

如何深入浅出地讲解Maxwell方程组？

by 研研仔 (答主) - 知乎

original link <https://www.zhihu.com/question/36766702/answer/70426471>

题主：如何尽可能使用形象朴素的语言讲解麦克斯方程组。微积分可以不做深入解释，但是尽可能使用高中知识解释方程组的推导及其物理意义？

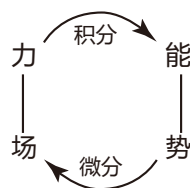
答主：题主简直坑爹。不讲微积分怎么给你讲麦克斯韦方程组？你不知道麦克斯韦方程组里面每个方程都是一个积分或者微分么？？那既然这样，我只能躲躲闪闪，不细谈任何具体的推导和数学关系，纯粹挥挥手扯扯淡地说一说电磁学里的概念和思想。

1. 力、能、场、势

经典物理研究的一个重要对象就是**力**force。比如牛顿力学的核心就是 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 这个公式，剩下的什么平抛圆周简谐运动都可以用这货加上微积分推出来。但是力有一点不好，它是个**向量**vector（既有大小又有方向），所以即便是简单的受力分析，想解出运动方程却难得要死。很多时候，从能量的角度出发反而问题会变得简单很多。**能量**energy说到底就是力在空间上的积分（能量=功=力×距离），所以和力是有紧密联系的，而且能量是个**标量**scalar，加减乘除十分方便。分析力学中的拉格朗日力学和哈密顿力学就绕开了力，从能量出发，算运动方程比牛顿力学要简便得多。

在电磁学里，我们通过力定义出了**场**field的概念。我们注意到洛伦兹力总有着 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的形式，具体不谈，单看这个公式就会发现力和电荷（或电荷×速度）成正比。那么我们便可以刨去电荷（或电荷×速度）的部分，仅仅看剩下的这个“系数”有着怎样的动力学性质。也就是说，场是某种遍布在空间中的东西，当电荷置于场中时便会受力。具体到两个电荷间的库仑力的例子，就可以理解为一个电荷制造了电场，而另一个电荷在这个电场中受到了力，反之亦然。类似地我们也可以对能量做相同的事情，刨去能量中的电荷（或电荷×速度），剩下的部分便是**势**potential。

一张图表明关系：



具体需要指出，这里的电场（标为 \mathbf{E} ）和磁场（标为 \mathbf{B} ）都是向量场，也就是说空间中每一个点都对应着一个向量。如果我们把 x, y, z 三个分量分开来看的话，这就是三个标量场。而能量和势是标量（电磁学中的势其实并不是标量，原因马上揭晓），放到空间中也就是一个标量场。在力/场和能量/势之间互相转化的时候，我们是在三 \leftrightarrow 一个标量场之间转化，必然有一些信息是丢掉了的。怎么办？

一个显而易见的答案是**保守力场**conservative force field。在这样一个场中，能量（做功）不取决于你选择什么样的路径。打个比方，你爬一座山，无论选择什么路径，只要起点和终点一样，那么垂直方向上的差别都是一样的，做的功也一样多。在这种情况下，我们对力场有了诸多限制，也就是说，我假如知道了一个保守力场的 x 一个分量，那么另两个分量 y, z 就随之确定了，我没得选（自由度其实只有一个标量场）。有了保守力场这样的额外限制，向量场 \mathbf{F} （三个标量场）和（一个）标量场 V 之间的转化便不会失去信息了。具体而言，二者关系可以写作 $\mathbf{F} = -\nabla V$ 。这里不说具体细节，你只要知道 ∇ 是一种固定的、把一个标量场变成三个标量场的算法就可以了（叫做**算符operator**）。

那么我们想问，电场和磁场是不是保守力场呢？很不幸，不是。在静电学中，静止的电场是保守的，但在电动力学中，只要有变化的电场和磁场，电场就不是一个保守力场了；而磁场从来都不是保守力场。这也就是说明，在电磁学中，我们很少涉及能量这个概念，因为它不能完整地描述一个电磁场。我们更多时候只关注“场”这个概念，尽管因此我们不得不涉足很多向量微积分，但我们没有办法，这是不让信息丢掉的唯一办法。那么，既然势也是标量，它是否也是一个没什么用的概念呢？恰恰相反，在电动力学中我们定义出了**向量势**vector potential，以保留额外的自由度。后面我会更具体地谈到这一点。

总而言之，我想说明一点，那就是电磁学的主要研究对象是电场和磁场，而麦克斯韦方程组就是描述电场和磁场的方程。势（包括电势和磁向量势）也是有用的概念，而且不像引力势是一个标量，在电磁学中势不得不变成一个向量。

2. 麦克斯韦方程组

前边说到，**麦克斯韦方程组**Maxwell equations是描述电场和磁场的方程。前边也说到，因为电磁场不是保守力场，它们有三个标量场的自由度，所以我们必须用向量微积分来描述电磁场。因此，麦克斯韦方程组每个式子都出现了向量微积分，而整个方程组也有**积分形式**和**微分形式**两种。这两种形式是完全等价的，只是两种不同的写法。这里我先全部写出。

积分形式：

$$(1-1) \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

$$(1-2) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$(1-3) \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$(1-4) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

微分形式：

$$(2-1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(2-2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$(2-3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(2-4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

这里 \mathbf{E} 表示电场， \mathbf{B} 表示磁场， ϵ_0 和 μ_0 只是两个常数暂时可以忽略。积分形式中 Q 是电荷， I 是电流， V 表示一块体积， ∂V 表示它的表面，而 S 表示一块曲面， ∂S 表示它的边缘。微分形式中 ρ 是电荷密度（电荷/体积）， \mathbf{J} 是电流密度（电流/面积）， $\nabla \cdot$ 和 $\nabla \times$ 是两个不同的算符，基本可以理解为对向量的某种微分。

先不说任何细节，我们可以观察一下等式的左边。四个方程中，两个是关于电场 \mathbf{E} 的，两个是关于磁场 \mathbf{B} 的；两个是曲面积分 $\int \cdots d\mathbf{a}$ 或者散度 $\nabla \cdot$ ，两个是曲线积分 $\int \cdots d\mathbf{l}$ 或者旋度 $\nabla \times$ 。不要管这些术语都是什么意思，我后面会讲到。但光看等式左边，我们就能看出四个式子分别描述电场和磁场的两个东西，非常对称。

3. 电荷->电场，电流->磁场

这一部分和下一部分中，我来简单讲解四个式子分别代表什么意思，而不涉及任何定量和具体的计算。

我们从两个电荷之间的库仑力讲起。**库仑定律**Coulomb's Law是电学中大家接触到的最早的定律，有如下形式：

$$(3) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

其中 Q 是电荷， r 是电荷之间的距离， $\hat{\mathbf{r}}$ 是表示方向的单位向量。像我之前说的，把其中一个电荷当作来源，然后刨去另一个电荷，就可以得到电场的表达式。

高中里应该还学过**安培定律**Ampere's Law，也就是电流产生磁场的定律。虽然没有学过具体表达式，但我们已经能看出它与库仑定律之间的区别。库仑定律描述了“两个”微小来源（电荷）之间的“力”，而安培定律是描述了“一个”来源（电流）产生的“场”。事实上，电磁学中也有磁场版本的库仑定律，描述了两个微小电流之间的力，叫做**毕奥-萨伐尔定律**Biot-Savart Law；反之，也有电场版本的安培定律，描述了一个电荷产生的磁场，叫做**高斯定律**Gauss's Law。这四个定律之间有如下关系：

\	电场	磁场
两个微小来源之间的力	库仑定律	毕奥-萨伐尔定律
单个来源产生的场	高斯定律	安培定律

数学上可以证明库仑定律（毕奥-萨伐尔定律）和高斯定律（安培定律）在静电学（静磁学）中是完全等价的，也就是说我们可以任意假设一个定律，从而推导出另一个定律。然而如果我们想从静止的静电学和静磁学推广到电动力学，前者是非常不便的而后者很却容易，所以尽管库仑定律在中学中常常提到，麦克斯韦方程组中却没有它，有的是高斯定律和安培定律。这两个定律分别是麦克斯韦方程组里的(1)和(4)的第一项，即：

高斯定律（积分、微分形式）：

$$(4-1) \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

$$(4-2) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

安培定律（积分、微分形式）：

$$(5-1) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S$$

$$(5-2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

我们继续推迟讲解数学关系，单看这几个式子本身，就能看到等式的左边有电场 \mathbf{E} （磁场 \mathbf{B} ），而右边有电荷 Q （电流 I ）或电荷密度 ρ （电流密度 \mathbf{J} ）。看，**电荷产生电场，电流产生磁场！**

4. 变化磁场->电场，变化磁场->电场

然而这不是故事的全部，因为事实上电磁场是可以互相转化的。法拉第发现了电磁感应，也就是说变化的磁场是可以产生电场的，这就是**法拉第定律**Faraday's Law。类似地，麦克斯韦发现安培定律的描述并不完善，除了电流以外，变化的电场也可以产生磁场，这被称为**安培-麦克斯韦定律**Ampere-Maxwell Law。这两个定律分别是麦克斯韦方程组里的(2)和(4)的第二项，即：

法拉第定律（积分、微分形式）：

$$(6-1) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$(6-2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

安培-麦克斯韦定律（积分、微分形式）：

$$(7-1) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

$$(7-2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

同样地，等式的左边有电场 \mathbf{E} （磁场 \mathbf{B} ），而右边有磁场 \mathbf{B} （电场 \mathbf{E} ）的导数 $\frac{d}{dt}$ 或偏导 $\frac{\partial}{\partial t}$ 。看，**变化磁场产生电场，变化电场产生磁场**！

需要指出的是，我这样的说法其实是不准确的，因为并不是真的某一个场“产生”的另一个场。这两个定律只是描述了电场（磁场）和磁场（电场）的变化率之间的定量关系，而不是因果关系。

小结一下，我们已经搞清楚了麦克斯韦方程组里每一项的意思，基本就是指出了电磁场的来源和变化电磁场的定量关系。下一步便是往我们这些粗浅的理解中加入数学，具体看看这些方程到底说了什么。在这之前，我们必须花一点时间了解一下向量微积分的皮毛。

5. 向量积分

普通的单变量微积分基本可以理解为乘法的一种拓展。我们想计算一个矩形的面积，我们用长 x 乘宽 y ，即 xy 。如果宽不是一个定值而是根据长而变化的（也就是说宽是一个长的函数，即宽 $= y(x)$ ），那么我们就需要积分，记为 $\int y(x) dx$ 。这样的想法也很容易推广到更高的维度，比如在一块体积 V 内，若电荷密度为 ρ ，那么这块体积内的总电荷就是 $Q = \rho V$ ；如果 ρ 在空间中每一点都不一样，是个关于坐标的函数 $\rho(\mathbf{x})$ ，那么就要变成积分 $Q = \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$ （这里 \iiint 表示是一个三维的积分，很多时候也可以省略写为一个 \int ）。

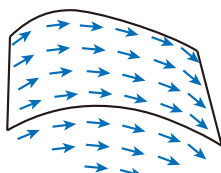
在向量场中，这个事情比较麻烦。首先两个向量的乘积的定义稍显复杂，必须使用**点乘dot product**，即 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ，它暗示着两个向量之间的角度，也就是有多么平行。如果 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 完全平行，它们的点乘是一个正值；如果方向相反，则是一个负值；如果垂直，那么为 0。另一方面，我们不一定非要像上一个电荷的例子一样积上整个体积 V ，我们可以只积一个曲面 S 或者一条曲线 γ 。这就是所谓的曲面积分和曲线积分的概念。

曲面积分surface integral有如下形式：

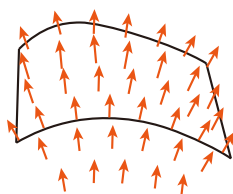
$$(8) \quad \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

其中 S 表示我们需要积的曲面， \mathbf{F} 是我们想要积的向量场， \cdot 代表点乘， \mathbf{a} 指向垂直于 S 的方向。因此，我们看到，如果 \mathbf{F} 和 S 是平行的，那么点乘处处得 0，这个曲面积分也为 0。换句话说，**曲面积分表示着向量场 \mathbf{F} 穿过曲面 S 的程度**，因此也很形象地叫做**通量flux**。下图为两个简单的例子：

曲面积分（通量）为 0：



曲面积分（通量）不为 0：

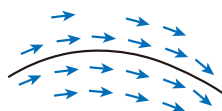


那么**曲线积分line integral**也很类似，只不过我们不积一个曲面 S 而是一个一维的曲线 γ 。它有如下形式：

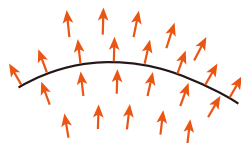
$$(9) \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

其中 γ 表示我们需要积的曲线， \cdot 代表点乘， \mathbf{l} 指向曲线 γ 的方向。不难看出，**曲线积分表示着向量场 \mathbf{F} 沿着曲线 γ 的程度**。下图为两个简单的例子（线——表示曲线 γ ）：

曲线积分不为 0：



曲线积分为 0：



特别地，如果曲线是闭合的（首尾相连的），那么我们可以在积分符号 \oint 上画一个圈，表示闭合，然后这个特殊的曲线积分叫做**环量circulation**，因为是积了一个环嘛。很显然，如果 \mathbf{F} 是个保守力场，那么我随便找一个闭合曲线，做的功都一定为0（这就是保守力场的定义啊），所以**保守力场的任意环量都为0**。最后一提，“环量”这个名字很少使用，一般就直接叫做“闭合曲线的积分”。

定义一个通量所使用的曲面 S 则不一定要是闭合的，任何曲面都可以。如果这个曲面很特殊恰好是闭合的，我们也可以在积分符号 \iint 上画上一个圈，代表闭合，但这个量则没有一个特殊的名字了。

总结如下表：

\	曲面积分	曲线积分
表示向量场	通过曲面	沿着曲线
又叫做	通量	—
若为闭合	—	环量

6. 麦克斯韦方程组的积分形式

我非常不严谨地描述了曲面积分和曲线积分分别是什么。我们回头看看麦克斯韦方程组的积分形式，我们应该都能看懂了。

$$(1-1) \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

$$(1-2) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$(1-3) \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$(1-4) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

(1) **高斯定律**：电场 \mathbf{E} 在闭合曲面 ∂V 上的通量，等于该曲面包裹住的体积 V 内的电荷 Q （乘上系数 $\frac{1}{\epsilon_0}$ ）；

(2) **法拉第定律**：电场 \mathbf{E} 在闭合曲线 ∂S 上的环量，等于磁场 \mathbf{B} 在该曲线环住的曲面 S 上的通量

的变化率（乘上系数 -1 ）；

(3) **高斯磁定律**：磁场 \mathbf{B} 在闭合曲面 ∂V 上的通量，等于 0 ；

(4) **安培麦克斯韦定律**：磁场 \mathbf{B} 在闭合曲线 ∂S 上的环量，等于该曲线环住的曲面 S 里的电流 I （乘上系数 μ_0 ），加上电场 \mathbf{E} 在该曲线环住的曲面 S 上的通量的变化率（乘上系数 $\mu_0 \epsilon_0$ ）。

虽然在我看来，这样的描述已经是非常通俗、没有任何数学了，但对于没有学习过微积分的同学来说，显然还是太晦涩了一点。那么我来举几个例子吧。

(1) 高斯定律：

例子1：假设我们有一个点电荷 Q ，以其为球心作一个球，把这块体积称为 V ，那么 ∂V 就是这个球的表面。这个电荷 Q 产生了一些电场，从中心的 Q 向外发射，显然电场线都穿过了球的表面 ∂V ，所以“闭合曲面 ∂V 的通量”是个正数，不为 0 ，而“该曲面包裹住的电荷”为 Q ，也不为 0 。

例子2：假设我们把电荷 Q 替换为 $-Q$ ，那么所有的电场线方向都反过来了， ∂V 的通量（记得通量中的点乘吗？）也因此获得了一个负号，所以“闭合曲面 ∂V 的通量”变成了负数，而“该曲面包裹住的电荷”为 $-Q$ ，也变成了负数。等式再一次成立。

例子3：假设我们把这个球的半径扩大为原来的 2 倍，这个球的表面积就变成了原来的 4 倍。与此同时，由于库仑力的反比平方定律，由于球表面与球心电荷 Q 的距离变成了原来的 2 倍，在球表面 ∂V 的电场强度也变成了原来的 $1/4$ 。通量（电场和面积的积分）获得一个系数 4 ，又获得一个系数 $1/4$ ，所以“闭合曲面 ∂V 的通量”没有变，而“该曲面包裹住的电荷”显然仍然为 Q ，也没有变。

例子4：事实上，我们随便怎么改变这一块表面积的大小、体积，算出来的通量都不会变（尽管会非常难算），因为等式的右边“该曲面包裹住的电荷”一直都没有变。

例子5：假设我们把电荷移到这个曲面外面，那么电场线会从这个球的一面穿透进去，然后从另一面出来，所以当我们做积分的时候，两个方向的通量抵消了，整个“闭合曲面 ∂V 的通量”为 0 ，而此时我们的曲面没有包裹住任何电荷，所以“该曲面包裹住的电荷”也为 0 。等式成立。

(2) 法拉第定律：

例子6：一圈闭合导线，环住了一块曲面 S ，则记这个曲线的位置为 ∂S ，那么经过 ∂S 的电场 \mathbf{E} 的环量其实就是导线内的电势（电压）。垂直于 S 通过一些磁场 \mathbf{B} ，则通过 S 的磁通量不为 0 。然而此时导线内并没有电流，也就是说，并没有电压，“闭合曲线 ∂S 的环量”为 0 。这是很显然的，因为磁通量并没有变化，没有电磁感应，换句话说，“曲面 S 上的通量的变化率”为 0 。

例子7：这个时候我突然增加磁场，所以磁通量变大了，“磁通量的变化率”为正，不为 0 。因此，等式的左边“闭合曲线 ∂S 的环量”也为正，不为 0 ，也就是说，导线内产生了一些电压，继而产生了一些感应电流。这正是大家熟悉的法拉第电磁感应。

例子8：如果我不是增加磁场，而是减小磁场，那么磁通量变小了，“磁通量的变化率”为负。那么等式左边“闭合曲线 ∂S 的环量”也获得了一个负号，换句话说，感应电流的方向反了过来。

(3) 高斯磁定律：

例子9：随便选择一个闭合曲面，整个表面上的磁通量一定为 0。这和电场的情况迥然不同，因此说明，不像有可以产生电场的“电荷”，这个世界上是没有能单独产生磁场的“磁荷”（也就是“磁单极子”）的（编者注：现代理论认为可能存在磁单极子，但与高斯磁定律并不矛盾）。

(4) 安培-麦克斯韦定律：

例子10：假设我们有一个电流 I ，以其为轴作一个圆，把这个圆称为 S ，那么 ∂S 就是这个圆的边缘。这个电流 I 产生了一些磁场，（按照右手定则）绕着导线。显然磁场线和 ∂S 都是“绕着导线”，方向一致，所以“闭合曲线 ∂S 的环量”是个正数，不为 0，而“该曲线环住的电流”为 I ，也不为 0。

例子11：假设我们改变电流方向，即把 I 变成 $-I$ ，那么所有的磁场线方向都反过来了， ∂S 的环量也因此获得了一个负号，所以“闭合曲线 ∂S 的环量”和“该曲线环住的电流”均获得一个负号。等式再一次成立。

例子12：和高斯定律很像，我们随便怎么改变这一个环的大小、面积，只要环住的电流不变，算出来的环量都不会变（尽管可能会非常难算）。而若电流在这个环外面，尽管仍然有磁场存在，但在计算环量时相互抵消，使得等式两边都变成 0。

例子13：“变化的电场产生磁场”（即第二项）的例子非常难找，这也正是安培当年没有自己发现、非要等到麦克斯韦帮忙才发现的原因。我这里不妨不再细述，读者只要接受这个设定就好。有兴趣的读者可以自己思考一个这种情况的例子。

最后，还记得我们之前说过“保守力场的任意环量都为 0”吗？显然，要想让磁场的环量为 0，那就只能既没有电流（方程(4)中的第一项），也没有变化的电通量（第二项），那么磁场只能为 0。换言之，任何磁场都不是保守力场。想让电场的环量为 0 还比较简单，只需要令磁通量不变（方程(2)）就好了。换言之，只有在静电学（电磁场均静止不变）中，静电场才是保守力场。

7. 向量微分

麦克斯韦方程组描述了所有的电磁现象，从每个方程的名字也可以看出，方程组总结、整合了前人（库伦、高斯、安培、法拉第等）发现的各种现象和其方程（在麦克斯韦以前这样的方程可能有数十个），而麦克斯韦把它们总结归纳到了一起，用短短四个公式涵盖了所有现象，非常了不起。然而平心而论，积分形式仍然显得颇为繁琐，原因有二：1. 积分是很难算的，虽然每一个方程的左右两边都必然相等，但随便给你一个场和一个曲面/曲线，想把左侧的积分算出来极为困难；2. 也正因为如此，我们尽管有可以描述电磁场的方程，但给定一个特定的来源（比如天线中一个来回摇摆

的电荷)，我们想算出具体的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 也是极为困难，因为我们只知道 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在某个特殊曲面/曲线上的积分。

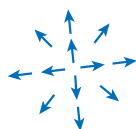
这就是微分形式的好处。首先，计算一个给定向量场的微分（散度和旋度）是很简单的，只要使用之前提到过的 $\nabla \cdot$ 和 $\nabla \times$ 算符就好，而这两个算符都有一套固定的算法。其次，散度和旋度代表着一个向量场的两种不同的自由度，有着非常直接的几何意义，从这两个量中恢复出向量场也是比较直观的过程。当然，我们又需要再准备一些向量微积分的知识，其中的重点就是散度和旋度。

散度divergence，顾名思义，是指一个向量场发散的**程度**。一个向量场 \mathbf{F} 的散度是一个标量场（向量场的每一点有一个自己的散度），写作 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ （这个写法也很直白，因为点乘就是标量）。如果一个点的散度为正，那么在这一点上 \mathbf{F} 有向外发散的**趋势**；如果为负，那么在这一点上 \mathbf{F} 有向内收敛的**趋势**。

旋度curl则指一个向量场**旋转的程度**。一个向量场 \mathbf{F} 的旋度是一个向量场（向量场的每一点有一个自己的旋度，而且是一个向量；这是因为旋转的方向需要标明出来），写作 $\nabla \times \mathbf{F}$ （这个写法也很直白，因为叉乘就是向量）。如果一个点的旋度不为0，那么在这一点上 \mathbf{F} 有**漩涡的趋势**，而这个旋度的方向表明了旋转的方向。

举些例子，以下是两个向量场的例子。其中第一个向量场往外发散，但完全没有旋转扭曲的趋势；第二个向量场形成了一个标准的漩涡，但没有任何箭头在往外或往里指，没有发散或收敛的趋势。

散度不为0、但旋度为0的向量场：



旋度不为0、但散度为0的向量场：



因此，如你所见，散度和旋度描述的都是非常直观的几何性质。只要知道一个向量场的散度和旋度，我们就可以唯一确定这个向量场本身（这是亥姆霍兹定理，我要是有兴致可以以后简单谈谈）。

麦克斯韦方程组的微分形式，就是要描述电磁场的散度和旋度。我前边说到，微分形式和积分形式是完全等价的，我很也可以很轻松地从一个形式推导出另一个形式，用的是（不要和高斯定律混淆、又叫散度定理）和斯托克斯定理。

高斯定理Gauss's Theorem: 一个向量场 \mathbf{F} 在闭合曲面 ∂V 上的通量，等于该曲面包裹住的体积 V 里的 \mathbf{F} 全部的散度（ \mathbf{F} 的散度的体积积分）。这是可以想象的，毕竟通量就是在计算有多少场从这个闭合曲面里发散出去了，也就是总共的散度（散度的积分）。

斯托克斯定理Stokes' Theorem: 一个向量场 \mathbf{F} 在闭合曲线 ∂S 上的环量，等于该曲线环住的曲面 S 上的 \mathbf{F} 全部的旋度（ \mathbf{F} 的旋度的曲面积分）。这也是可以想象的，毕竟环量就是在计算有多少场和这个环方向一样（有多少场在沿着这个环旋转），也就是总共的旋度（旋度的积分）。

总结如下表：

\	曲面积分	曲线积分
积分形式	通量	环量
联系	高斯定理	斯托克斯定理
微分形式	散度	旋度

8. 麦克斯韦方程组的微分形式

了解了散度和旋度的概念之后，我们便可以读懂麦克斯韦方程组的微分形式了。

$$(2-1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(2-2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$(2-3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(2-4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

- (1) **高斯定律:** 电场 \mathbf{E} 的散度，等于在该点的电荷密度 ρ （乘上系数 $\frac{1}{\epsilon_0}$ ）；
- (2) **法拉第定律:** 电场 \mathbf{E} 的旋度，等于在该点的磁场 \mathbf{B} 的变化率（乘上系数 -1 ）；
- (3) **高斯磁定律:** 磁场 \mathbf{B} 的散度，等于 0；
- (4) **安培麦克斯韦定律:** 磁场 \mathbf{B} 的旋度，等于在该点的电流密度 \mathbf{J} （乘上系数 μ_0 ），加上在该点的电场 \mathbf{E} 的变化率（乘上系数 $\mu_0 \epsilon_0$ ）。

我们可以看出，电荷和电流对电场和磁场干的事情是不一样的：电荷的作用是给电场贡献一些散度，而电流的作用是给磁场贡献一些旋度。然而变化的电磁场对对方干的事情是一样的，都是给对方贡献一些旋度。

想看一些具体例子的同学要失望了。微分形式的例子比较难举，因为微分形式主要是让计算更加简便，在数学上比较有优势，而应用到具体的现象上则不那么显而易见。不过，至少静电磁场的例子

还是可以举的。比如，我们知道电场线总是从正电荷出发、然后进入负电荷，这正是在说电场的散度在正电荷处为正，在负电荷处为负。再例如我们知道磁场线总是绕着电流，而不会进入或发源于电流，这也就是在说磁场有旋度而一定没有散度。

9. 电磁波

我刚刚提到，微分形式的主要好处是数学上处理起来很简便，我现在就给一个例子，也就是著名的光速。想象我们在真空中，周围什么都没有。这个时候，显然电荷密度和电流密度均为0，所以麦克斯韦方程组的微分形式变成了：

$$(12-1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(12-2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$(12-3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$(12-4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

这四个公式简直太对称了！而且它们的含义也很清晰，基本就是说，变化的电场产生磁场，而变化的磁场产生电场。这就是**电磁波**electromagnetic wave的方程，电磁波也就是电场和磁场此消彼长、相互转化、向前传播的形式。

想要具体解出这个方程的解，还是需要玩儿一会儿微积分的，但是我们注意到两个式子分别有系数 -1 和 $\mu_0 \epsilon_0$ 。如果你了解波动方程的话，从这两个系数就可以算出这个波传播的速度，为

$$(13) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

然而！ μ_0 和 ϵ_0 这两个常数是真空的性质（分别叫做**真空电容率**vacuum permittivity和**真空磁导率**vacuum permeability），是个定值。换句话说，**电磁波传播的速度（光速）也是一个定值！**也就是说，在任何参考系里观察，光速都应该是一样的 c ！这根据伽利略速度相加原理是不可能的（静止的你认为火车的速度是 $50m/s$ ，那么如果你以 $1m/s$ 的速度往前走你就会认为火车的速度只有 $49m/s$ ，显然不会仍然是 $50m/s$ ），但是电磁学却实实在在地告诉我们光速是不会变的。呐，这就是相对论的由来了。

10. 方向性

可能有同学已经发现，我们的讨论中似乎忽略了很重要的一部分就是方向性。毕竟初高中学电磁的时候，出现了各种左手、右手定则（插一句，请一定一定忘掉左手定则，使用左手简直反人类，在正统的向量微积分和电磁学里**只有右手定则**）。在之前对于麦克斯韦方程组的诠释中，我们似乎很少提及方向。麦克斯韦方程组描述了方向性吗？

答案是肯定的。方向或者说手性（为什么是“右手”定则而不是“左手”定则？）来自于叉乘的定义和面积的向量微分元素的定义。我们定义叉乘 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 是一个向量，指的方向是垂直于 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的方向；但显然有两个不同的方向均满足这个条件，而我们选择了其中特定的一个，把选择的这个规则叫做“右手定则”。类似地，一个曲面 S 也有两个方向（即其微分元素 $d\mathbf{a}$ 是向量）。注意到曲线积分也是有方向性的（即其微分元素 $d\mathbf{l}$ 也是向量），因此我们把 S 的 $d\mathbf{a}$ 和 ∂S 的 $d\mathbf{l}$ 联系起来，这个联系的规则也叫做“右手定则”。

上面这些情况中，选择“右手”是非常随意的；原则上我也可以全部选择左手，那么我得到的数学体系和原来的是完全等价的。当然，磁场 \mathbf{B} 会和原来的磁场指的方向完全相反，但是没有关系，因为我们又不能直接看到磁场，所有的定律的手性都变了之后，描述的物理是不变的。但是，选择右手是约定俗成的，也就没必要再纠结为什么了。

11. 梯度、二次导数

我在之前说到保守力场的时候，偷偷塞进来过这样一个式子： $\mathbf{F} = -\nabla V$ 。这里 \mathbf{F} 是个向量场， V 是个标量场。我们看到，这个神奇的倒三角不但可以表示散度（把向量变成标量）和旋度（把向量变成向量），还可以这样把一个标量场变成一个向量场！数学上这个倒三角叫Nabla算符，而 ∇V 叫做一个标量场 V 的梯度。

什么叫做梯度呢？其实相比于散度和旋度，这应该是更加熟悉的概念。**梯度gradient就是一个标量场变化的程度**。我们可以把一个标量场想象成一个山坡，每一点的梯度是一个向量，指的方向是上坡的方向，大小则是坡的陡峭程度。

总结一下我们见到的三种向量微分吧：

\	梯度	散度	旋度	
作用在一个	标量	向量	向量	场上
表示这个场	变化	发散	旋转	的程度
得到一个	向量	标量	向量	场
写作	∇V	$\nabla \cdot \mathbf{F}$	$\nabla \times \mathbf{F}$	

于是从 $\mathbf{F} = -\nabla V$ 这个公式我们看到，保守力场（比如引力场）可以表示为某个标量场（比如引力势能）的梯度。之前说过，保守力场的环量/旋度一定为 0。这也就是说，梯度的旋度一定为 0。这是可以想象的，梯度指的是上坡的方向，而如果它有旋度，就意味着它们的指向可以形成的一个环，在这个环上可以一直上坡。这就像彭罗斯楼梯，是不可能的情形。

还有一个类似的定理，是说旋度的散度一定为 0。我们也来想一下几何上这意味着什么。如果旋度有散度，就意味着在某个球上散度都在往球外指，也就意味着在球上每个点这个场都是逆时针旋转

的。想想也知道这是不可能的。所以我们得到了两个重要的结论：

1. 任意标量场 V 的梯度 ∇V 都是没有旋度的，也就是 $\nabla \times (\nabla V) = 0$ ； 2. 任意向量场 \mathbf{F} 的旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 都是没有散度的，也就是 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ 。

我说过，这些“X度”都可以认为是场的一种微分，那么这些“X度的X度”就可以认为是二次导数了。我们看到，有两种二次导数都自动为0，不必我们深究。还有一种二次导数也很有名，也就是梯度的散度，它甚至有了一个专门的花哨的名字，叫**拉普拉斯算符Laplacian**。在此我不作展开，大家只要知道它挺重要的就行。

12. 电荷守恒

从麦克斯韦方程组中可以直接推出电荷守恒。这个推导十分简单，且颇为有趣，可以让大家看到向量微积分的方便之处，我就简要写一下：

首先我们有安培-麦克斯韦定律：

$$(14-1) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

两边同时取散度：

$$(14-2) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right)$$

注意到左边是磁场的旋度的散度，而旋度的散度一定为0，故左边为0。右边交换散度和时间导数，并约掉 μ_0 ，得：

$$(14-3) \quad 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

使用高斯定律：

$$(14-4) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

代入原式，约掉 ϵ_0 ，得：

$$(14-5) \quad 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

这个就是电荷守恒的公式。用语言说，就是**电流密度的散度加上电荷密度的变化率一定为0**。如果这比较抽象，我们可以对两项同时体积积分，再对 \mathbf{J} 那项使用高斯定理变成面积积分，则结论变成：

一块体积 V 内的电荷的变化率加上通过表面 ∂V 的电流一定为0。

举个栗子，如果一块体积内的电荷 Q 变少了，其变化率为负，根据上述结论，通过表面的电流一定为正，也就是说有电流从这块体积内流出去了。这就是非常明显的电荷守恒了，给出了电荷和电流的关系，这个公式也叫**连续性方程**continuity equation。连续性方程在流体力学里十分重要，甚至在量子力学里的概率也遵守这个方程（电荷->概率，电流->概率流）。

13. 电势、磁向量势

我之前提到过，知道了一个向量场的散度和旋度，就能解出这个向量场。毕竟散度和旋度描述了一个向量场在空间中每一点发散和旋转的趋势，还能漏掉什么几何性质呢？（这个说法不准确，因为需要有**边界条件**boundary conditions。但是我们忽略这些细节，假定边界条件一直很棒，不必烦神）于是，可以想象，我们可以把任意一个向量场 \mathbf{F} 拆成两部分，第一部分只有散度没有旋度，第二部分只有旋度没有散度，然后 \mathbf{F} 就是这两个部分加在一起（这就是**亥姆霍兹定理**Helmholtz theorem）。比如静电场没有旋度，那它就只有第一部分、第二部分就为 0；磁场没有散度，则只有第二部分、第一部分为 0。

注意到第11部分我提到，梯度的旋度总是为 0，而旋度的散度总是为 0。因此，我们可以把没有旋度的第一部分写作某个标量场 $\tilde{\Phi}$ 的梯度（这样它就自动没有旋度了），然后把第二部分写作某个向量场 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的旋度（这样它就自动没有散度了）。也就是说，我们可以把任意一个向量场 \mathbf{F} 写成：

$$(15) \quad \mathbf{F} = -\nabla\tilde{\Phi} + \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$$

其中负号不重要只是个习惯， $\tilde{\Phi}$ 是个标量场叫做**标量势**或者就简称**势**potential， $\tilde{\mathbf{A}}$ 是个向量场叫做**向量势**vector potential。叫它们“势”的原因是我们对它微分（梯度或旋度）就可以得到我们想要的场，符合我们一般的习惯。

在引力场和静电场这种保守力场中，旋度是 0，于是第二部分 $\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$ 也为 0，这就是我们以前没见过“向量势” $\tilde{\mathbf{A}}$ 的原因。但是现在我们看到，在讨论更一般的场的时候，我们必须加入这个向量势 $\tilde{\mathbf{A}}$ ，来描述这个场的旋度。

在电磁学中，我们专门地把电场 \mathbf{E} 的标量势 Φ 叫做**电势**electric potential，把磁场 \mathbf{B} 的向量势 \mathbf{A} 叫做**磁向量势**magnetic vector potential或简称**磁势**。注意到磁场没有标量势，而电场的向量势可以用磁向量势表达出来（利用法拉第定律），所以我们省了一个变量。那么根据这个定义，电场和磁场就变成了：

$$(16-1) \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$$

$$(16-2) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

我们甚至可以把这两个式子看成是**电场和磁场的定义**，而把电势和磁向量势看作是**更基本**的物理量。

有的同学现在可能非常地不爽：电场和磁场已经够绕的了，为什么要引入这么两个新的场？还加入了这么多新的微分？什么梯度旋度看得我头都晕了！现在我来列举好处：

1. 减少了自由度。电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 都是向量场，也就意味着总共有 $3 + 3 = 6$ 个标量场的自由度。而电势 Φ 和磁势 \mathbf{A} 一个是标量场一个是向量场，只有 $1 + 3 = 4$ 个自由度。这就意味着用电场和磁场来描述电磁场的状态时，有冗余的信息（用电势和磁势来描述的话，也会有冗余的信息，没办法，但能减少一些自由度总是好的）。
2. 减少了麦克斯韦方程组的方程数量。电场和磁场有更多的自由度，也就意味着必须要有更多的方程来约束它们。事实上，麦克斯韦方程组里的法拉第定律和高斯磁定律正是用来约束电磁场的自由度的，因为你看，它们俩不涉及来源（电荷与电流），只是说明了电场和磁场之间的相互关系，换句话说，就是**恒等式**identities。而使用电势和磁势之后，电场和磁场的定义（公式(16)）直接**保证**了这两个恒等式必然成立，我们便可以把它们踢出麦克斯韦方程组，从而只剩下两个方程。
3. 可以组成有四个分量的**四维向量**four dimensional vectors，即电势加三个磁势。对相对论比较熟悉的同学可能知道，电磁学和相对论是完全相容的，而相对论里全都是四维向量（时间+三个空间、能量+三个动量、如此等等）。引入这样的形式可以让相对论和电动力学结合得更加紧密。

S1. 附录：省略掉的各种公式和定义

库仑定律：

$$(S1) \quad d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

毕奥-萨伐尔定律：

$$(S2) \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Nabla算符：

$$(S3) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

梯度：

$$(S4) \quad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

散度：

$$(S5) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

旋度：

$$(S6) \quad \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

高斯定理：

$$(S7) \quad \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$$

斯托克斯定理：

$$(S8) \quad \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$$

真空中的电磁波：

$$(S9) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

任意规范的势的麦克斯韦方程组：

$$(S10-1) \quad \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(S10-2) \quad \square \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) = \mu_0 \mathbf{J}$$