Задание.

Необходимо с помощью средств MATLAB построить матрицу Якоби и решить задачи кинематики (прямую и обратную) по скорости для шестизвенного артикуляционного манипулятора, кинематическая схема которого приведена на рисунке 1.

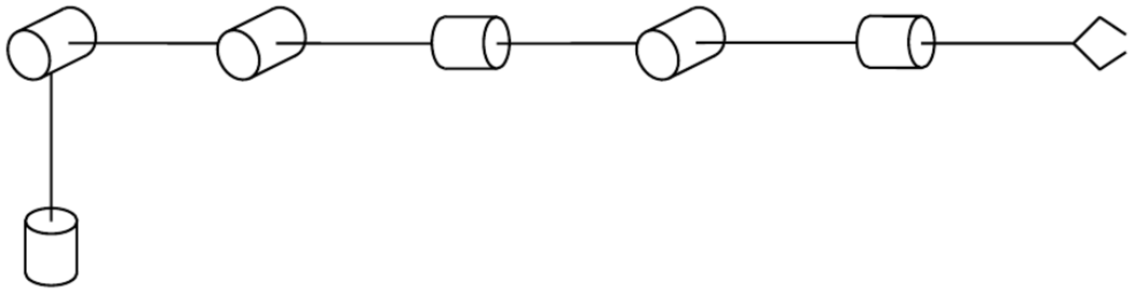

Рисунок 1. Шестизвенный артикуляционный манипулятор

Для успешного управления движением необходимо знать, как связаны между собой скорости обобщённых координат и рабочего органа. При этом необходимо заметить, что скорость системы координат, связанной с инструментом, ввиду вращательных сочленений имеет как линейную, так и угловую составляющие.

Прямая задача кинематики по скорости состоит в решении уравнения

$$\chi(t) = J\dot{q}_{(t)},$$

которое позволяет получить линейные и угловые скорости рабочего органа при заданных обобщённых скоростях.

Пусть заданы те же параметры Денавита-Хартенберга, что и в первой лабораторной работе и дана однородная матрица преобразования в виде:

$$T(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & p_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В общем виде Якобиан n – степеней свободы может быть рассчитан:

$$J(q) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p_n^0}{\partial q_1} & \dfrac{\partial p_n^0}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial p_n^0}{\partial q_{n-1}} & \dfrac{\partial p_n^0}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^0 & z_1^0 & \dots & z_{n-2}^0 & z_{n-1}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$z_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_1^0 = R_1^0(q) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad z_{n-2}^0 = R_{n-1}^0(q) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_{n-1}^0 = R_n^0(q) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Или же

$$J = \begin{bmatrix} J_v(q(t)) \\ J_\omega(q(t)) \end{bmatrix},$$

где $J_v(\cdot), J_\omega(\cdot)$ - линейная и угловая компоненты матрицы Якоби манипулятора.

Пусть дана сумма векторов:

$$p_n^0(t) = p_{i-1}^0 + R_{i-1}^0 p_i^{i-1} + R_i^0 p_n^i$$

Для определения линейной компоненты J_{vi} достаточно взять частную производную от выражения выше:

$$J_{vi} = \frac{\partial p_n^0}{\partial q_i} = R_{i-1}^0 \frac{\partial p_i^{i-1}}{\partial q_i} + \frac{\partial R_i^0 p_n^i}{\partial q_i} = z_{i-1}^0 * (-p_{i-1}^0 + p_n^0)$$

Для определения вращательных компонент J_ω можно воспользоваться следующим:

$$\omega_{0,n}^0(t) = [\sigma_1 z_0^0 \quad \sigma_2 z_1^0 \quad \sigma_3 z_2^0 \quad \dots \quad \sigma_n z_{n-1}^0] \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{bmatrix},$$

где $\sigma_i = 1$, если используется вращательное сочленение, и $\sigma_i = 0$, если используется поступательное сочленение. Итоговая матрица Якоби для рассматриваемого шестизвенного манипулятора следующая:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0^0 * (p_6^0 - p_0^0) & z_1^0 * (p_6^0 - p_1^0) & z_2^0 * (p_6^0 - p_2^0) & z_3^0 * (p_6^0 - p_3^0) & \dots \\ z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} z_4^0 * (p_6^0 - p_4^0) & z_5^0 * (p_6^0 - p_5^0) \\ z_4^0 & z_5^0 \end{matrix}\Bigg]$$

```
q = [0.1 0.2 0.3 + pi/2 0.4 0.5 0.6];
J = jacob(q)
```

```
function J = jacob( q )

syms q1 q2 q3 q4 q5 q6

a = [0 1 0 0 0 0];
d = [1 0 0 1 0 1];
alpha = [pi/2 0 pi/2 -pi/2 pi/2 0];
```

Рисунок 2. Задание параметров Денавита-Хартенберга

```
T00 = eye(4)
T01 = ht(q1, d(1), a(1), alpha(1));
T12 = ht(q2, d(2), a(2), alpha(2));
T23 = ht(q3, d(3), a(3), alpha(3));
T34 = ht(q4, d(4), a(4), alpha(4));
T45 = ht(q5, d(5), a(5), alpha(5));
T56 = ht(q6, d(6), a(6), alpha(6));

T02 = T01 * T12;
T03 = T02 * T23;
T04 = T03 * T34;
T05 = T04 * T45;
T06 = T05 * T56;

z0 = T00(1:3,3);
z1 = T01(1:3,3);
z2 = T02(1:3,3);
z3 = T03(1:3,3);
z4 = T04(1:3,3);
z5 = T05(1:3,3);

j1 = [diff(T06(1:3,4),q1);z0];
j2 = [diff(T06(1:3,4),q2);z1];
j3 = [diff(T06(1:3,4),q3);z2];
j4 = [diff(T06(1:3,4),q4);z3];
j5 = [diff(T06(1:3,4),q5);z4];
j6 = [diff(T06(1:3,4),q6);z5];

J = [j1 j2 j3 j4 j5 j6];

J = double(subs(J, [q1 q2 q3 q4 q5 q6], q))
end
```

Рисунок 3. Расчёт Якобиана для шестизвенного манипулятора

```
J =

   -0.0554   -1.4789   -1.2813    0.1331   -0.7701         0
    2.4227   -0.1484   -0.1286   -0.4304   -0.4207         0
         0    2.4161    1.4360   -0.1638    0.4795         0
         0    0.0998    0.0998    0.8732    0.2777    0.5743
         0   -0.9950   -0.9950    0.0876   -0.8978   -0.1300
    1.0000         0         0    0.4794   -0.3417    0.8083
```

Рисунок 4. Итоговое значение Якобиана

Решение обратной задачи по кинематике скорости в случае манипулятора с 6 звеньями, и если матрица Якоби не вырожденная, может быть получено умножением на обратную матрицу слева:

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(q)\chi(t)$$

Вывод. В ходе выполнения лабораторной работы была построена матрица Якоби и решена прямая задача кинематики по скоростям для шестизвенного артикуляционного манипулятора. Также была решена обратная задача кинематики по скоростям для манипулятора с 6 звеньями.

Код программы:

Файл ht.m

```
function T = ht(q, d, a, alpha)
if (q == pi/2) || (q == -pi/2)
    c_q = 0;
else
    c_q = cos(q);
end

if alpha == pi/2 || (alpha == -pi/2)
    c_alpha = 0;
else
    c_alpha = cos(alpha);
end

T1 = [c_q -sin(q) 0 0; sin(q) c_q 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
T2 = [eye(3) [0; 0; d]; 0 0 0 1];
T3 = [eye(3) [a; 0; 0]; 0 0 0 1];
T4 = [1 0 0 0; 0 c_alpha -sin(alpha) 0; 0 sin(alpha) c_alpha 0; 0 0 0 1];

T = T1 * T2 * T3 * T4
end
```

Файл lr2.mlx

```
q = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6];
J = jacob(q)
xi2 = J * q'
xi2 = xi2'

%поскольку n = 6, то простое домножение слева
q1 = inv(J)*xi2'
```

```
function J = jacob( q )


syms q1 q2 q3 q4 q5 q6


a = [0 1 0 0 0 0];
d = [1 0 0 1 0 1];
alpha = [pi/2 0 pi/2 -pi/2 pi/2 0];


T00 = eye(4)
T01 = ht(q1, d(1), a(1), alpha(1));
T12 = ht(q2, d(2), a(2), alpha(2));
T23 = ht(q3, d(3), a(3), alpha(3));
T34 = ht(q4, d(4), a(4), alpha(4));
T45 = ht(q5, d(5), a(5), alpha(5));
T56 = ht(q6, d(6), a(6), alpha(6));
```

```
T02 = T01 * T12;
T03 = T02 * T23;
T04 = T03 * T34;
T05 = T04 * T45;
T06 = T05 * T56;


z0 = T00(1:3,3);
z1 = T01(1:3,3);
z2 = T02(1:3,3);
z3 = T03(1:3,3);
z4 = T04(1:3,3);
z5 = T05(1:3,3);


j1 = [diff(T06(1:3,4),q1);z0];
j2 = [diff(T06(1:3,4),q2);z1];
j3 = [diff(T06(1:3,4),q3);z2];
j4 = [diff(T06(1:3,4),q4);z3];
j5 = [diff(T06(1:3,4),q5);z4];
j6 = [diff(T06(1:3,4),q6);z5];


J = [j1 j2 j3 j4 j5 j6];


J = double(subs(J, [q1 q2 q3 q4 q5 q6], q))
end
```