妙话均值不等式——“1”的另一种妙用

by 25届-韶华寻梦

需要的前置知识储备：基本不等式

在必修1第2章，我们学习过**基本不等式**：

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a,b>0,\ eq. \iff a=b) \tag{1}$$

（$eq.$，取等；iff（ $\iff$ ），当且仅当）．

此处我们不加证明地指出其原始形式——**均值不等式**：

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad (a_i>0,\ eq. \iff a_1=a_2=\cdots=a_n) \tag{2}$$

这里：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

我们也都学习过“1”的妙用，如下例：

引例　$a,b>0$，$a+2b=1$，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值.

解

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) &= (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+2b) \\
&= 1+2+\frac{a}{b}+\frac{2b}{a} \\
&\geq 3+2\sqrt{2}\ \ (eq.\iff \frac{a}{b}=\frac{2b}{a})
\end{aligned}
$$

故原式最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

相信这个技巧是同学们熟悉的.

下面我们给出几道题目，介绍"1"的另几种妙用.

例1　$m,n\in\mathbb{Z}$ ，$1<m<n$. 证明：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

证明

$$
\begin{aligned}
(1+n)^m &= \underbrace{(1+n)(1+n)\cdots(1+n)}_{m}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}_{n-m} \\
&\leq \Big(\frac{m(1+n)+(n-m)}{n}\Big)^n \\
&= (1+m)^n
\end{aligned}
$$

$$eq.\iff 1+n=1\text{，显然不可能成立.}$$

$$\therefore (1+n)^m<(1+m)^n,\Box.$$

本例中，"1"作为"占位符"出现，配凑出我们需要的次数.

例2　$n\in\mathbb{Z}$. 证明：$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$.

仿照上例显然，读者自证不难．我们将在文末给出本题的证明过程.

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}_{n-2}} \\
&\le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}}+1 \ \ (eq.\iff\sqrt{n}=1)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \sqrt[n]{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1
$$

当 n 无穷大时，$\frac{2}{\sqrt{n}}$ 无限趋近于 0，可忽略不计.

$$
\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\square.
$$

本例意在让同学们感受此处“1”的用法，严格意义上，这里的证明是有瑕疵的．望各位大佬海涵.

至此正文结束（撒花！），下面是第二题的证明过程：

证明

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})\cdot 1 \\
&\le \big(\frac{n(1+n)+1}{n+1}\big)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}
\end{aligned}
$$

$eq.\iff 1+\frac{1}{n}=1$，显然不可能成立.

$$
\therefore (1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1},\square.
$$