universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

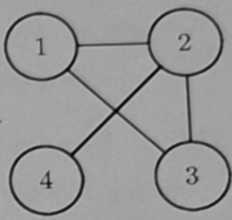
**Métodos Quantitativos para a Informática** - CTeSP em Redes e Sistemas de Informação

10/01/2025 Teste 2 Duração: 90 min

**NOME:**____________ **N.MEC.:**______ **CURSO:**______

**Apresente e justifique os cálculos que efetuar**

1. [20*pt*] Considere o diagrama ao lado, que representa a ligação entre servidores 1, 2, 3 e 4 numa rede de sistemas de informação. Cada ligação direta indica que há troca de dados entre os servidores. Suponha que a matriz $R = [r_{ij}]$, associada a esta rede, seja definida da seguinte forma:




$$r_{ij} = \begin{cases} 2i + j & \text{, se o servidor } i \text{ está ligado diretamente ao servidor } j \\ 0 & \text{, se } i = j \text{ ou se o servidor } i \text{ não está ligado diretamente ao servidor } j \end{cases}.$$

Construa a matriz $R$ associada à rede e verifique se $R$ é uma matriz simétrica.

2. [35*pt*]Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule, se possível, $A^T B$.

   (b) Determine a matriz $X$ tal que $(X + 2C)^T = I_3 + C$.

3. [40*pt*] Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + z = 3 - 2y \\ -2x + 4 = z + 5y \\ -3z + 3x = -7 - 8y \end{cases}$

   (a) Escreva o sistema na forma matricial.

   (b) Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss.

4. [15*pt*] Uma equipa de engenheiros informáticos está a desenvolver um sistema que utiliza três tipos de componentes: Tipo I, Tipo II e Tipo III. Cada um destes componentes contém três elementos fundamentais: Processador (P), Memória (M) e Armazenamento (A), necessários para o funcionamento do sistema. A tabela abaixo mostra as quantidades de cada elemento presentes em cada tipo de componente:

| Componente | P | M | A |
|---|---|---|---|
| Tipo I | 2 | 1 | 3 |
| Tipo II | 1 | 3 | 2 |
| Tipo III | 4 | 2 | 5 |

O sistema exige diariamente 27 unidades de Processador, 26 unidades de Memória e 39 unidades de Armazenameto. Apresente o sistema que lhe permite calcular o número de unidades de cada tipo de componente que deve ser utilizada, por dia, para cumprir as suas necessidades.

5. [30*pt*] Durante o desenvolvimento de um projeto de software foram registados o número de linhas de código adicionadas por 40 programadores em diferentes dias de trabalho. Os dados da amostra recolhida encontram-se no ficheiro *teste2.xls*.

   (a) No mesmo ficheiro complete a tabela de frequências.

   (b) Determine a média e o desvio padrão da amostra do número de linhas de código adicionadas. Apresente os valores arredondados às décimas.

   (c) Qual a percentagem de programadores que acrescentou no máximo 25 linhas?

6. [60*pt*]Uma empresa de cibersegurança registou os tempos de resposta (em milissegundos) de um sistema de defesa contra ataques DDoS ao longo de 150 incidentes. Os tempos de resposta medidos encontram-se no ficheiro *teste2.xls*.

   (a) No mesmo ficheiro, agrupe os dados em classes usando a regra de Sturges e elabore uma tabela de frequências absolutas e relativas.

   (b) Construa um histograma para a amostra usando as frequências absolutas.

   (c) Utilizando as funções do excel que achar conveniente, obtenha a informação necessária para completar as seguintes afirmações:

      i. O tempo de resposta do sistema de defesa entre varia entre ________ e ________, sendo a amplitude dos valores da amostra ________.

      ii. O tempo médio de resposta é ________, sendo o mais frequente ________.

      iii. O tempo máximo de resposta que pertence ao grupo dos 50% mais rápidos é ________ .

      iv. A variância e o desvio padrão amostral são respetivamente,________ e ________.

      v. A percentagem de tempos inferiores a 140 milissegundos é de ________.

1

$$\underset{4\times 4}{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \qquad r_{ij} = \begin{cases} 2i+j, & \text{se } i \text{ ligado ao } j \\ 0, & \text{se } i=j \text{ ou } i \text{ não ligado ao } j \end{cases}$$

R é simétrica se é igual à sua transposta

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R não é simétrica, pois $R \neq R^T$.

2

a) $$\underbrace{\underset{3\times 2}{A^T} \times \underset{2\times 3}{B}}_{\checkmark} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -6 \\ -9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

produto possível

$p_{11} = 1\times(-1) + (-2)\times 1 = -1-2 = -3$

$p_{12} = 1(2) + (-2)\times 0 = 2$

$p_{13} = 1(3) + (-2)\times 1 = 3-2 = 1$

$p_{21} = -2\times(-1) + 0\times 1 = 2$

$p_{22} = (-2)2 + 0\times 0 = -4$

$p_{23} = (-2)3 + 0\times 1 = -6$

$p_{31} = 4(-1) + (-5)1 = -4-5 = -9$

$p_{32} = 4\times 2 + (-5)\times 0 = 8$

$p_{33} = 4\times 3 + (-5)\times 1 = 12-5 = 7$

b) $(X+2C)^T = I_3 + C \Leftrightarrow X + 2C = (I_3+C)^T \Leftrightarrow X = (I_3+C)^T - 2C$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$(I_3+C)^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2C = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(I_3+C)^T - 2C = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 7 \\ 2 & 0 & 9 \\ -5 & -15 & -1 \end{bmatrix} = X$$

3)

$$\begin{cases} x+z=3-2y \\ -2x+4=z+5y \\ -3z+3x=-7-8y \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -2x-5y-z=-4 \\ 3x+8y-3z=-7 \end{cases}$$

a) Forma matricial (completa):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

→ minúsculas

ou trocar o sinal da 2ª linha.

b) Forma ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2+2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$-5+2(2)$ / $-1+2(1)$ / $-4+2(3)$

$8-3(2)$, $-3-3(1)$, $-7-3(3)$

$-6+2(1)$, $-16+2(2)$

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -y+z=2 \\ -4z=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{———} \\ -y+3=2 \\ z=3 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{———} \\ -y=-1 \\ \text{———} \end{cases} \iff \begin{cases} x+2(1)+3=3 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3-5 \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

$C.S. = \{(-2, 1, 3)\}$ Sistema possível e determinado.

4)

$x$ = nº de unidades do componente do tipo I, por dia

$y$ = " " " " " " tipo II, " "

$z$ = " " " " " " tipo III, " "

$$\begin{cases} 2x+y+4z=27 \\ x+3y+2z=26 \\ 3x+2y+5z=39 \end{cases}$$