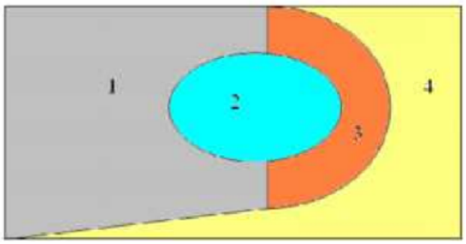
universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

Métodos Quantitativos para a Informática

Ficha de trabalho - Matrizes e Sistemas

1. Uma secção de um pavilhão de exposições está dividida em 4 stands de acordo com a figura seguinte.



   (a) Construa a matriz A com os elementos

   $$a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{, caso o stand } i \text{ seja vizinho do stand } j \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

   (b) Calcule A^T.

2. Construa a matriz A com os elementos $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{, se } i<j \\ 0 & \text{, se } i=j \\ j+2i & \text{, se } i>j \end{cases}$, para $i, j = 1, \cdots, 4$.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine, se possível,

   (a) $A+B$
   (b) $A+B^T$
   (c) $3A^T-B$
   (d) $2B^T+4A$
   (e) AB
   (f) BA
   (g) AC
   (h) BC
   (i) D^2
   (j) $BA-2D$
   (k) D^T-2BA
   (l) $(AB)^T+3D$

4. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que,

   (a) $5A-X=B$
   (b) $3X+5(C-2A)=A-X$
   (c) $5(C+X)-4(X+C)=A$

5. Considere as matrizes $D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule D^T-E+2I_3
   (b) Determine a matriz X tal que $(D+\frac{1}{2}X)^T+E-I_3=\mathbf{0}$

6. Considere a matriz A tal que $A=[a_{ij}]$ para $a_{ij}=i^2-j$ e $i=1,2,3$ e $j=1,2$.

   (a) Calcule todos os elementos da matriz A e apresente-a.
   (b) Determine a matriz $X=AA^T-3\mathbf{I}_3$.

7. Considere as matrizes A e B definidas por: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$ tal que $b_{ij} = 3^i - 2j$.

   (a) Construa a matriz B.

   (b) Calcule a matriz $A\,B^T$.

8. Classifique cada uma das afirmações seguintes como verdadeira ou falsa e justifique a sua resposta.

   V (a) Se A e AB são matrizes do tipo 4×5, então B é uma matriz quadrada.

   V (b) Sejam $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 3}$, $C_{2\times 1}$ e $D_{3\times 2}$ quatro matrizes. Usando a multiplicação de matrizes é possível obter uma matriz coluna.

   F (c) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ satisfaz $A^2 = 12A$.

9. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x = 2 - y \\ -5x = 2y + 2 \end{cases}$.

   (a) Escreva a matriz ampliada do sistema.

   (b) Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss.

10. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 7z - 13 = y \\ 3x - y + 8z = 16 \end{cases}$

    (a) Escreva o sistema na forma matricial.

    (b) Resolva o sistema pelo método da condensação.

11. Resolva, pelo método de eliminação de Gauss, os seguintes sistemas de equações lineares.

    (a) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -y - z = 1 \\ -2x + y + z = 3 \\ 3x + 3z = -4 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 3z = -1 \\ 2x + 3y + z = 4 \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} x + z = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$

    (e) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 4y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

    (f) $\begin{cases} x - y + z - u = 2 \\ 2x - 2y - z + 2u = -2 \\ -x + 2y + 2z - u = 0 \end{cases}$

12. Um parque tem três pistas para caminhada, P1, P2 e P3, sendo que a pista P2 tem o dobro do comprimento da pista P1. No sábado, a Ana deu duas voltas na pista P1, uma volta na pista P2 e 4 voltas na pista P3, tendo caminhado um total de 7260 metros. No mesmo dia, o João deu uma volta à pista P1, duas voltas na pista P2 e quatro voltas na pista P3, tendo caminhado um total de 8340 metros.

    Escreva um sistema de equações lineares que lhe permita determinar o comprimento de cada pista. Identifique claramente o significado de cada uma das variáveis que utilizar.

13. O Sr. Alfredo é dono de uma empresa de distribuição de 3 tipos de peixe: bacalhau, robalo e salmão e para as suas entregas dispõe de uma frota de carrinhas da marca Opel, Fiat e Mercedes com diferentes capacidades. O número de caixas de cada tipo de peixe que cada carrinha pode levar encontra-se na tabela abaixo:

	Bacalhau	Robalo	Salmão
Opel	5	2	6
Fiat	7	5	2
Mercedes	8	3	7

    Apresente o sistema ue lhe permite calcular o número de veículos de cada tipo que são necessários para o Sr. Alfredo transportar exatamente 54 caixas de bacalhau, 23 caixas de robalo e 48 caixas de salmão.

14. Um psicólogo para estudar os efeitos da nutrição sobre o comportamento de cobaias de laboratório está a alimentar um grupo com uma combinação de 3 alimentos: I, II, e III. Cada um destes alimentos contém três aditivos A, B, e C que estão a ser usados no estudo. Na tabela que se segue apresentam-se as quantidades, em gramas, de cada aditivo nos diferentes tipos de alimentos.

	Tipo I	Tipo II	Tipo III
Aditivo A	1	3	6
Aditivo B	0	4	5
Aditivo C	2	2	12

    Se a dieta exigir $53g$ por dia de A, $45g$ por dia de B e $86g$ por dia de C, determine o número de doses por dia de cada alimento que deve ser usado.

① a) $A_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 0$

$a_{12} = 1+2 = 3$

$a_{13} = 1+3 = 4$

$a_{14} = 1+4 = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

② $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 & , i<j \\ 0 & , i=j \quad , \text{para } i = 1, \dots, 4 \\ j+2i & , i>j \end{cases}$$

$a_{4\times2} = 2 + 2\times4 = 10$

$\hookrightarrow i>j$

③ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) $\underset{3\times2}{A} + \underset{2\times3}{B} \Longrightarrow$ Não é possível, são de tipos diferentes

b) $\underset{3\times2}{A} + \underset{3\times2}{B^T}$ ✓ é possível (mesmo tipo)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $\underset{2\times3}{3A^T} - \underset{2\times3}{B}$

é possível

$$3\times A^T = 3\times\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 4 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\ -6 & 12 & -9\end{bmatrix}$$

$$3A^T - B = \begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\ -6 & 12 & -9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & 5 & 0\\ -10 & 11 & -15\end{bmatrix}$$

d) $2B^T + 4A$

é possível

$$2B^T = 2\times\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & 1\\ 3 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 2\\ 6 & 12\end{bmatrix}$$

$$4A = 4\times\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & -8\\ 8 & 16\\ 4 & -12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 2 & 2\\ 6 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}12 & -8\\ 8 & 16\\ 4 & -12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 0\\ 10 & 18\\ 10 & 0\end{bmatrix}$$

e) $AB =$

3×2 2×3

é possível

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-14 & 1 & -3\\ 12 & 6 & 30\\ -14 & -2 & -15\end{bmatrix}$$

$p_{11} = 3\times(-2) + (-2)\times4 = -6-8 = -14$

$p_{12} = 3\times1 + (-2)\times1 = 3-2 = 1$

$p_{13} = 3\times3 + (-2)\times6 = 9-12 = -3$

$p_{21} = 2\times(-2) + 4\times4 = -4+16 = 12$

$p_{22} = 2\times1 + 4\times1 = 2+4 = 6$

$p_{23} = 2\times3 + 4\times6 = 6+24 = 30$

$p_{31} = 1\times(-2) + (-3)\times4 = -2-12 = -14$

$p_{32} = 1\times1 + (-3)\times1 = 1-3 = -2$

$p_{33} = 1\times3 + (-3)\times6 = 3-18 = -15$

f) $BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}$

$\underbrace{2\times 3 \quad 3\times 2}_{\text{é possível}}$

$p_{11} = -2\times 3 + 1\times 2 + 3\times 1 = -6+2+3 = -1$

$p_{12} = -2\times(-2) + 1\times 4 + 3\times(-3) = 4+4-9 = -1$

$p_{21} = 4\times 3 + 1\times 2 + 6\times 1 = 12+2+6 = 20$

$p_{22} = 4\times(-2) + 1\times 4 + 6\times(-3) = -8+4-18 = -22$

g) AC Não é possível

$3\times 2 \quad 3\times 1$

$2 \neq 3$

h) $BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\underbrace{2\times 3 \quad 3\times 1}_{\text{é possível}}$

$p_{11} = -2\times(-2) + 1\times 0 + 3\times 1 = 4+3 = 7$ (1ª linha)

$p_{21} = 4\times(-2) + 1\times 0 + 6\times 1 = -8+6 = -2$ (2ª linha)

i) $\underbrace{D^2}_{2\times 2} = D\times D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$2\times 2 \quad 2\times 2$ ✓

$p_{11} = 3\times 3 + 4\times 1 = 9+4 = 13$

$p_{12} = 3\times 4 + 4\times 2 = 12+8 = 20$

(1ª linha)

$p_{21} = 1\times 3 + 2\times 1 = 3+2 = 5$

$p_{22} = 1\times 4 + 2\times 2 = 4+4 = 8$

(2ª linha)

j) $\underbrace{BA}_{2\times2} - \underbrace{2D}_{2\times2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 18 & -26 \end{bmatrix}$

✓ é possível

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix} \qquad 2 \times D = 2 \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA - 2D = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 18 & -26 \end{bmatrix}$$

k) $\underbrace{D^T}_{2\times2} - \underbrace{2BA}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 40 & -44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -36 & 46 \end{bmatrix}$

✓ é possível

$$D^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2 \times BA = 2 \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 40 & -44 \end{bmatrix}$$

$$D^T - 2BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 40 & -44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -36 & 46 \end{bmatrix}$$

l) $\underbrace{(AB)^T}_{3\times3} + \underbrace{3D}_{2\times2} \rightsquigarrow$ não é possível

X

4

a) $5A - X = B \Leftrightarrow 5A - B = X \Leftrightarrow X = 5A - B$

$$5A = 5 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$5A - B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 15 & 5 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 15 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

b) $3X + 5(C - 2A) = A - X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3X + 5C - 10A = A - X \Leftrightarrow 3X + X = A + 10A - 5C \Leftrightarrow 4X = 11A - 5C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \frac{11}{4}A - \frac{5}{4}C \Leftrightarrow X = \frac{1}{4}(11A - 5C)$

$$11 \times A = 11 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 0 \\ 33 & 11 & 22 \end{bmatrix}$$

$$5C = 5 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}(11A - 5C) = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 11 & 22 & 0 \\ 33 & 11 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 22 & -10 \\ 33 & 6 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{33}{4} & \frac{3}{2} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

c) $5(C + X) - 4(X + C) = A \Leftrightarrow 5C + 5X - 4X - 4C = A \Leftrightarrow X + C = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = A - C$

$$A - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TPC ✓ Fazer até ao 8

5

a) $\underset{3\times3}{D^T} - \underset{3\times3}{E} + \underset{3\times3}{2I_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

(é possível)

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $\left(D + \frac{1}{2}X\right)^T + E - I_3 = 0 \Leftrightarrow \left(D + \frac{1}{2}X\right)^T = I_3 - E \Leftrightarrow D + \frac{1}{2}X = (I_3 - E)^T \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}X = (I_3 - E)^T - D \Leftrightarrow X = 2\left[(I_3 - E)^T - D\right]$$

$$2 \times \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^T - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 2 \times \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2 \times \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 2 \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -12 \\ -2 & 0 & -10 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

6

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

a_{ij} $j \to 1,2$; $i \to 1,2,3$

$a_{11} = i^2 - j = 1^2 - 1 = 0$

$a_{21} = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_{31} = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$a_{12} = 1^2 - 2 = -1$

$a_{22} = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$a_{32} = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

b) $\underbrace{\underset{3\times 2}{A}\,\underset{2\times 3}{A^T}}_{\checkmark \text{ possível}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 13 & 38 \\ -7 & 38 & 113 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 0\times 0 + (-1)\times(-1) = 1$

$a_{12} = 0\times 3 + (-1)\times 2 = -2$

$a_{13} = 0\times 8 + (-1)\times 7 = -7$

$a_{21} = 3\times 0 + 2\times(-1) = -2$

$a_{22} = 3\times 3 + 2\times 2 = 9+4 = 13$

$a_{23} = 3\times 8 + 2\times 7 = 24+14 = 38$

$a_{31} = 8\times 0 + 7\times(-1) = -7$

$a_{32} = 8\times 3 + 7\times 2 = 24+14 = 38$

$a_{33} = 8\times 8 + 7\times 7 = 64+49 = 113$

$3\times I_3 = 3\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$X = AA^T - 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 13 & 38 \\ -7 & 38 & 113 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 7 \\ -2 & 10 & 38 \\ -7 & 38 & 110 \end{bmatrix}$

7 a)

$\boxed{2\times 3}$

$b_{11} = 3^i - 2j = 3^1 - 2(1) = 1$

$b_{12} = 3^1 - 2(2) = 3-4 = -1$

$b_{21} = 3^2 - 2(1) = 9-2 = 7$

$b_{22} = 3^2 - 2(2) = 9-4 = 5$

$b_{13} = 3^1 - 2(3) = 3-6 = -3$

$b_{23} = 3^2 - 2(3) = 9-6 = 3$

$\underset{2\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\underbrace{\underset{3\times 3}{A}\,\underset{3\times 2}{B^T}}_{\checkmark \text{ possível}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 25 \\ 13 & 25 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}$

$m_{11} = 3\times 1 + (-1)(-1) + 3\times 3 = 3+1+9 = 13$

$m_{12} = 3\times 7 + (-1)\times 5 + 3\times 3 = 21-5+9 = 25$

$m_{21} = 0\times 1 + 2\times(-1) + 5\times 3 = -2+15 = 13$

$m_{22} = 0\times 7 + 2\times 5 + 5\times 3 = 10+15 = 25$

$$m_{31} = 1\times 1 + (-5)\times(-1) + 4\times 3 = 1+5+12 = 18$$

$$m_{32} = 1\times 7 + (-5)\times 5 + 4\times 3 = 7-25+12 = -6$$

8

a) $\underset{4\times 5}{A} \times \underset{5\times 5}{B}$ $\rightarrow$ $\underset{4\times 5}{AB}$

B é matriz quadrada, V
de ordem 5, $n=5$
$(n\times n)$

b) $\underset{2\times 3}{A} \times \underset{3\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{AB} \times \underset{3\times 2}{D} = \underset{2\times 2}{ABD} \times \underset{2\times 1}{C} = \underset{2\times 1}{ABDC}$ } Matriz coluna: V

c) $$\underset{2\times 2}{A^2} = \underset{2\times 2}{A} \times \underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8 & -4-8 \\ -8-16 & 8+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$12A = 12 \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -24 \\ -48 & 48 \end{bmatrix}$$

Como $A^2 \neq 12A$, a afirmação é falsa.

9

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x = 2 - y \\ -5x = 2y + 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ -5x - 2y = 2 \end{cases}$$

a) Matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\updownarrow L_1 \longleftrightarrow L_2$

b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+5L_1]{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$-1-2(1)$
$1-2(0)$
$1-2(2)$

$-2+5(1)$
$0+5(0)$
$2+5(2)$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -3y+z=-3 \\ z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -3y+9=-3 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y=\dfrac{-3-9}{-3} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4 \\ y=4 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \\ z=9 \end{cases}$$

$$C.S=\{(-2,4,9)\}$$

$car(A)=3$
$car([A|B])=3$
$n=3$

Sistema possível e determinado

$car(A)=car([A\|B])=n$	S.P.D
$car(A)=car([A\|B])<n$	S.P.I
$car(A)<car([A\|B])$	S.I

10
$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+7z-13=y \\ 3x-y+8z=16 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x-y+7z=13 \\ 3x-y+8z=16 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Forma matricial

b) Matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 13 \\ 3 & -1 & 8 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right]$$

$-1-2(-1)$
$7-2(2)$
$13-2(2)$

$-1-3(-1)$
$8-3(2)$
$16-3(2)$

$2-2(3)$
$10-2(9)$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y + 3z = 9 \\ -4z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y + 3(2) = 9 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y = 9 - 6 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + 2(2) = 2 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad C.S = \{(1, 3, 2)\}$$

Problemas e Sistemas

(12)

$x \rightsquigarrow$ comprimento da pista P1
$y \rightsquigarrow$ " " " P2
$z \rightsquigarrow$ " " " P3

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + y + 4z = 7260 \\ x + 2y + 4z = 8340 \end{cases}$$

(13)

$x \rightsquigarrow$ nº de carrinhas da marca Opel
$y \rightsquigarrow$ nº " " " " Fiat
$z \rightsquigarrow$ " " " " " Mercedes

$$\begin{cases} 5x + 7y + 8z = 54 \\ 2x + 5y + 3z = 23 \\ 6x + 2y + 7z = 48 \end{cases}$$

(14)

$x \rightsquigarrow$ nº de doses por dia do alimento I
$y \rightsquigarrow$ " " " " " " " II
$z \rightsquigarrow$ " " " " " " " III

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 53 \\ 4y + 5z = 45 \\ 2x + 2y + 12z = 86 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Matriz ampliada}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 53 \\ 0 & 4 & 5 & 45 \\ 2 & 2 & 12 & 86 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{\substack{2-2(1) \\ 2-2(3) \\ 12-2(6) \\ 86-2(53)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 6 & 53 \\ 0 & 4 & 5 & 45 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{0+5 \\ -20+45}]{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 6 & 53 \\ 0 & 4 & 5 & 45 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 53 \\ 4y + 5z = 45 \\ 5z = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 4y + 5(5) = 45 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 4y = 45 - 25 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y = 5 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(5) + 6(5) = 53 \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 53 - 15 - 30 \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \\ z = 5 \end{cases} \qquad C.S = \{(8,5,5)\}$$

R: Devem ser usadas 8 doses do alimento do tipo I, 5 do tipo II e 5 do tipo III.