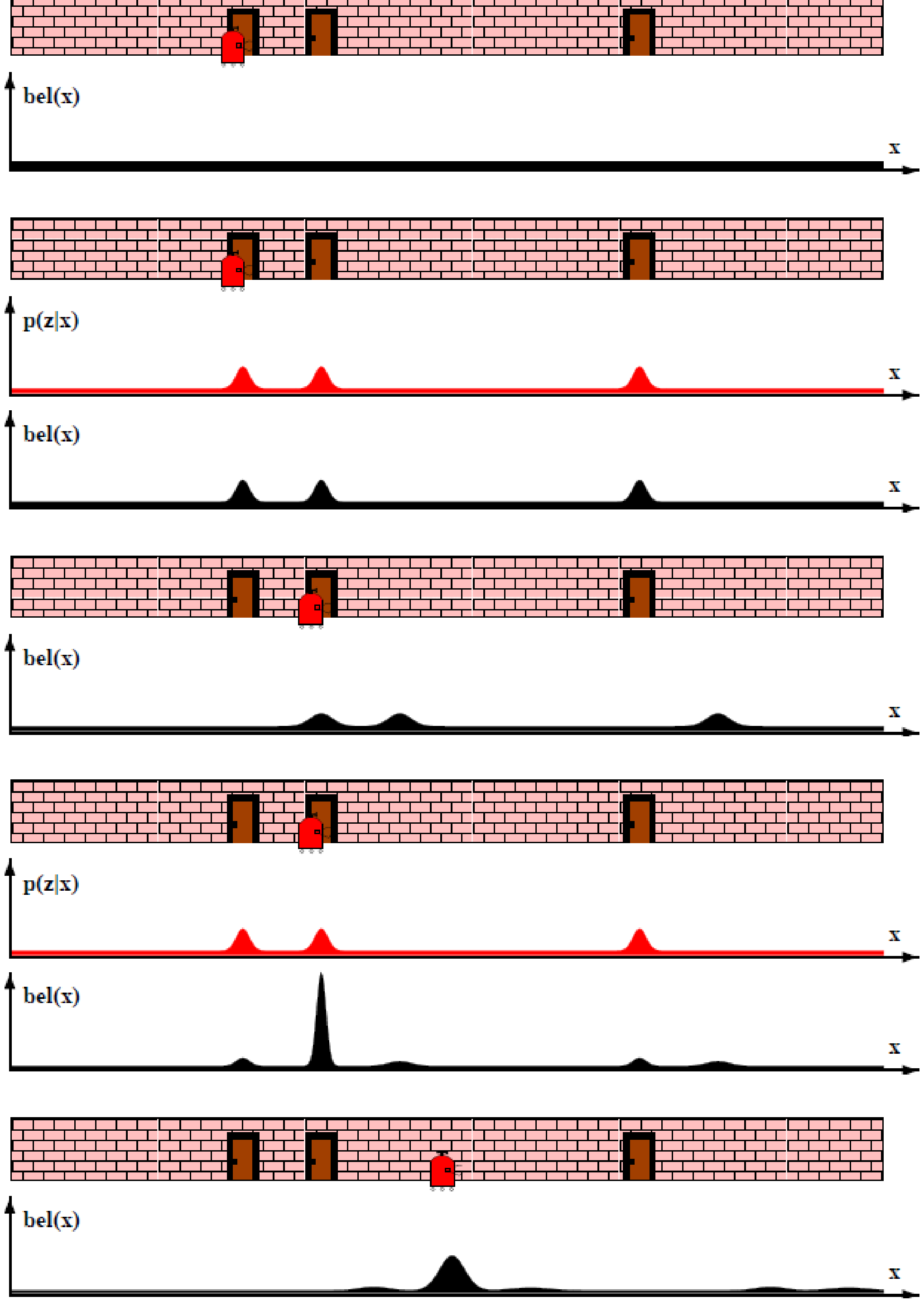
Машинное обучение в робототехнике

Вероятностный подход. Модели Гаусса

Факторы неопределенности

- Окружающая среда
- Датчики
- Роботы
- Модели
- Вычисления

Пример



Обозначения

$p(X = x) \geq 0$ – вероятность, что случайная величина X примет значение x, $\sum_x p(X = x) = 1$. Для краткости $p(x)$.

μ – математическое ожидание случайной величины

σ – среднеквадратическое отклонение

σ^2 - дисперсия случайной величины

Условная вероятность: $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$

Формула Байеса:

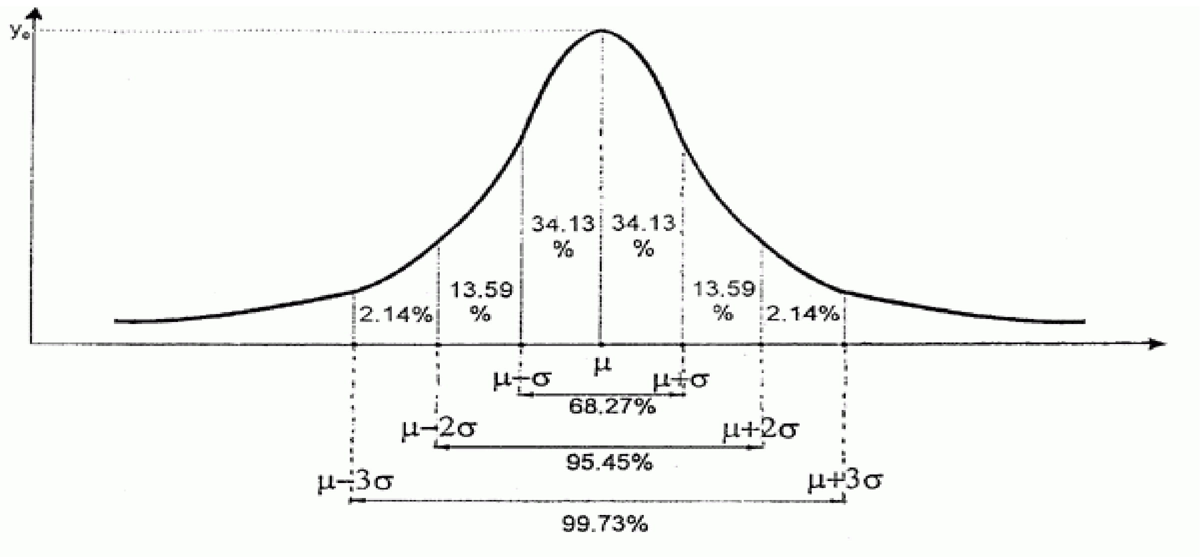
$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\sum_{x'} p(y|x')p(x')}$$

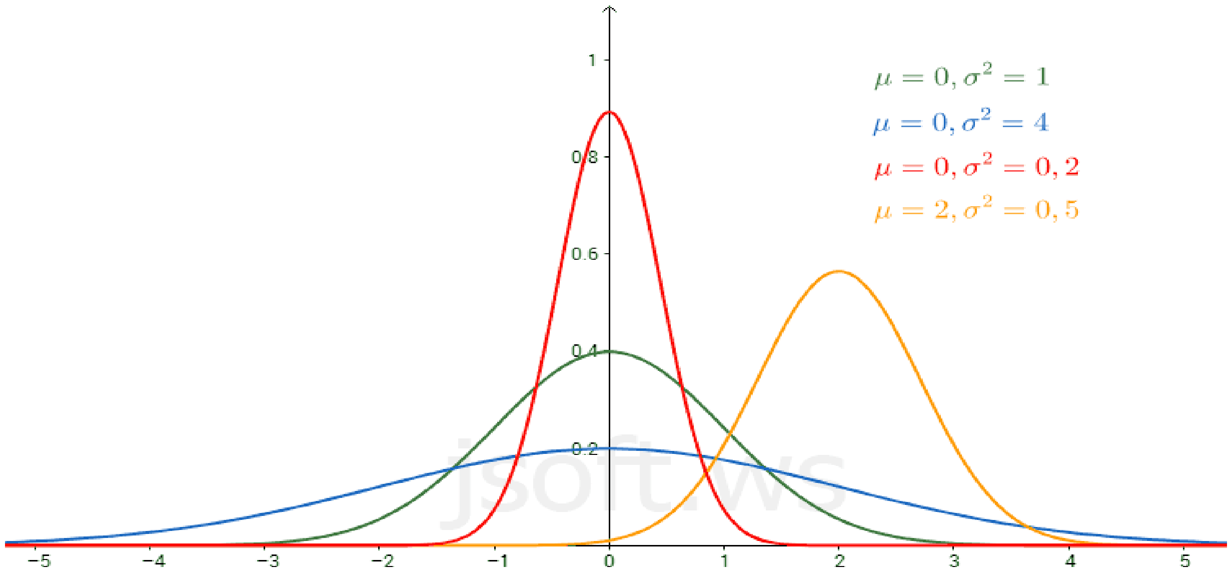
$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x')p(x')dx'}$$

Нормальное распределение (Гаусса)

Будем считать, что непрерывные случайные величины имеют нормальную функцию распределения плотности вероятности.

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

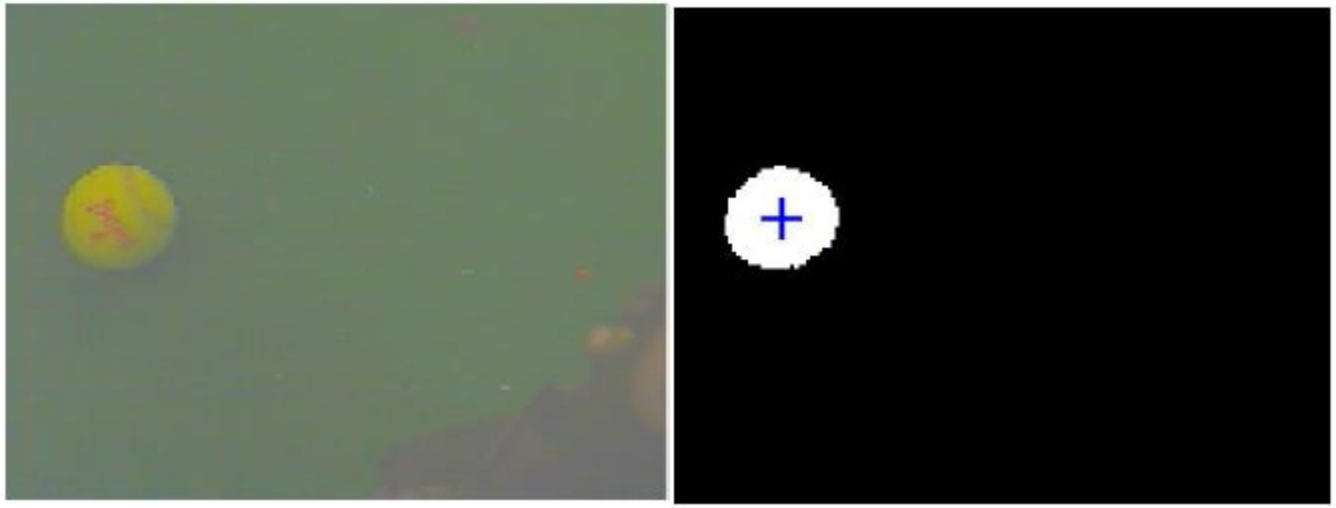


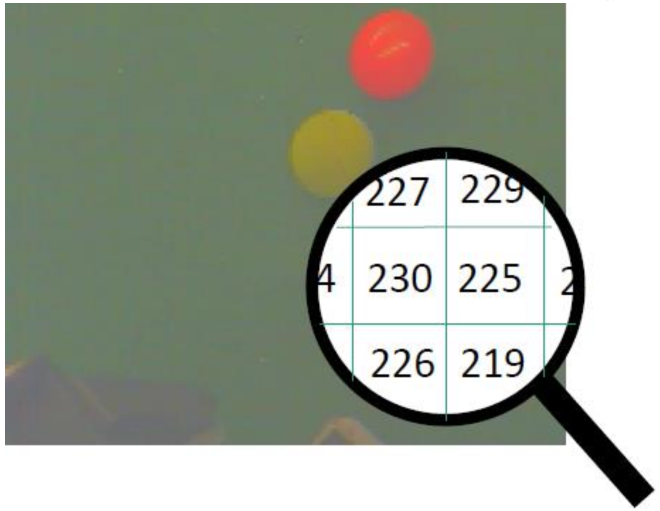


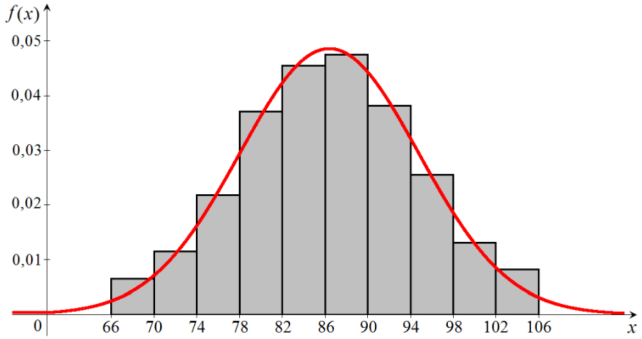
Нормальное распределение (Гаусса)

- Только два параметра функции плотности для вычисления: математическое ожидание и стандартное отклонение
- Полезные свойства: произведение распределений Гаусса формирует распределение Гаусса
- Центральная предельная теорема: Ожидание среднего большого числа случайных чисел сходится к распределению Гаусса
- Моделирование шумов и неопределенностей

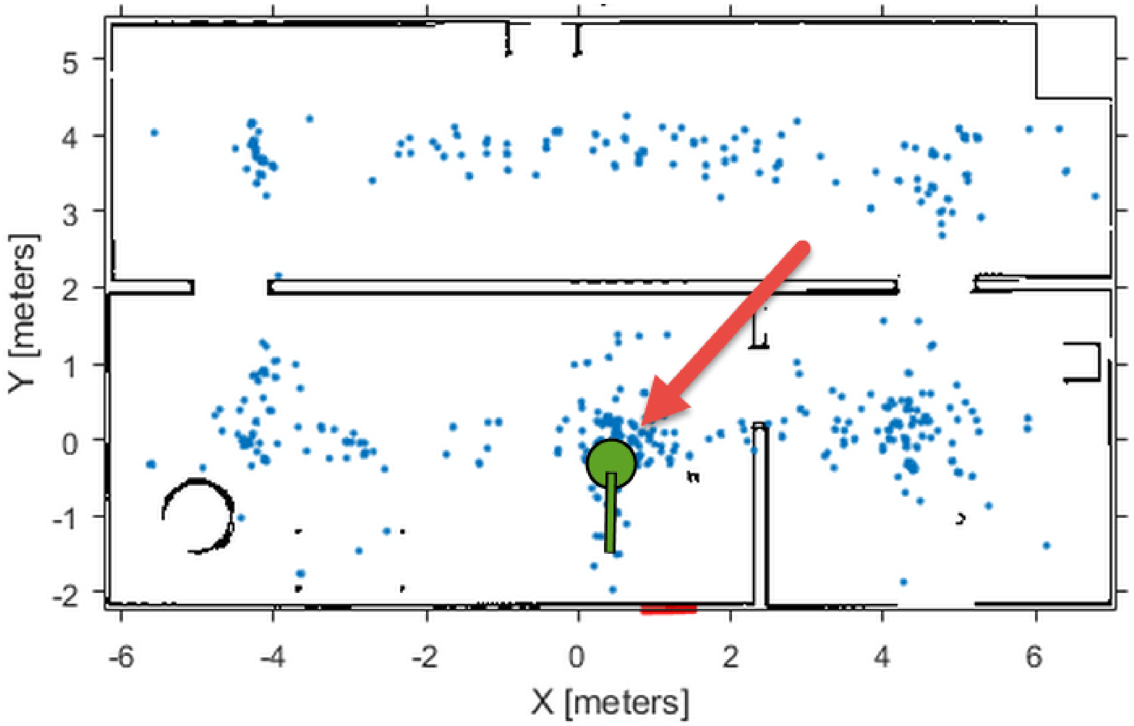
Нормальное распределение (Гаусса)







Обнаружение мяча



Локализация робота

Оценка максимального правдоподобия

Функция правдоподобия— это совместное распределение выборки из параметрического распределения, рассматриваемое как функция параметра.

$$p(\{x_i\}|\mu,\sigma)$$

Задача:

$$\hat{\mu},\hat{\sigma} = \arg\max p(\{x_i\}|\mu,\sigma)$$

Оценка максимального правдоподобия

Функция правдоподобия— это совместное распределение выборки из параметрического распределения, рассматриваемое как функция параметра.

$$p(\{x_i\}|\mu, \sigma)$$

Задача:

$$\hat{\mu}, \hat{\sigma} = \arg\max p(\{x_i\}|\mu, \sigma)$$

Будем считать измерения независимыми:

$$p(\{x_i\}|\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mu, \sigma)$$

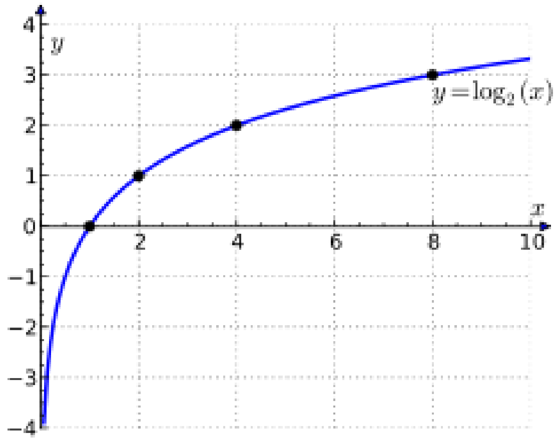
$$\hat{\mu}, \hat{\sigma} = \arg\max \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mu, \sigma)$$

Оценка максимального правдоподобия

Функция логарифма монотонно возрастает

$$\arg\max_{\mu,\sigma} \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mu,\sigma) = \arg\max_{\mu,\sigma} ln \left[\prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mu,\sigma)\right] =$$

$$= \arg\max_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i|\mu,\sigma)$$



Оценка максимального правдоподобия

$$\ln p(x_i|\mu,\sigma) = \ln(2\pi\sigma^2)^{-1/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} =$$

$$= -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma \; - \ln\sqrt{2\pi}$$

Оценка максимального правдоподобия

$$\ln p(x_i|\mu,\sigma) = \ln(2\pi\sigma^2)^{-1/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} =$$

$$= -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma \; - \ln\sqrt{2\pi}$$

$$\arg\max_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i|\mu,\sigma) = \arg\max_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma \; - \ln\sqrt{2\pi}\right]$$

$$= \arg\max_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma \;\right]$$

Оценка максимального правдоподобия

Перейдем от задачи максимизации к задаче минимизации

$$\arg\max_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\right] \Rightarrow \arg\min_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \ln\sigma\right]$$

Оценка максимального правдоподобия

$J(\mu, \sigma)$

Перейдем от задачи максимизации к задаче минимизации

$$\arg\max_{\mu,\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma \right] \Rightarrow \arg\min_{\mu,\sigma} \boxed{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \ln\sigma \right]}$$

Аналитическое решение:

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = 0 \rightarrow \hat{\mu} \qquad \frac{\partial J}{\partial \sigma} = 0 \rightarrow \hat{\sigma}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \hat{\sigma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2$$

Многомерный гауссиан

В векторном случае

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-1/2}\, exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\},$$

где Σ - положительная полуопределенная симметричная матрица ковариации

Пример матрицы ковариации для второго порядка:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1}\sigma_{x_2} \\ \sigma_{x_2}\sigma_{x_1} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

Оценка многомерного гауссиана

Задача:

$$\hat{\mu}, \hat{\Sigma} = \arg\max_{\mu,\Sigma} p(\{x_i\}|\mu, \Sigma)$$

Будем считать измерения независимыми:

$$\hat{\mu}, \hat{\Sigma} = \arg\max_{\mu,\Sigma} \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mu, \Sigma)$$

Применим логарифм

$$\arg\max_{\mu,\Sigma} \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mu, \Sigma) = \arg\max_{\mu,\Sigma} \sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i|\mu, \Sigma)$$

Оценка многомерного гауссиана

$$\hat{\mu}, \hat{\Sigma} = \arg\max_{\mu,\Sigma} \sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i|\mu,\Sigma)$$

$$\ln p(x_i|\mu,\Sigma) = -\frac{1}{2}(x_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(x_i-\mu) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

$$\hat{\mu}, \hat{\Sigma} = \arg\min_{\mu,\Sigma} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(x_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(x_i-\mu) - \frac{1}{2}\ln|\Sigma|$$

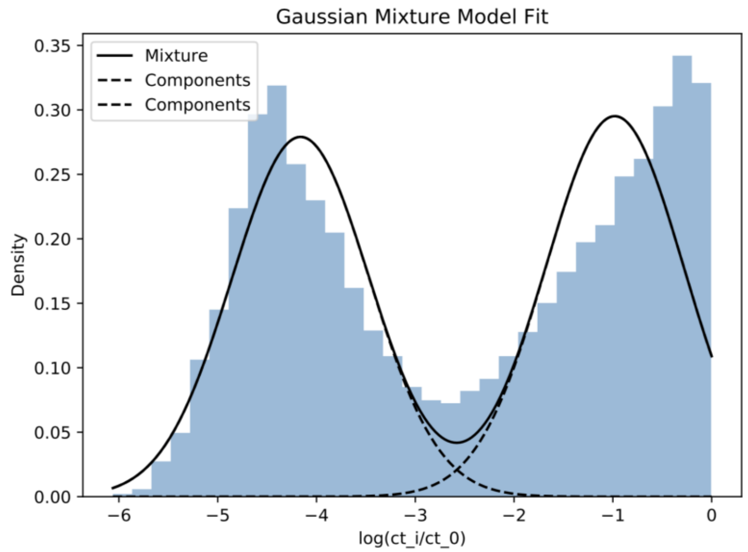
Оценка многомерного гауссиана

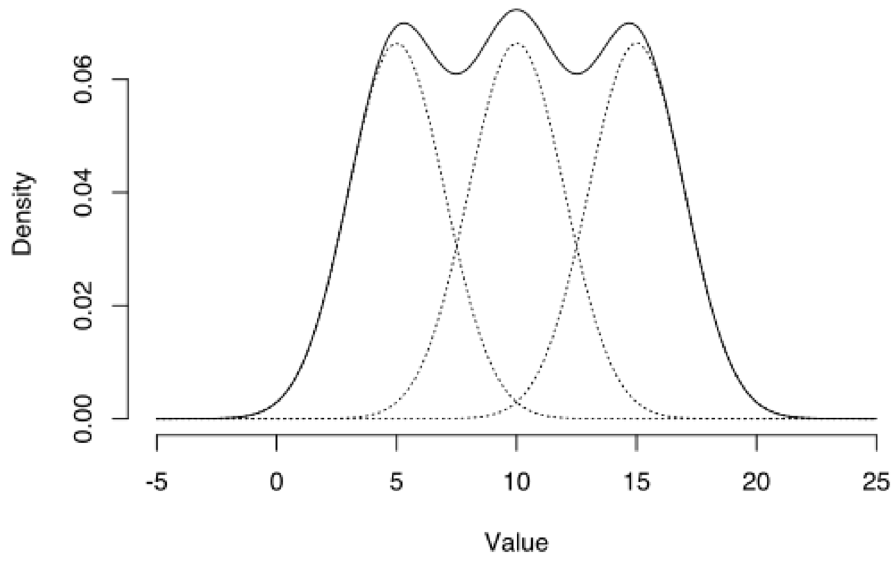
Аналитическое решение:

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = 0 \;\rightarrow\; \hat{\mu} \qquad\qquad \frac{\partial J(\hat{\mu}, \Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 \;\rightarrow\; \hat{\Sigma}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$$

Смешение гауссианов





$$p(x) = \sum_{k=1}^{K} w_k g_k(x|\mu_k, \Sigma_k), w_k > 0, \sum_{k=1}^{K} w_k = 1$$

Параметры: множество μ и Σ, w

Смешение гауссианов. Максимизация ожидания (Expectation maximization)

Для простоты будем считать

k- известно, $w = 1/k$

Задача:

$$\hat{\mu}, \hat{\Sigma} = \arg\max_{\mu,\Sigma} p(\{x_i\}|\mu, \Sigma)\,, \mu = \{\mu_k\}, \Sigma = \{\Sigma_k\}$$

$$\hat{\mu}, \hat{\Sigma} = \arg\max_{\mu,\Sigma} \sum_{i=1}^{N} \ln\left[\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{K} g_k(x_i|\mu_k, \Sigma_k)\right]$$

Аналитического решения не существует.

Но есть локально оптимальное.

Смешение гауссианов. Максимизация ожидания (Expectation maximization)

1) Задаем начальные μ и Σ.
2) Рассчитываем вспомогательные переменные

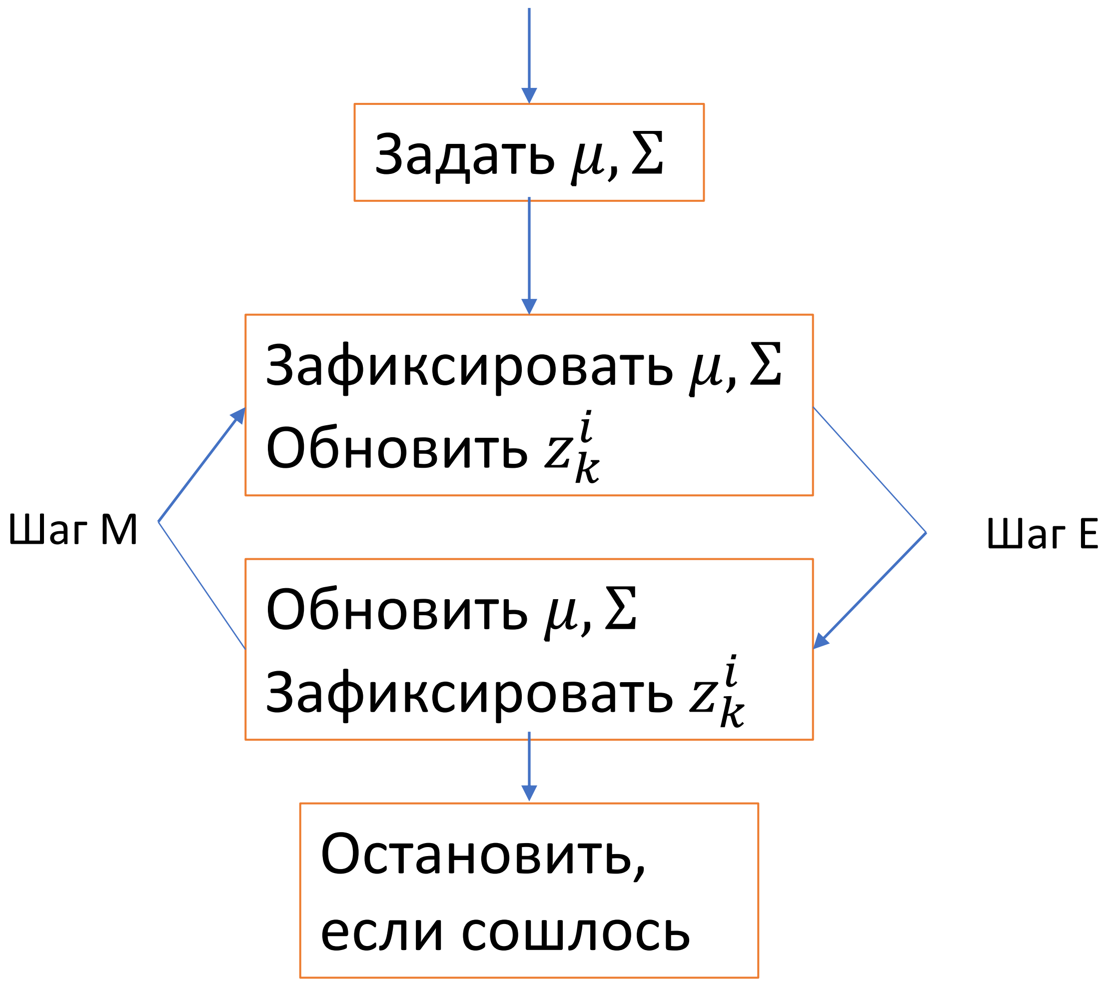
$$z_k^i = \frac{g_k(x_i|\mu_k, \Sigma_k)}{\sum_{k=1}^{K} g_k(x_i|\mu_k, \Sigma_k)}, z_k = \sum_{i=1}^{N} z_k^i$$

3) Итеративно рассчитываем:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{z_k} \sum_{i=1}^{N} z_k^i x_i, \hat{\Sigma}_k = \frac{1}{z_k} \sum_{i=1}^{N} z_k^i (x_i - \hat{\mu}_k)(x_i - \hat{\mu}_k)^T$$

4) Возвращаемся на шаг 2, если сходимость не достигнута

Смешение гауссианов. Максимизация ожидания (Expectation maximization)



Робот и окружение

Состояние $x_t = x_{t_1:t_2} = x_{t_1}, x_{t_1+1}, \dots, x_{t_2}$

- Положение
- Конфигурация исполнительных механизмов
- Скорости
- Расположение и особенности окружающих предметов
- Расположение и скорости подвижных объектов
- Уровень заряда батареи, состояние датчиков, износ и т.д.

Робот и окружение

Взаимодействие

- Измерения датчиков
- Сигналы управления
- Данные всех измерений $z_t = z_{t_1:t_2} = z_{t_1}, z_{t_1+1}, \dots, z_{t_2}$
- Данные управления $u_t = u_{t_1:t_2} = u_{t_1}, u_{t_1+1}, \dots, u_{t_2}$

Эволюция состояния робота

$$p(x_t|x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Пусть данные датчиков не влияют на состояние:

$$p(x_t|x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t|x_{t-1}, u_t)$$

Данные датчиков:

$$p(z_t|x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t|x_t)$$

Вероятность состояния робота

Апостериорное распределение плотности вероятности (belief)

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

Ожидаемое распределение плотности вероятности

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$bel(x_t)$ является откорректированным предсказанием $\overline{bel}(x_t)$

Фильтр Байеса

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)**:**

for all x_t do

$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx$

$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$

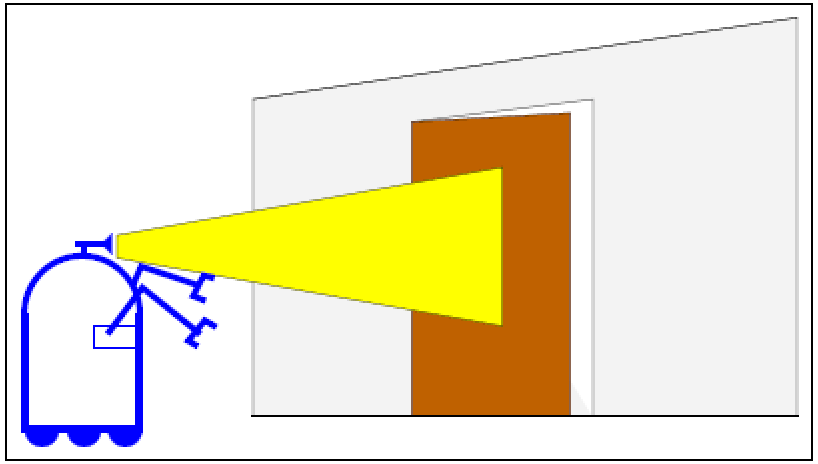
endfor

return $bel(x_t)$

Фильтр Байеса. Пример

- Будем считать вероятность открытой двери в начальный момент времени 0.5

$$bel(X_0 = open) = 0.5$$
$$bel(X_0 = closed) = 0.5$$



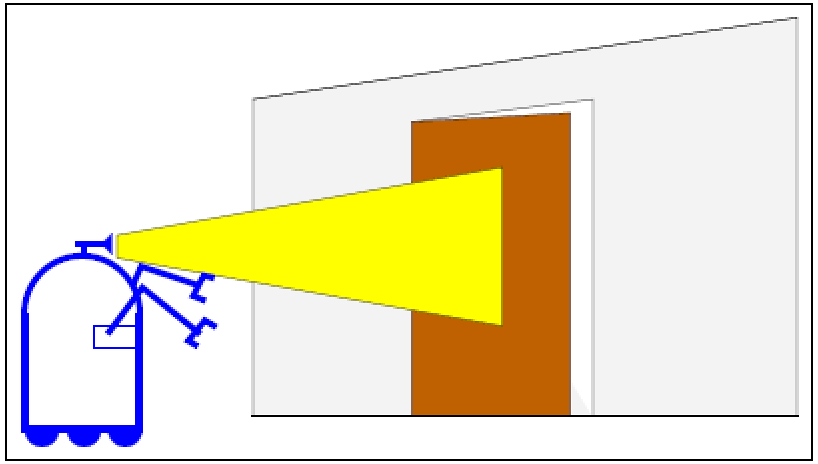
- Будем считать, что показания датчиков зашумлены.

$$p(Z_t = sense\_open | X_t = is\_open) = 0.6$$
$$p(Z_t = sense\_closed | X_t = is\_open) = 0.4$$

$$p(Z_t = sense\_open | X_t = is\_closed) = 0.2$$
$$p(Z_t = sense\_closed | X_t = is\_closed) = 0.8$$

Фильтр Байеса. Пример

$$p(X_t = is\_open | U_t = push, X_{t-1} = is\_open) = 1$$
$$p(X_t = is\_closed | U_t = push, X_{t-1} = is\_open) = 0$$
$$p(X_t = is\_open | U_t = push, X_{t-1} = is\_closed) = 0.8$$
$$p(X_t = is\_closed | U_t = push, X_{t-1} = is\_closed) = 0.2$$



$$p(X_t = is\_open | U_t = no, X_{t-1} = is\_open) = 1$$
$$p(X_t = is\_closed | U_t = no, X_{t-1} = is\_open) = 0$$
$$p(X_t = is\_open | U_t = no, X_{t-1} = is\_closed) = 0$$
$$p(X_t = is\_closed | U_t = no, X_{t-1} = is\_closed) = 1$$

Фильтр Байеса. Пример

Робот не движется. Дверь открыта

$$\overline{bel}(x_1) = \int p(x_1|u_1, x_0)bel(x_0)dx_0 = \sum_{x_0} p(x_1|u_1, x_0)bel(x_0) =$$

$$= p(x_1|U_1 = do\_nothing, X_0 = is\_open)bel(X_0 = is\_open)$$
$$+p(x_1|U_1 = do\_nothing, X_0 = is\_closed)bel(X_0 = is\_closed) = 0.5$$

$$\overline{bel}(X_1 = is\_open) = 0.5$$
$$\overline{bel}(X_1 = is\_closed) = 0.5$$

Фильтр Байеса. Пример

$$bel(x_1) = \eta p(Z_1 = sense\_open|x_1)\overline{bel}(x_1)$$

$$bel(X_1 = is\_open) = \eta p(Z_1 = sense\_open|X_1 = is\_open)\overline{bel}(X_1 = is\_open)$$
$$bel(X_1 = is\_open) = \eta 0.6 * 0.5 = \eta 0.3$$

$$bel(X_1 = is\_closed) = \eta p(Z_1 = sense\_open|X_1 = is\_open)\overline{bel}(X_1 = is\_open)$$
$$bel(X_1 = is\_closed) = \eta 0.2 * 0.5 = \eta 0.1$$

$$\eta = \frac{1}{0.3 + 0.1} = 2.5$$
$$bel(X_1 = is\_open) = 0.75$$
$$bel(X_1 = is\_closed) = 0.25$$

Фильтр Байеса. Пример

В момент времени 2 толкнем дверь, датчик показал $Z_2 = sense\_open$

$$\overline{bel}(X_2 = is\_open) = 1 * 0.75 + 0.8 * 0.25 = 0.95$$
$$\overline{bel}(X_2 = is\_closed) = 0 * 0.75 + 0.2 * 0.25 = 0.05$$

$$bel(X_2 = is\_open) = \eta 0.6 * 0.95 \approx 0.983$$
$$bel(X_2 = is\_closed) = \eta 0.2 * 0.05 \approx 0.017$$

Фильтр Байеса. Обоснование

Формула Байеса:

$$p(x_t|z_{1:t},u_{1:t}) = \frac{p(z_t|x_t,z_{1:t-1},u_{1:t})p(x_t|z_{1:t-1},u_{1:t})}{p(z_t|z_{1:t-1},u_{1:t})}$$

$$p(x_t|z_{1:t},u_{1:t}) = \eta p(z_t|x_t,z_{1:t-1},u_{1:t})p(x_t|z_{1:t-1},u_{1:t})$$

Фильтр Байеса. Обоснование

При полноте состояния

$$p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t|x_t)$$

$$p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta p(z_t|x_t) p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Перепишем в терминах *bel*

$$bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t)\overline{bel}(x_t)$$

Фильтр Байеса. Обоснование

При пол

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)**:**

for all x_t do

$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx$

$\boxed{bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)}$

endfor

return $bel(x_t)$

Перепишем в терминах *bel*

$$bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t)\overline{bel}(x_t)$$

Фильтр Байеса. Обоснование

Раскроем $\overline{bel}(x_t)$

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) =$$

$$= \int p(x_t|x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1}$$

$$p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t|x_{t-1}, u_t)$$

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|x_{t-1}, u_t) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1}$$

Фильтр Байеса. Обоснование

Раскроем $\overline{bel}(x_t)$

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)**:**
  for all x_t do
    $\boxed{\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ bel(x_{t-1})\ dx}$
    $bel(x_t) = \eta\ p(z_t \mid x_t)\ \overline{bel}(x_t)$
  endfor
  return $bel(x_t)$

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|x_{t-1}, u_t)p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1})dx_{t-1}$$

Фильтр Байеса. Марковские процессы

Нарушающие факторы:

- Неучтенная динамика
- Неточности вероятностных моделей $p(z_t|x_t), p(x_t|u_t, x_{t-1})$
- Ошибки аппроксимации
- Влияние переменных на выбор управления

Фильтр Байеса. Вопросы реализации

- Вычислительная эффективность
- Точность аппроксимации
- Простота реализации

Заключение

- Робот и окружение моделируются как связанная динамическая система
- Динамика описывается вероятностными законами
- Фильтр Байеса – основной алгоритм постериорного расчета в робототехнике
- Фильтр Байеса требует соблюдения условий Маркова
- Для реализации фильтра Байеса используются аппроксимации