Bases: representações numéricas e operações aritméticas

Ano letivo 2025/2026

universidade de aveiro estga escola superior de tecnologia e gestão de águeda

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Bases: representações numéricas e operações aritméticas

Tópicos deste capítulo:

- Representação de números em diferentes bases
- Operações aritméticas no sistema binário

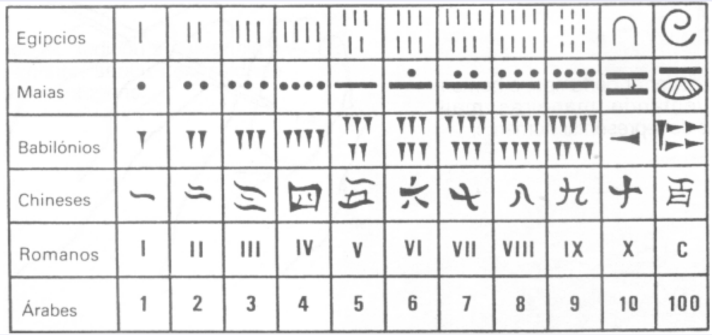
No final do capítulo o estudante:

- realiza conversões entre bases binária, octal, decimal e hexadecimal
- efetua operações aritméticas na base binária

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Sistemas de numeração

- Conjunto de símbolos (base) e regras de organização utilizados para representar uma quantidade;
- Historicamente os sistemas de numeração foram evoluindo de acordo com a cultura e necessidades das civilizações.



Sistema de numeração decimal

A representação de um número inteiro na base decimal (base 10) consiste num conjunto de algarismos, em que cada um possui um valor que depende da respetiva posição na representação.

Exemplo

$$1325 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1$$

$$1325 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Um número na base 10 *é representado pela soma de várias potências de* 10 *com coeficientes inteiros que variam de* 0 *a* 9.

$d_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \rightarrow$ dígito decimal colocado na posição $i+1$

$$(d_{n-1} \ldots d_1 d_0)_{10} = d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0$$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Exemplos de sistemas de numeração

- **Sistema decimal (base 10)** $\rightarrow$ Sistema mais utilizado pelos seres humanos
  - Base: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
  - Ex.: $(2580)_{10}$
- **Sistema binário (base 2)** $\rightarrow$ Sistema mais frequente no mundo da computação
  - Base: $0, 1$
  - Ex.: $(101000010100)_2$
- **Sistema octal (base 8)** $\rightarrow$ Alternativa ao sistema binário utilizado na programação
  - Base: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
  - Ex.: $(5024)_8$
- **Sistema hexadecimal (base 16)** $\rightarrow$ Sistema utilizado na programação de microprocessadores
  - Base: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$
  - Ex.: $(A14)_{16}$

Nota

A representação de um número natural numa base b é única.

Mudança da Base $b, b \neq 10 \Rightarrow$ Base 10

soma de potências

Um número inteiro positivo cuja representação na base b seja $(d_{n-1} \ldots d_1 d_0)_b$, terá a representação decimal obtida através da expressão

$$(d_{n-1} \ldots d_1 d_0)_b = d_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0$$

Exemplo

$$(101101)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (45)_{10}$$
$$(271)_8 = 2 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 1 \times 8^0 = (185)_{10}$$
$$(B1D)_{16} = 11 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = (2845)_{10}$$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Conhecida a representação decimal de um número inteiro k, para obter a sua representação numa base b, $b \neq 10$, teremos de determinar os dígitos $d_{n-1}, \ldots, d_1, d_0$, tais que $k = d_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0$. Para tal:

- Divide-se k por b obtendo o quociente q_0 e o resto d_0;
- Divide-se o quociente, q_0, obtido na divisão anterior, por b, obtendo o quociente q_1 e o resto d_1;
- d_2 será o resto da divisão de q_1 por b;
- O processo continua de forma análoga para os restantes dígitos e termina quando o quociente é zero, sendo d_{n-1} o resto da última divisão.

Exemplo

$(90)_{10} = (156)_7$

90 | 7
6 12 | 7
5 1 | 7
1 0

$(177130)_{10} = (2B3EA)_{16}$.

177130 | 16
10 11070 | 16
(A) 14 691 | 16
(E) 3 43 | 16
11 2 | 16
(B) 2 0

Exercícios

1. Determine a representação decimal dos seguintes números: $(110101)_2$; $(122)_3$; $(524)_8$; $(2BF4)_{16}$.
2. Obtenha a representação do número $(263)_{10}$ nas seguintes bases: 2, 8, 16.
3. Apresente a representação do número $(315)_6$ na base 5.

Soluções:

1. $(110101)_2 = (53)_{10}$; $(122)_3 = (17)_{10}$; $(524)_8 = (340)_{10}$; $(2BF4)_{16} = (11252)_{10}$
2. $(263)_{10} = (100000111)_2 = (407)_8 = (107)_{16}$
3. $(315)_6 = (434)_5$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
octal	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
binária	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Figura: Representação hexadecimal, octal e binária dos números inteiros de 0 a 15

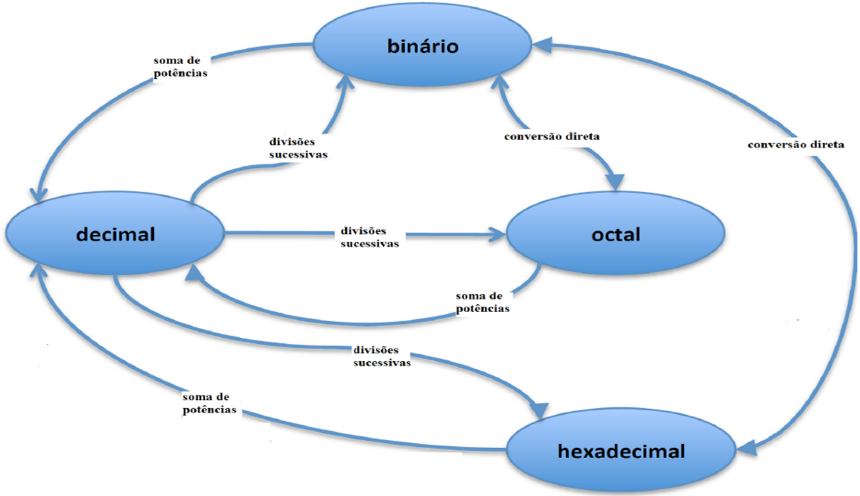
Binário ⇔ Octal Conversão direta

Divide-se o conjunto de dígitos em grupos de 3 bits consecutivos e efetua-se a correspondência direta desses no sistema octal.
$(100000111)_2 = (407)_8$

Binário ⇔ Hexadecimal Conversão direta

Divide-se o conjunto de dígitos em grupos de 4 bits consecutivos e efetua-se a correspondência direta desses no sistema hexadecimal.
$(000100000111)_2 = (107)_{16}$

Conversão de bases



Exercícios dos apontamentos

1. Transforme em binário o número $(26)_{10}$.
2. Transforme o número $(37)_{10}$ em binário.
3. Determine a representação decimal dos seguintes números:
    1. $(110001)_2$
    2. $(725)_8$
    3. $(2AB3F)_{16}$
4. Obtenha a representação octal dos seguintes números:
    1. $(101001)_2$
    2. $(1000111)_2$
5. Apresente a representação hexadecimal dos seguintes números:
    1. $(10010)_2$
    2. $(10101011)_2$

Soluções:

1. $(26)_{10} = (11010)_2$
2. $(37)_{10} = (100101)_2$
3. $(110001)_2 = (49)_{10}$; $(725)_8 = (469)_{10}$; $(2AB3F)_{16} = (174911)_{10}$
4. $(101001)_2 = (51)_8$; $(1000111)_2 = (107)_8$
5. $(10010)_2 = (12)_{16}$; $(10101011)_2 = (AB)_{16}$

CENTRO 2030
Os Fundos Europeus mais próximos de si.
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia

Conversão de números com parte decimal não nula

$$\begin{aligned}16,435 =& 10 + 6 + 0,4 + 0,03 + 0,005\\ =& 1 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

Mudança da Base b, $b \neq 10 \Rightarrow$ Base 10 — soma de potências

Dado um número x na base b,

$$x = (d_{n-1} \dots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-m})_b = d_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0 + d_{-1} \times b^{-1} + \dots d_{-m} \times b^{-m}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}(12,013)_4 =& 1 \times 4^1 + 2 \times 4^0 + 0 \times 4^{-1} + 1 \times 4^{-2} + 3 \times 4^{-3}\\ =& (6,109375)_{10}\end{aligned}$$

Conversão de números com parte decimal não nula

Mudança da Base 10 para a Base b, $b \neq 10$

A conversão da parte decimal de um número na base 10 para uma outra base, b, é obtida através de produtos sucessivos por b.

Para converter um dado um número real na base 10 numa outra base b é necessário converter separadamente a parte inteira e a parte decimal. Relativamente à parte decimal,

$$x = (0, d_{-1}d_{-2}\dots d_{-m})_b = d_{-1} \times b^{-1} + d_{-2} \times b^{-2} + \cdots + d_{-m} \times b^{-m}$$

Ao multiplicar x por b obtém-se d_{-1} como sendo a parte inteira do resultado. De seguida multiplica-se a parte decimal do resultado do produto anterior por b e a parte inteira do produto obtido corresponde a d_{-2}. O processo continua de forma análoga para obter os restantes dígitos.

Exemplo 1

$$(0,828125)_{10} = (???)_2$$

$$\begin{aligned}
0,828125 \times 2 &= \mathbf{1},\underbrace{65625} \\
0,65625 \times 2 &= \mathbf{1},\underbrace{3125} \\
0,3125 \times 2 &= \mathbf{0},\underbrace{625} \\
0,625 \times 2 &= \mathbf{1},\underbrace{\ 25\ } \\
0,25 \times 2 &= \mathbf{0},\underbrace{\ 5\ } \\
0,5 \times 2 &= \mathbf{1},0
\end{aligned}$$

$$(0,828125)_{10} = 0,\mathbf{(110101)}_2$$

Exemplos

Exemplo 2

$$(380,34375)_{10} = (???)_2$$

Conversão da parte inteira

380	2									
0	190	2								
	0	95	2							
		1	47	2						
			1	23	2					
				1	11	2				
					1	5	2			
						1	1	2		
							0	1	2	
								1	**0**	

$$(380)_{10} = \mathbf{(101111100)_2}$$

Conversão da parte decimal

$$0{,}34375 \times 2 = \mathbf{0},\underbrace{6875}$$

$$0{,}6875 \times 2 = \mathbf{1},\underbrace{375}$$

$$0{,}375 \times 2 = \mathbf{0},\underbrace{75}$$

$$0{,}75 \times 2 = \mathbf{1},\underbrace{5}$$

$$0{,}5 \times 2 = \mathbf{1},\underbrace{0}$$

$$(,34375)_{10} = \mathbf{,(01011)_2}$$

$$(380,34375)_{10} = (101111100,01011)_2.$$

Exemplos

Exemplo 3

$$(0,523)_{10} = (???)_2$$

$0,523 \times 2 = 1,046$, conclui-se que $d_{-1} = 1$;

$0,046 \times 2 = 0,092$, vem $d_{-2} = 0$

$0,092 \times 2 = 0,184$, $d_{-3} = 0$

$0,184 \times 2 = 0,368$ $d_{-4} = 0$

$0,368 \times 2 = 0,736$; $d_{-5} = 0$;

$0,736 \times 2 = 1,472$, $d_{-6} = 1$

$0,472 \times 2 = 1,744$; $d_{-7} = 1$,

$0,744 \times 2 = 1,488$, $d_{-8} = 1$,

$0,488 \times 2 = 0,876$, $d_{-9} = 0$

$\vdots$

Este número tem representação na base 2 (representação binária) infinita.

$0,523 = (0,100001110\cdots)_2$

Exercícios

1. Converta para o sistema decimal:
   1. $(234,504)_8$
   2. $(1100110,001)_2$
   3. $(0,110001)_2$
   4. $(0,1111111)_2$
2. Determine a representação binária do número:
   1. $(287,0625)_{10}$
   2. $(341,525)_{10}$
   3. $(0,5)_{10}$
   4. $(37,375)_{10}$
3. Converta $(3084,01888)_{10}$ para a base 5.
4. Indique o valor lógico das seguintes igualdades:
   1. $(15,C8)_{16} = (25,62)_8$
   2. $(54,12)_{10} = (66,0753)_8$
5. Considere o número $x = (107,9375)_{10}$. Então:

   (A) $x = (1101011,1111)_2$

   (B) $x = (1110100,0011)_2$

   (C) $x = (1110101,0011)_2$

   (D) $x = (1110101,1011)_2$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Operações aritméticas no sistema binário

Adição

A adição no sistema binário reduz-se à aplicação de cinco operações simples:

$$
\begin{array}{r}
\\
0\\
+\;0\\
\hline
0\\

\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\\
0\\
+\;1\\
\hline
1\\

\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\\
1\\
+\;0\\
\hline
1\\

\end{array}
\qquad
\begin{array}{cr}
 & \\
 & 1\\
+ & 1\\
\hline
1 & 0\\
\multicolumn{2}{c}{\textit{0 e vai 1}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cr}
 & 1\\
 & 1\\
+ & 1\\
\hline
1 & 1\\
\multicolumn{2}{c}{\textit{1 e vai 1}}
\end{array}
$$

Exemplo

$$
\begin{array}{r}
10010\\
+\;\;00111\\
\hline
11001
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
100110\\
+\;\;010110\\
\hline
111100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1101101\\
+\;\;1100101\\
\hline
11010010
\end{array}
$$

Operações aritméticas no sistema binário

Subtração

A subtração de B a A é equivalente a somar A ao simétrico de B.
Dado um número, o seu simétrico é obtido negando os seus bits todos e somando 1 ao resultado.

- 1.º obter -B
- 2.º somar A com -B
- 3.º Desprezar o 1º algarismo da esquerda

Exemplo

$$(01001110)_2 - (00100001)_2 = ?$$

simétrico de $(00100001)_2$

$$\begin{array}{rr} & 11011110 \\ + & 1 \\ \hline & 11011111 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 01001110 \\ + & 11011111 \\ \hline \underline{1}| & 00101101 \end{array}$$

$$(01001110)_2 - (00100001)_2 = (00101101)_2$$

Operações aritméticas no sistema binário

Multiplicação e divisão

A multiplicação e a divisão de dois números binários podem realizar-se pelos algoritmos clássicos das operações com números decimais.

Exemplo

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 0 & 1 \\
\times & & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \text{multiplicando} \\
 & & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & \text{multiplicador} \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \text{produto}
\end{array}
$$

Operações aritméticas no sistema binário

Exemplo

$$
\begin{array}{rrrr|rr}
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \cline{5-6}
- & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \cline{1-4}
 & 0 & 1 & 1 & & \\
 & - & 1 & 0 & & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 1 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \\ \cline{7-10}
- & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-6}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Exercícios

Efetue as seguintes operações no sistema binário:

1. $1001 + 11$
2. $111 + 101$
3. $1010 + 110$
4. $1100 + 110$
5. $101110 + 10101$
6. $100101 + 111$
7. $111011 + 10111$
8. $1100100 - 110010$
9. $1111010 - 1101$
10. $100011 - 1110$
11. $1101110 - 1010101$
12. $10101 - 111$
13. $111001 - 101010$
14. $1111100 - 101110$
15. 110×11
16. 10100×110
17. 11010×101
18. 1110×111
19. $101110 : 100$
20. $11110 : 101$
21. $10101 : 111$

CENTRO 2030 Os Fundos Europeus mais próximos de si. PORTUGAL 2030 Cofinanciado pela União Europeia

Exercícios capítulo 1

Moodle

CENTRO 2030
Os Fundos Europeus mais próximos de si.
PORTUGAL 2030
Cofinanciado pela União Europeia