em B . A correspondência h, formada pelos pares $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ é uma função porque a cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B.

Definição 3.2.4. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função de A em B.*

(i) *Se $CD_f = B$, a aplicação é **sobrejetiva**;*

(ii) *Se a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, a aplicação é **injetiva**, simbolicamente:*

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \tag{3.1}$$

(iii) *Quando a aplicação $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetiva e injetiva diz-se* ***bijetiva****. Uma função bijetiva também se chama correspondência biunívoca.*

Uma função diz-se real se o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e diz-se de variável real se o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$; consequentemente uma função real de variável real é uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.

A representação de uma função pode ser feita através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências; e graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos.

Definição 3.2.5. *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e a função $f : A \longrightarrow B$. O* ***gráfico*** *da função f é o conjunto*

$$G = \{(x, y) \in A \times B \, : \, x \in A, \, y = f(x)\}.$$

Exemplo 3.2.1. Na Figura 3.9 apresenta-se o gráfico de uma função f definida de $A = \{-5, -2, 3, 5\}$ em $\mathbb{R}$.

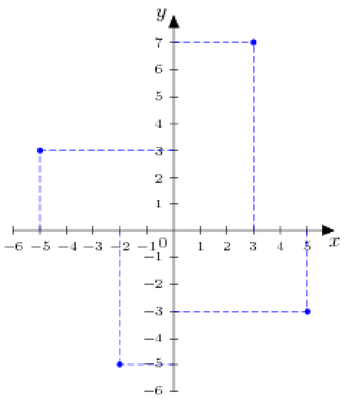


Figura 3.9: Gráfico da função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

Definição 3.2.6. *Seja f uma função real de variável real de domínio D. Diz-se que $x_1 \in D$ é um* ***zero*** *de f se e só se $f(x_1) = 0$.*

Dadas duas ou mais funções reais de variável real podemos obter novas funções à custa das operações adição (algébrica) e multiplicação de números reais.

Definição 3.2.7. *Sejam f e g duas funções reais de variável real.*

(i) *A função soma das duas funções é a função de domínio* $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ *definida por* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$*;*

(ii) *A função produto das duas funções é a função de domínio* $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$ *definida por* $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$*;*

(iii) *Sendo* $\lambda \in \mathbb{R}$*, o produto de* λ *por* f *é a função cujo domínio é* $D_{\lambda f} = D_f$ *e definida por* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$*;*

(iv) *Se* $n \in \mathbb{N}$*, a potência de expoente* n *de* f *é a função cujo domínio é* $D_{f^n} = D_f$ *e definida por* $f^n(x) = (f(x))^n$*.*

Observe-se que (iii) pode ser vista como um caso particular de (ii) e (iv) e como uma extensão de (ii). Além disso a diferença de duas funções é a função $f - g = f + (-1)g$ que se obtém à custa de (i) e (iii).

Exemplo 3.2.2. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

Nesta caso $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ e , consequentemente,

- $D_{f+g} = D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x+2}$; $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

Definição 3.2.8. ***(Paridade)*** *Seja* $D \subseteq \mathbb{R}$ *um conjunto simétrico em relação à origem. A função real* $f : D \to \mathbb{R}$ *diz-se*

- ***par*** *se* $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.
- ***ímpar*** *se* $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy, e o de uma função ímpar é simétrico em relação à origem, (Figura 3.10).

Definição 3.2.9. ***(Função Limitada)*** *Uma função* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***limitada*** *se existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$|f(x)| \leq M, \, \forall x \in D_f.$$

Na Figura 3.11 apresentam-se os gráficos de duas funções: uma limtada e a outra não limitada.

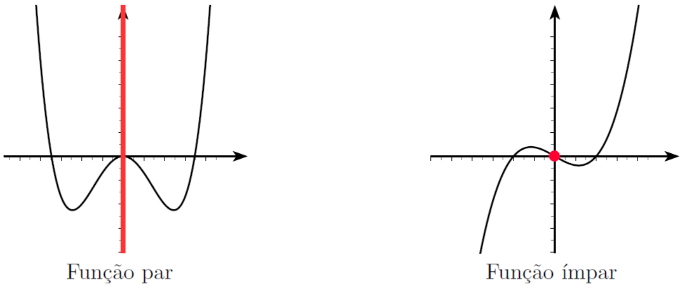


Figura 3.10: Paridade

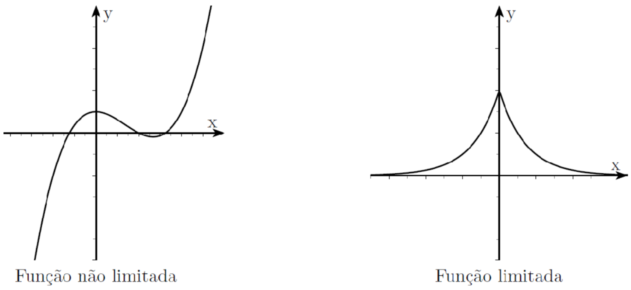


Figura 3.11: Função limitada

3.2.2 Monotonia de uma função

A variação é um dos aspetos importantes do conceito de função. O estudo da monotonia de uma função consiste em determinar os subconjuntos do seu domínio onde ela é crescente ou decrescente.

Considere o gráfico da Figura 3.12

Suponha que este gráfico foi feito por um instrumento que regista a variação de uma dada quantidade em relação ao tempo. O eixo Ox representa o tempo e o eixo Oy representa a grandeza, por exemplo, temperatura, pressão, contagem de bactérias numa cultura, etc. O gráfico indica que a quantidade aumentou, diminui, voltou a aumentar e assim sucessivamente.

No estudo da monotonia de uma função pretende-se determinar os intervalos, do seu domínio, onde há mudanças de comportamento quanto ao crescimento. Assim

Definição 3.2.10. ***(Funções Monótonas)***

Sejam f uma função de domínio D e $x_1, x_2, c, d \in I =]a, b[$, com $I \subset D$.

- *f é **estritamente crescente** (crescente) em I se $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$ quando $x_1 < x_2$;*

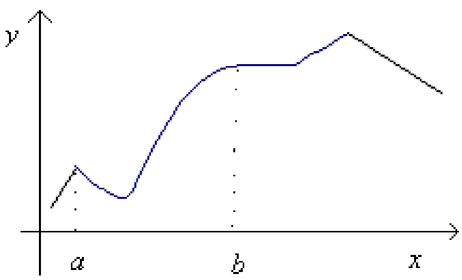


Figura 3.12: Monotonia de funções

- *f é **estritamente decrescente** (decrescente) em I se $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) quando $x_1 < x_2$;*

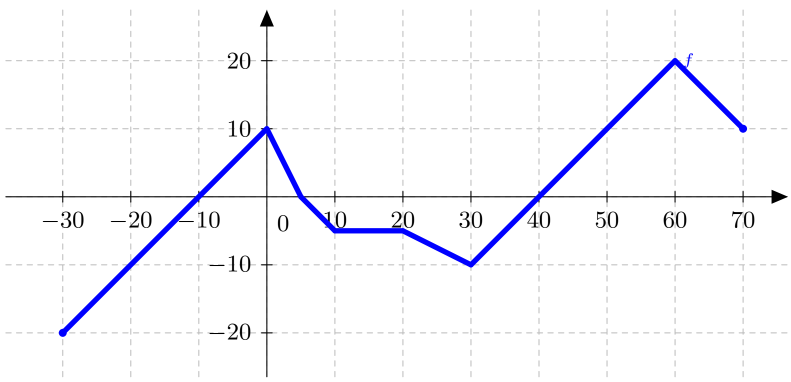
- *f tem um **máximo local ou relativo** para $x = c$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo o $x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. Neste caso c diz-se maximizante e $f(c)$ diz-se **máximo local**.*

- *f tem um **mínimo local ou relativo** para $x = d$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(d)$ para todo o $x \in]d - \varepsilon, d + \varepsilon[$. Neste caso d diz-se minimizante e $f(d)$ **mínimo local**.*

- *Se $f(x) \geq m$, para todo $x \in D$, então m é um **mínimo absoluto**.*

- *Se $f(x) \leq M$, para todo $x \in D$, então M é um **máximo absoluto**.*

Exemplo 3.2.3. Considere a função f cujo gráfico se apresenta na figura seguinte



Então:

- f não é injetiva porque, por exemplo, $5 \neq 40$ mas $f(5) = f(40)$;

- f é constante em $[10, 20]$;

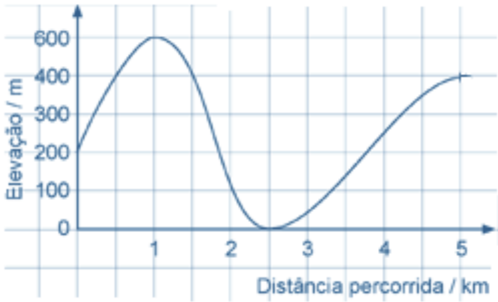
- f é monótona crescente nos intervalos $[-30, 0[$ e $]30, 60[$;

- f é monótona decrescente nos intervalos $]0, 30[$ e $]60, 70]$;

- 10 é um máximo relativo e -10 é um mínimo relativo de f

- -20 é o mínimo absoluto e 20 é o máximo absoluto de f;

Exercício 3.2.1. No gráfico seguinte está representada a elevação de um terreno, em metros, acima do nível do mar correspondente ao passeio do Filipe.



a) Quando o Filipe iniciou o passeio, qual era a elevação do terreno?

b) O gráfico dado corresponde a uma função?

Em caso afirmativo indique o domínio, o contradomínio e o zero dessa função.

Definição 3.2.11. ***(Função inversa)*** *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. À função f^{-1} que tem domínio $f(D)$, contradomínio D e é definida por*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, y \in f(D)$$

chama-se ***função inversa*** *de f. Se f admite função inversa, f diz-se invertível.*

Observação: O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à recta $y = x$, (Figura 3.13).

3.3 Sucessões

3.3.1 Generalidades e conceitos

O conceito de sucessão de números reais é uma das ferramentas com as quais se podem modelar processos discretos infinitos. Consideremos a sequência de números $2,\ \ 6,\ \ 12,\ \ 20,\ \ 30, \cdots$, que correspondem ao número de bolas da seguinte figura e que, na Grécia Antiga, chamavam números rectangulares:

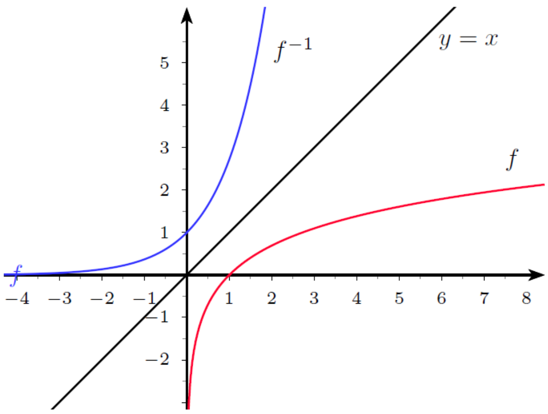


Figura 3.13: inversa

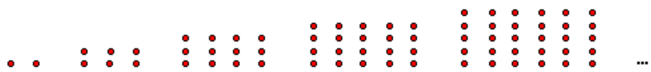


Figura 3.14: Números retangulares

Seguindo a mesma lógica de construção, a sexta figura é formada por 42 bolas, a sétima por 56, e assim sucessivamente.

Ao associar a cada figura o número de bolas que a formam e registando esses valores numa tabela obtém-se:

Ordem da figura	Número de bolas
1	2
2	$2\times$ 3
3	$3\times$ 4
4	$4\times$ 5
5	$5\times$ 6
$\dots$	$\dots$
n	$n \times (n+1)$.

Assim definiu-se uma correspondência que a cada número natural, a ordem da figura, faz-se corresponder um e um só número real, neste caso o número de bolas da figura.

Definição 3.3.1. *Chama-se* ***sucessão*** *de números reais a toda a função u de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to u(n) := u_n. \end{aligned}$$

As imagens designam-se por termos da sucessão, os objectos por ordens dos termos e à expressão u_n (que define a sucessão) dá-se a designação de termo geral da sucessão.

O conjunto $\{u_n \; : \; n \in \mathbb{N}\} = \{u_1, \; u_2, \; \cdots, u_n \cdots\}$ *designa-se por conjunto dos termos da sucessão.*

Exemplos 3.3.1.

1. $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ é uma sucessão cujo primeiro termo, $u_1 = 1$, o segundo,$u_2 = 3$, o terceiro, $u_3 = 5$ e, em geral o termo geral, $u_n = 2n - 1$.
2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ é uma sucessão em que o termo geral é $u_n = \frac{1}{n}$.

O gráfico de uma sucessão é constituído por pontos isolados, visto só os números naturais terem imagem.

O gráfico da sucessão apresentada no exemplo da Figura 3.14 está na Figura 3.15

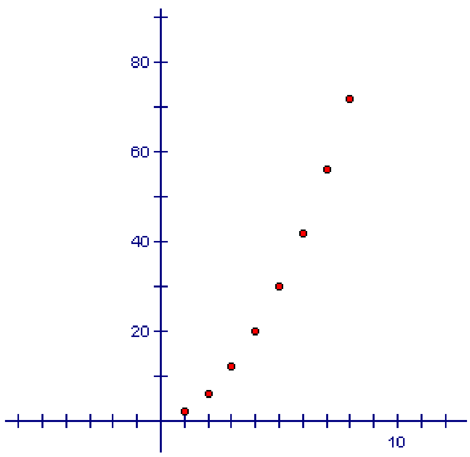


Figura 3.15: Gráfico - $n^{\underline{o}}$ de bolas

Exercícios 3.3.1. 1. Descubra a regra:

(a) $3, \; 6, \; 9, \; 12, \; 15, \cdots;$

(b) $4, \; 7, \; 10, \; 13, \; 16, \cdots$

2. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 2^{n-2}$.

(a) Escreva os quatro primeiros termos da sucessão;

(b) Verifique se 32 é termo da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

Como referido anteriormente uma sucessão pode ser dada pelo seu termo geral. Contudo esta não é a única forma. Uma sucessão pode ser dada por recorrência. Tal consiste em dar explicitamente alguns dos primeiros termos, sendo o termo de ordem n definido através de alguns dos termos de ordens anteriores.

Exemplo 3.3.1. A sucessão

$$u_n = \begin{cases} u_1 & = -\frac{1}{2} \\ u_2 & = 5 \\ u_3 & = 8 \\ \vdots & \\ u_n & = \quad 4u_{n-2} + 2u_{n-1}, \ \ n \geq 2 \end{cases}$$

é um exemplo de uma sucessão definida por recorrência.

Definição 3.3.2. *Dada uma sucessão de números $u_1, \ \ , u_2, \ \cdots$ chama-se* ***relação de recorrência*** *a uma equação que relaciona o termo u_n com os termos que o antecedem e que é válida para todo o n maior que um dado natural fixado n_0.*

Um exemplo de uma relação de recorrência muito conhecida é a que é dada para definir os chamados números de Fibonacci, que aparecem em muitos problemas, $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \cdots\}$. Estes números são definidos pelas condições iniciais

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1,$$

e pela relação de recorrência

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \, n \geq 2.$$

Nestas condições

$f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$; $\quad f_3 = f_2 + f_2 = 1 + 2 = 2$; $\quad f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$; $\quad f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$;

$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

Usando esta relação e as condições iniciais, podem calcular-se os primeiros termos da sucessão

$$\{0, \ 1, \ 1, \ 2, \ 3, \ 5, \ 8, \ 13, \ 21, \ 34, \ 55, \ 89, \ 144, \ 233, \ 377, \ 610, \ 987, \ 1597, \cdots\}.$$

Contudo, não é fácil conjeturar uma fórmula para o termo geral da sucessão dos números de Fibonacci. Tal fórmula pode ser importante para avaliar, por exemplo, o grau de crescimento da sucessão para valores grandes da variável n.

Exemplos 3.3.2.

1. A relação de recorrência $u_n = nu_{n-1}, \;\; n = 1, \; 2, \; 3, \cdots$ com a condição inicial $u_0 = 1$ tem a seguinte solução $u_n = n!, \;\; n \in \mathbb{N}$.

2. Seja a sucessão definida pela relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 2, 3, 4, \cdots$ e $a_1 = 2$.

   Neste caso $a_2 = 5$; $a_3 = 8$ e $a_4 = 11$.

   Usando sucessivamente a relação de recorrência, vem

   $a_2 = 2 + 3;$

   $a_3 = (2 + 3) + 3 = 2 + 3 \times 2;$

   $a_4 = 2 + 3 \times 2 + 3 = 2 + 3 \times 3;$

   $\ldots$

   $a_n = a_{n-1} + 3 = (2 + 3 \times (n-2) + 3) = 2 + 3(n-1)$

3. Considere o seguinte problema

   A Maria recebe um prémio de produtividade de acordo com a seguinte regra: Em janeiro recebe 80 euros, e em cada mês seguinte recebe mais 1,5 euros, durante o primeiro ano de trabalho. No ano seguinte, o prémio mensal mantém-se constante e igual ao de dezembro do primeiro ano.

   De quanto vai ser o prémio mensal no segundo ano?

   Consideremos o mês de janeiro do ano atual como sendo $n = 1$, fevereiro $n = 2$, ..., dezembro $n = 12$. Podemos verificar que os valores dos prémios mensais são termos de uma sucessão definida do seguinte modo:

$$u_1 = 80$$

$$u_2 = u_1 + 1.5$$

$$u_3 = u_2 + 1.5 = u_1 + 2 \times 1.5$$

$$u_4 = u_3 + 1.5 = u_1 + 3 \times 1.5$$

$$\ldots$$

$$u_{12} = u_{11} + 1.5 = u_1 + 11 \times 1.5 = 8 + 11 \times 1.5 = 96.5.$$

   O prémio mensal no 2º ano é de 96.5 euros.

4. O plano de poupança da Clara é simples e aparentemente fácil de cumprir. Na primeira semana coloca 1 euro no mealheiro, na semana seguinte 2 euros, na terceira 4 euros, e assim sucessivamente $\cdots$. Coloca sempre no mealheiro o dobro do que pôs na semana anterior. Quanto

colocou no mealheiro na 8ª semana? São frequentes as situações em que é possível modelar um problema recorrendo a uma sucessão em que cada termo é o produto do anterior por uma dada constante.

Consideremos que n representa o nº de semanas. Assim os dados do problema permitem-nos escrever:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 \times 2$$

$$u_3 = u_2 \times 2 = u_1 \times 2^2$$

$$u_4 = u_3 \times 2 = u_1 \times 2^3$$

$$\dots$$

$$u_n = u_{n-1} \times 2 = u_1 \times 2^{n-1}.$$

Assim, na oitava semana colocou $u_8 = 1 \times 2^7 = 128$ euros

3.3.2 Problemas

1. Calcule os 6 primeiros termos das seguintes sucessões:
   $a_n = 2n - 1$; $b_n = \dfrac{n^2+1}{n}$; $c_n = (-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{n}$.

2. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

   (a) Determine o termo de ordem 20;

   (b) Determine o termo de ordem $n+1$;

3. Determine os primeiros 5 termos das sucessões definidas por recorrência:

   (a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_1 = 2$;

   (b) $a_n = na_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

4. Determine uma relação de recorrência para as seguintes sucessões:

   (a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots;$

   (b) $5, 11, 17, 23, 29, \cdots;$

   (c) $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \cdots$.

5. Numa sucessão, cada termo obtém-se do anterior adicionando 3. Sabendo que o terceiro termo é 10, determine os cinco primeiros termos da sucessão.

6. O Vítor tinha um cofre com 500 euros e resolveu colocar todos os meses 50 euros no cofre. Escreva a expressão que lhe permite saber o dinheiro existente no cofre ao fim de n meses.

3.4 Matrizes

O conceito de matriz tem grande aplicação em disciplinas da área da Matemática bem como, em outras áreas que usam a Matemática para desenvolver os seus métodos.

No que se segue são apresentados os conceitos básicos e alguns resultados fundamentais sobre matrizes e a sua aplicação na resolução de sistemas de equações lineares.

3.4.1 Generalidades

Chama-se **matriz** a um quadro de dupla entrada de elementos dispostos de forma ordenada por linhas e colunas. A posição de cada elemento fica definida por meio de um par de índices:

- o primeiro indica a linha a que o elemento pertence;
- o segundo indica a coluna a que o elemento pertence.

No nosso estudo os elementos de uma matriz podem ser números ou funções.

De uma forma geral, representa-se uma matriz de m linhas e n colunas por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n},$$

onde a_{ij} é o elemento da matriz A situado na linha i e na coluna j, $i = 1, 2, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Cada elemento a_{ij} chama-se **termo**, **elemento** ou **coeficiente** da matriz e uma matriz com m linhas e n colunas é uma matriz do **tipo** ou de **dimensão** $m \times n$ ou (m, n).

Exemplos 3.4.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 3×4;

$$B = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2 & 1 \\ x+1 & 0 \\ 2 & x-1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 4×2.

Definição 3.4.1. *Duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ *são* ***iguais***, $A = B$, *se são do mesmo tipo, ou seja* $m = p$ *e* $n = q$ *e todos os elementos correspondentes são iguais,* $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$.

Algumas matrizes, por terem características específicas, são conhecidas por nomes específicos.

3.4.2 Alguns tipos de matrizes

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz. No que se segue apresentam-se alguns tipos de matrizes.

▷ **Matriz quadrada** - é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, $m = n$ e, neste caso diz-se uma matriz quadrada de ordem n e os elementos a_{ii}, $i = 1, \cdots, n$ constituem a **diagonal principal**.

Exemplo 3.4.1. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 4 & -8 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

é quadrada de ordem 3.

▷ **Matriz triangular superior** - é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $\forall i > j$.

Exemplo 3.4.2. A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é triangular superior.

▷ **Matriz triangular inferior** - é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $\forall i < j$.

Exemplo 3.4.3. A matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

é triangular inferior.

▷ **Matriz diagonal** - é uma matriz onde $a_{ij} = 0$ para $\forall i \neq j$.

Exemplo 3.4.4. A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonal.

▷ **Matriz identidade** - é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja , $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$. Normalmente designa-se a matriz identidade de ordem n por I_n.

Exemplo 3.4.5.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a identidade de ordem 4.

▷ **Matriz nula** - é uma matriz cujos elementos são todos nulos, i. é, $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$. Normalmente designa-se a matriz nula por **0**.

▷ **Matriz linha** - m=1

A matriz $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha.

▷ **Matriz coluna** - n=1

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz coluna.

Se A é uma matriz $m \times n$, a matriz que se obtém de A por troca das colunas pelas linhas de A é chamada de **matriz transposta** de A e denota-se por A^T. Assim A^T é uma matriz $n \times m$ e $\left(A^T\right)^T = A$.

Exemplo 3.4.6. Dado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \text{ vem } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.4.2. *Uma matriz quadrada, A, diz-se* ***simétrica*** *se não for alterada por transposição, isto é, se $A^T = A$.*

3.4.3 Operações com Matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ duas matrizes e λ e μ dois escalares (reais ou complexos).

$\diamond$ **Adição**

Se A e B forem duas matrizes do mesmo tipo, $m \times n$, define-se a matriz soma, $A + B$, como sendo a matriz que se obtém adicionando os elementos correspondentes de A e B, isto é $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 3.4.7. Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -7 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ vem

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ -4 & -2 \\ 13 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pela própria definição de adição de matrizes, é fácil de verificar as seguintes propriedades:

- Associatividade: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- Comutatividade: $A + B = B + A$;
- Existência de elemento neutro - a matriz nula, isto é, A+$\mathbf{0}$=A.

$\diamond$ **Multiplicação por um escalar**

A matriz λA é a matriz do mesmo tipo que A e obtida multiplicando o escalar λ pelos coeficientes de A ou seja, $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 3.4.8. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

então

$$7A = \begin{bmatrix} 7 & -35 \\ 21 & -21 \end{bmatrix}.$$

Atendendo à forma como esta operação está definida, ela verifica as seguintes propriedades:

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

◇ **Multiplicação**

Este tipo de operação, $A \times B$, só é possível efetuar quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, isto é, se as matrizes forem do tipo $m \times n$ e $n \times q$, respetivamente. Assim a matriz produto é $AB = [c_{ij}]_{m\times q}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots q.$$

Como multiplicar duas matrizes A e B quaisquer, desde que a multiplicação seja possível?

Designam-se por L_i, $i = 1, \ldots, m$, as linhas da matriz A e por C_j, $j = 1, \ldots, q$, as colunas de B. Define-se a matriz produto AB da seguinte forma

$$AB = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 & \cdots & L_1 \cdot C_q \\ L_2 \cdot C_1 & L_2 \cdot C_2 & \cdots & L_2 \cdot C_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m \cdot C_1 & L_m \cdot C_2 & \cdots & L_m \cdot C_q \end{bmatrix}$$

onde

$$L_i \cdot C_j, = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, q.$

Exemplo 3.4.9. Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

vem

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+(-5)\times 2 & 1\times(-3)+(-5)\times 1 & 1\times 5+(-5)\times(-2) \\ 3\times(-1)+(-3)\times 2 & 3\times(-3)+(-3)\times 1 & 3\times 5+(-3)\times(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 & -8 & 15 \\ -9 & -12 & 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicação 3.4.1.

Uma dada empresa fabrica 3 tipos de produtos, P1, P2 e P3 em quatro fábricas diferentes, F1, F2, F3 e F4. Os vários custos envolvidos na produção de uma unidade de cada um dos produtos P1, P2 e P3 são dados por

	P1	P2	P3
Matéria-prima	7.5	10	2.5
Mão de obra	15	12.5	7.5
Distribuição	10	5	7.5

O número de unidades produzidas num mês em cada fábrica é

	F1	F2	F3	F4
P1	2500	3000	1000	3800
P2	900	600	700	1100
P3	2000	1950	2700	2400

A apresentação destes dados nas respetivas tabelas permite a sua leitura mais rápida. Designando por C a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 7.5 & 10 & 2.5 \\ 15 & 12.5 & 7.5 \\ 10 & 5 & 7.5 \end{bmatrix}$$

e por N a matriz

$$N = \begin{bmatrix} 2500 & 3000 & 1000 & 3800 \\ 900 & 600 & 700 & 1100 \\ 2000 & 1950 & 2700 & 2400 \end{bmatrix},$$

vem

$$CN = \begin{bmatrix} 32750 & 33375 & 21250 & 45500 \\ 63750 & 67125 & 44000 & 88750 \\ 44500 & 47625 & 33750 & 61500 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, a $1^{\underline{a}}$ coluna de CN indica o custo em matéria-prima, mão de obra e distribuição na fábrica F1, a $2^{\underline{a}}$ linha de CN indica o custo da mão de obra nas 4 fábricas.

Exercício Verifique que o produto de duas matrizes pode ser nulo sem que nenhum dos factores seja nulo, isto é, $AB = \mathbf{0}$ sem que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.

Observação 3.4.1. *Em geral, $AB \neq BA$, isto é, a multiplicação de matrizes não é comutativa.*

Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$, respetivamente. Verifcam-se as seguintes propriedades.

- $A(BC) = (AB)C$ com C uma matriz $p \times q$;
- $A(B + C) = AB + AC$ com C uma matriz $n \times p$;
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $AI_n = I_m A = A$

3.4.4 Problemas

1. De modo a classificar 5 membros de uma equipa de xadrez para competir com outra escola o técnico desenha o seguinte diagrama. Uma seta indo de 1 para 2 significa que o jogador 1 já derrotou o jogador 2.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \longrightarrow & & 2 \\ \downarrow\uparrow & & 3 & \nearrow & \downarrow\uparrow \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 4 & & \longrightarrow & & 5 \end{array}.$$

Construa a matriz A com elementos $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caso } i \text{ tenha derrotado } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a+5 & -9 \\ 40 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ b^2 - 9 & 1 \end{bmatrix}$, determine:

   (a) a e b de forma a que $A = B$;

   (b) b de forma a que B seja uma matriz triangular superior.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule:

(a) AB;

(b) $BA - 2C$;

(c) $CB + A^T$.

4. Suponha que numa dada organização a informação está constantemente a circular entre alguns dos seus departamentos de acordo com o esquema:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \longleftrightarrow & & 2 \\ & & & \swarrow & \\ \downarrow & & 5 & & \downarrow \\ & \nearrow & & & \\ 3 & & \longleftrightarrow & & 4 \end{array}$$

(a) Construa a matriz A com elementos

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a informação circula diretamente de i para j} \\ 0, & \text{se a informação não circula diretamente de i para j} \end{cases}.$$

(b) Construa a matriz B com elementos

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a informação circula de i para j através de} \\ & \quad \text{no máximo 1 departamente intermediário, com } i \neq j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(c) O responsável pelo departamento i tem o maior poder de influência sobre os restantes, caso a soma dos elementos da linha i na matriz $A + B$ seja a maior de todas. Qual é o número do departamento dessa pessoa?

5. Suponha que os preços de aquisição e as taxas de entrega (em euros por unidade) do emadeiramento, revestimento externo e telhado de uma casa usados na construção civil são dados pela tabela seguinte.

	emadeiramento	rev. externo	telhado
compra	6	4	2
entrega	1	1	0.5

(a) Suponha que o fornecedor decidiu elevar os preços de compra em 60 cêntimos por unidade e as taxas de entrega em 5 cêntimos por unidade. Escreva:

  i. a matriz que representa as taxas unitárias originais;

  ii. a matriz que representa os aumentos;

  iii. a matriz que descreve as novas taxas unitárias.

(b) Suponha que o fornecedor anuncia um acréscimo de 10% tanto para a aquisição como para a entrega destes items. Indique a nova matriz de custos unitários.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$.

7. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz X tal que:

(a) $A + X^T = B^T + C$;

(b) $X - I_3A = 2I_3 + C$.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine A^n.

Capítulo 4

Organização e descrição de dados

4.1 Organização e Interpretação de Dados Estatísticos

4.1.1 Alguns Conceitos de Estatística Descritiva

A informação do que nos rodeia é muitas vezes fornecida pelos órgãos de comunicação social através de tabelas e variadíssimos tipos de gráficos que traduzem estudos estatísticos. Assim, é necessário saber fazer a leitura e interpretação desses gráficos para poder criticar e tirar as devidas conclusões.

De um modo geral, a Estatística Descritiva consiste na recolha, organização e apresentação de dados através da criação de instrumentos adequados, como tabelas, gráficos e indicadores numéricos, com vista a descrever e interpretar a realidade atual ou factos passados relativos ao conjunto observado.

No que se segue apresentam-se alguns conceitos próprios deste ramo da Matemática.

Definições 4.1.1. ***População*** *ou* ***universo estatístico*** *é o conjunto de todos os elementos em estudo.*

Amostra *é um subconjunto da população em estudo.*

Variável *é uma característica ou propriedade da população em estudo.*

Em relação a uma população e a uma amostra, existem termos como censo e sondagem, que são do conhecimento de todos, distinguindo-se entre si da seguinte forma:

- **censo** é um estudo estatístico que incide sobre todos os elementos de uma população;

- **sondagem** é um estudo estatístico em que se utiliza apenas uma amostra da população.

As variáveis a estudar numa população ou numa amostra podem ser de dois tipos:

- **qualitativas** são atributos que, por se relacionarem com características ou qualidades, não se podem traduzir numericamente. Por exemplo cor de olhos, profissão, sexo, etc.

- **quantitativas** são atributos que se podem traduzir numericamente. Por exemplo, a idade, a duração de uma tarefa, a altura, etc.

No entanto, ao analisar estes exemplos, há diferenças entre as variáveis, no diz respeito aos valores assumidos. Dentro das variáveis quantitativas podem-se distinguir dois tipos:

- **Discretas** - neste caso a variável só pode tomar valores correspondentes a pontos isolados. Por exemplo, nº de filhos, número de erros no código de programação, etc;

- **Contínuas** - neste caso a variável pode tomar qualquer valor de uma dado intervalo. Por exemplo, a altura, temperatura, tempo gasto para executar uma dada tarefa, etc.

4.1.2 Tabelas de Frequências

Após a recolha de dados é necessário proceder à sua organização de forma a que seja possível analisar a informação. A organização dos dados pode ser realizada através de **tabelas de frequências** (ou distribuição de frequências) e de **gráficos**. A forma de organização em tabela ou o tipo de gráfico a usar depende do tipo de dados: Discretos ou Contínuos.

A **Tabela de Frequência** permite organizar os dados observados e indica as frequências absolutas ou relativas para cada valor da variável, as quais podem ser simples ou acumuladas.

Dados discretos

Numa primeira coluna colocam-se os dados observados x_i. No caso da variável ser quantitativa e discreta colocam-se os dados por ordem crescente

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$$

na primeira coluna da tabela. Uma vez definidos os valores da variável, contabilizam-se quantas vezes é observado cada um desses valores, obtendo-se a **frequência absoluta** de cada dado. Supondo que foram observados k dados diferentes, a tabela seguinte apresenta a forma de organização dos dados

Tabela de frequências				
Valores da variável (x_i)	frequência absoluta (n_i)	frequência relativa (f_i)	frequência absoluta acumulada (N_i)	frequência relativa acumulada (F_i)
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_k	n_k	f_k	N_k	F_k

Uma tabela deste tipo pressupõe que já foram realizadas as etapas iniciais de um estudo estatístico: recolha, contagem, agrupamento e ordenação dos dados.

O número de elementos que fazem parte da amostra designa-se por **dimensão da amostra** e representa-se por n.

Seja x_i um valor que a variável em estudo assume. Designa-se por n_i a sua frequência absoluta, isto é, o nº de vezes que o valor x_i aparece.

A soma de todas as frequências absolutas é sempre igual à dimensão da amostra, isto é,

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Usando o símbolo de somatório vem $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Sendo n_i a frequência absoluta do dado x_i e sendo n a dimensão da amostra, designa-se por frequência relativa de x_i a razão

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

É usual a utilização das frequências relativas sob a forma de percentagem o que se obtém calculando $f_i \times 100\%$.

Como a soma das frequências absolutas é igual à dimensão da amostra, a soma das frequências relativas é 1 ou 100%, conforme seja calculada sob a forma de número decimal ou de percentagem.

Chama-se **frequência absoluta acumulada** do dado x_i à soma das frequências de todos os dados desde o de primeira ordem até ao de ordem i

$N_1 = n_1$

$N_2 = n_1 + n_2$

$N_3 = n_1 + n_2 + n_3$

...

$N_K = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

Usando o símbolo de somatório vem $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$.

De forma idêntica se define a **frequência relativa acumulada** do dado x_i, F_i, como sendo a soma das frequências relativas, desde a primeira até ao valor de ordem i.

$F_1 = f_1$

$F_2 = f_1 + f_2$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$

...

$F_K = f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1$

Usando o símbolo de somatório vem $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$.

Exemplo 4.1.1. Considere que

5, 7, 8, 9, 10, 8, 6, 11, 11, 5, 7, 6, 9, 11, 8, 5, 10, 11, 10, 11, 11

é a amostra relativa à altura de 21 plantas 10 dias após terem sido semeadas

Pretende-se construir a tabela de frequências relativa aos dados desta amostra.

Dimensão da amostra: $n = 21$ **Valores distintos:** $k = 7$

Tabela de frequências				
Valores da variável (x_i)	frequência absoluta (n_i)	frequência relativa(%) (f_i)	frequência absoluta acumulad (N_i)a	frequência relativa acumulada (F_i) (%)
5	3	14,3	3	14,3
6	2	9,5	5	23,8
7	2	9,5	7	33,3
8	3	14,3	10	47,6
9	2	9,5	12	57,1
10	3	14,3	15	71,4
11	6	28,6	21	100

Dados agrupados em classes

No caso das variáveis contínuas (ou discretas mas com muitos valores distinto), a construção de uma tabela de frequências como a anterior não será muito informativa. Nestes casos é usual agrupar os dados. Para tal, estabelecem-se intervalos que se designam por classes e diz-se que se trata de uma distribuição com os dados agrupados em classes.

Classes são intervalos fechados à direita e abertos à esquerda, $]a_i, a_{i+1}]$. Designa-se por **amplitude da classe** $]a_i, a_{i+1}]$ à diferença $a_{i+1} - a_i$.

A construção de classes não tem regras rígidas, tem de ser adaptada aos dados disponíveis. No entanto, pode-se apontar um conjunto de indicações que se devem considerar neste tipo de procedimento. Indicam-se apenas algumas:

- **número de classes**: não existe uma regra única quanto ao número de classes a construir, no entanto, existem regras que podem dar uma indicação, caso as classes não estejam previamente estabelecidas. Uma das regras mais usadas é a regra de Sturges. A regra de Sturges sugere que para uma amostra de dimensão n se considere k classes onde k é o menor inteiro que satisfaz $2^k \geq n$ ou seja $k = [\log_2 n] + 1$.

- **amplitude das classes** : sempre que possível, as classes deve ter todas a mesma amplitude e devem facilitar a leituras dos resultados. Contudo, nalguns casos torna-se conveniente que elas tenham amplitudes diferentes;

- **limites das classes**: os limites de uma classe são os valores que a delimitam; estas podem ser do tipo $]a_i, a_{i+1}]$, sendo que os limites devem ser escolhidos de forma a facilitar a leitura

- qualquer dado pertence a uma e uma só classe;

- O limite inferior da primeira classe deve ser menor ou igual ao menor dos dados;

- o limite superior da última classe deve ser maior ou igual ao maior dos dados.

Exemplo 4.1.2. Num inquérito realizado a 85 pessoas a idade mínima registada foi de 21 anos e a idade máxima foi de 76 anos. Apresente um conjunto de classes que permita a apresentação de uma tabela de frequências.

- Pela regra de Sturges, $n = 85$, $k = [\log_2 85] + 1 = 7$, $h \approx \dfrac{76 - 21}{7} = 7,86$

$$]20, 28];]28, 36];]36, 44];]44, 52];]52, 60];]60, 68];]68, 76]$$

- se preferirmos classes com amplitude múltipla de 5, a solução mais próxima é

$$]20, 30];]30, 40];]40, 50];]50, 60];]60, 70];]70, 80]$$

Numa distribuição com dados agrupados em classes, chama-se **frequência absoluta da classe** ao número de dados que pertencem a essa classe e **frequência relativa** da classe ao quociente entre a frequência absoluta e a dimensão da amostra. A frequência absoluta acumulada e frequência relativa acumulada definem-se de modo análogo ao que foi feito na caso discreto.
Nalgumas situações, há necessidade de definir o valor central da classe, ou marca da classe.
Chama-se **marca da classe** $[a_i, a_{i+1}[$ ao valor x_i calculado do seguinte modo:

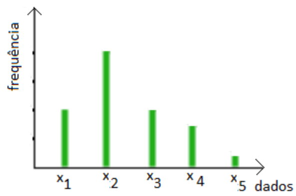
$$x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}.$$

Assim pode-se acrescentar à tabela anterior uma coluna onde figurem as marcas das classes.

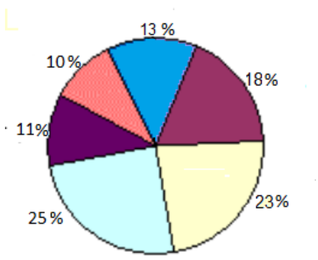
Tabela de frequências					
Classes	Marca da classe x'_i	freq. absoluta (n_i)	freq. relativa (f_i)	freq. absoluta acumulada (N_i)	freq. relativa acumulada (F_i)
$]a_1, a_2]$	$\frac{a_1+a_2}{2}$	n_1	f_1	N_1	F_1
$]a_2, a_3]$	$\frac{a_2+a_3}{2}$	n_2	f_2	N_2	F_2
...	...	...	...	...	...
$]a_k, a_{k+1}]$	$\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$	n_k	f_k	N_k	F_k

4.1.3 Representar e Interpretar Dados

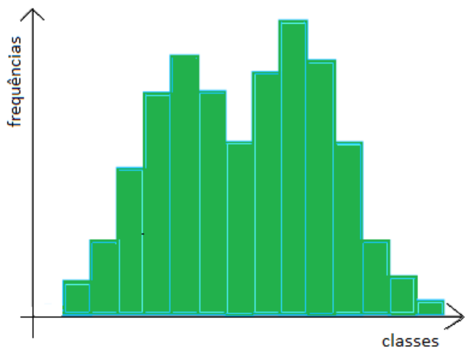
A par das tabelas de frequências, as representações gráficas constituem uma forma de tornar mais fácil a compreensão e interpretação dos dados. No caso discreto a representação mais adequada é o **diagrama de barras**, a qual consiste em marcar um sistema de eixos coordenados, considerar no eixo horizontal (eixo das abcissas) os valores da variável e, desses pontos, construir barras verticais separadas e de altura igual à frequência absoluta ou à frequência relativa correspondente a cada valor (que são apresentadas no eixo vertical).



Sectograma ou gráfico circular é um gráfico circular dividido em setores cuja área é proporcional à grandeza relativa das quantidades representadas. Este tipo de gráficos é indicado para representar a informação em termos percentuais e não são aconselhados para distribuições em que o número de dados diferentes é elevado.



No caso dos dados estarem agrupados em classes a sua representação gráfica é feita através de um **histograma**. Este tipo de gráfico é constituído por retângulos justapostos cujas bases são as classes colocadas no eixo horizontal e as alturas são as frequências absolutas ou relativas (colocadas no eixo vertical)..



Nota 4.1.1. *No caso em que as classes não têm todas a mesma amplitude, a altura de cada barra obtém-se dividindo o valor da respetiva frequência (absoluta ou relativa) pela amplitude da classe.*

4.1.4 Problemas

1. Para cada um dos seguintes casos, indique qual é a população:

   (a) Eleições para a Presidência da República.

   (b) Eleições para o Presidente do NAE (núcleo associativo de estudantes).

2. De entre os 3000 alunos de uma escola, selecionaram-se aleatoriamente 70 e inquiriram-se sobre o programa de televisão preferido. Os resultados obtidos foram os seguintes:

   telejornal:24; cinema:16; programas de entretenimento 30.

   Neste conjunto de dados, indique a população e a amostra.

3. Numa fábrica produziram-se 1000 queijos durante um dia. Para analisar a qualidade do queijo produzido, foram retirados aleatoriamente 10 queijos que foram provados. Neste estudo indique: o tamanho da população; o tamanho da amostra; a variável em estudo e classifique-a.

4. Numa amostra de 24 sacos de amêndoas, contou-se o número de amêndoas em cada saco e obteve-se o seguinte conjunto de dados:

   51, 46, 47, 52, 52, 53, 48, 53, 44, 53, 51, 51, 47, 48, 49, 48, 49, 47, 50, 52, 51, 51, 50, 50.

   Com os dados construa a tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

5. Um cientista estudou a altura, em *cm*, de 21 plantas 20 dias depois de terem sido semeadas. Os resultados foram os seguintes:

10, 12, 13, 15, 16, 18, 10, 11, 11, 12, 13, 18, 19, 16, 15, 10, 14, 13, 13, 16, 17.

(a) Construa a tabela de frequências absolutas e relativas simples e acumuladas.

(b) Faça uma representação gráfica dos dados.

6. Considere o seguinte conjunto de dados discretos relativos a mensagens SMS enviadas, a partir de um determinado telemóvel, durante 60 dias.

   8, 10, 12, 25, 32, 44, 83, 90, 91, 98, 12, 16, 23, 41, 53, 82, 91, 87, 55, 43, 13, 18, 27, 31, 42, 51, 63, 78, 82, 91, 9, 15, 17, 27, 35, 42, 44, 48, 53, 62, 73, 75, 82, 80, 84, 83, 67, 77, 91, 84, 10, 15, 60, 73, 92, 31, 42, 63, 57, 80.

   Construa a tabela de frequências absolutas e relativas simples e acumuladas.

7. Numa exposição de automóveis antigos podia ler-se a seguinte tabela relativa à idade dos carros.

Idade, em anos	frequência
$15 < x \leq 20$	5
$20 < x \leq 25$	15
$25 < x \leq 30$	20
$30 < x \leq 35$	20
$35 < x \leq 40$	8

   Através de um histograma, represente os dados da tabela.

8. Construa um gráfico de barras de acordo com os dados obtidos através de um inquérito a 12 jovens sobre o seu sabor do iogurte preferido. Os registos foram:

   Morango, Banana, Maça, Morango, Banana, Kiwi, Maça, Morango, Kiwi, Maça, Maça, Banana.

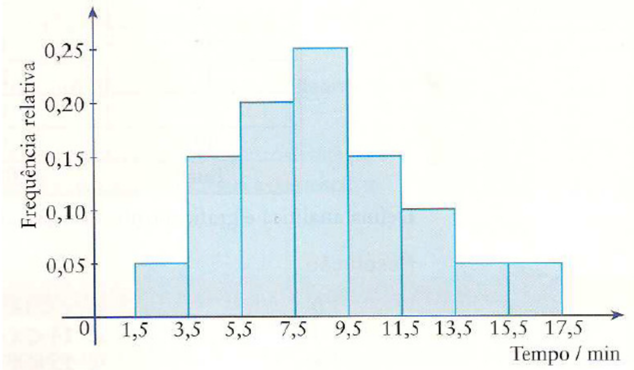
9. O histograma representado na figura abaixo mostra o tempo gasto por 100 estudantes na resolução de um problema

   (a) Construa a tabela de frequências.

   (b) Quantos estudantes demoraram pelo menos 5,5 minutos a resolver o problema?

   (c) Quantos estudantes demoraram 9,5 minutos ou mais a resolver o problema?

10. As classificações obtidas por um determinado n^{o} de estudantes num exame foram as seguintes:



Idade, em anos	frequência
$]10, 20]$	20
$]20, 30]$	20
$]30, 40]$	22
$]40, 50]$	24
$]50, 60]$	14
$]60, 70]$	16
$]70, 80]$	20

Construa a tabela de frequências e construa o histograma respectivo.

11. Pediu-se a alguns alunos da ESTGA para indicarem o tempo gasto no percurso para a escola, num determinado dia. Os dados recolhidos, em minutos, foram os seguintes:

    3, 12, 7, 18, 4, 14, 20, 28, 17, 14, 24, 15, 10, 23, 8, 11, 50, 22, 19, 25, 45, 45, 16, 18, 21, 27, 46, 37, 30, 40, 15, 13, 32, 37, 45, 49, 51, 55, 25, 10, 23, 27, 48, 45, 25, 20, 15,36, 46, 32, 27, 50.

    Elabore a tabela de frequências agrupando os dados e trace o seu histograma.

4.2 Medidas de Localização e de Dispersão

Uma das formas mais usuais de resumir os dados relativos a uma variável consiste no cálculo de alguns valores numéricos que, por si só, dão uma indicação sugestiva da ordem de grandeza dos mesmos e revelam alguns aspectos do seu comportamento, permitindo, eventualmente, a comparação com outras variáveis. Este é o papel desempenhado pelas medidas de localização: a moda, a média e a mediana. Contudo as medidas de localização não são suficientes para caraterizar uma distribuição. Assim, para avaliar o grau de variabilidade ou dispersão dos dado usam-se as medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio padrão. Estas medidas proporcionam um melhor conhecimento do fenómeno em estudo permitindo fazer comparações entre fenómenos da mesma natureza.

A estas medidas normalmente chamam-se **estatísticas**. As estatísticas são grandezas que podem ser relativas a uma amostra ou a uma população, havendo apenas algumas diferenças não significativas para o âmbito deste texto. Contudo, sempre que as estatísticas se referem a dados amostrais, as estatísticas dizem-se estatísticas amostrais, por exemplo média amostral, etc. Caso contrário, se as estatísticas se referem a uma população, dizem-se estatísticas populacionais. No entanto ao longo deste texto sempre que nada seja mencionado em contrário, quando aparecer a palavra estatísticas refere-se a estatísticas amostrais.

4.2.1 Medidas de Localização

As medidas de localização mais usadas são a média aritmética, a mediana e a moda.

Dados discretos

Dado um conjunto de n observações, a **média aritmética** de uma estatística é denotada por $\overline{x}$ e calcula-se através de

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

No caso dos dados se repetirem ou seja, tiverem frequência absoluta superior a um pode-se aplicar a fórmula

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n},$$

onde k é o número de valores diferentes que aparecem na amostra e n_i é a frequência absoluta do dado x_i.

A **mediana** é o valor que se encontra exatamente no meio das observações depois de estes estarem ordenadas. Metade das observações são menores ou iguais à mediana e outra metade iguais ou superiores à mediana, isto é, a mediana é o valor que corresponde à frequência relativa acumulada de 50%. É habitual designar a mediana de um conjunto de observações como sendo obtida por:

- $m_e = x_{\frac{n+1}{2}}$, se n é ímpar;
- $m_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, se n é par.

A **moda** é a observação que ocorre com maior frequência sendo usual designa-se por m_o. Quando nenhum valor se repete diz-se que os dados são **amodais**. Se a maior frequência corresponder a duas observações então os dados dizem-se **bimodais**. Quando existem três ou mais modas os dados dizem-se **polimodais**.

As estatísticas de ordem, também designadas por medidas de localização ou de tendência não central, são os quartis, decis e percentis, excetuando a mediana que coincide com o segundo quartil, o quinto decil e o quinquagésimo percentil.

Os quartis são as estatísticas que dividem as observações em quatro partes iguais. O primeiro quartil, Q_1, e o terceiro quartil, Q_3, acumulam até si 25% e 75% das observações, respetivamente. Existem várias sugestões para o cálculo dos quartis, no entanto, a forma mais intuitiva é considerar a observação cuja frequência relativa acumulada iguala ou excede a percentagem corresponde ao quartil. Cada software adota uma metodologia e, caso se pretenda saber exatamente a metodologia adotada, deve-se investigar qual a abordagem implementada em cada caso. No entanto, as metodologias não diferem muito em termos dos resultados finais.

Outras estatísticas de ordem muito usadas são os decis e os percentis, caso se opte por dividir a distribuição em 10 ou 100 partes.

Dados agrupados em classes

Para calcular a média aritmética a partir dos dados agrupados procede-se de modo análogo ao caso discreto tomando a marca da classe como representante de todos os valores pertencentes à classe. Assim

$$\overline{x} = \frac{n_1 x'_1 + n_2 x'_2 + \cdots + n_k x'_k}{n},$$

onde k é o número de classes, n_i é a frequência absoluta da classe $]a_i; a_{i+1}]$, x'_i é a marca dessa classe e n o número total de dados.

Ao calcular a média desta forma não se obtém o valor exato da média, mas sim um valor aproximado. O valor exato poderá ser calculado considerando todos os dados originais antes de serem agrupados, no caso de estarem acessíveis.

A classe modal é a classe que tem maior frequência absoluta.

A classe mediana é a classe onde a frequência relativa acumulada atinge a percentagem de 50%.

Limitações das medidas de localização

O conhecimento apropriado das propriedades das medidas de localização ou medidas de tendência central é fundamental para a descrição, interpretação e análise dos dados em pesquisa. No entanto não há uma regra geral que determine qual a medida de localização mais apropriada para descrever uma determinada distribuição. Apresenta-se, em seguida, um resumo das caraterísticas e limitações de cada uma das medidas.

De um modo geral pode-se afirmar:

- A **média** é usada quando:
  - se pretende obter a medida de posição que possui maior estabilidade;
  - há necessidade de um tratamento algébrico.
- **Vantagens e desvantagens da média**
  - O seu valor nem sempre faz parte da série de dados;
  - É a medida mais familiar e mais correntemente utilizada, sendo também a mais eficiente quando se trata de inferir sobre uma população a partir de dados recolhidos apenas para uma amostra;
  - Poderá ser influenciada pela existência de valores extremos ou erros, principalmente quando a dimensão da amostra é reduzida, aliás, a média é influenciada por todos os valores observados, qualquer alteração num deles produz alterações no valor da média, podendo portanto, nalguns casos, fornecer uma imagem distorcida dos dados;
  - É útil quando se quer comparar valores de duas ou mais amostras;
  - É válida apenas para variáveis quantitativas;
  - Quando os dados são homogéneos a média é a melhor medida descritiva de localização;
  - É uma medida estável.
- A **mediana** é usada quando:
  - se pretende obter um ponto que divide a distribuição em partes iguais;
  - há valores extremos que afetam de uma maneira acentuada a média.
- **Vantagens e desvantagens da mediana**
  - Não depende de todos os dados;
  - É determinada pelo número de observações e não pelo seu valor. Deste modo, os valores extremos, quer sejam grandes ou pequenos, não afectam a mediana;
  - Não é influenciada pelos valores extremos;
  - É uniformizadora dos dados,não levando em consideração os valores extremos;
  - É uma boa medida descritiva quando existem valores extremos;
  - Divide os dados em duas partes iguais, deixando 50% dos dados de cada lado;
  - É válida apenas para variáveis quantitativas;

- É difícil de determinar para uma grande quantidade de dados;
- Requer que os dados estejam ordenados.

- A **moda** é usada quando:
  - se pretende obter uma medida rápida;
  - a medida que se pretende for o valor mais típico da distribuição.

- **Vantagens e desvantagens da moda**
  - É fácil de determinar, mas, em geral, é menos utilizada do que a média e a mediana;
  - Não depende de todos os dados e nem da sua ordenação;
  - Não é influenciada por valores extremos;
  - É válida quer para variáveis qualitativas como para quantitativas;
  - A moda poderá não ter significado, especialmente em dados de natureza contínua ou em dados discretos com poucas observações repetidas.
  - Pode existir mais do que uma moda ou não existir nenhuma.

4.2.2 Medidas de Dispersão

Anteriormente foi referido que as medidas de localização não são suficientes para caraterizar uma distribuição. Assim, para avaliar o grau de variabilidade ou dispersão dos valores de uma distribuição, usam-se as medidas de dispersão. Como a medida de localização mais utilizada é a média, será em função dela que se define a principal medida de dispersão, o desvio padrão. No entanto, no que se segue, abordar-se-ão outras: amplitude da amostra, variância e desvio padrão.

A **amplitude da amostra** é a diferença entre o seu valor máximo,x_M, e o seu valor mínimo, x_m:

$$R = x_M - x_m.$$

A **variância** é uma medida que permite avaliar o grau de dispersão dos valores da variável em relação à média, representa-se por s^2 e calcula-se do seguinte modo:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

A expressão que aqui se apresenta é a variância corrigida e poderá assumir outro aspeto caso se recorra às frequências absolutas dos k valores distintos da variável em estudo. Assim

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2.$$

Note-se que a variância tem uma natureza quadrática, pelo que é dada no quadrado das unidades das observações, isto é, se as observações forem medições em metros, m, a variância é dada em m^2. Contudo não é a variância que se utiliza como medida de variabilidade, mas sim o desvio padrão.

O **desvio padrão** é a raiz quadrada da variância. Desta forma, é mais fácil interpretar o desvio padrão uma vez que este é dado nas unidades das observações,

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2}.$$

O desvio padrão indica a proximidade dos dados em relação à média. Em termos mais concretos, um pequeno valor do desvio padrão significa que as observações estão "pouco espalhadas à volta da média", isto é, estão mais concentradas em torno da média. Portanto, o desvio padrão amostral informa sobre a dispersão dos valores observados relativamente à sua média. Quanto maior for a dispersão maior é o desvio padrão. Se não existir dispersão, ou seja, se os valores forem todos iguais, então o desvio padrão é nulo.

Exemplo 4.2.1. Considere os dados da tabela seguinte.

Apresentam-se as medidas de localzação e as de dispersão mais frequentes.

x_i	n_i	$f_i = \frac{n_i}{n}(\%)$	N_i	$F_i(\%)$
5	3	14,3	3	14,3
6	2	9,5	5	23,8
7	2	9,5	7	33,3
8	3	14,3	10	47,6
9	2	9,5	12	57,1
10	3	14,3	16	71,4
11	6	28,6	21	100

$m_o = 11$; $m_e = 9$; $Q_1 = 7$; $Q_3 = 11$

Amplitude $R = 6$
$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \times n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 8\cdot 3 + 9\cdot 2 + 10\cdot 3 + 11\cdot 6}{21} = 8,52$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \times n_i$$

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{20}\left[(5-8,52)^2 \cdot 3 + (6-8,52)^2 \cdot 2 + (7-8,52)^2 \cdot 2 + (8-8,52)^2 \cdot 3 + \right. \\
&\quad \left. +(9-8,52)^2 \cdot 2 + (10-8,52)^2 \cdot 3 + (11-8,52)^2 \cdot 6\right] \\
&= 4,962 \\
s &= \sqrt{4,962} = 2,228
\end{aligned}$$

Naturalmente que o cálculo do desvio padrão e da variância depende se os dados estão agrupados ou não. No caso dos dados estarem agrupados procede- se de modo análogo ao caso dos dados não agrupados só que, no lugar de x_i coloca-se a marca da classe de ordem i, x'_i.

Nem sempre faz sentido calcularem-se algumas das estatísticas que vimos anteriormente para todas as variáveis ou atributos. Por exemplo, estudando o género não faz sentido calcular a média ou a mediana, bem como, qualquer uma das otras medidas de dispersão.

Exemplo 4.2.2. Considere os dados da tabela seguinte . Determine as medidas de localização e as de dispersão

Tabela de frequências					
Classe	x'_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$]20,30]$	25	16	18,8%	16	18,8%
$]30,40]$	35	22	25,9%	38	44,7%
$]40,50]$	45	20	23,5%	58	68,2%
$]50,60]$	55	12	14,1%	70	82,4%
$]60,70]$	65	10	11,8%	80	94,1%
$]70,80]$	75	5	5,9%	85	100,0%

Classe mediana=$]40,50]$

Classe modal=$]30,40]$

Média amostral $\overline{x}_a = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x'_i \times n_i = \sum_{i=1}^{k} x'_i f_i$

$$\overline{x}_a = \frac{25 \cdot 16 + 35 \cdot 20 + 45 \cdot 22 + 55 \cdot 12 + 65 \cdot 10 + 75 \cdot 5}{85} = 44,18$$

Variância $s_a^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i' - \overline{x}_a)^2 \times n_i$

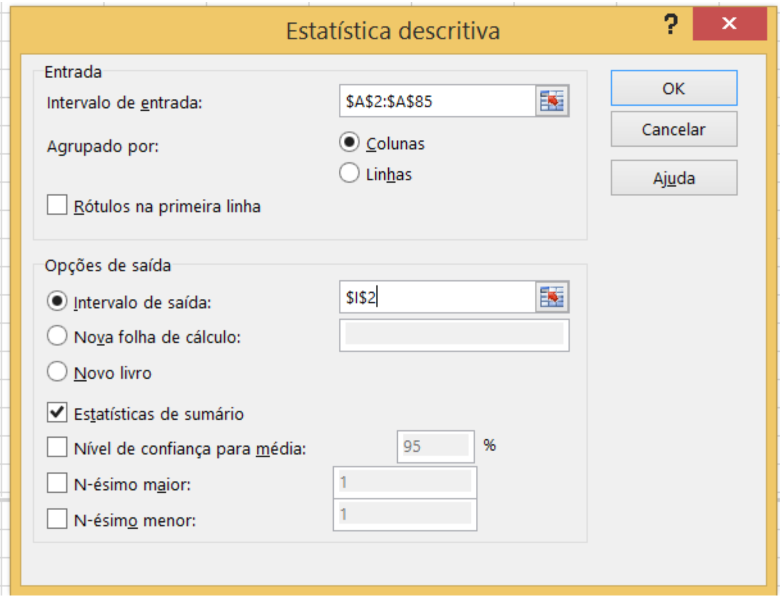
$$\begin{aligned} s_a^2 &= \frac{1}{84}[(25-44,18)^2\cdot 16 + (35-44,18)^2\cdot 22 + (45-44,18)^2\cdot 20 + \\ &\quad +(55-44,18)^2\cdot 12 + (65-44,18)^2\cdot 10 + (75-44,18)^2\cdot 5] \\ &= 23,256 \\ s_a &= \sqrt{23,256} = 4,82 \end{aligned}$$

4.2.3 Algumas Funções no Excel

- Inserir função

Função	Descrição	Fórmula
CONTAR.SE	Calcula o número de células num intervalo que correspondem aos critérios determinados	"CONTAR.SE(intervalo de dados;critério) CONTAR.SE(A1:A50;>a) Determina o número de dados que se encontram de A1 a A50 e que são maiores do que a"
DESVPAD.S	Calcula o desvio-padrão com base numa amostra	"DESVPAD.S(número1;número2;...) Calcula o desvio padrão a partir de um amostra."
MÁXIMO	Devolve o valor máximo numa lista de argumentos	"MÁXIMO(número1; número2; ...) MÁXIMO(A1:A20) Devolve o valor máximo no intervalo de A1 a A20"
MED	Devolve a mediana dos números indicados	"MED(número1; número2; ...) MED(A2:A20) Mediana dos 19 números do intervalo de A2 a A20"
MÉDIA	Devolve a média de um conjunto de valores	"MÉDIA(intervalo dos dados) MÉDIA(A1:A50) devolve a média dos valores que estão no intervalo A1:A50"
MENOR	Devolve o enésimo menor valor de um conjunto de dados	"MENOR(matriz; k) MENOR(A1:B10;2) Devolve o segundo menor valor do conjunto de dados e, por exemplo, MAIOR(A1:B10;5) devolve o quinto maior valor do mesmo conjunto de dados"
MÍNIMO	Devolve o valor mínimo numa lista de argumentos	"MÍNIMO(número1; número2; ...) MÍNIMO(A1:A20) Devolve o valor mínimo no intervalo de A1 a A20"
VAR.S	Calcula a variância com base numa amostra	"VAR.S(número1;número2;...) VAR.S(A1:A20) Devolve a variância da amostra constituída pelo conjunto de dados indicados".

- Dados/Análise de Dados/Estatística descritiva



Coluna1	
Média	0,239048
Erro-padrã	0,02259
Mediana	0,185
Moda	0,08
Desvio-pad	0,207037
Variância d	0,042864
Curtose	0,34739
Assimetria	0,973153
Intervalo	0,82
Mínimo	0
Máximo	0,82
Soma	20,08
Contagem	84

4.2.4 Problemas

1. Num estudo de mercado sobre a audiência de jornais diários e semanários foram inquiridos 680 leitores, no sentido de apurar se os vários jornais detêm idênticas quotas de mercado. Obtiveram-se os seguintes resultados:

jornais	nº de leitores
público	190
correio da manhã	140
sol	70
expresso	90
diário de notícias	130
diário económico	60

   (a) Represente os resultados anteriores numa tabela de frequências.

   (b) Calcule a medida de localização que achar mais adequada.

2. Calcule as medidas de localização e de dispersão relativas aos dados apresentados nos problemas 4-11 da subsecção 4.1.4.

Capítulo 5

Erros: Valores aproximados e Tipos de Erros

Desde a interpretação de um fenómeno até à obtenção de uma solução que se ajuste à realidade, utilizam-se sucessivos processos aos quais poderão estar associados diversos tipos de erros.

No que se segue faz-se referência a alguns tipos de erros mais usuais que intervêm no processo de cálculo.

5.1 Erros: Origem e Manipulação

A solução obtida por um processo numérico difere, frequentemente, da solução exata. Apresentam-se alguns tipos de erros que ocasionam tal diferença:

- erros nos dados;
- erros de truncatura;
- erros de arredondamento.

5.1.1 Tipo de Erros

Erros nos Dados

Frequentemente os dados necessários são obtidos através de medidas experimentais. Este tipo de erros resultam da incerteza existente nas medições de grandezas físicas.

Erros de Truncatura

Para perceber este tipo de erros, basta recordar que um algoritmo numérico se carateriza por um número finito de operações e que a solução exata de muitos problemas matemáticos não pode ser obtida por um número finito de operações aritméticas. Assim, este tipo de erros ocorre quando se substitui um processo infinito de cálculo por um outro processo que envolve um número finito de operações aritméticas.

Erros de arredondamento

Muitas quantidades que aparecem na formulação de problemas matemáticos são valores reais que não podem ser representados por um número finito de dígitos - é o caso das dízimas infinitas periódicas ou não periódicas. Por outro lado, mesmo quando os dados admitem uma representação exata envolvendo um número finito de dígitos no sistema decimal, a sua representação no sistema binário pode não ser possível com um número finito de dígitos - 0 e 1, como foi referido no Capítulo 1. Mesmo que o dispositivo possa representar todos os dados, uma simples divisão aritmética pode fazer surgir, no processo de cálculo, quantidades que não admitem representação exata. A solução para estes problemas é, como se sabe, arredondar as quantidades - sejam elas dados de entrada ou resultados intermédios do processo de cálculo - aparecendo deste modo os erros de arredondamento. O efeito do arredondamento pode ser significativo nalguns problemas como iremos ter oportunidade de o constatar posteriormente.

Quando se pretende arredondar uma quantidade Q_n de n dígitos para a representar aproximadamente por uma quantidade Q_k de k dígitos ($k < n$) a regra geral é sempre obter a quantidade representável Q_k mais próxima da quantidade Q_n. Em cálculos de "papel e lápis ", são usuais as seguintes regras:

- Se a parte de Q_n a suprimir é inferior a meia unidade da ordem da última casa a conservar em Q_k, esta mantém o seu valor;

- Se a parte a suprimir de Q_n é superior ou igual a meia unidade da ordem da última casa a conservar em Q_k , soma-se uma unidade a tal ordem decimal;

Se não se fazem os cálculos de "papel e lápis,"e se recorre a uma calculadora ou a um computador, muito mais há a dizer sobre erros de arredondamento.

Qualquer um deste erros pode ser expresso em termos de erro absoluto ou erro relativo. No que se segue apresentam-se estes conceitos.

5.1.2 Valores aproximados e erros

Nos exemplos que se seguem pretende-se chamar a atenção para o papel dos erros durante os cálculos.

Exemplos 5.1.1.

1. Considere-se a equação
$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = 0$$
cujas soluções são $x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$. No caso de se usar dízimas arredondadas com 6 casas decimais obtém-se a equação
$$x^2 - 0,333333x + 0,027778 = 0$$
que não tem raízes reais! Verifica-se que uma pequena variação nos coeficientes da equação originou uma grande (enorme!) variação na solução.

2. Considere-se o sistema
$$\begin{cases} \frac{1}{20}x + \frac{1}{21}y &= \frac{41}{420} \\ \frac{1}{21}x + \frac{1}{22}y &= \frac{43}{462} \end{cases},$$
cuja solução exata obtém-se para $x = y = 1$.

   Ao usar valores aproximados, com 4 casas decimais, para os coeficientes o sistema resultante é
$$\begin{cases} 0,050x + 0,0476y &= 0,0976 \\ 0,0476x + 0,0454y &= 0,0931 \end{cases},$$
   Para este sistema a solução obtém-se para $x = -0,1226415\cdots$ e $y = 2,1792452\cdots$.

Definição 5.1.1. *Seja $\overline{x}$ um valor aproximado de x. Chama-se* ***erro absoluto*** *de $\overline{x}$ a $\Delta\overline{x} = |x - \overline{x}|$. Seja x um número real qualquer e $\delta > 0$. Chama-se valor aproximado de x com erro absoluto inferior a δ a todo o número real $\overline{x}$ tal que $|x - \overline{x}| \leq \delta$.*

Normalmente não se sabe se uma dada grandeza é aproximada por defeito ou por excesso. Sabendo um majorante para erro absoluto, δ, fica-se a saber que o valor exato se encontra no intervalo $[\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$. Muitas vezes, por abuso de linguagem, refere-se erro absoluto no sentido de majorante do erro absoluto.

Por outro lado o erro absoluto não indica se o valor obtido (para a medição, por exemplo) é satisfatório. Por exemplo, um erro absoluto de 50cm tem significado diferente se o valor medido for 5m ou 1km - neste caso a segunda medição tem melhor qualidade do que a primeira. Tal conclusão é possível porque se comparou o erro absoluto com o valor da grandeza medida.

5. Erros

$x = \pi$

$\bar{x}$ = valor aproximado de x

$\bar{x} = 3,14$

Erro absoluto: $\Delta \bar{x} = |x - \bar{x}|$

$x = 2,13$
$\bar{x} = 2,1$

$$\Delta \bar{x} = |2,13 - 2,1| = 0,03$$

$$\Delta \bar{x} \leq \underbrace{\delta_{\bar{x}}}_{\text{majorante do erro absoluto}} \longrightarrow x \in [\bar{x} - \delta_{\bar{x}}, \bar{x} + \delta_{\bar{x}}]$$

$\bar{x} = 1,23 \implies x \in [1,22; 1,24]$

$\delta \leq 0,01$

ex

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in [1,10; 1,14] \\ \bar{x} = 1,12 \\ \delta_{\bar{x}} = 0,02 \end{array}}$$

1m
5cm de erro absoluto $\longrightarrow r_{\bar{x}} = \dfrac{5}{100} = 0,05$

1Km
5cm de erro absoluto $\longrightarrow r_{\bar{x}} = \dfrac{5}{100000} = 0,0005$

Erro relativo

$$r_{\bar{x}} = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{\Delta \bar{x}}{|x|}$$

Como calcular um majorante para o erro relativo, conhecendo um majorante para o erro absoluto:

$\delta_{\bar{x}} \longrightarrow$ maj. do erro absoluto

maj. p/ o erro relativo $\leftarrow$ $\boxed{\rho_{\bar{x}} = \dfrac{\delta_{\bar{x}}}{|\bar{x}| - \delta_{\bar{x}}}}$

ex

$$\rho_{\bar{x}} = \frac{0{,}02}{1{,}12 - 0{,}02} \simeq 0{,}018$$

Definição 5.1.2. *Seja $\overline{x}$ um valor aproximado de um número real de $x \neq 0$. Chama-se* ***erro relativo*** *de $\overline{x}$ a $r_{\overline{x}} = \dfrac{|x-\overline{x}|}{|x|}$. Ao produto $100\, r_{\overline{x}}$, expresso em percentagem, chama-se percentagem de erro.*

Observe-se que o erro relativo é adimensional, enquanto que o erro absoluto tem a dimensão da grandeza a que se refere.

Desconhecendo o erro absoluto não é possível conhecer o erro relativo. Contudo, sabendo um majorante para o erro absoluto, é possível obter um majorante ou limite superior para o erro relativo.

Atendendo às definições de erro absoluto e erro relativo obtém-se a relação

$$r_{\overline{x}} = \frac{\Delta_{\overline{x}}}{|x|} \leq \frac{\delta_{\overline{x}}}{|x|}.$$

Como

$$|\overline{x}| - \delta_{\overline{x}} \leq |x| \leq |\overline{x}| + \delta_{\overline{x}}$$

vem

$$r_{\overline{x}} \leq \frac{\delta_{\overline{x}}}{|\overline{x}| - \delta_{\overline{x}}}, \text{ com } |\overline{x}| - \delta_{\overline{x}} > 0$$

a qual permite calcular um majorante,

$$\varrho_{\overline{x}} = \frac{\delta_{\overline{x}}}{|\overline{x}| - \delta_{\overline{x}}}$$

para o erro relativo a partir do conhecimento de um majorante, $\delta_{\overline{x}}$, para o erro absoluto.

Exemplo 5.1.1. Sejam $x = 0,833333\cdots$, $y = 0,0083333\cdots$, $\overline{x} = 0,8333$ e $\overline{y} = 0,0083$. Embora $\Delta\overline{x} = \Delta\overline{y} = 0,000033\cdots$, facilmente se conclui que $\overline{x}$ representa um valor "mais"preciso do que $\overline{y}$. Escolhendo um majorante para o erro absoluto, por exemplo $\delta_{\overline{x}} = \delta_{\overline{y}} = 0,000034$ vem

$$\varrho_{\overline{x}} = \frac{\delta_{\overline{x}}}{|\overline{x}| - \delta_{\overline{x}}} = \frac{0,000034}{0,833966} \approx 4,08 \times 10^{-5}$$

e

$$\varrho_{\overline{y}} = \frac{\delta_{\overline{y}}}{|\overline{y}| - \delta_{\overline{y}}} = \frac{0,000034}{0,008266} \approx 0,004113.$$

para o erro relativo.

Arredondamento correto a d casas decimais

Seja x um número real que, no caso geral, tem uma representação decimal infinita. Diz-se que $\overline{x}$ foi corretamente arredondado para se obter um n^{o}d de casas decimais corretas, que se denota por $\overline{x} = x(d)$, se $|x - \overline{x}| \leq 0.5 \times 10^{-d}$.

Arredondamento correto a d casas decimais

$$\boxed{\delta_{\bar{x}} \leqslant 0{,}5 \times 10^{-d}}$$

$x = 7{,}25813$

$\boxed{d=3}$ $\bar{x} = 7{,}258 \rightsquigarrow 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0005$

$|\Delta x| = 0{,}00013$

$\boxed{d=2}$ $\bar{x} = 7{,}26 \rightsquigarrow 0{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}005$

$|\Delta x| = 0{,}00187$

$\bar{x} = 1{,}23$

$\delta_{\bar{x}} \leqslant 0{,}005$

$x = 1{,}231$

$1{,}232$

Exemplo 5.1.2. Considerando $x = 1.41421356...$ diz-se que $\overline{x} = 1.41421$ tem 5 casas decimais corretas visto que $|x - \overline{x}| < 0.357 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-5}$.

5.2 Problemas

1. Escreva aproximações com 3 casas decimais corretas para os números π, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\pi}$, 16^{-2} e e^3.

2. Suponha que $\overline{x} = 0,937$ tem 3 casas decimais corretas relativamente ao seu valor x. Determine um majorante para o erro relativo de x.

√ 3. Complete:

   (a) Se $x \in [2,57; 2,61]$ então $\overline{x} =$ 2,59 é uma aproximação de x.

   (b) Se $x \in [2,57; 2,61]$ um majorante do erro relativo de $\overline{x}$ é 0,00778 $\simeq$.

$$\left\{ \rho_{\overline{x}} = \frac{0,02}{|2,59| - 0,02} \right.$$

√ 4. Sobre o valor x temos a seguinte informação: $x \in [1,00; 1,01]$.

   (a) Determine uma aproximação $\overline{x}$ de x de forma a minimizar o erro absoluto.

$$\left\{ \frac{1 + 1,01}{2} = 1,005 \right.$$

   (b) Calcule um majorante para o erro relativo de $\overline{x}$.

$$\delta_{\overline{x}} = 1 - 1,005 = 0,005$$

$$\rho_{\overline{x}} = \frac{0,005}{1,005 - 0,005} = 0,005$$

$x \in [a, b]$

$$\overline{x} = \frac{a+b}{2}$$

2 $\bar{x} = 0{,}937$ (3 casas decimais corretas)

$$\delta_{\bar{x}} = 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0005$$

$$\rho_{\bar{x}} = \frac{0{,}005}{|0{,}937| - 0{,}0005} = \frac{0{,}0005}{0{,}9365} \simeq 0{,}000534$$

Anexo

- **Soluções Capítulo 1**

  Exercícios 1.1.1.

  1. $(10111000)_2$ $(270)_8$ $(B8)_{16}$

  2. $(45)_{10}$ $(25)_{10}$ $(279)_{10}$ $(6671)_{10}$

  Exercícios 1.2.1.

  1. $(156,6328125)_{10}$

  2. $(102,125)_{10}$

  3. $(102001)_3$

  4. $(44314,00214)_5$

  Problemas

  1. $(11010)_2$

  2. $(100101)_2$

  3. a) $(49)_{10}$ **b)** $(469)_{10}$ **c)** $(174911)_{10}$

  4. a) $(51)_8$ **b)** $(107)_8$

  5. a) $(12)_{16}$ **b)** $(AB)_{16}$

  6. a) $(0,1)_2$ **b)** $(10,010011...)_2$

  7. a) $(0,765625)_{10}$ **b)** $(0,9921875)_{10}$

  8. a) F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V

  9. Sim

  10. A

  11. a) 1100 **b)** 1100 **c)** 10000 **d)** 10010 **e)** 1000011 **f)** 101100 **g)** 1010010

12. **a)** 110010 **b)** 1101101 **c)** 10101 **d)** 11001 **e)** 1110 **f)** 1111 **g)** 1001110

13. **a)** 10010 **b)** 1111000 **c)** 10000010 **d)** 1100010 **e)** $1011,1$ **f)** $100,01...$ **g)** 110 **h)** 11

- **Soluções Capítulo 3**

  Problemas

  3.1.2 Problemas

  3.3.2 Problemas

  3.4.4 Problemas

- **Soluções Capítulo 4**

  Problemas

  4.1.4 Problemas

  1. **a)** **b)**

  2.

  3.

  4.

  5. **a)** **b)**

  6.

  7.

  8.

  9. **a)** **b)** **c)**

  10.

  11.

  4.2.4 Problemas

  1. **a)** **b)**

  2.

- **Soluções Capítulo 5 5.2 Problemas**

  1. $\pi \approx 3,142,$ $\frac{1}{3} \approx 0,333,$ $\frac{1}{\pi} \approx 0,318,$ $16^{-2} \approx 0,004$ $e^3 \approx 20,086$

2. $r_{\overline{x}} \leq 0,534 \times 10^{-3}$

3. a) $\overline{x} = 2,59,$ **b)** $r_{\overline{x}} \leq 0,78v \times 10^{-2}$

4. a) $\overline{x} = 1,005,$ **b)** $r_{\overline{x}} \leq 0,5 \times 10^{-2}$

Bibliografia

[1] Scheinerman, E.R. (2003). Matemática discreta : uma introdução, Pioneira

[2] Pinto, P. (2015). Introdução à análise estatística, V1 e V2, Sílabas & Desafios.

[3] Carvalho, A. (2015). Exercícios de Excel Para Estatística, FCA- Editora de Informática, Lda.

[4] Pina, H. (2010). Métodos numéricos, Escolar Editora.

[5] Sá, A. A., Brás, C., Perdigão, C., Soares, M.C., Rodrigues, F., Cabral, I., Lourenço, L., Jesus, M.M., Rodrigues, P., (2011). Introdução ao Cálculo, Escolar Editora.