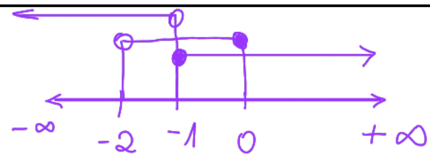
Métodos Quantitativos para Informática

Ficha de trabalho - Conjuntos, Funções e Sucessões

1. Considere $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 0\}$.

   Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{A} \cap B$ e $B \setminus A$.



$A \cup B = [-1, +\infty[\cup]-2, 0] =]-2, +\infty[$

$A \cap B = [-1, 0]$ $\quad \bar{A} =]-\infty, -1[$

$\bar{A} \cap B =]-\infty, -1[\cap]-2, 0] =]-2, -1[$

$B \setminus A =]-2, 0] \setminus [-1, +\infty[=]-2, -1[$ $\quad B \setminus A = B \cap \bar{A}$

2. Considere $A =]0, 3]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$.

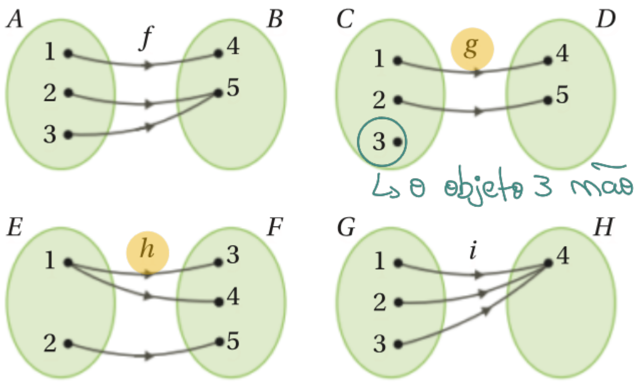
   Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B} \cap A$, $B \setminus A$ e $\overline{A \cup B}$.

3. Considere os conjuntos: $A =]-4, 3]$, $B =]-\infty, 1]$; $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x \geq 5\}$ e $E = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \leq 6\}$.

   Determine:

   (a) D;
   (b) E;
   (c) $\overline{A}$;
   (d) $A \cap B$;
   (e) $A \cup B$;
   (f) $\overline{A \cap C}$;
   (g) $\overline{A \cup C}$;
   (h) $B \cup \overline{C}$;
   (i) $\overline{B} \cap \overline{C}$;
   (j) $B \cup C$;
   (k) $A \cap D$;
   (l) $C \cup E$;
   (m) $A - B$;
   (n) $C \setminus A$
   (o) $A \setminus \overline{B}$

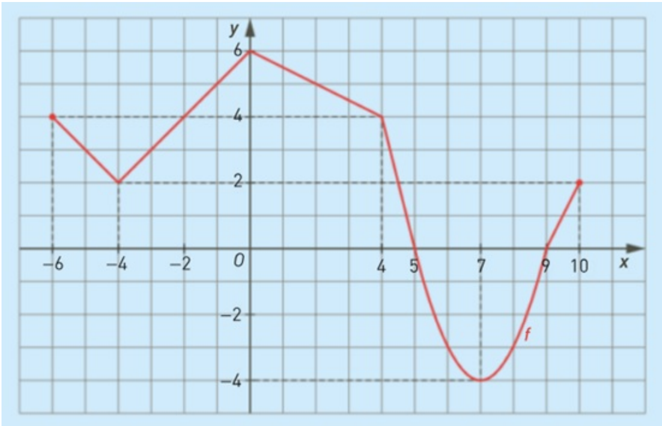
4. Quais das correspondências seguintes não representam funções? Justifique.



↳ o objeto 3 não tem imagem. correspondência.

O objeto 1 tem mais do que uma imagem. (o 1 corresponde a dois elementos de F)

✓ 5. Considere o gráfico da função f representado na figura seguinte:



(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

$D_f = [-6, 10]$ $D'_f = [-4, 6]$

(b) Determine os zeros de f.

5 e 9

(c) Indique os intervalos de monotonia de f.

crescente: $[-4, 0]$ e $[7, 10]$ // decrescente: $[-6, -4]$ e $[0, 7]$

(d) Indique os máximos e mínimos relativos da função e os respetivos maximizantes e minimizantes.

4, 6, 2 ← ↳ 2 e −4

↳ −6, 0, 10 ↳ −4 e 7

(e) Determine $f(0)$.

$= 6$

(f) Indique um intervalo onde f seja uma função injetiva.

$[0, 4]$

(g) Indique o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:

↳ vê-se no eixo dos xx

i. A função é limitada. V

ii. A função é injetiva. F

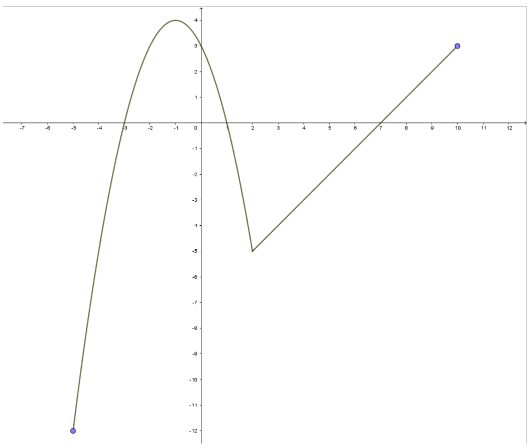
iii. A função tem mínimo absoluto. V → −4

iv. A função é par. F

objetos simétricos têm que ter a mesma imagem, simetria em relação ao eixo dos yy

v. A imagem de -4 é igual à imagem de 10. V → 2

✓ 6. Considere o gráfico da função f representado na figura seguinte:



(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

$D_f = [-5, 10]$ $D'_f = [-12, 4]$

(b) Determine os zeros de f.

−3, 1, 7

(c) Indique os intervalos de monotonia de f.

crescente: $[-5, -1]$ e $[2, 10]$ // decrescente: $[-1, 2]$

(d) Indique os máximos e mínimos relativos da função e os respetivos maximizantes e minimizantes.

4 e 3 ← ↳ −12 e −5

−1 e 10 ← ↳ −5 e 2

(e) Indique o máximo e mínimo absolutos da função, caso existam.

↳ 4 ↳ −12

(f) Determine $f(0)$.

= 3

(g) Classifique f quanto à injetividade. Justifique.

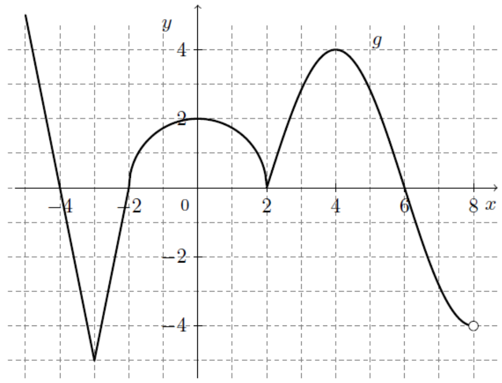
Não é injetiva (há vários objetos com a mesma imagem, ex: −3, 1, 7)

(h) Determine o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$.

⇕

$x \in \,]-3, 1[\, \cup \,]7, 10]$

7. Considere o gráfico da função f representado na figura seguinte:



(a) Determine o domínio e o contradomínio de g.

$D_g =]-\infty, 8[\quad D'_g = [-5, +\infty[$

(b) Determine $g(4)$.

↳ 4

(c) Indique os intervalos de monotonia de g.

(d) Indique os máximos e mínimos relativos da função e os respetivos maximizantes e minimizantes.

(e) Classifique g quanto à injetividade. Justifique.

Não é injetiva (há vários objetos com a mesma imagem, ex: -4,-2,2,6).

(f) Determine os zeros de f.

$-4, -2, 2, 6$

(g) Indique o máximo e mínimo absolutos da função, caso existam.

↳ 5 ↳ -5

(h) Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \leq 0$.

↳ $x \in [-4,-2] \cup [6, 8[\cup \{2\}$

8. Considere as sucessões de termos gerais $a_n = 3n + 1$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $c_n = \frac{2n-1}{n}$.

(a) Determine a_1, b_2 e c_3.

(b) Determine o termo de ordem 10 da sucessão c_n.

(c) Verifique se 37 é termo da sucessão a_n e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

9. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+1}{3}$.

(a) Determine o termo de ordem 10 da sucessão u_n. $\frac{2(10)+1}{3} = \frac{20+1}{3} = \frac{21}{3} = 7$

(b) Verifique se 37 é termo da sucessão u_n e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

$\frac{2n+1}{3} = 37 \Leftrightarrow 37 \times 3 = 2n+1 \Leftrightarrow 111-1 = 2n \Leftrightarrow n = \frac{110}{2} \Leftrightarrow n = 55$

10. Calcule os quatro primeiros termos das seguintes sucessões definidas por recorrência:

(a) $u_n = 3u_{n-1} + 1$, $u_1 = 2$;

(b) $v_n = nv_{n-1} - 2v_{n-2}$, $v_1 = 5$ e $v_2 = 3$.

11. Determine $u_5 - u_4$, sendo $u_n = (n+1)u_{n-2} + u_{n-1}$, $u_1 = 1$ e $u_2 = 4$.

12. Determine a relação de recorrência para as seguintes sucessões:

Não chegava lá sozinha sem a prof.

+3 +6 +12

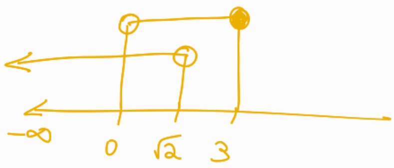
(a) 2, 5, 11, 23, 47, $\cdots$ $\quad u_n = 2u_{n-1} + 1$

(b) 2, 3, 7, 13, 27, 53, $\cdots$ $\quad u_3 = 2u_1 + u_2$

$u_4 = 2u_2 + u_3$

$\boxed{u_1 = 2 \; / \; u_2 = 3 \qquad u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}}$

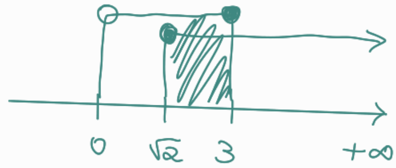
(2) $A =]0,3]$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\} =]-\infty, \sqrt{2}[$



$A \cup B =]-\infty, 3]$ $\quad \bar{A} =]-\infty, 0] \cup]3, +\infty[$

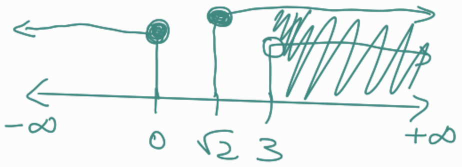
$A \cap B =]0, \sqrt{2}[$ $\quad \bar{B} \cap A = [\sqrt{2}, +\infty[\cap]0,3] =$

$= [\sqrt{2}, 3]$



$B \setminus A =]-\infty, 0]$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \left(]-\infty,0] \cup]3,+\infty[\right) \cap [\sqrt{2}, +\infty[=]3, +\infty[$



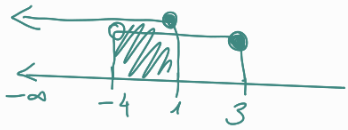
(3) $A =]-4, 3]$ $\quad B =]-\infty, 1]$ $\quad C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x \geq 5\} =]-\infty, -2[\cup [5, +\infty[$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \leq 6\} = [-1, +\infty[\cap]-\infty, 6] = [-1, 6]$

c) $\bar{A} =]-\infty, -4] \cup]3, +\infty[$

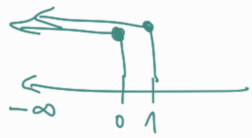
d) $A \cap B =]-4, 1]$



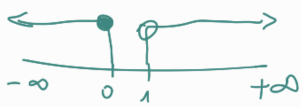
e) $A \cup B =]-\infty, 3]$

f) $\overline{A \cap C} = \bar{A} \cup \bar{C} = \left(]-\infty,-4] \cup]3,+\infty[\right) \cup]-\infty, 0] =]-\infty, 0] \cup]3, +\infty[$

g) $\overline{A \cup C} = \bar{A} \cap \bar{C} =]-\infty, -4]$

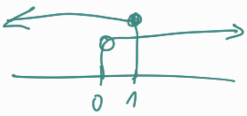


h) $B \cup \bar{C} =]-\infty, 1] \cup]-\infty, 0] =]-\infty, 1]$



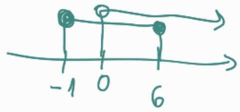
i) $\bar{B} \cap \bar{C} =]1, +\infty[\cap]-\infty, 0] = \emptyset$

j) $B \cup C =]-\infty, 1] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$



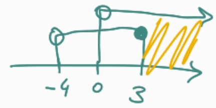
k) $A \cap D =]-4, 3] \cap \left(]-\infty, -2[\cup [5, +\infty[\right) =]-4, -2[$

l) $C \cup E =]0,+\infty[\cup [-1,6] = [-1,+\infty[$

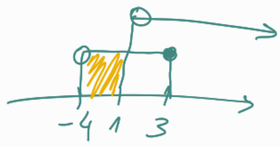


m) $A - B = \underbrace{A \setminus B}_{A\cap\overline{B}} =]-4,3] \setminus]-\infty,1] =]1,3]$

n) $C \setminus A =]0,+\infty[\setminus]-4,3] =]3,+\infty[$



o) $A \setminus \overline{B} =]-4,3] \setminus]1,+\infty[=]-4,1]$



7 c) g é crescente em: $[-3,0]$ e $[2,4]$

g é decrescente em: $]-\infty,-3]$, $[0,2]$ e $[4,8[$

d) Máximos relativos de g: 2, 4 Maximizantes: 0, 4

Mínimos relativos de g: -5, 0 Minimizantes: -3, 2

10 4 1.os termos

a) $u_n = 3u_{n-1} + 1 \ / \ u_1 = 2$

$u_2 = 3u_1 + 1 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$

$u_3 = 3u_2 + 1 = 3(7) + 1 = 21 + 1 = 22$

$u_4 = 3u_3 + 1 = 3(22) + 1 = 66 + 1 = 67$

b) $v_n = n v_{n-1} - 2v_{n-2} \ / \ v_1 = 5, \ v_2 = 3$

$v_3 = 3v_2 - 2v_1 = 3\times 3 - 2\times 5 = 9 - 10 = -1$

$v_4 = 4v_3 - 2v_2 = 4(-1) - 2\times 3 = -4 - 6 = -10$

11) $u_n = (n+1)\,u_{n-2} + u_{n-1} \;/\; u_1 = 1 \;,\; u_2 = 4$

$u_5 = (5+1)u_3 + u_4 = 6 \times 8 + 28 = 48 + 28 = 76$

$u_3 = (3+1)u_1 + u_2 = 4 \times 1 + 4 = 4 + 4 = 8$

$u_4 = (4+1)u_2 + u_3 = 5 \times 4 + 8 = 20 + 8 = 28$

$\triangleright\; u_5 - u_4 = 76 - 28 = 48$

8) $a_n = 3n + 1 \;//\; b_n = \frac{(-1)^n}{n} \;//\; c_n = \frac{2n-1}{n}$

a) $a_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$

$b_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$

$c_3 = \frac{2(3)-1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3} = 1,(6)$

b) $c_{10} = \frac{2(10)-1}{10} = \frac{20-1}{10} = \frac{19}{10} = 1,9$

c) $a_n = 37 \Leftrightarrow 3n + 1 = 37 \Leftrightarrow 3n = 37 - 1 \Leftrightarrow n = \frac{36}{3} \Leftrightarrow n = 12$

Sim, 37 é o termo de ordem 12 da sucessão a_n.