Índice

Última actualización: 25 de noviembre de 2024

1. Cuadráticas

1.1. Resolvente

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = 0$$

1.2. Formas de función cuadrática

Forma polinómica: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Para hallar las raíces con esta forma utilizar la resolvente. Sabiendo las raíces se puede averiguar el vértice.

Forma canónica: $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$

En esta el vértice de la parábola está en (x_v, y_v).

Forma factorizada: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Da información de las raíces, que están en x_1 y x_2.

2. Potenciación

Propiedades de cuadrados

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Cuadrado de un binomio (suma)
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Cuadrado de un binomio (resta)
- $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ Diferencia de cuadrados

Propiedades generales

- $A^0 = 1, \quad \text{siendo } A \neq 0$ Elevar a la cero
- $A^C \cdot A^D = A^{C+D}$ Producto entre potencias
- $\frac{A^C}{A^D} = A^{C-D}$ División entre potencias
- $(A \cdot B)^C = A^C \cdot B^C$ Distributiva para multiplicación de potencias
- $\left(\frac{A}{B}\right)^C = \frac{A^C}{B^C}$ Distributiva para división de potencias
- $A^{-C} = \frac{1}{A^C}$ Potencias negativas
- $\sqrt[C]{A} = A^{\frac{1}{C}}$ Potencias fraccionarias
- $\left(A^C\right)^D = A^{C \cdot D}$ Potencia de potencia

3. Funciones homográficas

Se caracterizan por tener una asíntota horizontal y una asíntota vertical. Son dos hipérbolas.

Forma general: $f(x) = \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$

Para averiguar la posición de la asíntota vertical igualar el denominador a 0. Para averiguar la posición de la asíntota horizontal hacer a/c. Las raíces ocurren cuando el numerador es 0, y la ordenada al origen está en el resultado de reemplazar $x = 0$.

4. Logaritmos

Hacer la operación logaritmo responde a la pregunta "a cuánto tengo que elevar la base B para obtener el argumento x", siendo $\log_B(x)$. Algunas bases son tan conocidas que ni se ponen: "$\log(x) = \log_{10}(x)$" y "$\ln(x) = \log_e(x)$".

Propiedades

- $\log_B(1) = 0$
- $\log_B(x) + \log_B(y) = \log_B(x \cdot y)$
- $\log_B(x) - \log_B(y) = \log_B(x/y)$
- $\log_B(x^n) = n \cdot \log_B(x)$
- $\log_B(B^x) = B^{\log_B(x)} = x$ Composición con su inversa
- $\log_B(A) = \dfrac{\log_C(A)}{\log_C(B)}$ Cambio de base

5. Trigonometría

Teorema de Pitágoras

$$A^2 + B^2 = C^2$$

SOHCAHTOA

Identidades básicas

- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sec = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $\csc = \dfrac{1}{\sin(x)}$
- $\cot = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Identidades importantes

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ La más importante de todas
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ Imparidad del seno
- $\cos(x) = \cos(-x)$ Paridad del coseno
- $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$ Seno de una suma
- $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ Coseno de una suma

Teorema del seno

En cualquier triángulo se cumplen las siguientes relaciones, siendo L_{o1} el lado opuesto a α, etc.

$$\frac{\sin(\alpha)}{L_{o1}} = \frac{\sin(\beta)}{L_{o2}} = \frac{\sin(\gamma)}{L_{o3}}$$

6. Vectores

Operaciones entre vectores

- Suma: $(1i + 2j + 3k) + (4i + 5j + 6k) = (1 + 4)i + (2 + 5)j + (3 + 6)k = (5i + 7j + 9k)$
- Resta: $(1i + 2j + 3k) - (4i + 5j + 6k) = (1 - 4)i + (2 - 5)j + (3 - 6)k = (-3i + 3j + -3k)$
- Multiplicación por escalar: $7 \cdot (1i + 2j + 3k) = (7 \cdot 1i + 7 \cdot 2j + 7 \cdot 3k) = (7i + 14j + 21k)$
- Producto punto: $(1i + 2j + 3k) \bullet (4i + 5j + 6k) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$
- Producto cruz: $(1i+2j+3k)\times(4i+5j+6k) = (2\cdot 6-3\cdot 5)i-(1\cdot 6-3\cdot 4)j+(1\cdot 5-4\cdot 2)k = (-3i+6j-3k)$
- Módulo $\left|(1i + 2j + 3k)\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

7. Límites

Para que exista el límite este tiene que ser igual por izquierda y por derecha. Es único.

7.1. Indeterminaciones

Es muy frecuente que al resolver un ejercicio de límites nos encontremos con indeterminaciones, casos que no se pueden resolver directamente. Algunos escenarios son:

- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty - \infty = ???$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{\infty}{\infty} = ???$
- $\infty + k = \infty, \quad k \in \mathbb{R}$
- $\infty \cdot k = \infty, \quad k \in \mathbb{R} > 0$
- $\infty \cdot k = -\infty, \quad k \in \mathbb{R} < 0$
- $\infty \cdot 0 = 0, \quad$ Si 0 es el número
- $\infty \cdot 0 = ???, \quad$ Si 0 es un límite
- $\frac{\infty}{k} = \infty, \quad k \in \mathbb{R}^+$
- $\frac{\infty}{k} = -\infty, \quad k \in \mathbb{R}^-$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$
- $\frac{k}{\infty} = 0$
- $\frac{k}{0} = \infty$
- $\frac{0}{0} = ???$
- $\ln(\infty) = \infty$
- $k^\infty = \infty, \quad k \in \mathbb{R} > 1$
- $1^\infty = 1$
- $k^\infty = 0, \quad k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1$
- $0^\infty = 0$
- $k^\infty = \text{No existe}, \quad k \in \mathbb{R}^-$

7.2. Límites trigonométricos (con l'Hôpital no hace falta recordar esto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

7.3. L'Hôpital

Donde $\otimes$ es cualquier número o infinito que da una indeterminación 0/0 o ∞/∞.

$$\lim_{x\to\otimes} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\otimes} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

8. Derivadas

Por definición

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Recta tangente

La recta tangente es una función lineal, por lo tanto cumplirá $t(x) = m \cdot x + b$.
Su pendiente en un punto es la derivada en ese punto:

$$m = f'(x_0).$$

Para obtener su ordenada al origen reemplazar en $t(x)$ con los puntos de las función y la pendiente obtenida, es decir:

$$y_0 = m \cdot x_0 + b$$

Despejar b y listo!

Polinomio de Taylor

Sirve para aproximar funciones con una nueva:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Tabla de derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^k	$k \cdot x^{k-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_B(x)$	$\frac{1}{x} \cdot \log_B(e)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot f'(x)$

9. Análisis de funciones

Conjunto de positividad/negatividad (C^+/C^-)

Hay que analizar los intervalos entre los puntos críticos (infinitos, raíces, discontinuidades).

	$\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$	$-\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2}; \infty\right)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	Ø	$+$

Intervalos de crecimiento/decrecimiento ($\mathbf{I}^{\nearrow}/\mathbf{I}^{\searrow}$)

Hay que analizar los intervalos entre los puntos críticos de la derivada (en la función, estos pueden llegar a ser **máximos** o **mínimos**). El conjunto de positividad de la derivada es el intervalo de crecimiento de la función, el conjunto de negatividad de la derivada es el intervalo de decrecimiento de la función.

	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 8\right)$	8	$(8; \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	max	$\downarrow$	min	$\uparrow$	nada	$\uparrow$

Concavidad/convexidad ($\mathbf{I}^{\cap}/\mathbf{I}^{\cup}$)

Para analizar la concavidad, hay que analizar los intervalos entre los puntos críticos de la segunda derivada (en la función estos son los puntos de inflexión).

En el conjunto de positividad de la segunda derivada la función será convexa (también llamada hacia arriba o $\cup$) y en el de negatividad será cóncava (también llamada hacia abajo o $\cap$).

	$(-\infty; -6)$	-6	$(-6; 2)$	2	$(2; 10)$	10	$(10; \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$	0	0
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	nada	nada

Asíntotas horizontales

Pueden ocurrir únicamente cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Si el límite en esos puntos es un número, entonces habrá una asíntota horizontal en ese número.

Asíntotas verticales

Ocurren cuando el límite por izquierda o derecha para un valor del codominio es ∞ o $-\infty$. En general son para puntos donde hay divisiones por cero, rectas tangentes o logaritmos.

Asíntotas oblicuas

Para saber si existen se tiene que dar que la función tiende a acercarse a una recta oblicua en infinito o menos infinito. Para obtener su fórmula “$m \cdot x + b$” se hace:

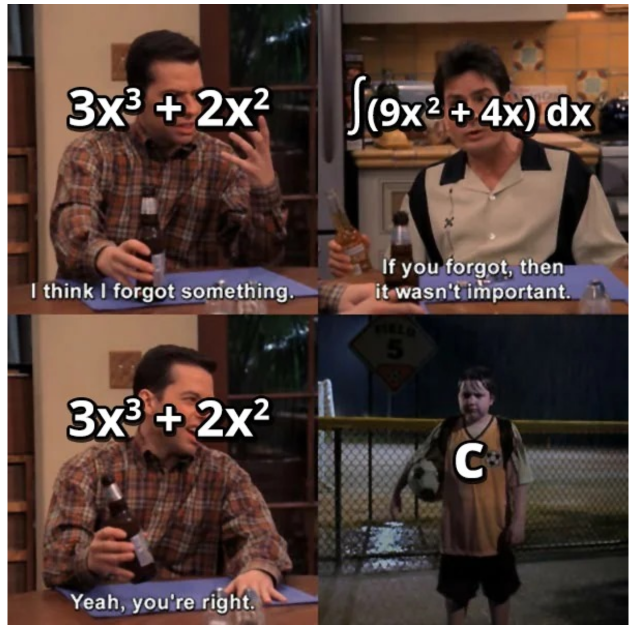
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m \cdot x$$

Tener en cuenta que si no existe una asíntota oblicua m dará $\pm\infty$ o 0 (asíntota horizontal).

10. Integrales

Cuando se calcula la integral de una función se está averiguando su primitiva. El teorema fundamental del cálculo o teorema de Barrow dice que una integral definida es evaluar a la primitiva en los dos puntos y restarlas.

Recordar que se puede pensar la integral como sumar infinitos rectángulos entre la función y el eje x.



Integración por sustitución

Se basa en reemplazar una parte de la integral por una nueva variable u y el resto por du. Es útil cuando se identifica que una parte es la derivada de otra parte. Para obtener du se agarra lo que es igual a u, se lo deriva y se le agrega dx.

Ejemplo:

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)\, dx \longrightarrow \begin{array}{c} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\, dx \end{array} \Longrightarrow \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

Integración por partes

Se basa en tener un producto de funciones dentro de la integral (un día vi una vaca vestida de uniforme).

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

Ejemplo:

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\, dx \longrightarrow \begin{array}{cc} u = \ln(x) & v = \dfrac{x^3}{3} \\ du = \dfrac{1}{x}\, dx & dv = x^2\, dx \end{array} \Longrightarrow \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$\Longrightarrow \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\, dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Teorema fundamental de cálculo

Parte 1

$$\Big(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\Big)' = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Parte 2: Integrales definidas (Barrow)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La integral definida de una función entre dos puntos es el área (con signo) entre la función y el eje x.

Ejemplo:

$$\int_{-3}^{1} x^2 + 1\,dx = \frac{x^3}{3} + x\,\Big|_{-3}^{1} = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{(-3)^3}{3} + -3\right) = \frac{4}{3} - (-12) = \frac{40}{3}$$

Para calcular el área entre dos funciones, hacer la integral definida de techo menos piso, siendo los extremos de integración las intersecciones.

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Propiedades

- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Integrales impropias

Son integrales definidas donde el intervalo de integración tiene por extremo a algún infinito, a puntos que no están en el dominio o el intervalo de integración no es continuo.

Para solucionar los problemas, se hace lo siguiente:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Esto se tiene que hacer para cada singularidad. En caso que el límite exista y sea finito, se dice que la integral existe, caso contrario la integral no existe.

Un caso bastante común es el de $\int_1^\infty x^n\,dx$. Esta integral diverge para valores $n \geq -1$.

11. Cónicas

Parábola

La parábola se define geométricamente como los puntos que están a la misma distancia de un punto F (foco) y de una recta (directriz).

Su ecuación canónica es:

$$2 \cdot p \cdot (y - y_0) = (x - x_0)^2$$

donde p es la distancia desde el foco hasta la directriz. El vértice estará en el punto medio entre el foco y la directriz. En parábolas $e = 1$.

Elipse

La elipse se define geométricamente como los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos (focos) es constante.

Su ecuación canónica es:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Sus focos están a una distancia $c^2 = a^2 - b^2$ del centro.

En elipses la excentricidad sigue siendo $e = c/a$, además $e < 1$. Para averiguar dónde está la directriz con respecto al centro se hace $d = \frac{a^2}{c}$. Tener en cuenta que si el semieje mayor es el vertical, en vez de a sería b.

Hipérbola

La hipérbola se define geométricamente como los puntos cuya diferencia de las distancias a dos puntos (focos) es constante (en valor absoluto).

Su ecuación canónica es:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Sus focos están a una distancia $c^2 = a^2 + b^2$ del centro. La excentricidad es la relación que hay entre la distancia de un foco con su directriz y es constante. Es $e = c/a$, y se cumple la siguiente relación para cualquier punto de la elipse: $d(P,F)/d(P,d) = e$. En hipérbolas $e > 1$,

La distancia de la directriz con respecto al centro es $d = \frac{a^2}{c}$.

Recurso de geogebra que está piola

`https://www.geogebra.org/m/qFWgGg2g`

12. Números Complejos $\mathbb{C}$

La base de todo esto es que $\sqrt{-1} = i$

Algunos procedimientos frecuentes

Potencias de i:

Teniendo i^k , se analiza la operación "k mod 4" o "k %4". Si sobra 0 es 1; si sobra 1 es i, si sobra 2 es -1, si sobra 3 es $-i$.

Raíces:

Al resolver una raíz del estilo $\sqrt{u+iv}$, plantear que "$u + iv = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2 \cdot a \cdot b$".

Si no resolver la raíz de la forma exponencial y listo.

Complejos en denominador:

Multiplicar numerador y denominador por el complemento del denominador, queda una diferencia de cuadrados y finalmente en denominador queda real.

Operaciones de números complejos

Módulo:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento:

Es el ángulo que forma el número complejo con respecto al eje x, va entre 0 y 2π.

$$\arg(z) = \theta = \arctan(b/a)$$

Formas de escribir un número complejo

Binómica	Exponencial	Trigonométrica
$z = a + ib$	$z = r \cdot e^{i\theta}$	$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

13. Funciones multivariable

Cálculo de máximos y mínimos

Se utiliza el Hessiano. El hessiano es el determinante de la siguiente matriz, en la que se analizan los PUNTOS CRÍTICOS. Para averiguar los puntos críticos, evaluar cuándo $f'_x(x,y) = 0$ y $f'_y(x,y) = 0$ (todos los puntos que resuelvan el sistema de ecuaciones serán puntos críticos.

$$H(x_0; y_o) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}$$

Según los valores del determinante:

- $H(x,y) > 0$: Hay extremo
- $H(x,y) < 0$: No hay
- $H(x,y) = 0$: No se sabe

Si $f''_{xx}(x_0,y_0)$ y $f''_{yy}(x_0,y_0)$ ambas son mayores positivas es un mínimo, si ambas son negativas es un máximo (con analizar una sola alcanza). Si tienen distinto signo, punto ensilladura.