微积分简单入门

by 2516-渚枝惊雀

引言

微积分被费曼称为“上帝的语言！”[1]．自从牛顿[2]和莱布尼茨发明了这一奇妙的语言，自然界的许多问题迎刃而解，人们对自然界有了更全面更深入的认识．微积分听起来高深莫测，实际上与我们的生活悉悉相关，学习一点微积分，有助于我们解决一些实际问题．

了解微积分学的基本知识前，我们不妨来看一看这一奇妙语言的发明．

在牛顿和莱布尼茨之前，勒内·笛卡尔[3]和皮埃尔·德·费马[4]曾对切线之类的问题产生争执．笛卡尔坚持用他的曲率圆法求切线问题，而来自图卢兹的律师、天才的数学家费马，则使用了类似下面要提到的极限的办法（笛卡尔对于费马先于他并优于他解决了切线问题深感懊恼[5]）．但是，费马最后并没有将微积分两者统一到一起．在他之后，牛顿和莱布尼茨各自独立地发现了这一伟大的工具，微积分学迎来新的发展．

总的来说，微积分学有**三大基本问题**[6]（如图0.1）：

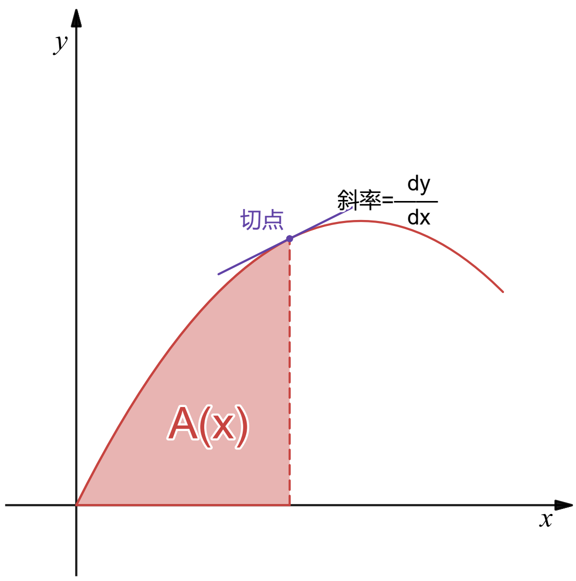

Fig 0.1

① 已知一条曲线，求它各处的斜率（正向问题）；

② 已知一条曲线各处斜率，求这条曲线（反向问题）；

③ 已知一条曲线，求曲线下方的面积（面积问题）．

下面我们来讨论如何用微分和积分解决这些问题．

一、微分

如果你已经学习过或看过高中数学教材选择性必修二，你会了解到**导数**，说到底，导数和微分可以几乎画上等号，它们以不同的形式表示相同的内容，下面看一个例子：

问题一 一物体以加速度 $\vec{a}$ 沿直线做匀加速运动，求物体所受合外力 $\vec{F}$ ？

解：很明显，由牛顿第二定律，我们有：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

我们来分析一下这个式子，对于此物体，在任意时刻，其所受合外力均等于它的质量乘以其加速度，把这个结论推广一下，对于任一物体，无论它做什么运动，在任意时刻，该方程均成立．

事实上， $\vec{F} = m\vec{a}$ 是一个**微分方程**，它表示的是某一瞬间物体加速度与其受力之间的关系．

从问题一，我们了解到，微分实际上描述的是某一瞬间的状态，我们可以通过解析几何来进一步理解它的实际意义．

问题二 对于抛物线 $y = x^2$ ，求它在 $x = 1$ 处的切线斜率．

分析：对于由线 $y = x^2$ ，求其在 $x = 1$ 处的斜率实际上是求在 $x = 1$ 处与抛物线相切的直线的斜率，我们不妨先研究几种容易计算的情况，来推理一下曲线的切线如何计算．

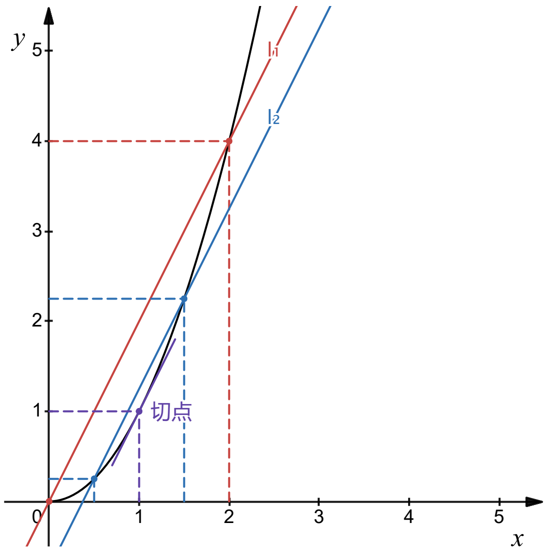

Fig 1.1

如上图1.1，我们取 $(0,0)$ 与 $(2,4)$ 两点，连接起来，得到直线 l_1 那么容易得出 l_1： $y=2x$.

我们可以继续取 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 与 $(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ 两点，连接得到 l_2 ，计算 l_2 的斜率.

同样继续二分求 $(\frac{3}{4},\frac{9}{16})$ 与 $(\frac{5}{4},\frac{25}{16})$ 连线 l_3 斜率......

做完以上运算的读者，可以猜想，如果取的两点无限接近于 $(1,1)$ ，那么这条直线是否就是在该点的切线呢?

事实上，这是我们在数学上定义导函数的方法，导函数（简称导数）表示了函数图像上任意一定的切线斜率. 导函数用 y' 或 $f'(x)$ 表示，以问题二中的函数为例，计算方法如同取两点算直线斜率一样，像下面这样:

在 $y=f(x)$ 上取 $(x,f(x))$ ，$(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ 两点，

则

$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

由于我们取的两点无限接近，故 $\Delta x\to 0$ ，这样的话， $(\Delta x)^2$ 应是极小的数，可以忽略. 原式可以写作:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\Delta x}{\Delta x}=2x$$

导函数的计算通式为:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ 表示极限情况 Δx 趋近于 0 .

这么写有点麻烦，把它换成微分的形式，我们用 $\frac{dy}{dx}$ 表示 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

那么 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ，它和导函数表示的意义是相同的，以下列出**常见函数的导函数**:

1. 常函数: $(A)'=0$
2. 幂函数: $(x^n)'=nx^{n-1}$
3. 三角函数:

$$\begin{aligned}(\sin x)'&=\cos x & (\cos x)'&=-\sin x\\(\tan x)'&=\frac{1}{\cos^2 x} & (\cot x)'&=-\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

4. 指数函数: $(a^x)'=a^x\ln a$ 特别地， $(e^x)'=e^x$
5. 对数函数: $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ 特别地， $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

这样我们很容易解决问题二:

解: $f'(x)=2x$

$\therefore f'(1)=2\times 1=2$

即 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处切线斜率为 2 .

自此三大基本问题中的 ① 被我们解决了.

微分学在数学、物理学、化学、生物学等众多学科中有着重要作用，有的时候，单独一个自变量不能全面地描述因变量的情况，我们使用偏微分来表示多个变量的情况，由于偏微分本身的复杂性，在这里不为大家介绍其计算方法，仅举一例来向读者展示偏微分的符号表示及用途.

问题三 （思考）对于一维的弹性直杆（如图1.2），在它的内部发生质点的平动，且已知质点的振动方向与传播一致，我们把这样传播的波称为一维弹性纵波 (p) ．对于它的波动，我们有以下两个方程[7.]：

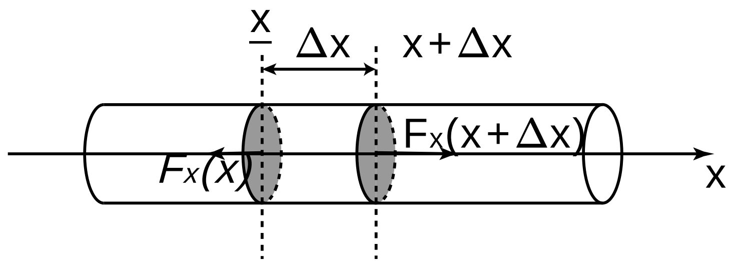

Fig 1.2

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{xx}(x,t)}{\partial x}$$

（一维弹性动力学方程）

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}={v_p}^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

（一维弹性纵波波动方程）

其中， ρ 为密度， σ 表示应力， v_p 为纵波速度． $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ 即是函数 u 对 t^2 的二阶偏导形式．

这个方程的证明不予赘述，有兴趣的读者可以自己尝试一下或者来找笔者探讨．

二、积分

如果把微分看成从整体到局部（一个非常小的局部）的话，那么积分事实上就是从局部再回到整体，下面通过一个例子来解释一下．

问题四 （如图2.1）抛物线被一直线所截，截得的弓形内有一面积最大的三角形，其面积为1．求弓形的面积．

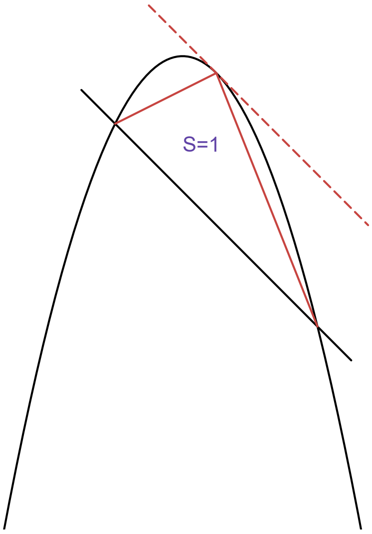

Fig 2.1

这个问题是阿基米德在他的《抛物线求积法》$^{<8.>}$中提出的．容易得到：面积最大的三角形的顶定应为与直线平行的抛物线切线的切点．

继续分割大三角形外空白部分（如图2.2）．

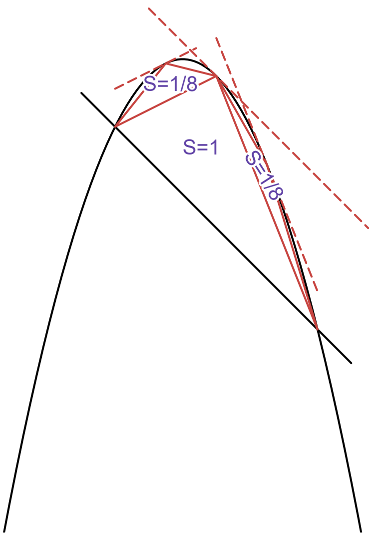

Fig 2.2

阿基米德用数学方法求出两个次一级小三角形的面积各占大三角形的 $\frac{1}{8}$ ，那么我们称第

二级的两个三角形面积之和为 $\frac{1}{4}$ ．

可以由此得知：之后每一层积的三角形面积之和均为上一层级三角形总面积的 $\frac{1}{4}$ ．

抛线的故抛物线弓形的面积 $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$

这是一个无穷级数.

对于S的求值，我们应用等比数列的计算方式，那么有：

$$4S = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = 4 + S$$

$\therefore S = \frac{4}{3}$

在这一过程中，我们先将面积无限分割再求其和，实际上就是先微分再积分的思想．阿基米德的弓形很好地为我们说明了微分与积分的应用逻辑．

- **微积分基本定理**：

把微分和积分联系在一起的是微积分基本定理，它使我们能在短短几分钟内解决基本问题 ② 和 ③ ．要知道，无数数学家花了一辈子也没能解决它们！要理解这个定理，我们先来看一个物理问题．

问题五 一个物体从静止开始以加速度 a 做匀加速直线运动，求它在 t 时间内通过的路程．

解：显然， $x = \frac{1}{2}at^2$ ，这是运动学的一个基本方程．

让我们作出这个运动的 $v - t$ 图像（如图2.3）：

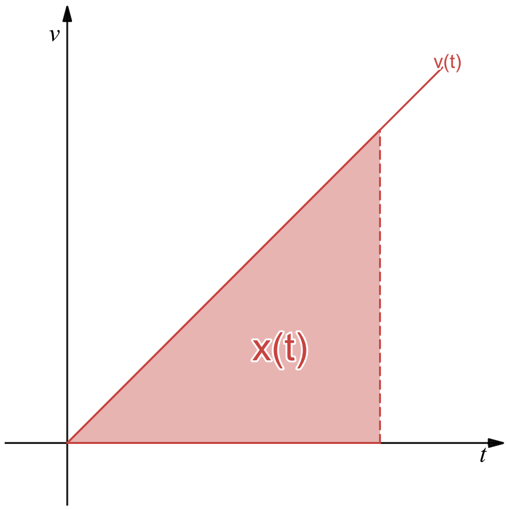

Fig 2.3

这条曲线的解析式容易得到： $v(t) = at$ ．

那么，阴影部分的面积即为位移，且：

$$x(t)=\frac{1}{2}at^2$$

我们解决了一种最简单的面积问题.

把这种思想扩大到任意曲线（如图2.4）：

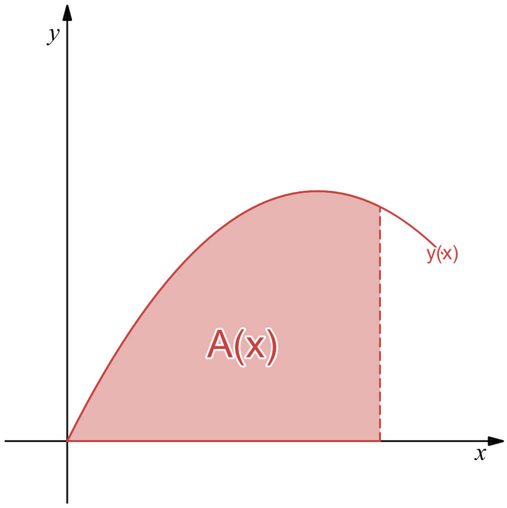

Fig 2.4

我们可以想象[9.]有一个滚筒，从原点出发，始终紧贴 x 轴与曲线顶端将这部分之间的面积刷上油漆（如图2.5），这个滚筒长度的变化应当就是 $y(x)$. 那么，在极短的 $\mathrm{d}x$ 内，滚筒滚过的面积应当是 $y(x)\mathrm{d}x$ ，即 $\mathrm{d}A(x)=y(x)\mathrm{d}x$.

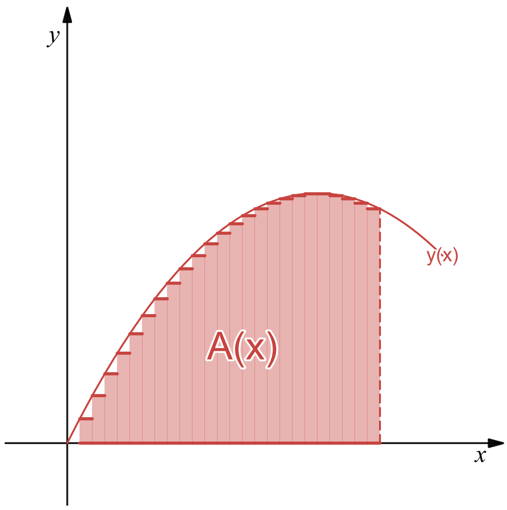

Fig 2.5

或者换一种形式（如图2.6）

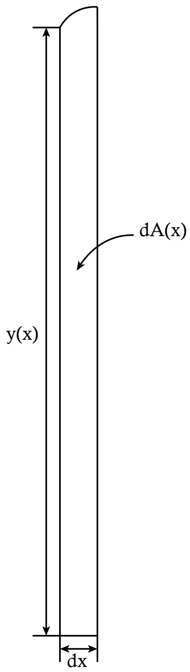

Fig 2.6

因为 dx 极小，顶端的类似曲边小三角形的部分面积可以完全忽略.

那么 $\mathrm{d}A(x)=y(x)\mathrm{d}x$.

换句话说， $y(x)$ 是函数 $A(x)$ 的变化率，也可以写成导数形式，即:

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}=y(x)$$

这就是微积分基本定理，利用这个定理，我们可以轻松解决基本问题 ② 和 ③ :

因为:

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}=y(x)$$

那么求 $A(x)$ 即对 $\mathrm{d}A(x)=y(x)\mathrm{d}x$ 求和

我们把这一过程写作:

$$A(x)=\int_0^x \mathrm{d}A(x)=\int_0^x y(x)\mathrm{d}x$$

其中，符号" $\int$ "是积分号，表示极小量求和． $\int_0^x$ 表示从 0 到 x 的 $\mathrm{d}A(x)$ 的和，实际上

$$A(x_{12})=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\mathrm{d}x=A(x_2)-A(x_1)$$

这就是面积问题的解决方法.

至于反向问题，从前面的推导，我们知道， $y(x)$ 就是 $A(x)$ 的导函数．所以，已知一条曲线各处斜率，求原函数，我们只需对已知的斜率函数求积分即可．积分的简单计算也要依照这个找原函数的技巧，即不定积分的结果就是原函数．至此，微积分学的三大基本问题被全部解决.

三、微分拓展：泰勒级数展开[10.]

通过已学过的数学知识，我们知道：三维空间内，任意一个向量可以写成这样的形式：

$$\vec{v}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

其中 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 是空间的一组基底.

希尔伯特（Hilbert）将其推广到了无限维欧几里得空间，我们称之为**希尔伯特空间** $\mathscr{H}$.

泰勒将这一概念拓展到函数领域，他说：类似地，可以把任意函数分解成这样的形式：

$$y(x)=A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+\cdots+A_nx^n+\cdots$$

以 $(x^0,x^1,x^2,x^3,\ldots)$ 为基底，所有的 $A_n\ (n\in\mathbb{N})$ 一定是某个常数

我们把上式简写为

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$$

那么对于任意函数，我们只需要求出 $A_n\ (n\in\mathbb{N})$ ，这个函数即可确定.

如何求出这些常系数呢?

首先，将 $x=0$ 代入上式，有:

$$y(0)=A_0$$

这样我们得到了 A_0 .

我们观察到，函数右边部分是幂函数的加和，而对于 $y=x^n$ ，其导数 $y'(x)=nx^{n-1}$ ，相当于降了一次幂.

那么，我们可以这样求解 A_1 ：

对原式求一次导，

$$y'(x)=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots$$

再次取x = 0．我们有：

$$y'(0)=A_1$$

重复以上操作，可以依次得到：

$$A_2=\frac{1}{2}y''(0) \qquad A_3=\frac{1}{3\times 2}y'''(0) \qquad A_4=\frac{1}{4\times 3\times 2}y^{(4)}(0)$$

写出通式：

$$A_n=\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)$$

y 右上方的 $^{(n)}$ 表示对 y 进行 n 次求导， $n!$ 表示**阶乘**：

$$n!=\prod_{i=1}^{n} i=n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1$$

特别地， $0!=1$ ．由此，我们可以将以上函数写成这样的形式：

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

这就是**泰勒级数展开**.

下面来看一道例题：

问题六 试用泰勒级数展开证明：当 x 极小时，存在以下关系：

$$(1\pm x)^n=1\pm nx$$

解：设函数 $f(x)=(1\pm x)^n$ ，计算其常系数.

由 $A_n=\frac{1}{n!}y^{(n)}(0)$ 得:

$$A_0=y(0)=1$$
$$A_1=y'(0)=n(1\pm x)^{n-1}|_{x=0}=n$$
$$A_2=\frac{1}{2}y''(0)=\frac{1}{2}n(n-1)(1\pm x)^{n-2}|_{x=0}=\frac{1}{2}n(n-1)$$
$$\cdots$$

由此类推： $f(x)=1\pm nx\pm\frac{1}{2}n(n-1)\pm\cdots$

$\because x$ 为极小量，

$\therefore x^2$ 及以后都是高阶小量，可以忽略

$\therefore f(x)=(1\pm x)^n=1\pm nx$.

证毕，这个关系被广泛应用于物理学问题.

四、小结

微积分学是一门高深的学问，它囊括了世间万物的运行规律．本文仅作为一篇科普性质的文章向读者介绍微积分学的简单内容．如有必要，在之后数期刊物上，将更加深入地介绍这一学科的内容．如洛必达法则，傅里叶级数展开，罗尔中值定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理等．一个人总是要学点微积分的，毕竟它是“上帝的语言！”.

- ## 引用与注释

（包含书目推荐）

引言

1. "*It's the language God talks*":

   Wouk, *The language God Talks*, p.5.

2. *Isaac Newton*:

    - For biographical information, see Gleik, *Isaac Newton*.

      See also Westfall, *Never at Rest*;

      and I.B.Cohen, "Isaac Newton", in vol.10 of Gillispie, *Complete Dictionary of Scientific Biography*, with amendments by G.E. Smith and W.Newman in vol.23.

    - For Newton's mathematics, see Whiteside, *The Mathematical Papers*, vols.1 & 2;

      Edwards, *The Historical Development*; Grattan-Guinness, *From the Calculus*;

      Rickey, "Isaac Newton";

      Dunham, *Journey Through Genius*;

      Katz, *History of Mathematics*;

      Guicciardini, *Reading the Principia*;

      Dunham, *The Calculus Gallery*;

      Simmons, *Calculus Gems*;

      Guicciardini, *Isaac Newton*;

      Stillwell, *Mathematics and its History*;

      and Burton, *History of Mathematics*.

3. *René Descartes*:

    - For his life, see Clarke, *Descartes*;

      Simmons, *Calculus Gems* pp.84-92;

      and Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia* pp.106-108.

    - For summaries of his math and physics intended for general readers, see Kline, *Mathematics in Western Culture*, pp.159-181;

      Edwards, *The Historical Development*;

      Katz, *History of Mathematics*, sections 11.1 & 12.1;

and Burton, *History of Mathematics*, section 8.2.

   - For a scholarly historical treatment of his work in mathematics and physics, see Michael S. Mahoney, "Descartes: Mathematics and Physics," in Gillispie, *Complete Dictionary of Scientific Biography*;

     also online at *Encyclopedia Britannica*, https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/decartes-mathematics-and-physics .

4. *Pierre de Fermat*:

   Mahoney, *Mathematics Career*, is the definitive treatment;

   Simmons, *Calculus Gems*, pp.96-105, is brisk and entertaining about Fermat (just as the author was with everything he writes. If you haven't read Simmons, you must).

5. *Fermat and Descartes locked horns*:

   Mahoney, *Mathematical Career*, ch.4.

6. *Three Main Questions*:

   Steven Strogatz, *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe* ch.6, p.176.

一、微分

7. Que, Notes of the Earth Science.

二、积分

8. *Quadrature of the Parabola*:

   A translation of Archimedes's original text is in Heath, *The Works of Archimedes*, pp.233-252.

   - For the details I glossed over in the triangular-shard argument,see Edwards, *The Historical Development*, pp.35-39;

     Stein, Archimedes, ch.7;

     Laubenbacher and Pengelley, *Mathematical Expeditions*, section 3.2;

     and Stillwell, *Mathematics and its History*, section 4.4.

There are also many treatments available on the internet. One of the clearest is by Mark Reeder at https://www.bc.edu/mark-reeder/1103quadparas.pdf .

Another is by R.A.G. Seely at https://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf .

As an alternative, Simmons, *Calculus Gems*, section B.3, uses an analytic geometry approach that you may find easier to follow.

9. For this imaginative statement of fundamental theorem of calculus, see Steven Strogatz, *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*, ch.7, p.210.

三、微分拓展：泰勒级数展开

10. The original of this part can be seen at 郑琦，《强基计划物理一本通：给高中物理加点难度（上册）》，中国科学技术大学出版社，第1.6章.