f תבנית סימטרית

V מ"ו ממימד סופי מעל F. f תבנית סימטרית על V. $W\subseteq V$ ת"מ. הגדרנו $W^{\perp}=\{v\in V\,:\,f(v,w)=0\,\forall w\in W\}$. ראינו כי $W^{\perp}$ תמ"ו של V.

כמו כן

$$W\subseteq W^{\perp^{\perp}}$$

$$U\subseteq W\Rightarrow W^{\perp}\subseteq U^{\perp}$$

דוגמא

$$f(u,v)=u^{t}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}v$$

$W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ אז $f|_{W}=0$.

הערה: תמ"ו $W\subseteq V$ כך ש-$f|_{W}=0$ נקרא תת־מרחב איזוטרופי־לגראנגיאן (ביחס ל־f). ייתכן שמתקיים $W\cap W^{\perp}\neq0$.

אם יש לנו תבנית סימטרית ניתן למצוא עבורה מייצגת אלכסונית.

תבנית ריבועית

V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. f תבנית בילינארית על V. התבנית הריבועית השייכת ל־f היא הפונקציה $q:V\to\mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $q(v)=f(v,v)$.

לדוגמא אם V מרחב אוקלידי עם מ"פ סטנ אזי

$$q(v)=||v||^{2}$$

בדוגמא הקודמת מתקיים $q\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)=2xy$.

אם נגדיר תבנית על R^{2} ע"י $f(u,v)=u^{t}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}v$ אז $q\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=ax^{2}+(b+c)x+bx^{2}$.

$$f(u,v)=u^{t}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}v,g(u,v)=u^{t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}v$$

שתיהן מייצגות אותה תבנית ריבועית.$qudratic\,form$.

$$q\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x^{2}+5xy+y^{2}$$

טענה

קיימת התאמה אחד לאחד בין תבניות בילינאריות סימטריות לבין תבניות ריבועיות.

הוכחה

נגדיר

$$f\left(u,v\right)=\frac{1}{4}\left(q\left(u,v\right)+q\left(u-v\right)\right)=\frac{1}{2}\left(q\left(u,v\right)-q\left(v\right)-q\left(u\right)\right)$$

נראה שהיא בילינארית.

$$\frac{1}{2}\left(f\left(u+v,v+u\right)-f\left(v,u\right)-f\left(u,v\right)\right)$$

(צריך להוכיח שזה מקיים לינאריות)
זו נקראת התבנית הקוטבית (המתאימה ל־q)
<u>משפט</u>
כל תבנית ריבועית נתנת ללכסון
<u>הוכחה</u>
q ריבועית תהי f הסימטרית המתאימה לה.
אם $q=0$ אין מה להוכיח
אחרת קיים $w\in V$ כך ש־ $q\left(w\right)=f\left(w,w\right)\neq0$
נגדיר $W=span\left\{ w\right\}$
טענה: $V=W\oplus W^{\perp}$
לכל $v\in V$

$$v=\frac{f\left(w,v\right)}{f\left(w,w\right)}w+\left[v-\frac{f\left(w,v\right)}{f\left(w,w\right)}w\right]$$